Jacintho Julio Lopes Almeida

COMPENDIO

DE

DESENHO LINEAR

PARA USO

DOS ALUMNOS DOS LYCEUS NACIONAES

POR

THEODORO DA MOTTA

Professor de desenho do lyceu central de Lisboa, etc. etc.

QUARTO ANNO

TEXTO

LISBOA
TYPOGRAPHIA DA VIUVA SOUSA NEVES
65, Rua da Atalaia, 67
1884

O auctor d'este compendio cumpriu todas as formalidades legaes que lhe garantem o seu direito de propriedade, na conformidade da lei de 8 de julho de 1851.

DOS PRINCIPIOS GERAES DE ARCHITECTURA

§ 540. A **architectura** *é a arte que ensina a configurar e construir os edificios.*

Póde dizer-se que a *architectura* é a arte das conveniencias e do bello nas construcções. Não basta effectivamente que os edificios estejam construidos com solidez, e dispostos de modo que preencham o fim para que foram destinados, é necessario tambem que, a elegancia das fórmas e a belleza dos ornamentos, concorram para lhes dar uma apparencia agradavel e analoga ao seu destino.

O fim real da *architectura* é a satisfação de necessidades materiaes, e por isso em qualquer edificio, e em cada uma das suas partes essenciaes, deve revelar-se o cunho da *utilidade*. Jámais póde causar impressão agradavel o edificio, no qual se não descubra utilidade alguma. É por isto que nos edificios, que têem por objecto principal a decoração, o architecto precisa recorrer a artificios que façam com que as fórmas tenham rasão de ser, ou pareçam destinadas a satisfazer alguma conveniencia.

Alem da utilidade que, como se disse, deve manifestar-se em todos os pontos dos edificios, devem estes satisfazer principalmente a duas outras condições, que são a *simplicidade* e a *ordem*. A *ordem* nas construcções manifesta-se por uma especie de testemunho de que tudo está bem disposto e subordinado a uma lei geral e unica, sem que nada seja filho do acaso. A *ordem* junta á *simplicidade* dá aos edificios uma apparencia magestosa, que parece devida á sua grandeza material, sem comtudo depender d'ella. Os *ornatos*, ou sejam pintados ou esculpidos, não são indispensaveis em architectura, são porém um meio poderoso de desvanecer o aspecto vago e austero, que sem elles apresentaram muitas vezes os edificios. A ornamentação, alem de concorrer para embellezar os edificios, póde servir para lhes dar um caracter que esteja em relação com o seu destino.

§ 541. A *ordem* não se revela por igual em todas as partes dos edificios. Nos pontos, cuja utilidade for mais sensivel, a *ordem* será tambem mais manifesta. Uma parede, por exemplo, é menos propria para dar idéa da *ordem* do que um supporte isolado, porque, não sendo possivel observar, de uma só posição, mais de duas das tres dimensões principaes da parede, é impossivel appreciar bem a grandeza do esforço a que ella póde resistir, e por consequencia o grau de utilidade a que ella póde satisfazer. Nos supportes isolados todas as dimensões são visiveis, e por isso não é difficil julgar se a resistencia do supporte está em proporção, pelo menos apparentemente, com a grandeza da carga, que elle deve sustentar. A fórma cylindrica é, em geral, a mais conveniente para os supportes, ou esteios isolados, não só por ser principio demonstrado que, entre os supportes de igual massa, são os cylindricos, os que resistem mais ao choque e ao desabamento, mas porque são tambem elles, os que menos obstruem a circulação.

Os supportes cylindricos têem o nome de *columnas*.

É nos supportes isolados, e principalmente nas *columnas*, que a *ordem* se manifesta mais completa e expressivamente. A *ordem* torna-se ainda mais sensivel nas columnas, ou em geral nos supportes isolados, se se attender a que, por meio de algumas convenções, sobre que os architectos têem já assentado, as fórmas e dimensões das diversas partes das columnas podem variar em harmonia com o destino do edificio. De taes convenções têem resultado alguns typos principaes de *columnas*, ou em geral, de esteios isolados, a que os architectos chamam *ordens de architectura*.

§ 542. Em diversos tratados de architectura publicados depois da renascença, têem-se admittido tres systemas principaes de proporções nas *columnas*, a que correspondem tres *ordens* diversas de *architectura*.

No primeiro typo comprehendem-se as *columnas* da *ordem dorica*, nas quaes a altura regula por oito vezes a grossura, no segundo estão as *columnas da ordem jonica*, cuja altura é nove vezes a grossura, e finalmente ao terceiro e ultimo typo pertence a *ordem corinthia* na qual a altura é o decuplo da grossura.

Em igualdade de circumstancias, quanto mais grossas forem as columnas, maiores podem ser os intervallos entre ellas. Os intervallos das columnas, ou, como geralmente se diz, os *entrecolumnios*, custumam ser iguaes a cinco vezes e meia a grossura das columnas na *ordem dorica*, quatro vezes e tres quartos da mesma grossura na *ordem jonica* e quatro vezes a grossura na *ordem corinthia*.

Estes numeros, tanto os que exprimem as relações entre as alturas e grossuras das columnas, como os que dão a relação entre os intervallos, ou *entrecolumnios*, e as grossuras não são absolutos, correspondem apenas a um estado medio de solidez; e por isso é permittido ao architecto, e muitas vezes até recommendavel, desviar-se d'elles, n'um ou n'outro sentido, conforme as circumstancias.

As ordens *dorica, jonica e corinthia* foram inventadas pelos gregos, que julgaram poder decorar com ellas todos os edificios. A *ordem dorica* era por elles empregada nos edificios mais robustos, a *corinthia* nos mais delicados, e a *jonica* nos que não eram nem muito robustos, nem muito delicados. A estas tres *ordens* dá-se a denominação collectiva de *ordens gregas*.

Os romanos crearam duas outras *ordens*, a *toscana*, mais robusta e simples que a *dorica*, e a *composita* que participa das fórmas da *jonica* e da *corinthia*. A estas duas *ordens*, *toscana* e *composita*, chama-se muitas vezes *ordens romanas*.

§ 543. A maior parte dos auctores modernos admitte *cinco ordens de architectura*: *toscana*, *dorica*, *jonica*, *corinthia* e *composita*.

A *ordem toscana* e a *dorica* indicam principalmente força ou robustez, a primeira com a maxima simplicidade, e a segunda com uma tal ou qual magestade. O caracter da *ordem jonica* é a elegancia. As *ordens corinthia e composita* significam ambas riqueza, a primeira com certa magestade e a ultima com luxo. A *ordem toscana* não é verdadeiramente uma *ordem* nova, é apenas uma modificação da *ordem dorica*, na qual esta perde parte da sua magestade, tornando-se por isso mais robusta. A *ordem composita* não é realmente mais que uma variedade da *ordem corinthia*.

§ 544. Uma columna, seja qual for a sua *ordem*, comprehende, em geral, tres partes: *base*, *fuste* e *capitel*.

Debaixo do ponto de vista da utilidade material o *capitel* serve para sobre elle descansar a parte da construcção que está acima da columna, e para evitar que tenham dimensões exageradas as primeiras pedras que assentam immediatamente sobre as columnas cobrindo os intervallos que entre estas houver. O *fuste* forma a parte principal da columna. O seu diametro não é geralmente o mesmo em toda a altura. Ordinariamente é cylindrico o terço inferior do *fuste* da columna e nos dois terços restantes o diametro vae successivamente diminuindo debaixo para cima. Ha casos, porém, em que a diminuição do diametro do *fuste* começa na extremidade inferior e continua até ao ponto mais elevado, e outros em que, alem da diminuição nos dois terços superiores, ha diminuição de cima para baixo no terço inferior, vindo portanto o *fuste* a apresentar maior grossura logo abaixo do meio do que nas suas extremidades. A *base* é especialmente destinada a augmentar a altura da columna e a distribuir por maior numero de pontos o peso da construcção. As *bases* têem comtudo o inconveniente de difficultar a circulação e por isso supprimem-se algumas vezes.

§ 545. O systema mais proprio para ligar duas ou mais columnas dispostas em linha, e para cobrir os espaços que as separam, consiste em assentar sobre ellas uma fiada de pedras de cantaria dispostas de modo que a maior das suas dimensões esteja na direcção da linha ou fileira de columnas. Sobre esta primeira fiada descansa outra cujas pedras têem o comprimento no sentido da perpendicular ao comprimento das pedras da fiada inferior. Esta fiada superior tem por fim ligar uma fileira de columnas a outra, ou a uma parede. Sobre as duas fiadas assenta finalmente uma terceira e ultima, que é composta de pedras formando uma especie de parapeito. A parte superior d'esta ultima fiada tem grande saliencia, ou sacada, sobre a inferior, a fim de afastar as aguas da chuva da base da construcção.

Dá-se o nome de *entablamento* ao complexo das tres fiadas que ficam descriptas. O entablamento comprehende tres partes: o *architrave*, o *friso* e a *cornija*. O *architrave* é a parte inferior do *entablamento* formada por pedras de grande comprimento que assentam immediatamente sobre os *capiteis* das columnas, e é destinado a ligar umas ás outras as columnas da mesma fileira. O *friso* é a parte intermedia do *entablamento* cujo objecto é ligar duas fileiras de columnas entre si, ou uma só fileira de columnas a úma parede. A *cornija* é a parte mais elevada do *entablamento* correspondente ao telhado, e tão saliente, que póde formar pela parte debaixo uma especie de abrigo [1].

§ 546. As *bases* das columnas, especialmente quando estas existem no exterior dos edificios, podem deixar de repousar immediatamente sobre o solo. *Pedestal* da columna é o corpo sobre que assenta a *base* da columna.

O *pedestal*, quando está completo, comprehende tres partes: *base*, *dado* ou *corpo do pedestal* e *cornija*. O *pedestal* é comtudo formado muitas vezes de um só parallelipipedo rectangulo, ao qual se dá então o nome de *sóco*.

§ 547. Dá-se a denominação de *pilastras* ás columnas nas quaes a secção horisontal, em vez de ser circular, é quadrangular. Os antigos empregavam as *pilastras* isoladamente; hoje porém este uso está quasi completamente abandonado. Na maior parte dos casos as *pilastras* apresentam-se como se estivessem embebidas na parede, tendo sobre esta uma saliencia, ou sacada, igual á sexta parte da largura da pilastra. Algumas vezes, porém, esta sacada é igual a um decimo, e outras a dois terços, da referida largura.

[1] Nas casas ordinarias de habitação os *entablamentos* são incompletos; umas vezes porque não têem *architrave*, e outras porque lhes falta o *friso*. Chama-se *entablamento mutilado* ao *entablamento* que não tem *architrave* e *cornija architravada* ao *entablamento* a que falta o *friso*.

Debaixo do ponto de vista da decoração podem as *pilastras* ser consideradas como columnas em baixo relevo, e portanto variar de fórma e de dimensões como as columnas propriamente ditas. A apparencia das *pilastras* é, em geral, menos nobre que a das columnas.

Empregam-se as *pilastras* nos angulos exteriores, ou *cunhaes*, dos edificios, nas divisões exteriores dos predios e nas extremidades ou *testas* das paredes que ficam no prolongamento de uma fileira de columnas, quando por cima d'estas corre um *entablamento*, que vae penetrar na massa das mesmas paredes.

§ 548. Representa-se ordinariamente um edificio, ou alguma das suas partes, por projecções orthogonaes (§ 327) feitas sobre planos horisontaes e verticaes.

Chama-se *planta* de um edificio, ou de qualquer parte d'elle, á sua projecção sobre um plano horisontal, ou tambem ao córte feito no edificio por um plano horisontal. Na *planta* costumam ser representadas todas as linhas visiveis situadas abaixo do plano secante. As secções feitas nas partes massiças por o plano horisontal cobrem-se de uma *aguada lisa*, ou de uma especie de *pennejado* formado por traços parallelos.

Dá-se especialmente o nome de *córte* á secção feita no edificio por algum plano vertical.

Alçado ou *elevação* é a projecção de uma ou de diversas faces exteriores, ou *fachadas*, de um edificio sobre planos verticaes.

Quando se representa um edificio por *plantas*, *alçados* e *córtes*, convem indicar por meio de rectas traçadas nas *plantas*, os planos que contêem os *córtes* e por meio de outras rectas descriptas nos planos verticaes dos *córtes* e dos *alçados* a situação dos planos horisontaes a que se referem as *plantas*. Quando sobre os planos verticaes dos *córtes*, ou dos *alçados*, não existem os *traços verticaes* (§ 343) dos planos sobre que estão desenhadas as *plantas* deve entender-se que taes planos passam pelos peitoris das janellas.

Algumas vezes é necessario, para bem representar os edificios juntar ás *plantas*, *córtes* e *alçados*, projecções feitas sobre planos obliquos e perspectivas.

§ 549. Dá-se o nome de *molduras* ás diversas porções das superficies dos edificios comprehendidas entre arestas parallelas.

As *molduras* são em relação á architectura [1] o mesmo que as letras do alphabeto em relação á linguagem escripta. Assim como pela combinação de um numero limitado de letras se forma uma infinidade de palavras pertencentes a diversos idiomas, assim tambem pelo diverso modo de combinar as *molduras* se póde crear um numero infinito de *ordens de architectura* e de composições mais ou menos regulares.

As *molduras* têem principalmente por objecto fazer destacar umas partes dos edificios de outras, introduzindo n'ellas a variedade, sem prejuizo da unidade, e dando ao todo o caracter proprio do destino que deve ter o edificio.

As *molduras* consideradas emquanto á fórma das linhas que contornam as suas projecções, dividem-se em *molduras rectas* ou *corridas*, *molduras annelares* e *molduras arqueadas*. Em relação á fórma das superficies podem as *molduras* ser *planas*, *concavas*, *convexas* e *mixtas*.

São *rectas*, ou *corridas*, as *molduras* cujas projecções, tanto no plano horisontal como no vertical, isto é, tanto na *planta* como no *alçado*, são limitadas por linhas rectas. N'estas *molduras* as arestas são evidentemente linhas rectas.

São *annelares* as *molduras*, cuja projecção na *planta*, é limitada por duas curvas concentricas ordinariamente circulares.

[1] *Cours d'architecture* por C. A. d'Aviler.

Arqueadas são as *molduras* cujas projecções verticaes, ou no *alçado*, estão comprehendidas entre linhas curvas.

§ 550. As *molduras* geralmente empregadas em architectura são as seguintes:

Filete (fig. 543) é uma moldura estreita tendo por projecção vertical um rectangulo *ABCD*. A saliencia *bB* do *filete* é quasi sempre igual á altura *BC*. A projecção horisontal do *filete* póde ser quadrangular ou circular, e por isso esta *moldura* tem no primeiro caso o nome de *filete prismatico* e no segundo o de *filete cylindrico*.

Lista ou **listello**, é uma variedade do *filete* que differe d'este em ter a altura geralmente dupla da saliencia.

Faxa é uma moldura (fig. 544) cuja projecção vertical *ABCD* é tambem um rectangulo, mas que se distingue do *filete* e da *lista* ou *listello* em ser pouco saliente e muito alta.

Lacrimal (fig. 545) é uma especie de *faxa ABCD* quasi sempre muito saliente, com um canal semi-cylindrico *FEf* aberto na face inferior. A secção transversal d'este canal póde deixar de ser semi-circular. A agua da chuva escorregando ao longo da face *CB*, ou cáe immediatamente no chão, ou continua a escorrer sobre *BF* e vae depositar-se no canal *FEf* até que pelo seu peso possa vencer a adhesão e por consequencia caír em fórma de gotas ou de lagrimas no solo.

Ouvado ou **quarto-redondo** (fig. 546 e 547) é uma moldura cuja projecção vertical é limitada por duas rectas parallelas *AB* e *ED* e por um quarto de circulo com a convexidade voltada para fóra. O **ouvado** é **directo** (fig. 546) quando a maior saliencia da moldura fica na parte superior e **revesso** (fig. 547) quando fica na parte inferior. O *ouvado directo* tem algumas vezes o nome de **echino**[1].

Cavado (fig. 548 e 549) é uma moldura que differe do *ouvado* ou *quarto-redondo* unicamente em o quarto de circulo ter a concavidade, e não a convexidade, voltada para fóra. O **cavado** é **directo** (fig. 548) ou **revesso** (fig. 549), conforme a maior saliencia está na parte superior, ou na inferior, da moldura. **Escapo** é um *cavádo*, quasi sempre de pequenas dimensões, que serve para estabelecer a *concordancia* entre duas molduras, ou corpos, proximos. Na figura 545 o quarto de circulo *C G* tangente a *CB* e a *GL*, representa um *escapo*, ou pequeno *cavado*, que liga a face vertical do *lacrimal* com a face inferior e horisontal do filete que o corôa.

Vareta, ou *tondinho*, é uma pequena moldura (fig. 550) cuja projecção vertical é limitada por duas rectas parallelas, *AB* e *ED*, e por um semi-circulo, cuja convexidade está voltada para o exterior. *Astragalo* é uma *vareta* um pouco mais alta.

Tóro[2], ou **bocél** (fig. 551) é uma grossa vareta, geralmente empregada nas bases das columnas. O *tóro*, ou *bocél*, assenta quasi sempre sobre uma especie de *faxa*, que toma n'esta posição o nome de **plintho**.

Gorja, ou **meio-redondo-concavo** (fig. 552) é uma moldura cuja projecção vertical é limitada, como no *tóro*, por duas parallelas *AB* e *ED* e por um semi-circulo: distinguindo-se comtudo do *tóro*, ou *bocél*, em o semi-circulo estar com a concavidade voltada para fóra.

§ 551. As molduras formadas pela combinação de duas ou mais molduras simplices chamam-se *molduras compostas*.

[1] Dá-se geralmente este nome *echino* (o ch sôa como k) ao *ouvado*, ou *quarto redondo*, que entra na composição do *capitel*. O *echino* é a moldura principal do *capitel dorico*.

[2] Suppõem alguns auctores que o *toro* ou *bocél*, representa uma especie de grosso annel ou argola de ferro, com que em tempos antigos se apertava a parte inferior dos troncos de arvores, que faziam as vezes de columnas, a fim de evitar que elles, cedendo ao peso que os opprimia, se rachassem e quebrassem.

As molduras compostas reduzem-se geralmente a tres: o *talão*, a *gola* e a *scotia*.

Tanto o *talão* (fig. 553 e 554), como a *gola* (fig. 555 e 556), são molduras compostas de um *ouvado* ou *quarto-redondo*, e de um *cavado*. No *talão* a parte mais saliente corresponde sempre ao *ouvado* ou *quarto-redondo*; na *gola* é o *cavado* que occupa a parte de maior saliencia. No **talão directo** (fig. 553) a parte mais saliente, que é formada pelo *ouvado*, fica por cima do cavado; no **talão** revesso (fig. 554), é o *ouvado* que está por baixo do *cavado*[1]. A **gola** póde tambem ser **directa** (fig. 555), ou *revessa* (fig. 556), conforme a parte mais saliente ou o *cavado*, occupa o logar superior ou o inferior na moldura.

Dá-se tambem o nome de *gola* a molduras que differem das *golas* propriamente ditas em os *ouvados* e *cavados* corresponderem, não a quartos de circulo, mas a arcos de menos de noventa graus. As figuras 557 e 558, representam duas *golas:* a primeira *gola* é *achatada* e a segunda *alongada*. Para construir a *gola achatada* (fig. 557) divide-se ao meio a recta BE (§ 29), e construe-se sobre cada metade (§ 68) um triangulo equilatero. Os pontos O e C, vertices d'estes triangulos, são os centros dos arcos DE e DB. Para desenhar a *gola alongada* (fig. 558) divide-se tambem a recta BE em duas partes iguaes, conduzem-se perpendicularmente a BE, e pelos meios de BD e DE, as rectas $m\,C$ e $n\,O$, e procuram-se os pontos em que estas rectas encontram as rectas BC e EO perpendiculares a AB e EF.

Os pontos O e C obtidos por esta construcção, são os centros dos arcos ED e DB.

O *talão* tambem muitas vezes se faz *achatado*.

§ 552. A *scotia* é, em geral, uma moldura limitada por duas rectas parallelas e desiguaes, e por uma curva, cuja concavidade fica voltada para fóra. Esta curva, que ordinariamente é composta de arcos de circulo, tem por tangentes extremas as duas rectas parallelas.

Ha diversos modos de traçar a *scotia*. A *scotia* da figura 565 traça-se tirando a recta Aa perpendicular a Ba, tomando n'ella a parte ab igual a Ba, conduzindo pelo meio c de bA uma parallela a Ba e descrevendo dois quartos de circulo, o primeiro do centro c com o raio cA, e o segundo do centro C com o raio CD. As tangentes nos extremos B e A d'esta linha BDA, são as duas rectas parallelas que limitam inferior e superiormente a moldura. A *scotia* construida por este modo póde considerar-se composta de dois *cavados* (§ 550) desiguaes.

A *scotia* da figura 566 consta de dois arcos de circulo, um maior e outro menor de 90 graus. Para a descrever divide-se a altura Aa em tres partes iguaes, Ac, cd e da, levanta-se em B uma perpendicular Bh igual a uma das tres partes, e conduz-se ao meio de hc a perpendicular. O ponto C commum a esta perpendicular mC e á recta Bh prolongada é o centro do arco BD, que termina em B e na recta Cc, o ponto c é o centro do arco DA, que necessariamente ha de passar por A.

A *scotia* da figura 567 comprehende tres arcos de circulo. Construe-se dividindo tambem a altura Aa em tres partes iguaes Ac, cd e da. O ponto c é o centro do quarto de circulo AD que faz parte da *scotia*. Conduzindo por c uma parallela a Ba e marcando n'ella cC igual á terça parte de cD, ou de cA, acha-se o centro C de outro arco DE de circulo. Para determinar o extremo E d'este arco, e o raio OE do immediato, levanta-se sobre Ba a perpendicular Bh igual a CD, e ao meio de hC a perpendicular mO, procura-se emfim o ponto O, em que a perpendicular encontra o prolongamento de Bh, e tira-se a recta OC.

[1] O *talão revesso* é tambem conhecido pela denominação de *papo de rola*.

Na *scotia* da figura 568 a linha $A N_1 M_1 B$ é um arco de ellipse, tendo por tangentes as parallelas Aa e Bb. Para descrever este arco de ellipse traça-se sobre a recta AB como diametro um semi-circulo, no qual se tiram perpendicularmente a AB diversas rectas, mM, nN, etc. Conduzindo pelos pontos m, n, etc., rectas parallelas a Bb, ou Aa, e iguaes ás perpendiculares correspondentes mM, nN, etc., acham-se os pontos M_1, N_1, etc. da ellipse. Póde tambem construir-se a *scotia* descrevendo sobre AB como eixo uma semi-ellipse, em vez de um semi-circulo, e procedendo depois exactamente como se procedeu na figura 568. Esta *scotia* (fig. 568) é geralmente preferivel ás outras por causa do inconveniente que apresentam, de não ser uniforme a curvatura na passagem de um arco de circulo para o que lhe fica proximo. A substituição da semi-ellipse ao semi-circulo, torna ainda mais vantajoso este ultimo processo (fig. 568) de descrever a *scotia* em consequencia da facilidade com que por elle se póde tornar esta moldura mais ou menos excavada.

A *scotia* ABD da figura 569 differe das que têem sido descriptas em não ter por tangente a recta EB que é parallela a Aa. Esta *scotia* ABD chama-se *scotia profunda* e póde traçar-se pelo seguinte modo. Ao meio C de AE conduz-se uma parallela a Aa, ou uma perpendicular a AE, do centro C descreve-se um quarto AD de circulo, ao meio de BD levanta-se a perpendicular mL, e do ponto L, como centro, descreve-se um arco DB de circulo.

§ 553. *Perfilar* é a arte que ensina a dispor e combinar as molduras. É por meio d'esta combinação e disposição de molduras que o architecto póde dar ás suas obras um certo estylo e individualidade.

Não é facil estabelecer regras geraes sobre a arte de *perfilar;* ha comtudo algumas a que convem attender na pratica.

As principaes são as seguintes: 1.ª, dar aos *perfis sacadas* que estejam em relação com a altura e o caracter dos corpos que lhes estão inferiores, ou de que fazem parte; 2.ª, evitar a multiplicidade e confusão de molduras, especialmente nos edificios que podem ser observados de grande distancia; 3.ª, fazer sempre lisa e plana a moldura superior que termina ou corôa qualquer corpo; 4.ª, alternar quanto possivel as molduras grandes com as pequenas e as concavas, convexas ou ornadas com as lizas; 5.ª, dar a todas as molduras de um perfil, um caracter commum e geral.

§ 554. Sabe-se já (§ 544) que o diametro do *fuste* da columna diminue ordinariamente de baixo para cima nos dois terços superiores. Esta diminuição de diametro tem por fim dar á columna maior estabilidade assim apparente como real. Entre os gregos, a diminuição era pronunciadissima, especialmente nas columnas mais grossas; entre os romanos a diminuição era pouco sensivel na maior parte dos casos e quasi imperceptivel nas columnas muito altas.

Alguns architectos entendem que quanto maior for a altura da columna relativamente ao diametro inferior do *fuste,* menor deve ser a diminuição do diametro superior do mesmo *fuste*. Este preceito tem principalmente por fim evitar que o diametro superior da columna pareça demasiadamente pequeno, quando a columna tem grande altura.

Segundo Scamozzi[1] a relação entre os diametros superior e inferior do *fuste* da columna deve ser igual a $\frac{4}{5}$ na *ordem dorica,* a $\frac{5}{6}$ na jonica e a $\frac{7}{8}$ na corinthia.

Palladio[2] adoptou a relação $\frac{7}{8}$ para todas as *ordens,* excepto, porém, para uma *ordem dorica* simplificada na qual fez a relação entre os diametros igual a $\frac{3}{4}$.

[1] Scamozzi, nascido em Veneza no anno de 1532, e fallecido em 1580, publicou uma excellente traducção franceza das obras de Vinhola.

[2] Palladio, architecto da republica de Veneza, nasceu em 1508 e morreu em 1580. Publicou este architecto um tratado de architectura pelo mesmo tempo que Vinhola publicou o seu.

Vinhola[1] fez em todas as *ordens* a relação entre os diametros igual a $\frac{5}{6}$, vindo portanto a dar ao diametro superior do *fuste* da columna uma grandeza igual a cinco sextas partes[2] do diametro inferior do *fuste*.

§ 555. Grande parte dos auctores modernos têem dado ao *perfil* do *fuste* da columna, na parte em que o diametro é variavel, a fórma de uma curva chamada *conchoide*.

Para descrever a *conchoide*, na supposição de serem AB' e ED' (fig. 576) os raios extremos dos dois terços superiores do *fuste* da columna e AE o eixo, descreve-se com o centro em D' e o raio igual a AB' um arco que encontra o eixo n'um ponto F, tira-se a recta $D'F$ e procura-se o ponto P, em que ella corta o prolongamento de $B'A$. Por este ponto P tiram-se diversas rectas, nas quaes se marcam, a contar de AE, partes mm', nn', etc., iguaes a AB', e unem-se por uma linha continua todos os pontos D', m', n', ... B' assim obtidos. A curva $D'm'n'B'$ é a *conchoide*. Similhantemente se traça o arco DB da outra *conchoide*.

Vinhola não adoptou a *conchoide* para determinar o *perfil* do *fuste* da columna. A curva empregada por este architecto era a (§ 427) *sinusoide*.

Para descrever a *sinusoide*, sendo AB e ED (fig. 577) os raios extremos e AE o eixo, descreve-se com o centro em A o semi-circulo BLB' e tiram-se por D e D' parallelas DG e $D'g'$ a EA, que terminem nos pontos G e g' do arco descripto. Divide-se o eixo AE e cada um dos arcos, BG e $B'g'$, em igual numero de partes iguaes e conduzem-se pelos pontos de divisão do eixo parallelas a AB, e pelos dos arcos BG e $B'g'$ parallelas[3] a AE. Estas parallelas encontram aquellas nos pontos 1, 2, 3, etc., da *sinusoide*.

Léonce Reynaud, professor de architectura nas escolas polytechnica e de pontes e calçadas de París, diz que a *sinusoide* tem o inconveniente de tornar demasiadamente

[1] Jacome Barozzi de Vinhola, filho de Clemente Barozzi, nasceu a 1 de outubro de 1507 em Vignole, pequena cidade do reino de Italia que dista 20 kilometros de Modena. É principalmente conhecido pelo appellido de Vinhola, que tomou do nome da terra da sua naturalidade. Estudou pintura e depois architectura e perspectiva, primeiro em Bolonha e mais tarde em Roma.

Em Roma foi empregado como desenhador pelo architecto de Paulo III, Jacques Melighini, n'uma academia de architectura composta de muitas pessoas de distincção, e algum tempo depois foi encarregado pela mesma academia de medir e desenhar os edificios antigos de Roma. Em 1537, ou segundo Vasari em 1540, foi a França, por convite de Francisco Primatice, pintor e architecto do rei Francisco I. Durante dois annos, que esteve em França, fez muitos projectos e modelos para diversos edificios. De França voltou a Bolonha, a pedido do conde Filippe Peppoli, para ser encarregado do projecto da igreja de S. Petronne, cuja construcção lhe foi incumbida. Depois de 1564, epocha em que falleceu o celebre Miguel Angelo, pintor e architecto romano, foi Vinhola nomeado architecto da igreja de S. Pedro do Vaticano. Os desenhos das quatro pequenas cupulas, que acompanham o grande zimborio executado por Miguel Angelo, são devidos a Vinhola, que foi tambem quem dirigiu a construcção d'essas mesmas cupulas.

Vinhola falleceu a 7 de julho de 1573 com sessenta e seis annos de idade, em Caprarola, pequena villa dos estados da Igreja a 12 kilometros de distancia de Viterbo. Foi sepultado na igreja de Santa Maria da Rotunda, que é um dos mais notaveis edificios da antiguidade.

Alem dos muitos projectos que fez para diversos edificios notaveis, e das construcções que dirigiu, compoz um tratado de architectura, que foi traduzido em muitas linguas, e outro de perspectiva. Este ultimo foi publicado, e commentado, por Ignacio Danti, em Roma, no anno de 1583, com o titulo de *Regole della prospettiva pratica di Giacomo Barozzi detto il Vignola.*

[2] Exceptuam-se d'esta regra as columnas da *ordem toscana* nas quaes o diametro superior contém 19 minutos em vez de 20.

[3] Esta construcção é exactamente a que se empregaria para construir a projecção vertical da *helice* (§ 428) situada no cylindro de raio AB e eixo AE, quando se suppozessem conhecidos dois pontos da superficie cylindrica pelos quaes devesse passar a *helice*.

curva a parte superior do *fuste* das columnas. É certo, porém, que a *sinusoide* é a curva geralmente empregada pelos architectos para determinar o contorno dos *fustes*, especialmente os das ordens *toscana* e *dorica*. *A conchoide* é quasi sempre preferida nas ordens *jonica*, *corinthia* e *composita*.

§ 556. No desenho das *ordens* seguir-se-ha, n'este compendio, o methodo de Vinhola.

Em todas as *ordens*, é, segundo Vinhola, a altura do *pedestal* igual á terça parte da altura da columna com *base* e *capitel*, e a do *entablamento* igual á quarta parte da mesma altura. Na estampa ~~84~~ 62, onde estão representadas as cinco ordens (fig. 578 a 582), a altura AC de todos os *pedestaes*, é um terço da altura CE das columnas com *base* e *capitel*, e esta altura CE contém quatro vezes a altura EG do *entablamento*.

Sendo dada portanto a altura da columna com *pedestal* e *entablamento*, deve dividir-se a altura total em 19 partes iguaes, tomar 4 d'estas partes para o *pedestal*, 12 para a columna com *base* e *capitel* e as 3 restantes para o *entablamento*.

Quando a columna não tiver *pedestal* bastará dividir a altura dada em 5 partes iguaes, sendo 4 para a columna com *base* e *capitel* e 1 para o *entablamento*.

Suppondo, por exemplo, que a columna com *pedestal* e *entablamento* deve ter $8^m,55$ de altura, seguir-se-ha que $1^m,80$ será a altura[1] do *pedestal*, $5^m,40$ a da columna com *base* e *capitel* e $1^m,35$ a altura do *entablamento*.

Na mesma hypothese se a columna não tiver *pedestal*, a sua altura, comprehendendo *base* e *capitel*, será igual a $6^m,84$ e o *entablamento* terá de altura $1^m,71$.

§ 557. A unidade adoptada no desenho das *ordens* é o *modulo*. Dá-se em architectura o nome de *modulo* ao semi-diametro inferior do *fuste* da columna.

A altura da columna com *base* e *capitel* varia com a *ordem* a que pertence a columna. Segundo Vinhola esta altura é igual a 14 *modulos*, ou 7 diametros, na ordem *toscana*; a 16 *modulos*, ou 8 diametros, na *ordem dorica*; a 18 *modulos*, ou 9 diametros, na *ordem jonica*; e a 20 *modulos*, ou 10 diametros, nas *ordens corinthia* e *composita*. O *modulo* divide-se em 12 partes iguaes, ou *minutos*, nas *ordens toscana* e *dorica* e em 18 nas *ordens jonica*, *corinthia* e *composita*.

Em todas as *ordens* a altura da *base* é um *modulo*. A altura do *capitel* varia com a *ordem* a que pertence. Nas duas primeiras *ordens*, *toscana* e *dorica*, a altura do *capitel* é, como a da base, igual a um *modulo*, na *ordem jonica* o *capitel* tem de altura dois terços de um *modulo* ou 12 minutos, e nas ordens *corinthia* e *composita* a altura do *capitel* é igual a dois *modulos* e um terço de *modulo*.

§ 558. A estampa ~~84~~ 62 apresenta o desenho das cinco *ordens* de Vinhola, comprehendendo *pedestaes* e *entablamentos*, e suppondo que todas têem a mesma altura.

Os caracteres pelos quaes se distinguem estas *ordens* são, em geral, os seguintes. A *ordem toscana* (fig. 578) é a unica que não tem ornato algum. A *ordem dorica* (fig. 579) tem por caracter principal os *triglyphos*, que são uma especie de ornamento com que se decora o *friso* (§ 545). Na *ordem jonica* (fig. 580) ha as *volutas*, que acompanham o *capitel*. Na *corinthia* (fig. 581) o *capitel* está guarnecido de folhas de acan-

[1] Basta com effeito dividir a altura $8^m,55$ por 19 e multiplicar o quociente por 4 quando se quer achar a altura do *pedestal* e por 12, ou por 3, quando se procura a altura da *columna* com *base* e *capitel* ou a do *entablamento*. É porém mais exacto, se a divisão dá resto, fazer primeiro a multiplicação e depois a divisão. Tratando-se, por exemplo, de calcular a altura do *pedestal*, sendo conhecida a altura da columna com *base* e *capitel*, multiplicar-se-ha o numero $8^m,55$, que exprime esta altura total, por 4, e dividir-se-ha o producto achado $34^m,20$ por 19. A altura do *pedestal* vem pois a ser, como se diz no texto, $1^m,8$.

tho[1]. Finalmente na *ordem composita* (fig. 582) *o capitel* tem folhas de acantho, como na *corinthia,* e uma especie de *volutas* á imitação das que ornam o *capitel jonico.*

§ 559. *Desenhar* o **pedestal** e a **base** da **ordem toscana.**

N'esta *ordem* a altura da columna com *base* e *capitel* tem (§ 557) 14 modulos, e por consequencia (§ 556) a altura do *pedestal,* que é um terço d'aquella, conterá 4 modulos e $\frac{2}{3}$ ou 4 modulos e 8 minutos. Basta pois dividir a altura $C'C''$ (fig. 559) do *pedestal* em 14 partes iguaes, e tomar 3 d'estas partes, para ter o modulo e portanto o minuto. Construindo depois a escala é facil desenhar as projecções do *pedestal,* tendo á vista a fig. 559, onde estão *cotadas* as diversas dimensões relativamente ao modulo e suas sub-divisões.

N'esta fig. 559, em que a recta $L\ T$ é a *linha de terra,* não se representa na projecção horisontal, ou *planta,* senão metade do *pedestal* e da *base* da columna.

Conhece-se á vista da figura que o *pedestal* tem na parte inferior a *base* $(a\ b\ d\ e,\ b'b''d''d')$ formada por uma *faxa,* ou *plintho,* que é um parallelipipedo rectangulo de 5 minutos de altura, tendo por base um quadrado de 3 modulos e 5 minutos de lado. Sobre a *base* assenta um *filete prismatico* com 1 minuto de altura e 3 modulos e 1 minuto de lado na base. Ao *filete* segue-se um *escapo,* cuja planta é limitada por dois quadrados tendo 3 modulos e 1 minuto de lado o exterior e 2 modulos e 9 minutos o outro, como facilmente se deprehende das *cotas,* que vêem na figura. Em continuação do *escapo* fica o *corpo do pedestal,* que é um prisma com 3 modulos e 6 minutos de altura. Sobre o corpo do *pedestal* está a *cornija* d'este, que é formada por uma especie de *talão directo achatado* e por um *filete prismatico.* O *perfil do talão* é composto de dois arcos de 60 graus, e a *planta* acha-se comprehendida entre dois quadrados, um de 3 modulos e 4 minutos de lado e outro de 2 modulos e 10 minutos.

A *base* da columna tambem se desenha facilmente e consta de um *plintho,* que é um prisma, de um *tóro,* ou *bocél,* e de um *filete cylindrico.* Por cima da *base* da columna está o *escapo* inferior do *fuste* e uma pequena parte d'este. A recta $C'''R$, que representa o semi-diametro, ou raio inferior do *fuste* da columna, é igual (§ 557) a um modulo.

§ 560. *Desenhar* o **entablamento** e o **capitel** *da* **ordem toscana.**

A altura da columna com *base* e *capitel* é, n'esta *ordem,* igual a 14 modulos, a altura do *entablamento* deve pois (§ 556) ser de 3 modulos e 6 minutos. Basta portanto dividir a altura destinada para o *entablamento* em 7 partes iguaes, para ter a grandeza de meio modulo. Assim, por exemplo, se a altura do *entablamento* fosse $1^{m},35$, a grandeza do modulo seria $0^{m},386$ proximamente.

Conhecido o modulo, não póde haver difficuldade em construir a escala e depois o desenho tendo á vista a fig. 560. Vê-se n'esta figura que o *architrave* tem 1 modulo de altura e consta de duas partes, das quaes a inferior A é formada por uma especie

[1] Segundo Vitruvio, architecto romano contemporaneo de Jesus Christo, foi o esculptor atheniense Callimachus (que viveu quatrocentos annos antes de Christo) quem primeiro empregou as folhas de acantho, como ornamento no *capitel corinthio,* em substituição das folhas de loureiro e de oliveira com que anteriormente se revestia o mesmo *capitel.*

O *acantho* é o typo das plantas da familia das *acantháceas,* conhecidas pelas designações vulgares de *herva gigante* e *branca ursina de Italia.* É uma planta herbácea e de notavel belleza. Conhecem-se doze especies de *acanthos* nas regiões tropicaes. Nos arrabaldes de Lisboa ha uma especie de *acantho* chamada *acanthus mollis:* as folhas d'esta planta são largas, sinuadas, lisas, inodoras e verdenegras; a flôr tem calice com dois labios e corolla com um só labio e dois lobulos; o fructo é uma capsula de duas céllulas com poucas sementes.

de *faxa* terminada superiormente por um *escapo* e a outra *B* por um *listello*. D'estas duas partes a primeira é a que constitue o *architrave* propriamente dito, e a segunda é o *listello* do *architrave*. Sobre o *architrave* está o *friso D*, que é tambem uma grande *faxa* com 1 modulo e 2 minutos de altura. Acima do *friso* está a *cornija*, que, em geral, se considera composta de tres partes: *cachorro*, *goteira* e *corôa*. O *cachorro* comprehende um *talão achatado E* e um *filete a* do *talão*. A *goteira* comprehende o *lacrimal F* com seu *escapo*, o *filete b* e o *astragalo d*. A *corôa* é formada pelo *ouvado*, ou *quarto redondo*, *G*.

O *capitel* da columna tem, como o *architrave*, um modulo de altura e é formado pelo *friso h*, que é uma especie de prisma com seu *escapo*, por o *filete k*, pelo *ouvado l* e por uma moldura chamada *ábaco*, que é composta de duas, *m* e *n*, das quaes a inferior é a que constitue propriamente o *ábaco* e a segunda é o *filete* do *ábaco*.

Por baixo do *friso h* do *capitel* está a columna propriamente dita. Na fig. 560 só está representada uma pequena parte do *fuste* com o *astragalo g* e o *filete f* do *astragalo*. O diametro superior do *fuste* da columna contém 19 minutos ou 1 modulo e 7 minutos.

No desenho da *planta* suppõe-se que o plano horisontal de projecção está acima do *entablamento* e o observador abaixo do capitel olhando de baixo para cima.

§ 561. Chama-se *columnata* a uma serie de columnas tendo um *entablamento* commum. O espaço vasio, ou o intervallo comprehendido entre duas columnas consecutivas chama-se *entrecolumnio*.

Segundo Vinhola o *entrecolumnio toscano* deve ser igual a 4 modulos e $\frac{2}{3}$, isto é, a 4 modulos e 8 minutos, e por consequencia a distancia entre os eixos de duas columnas consecutivas deve ser 6 modulos e $\frac{2}{3}$, ou 6 modulos e 8 minutos, n'uma *columnata de ordem toscana*.

Em geral entende-se que os *entrecolumnios* devem ser tanto maiores quanto mais grossas forem as columnas relativamente ás suas alturas.

O desenho do *entrecolumnio toscano* não póde offerecer difficuldade alguma depois de se saber desenhar as columnas da *ordem toscana* e de se haver fixado a grandeza do *entrecolumnio*.

§ 562. Chama-se em geral *arcada* a uma serie de arcos apoiados sobre pés direitos.

Portico é, em geral, um todo formado por um arco apoiado sobre pés direitos e por duas columnas, sustentando na parte superior um ornato de fórma triangular chamado *frontão*.

Tanto nas *arcadas*, como nos *porticos*, a distancia entre as columnas póde ser maior que nos *entrecolumnios* propriamente ditos.

Os arcos, assim nas *arcadas* como nos *porticos*, são limitados por uma larga faxa circular, que póde ser lisa ou ornada de outras pequenas faxas, ou molduras, tambem circulares e concentricas. Dá-se o nome de *archivolta*, tanto áquella moldura unica, como a este aggregado de molduras concentricas de que o arco é formado.

As *archivoltas* podem assentar immediatamente sobre columnas. Este systema de apoiar as *archivoltas* remonta aos ultimos tempos do imperio romano, quando as artes estavam já em decadencia. Actualmente não se construem *archivoltas* descansando immediatamente sobre columnas, porque forçosamente acontecerá que ou uma parte da *archivolta* ha de saír fóra da columna, ficando em falso, e por consequencia ameaçando ruina, ou a columna sobresaírá á face da *archivolta* encobrindo e desfigurando uma porção d'esta e tornando-se em parte inutil como sustentaculo do arco.

Tambem não é costume collocar a *archivolta* sobre pés direitos sem collocar entre estes e aquella um corpo chamado *imposta,* cuja missão principal se reduz a interromper a ligação entre o pé direito e o arco. Não existindo *imposta* julgar-se-ha, embora erradamente, que a *archivolta* não tem estabilidade, porque ou ella é lisa, e por assim dizer a continuação dos pés direitos, e n'este caso a illusão consistirá em suppor que os pés direitos pendem para fóra afastando-se mais na parte superior, ou é ornada, sem que os seus ornamentos continuem ao longo dos pés direitos, e ha então uma discontinuidade, da qual resulta parecer que uma parte da *archivolta* está suspensa no ar, sem apoio algum.

As *impostas* são formadas por molduras corridas e ás vezes por uma só faxa. A altura da *imposta* é em todas as *ordens,* segundo Vinhola, igual a um modulo. A sacada é geralmente igual á terça parte do modulo. A *imposta* tem o inconveniente de encobrir uma parte do *arco.* Obvia-se a este inconveniente collocando a *imposta* um pouco abaixo do arco, de modo que ella sómente possa occultar uma parte do pé direito.

§ 563. *Construir o* **portico toscano** *com pedestal e frontão.*

A figura 561 apresenta o desenho d'este *portico.* A distancia AB entre os eixos das columnas é igual a 12 modulos e $\frac{3}{4}$ ou 12 modulos e 9′. A largura DE do vão do arco, ou o *vivo,* é de 8 modulos e $\frac{3}{4}$, ou 8 modulos e 9′. A altura FG do arco é o dobro da largura DE, e por consequencia igual a 17 modulos e $\frac{1}{2}$. A altura nm da *imposta* é, como anteriormente (§ 562) se disse, igual a 1 modulo. A largura Gg da *archivolta* é tambem de 1 modulo. Com estes elementos, e á vista da figura 561, é facil desenhar o *portico* sem o *frontão.*

Dá-se em geral o nome de *frontão* a uma especie de *cornija* triangular, e ás vezes curvilinea, que corôa a *fachada* de um edificio ou uma porta, janella, etc.

Quando ha *frontão* supprime-se no entablamento a moldura superior (n'esta *ordem* um *ouvado)* que corôa a *cornija.* Esta *cornija,* sem o *ouvado* que costuma coroá-la, chama-se *base do frontão.* Dá-se a denominação de *empena* á *cornija angular,* que junta com a *base do frontão* limita o espaço triangular. Este espaço triangular tem o nome de *tympano.* O plano do *tympano* deve ficar na continuação, ou prolongamento, da face do *friso.*

Para desenhar o *frontão,* suppondo que rs é a linha que deve limitar o *ouvado,* ou a moldura superior que se supprime na *cornija,* descreve-se do centro C com o raio Cr um quarto de circulo e do ponto O, extremo d'este quadrante, com o raio Or um outro arco rH, que termine na vertical levantada por O. As rectas rH e sH são os limites superiores das duas *cornijas* inclinadas, que reunidas produzem a *empena.* Tirando pelo ponto p, em que o *ouvado* é tangente ao *astragalo* que lhe fica por baixo, uma vertical pu, procurando os pontos u, a, b, etc., em que a vertical encontra as diversas arestas da *cornija,* que serve de *base* ao *frontão,* e conduzindo pelos pontos u, a, b, etc. parallelas a rH, tem-se o desenho[1] de metade da *empena* do *frontão.* A outra metade construe-se pelo mesmo processo.

Dando outra posição ao ponto O póde construir-se um *frontão* com as *empenas* mais ou menos inclinadas.

Nota. Nos *porticos* da *ordem toscana* sem *pedestal,* tendo apenas um *sóco,* a distancia entre os eixos das columnas é de 9 modulos e 6′, a largura do vão, ou o *vivo,* de 6 modulos e 6′ e a altura do arco é o dobro da largura, isto é, 13 modulos.

§ 564. *Desenhar o* **pedestal** e a *base* da **ordem dorica.**

[1] Podem traçar-se as arestas da empena, marcando sobre uma recta perpendicular a rH, ou sH, as alturas das diversas molduras da *cornija,* que serve de *base* ao *frontão,* e conduzindo pelos pontos de divisão parallelas a rH, ou a sH.

Na *ordem dorica* a columna com base e capitel tem (§ 557) 16 modulos de altura e por consequencia o *pedestal* deve conter (§ 556) em altura 5 modulos e $\frac{1}{3}$. Póde pois determinar-se a grandeza do modulo dividindo a altura CC'' (fig. 562), que ha de ter o *pedestal*, em 16 partes iguaes e tomando 3 d'estas. Com a grandeza do modulo é facil construir a escala e depois desenhar á vista da figura 562, tanto o *pedestal* como a base da columna.

A base do *pedestal* é n'esta *ordem* menos simples que na *toscana*, e comprehende dois *plinthos*, um dos quaes, o *inferior*, é chamado *sóco*, um *talão* revesso, uma *vareta* e um *filete*. A *cornija do pedestal* consta de um *talão*, um *lacrimal*, ou *goteira*, um *filete*, um *ouvado*, ou *quarto redondo*, e outro *filete*.

A *base* da columna tem, conforme a regra geral de Vinhola (§ 557), 1 modulo de altura, e differe unicamente da *base toscana* em ter uma *vareta* entre o *tóro* e o *filete*. As proporções das diversas molduras estão indicadas por cótas na figura 562.

O *fuste* da columna da *ordem dorica* é muitas vezes decorado com *canneluras* ou *estrias*. Dá-se o nome de *canneluras* a uma especie de meias cannas, ou semi-cylindros, que se abrem no *fuste* da columna na direcção do eixo. Na *ordem dorica* não se empregam mais de 20 *canneluras*.

Para se traçarem as *canneluras* divide-se a circumferencia de raio Ca (fig. 562) em 20 partes iguaes e levantam-se pelos pontos de divisão, taes como a e b, parallelas, aa', bb', etc., ao eixo. Construindo sobre a corda, ab, de cada uma das divisões da circumferencia, um triangulo equilatero, e descrevendo do vertice, d, como centro, um arco, têem-se as projecções horisontaes das *canneluras*. Para construir as projecções verticaes das *canneluras* tira-se a recta oo_1, que contém os centros dos quartos de circulos, que determinam o *escapo*, e marca-se sobre o eixo, a partir d'aquella recta, uma parte md' igual a qualquer dos lados do triangulo equilatero abd. Obtem-se por este modo um ponto d', do qual como centro e com o raio $d'm$ se descreve o arco de circulo $a'mb'$ cujos extremos são os pontos em que o mesmo arco encontra as rectas aa' e bb' parallelas ao eixo. N'esta construcção suppõe-se que a corda ab é parallela á linha de terra LT. Para representar as outras *canneluras* no plano vertical de projecção levantam-se pelos pontos de divisão e, f, por exemplo, do circulo de raio Ca perpendiculares a LT, e conduz-se por a' e b' uma recta xy, que, sendo parallela a LT, corta aquellas perpendiculares em pontos, como f' e e', pertencentes ás projecções verticaes das diversas *canneluras*. As projecções verticaes dos arcos analogos a $a'mb'$, $f'n'e'$ são tangentes á recta oo_1.

O que fica exposto é sufficiente, na maior parte dos casos, para se effeituar o desenho das *canneluras*; querendo, porém, determinar maior numero de pontos de cada um dos arcos que as limitam, seguir-se-ha o processo seguinte. Prolongue-se a corda ef de modo que, sendo n o meio d'ella, as distancias ng e nh sejam iguaes ao raio do circulo a que pertence o arco ef da *cannelura*, e portanto, n'este caso particular, iguaes á corda ef. Levantem-se pelos pontos g, h perpendiculares a LT e procurem-se os pontos g', h' em que ellas cortam a recta, que se conduziu por d' parallelamente a LT. A ellipse descripta com o eixo $g'h'$ e o semi-eixo $k'n'$ passa pelos pontos e' e f' e contém o arco $f'n'e'$, que se pretendia descrever. Igual processo se applica a todas as outras *canneluras*[1].

[1] O processo é applicavel mesmo ás *canneluras* para as quaes o arco ab não contém 60 graus, devendo comtudo advertir-se que, em todos os casos, devem ser iguaes tanto os triangulos abd e $a'b'd'$ como as rectas md' e ad ou bd.

As *canneluras*, consideradas geometricamente, são formadas por superficies cylindricas de revolução fechadas nos extremos por um plano, ou por uma porção de superficie espherica. Na *ordem*

Na *ordem dorica* as *canneluras* estão separadas umas das outras por uma aresta viva correspondente a cada ponto de divisão da circumferencia *C*.

Nas cavidades das *canneluras* mettem-se ás vezes uma especie de *bastões* que não passam alem do terço inferior da columna.

§ 565. Desenhar o *entablamento* e o *capitel* da *ordem dorica denticular.*

Na *ordem dorica denticular* (fig. 563) o *capitel* tem 1 modulo de altura e é formado por um *friso,* ou *faxa* cylindrica, decorado com quatro florões, por tres pequenos *anneis* ou *filetes cylindricos*, por uma especie de *ouvado*, que n'esta posição toma o nome de *echino* (§ 550), e por uma *faxa* prismatica, sendo tudo isto coroado por um *talão* e um *filete.*

No *friso* do *entablamento* ha uns ornatos chamados *triglyphos*, que constituem por si só o signal caracteristico da *ordem dorica.* Os *triglyphos* são uma especie de taboleta da altura do *friso*, na qual estão abertos dois *canaes*, ou *glyphos*, no meio e dois meios canaes nos extremos. O comprimento de cada uma d'estas taboletas é 1 modulo e a sua grossura, ou antes *sacada* sobre o plano do *friso*, é meio minuto. Cada um dos *glyphos* e meios *glyphos* é uma especie de prisma triangular limitado superiormente por um plano inclinado sobre as arestas. A altura d'estes canaes, ou *glyphos*, é um pouco inferior á do *friso*, a largura é igual a 2 minutos e o intervallo entre os dois canaes, ou entre um d'elles e o meio canal proximo, é tambem de 2 minutos.

A cada columna deve sempre corresponder um *triglypho*, de modo que o eixo d'este fique no prolongamento do eixo da columna.

O espaço comprehendido entre duas taboletas ou *triglyphos*, chama-se *metopa* e costuma ser quadrado. As *metopas* podem ser lizas, ou ter algum ornamento que esteja em harmonia com o destino do edificio. Entre os ornamentos que têem sido empregados nas *metopas* devem mencionar-se as *cabeças de victimas* [1], as *patéras* [2], os *escudos*, os *broqueis*, *capacetes*, etc.

No *architrave* e em correspondencia a cada *triglypho*, ha um pequeno *filete* do qual pendem seis *gotas* de fórma conica. Por cima dos *triglyphos*, e no filete que co-

dorica o fundo da *cannelura* é sempre espherico: o centro da esphera é o ponto cujas projecções são *d* e *d'* para a *cannelura* correspondente ao arco *ab* da *planta*. Todas as *ordens* podem ter *canneluras*, excepto a *toscana*.

[1] As *cabeças de victima* representam-se ordinariamente por cabeças de boi ou de carneiro descarnadas, e recordam naturalmente as cabeças dos animaes que costumavam ser sacrificados nas ceremonias antigas do culto, ou, segundo outros auctores, a pratica seguida nos primeiros tempos da Grecia e de Roma, de pendurar os despojos das victimas no exterior das casas, que tinham sido salpicadas com o seu sangue. Este ornato, muito proprio dos antigos templos do paganismo, ou dos monumentos funebres, não póde com rasão ser empregado nos edificios modernos.

[2] A *patéra* é um ornamento de fórma circular, imitando as *patéras* usadas pelos antigos.

Entre os romanos chamava-se *patéra* a uma especie de copo de bôca larga, ou *patente*, e pouco fundo. Havia *patéras* de barro, de bronze, de prata e até de oiro. Eram lizas umas e outras ornadas. As ornadas eram geralmente designadas por o nome de um dos objectos representados nos lavores.

As *patéras* eram objectos pertencentes ao culto religioso, e serviam, ou para deitar vinho nas cabeças dos animaes sacrificados e aparar o seu sangue, ou para n'ellas se guardarem as cinzas das pessoas, que morriam, e se encerrarem em urnas, depois de haverem servido ás libações com que se acompanhavam as ceremonias funebres.

Nas ruinas da antiga Cetobriga, em Setubal, foi encontrada em 1814 uma *patéra* de prata com lavores representando de um lado um tridente atravessando a cabeça de um polvo e do outro tres instrumentos dos sacrificios, uma victima imperfeitamente figurada, e uma cabra abrigada na sombra de um arbusto. A noticia da descoberta d'esta *patéra*, que foi adquirida pela casa dos ex.^mos^ duques de Palmella, póde ler-se no primeiro numero dos *Annaes da sociedade archeologica lusitana*, impresso em 1850 na imprensa nacional.

rôa o friso, ha os *capiteis dos triglyphos* cuja saliencia relativamente ao plano do *friso*, é um minuto. Superiormente ao *filete do friso* ha um *talão*, ao qual se segue uma estreita *faxa* de 3 minutos e $\frac{1}{2}$ de altura decorada com *denticulos*. Designam-se pela denominação de *denticulos* uns parallelipipedos rectangulos muito proximos uns dos outros que se destacam da pequena *faxa* em toda a extensão d'ella. A altura d'estes parallelipipedos é 3 minutos, a largura e a *sacada* é de 2 minutos.

A face inferior ou *tecto* da *cornija*, chamada tambem *soffito*, é decorada com *gotas* analogas ás dos *triglyphos* e com molduras salientes imitando a disposição que se observa nas traves dos tectos, quando estes não têem forro. Nos intervallos d'estas traves, onde não ha gotas, empregam-se varios ornatos, como florões, etc.

§ 566. A *ordem dorica denticular* é uma imitação da architectura que ainda hoje se póde observar em Roma nas ruinas do theatro de Marcellus, cuja edificação data do seculo de Augusto. Vinhola propoz dois *typos de ordem dorica*: a *ordem dorica denticular* acima descripta e a *ordem dorica mutular*.

No *capitel* da *ordem dorica mutular* o *friso* está ornado com flores de liz, em vez de florões, os tres pequenos anneis da *ordem dorica denticular* estão substituidos por um *filete* e um *astragalo* decorado de modo que imita um rosario; o **echino** está ornado de *óvulos* e finalmente o *talão* acha-se guarnecido de folhagens. A face inferior da *faxa* que corôa o **echino** está ornada com quatro flores de liz.

No *entablamento* notam-se as seguintes differenças. O *architrave* comprehende duas *faxas* de alturas pouco desiguaes, tendo a superior, onde estão as *gotas* dos *triglyphos*, meio minuto de *sacada* sobre a inferior. Em vez do *talão*, que corôa o *filete* a que pertencem os *capiteis* dos *triglyphos*, ha um *ouvado*, e por cima d'este uma *faxa* d'onde se destacam, não os *denticulos*, mas uns *modilhões* ou *mutulas*[1], com seus *capiteis*, formando uma especie de *cachorrada*, cujo destino é sustentar o peso do grande *lacrimal* que lhe fica superior. No prolongamento do eixo da columna deve sempre ficar o eixo de uma *mutula*, ou *modilhão*. A face inferior de cada *modilhão*, ou *mutula*, é um quadrado de 14 minutos e $\frac{1}{2}$ de lado guarnecido de 36 gotas similhantes ás do *architrave* e dispostas em 6 fileiras de 6 *gotas* cada uma. Na mesma face da *mutula*, e parallelamente ao plano do *friso*, ha uma pequena moldura saliente, por fóra da qual segue na mesma direcção um canal.

O *soffito*, ou *tecto* do *lacrimal*, é ornado[2] por diversos modos nos intervallos deixados pelos modilhões.

Observação. São tão elegantes os dois *entablamentos doricos* propostos por Vinhola, que é difficil distinguir qual d'elles será mais agradavel. O *entablamento denticular* é comtudo mais ligeiro, e por isso parece convir melhor a uma *ordem* que tenha de decorar o interior de um edificio e que não possa portanto ser observada senão a pequena distancia; pelo contrario o *entablamento mutular*, cuja invenção é devida a Vinhola, tem uma apparencia mais robusta e é por consequencia digno de figurar no exterior dos edificios.

§ 567. Nos *entrecolumnios doricos* é necessario regular as distancias entre os ei-

[1] A palavra *mutula* deriva-se do substantivo latino *mutulus*, que significa o cachorro saído para fóra da parede, em que se sustentam as traves.

[2] Entre estes ornatos ha tambem flores de liz. A profusão com que na *ordem dorica mutular* se empregam as flores de liz, no *friso* do *capitel*, no tecto da *faxa* que corôa o *echino* e no tecto do lacrimal, explica-se facilmente em se sabendo que Vinhola foi muito protegido pelo cardeal Alexandre Farnese, vice-chanceller da igreja romana, que o encarregou de completar o seu palacio e de dirigir outras muitas obras importantes, e que as armas da casa do cardeal continham seis flores de liz azues em campo de oiro.

xos das columnas, de modo que a cada uma d'estas corresponda um *triglypho*, e que no intervallo entre os *triglyphos* extremos possa haver um numero inteiro de *triglyphos* e de *metópas*.

Vinhola attendeu a esta condição, fazendo a distancia dos eixos igual a 7 modulos e 6 minutos. Por este modo vem a ficar dois *triglyphos* e tres *metópas* no intervallo comprehendido entre duas columnas consecutivas. Sendo 7 modulos e 6 minutos a distancia dos eixos de duas columnas, será 5 modulos e 6 minutos o *entrecolumnio* propriamente dito.

A figura 564 mostra as linhas geraes do desenho de um *entrecolumnio dorico* sem *pedestal*.

§ 568. Na *ordem jonica* a altura da columna com *base* e *capitel* tem 18 modulos (§ 557) ou 9 diametros, e o modulo divide-se em 18 minutos. A altura do *pedestal* (§ 556) é de 6 modulos. Tanto a *base* como a *cornija* do *pedestal* tem meio modulo, ou 9 minutos de altura. A altura do *entablamento* é igual (§ 556) a 4 modulos e $\frac{1}{2}$ ou 4 modulos e 9 minutos. D'esta altura correspondem 1 modulo e $\frac{1}{4}$ ao *architrave*, modulo e $\frac{1}{2}$ ao *friso*, e o resto, que é 1 modulo e $\frac{3}{4}$, á *cornija*.

§ 569. A *base* da columna (fig. 570 e 571) tem 1 modulo de altura e consta de um *plintho* com 6 minutos de altura, uma *scotia* comprehendida entre dois *filetes* cylindricos, dois *astragalos* iguaes, outra *scotia* comprehendida tambem entre dois *filetes* cylindricos e um *tóro* com 5 minutos de altura.

O *fuste* da columna *jonica* contém 24 *canneluras* tendo cada uma por secção horisontal um semi-circulo. Todas estas *canneluras* terminam inferiormente n'um plano horisontal, cuja *traço vertical* é (fig. 572) a recta *om* que passa pelos centros dos quartos de circulo pertencentes ao contorno do *escapo*. Superiormente as *canneluras* terminam por quartos de esphera. As *canneluras* estão separadas umas das outras por *filetes*. A largura de cada *filete* é igual a $\frac{2}{7}$ da largura das *canneluras*. As *canneluras* não são ornatos indispensaveis da *ordem jonica*.

Esta *base* da columna *jonica* é attribuida a Vitruvio, postoque não se encontre em edificio algum da antiguidade. Alguns architectos modernos preferem dar á columna *jonica* a *base attica* em vez da *base jonica* de Vitruvio. Miguel Angelo, Palladio, Scamozzi e outros empregaram a *ordem jonica* com a *base attica* em todos os edificios de que ainda restam alguns vestigios. Ha comtudo em Parìs edificios modernos, entre os quaes se póde citar o palacio das Tulherias, onde a *ordem jonica* se apresenta com a *base* de Vitruvio.

§ 570. A *base attica* (fig. 572) foi assim denominada por Vitruvio, porque foram os athenienses os seus inventores e os que primeiro a empregaram nas columnas de todas as *ordens*, excepto nas da *ordem toscana*. Os architectos modernos têem empregado a *base attica* em todas as columnas, e até nas da *ordem toscana*.

A fig. 572 representa a projecção vertical, ou *alçado* da *base attica* e mostra que as molduras de que ella se compõe são um *plintho*, um *tóro*, uma *scotia profunda*, entre dois *filetes*, e um outro *tóro*.

§ 571. O ornato caracteristico da *ordem jonica* consiste nas *volutas* que acompanham o *capitel*. As *volutas* vistas de frente apresentam o aspecto de uma especie de *corrêa* enrolada espiralmente em torno de um circulo [1] que forma o *olho da voluta*.

[1] O *capitel jonico* termina por um *filete* que corôa um *talão*. Logo abaixo d'este *talão* ha outro *filete* que a certa distancia do eixo da columna começa a enrolar-se em fórma de caracol estreitando sempre e approximando-se cada vez mais do *olho da voluta*. É este *filete* recurvado que se chama *listello*.

A esta especie de *corrêa* dá-se o nome de *listello da voluta*. Vista de lado a *voluta* recorda a fórma de um vaso de flores deitado, ou antes a de dois vasos deitados e unidos pelos fundos. Ha diversos modos de construir o contorno da *corrêa* ou *listello*.

A voluta de Vinhola aperfeiçoada pelo architecto C. A. d'Aviler descreve-se pelo seguinte processo.

A um modulo de distancia do eixo da columna, e parallelamente a elle, tira-se (fig. 573) uma recta *XY* que se denomina *catheto da voluta*, e procura-se o ponto *O* em que o *catheto* é encontrado pelo prolongamento da aresta superior do *astragalo*, collocado logo acima do *filete* que corôa o *fuste*, da columna. Do ponto *O* como centro e com o raio igual a 1 minuto, que é a decima oitava parte do modulo, descreva-se um circulo que representará o *olho da voluta*. N'este circulo inscreva-se um quadrado, de modo que uma das diagonaes coincida com o *catheto da voluta*, tirem-se duas rectas passando por *O* parallelamente aos lados do quadrado, e divida-se cada uma d'ellas em seis partes iguaes. Numerem-se estes pontos de divisão, como indica a figura, com os algarismos 1, 2, 3, etc. e marquem-se no *catheto* de *O* para cima uma parte igual a 9 minutos ou meio modulo. Para traçar o contorno exterior do *listello* faça-se centro em 1 e descreva-se um arco de circulo, que comece no ponto marcado sobre o *catheto* 9 minutos acima de *O* e acabe na horisontal tirada de 1 para 2, do ponto 2 como centro descreva-se um segundo arco que parta do extremo do primeiro e termine na recta 2-3 e continue-se assim tomando successivamente para centros dos diversos arcos os pontos 3, 4, 5... 11 e 12. A espiral descripta por este modo compõe-se de tres *passos*, ou voltas completas, e acaba no *olho da voluta*. Para desenhar o contorno interior do *listello* convem saber que a maior grossura d'esta especie de *filete* é igual a 1 minuto. Marcando pois na vertical *XY* para baixo do ponto onde começa o contorno exterior, um minuto, tem-se o começo do primeiro dos arcos de que se compõe a espiral interior. Para achar os centros dos diversos arcos d'esta espiral divide-se em quatro partes iguaes cada uma das seis em que foram primitivamente divididas as rectas 1-3 e 2-4 e marcam-se com as letras *a, b, c, d, e... l, m* os pontos da nova divisão, que successivamente ficam mais proximos de 1, 2, 3, 4, 5... 11, 12. Conhecidos os centros dos arcos da espiral polycentrica, e um extremo d'esta espiral, não póde haver difficuldade em a descrever [1].

Observação. O *capitel jonico* de Vinhola tem o inconveniente de não apresentar quatro faces iguaes em consequencia das *volutas* terem uma apparencia vistas de frente e outra vistas de lado. É por este motivo que alguns architectos, entre os quaes se póde citar o sr. Feijó [2], preferem ao *capitel* de Vinhola o de Miguel Angelo, onde aquelle defeito é menos sensivel, e a este ultimo *capitel* ainda preferem o de Sebastião Serlio, por n'elle desapparecer completamente o defeito apontado. O *capitel* da *ordem jonica* de Scamozzi tem tambem, como o de Serlio, quatro faces iguaes.

§ 572. Na *ordem corinthia* o *pedestal* tem geralmente tanto a *base* como a *cornija* decorada com diversos ornamentos. N'esta *ordem* parece conveniente dar ao *pedestal* uma altura um pouco superior á que lhe compete (§ 556) pela regra geral de Vinhola.

[1] Vinhola propoz duas especies de volutas uma das quaes, depois de modificada por Aviler, é a que se acha descripta no texto. Alem d'estas duas *volutas* ha outra cuja invenção é devida ao geometra hollandez Nicolau Goldman.

A espiral hyperbolica póde tambem ser aproveitada com grande vantagem, como anteriormente (§ 318) se disse, para contornar o *listello* da *voluta*.

[2] Seguimos n'este logar, assim como em varios outros do presente capitulo, as idéas apresentadas pelo sr. conselheiro Feijó em um folheto lithographado por onde aquelle distincto professor, antes de estar jubilado, dava as primeiras lições do seu curso de architectura na escola do exercito.

O *fuste* da columna corinthia tem vinte e quatro canneluras separadas por *filetes*, e o *capitel* é uma especie de *tambor* revestido de tres ordens de folhas da parte superior das quaes nascem uns *cauliculos* que, enrolando-se sobre si mesmos, produzem pequenas *volutas*. Vitruvio preferiu as folhas de acantho para o *capitel corinthio*, outros architectos acham melhores para este caso as folhas de oliveira. A planta do *ábaco*, que é a moldura superior do *capitel*, é uma especie de quadrilatero curvilineo no qual cada lado é um arco de circulo de 60 graus.

A *ordem composita*, a que Scamozzi chamou *ordem romana*, e que outros designam por *ordem italiana*, é menos delicada que a *corinthia*, e por isso foi apresentada por Scamozzi em seguida á *ordem jonica*. A principal differença entre a *ordem corinthia* e a *composita* está nos *capiteis*. O *capitel composito* não possue *cauliculos*, como possue o *corinthio*, porém no logar d'elles tem *volutas jonicas*.

O *fuste* da columna *composita* tem vinte e quatro canneluras, separadas por *filetes*, exactamente como o das columnas da *ordem corinthia*.

§ 573. Dá-se o nome de *balaustres* a pequenas columnas, ou *pilastras*, com um ou mais bojos no *fuste*, tendo na parte superior um apoio ou parapeito commum. Este parapeito commum, é uma especie de pequena *cimalha* a que se dá a denominação de *cimalhinha* ou *encosto*. *Balaustrada* é uma serie de *balaustres* assentes sobre um sóco unico e coroados por uma *cimalhinha* ou *encosto* commum. Nas *balaustradas* collocadas a grandes alturas não deve a altura do sóco ser inferior á sexta parte da altura total da *balaustrada*.

Nas *balaustradas* compostas de muitos *balaustres* collocam-se de espaço a espaço uns corpos que se chamam *dados*. Nos extremos das *balaustradas* ha outros corpos differentes dos *dados*, e dos *balaustres*, que têem o nome de *acroterios*. Em regra nunca devem pôr-se seguidamente, sem algum corpo intermedio, mais de quinze *balaustres*, nem formar-se *balaustradas* com menos de cinco *balaustres*. A *balaustrada* apresenta em geral um effeito mais agradavel quando se junta a cada *acroterio*, ou a cada um dos *dados*, meio *balaustre*. Estes meios *balaustres* são principalmente necessarios nos casos em que for inevitavel construir lanços de *balaustrada* com menos de cinco *balaustres*.

Os *balaustres* podem ser quadrangulares, oitavados ou redondos. Em qualquer das hypotheses o *balaustre* comprehende quatro partes: *pé*, *bojo*, *collo* e *capitel*. A cada *ordem de architectura* deve corresponder uma fórma especial de *balaustres*. A diversa fórma e proporção dos *balaustres*, em harmonia com as differentes *ordens* de architectura, não está comtudo subordinada a regras geraes.

Aviler dá cinco typos differentes de *balaustres*; tres redondos, um quadrangular, e outro oitavado. Os redondos pertencem ás *ordens, jonica, corinthia* e *composita*, o oitavado á ordem *dorica* e o quadrangular á *toscana*.

O ultimo differe pouco do que está representado na figura 574. O desenho d'este *balaustre* (fig. 574) da *ordem toscana* não póde offerecer difficuldade alguma. A figura 575 apresenta o desenho de um *balaustre* de dois bojos. Este *balaustre*, que alguns architectos incluem na *ordem composita*, é muitas vezes empregado, e produz um bello effeito. O modo de o desenhar está claramente indicado na figura 575.

CAPITULO XX

DAS ENGRENAGENS[1], OU ENTROSAGENS

§ 574. As *engrenagens* ou *entrosagens* são orgãos mechanicos destinados a *transformar* o movimento de rotação em torno de um eixo n'outro movimento de rotação em volta d'um segundo eixo.

As *engrenagens* ou *entrosagens* devem geralmente ser construidas de modo que a relação entre os numeros de revoluções feitas em redor dos dois eixos seja sempre a mesma. Esta condição costuma enunciar-se dizendo que *nas engrenagens deve ser constante a relàção entre as velocidades angulares*, ou entre os caminhos percorridos por dois pontos collocados a iguaes distancias dos eixos de rotação.

Os eixos sobre que se effectuam as rotações podem ser parallelos (§ 34), concorrer n'um ponto, ou não ser parallelos (§ 330) nem concorrentes. D'esta variedade de situações relativas dos eixos resultam diversas especies de *engrenagens* ou *entrosagens*, entre as quaes se comprehendem as *engrenagens cylindricas* ou *planas*, as *engrenagens* ou *entrosagens conicas* ou *de angulo* e as *engrenagens hyperboloidaes*[2].

As *engrenagens* constam ordinariamente de rodas cylindricas, conicas ou hyperboloidaes, com a superficie exterior guarnecida de corpos salientes chamados dentes. Algumas vezes uma das rodas é substituida por uma *haste dentada* ou *cremalheira*, e outras por um parafuso. N'este ultimo caso o parafuso recebe, conforme as circumstancias, a denominação de *parafuso sem fim*, ou de *parafuso tangencial*.

Tanto nas *hastes dentadas* ou *cremalheiras*, como no *parafuso sem fim* e no *tangencial* é um movimento rectilineo, que se transforma n'um movimento circular, ou vice-versa, e não um movimento circular que se converte n'outro tambem circular.

[1] A palavra *engrenagem* tem-se generalisado hoje tanto nas escolas e nos estabelecimentos industriaes, que não hesitámos em a adoptar n'este livro, apesar de reconhecermos que é franceza e que póde facilmente ser substituida por um termo portuguez.

É certo que muito antes de se ir buscar á lingua franceza aquelle vocabulo, já em portuguez se empregavam os verbos *entrosar*, *engranzar* e *engrazar*, para exprimir o mesmo que a palavra franceza *engrener*. Em uma obra do padre Ignacio da Piedade Vasconcellos, impressa em 1732, com o titulo *Artefactos symmetriacos e geometricos* acham-se descripções de varios machinismos ou *engenhos* contendo rodas dentadas, nas quaes o verbo *engrazar* é empregado no mesmo sentido em que os francezes usam de *engrener*. Logo na primeira d'estas descripções, a pagina 409, tratando-se de um *engenho* de moer grão, diz o padre Vasconcellos: «*As duas* (rodas) *dos lados B, C, téem em tudo a mesma formalidade e grandeza, porque a mesma obra, e feitio, que tem uma, tem a outra, de uma, e d'outra banda,* engrazando os seus dentes *nos outros dentes da mesma roda grande...*» Auctores, ha porém, que usam do verbo *engranzar* em vez de *engrazar*.

A palavra entrosa tem nos diccionarios a significação de roda com dentes, que em lagar de azeite faz andar outra roda chamada *varanda*. Não é facil comtudo averiguar se *entrosa*, ou, como diz o padre Vasconcellos, *entrós*, significava qualquer roda dentada, ou sómente a que *engraža* com a roda de *varanda*, que é a que geralmente se denomina *roda de lanterna*.

Póde portanto concluir-se que *entrosa* significa *roda dentada*, sem comtudo se poder decidir se é qualquer ou uma determinada *roda dentada*, e que *engrazar*, *engranzar* e *entrosar* são verbos empregados por auctores antigos para designar o mesmo que a palavra franceza *engrener*.

[2] Designam-se estas rodas pela denominação de *rodas hyperboloidaes*, porque as suas *superficies primitivas*, em vez de serem cylindricas ou conicas, são *hyperboloides*. O desenho das *rodas hyperboloidaes* é tão complicado, que não é possivel tratar d'elle n'este livro elementar. Não deve porém sentir-se esta falta, porquanto aquellas rodas raras vezes têem applicação, por se preferir na pratica empregar tres *rodas conicas* a construir duas rodas *hyperboloidaes*.

§ 575. *Traçar uma engrenagem cylindrica composta de duas* **rodas dentadas symetricas e de flancos.**

Representem *C* e *R* (fig. 583 e 584) as projecções dos eixos das rodas sobre um plano perpendicular a ambos, e imagine-se que as rodas devem mover-se de modo que emquanto a primeira dá duas voltas a segunda effectue apenas uma. A relação entre as *velocidades angulares* das rodas *C* e *R* será n'este caso de 2 para 1.

Conhecida a relação entre as *velocidades angulares* das duas rodas, divide-se a distancia *CR* dos eixos em duas partes *CA* e *RA* que estejam na *rasão inversa das velocidades* e portanto na *rasão* (§ 113) de 1 para 2, se, como se suppoz, a *rasão das velocidades* é de 2 para 1, e descrevem-se dois circulos um com o centro em *C* e raio *CA* e outro com o centro em *R* e o raio *RA*. A estes circulos dá-se o nome de *circulos primitivos.*

Dividam-se as circumferencias dos *circulos primitivos* em partes iguaes, de modo que a relação entre os numeros de divisões das duas circumferencias seja igual á relação entre os seus raios. Nas figuras 583 e 584 dividiu-se em 15 partes iguaes *Ab, bd, de, ef,* etc. a circumferencia de raio *CA* e em 30 que são *AB, BD, DE, EF,* etc. a outra circumferencia. As divisões de cada uma das *circumferencias primitivas* são evidentemente iguaes entre si e iguaes ás divisões da outra *circumferencia.*

Chama-se *passo* da *entrosagem,* ou da roda, á extensão commum dos arcos *Ab, bd,* etc., ou *AB, BD,* etc. que resultam da divisão dos *circulos primitivos.* O numero de divisões de qualquer d'estas circumferencias é igual ao numero de *dentes* que deve ter a roda correspondente.

Para traçar a parte *Av* do *perfil* de um dente da roda *RA* construe-se sobre *CA* como diametro um circulo, descreve-se a epicyloide (§ 288) *Av* gerada pelo ponto *A* da circumferencia de diametro *CA,* que se suppõe *rolar* sobre a *circumferencia primitiva AR* e transporta-se para *Bv', Dv'',* etc, a epicyloide descripta. Esta parte *Av* do *perfil* corresponde ao que se chama *face do dente.* Na pratica deve traçar-se a epicyloide com todo o cuidado sobre um cartão, que depois se corta ao longo da curva, de modo que possa empregar-se como *bitola* ou *molde* para descrever os perfis de todos os outros dentes. Decompondo o arco *AB* em duas partes *AM* e *MB,* taes que a primeira seja menor que a segunda, tomando depois nos arcos *BD, DE,* etc. partes *BN, DP,* etc., iguaes a *AM,* e descrevendo *epicyloides Mu, Nu', Pu'',* etc., iguaes a *Av, Bv'',* etc., têem-se os perfis das segundas faces dos dentes.

Os arcos *AM, BN, DP,* etc. determinam a *espessura* dos dentes, e os arcos *MB, ND,* etc. o *intervallo* entre dois dentes consecutivos.

Na circumferencia *CA* marcam-se tambem as partes *bm, dn, ep,* etc. iguaes entre si e um pouco menores que metade do *passo* da roda e tomam-se para *espessura* ou *base* dos dentes as referidas partes e para *intervallo* os arcos *Am, bn, dp,* etc. Unindo os pontos *A, m, b, n, d,* etc. com o centro *C* têem-se os *flancos* dos dentes da roda *C.*

Cada um dos dentes da roda *R* termina n'um arco *vu, v'u', v''u'',* etc. de *chanframento,* que se obtem descrevendo um circulo com o centro em *R.* O raio d'este circulo deve ser determinado de modo que não haja só um dente da roda *R* em contacto com outro da roda *C.* Sendo *x* o ponto em que o perfil *zx* corta a circumferencia de diametro *CA,* não deve o raio d'aquelle circulo ser inferior á distancia *Rx.*

Fixada a grandeza do circulo de *chanframento* dos dentes das rodas, resta determinar a profundidade *A w* do *intervallo* entre os dentes da pequena roda ou *carrete C.* Para este fim marca-se o ponto *y,* em que a linha dos centros *CR* encontra o circulo de chanframento da roda *R,* e descreve-se do ponto *C* como centro com um raio *Cw,* um pouco inferior a *Cy,* um circulo. Se acaso se descrevesse este circulo com o raio igual a *Cy*, correr-se-ía o risco de interromper, ou pelo menos retardar, o movimento das rodas, logoque alguma pequena irregularidade na superficie de um dos dentes obstasse a que elle se movesse no *intervallo* em que estiver alojado. É tambem este o motivo porque os dentes da roda *R* não terminam interiormente na *circumferencia primitiva* mas n'uma outra de raio um pouco mais pequeno. Os dentes d'esta roda vem por isso a ter uns pequenos *flancos*, que se obtêem tirando raios de *R* para os pontos *A*, *M*, *B*, *N*, etc.

§ 576. A differença entre o *intervallo Am* (fig. 583 e 584) dos dentes do carrete *C* e a *espessura AM* dos dentes da roda *R* chama-se *folga* e é igual ao excesso do *intervallo MB* da roda *R* sobre a *espessura mb* dos dentes do carrete. A **folga** *nas engrenagens vem pois a ser igual ao* **passo** *diminuido da somma das* **espessuras** *dos dentes em ambas as rodas.*

A *espessura* dos dentes de uma roda depende da qualidade da materia de que elles são feitos e dos esforços a que hão de resistir. Em geral *as espessuras dos dentes de duas rodas, que entrosam uma na outra, devem estar na rasão inversa das resistencias que podem offerecer as substancias de que são formados os mesmos dentes.*

Se os dentes de ambas as rodas forem da mesma materia, devem portanto ser iguaes as *espessuras* n'uma e n'outra roda.

A *folga* deve estar comprehendida entre a vigesima e a duodecima parte do *passo da entrosagem.* Muitas vezes, se ambas as rodas são de igual materia, divide-se o *passo* em 15 partes iguaes e tomam-se 7 d'estas partes para *espessura* dos dentes. N'este caso a *folga* torna-se igual a $\frac{1}{15}$ do *passo.* Não convem augmentar demasiadamente a *folga* das engrenagens, não só porque d'ahi resultaria tornarem-se os dentes tão pouco *espessos*, que deixassem de ter a necessaria resistencia, como para evitar os choques que se manifestariam logoque por qualquer causa cessasse de ser uniforme o movimento de alguma das rodas.

§ 577. O ponto x (fig. 583 e 584), em que o dente de uma roda toca o *flanco* da outra, está sempre sobre a circumferencia de diametro *CA*. A recta *Ax* é *normal* tanto á face zx do dente como ao *flanco hk*, que lhe corresponde. Está demonstrado que quanto maior for a *normal Ax* maior será tambem a resistencia, chamada *fricção* ou *attrito*, que uma roda oppõe ao movimento que recebe da outra. Augmentando o numero de dentes de cada roda torna-se *Ax* menor, e por consequencia diminue-se o valor da *fricção* ou *attrito.*

Não deve comtudo augmentar-se tanto o numero dos dentes, que estes se tornem fracos por ficarem com uma *espessura* e *altura* muito pequenas. A *altura* ou *saliencia* dos dentes é igual á differença entre o raio do circulo de *chanframento* e o raio do circulo *primitivo.*

Diminuindo o numero dos dentes a *fricção* augmenta, é verdade, porém o traçado da roda torna-se mais facil; póde, porém, acontecer que aquelle numero seja tão pequeno, que haja só um dente da roda *R* em contacto com outro do *carrete C.* Esta circumstancia deve sempre evitar-se, porque, realisando-se ella, forçosamente ha de deixar de haver a communicação de movimento durante o tempo que medeia entre o instante em que um dente cessa de actuar e aquelle em que o seu immediato começa a impellir o que lhe corresponde. Evita-se este inconveniente fazendo com que haja sempre dois dentes (e alguns querem tres) de uma das rodas em contacto com outros tantos dentes da outra.

Savary demonstrou que *o numero de dentes de uma roda de flancos*, para que este inconveniente não se dê, *deve ser igual ou superior ao numero* 10 *augmentado do producto d'este numero pela relação entre o raio da menor e o da maior roda.*

Nas figuras 583 e 584 a relação entre *CA* e *RA* é *um meio*, o producto d'esta relação por 10 é 5, e portanto o menor numero de dentes que póde ter o *carrete C* é 15.

Na *engrenagem de flancos simples* ha só contacto de dentes de um dos lados da linha *CR* dos centros, e por isso, se o sentido do movimento é o que está indicado pelas flexas, é a roda *R*, que põe em movimento o *carrete C*, e que portanto se denomina *roda mandadeira;* se as rodas se moverem em sentido contrario ao indicado pelas mesmas flexas será o *carrete* que *manda* a roda *R*, isto é, será o *carrete* a *roda mandadeira*.

§ 578. Alguns auctores entenderam que nas *engrenagens* em que sómente ha contacto de um lado da linha dos centros, como são as de *flancos* simples, não deve existir contacto entre os dentes senão depois d'estes terem passado por a referida linha. Admittido este principio seguir-se-ha que nas figuras 583 e 584 só a roda *R* deve *mandar o carrete C* e portanto que na mesma figura a *engrenagem* não é *reciproca*, isto é, que cada uma das suas rodas não deve ser encarregada de pôr em movimento a outra.

Tal principio porém não é hoje admittido, pelo menos nas engrenagens bem contruidas, e por isso deixa de ser justificavel a denominação de *engrenagens reciprocas* com que na actualidade ainda se designam as engrenagens representadas nas figuras 585 e 586.

As figuras 585 e 586 offerecem um exemplo de uma *engrenagem de flancos reciproca*. As faces dos dentes da roda *R* e os *flancos* do *carrete C'* construem-se exactamente como se a *engrenagem* não fosse *reciproca*. Os *flancos* de *R* e as *faces* de *C'* traçam-se, como se a roda *R* tivesse unicamente *flancos*, empregando a *epicycloide* gerada pelo ponto *A* da circumferencia de diametro *AR'*, quando esta *rola* sobre a *circumferencia primitiva* de raio *C'A*.

Na *engrenagem de flancos reciproca* os dentes de cada uma das rodas são limitados por uma parte curva e epicycloidal chamada *face* e por outra *rectilinea*, e na direcção do raio do *circulo primitivo*, que é o *flanco*.

§ 579. Quando as rotações dos dois eixos parallelos devem ser do mesmo sentido, as *engrenagens* que ficam descriptas sómente podem ser aproveitadas empregando tres, ou em geral um numero impar, de rodas dentadas. Para se converter o movimento de rotação de um eixo em outro do mesmo sentido em volta de um eixo parallelo é necessario, não querendo usar de mais de duas rodas, recorrer ás *engrenagens*, ou *entrosagens*, *interiores*.

A figura 587 (estampa 87) representa uma *engrenagem interior de flancos*. As letras *R* e *C* representam as projecções dos eixos. Suppõe-se que a relação das *velocidades angulares* das rodas *C* e *R* é de 3 para 1, isto é, que emquanto a roda *R* faz uma revolução o *carrete C* dá tres voltas.

Dos pontos *R* e *C* como centros descrevem-se duas circumferencias tangentes, de modo que o raio da primeira seja triplo do raio da segunda. Estas circumferencias, cujos raios são *RA* e *CA*, chamam-se *circumferencias primitivas*. Fazendo applicação da regra de *Savary* (§ 577) a este caso, acha-se que o numero de dentes do carrete deve ser igual ou superior a 14. Na figura 587 o *carrete* tem 15 dentes, e por consequencia á roda *R* pertencem 45 dentes.

Dividindo a circumferencia de raio *CA* em 15 partes iguaes e a de raio *RA* em 45, tem-se o *passo* da roda. Decompondo tanto o *passo AB* como *Ab* em duas partes desiguaes, de modo que a differença entre *Am* e *AM*, ou entre *MB* e *mb*, seja igual á *folga* que se julgar necessaria, têem-se as *espessuras AM* e *mb* dos dentes de uma e outra roda e os *intervallos MB* e *Am*.

As faces Av, Bv', Dv'', etc., da roda R têem por *perfis epicycloides interiores* (§ 301) geradas por um ponto A do circulo de diametro CA, que se suppõe rolar no interior do *circulo primitivo* de raio RA. Os pontos de contacto dos dentes de R com os *flancos* de C devem caír sobre a circumferencia de diametro CA. O resto da construcção não differe da que se empregou para traçar a *engrenagem exterior de flancos*.

A *engrenagem interior de flancos* jamais póde ser reciproca.

Na pratica não convem usar de *engrenagens interiores*, nas quaes a roda maior tenha sómente *flancos* e a menor *flancos* e *faces*, embora theoricamente taes *engrenagens* sejam possiveis. As rasões que ha para desprezar esta especie de *engrenagens interiores* são principalmente duas; maior *fricção* ou *attrito*, e menor resistencia da roda de *flancos* e *faces*, que é a mais pequena.

§ 580. Os praticos empregam algumas vezes processos approximados para descreverem as *engrenagens*. Estes processos fundam-se geralmente em que, devendo (§ 577) as rodas ter muitos dentes, e por consequencia ser pequena a *altura* d'estes, não póde haver grande differença entre o arco de epicycloide, que se emprega no traçado exacto, e um ou dois arcos de circulo que se lhe substituam.

O processo approximado que se empregou na figura 588 (estampa 90) reduz-se a dividir em duas partes iguaes o arco AN de *circulo primitivo*, que se compõe do *passo* AB e da *espessura* BN, e a descrever depois do ponto medio O como centro o semi-circulo $A\,v\,u'\,N$. Repetindo a mesma construcção sobre o arco $B\,N\,D\,P$ e sobre todos os que similhantemente se formam, acham-se os perfis das faces de todos os dentes.

As *engrenagens* obtidas por este meio só poderão ser empregadas nas machinas em que se dispõe de grandes forças e onde ha por consequencia *volantes* ou orgãos especiaes, encarregados de manter a regularidade do movimento. Esta mesma construcção se emprega quando o desenho é apenas destinado a dar idéa da disposição geral das diversas partes de uma machina e não para servir de guia para por elle se construirem as rodas dentadas.

Outro processo approximado consiste em dar ao *perfil* Av da *face* de um dente a fórma circular, tomando para centro d'este pequeno arco de circulo a origem B do dente immediato. Este processo póde igualmente servir para os desenhos que não têem por fim servir aos constructores, mas não deve continuar a ser adoptado nos estabelecimentos em que se fabricam rodas, porque é muito inexacto e até grosseiro.

§ 581. As figuras 583 até 588 representam apenas as projecções das rodas sobre um plano perpendicular aos eixos. Cada uma das rodas dentadas póde considerar-se como um cylindro recto tendo as bases iguaes áquellas figuras. Chama-se *largura* da roda ao comprimento da *geratriz* rectilinea do cylindro.

Os *carretes* são quasi sempre feitos de uma só peça. Não acontece o mesmo ás rodas propriamente ditas, pelo menos quando as dimensões não são muito pequenas.

As rodas constam em geral de *pinas*, que são porções de corôas circulares que reunidas dão a circumferencia da roda, de *braços* reforçados por *contrafortes* e do *cubo*, que fórma a parte central da roda. O *cubo* é atravessado por uma abertura cylindrica ou prismatica, chamada *olhal* ou *vasado* do *cubo*, onde entra o *veyo* ou *arvore* da roda.

No caso de ser cylindrico o *olhal* do *cubo* deve abrir-se na parte interna d'este uma especie de entalhe, em que entre uma peça destinada a apertar o *veyo* contra o *cubo*, de modo que este não possa mover-se independentemente d'aquelle. Dá-se a este entalhe a denominação de *caixa da chaveta*, e á peça que entra n'elle a de *chaveta*.

A *espessura* do *cubo*, medida na direcção do raio da roda, é ordinariamente igual a tres vezes metade da *espessura* do dente, augmentada de 10 millimetros. A *largura do cubo* contada perpendicularmente ao plano da roda é igual á *largura* dos dentes, ou das pinas, que tambem se conta perpendicularmente ao mesmo plano, augmentada da decima parte do raio do *circulo primitivo*. A *largura* da *chaveta* é um decimo do *raio primitivo* e a *espessura* é metade da *largura*; quando porém a *largura* da *chaveta* se tornar maior que um terço do diametro do *veyo* ou *arvore*, é preferivel empregar mais de uma *caixa de chaveta*.

Os *braços* são geralmente seis e algumas vezes quatro ou oito. A *espessura* dos *braços* contada sobre a perpendicular ao plano da roda faz-se geralmente igual a 15 centesimos da *largura* dos dentes e mais 2 millimetros. A *largura* dos *braços* vae diminuindo do *cubo* para as *pinas*. A *largura* junto ao cubo é igual ao quociente que se obtem dividindo pelo numero dos braços a somma de 30 millimetros com 18 vezes a *espessura* dos dentes.

Por meio d'estas regras praticas, ou empiricas, podem calcular-se as dimensões das diversas partes das *engrenagens* depois de fixadas a *espessura* e a *largura* dos dentes. Estas ultimas dimensões[1] não se podem determinar sem conhecer a força ou *pressão* a que os dentes precisam resistir.

§ 582. *Traçar uma engrenagem cylindrica de evolventes.*

Representem R e r (fig. 589) as projecções dos eixos, e supponha-se que a *velo-*

[1] Conhecida a força P avaliada em kilogrammas com que um dente carrega sobre outro póde calcular-se pela formula

$$l = \left(4 + \frac{P}{1000}\right)e$$

a relação que deve existir entre a *largura* l e a *espessura* e dos dentes e pela formula $e = K\sqrt{P}$ o valor absoluto de e.

Se acaso a primeira d'estas formulas der para $\frac{l}{e}$ um valor igual a 5 o coefficiente K terá algum dos seguintes valores dados pela experiencia:

Para dentes de ferro fundido $K = 1{,}05$ millimetros.

Para dentes de cobre ou de bronze $K = 1{,}31$ millimetros.

Para dentes de carpe, sorveira, pereira, etc. $K = 1{,}38$ millimetros.

Se aquella formula der para $\frac{l}{e}$ um valor diverso de 5, será necessario modificar os precedentes valores de K, multiplicando-os por $\sqrt{\frac{5e}{l}}$. A pressão P póde calcular-se, quando se conhecer a velocidade V de um ponto da *circumferencia primitiva* e o numero F de *cavallos-vapor*, que corresponde á força capaz de imprimir no mesmo ponto a velocidade V. A formula empregada n'este caso é a seguinte $P = \frac{75\,F}{V}$.

Sendo $P = 1432$ kilogrammas, por exemplo,

acha-se $$l = (4 + 1{,}432)e$$

ou $$\frac{l}{e} = 5{,}432.$$

O valor d'esta relação não differe muito de 5, e por isso não haverá grande inconveniente em usar, n'este caso, dos valores de K não modificados, para calcular e.

Querendo porém attender áquella differença, e suppondo que a roda dentada é de ferro fundido, ter-se-ha para o valor de K modificado,

$$1{,}05\sqrt{\frac{5}{5{,}432}} = 0{,}97$$

e por consequencia para a *espessura* dos dentes

$$e = 0{,}97\sqrt{1432} = 36{,}70$$

cidade angular da roda R deve estar para a *velocidade angular* de r na relação de 5 para 7.

Divida-se a distancia dos eixos em duas partes RA e Ar, que estejam entre si (§ 113) na rasão de 7 para 5.

Savary demonstrou que, para haver dois pares de dentes em contacto nas rodas de *evolventes*, é necessario que o *numero de dentes da menor das duas rodas seja igual, ou superior, a 16 mais o dobro da relação entre o menor e o maior raio*. Applicando esta regra ao nosso exemplo, acha-se que, sendo $\frac{5}{7}$ esta relação, será o numero dos dentes da roda r igual, ou maior, que a somma de 16 com $\frac{10}{7}$ isto é, igual, ou maior, que 17 e $\frac{3}{7}$. Não póde pois a roda r ter menos de 18 dentes. Na figura 589 tem esta roda 20 dentes e por isso á roda R competem 28 dentes.

Divida-se portanto em 20 partes iguaes a *circumferencia primitiva* de raio rA e em 28 a circumferencia de raio RA e determinem-se depois as *espessuras* mb e AM dos dentes das duas rodas, de modo que hajam as convenientes *folgas*, exactamente como se se tratasse de uma *engrenagem de flancos*. Pelo ponto de contacto A das *circumferencias primitivas* tire-se uma recta Tt, sobre a qual se baixa a perpendicular RC e descreva-se com o raio igual a esta perpendicular, e o centro em R, um circulo.

Imaginando que a recta Tt rola sobre a circumferencia de raio RC, o ponto A gera uma evolvente zAv, que forma o *perfil* da *face* do dente. Traçando em um car-

Este valor de e representa apenas o menor valor, que póde ter a *espessura* dos dentes, para que estes não fiquem fracos. Conhecido este valor minimo resta combina-lo com o raio do *circulo primitivo* e com a *folga* para determinar o valor definitivo de e.

Sendo n o numero de dentes, ou o *modulo*, e r o raio do *circulo primitivo*, é $\frac{2\pi r}{n}$ o *passo*, e ter-se-ha para *espessura* do dente

$$e = \frac{7}{15}\,\frac{2\pi r}{n}$$

se se quizer que (§ 576) a *espessura* seja igual a $\frac{7}{15}$ do passo.

Se for $r = 1000$ millimetros e $e = 36{,}70$ será

$$36{,}70 = \frac{2.22.1000}{15\,n}$$

e por consequencia $n = 79{,}9$.

Devendo n ser inteiro e inferior a 79,9 segue-se que o maior numero de dentes que póde ter a roda considerada é 79. Fazendo pois $n' = 79$, acha-se $e' = \frac{2.22.1000}{15.79} = 37$ millimetros. Substituindo este valor de e', que representa a *espessura* definitiva, na equação $l' = 5{,}432 \times e'$ tem-se $l' = 201$ millimetros. Continuando a calcular as outras dimensões das rodas, obtem-se

Espessura do cubo $= \frac{3}{2}e' + 10^{mm} = 65$ millimetros.

Largura do cubo $= 201 + \frac{1000}{10} = 301$ millimetros.

Largura da caixa da chaveta $= \frac{1000}{10} = 100$ millimetros.

Espessura da caixa da chaveta $= \frac{100}{2} = 50$ millimetros.

Espessura dos braços $= 0{,}15\, l' + 2^{mm} = 32$ millimetros.

Largura dos braços (sendo 6 o seu numero) junto ás *pinas* $= \frac{18\,e' + 30^{mm}}{6} = 116$ millimetros.

N'este exemplo suppoz-se que se queria dar á roda o maximo numero de dentes, que ella deve ter, na pratica convirá escolher um numero inferior a 79,9, porém que não torne o traçado muito trabalhoso. Qualquer que seja o numero escolhido não será difficil, á vista d'este exemplo, calcular as dimensões correspondentes a esse numero. Estas formulas praticas, de que se fez uso na presente nota, encontram-se na *Publication industrielle des machines, outils et appareils* de Armengaud Senior, tomo 9.º, pagina 186 e seguintes.

tão esta evolvente e cortando o cartão ao longo d'esta linha, é facil descrever os perfis das duas faces de cada um dos dentes da roda R.

Baixando do centro r uma perpendicular rC_1 sobre Tt, descrevendo com o raio rC_1 um circulo e depois a evolvente z_1Av_1 d'este circulo gerada pelo ponto A da recta Tt, obtem-se o perfil de um dos dentes da roda r.

Determinada a *altura* dos dentes da roda R, por exemplo, e por consequencia o *circulo de chanframento* $vuv'u'v''$, é facil determinar a profundidade do *intervallo* entre os dentes da outra roda r. Basta ver onde está o ponto y commum á linha rR dos centros e á *circumferencia de chanframento*, e descrever do ponto r com um raio rw, um pouco menor que ry, uma circumferencia de circulo.

A parte do *intervallo* comprehendida entre os circulos de raio rw e rC_1 póde ser limitada por linhas rectas, passando por r e pelos pontos em que a circumferencia de raio rC_1 encontra as *evolventes*, que contornam os dentes de r. Na pratica convem substituir os angulos formados por estas rectas tiradas de r com a circumferencia de raio rC_1 por pequenos arcos de circulo tangentes ás mesmas rectas e a esta circumferencia. Os *intervallos* dos dentes da roda R determinam-se como os da roda r.

O angulo tAR, ou TAr, formado por Tt com a linha dos centros costuma fazer-se de 75 graus.

A figura mostra que ha tres pares de dentes em contacto, e que os pontos de contacto são o ponto A commum aos *circulos primitivos* e dois pontos designados por a letra x collocados sobre Tt, um de um lado da linha dos centros e outro do outro lado da mesma linha. A recta Tt chama-se *linha dos contactos*.

§ 583. O que fica exposto mostra que o traçado de uma roda de evolventes é independente do traçado da outra. Não acontece o mesmo com as *engrenagens de flancos*, porque o perfil dos dentes de uma das rodas depende n'estas engrenagens do raio do *circulo primitivo* da outra roda. D'esta consideração resulta que uma roda de *flancos* só póde engranzar com outra determinada roda de *flancos*, emquanto a mesma roda de evolventes póde engranzar com uma infinidade de outras rodas da mesma especie[1]. Outra vantagem, postoque menos importante, de que gosam as *rodas de evolventes*, consiste em que as rodas não deixam de funccionar bem quando a distancia rR dos centros augmenta, ou diminue, pouco. Esta vantagem faz com que possam continuar a servir estas engrenagens, mesmo depois das superficies dos dentes estarem alguma cousa gastas pelo attrito, comtanto porém que o gasto seja uniforme. Em compensação nas *engrenagens de evolventes* a *fricção* é relativamente maior que nas de *flancos*.

Theoricamente é possivel construir *engrenagens interiores de evolventes*, na pratica porém não se empregam estas engrenagens por estarem sujeitas a uma fricção ou attrito muito grande. Em geral as *engrenagens interiores*, sejam ou não de *evolventes*, raras vezes se empregam.

§ 584. Na pratica evita-se pôr em contacto duas rodas das quaes uma tenha o diametro maior que o quadruplo ou quintuplo do diametro da outra. Quando a relação das velocidades de dois eixos deve exceder o numero 4, ou 5, empregam-se outras rodas dentadas montadas sobre eixos supplementares.

[1] Ha uma outra especie de engrenagens, chamadas *engrenagens epicycloidaes*, nas quaes se pretende conciliar em parte as vantagens das rodas de *flancos* com as de *evolventes*. Nas *engrenagens epicycloidaes* os perfis dos dentes são epicycloides, como nas de *flancos*, com a differença porém que n'estas o diametro do circulo gerador da epicycloide é igual ao *raio primitivo* da roda *conjugada* e n'aquellas o diametro é arbitrario. Por este modo é possivel construir um grande numero de rodas dentadas capazes de *engranzar*, ou endentar, com uma só roda.

A figura 590 (estampa 90) apresenta um exemplo de um systema de rodas dentadas. Sobre o primeiro eixo *V* está montada uma roda dentada *R*, que transmitte o movimento a um carrete *c'* montado sobre um segundo eixo. Com este eixo move-se outra roda *R'* que, engranzando com o carrete *c*, dá movimento ao terceiro eixo.

Em geral n'um systema de rodas dentadas o primeiro eixo sustenta uma roda, o ultimo um carrete e cada um dos intermedios uma roda e um carrete. *A relação entre os numeros de voltas dadas no mesmo tempo pelo primeiro e ultimo eixo é igual á relação entre o producto dos numeros de dentes de todos os carretes e o producto dos numeros de dentes de todas as rodas.*

§ 585. *Construir uma engrenagem de roda e haste dentada* ou uma *cremalheira.*

Póde considerar-se o traçado d'esta engrenagem como o de um systema qualquer de rodas dentadas, no qual se tenham introduzido as modificações, que devem resultar de se suppor que um dos dois *raios primitivos* foi sempre crescendo até a sua circumferencia ter tão pequena curvatura, que se confunda em grande extensão com uma linha recta. A cada systema de rodas dentadas corresponde, pois, uma especie de *engrenagem de roda e haste dentada.*

A figura 591 mostra o traçado de uma engrenagem de *roda e haste,* na qual esta sómente tem flancos, e portanto representa o caso particular em que nas engrenagens das figuras 583 e 584 a *circumferencia primitiva* de raio *C A* se transforma em linha recta.

Sendo *CA* o raio do *circulo primitivo* (fig. 591) do *carrete C* e *U f* uma tangente ao mesmo circulo, dividir-se-ha a circumferencia d'este em tantas partes iguaes *A B, BD, DE,* etc., quantos os dentes (nunca menos de 10), que deve ter o *carrete,* e marcar-se-hão na tangente *U f* grandezas *A b, b d,* etc., iguaes entre si e ás divisões da circumferencia. O perfil *Av* da face de um dente do *carrete* é a *evolvente* do circulo de raio *CA* gerada pelo ponto *A* da tangente *Uf.* O modo de construir (§ 264) esta *evolvente* é já conhecido.

A *haste dentada,* ou *cremalheira* tem, n'este systema de engrenagens, sómente *flancos.* Os perfis d'estes *flancos* são rectas perpendiculares a *Uf.*

Theoricamente o *carrete C* não precisa *flancos,* na pratica porém convem dar-lh'os, embora muito pequenos.

A figura 592 representa outra especie de *engrenagem* de *haste e roda;* n'esta porém a haste dentada tem, como a roda, os dentes salientes.

A circumferencia de raio *C A* é a *primitiva,* a tangente *U f* é tambem a *recta primitiva.* Para traçar esta *engrenagem* divida-se a circumferencia em partes iguaes (10 pelo menos), transportem-se as divisões para a recta *U f* e descreva-se a *evolvente A v* do circulo de raio *CA* e a *cycloide Au* gerada pelo circulo de diametro *C A* rolando sobre *Uf.* O resto da construcção não offerece difficuldade á vista da figura e depois do que se expoz nos outros systemas de rodas dentadas.

A figura 593 representa uma engrenagem de *roda e haste dentadas* tendo esta dentes obliquos.

O raio da *circumferencia primitiva* é tambem *CA* n'esta figura, *Uf* é a *recta primitiva.* Depois de dividida em partes iguaes, tanto a *circumferencia* como a *recta primitiva,* tira-se uma obliqua *T t* pelo ponto de contacto *A* das *linhas primitivas* e levanta-se-lhe uma perpendicular *Cr,* que passe pelo centro *C.* Descripta a circumferencia de raio *C r,* que é tangente em *r* á obliqua *Tt,* deve traçar-se a *evolvente Av* d'esta circumferencia.

A *evolvente* construida desde a origem, que está na circumferencia de circulo de raio *Cr,* representa a fórma que deve ter o perfil da face do dente do *carrete C.*

D'aquella circumferencia para dentro continua-se o perfil tirando uma recta, que passe pelo centro C.

Os perfis dos dentes da haste são rectas perpendiculares a Tt, ou á sua symetrica $T_1 t_1$, conduzidas pelos pontos de divisão da recta Uf. Os pontos de contacto x dos dentes estão sempre sobre a recta Tt, ou $T_1 t_1$, conforme o sentido do movimento.

Podia tambem construir-se uma *haste* com *dentes salientes* engrazando n'uma roda de *flancos* simples. O traçado d'esta engrenagem não offerece, porém, novidade alguma, e por isso é desnecessario entrar em explicações a tal respeito [1].

§ 586. *Construir uma engrenagem cylindrica de* White.

N'estas engrenagens as superficies dos dentes não são cylindricas, e por isso cortando-as por planos perpendiculares ao eixo da roda, e por consequencia parallelos entre si, obtêem-se curvas identicas, cujas projecções horisontaes não se confundem.

Na figura 594 o ponto R representa a projecção do eixo da roda sobre um plano perpendicular ao mesmo eixo, e a recta RA é o raio do *circulo primitivo.*

As linhas $1-1_1-a-3$, $2-2_1-b-4$, $3-3_1-c-5$, $4-4_1-d-6$, $5-5_1-e-e_1$, $6-6_1-f-f_1$ são as projecções horisontaes das secções feitas n'um dente pelos planos horisontaes equidistantes $1'x'$, $2'x'_1$, $3'x'_2$, $4'x'_3$, $5'x'_4$ e $6'x'_5$.

A linha $5-5_1-e-x_4-e_1$ representa tambem a projecção horisontal d'uma linha situada no plano $1'h'$. Esta linha determina a base superior de um outro dente, cuja base inferior é $gkmn$.

Os pontos $(1-1')$, $(2-2')$, $(3-3')$, $(4-4')$, $(5-5')$ e $(6-6')$, que podem considerar-se como posições diversas do ponto $(1-1')$ quando a linha $(1-1_1-a-3, 1'-1'_1-a'-3'')$ desce de modo que vae successivamente confundir-se com as outras secções horisontaes, estão todos sobre uma helice $(1-2-3-4-5-6, 1'-2'-3'-4'-5'-6')$ (§ 427).

Similhantemente os pontos $(1_1-1'_1)$, (a, a') e $(3-3'')$ estão sobre tres helices differentes, cujas projecções horisontaes são os arcos 1_1-6_1, af e $3f_1$.

Obtem-se a projecção vertical da primeira d'estas quatro helices dividindo o arco $1-6$ de circulo e a recta hh', que representa a *largura* commum dos dentes e das *pinas,* em igual numero de partes iguaes, 5 por exemplo, e tirando pelos pontos de divisão 2, 3, 4, 5 do arco perpendiculares á *linha de terra* e pelos pontos de divisão de hh' parallelas á mesma linha.

Dividindo depois os arcos de circulo 1_1-6_1, af e $3f_1$ em tantas partes iguaes quantas forem as divisões de hh', e procedendo exactamente como para a primeira helice, acham-se as projecções verticaes $1'_1-3'_1-6'_1$, $a'c'f'$, $3''-5''-f'_1$ das outras helices.

Vê-se por esta construcção, que os dentes, em vez de serem cylindricos, são *helicoides* (§ 465) e que as geratrizes rectilineas das superficies cylindricas, que formam os dentes, são substituidas por helices nas engrenagens de White.

O *contorno apparente* do dente representado na figura 594, isto é, a linha alem da qual deixa de ser visivel a projecção vertical da superficie do dente, tem por pro-

[1] Ha ainda uma especie de *haste dentada* ou *cremalheira,* na qual os dentes são cylindros rectos perpendiculares ao plano da roda. N'esta engrenagem os perfis dos dentes da roda são *evolventes* do *circulo primitivo* da mesma roda.

Podem tambem os dentes cylindricos, ou *fuzelos,* existir na roda, e n'este caso os perfis dos dentes da *haste* dependem da cycloide gerada pelo rolamento, sobre a *recta primitiva,* da circumferencia que contém os centros das secções rectas (§ 409) dos *fuzelos.* Esta roda de *fuzelos* chama-se em geral *roda de lanterna,* ou de *varanda,* se os *fuzelos* estão presos por ambos os extremos a dois *pratos* parallelos, e *roda de corôa* ou de *mão,* se os mesmos *fuzelos* estão apenas seguros por um dos extremos a uma só roda ou *prato.*

As *rodas de fuzelos* podem tambem empregar-se combinando-as com outras *rodas dentadas.*

jecção horisontal $xx_1x_2x_3x_4x_5$ e por projecção vertical $x'x'_1x'_2x'_3x'_4x'_5$ e determina-se procurando para cada secção horisontal $1-1_1-a-3$, $2-2_1-b-4$, etc., os pontos x, x_1, etc., em que a tangente á secção é perpendicular á *linha de terra*.

Depois de saber representar um dente não póde haver difficuldade em construir as projecções d'uma engrenagem, basta proceder exactamente como nas outras especies de engrenagens, fazendo depois em relação a cada um dos dentes o que está representado na figura 594. A figura 595 representa uma *engrenagem cylindrica* de White, a figura 594 contém, em escala dupla da da figura 595, as projecções horisontaes de dois dentes consecutivos e a vertical de um d'elles.

As helices nas duas rodas devem ter sentido contrario, por consequencia se forem *sinistrorsum* as da roda *R*, como acontece na figura 595, deverão ser *dextrorsum* as do carrete *C*.

As helices situadas nos *cylindros primitivos*, cujos raios são *RA* e *CA*, devem ter por projecções horisontaes arcos de igual comprimento, a fim de que as suas inclinações, ou declives, sejam iguaes.

Podem construir-se rodas helicoides, ou de White, de qualquer dos systemas adoptados nas outras rodas cylindricas.

§ 587. As engrenagens de White, ou helicoides, chamam-se tambem engrenagens de *rolamento*.

As engrenagens de rolamento propostas em 1808 pelo mechanico inglez White gosam de duas propriedades, que por muito tempo foram julgadas incompativeis. Estas duas propriedades são, velocidade angular n'uma rasão constante e fricção de rolamento.

As engrenagens ordinarias gosam da primeira das referidas propriedades, porém os dentes de uma d'ellas escorregando sobre os da outra, em vez de rolarem, dão origem a uma especie de fricção chamada de escorregamento, que é tanto mais sensivel quanto maior for a normal *Ax* (fig. 583 e 584).

Nas engrenagens de White os dentes rolam uns sobre os outros, sem escorregarem, e por isso é nulla a fricção de escorregamento. As engrenagens de rolamento, ou de White, não podem comtudo resistir a pressões tão fortes como as cylindricas, em consequencia dos dentes se tocarem só por um ponto, e por isso unicamente são empregadas nas machinas em que se exige maior precisão que solidez. Breguet obteve com estas engrenagens velocidades angulares de perto de 8000 voltas por segundo[1].

Muito antes de White já Hooke, em 1666, tinha imaginado um artificio com o qual obtinha uma engrenagem, em que se realisavam as duas vantagens de ser constante a relação das velocidades angulares e tão pequena quanto convier a fricção de escorregamento desenvolvida no contacto dos dentes.

Comprehende-se o artificio de Hooke, que depois caíu no esquecimento, imaginando primeiro que a roda é formada por 3 ou 4 rodas iguaes sobrepostas umas ás outras e depois que ficando immovel uma das rodas extremas, a immediata descreve, em torno do eixo commum a todas, uma certa rotação, e que a que se segue a esta descreve no mesmo sentido uma rotação dupla, e assim successivamente, vindo portanto a roda a apresentar uma disposição analoga á dos degraus de uma escada.

Vê-se pois que nas engrenagens de Hooke a impulsão exerce-se primeiro nas partes das rodas que constituem, por assim dizer, o degrau superior, depois deixa de haver contacto entre os dentes d'este degrau e começa a exercer-se a acção no degrau

[1] Veja-se *Traité théorique et pratique des engrenages*, por J. N. Haton de la Goupillière, pagina 35.

inferior e assim até ao ultimo, depois do qual tornam a reproduzir-se os contactos pela mesma ordem de cima para baixo.

Por este modo Hooke não aniquilava a fricção de escorregamento, apenas a reduzia tanto mais quanto maior era o numero de degraus em que imaginava decomposta a *largura* dos dentes.

White completou a solução do problema, isto é, destruiu completamente a fricção de escorregamento, reduzindo tanto quanto se póde imaginar a altura dos degraus e tornando indefinido o seu numero.

§ 588. *Construir uma* **engrenagem de angulo** *ou* **conica** *pelo methodo pratico de Tredgold.*

Representem OC e OR (fig. 596) os eixos concorrentes das duas *rodas conicas* e supponha-se que a relação entre as *velocidades angulares* d'estas rodas deve ser tal que emquanto a primeira dá duas voltas a segunda apenas completa uma.

Para determinar a *linha de contacto* OE dos *cónes primitivos* tirem-se parallelamente aos eixos duas rectas quaesquer, sobre as quaes se marquem partes CD e RS que estejam na rasão de 1 para 2, isto é, na rasão em que devem existir as velocidades correspondentes aos eixos OR e OC, e conduzam-se pelos extremos D e S parallelas a OC e OR. O ponto E commum a estas parallelas Dd e Ss pertence á recta OE, que se precisa determinar.

As figuras 597, 598 e 599 representam duas *rodas conicas*, cada uma das quaes está projectada sobre o plano que contém os eixos, ou sobre um que lhe seja parallelo, e sobre um plano perpendicular ao proprio eixo.

Conhecida a relação das *velocidades angulares* determina-se, pelo processo empregado na figura 596, a recta OA e escolhe-se n'ella um ponto A mais ou menos afastado do ponto de concurso O dos eixos, conforme convem dar ás rodas maiores ou menores dimensões. Pelo ponto escolhido A tiram-se as rectas AD e AB perpendiculares aos eixos OC e OR e iguaes respectivamente a duas vezes as distancias AC e AR.

As rectas AD e AB são os diametros de dois circulos, que se imaginam situados em planos perpendiculares aos eixos. As circumferencias descriptas dos centros C' e R' (fig. 598 e 599) com raios iguaes a CD e RB representam as projecções d'aquelles circulos sobre planos perpendiculares aos eixos das rodas. Tire-se pelo ponto A uma perpendicular vV á recta OA e imaginem-se dois *cónes de revolução*, tendo um por base o circulo de diametro AD e por vertice o ponto v, e o outro tendo por base o circulo AB e por vertice V.

Transportando a recta vV parallelamente a si mesma para v_1V_1 e descrevendo dos pontos v_1 e V_1 como centros, com os raios v_1A_1 e V_1A_1 iguaes a vA e VA, dois circulos, tem-se o desenvolvimento incompleto dos cónes, cujos vertices estão em v e V. Para completar este desenvolvimento seria necessario (§ 437) rectificar os circulos que servem de base aos cónes. Esta rectificação não é porém necessaria na pratica.

Dividam-se as circumferencias de raios $C'D'$ e $R'A''$ (fig. 598 e 599), como se ellas (§575) fossem *circumferencias primitivas* de duas rodas cylindricas, e transportem-se as divisões obtidas para as circumferencias de raios v_1A_1 e V_1A_1. Depois de estarem marcadas sobre estas circumferencias as *espessuras* e *intervallos* dos dentes, descrevem-se os perfis dos mesmos dentes, como se se tratasse de construir rodas de eixos parallelos. Na descripção d'estes perfis é necessario attender ao systema de engrenagem que se deseja construir. Na figura 597 uma das rodas é de *flancos* simplices e a outra é de *flancos* e *faces*. Se a engrenagem fosse de *evolventes*, ou de qualquer outro systema, o processo, que vae ser descripto, não soffreria mudança muito sensivel.

Para construir a roda de *flancos* procede-se do seguinte modo.

Depois de haver dividido, como se disse, a circumferencia de raio $C'D'$, projectam-se os pontos de divisão, taes como M' e Q', sobre a recta AD e une-se cada um dos pontos obtidos, M e Q, com O e com v. Marcando sobre vD uma parte vP igual a $v_1 P_1$ e conduzindo por P uma parallela a AD, acham-se pontos, como R e S, com os quaes facilmente se determina o contorno exterior da dentadura. Os pontos R e S, obtidos por este modo, unem-se tambem por linhas rectas com O. Tomando Aa igual á largura dos dentes, e conduzindo por a duas rectas ad e au respectivamente perpendiculares a OC e OA, tem-se um cóne com a base no circulo de diametro ad e com o vertice em u. Este cóne determina o contorno interior da dentadura, do mesmo modo que o cóne de vertice v determina o contorno exterior. Descrevendo o semi-circulo (fig. 597) de raio $C'd'$ igual a cd, procurando os pontos m', q', etc., em que a semi-circumferencia corta os raios dirigidos aos pontos de divisão, M', Q', etc., da circumferencia $C'D'$, projectando-os em m, q, etc., sobre ad, e unindo os pontos obtidos com u, têem-se as rectas mu, qu, etc., onde acabam superiormente os dentes. A profundidade qr, ms, etc., dos *intervallos* n'esta parte superior determina-se conduzindo pelo ponto p, commum ás rectas PO e du, uma recta parallela a da. O ponto s, por exemplo, deve tambem estar sobre a recta OS.

As projecções da outra roda R acham-se por modo similhante, apenas com a differença que resulta de serem limitados por *faces* curvas os dentes d'esta segunda roda.

A *profundidade* dos pequenos *flancos* da roda R determina-se tomando de V para B uma parte VG igual a $V_1 G_1$ e conduzindo por G uma parallela a BA. O circulo de raio $R' G'$ igual a RG representa, sobre a projecção feita n'um plano perpendicular ao eixo OR, a profundidade dos *flancos* na parte mais larga da roda.

Marcando de V para B uma grandeza VL igual a $V_1 L_1$ e conduzindo por L a parallela á recta BA, tem-se a projecção do circulo de *chanframento* dos dentes n'um dos extremos da roda. A outra projecção do mesmo circulo acha-se facilmente na figura 599. Sobre esta projecção construem-se divisões iguaes ás que se acham na circumferencia de raio $V_1 L_1$ e tiram-se depois pelos pontos obtidos, taes como X' e Y', rectas parallelas a OR. Por este modo se obtêem os pontos X, Y e todos os analogos.

Os pontos (E, E') e (F, F') acham-se exactamente como (X, X') e (Y, Y').

As curvas $X'F'$, $Y'E'$ e XF, YE têem tão pequena extensão, que é possivel descreve-las á simples vista; querendo porém determinar rigorosamente alguns dos seus pontos, descrever-se-ha de V_1 com um raio comprehendido entre $V_1 A_1$ e $V_1 L_1$ um arco, e determinar-se-hão os pontos em que elle corta os perfis dos dentes.

As projecções d'estes pontos de intersecção acham-se pelo mesmo processo que se empregou para todos os outros pontos. Na figura 599 está indicada esta construcção.

O contorno interior da dentadura construe-se como o exterior.

§ 589 *Construir uma engrenagem de* **parafuso sem fim** *com uma roda.*

Esta engrenagem construe-se como a de *haste dentada*, ou *cremalheira*, apenas com a differença de serem *helicoides* (§ 427) as superficies, que limitam lateralmente os dentes. Ha por consequencia tantas variedades de *parafusos sem fim* quantos são os systemas de *hastes dentadas*, que se conhecem. Na engrenagem de parafuso os dois eixos de rotação são perpendiculares entre si, porém não existem no mesmo plano.

Cortando uma engrenagem de parafuso por um plano perpendicular ao eixo da roda e contendo o eixo do parafuso obtem-se o traçado de um dos systemas de cremalheiras já conhecidos.

Representem C e $O'O''$ (fig. 600) as projecções dos eixos da roda e do parafuso sobre o plano secante acima definido.

Construa-se a cremalheira indicada na figura, suppondo que CA é o raio do *circulo primitivo* da roda C e a tangente mA a *recta primitiva* da *haste dentada*, e descreva-se depois (§ 475) o parafuso formado pelo movimento helicoide dos perfis dos dentes da mesma haste, tomando para segundo plano de projecção um plano TL perpendicular ao eixo do parafuso.

O parafuso representado na figura 600 tem só um filete e por isso o perfil $bdhl$ de um dos dentes da haste vae confundir-se, no fim de uma rotação, com o perfil $b_1 A k_1 l_1$ do dente contiguo. Ha engrenagens, porém, em que o parafuso tem mais de um filete e outras em que o perfil, que gera a rosca, não consta sómente de flancos rectilineos.

O *passo do parafuso* (§ 475) será igual a uma, duas ou tres vezes o *passo da roda* (§ 575), conforme o parafuso houver de ser de um, dois ou tres filetes.

Depois de construido o parafuso, isto é, depois de traçadas as helices, que passam pelos vertices do perfil da *haste dentada*, resta representar as faces helicoides dos dentes da roda. Para isto se conseguir, é necessario conhecer a inclinação commum das helices do parafuso e a *largura* da roda.

Para ter a inclinação de uma das helices, por exemplo, da que passa por A, tira-se no ponto A' a tangente á circumferencia de raio OA', marca-se n'ella uma distancia $A'm$ igual á quarta parte da mesma circumferencia rectificada e baixa-se do extremo uma perpendicular mr igual a MC, que tambem é a quarta parte do *passo do parafuso*. A recta $A'r$ tem a mesma inclinação que as helices.

Suppondo que $A'z$ (fig. 600) é igual a $A'Z$ e a metade da largura da roda, tome-se uma abertura de compasso igual a zy e marque-se na *circumferencia primitiva* da roda, a contar dos pontos ss do traçado da *cremalheira*, arcos st e sq iguaes a zy.

Construindo as figuras $u\,t\,u_1\,f_1\,t\,f$, $x\,q\,x_1\,h_1\,q\,h$ iguaes a $v\,s\,v_1\,g_1\,s\,g$ e repetindo a construcção, para todos os dentes da roda que engranza com a *haste dentada*, tem-se a projecção da roda sobre um plano perpendicular ao seu eixo.

A projecção das helices relativas aos dentes da roda sobre um plano perpendicular ao eixo do parafuso acha-se facilmente. Na figura 600 cada helice $(uvx, u'v'x')$, por exemplo, está apenas determinada por tres pontos.

Obter-se-íam mais dois pontos de cada helice se se dividissem em duas partes iguaes tanto os arcos st e sq, como as metades $A'z$ e $A'Z$ da *largura* da roda.

§ 590. Na pratica quasi sempre é o *parafuso* que manda a roda; quando, porém, é o *parafuso* que deve obedecer á roda, convem dar á rosca uma inclinação que não seja inferior a 45 graus.

Por cada volta da roda dá o parafuso, se tiver só um filete, tantas voltas quantos são os dentes da roda. Se o parafuso tem mais de um filete (§ 471) cada volta do *parafuso* faz passar tantos dentes da roda quantos forem os filetes do parafuso.

O *parafuso sem fim* toma o nome de *parafuso tangente* quando os dentes da roda com que elle engranza, em vez de serem limitados exteriormente por uma superficie cylindrica, têem na parte exterior uma cavidade similhante á *gola* de uma roldana, na qual penetra a rosca do parafuso. Para construir a roda, que ha de engranzar com um *parafuso tangente*, é necessario imaginar diversos planos perpendiculares ao eixo da roda, traçar em cada um as secções feitas por elle no cylindro primitivo da roda e na rosca do parafuso, e proceder com estas secções como se se tratasse de determinar os perfis dos dentes da roda correspondentes á cremalheira formada pela secção plana do parafuso. A serie de todos os perfis relativos aos diversos planos secantes dá a superficie que limita exteriormente os dentes da roda.

No *parafuso sem fim* propriamente dito, cada dente da roda toca o parafuso só n'um ponto, situado no plano passando pelo eixo do parafuso perpendicularmente ao eixo da roda; no *parafuso tangente* o contacto do dente verifica-se simultaneamente em todos os pontos de uma linha, que varia de posição sobre a superficie do dente.

Os *parafusos tangentes* empregam-se principalmente nas machinas de dividir.

Tambem se emprega ás vezes, para substituir o *parafuso sem fim*, uma *espiral*, isto é, uma roda tendo n'uma das faces uma especie de rosca disposta em *espiral* de Archimedes (§ 313). Dentro do espaço circumdado por esta rosca devem existir constantemente dois dentes da roda, que ha de ser movida pela *espiral*, a fim de que o movimento d'esta possa transmittir-se áquella.

Combinando o *parafuso sem fim* com a *espiral*, póde fazer-se com que uma *arvore* ou *veyo* animado de movimento de rotação bastante rapido obrigue outra *arvore* ou *veyo* a dar no mesmo tempo muito menor numero de voltas. Basta suppor que um *parafuso sem fim* põe em movimento uma roda, que tem 50 dentes, e que esta, por meio de uma *espiral* construida n'uma das faces, dá movimento a outra roda de 50 dentes, para obter uma combinação na qual a ultima roda só dá uma volta depois do parafuso ter completado 2500 voltas.

Em qualquer dos systemas denominados, *parafuso sem fim*, *parafuso tangente espiral*, os eixos, entre os quaes se transmitte o movimento, não estão (§ 330) no no mesmo plano, porém são perpendiculares entre si.

A transmissão de movimento entre eixos, que não existem no mesmo plano, póde fazer-se por uma nova especie de engrenagens composta de *rodas hyperboloidaes*, ou por um systema de *rodas de angulo* ou *conicas* no qual haja uma roda intermedia, cujo eixo encontre os dois eixos não existentes no mesmo plano. A difficuldade de construir as *rodas hyperboloidaes* faz com que ellas rarissimas vezes tenham emprego.

§ 591. Entre as machinas mais simples e mais usuaes distinguem-se naturalmente as bombas.

As bombas são machinas destinadas a elevar liquidos e consistem essencialmente em uma especie de caixa cylindrica chamada *corpo de bomba*, fechada interiormente por uma tampa, movel ao longo do cylindro, chamada *embolo*, e posta em communicação com o exterior por dois tubos ou canaes, um por onde entra a agua e outro por onde sae. As aberturas que communicam estes tubos ou canaes com o corpo de bomba, são munidas de tampas ou *valvulas*.

As bombas podem elevar a agua por trez modos diversos; a saber: por *aspiração*, por *pressão* ou por *aspiração* e *pressão* e por isso podem distinguir-se em *bombas aspirantes*, *bombas prementes* e *bombas aspirante-prementes*.

As figuras 601 e 602 representam duas projecções verticaes ou alçados, um de lado e outro de frente, e um corte vertical (fig. 603) d'uma especie de bomba aspirante. A é o *corpo de bomba*, B é o *tubo d'aspiração* por onde entra a agua, H é a valvula que estabelece ou interrompe a communicação do tubo com o corpo de bomba, C e D o *tubo d'esgoto* por onde sae a agua, quando a valvula H'' está aberta. Em E está o embolo, que é uma especie de tampa movel da parte do corpo de bomba, que lhe fica inferior. O embolo E tem na parte inferior uma valvula H' e na superior uma haste F por intermedio da qual se lhe communica um movimento de vae-vem, ora ascensional, ora descensional. As trez valvulas, H, H' e H'' somente se abrem de baixo para cima e a disposição de H e H' é tal que, quando uma está aberta, a outra deve estar fechada e vice-versa. A valvula H'' serve apenas para evitar que retroceda para o corpo de bomba a agua, que já tiver chegado ao tubo d'esgoto.

Quando o embolo sobe, augmenta o espaço comprehendido entre elle e o corpo de bomba, rarefazendo-se portanto o ar contido n'elle, fecha-se a valvula H' e abre-se a valvula H, dando passagem para o corpo de bomba a uma parte do ar, que estava fechado no tubo d'aspiração e que é substituido n'elle por uma pequena columna d'agua, que se eleva do poço ou reservatorio. Logo que o embolo começa a descer, fecha-se a valvula H, deixando portanto de subir a agua no tubo d'aspiração, e abre-se a valvula H', dando saida ao ar do corpo da bomba. Continuando o embolo a subir e a descer, continua a saír ora agua do reservatorio para o tubo d'aspiração, ora ar do corpo da bomba para o exterior, até que a agua chegando a penetrar no corpo da bomba, e conseguindo abrir a valvula H' e passar para cima do embolo, durante o movimento descensional d'este, é elevada pelo mesmo embolo no seu movimento ascensional, até chegar a abrir a valvula H'' pela abertura da qual sae para fóra da bomba.

A *bomba premente* differe da *bomba aspirante*, 1.º em não ter *tubo d'aspiração*, 2.º em não ter valvula H' no embolo, 3.º em o *tubo d'esgoto* communicar com a parte inferior do corpo de bomba, emquanto na aspirante communica com a parte superior. Na *bomba premente* é o proprio corpo da bomba, que está mettido na agua e esta, comprimida no corpo da bomba durante a descida do embolo, fecha a valvula H, e escapa-se pelo tubo d'esgoto, obrigando a abrir-se a valvula, que lhe dá passagem para elle.

A *bomba aspirante-premente* reduz-se a uma bomba premente augmentada com um tubo d'aspiração, ou a uma bomba aspirante sem valvula no embolo e communicando com o tubo d'esgoto pela parte inferior do corpo da bomba.

CAPITULO XXI

THEORIA GERAL DAS SOMBRAS. SOMBRAS DE FIGURAS PLANAS

§ 592. A representação graphica d'um objecto não deve reputar-se completa (§ 2) emquanto não estiverem desenhadas as sombras e, em geral, quaesquer effeitos devidos á acção exercida pelo objecto sobre a luz, que o alumia directa, ou indirectamente.

Para se proceder com methodo no estudo das sombras, convem attender em particular ás sombras devidas a um só corpo alumiado por um ponto luminoso. E' evidente, que n'estas circumstancias uma parte da superficie do corpo estará alumiada ou esclarecida e a restante ficará ás escuras, isto é, na sombra. A observação e o raciocinio mostram, porém, que nem a primeira é uniformemente esclarecida em toda a sua extensão, nem a segunda está absolutamente privada de luz.

Reconhece-se, que a parte alumiada não o é egualmente, imaginando a superficie do corpo composta de infinitos elementos planos, como se fôra um polyedro de faces extremamente pequenas em todas as direcções, e notando que a mesma quantidade de luz incidindo sobre um d'aquelles elementos o alumiará tanto mais intensamente, quanto menor fôr a distancia d'elle ao ponto luminoso e maior o angulo formado pelo seu plano com o raio luminoso incidente.[1]

Prescindindo da differença entre as distancias do ponto luminoso aos diversos elementos planos da superficie, porque, na generalidade dos casos, todas aquellas distancias se poderão reputar sensivelmente eguaes, bastará attender á obliquidade maior ou menor com que a luz actua sobre o corpo alumiado. E, attendendo a esta obliquidade, verificar-se-ha, que, entre todos os elementos, haverá um, mais intensamente alumiado ou esclarecido do que todos os outros, sobre o qual a luz incidirá formando maior angulo com o seu plano. Em torno d'elle seguir-se-hão naturalmente outros elementos, que receberão a luz sob maior obliquidade e que por isso estarão menos fortemente alumiados, similhantemente os elementos, que se seguirem após estes, receberão a luz ainda com maior obliquidade e por consequencia mais fracamente e assim successivamente irá decrescendo a intensidade da luz recebida, á medida que for diminuindo a sua inclinação sobre os pequenos elementos planos alumiados, até que, annullando-se ella, isto é, *tornando-se os raios luminosos tangentes á superficie do corpo*, annullar-se-ha a intensidade da luz recebida e ter-se-ha uma serie de elementos privados de luz, isto é, cobertos de sombra. Estes elementos determinam sobre a superficie do corpo uma linha, que se chama *linha de sombra propria*, *linha de separação de sombra e luz* ou simplesmente *linha separatriz*. A parte alumiada da superficie do corpo, isto é, a que está áquem da linha de sombra relativamente ao ponto luminoso, apresentará, pois, uma claridade, que successivamente se irá desvanecendo, até se confundir com a sombra propria do corpo.

§ 593. A sombra d'um corpo somente seria absoluta e uniforme, se por ventura elle e o ponto luminoso estivessem n'um espaço completamente privado de ar e de quaesquer corpos estranhos. Não sendo assim, cada uma das particulas de ar atmospherico, alumiada directamente pelo ponto luminoso e indirectamente por cada uma das outras particulas, tornar-se-ha um novo foco luminoso, que, actuando, como o primitivo, sobre o corpo, alumiará uma das suas partes e deixará na sombra a outra. Estes novos e innumeros focos luminosos, necessariamente muito mais fracos do que o fóco de luz directa, alumiam evidentemente assim os claros, como os escuros produzidos pela falta de luz directa, exercendo comtudo, muito maior influencia nos escuros, que por este motivo deixam de ficar absolutamente privados de luz. A luz emanada das differentes particulas de ar chama-se *luz atmospherica* e produz, sobre a parte do corpo privada de luz directa, effeitos analogos aos que a luz emittida directamente pelo ponto luminoso produz sobre a outra parte do mesmo corpo. Haverá, pois, na sombra do corpo uma parte mais alumiada pela luz atmospherica do que todas as outras, á roda d'ella existirão outras menos alumiadas ou mais escuras, e assim se succederão umas ás outras, até se chegar á linha de sombra propria, onde a sombra será mais forte.

§ 594. De cada um dos pontos alumiados d'um corpo irradia em todas as direcções uma parte da luz recebida. É esta luz, que torna os corpos visiveis. A intensidade da luz emittida por cada ponto do corpo depende da intensidade da luz recebida por elle e é tanto maior,[2] quanto menor fôr a sua distancia ao olho do

[1] É principio demonstrado, que a *intensidade da luz recebida n'um ponto d'uma superficie plana varia na rasão inversa do quadrado da distancia do ponto luminoso ao ponto illuminado e na rasão directa do seno do angulo formado pelo raio luminoso com a superficie plana.*

[2] Admitte-se, em geral, que a *intensidade da luz emittida ou reflectida por cada ponto d'uma superficie plana, varia na rasão inversa do quadrado da distancia do ponto ao olho do observador e na rasão directa do seno do angulo formado por esta distancia* (raio visual) *com a superficie plana.*

observador e maior o angulo formado pelo raio visual (§ 486) com o elemento plano, que contem o mesmo ponto.

O observador verá, pois, mais distinctamente do que todos os outros, aquelle ponto do corpo, que lhe emittir luz com maior intensidade, e deixará de vêr os pontos de contacto dos raios visuaes tangentes á superficie do corpo, ainda mesmo que esses pontos estejam alumiados, em consequencia de ser nulla a inclinação dos raios visuaes sobre os elementos planos, a que pertencem os pontos considerados. Chama-se *linha de contorno apparente*, ou simplesmente *contorno apparente* a linha que passa pelos pontos de contacto de todos os raios visuaes tangentes á superficie do corpo e chama-se *ponto brilhante*,[1] ao que o observador vê mais distinctamente. O observador não vê ponto algum do corpo collocado álem do contorno apparente, e, dos que estão áquem, apenas verá os que não estiverem dentro do espaço limitado pela linha de sombra propria. Desde o ponto brilhante até qualquer dos pontos situados n'essa linha, que limita a parte visivel do corpo, a visibilidade dos diversos elementos da superficie vae successivamente diminuindo, até de todo se extinguir.

§ 595. Quando o corpo é alumiado por dois pontos luminosos, as duas linhas de sombra, que lhes correspondem, dividem a superficie do corpo em quatro regiões distinctas; uma, que está na *sombra* propriamente dita, não recebe luz directamente nem de um nem de outro ponto luminoso, outra, que é a região alumiada ou esclarecida, recebe luz directa de ambos os pontos luminosos, e cada uma das restantes recebe luz somente de um dos dois pontos. Se o corpo fôr alumiado por trez pontos luminosos haverá similhantemente uma região que, por não receber luz alguma de nenhum dos trez pontos, estará na sombra, outra que receberá luz de todos elles e entre aquella e esta, existirão porções de superficie que receberão luz, ou só de dois dos trez pontos, ou apenas de um d'elles. Chama-se *penumbra* propria á parte da superficie do corpo, que não recebe luz de todos os pontos luminosos, mas somente de alguns d'elles.

§ 596. Quando existe um só ponto luminoso, chama-se *cóne de sombra* á superficie conica formada por todos os raios luminosos tangentes á superficie do corpo.

Todo o espaço fechado dentro d'este cóne, álem do corpo illuminado, está privado de luz directa, está na sombra. É a esta sombra, que se chama *sombra produzida* ou *sombra projectada* pelo corpo.

Se o corpo fôr alumiado por dois ou mais pontos luminosos, haverá evidentemente *sombra produzida* propriamente dita e *penumbra produzida*.

Os corpos produzem sombra uns nos outros. A sombra produzida por um corpo sobre outro é determinada pela intersecção da superficie d'este segundo corpo com os cónes de sombra do primeiro.

Sabendo-se construir a sombra propria e produzida d'um corpo alumiado por dois ou mais pontos luminosos, é facil conceber, como se poderão determinar as sombras de um corpo alumiado por qualquer superficie luminosa, visto que esta se póde imaginar reduzida a uma successão d'infinitos pontos luminosos.

Quando, em vez de um, ha muitos pontos luminosos, ou mesmo um corpo luminoso, o corpo alumiado apresenta muitos *pontos brilhantes*, ou uma infinidade d'elles. A reunião de todos os *pontos brilhantes* fórma uma *imagem brilhante*.

[1] Está demonstrado pela experiencia e pelo calculo que a *normal á superficie no ponto brilhante está no plano determinado pelas duas rectas tiradas d'elle para o olho do observador e para o ponto luminoso e fórma angulos eguaes com estas duas rectas.*

§ 597. Por serem extremamente pequenas as dimensões da terra relativamente á distancia, que a separa do sol, tem-se considerado este astro, no estudo geometrico das sombras, como se fosse um ponto luminoso collocado a distancia infinita da terra. Uma tal consideração importa o mesmo, que suppôr todos os raios luminosos parallelos entre si. Nas sombras, assim consideradas, não ha penumbra e a luz atmospherica (§ 593) parece actuar com maior intensidade segundo uma certa direcção e sentido, que é a do *raio atmospherico principal*.

O *raio atmospherico principal* determina conjunctamente com os raios luminosos, planos verticaes parallelos entre si, e as direcções d'aquelle e d'estes são taes que, se o angulo dos ultimos com o horisonte fôr não superior a 25 gráos, o angulo do primeiro com o mesmo plano será proximamente de 20 graus, e se um dos dois angulos fôr de 45 gráos, o outro sêl-o ha tambem. Em geral, para os corpos isolados no espaço e bastante elevados, o *raio atmospherico principal* é directamente opposto aos raios luminosos.

A parte alumiada do corpo não o é egualmente (§ 592). Se não existisse a luz atmospherica, a parte do corpo mergulhada na sombra ficaria completamente invisivel. A existencia d'aquella especie de luz faz com que as sombras pareçam transparentes, exactamente como se fossem causadas pela interposição de massas mais ou menos compactas de vapores. A esta especie de transparencia chamam os artistas *claro-escuro*.

Representa-se sem côr alguma, ou antes com a propria côr do papel, a parte do corpo, que reune as condições de maior brilho. Em torno d'ella a claridade vae successivamente enfraquecendo, até chegar á linha de sombra propria, onde é mais fraca, ou onde a falta de luz é mais sensivel; além d'esta linha a sombra vae analogamente diminuindo, sendo comtudo a sua degradação menos rapida do que é a da luz na parte alumiada.

Nas *sombras produzidas* o escuro vae diminuindo, e tornando-se mais vaporoso, á medida que se aproxima do seu contorno.

§ 598. No desenho geometrico representam-se as sombras por meio de *aguadas*[1]. Nas aguadas emprega-se geralmente uma só tinta, *tinta da China*, tambem conhecida por tinta de *Nankim*, ou *sepia*. Ha *aguadas lisas* e *aguadas esbatidas* ou *adoçadas*. Nas primeiras a tinta estende-se egualmente, nas segundas a intensidade da côr não é a mesma, varia de umas partes para outras, de modo que a aguada accuse a degradação assim dos claros, como dos escuros. N'umas e n'outras é preciso todo o cuidado para que não fiquem *manchadas*, nem saiam dos limites, que lhes estão marcados no desenho, nas esbatidas accresce ainda a necessidade de as dar, de modo que não fiquem *cortadas*, isto é, de modo que não seja brusca a passagem de uma côr para outra. A unica regra geral que póde dar-se para obviar a taes inconvenientes é que *as aguadas sejam dadas com tal rapidez, que não comecem a seccar sensivelmente antes de acabadas*.

Alguns desenhadores procuram satisfazer a este preceito sobrecarregando o pincel de tinta e inclinando convenientemente o estirador para mais rapidamente irem estendendo a tinta, que o pincel depositou a mais no papel; outros teem por systema não estender a tinta sobre o papel sem o terem humedecido previamente com um pincel molhado em agua limpa. As aguadas muito fortes são mais difficeis

[1] *Aguadas* e *aguarellas* são os termos portuguezes que traduzem os vocabulos francezes *lavis* e *aquarelles*. As tintas nas aguadas são destinadas apenas a produzir os effeitos de luz e sombra, e nas aguarellas devem tambem accusar a côr dos corpos. A *aguarella* é pois uma especie de pintura a côres, em que não se empregam tintas a óleo.

de dar, e por isso, quando ellas sejam necessarias, é melhor dal-as por camadas successivas, tendo comtudo o cuidado de não dar uma, sem a antecedente estar bem secca.

Nas *aguadas esbatidas* ou *adoçadas* é indispensavel usar de dois pinceis encavados no mesmo cabo; com um dá-se a tinta e com o outro a agua, por meio da qual se vae adoçando ou esbatendo a tinta deixada pelo primeiro. O cabo dos pinceis não deve ser tão comprido que se torne difficil voltal-o rapidamente, quando se quer passar de um para outro pincel. Os melhores pinceis são os de pello de márta. A sua duração depende principalmente de não se guardarem sem estarem bem limpos e ponteagudos.

§ 599. O melhor papel para aguadas deve ter grão fino e unido, ser grosso, de egual transparencia e não ficar manchado depois de humedecido com uma esponja fina embebida em agua limpa. O mais acreditado é o papel inglez da firma Watman. O papel deve estar bem estendido sobre uma taboa ou *estirador*, ao qual se colla, interpondo entre elle e a madeira uma folha de papel almasso.

Costumam alguns desenhadores, antes de começarem as aguadas, lavar todo o papel por egual com uma dissolução de alumen (pedra hume), para o tornar menos esponjoso e por consequencia menos apto para manchar as aguadas. Esta lavagem é sobretudo recommendavel, quando o papel está enfraquecido pela acção da gomma elastica ou do canivete. Emprega-se agora de preferencia o *sketck block*, isto é, uma especie de cartão grosso formado pela sobreposição de diversas folhas de papel bem comprimidas, do qual successivamente se vão separando por meio de um canivete as folhas, que tiverem servido.

Concluidos estes preliminares sobre a theoria geral das sombras, segue-se estudar as construcções geometricas, pelas quaes se determinam nos casos mais simples e usuaes as sombras proprias e produzidas. N'este estudo suppôr-se-ha sempre que os raios luminosos são parallelos entre si (§ 376).

§ 600. *Dadas as* PROJECÇÕES ORTHOGONAES *de um ponto sobre os planos de projecção construir a* SOMBRA PRODUZIDA *por elle sobre um dos mesmos planos.*

Entre a infinidade de raios luminosos parallelos a uma determinada direcção, que se podem imaginar no espaço, ha evidentemente um, que passa pelo ponto dado. Este raio luminoso encontra, em geral, ambos os planos de projecção, e póde, em circumstancias particulares, encontrar só um d'elles, ou mesmo nenhum. Em caso algum produz, porém, sombra senão no primeiro dos planos que encontra, porque passado elle perde a qualidade de raio luminoso, visto não se supporem transparentes os planos de projecção. Reduz-se, pois, a construcção da sombra a conduzir por o ponto *(a, a')* uma recta (fig. 606) parallela aos raios luminosos (§ 340) e a determinar depois aquelle dos dois traços, que representa a sombra produzida. Os traços do raio luminoso conduzido pelo ponto *(a, a')* são *(h, h')* no plano horisontal de projecção e *(v, v')* no plano vertical (§ 339). Para se determinar qual d'estes traços fica na sombra, imagina-se que um ponto percorre a recta *(ah, a'h')* a partir do ponto dado *(a, a')* e no sentido indicado pelas settas, que é tambem o sentido, que se attribue á luz proveniente do sol. Aquelle ponto movel chega primeiro ao ponto *(h, h')*, que ao ponto *(v, v')*, logo a sombra produzida por *(a, a')* é *h*. Na figura 607 acontece o contrario, isto é, o raio luminoso chega primeiro ao traço vertical *(v, v')*, do que ao traço horisontal *(h, h')* e por isso a sombra de *(a, a')* cáe em *v'*. Finalmente na figura 608 succede que o raio luminoso encontra no mesmo ponto *s* os dois planos de projecção, resultando d'ahi estar em *s* a sombra produzida por *(a, a')* sobre qualquer dos dois planos de projecção.

Em cada uma d'estas figuras suppõe-se, que a direcção dos raios luminosos é tal (§ 376) que as suas projecções formam angulos de 45° com a linha de terra e por isso $a_1 a'$ é egual a $a_1 h'$ nas duas primeiras e é egual a $a_1 s$ na ultima, e $a_1 a$ é egual a $a_1 v$ n'aquellas e a $a_1 s$ na terceira. Estas egualdades permittem simplificar a construcção geral (§ 339) das sombras do ponto.

§ 601. *Dadas as* PROJECÇÕES ORTHOGONAES *de uma recta sobre os planos de projecção construir a sombra* PRODUZIDA *por ella nos mesmos planos.*

Na figura 609 a recta $(ab, a'b')$ produz sobre o plano horisontal de projecção a sombra mn e não produz sombra alguma no plano vertical de projecção. Determina-se aquella sombra construindo (§ 600) a sombra m produzida por um dos extremos (a, a') da recta dada, a sombra n produzida pelo outro extremo (b, b') e unindo por uma recta os pontos m e n.

Na figura 610 a recta $(ab, a'b')$ sómente produz sombra sobre o plano vertical. Determina-se construindo as sombras m' e n' dos extremos (a, a') e (b, b') da recta e unindo por uma recta os pontos m' e n'.

Na figura 611 a sombra produzida pela recta $(ab, a'b')$ determina-se proximamente, como nos outros casos; succede, porém, que a sombra m, produzida por um dos extremos (a, a') da recta, cae no plano horisontal de projecção e a sombra n', produzida pelo outro extremo (b, b'), está no plano vertical. Esta disposição das sombras m e n' mostra que a recta $(ab, a'b')$ produz sombra em ambos os planos de projecção. Determinando a sombra produzida por um terceiro ponto (c, c') da recta, acha-se mais um ponto r' da sombra produzida e, como o ponto achado está no plano vertical de projecção, segue-se que a sombra produzida pela recta sobre este plano de projecção passa pelos pontos n' e r'. Póde tambem construir-se o traço horisontal v do raio luminoso $(bn, b'n')$ e unir v com m, porque assim se obterá s. A sombra produzida por $(ab, a'b')$ é, pois, a linha quebrada $msr'n'$. Não é difficil determinar, qual dos pontos da recta dada produz sombra na linha de terra em s.

Nas figuras 612, 613 e 614 são verticaes as rectas, que produzem sombras. Na primeira a vertical $(a, a'a'')$ assenta sobre o plano horisontal de projecção e toda a sua sombra am está n'este mesmo plano, na segunda a vertical $(a, a'a'')$ está acima do plano horisontal de projecção e a sua sombra $m''m'$ fica toda no plano vertical de projecção, finalmente na figura 614 a vertical $(a, a'a'')$ produz sombra nos dois planos de projecção. N'este ultimo caso a sombra produzida é a linha quebrada nsm'.

Convem observar que na figura 613 a sombra $m''m'$ produzida pela vertical $(a, a'a'')$ é uma recta egual e parallela á propria vertical. Em geral, *a sombra produzida por uma recta sobre um plano ao qual é parallela, é sempre uma recta egual e parallela á propria recta.*

Nas figuras 615, 616 e 617 a recta $(ab, a'b')$ é horisontal. Na figura 615 a sombra produzida é a recta mn situada no plano horisontal de projecção; na figura 616 a sombra $m'n'$ produzida por $(ab, a'b')$ está no plano vertical de projecção; e na figura 617 uma parte da sombra produzida nsm' cae no plano horisontal de projecção e outra no plano vertical. N'este ultimo caso os pontos (m, m') e (n, n') não são sufficientes para determinarem a sombra produzida e por isso procurou-se o traço vertical v' do raio luminoso $(bn, b'n')$. O traço horisontal r de $(am, a'm')$, como ponto d'esta recta que é, póde tambem servir evidentemente para determinar a sombra quebrada nsm'.

A recta $(ab, a'b')$ da figura 618 está n'uma posição especial, porque existe n'um plano perpendicular á linha de terra e é obliqua a cada um dos planos de projecção. A sua sombra é uma linha quebrada $m s n'$, que se determina, exactamente como em todos os outros casos, construindo dois pontos m e v d'um dos lados $m s$ da linha e um ponto n' do outro.

§ 602. *Construir a sombra produzida por um rectangulo, que tem dois lados verticaes.*

Sejam $a b$ e $a' b' b'' a''$ as duas projecções do rectangulo dado (fig.^s 619, 620 e 621). Na figura 619 os pontos (a, a'') e (b, b'') estão no plano horisontal de projecção (§ 333) e por isso confundem-se com as suas sombras produzidas. Os pontos (a, a') e (b, b') teem as suas sombras m' e n' no plano vertical de projecção, de sorte que os lados verticaes $(a, a' a'')$ e $(b, b' b'')$ teem por sombras produzidas as linhas quebradas $a m m'$ e $b n n'$. A horisontal $(a b, a' b')$ produz sombra sobre $m' n'$.

Na figura 620 nenhum dos vertices do rectangulo se confunde com a sua sombra produzida, porque todos elles estão fóra dos planos de projecção. A sombra produzida pelo lado vertical $(a, a' a'')$ é a recta $m' m''$, parte da qual fica encoberta pelo rectangulo $(a b, a' b' b'' a'')$, a sombra produzida por $(b, b' b'')$ é toda visivel e existe tambem no plano vertical de projecção. A sombra produzida pelo rectangulo existe toda no plano vertical de projecção e é formada pelo parallelogrammo $m' n' n'' m''$, do qual uma parte não é visivel. Em geral, *as sombras produzidas sobre o mesmo plano por duas rectas parallelas são rectas tambem parallelas entre si.*

Na figura 621 o rectangulo $(a b, a' b' b'' a'')$ produz sombra nos dois planos de projecção; porém o lado inferior $(a b, a'' b'')$ tem por sombra produzida uma linha quebrada $p s n''$, cuja construcção se reduz a determinar no plano horisontal o traço v' do raio luminoso $(b v, b'' v')$.

A figura 622 apresenta a sombra d'um rectangulo horisontal $(a b a_1 b_1, a' b')$ sobre os dois planos de projecção. A construcção da sombra produzida $m n r, n'' m'' s$, não offerece difficuldade alguma.

§ 603. *Construir a sombra produzida por um triangulo $(a b c, a' b' c')$ situado* (fig. 623) *n'um plano vertical.* As sombras produzidas pelos trez vertices são os pontos m', n e p. As duas ultimas estão no mesmo plano de projecção e por isso o lado $(b c, b' c')$ do triangulo produz toda a sua sombra $n p$ sobre o plano horisontal de projecção. As sombras produzidas pelos outros dois lados $(a b, a' b')$ e $(a c, a' c')$ são as duas linhas quebradas $m' x n$ e $m' s p$, para cada uma das quaes é necessario determinar mais um ponto. Construindo o traço horisontal (q, q') do raio luminoso $(a m, a' m')$, e unindo q com n e com p, obtem-se as sombras $n x$ e $p s$, que os lados $(a b, a' b')$ e $(a c, a' c')$ produzem sobre o plano horisontal, e por consequencia os pontos x e s, pelos quaes passam as sombras $m' x$ e $m' s$, que os mesmos lados produzem no plano vertical de projecção.

§ 604. *Construir a sombra produzida por um rectangulo* (fig. 624), *que tem dois lados $(a d, a' d')$ e $(b c, b' c')$ parallelos á linha de terra.*

O vertice (a, a') produz sombra no plano vertical em m', o vertice (b, b') produz sombra no plano horisontal em n. A sombra produzida por $(a b, a' b')$ é portanto uma linha quebrada. Construindo o traço horisontal v do raio luminoso $(a m, a' m')$, e unindo-o com n, tem-se a sombra $n s$ produzida por uma parte do lado $(b a, b' a')$ do rectangulo. A linha quebrada $n s m'$ é por consequencia a sombra produzida por todo este lado. De ser $(a d, a' d')$ parallela á linha de terra segue-se, que a sua sombra $m' q'$ tambem será parallela á mesma linha. A recta $d' q'$ parallela ás projecções verticaes dos raios luminosos determina sobre $m'q'$ o extremo q' da sombra produzida por $(a\,d,\, a'\,d')$.

Sendo parallelos os lados $(a\,b, a'\,b')$ e $(d\,c, d'\,c')$ do rectangulo, serão tambem parallelas entre si (§ 602) as suas sombras produzidas sobre o mesmo plano, e por consequencia as rectas $q'r$ e $r\,p$, respectivamente parallelas a $m's$ e $s\,n$, serão as sombras produzidas por o lado $(d\,c, d'\,c')$.

§ 605. *Construir a sombra produzida por um circulo horisontal.*

Seja (c, c') o centro do circulo horisontal (fig. 625) e $(a\,b, a'b')$ um dos seus diametros. O ponto (c, c') produz a sombra O no plano horisontal. Conhecida a sombra do centro de um circulo sobre um plano parallelo ao seu, basta descrever, com o centro n'aquella sombra, um circulo egual ao circulo dado, para se ter a sombra produzida por este circulo. N'esta figura o circulo descripto de O como centro com o raio egual a metade de $a\,b$ fica todo abaixo da linha de terra e portanto o circulo produz sombra sómente no plano horisontal de projecção. Em geral, *a sombra produzida por uma figura plana sobre um plano parallelo ao seu é uma figura egual á figura dada.*

Na figura 626 o circulo de centro (c, c') e diametro $(ab, a'b')$ não produz sombra senão no plano vertical de projecção. A sombra produzida por qualquer ponto (r, r') da circumferencia dada é evidentemente (§ 600) um ponto A' do plano vertical de projecção. Construindo as sombras de varios pontos da circumferencia, e unindo-as por um traço continuo, acha-se a sombra produzida pelo circulo. Sabendo-se, porém, que esta sombra é uma ellipse, póde simplificar-se a construcção começando por determinar os eixos d'ella. N'esta figura o centro (c, c') produz sombra em s' no plano vertical. O ponto s' é o centro da ellipse de sombra produzida. Tomando entre as pontas do compasso a distancia $s'd'$ do centro s' á projecção vertical $a'\,b'$ do circulo, applicando esta abertura de compasso de s para e sobre a perpendicular $s's$ á linha de terra, unindo o ponto obtido e com c e levantando ao meio m de $c\,e$ uma perpendicular, tem-se o centro n de um circulo $p\,c\,e\,q$, cujas cordas $c\,p$ e $c\,q$ determinam no circulo proposto dois pontos r e u, que teem a propriedade notavel de produzirem sombra nos dois vertices A' e B' da ellipse de sombra.

Determinados os semi-eixos, $s'A'$ e $s'B'$, d'esta ellipse é muito facil (§ 180) descrever a curva por pontos.

A figura 627 comprehende os dois casos representados separadamente nas figuras 625 e 626, pois que a posição do circulo relativamente aos planos de projecção é tal, que a sua sombra produzida cae parte n'um, parte n'outro plano.

A recta conduzida pelo centro (c, c') do circulo parallelamente aos raios luminosos (§§ 340 e 339) encontra o plano horisontal de projecção em o e o plano vertical de projecção em s'. O ponto o é o centro de um circulo, de que somente pertence á sombra produzida a parte collocada abaixo da linha de terra $L\,T$. O ponto s' é o centro da ellipse, de que apenas a parte, que fica acima de $L\,T$, pertence á sombra produzida. O vertice B' determina-se exactamente como na figura 626, o vertice A' obtem-se construindo a sombra produzida pelo ponto r situado no raio $c\,r$ perpendicular a $c\,q$. Não se seguiu, para obter o vertice A', exactamente a mesma construcção empregada na figura 626, por causa da grande distancia a que ficaria a intersecção de $c\,r$ com LT.

§ 606. *Dadas duas figuras planas* $(A\,B\,C, A'B'C')$ e $(m\,n\,p\,q, m'n'p'q')$ *construir* (fig. 628) *a sombra produzida por uma sobre a outra.*

Seja $(Bf, B'f')$ o raio luminoso conduzido pelo vertice (B, B') do triangulo que produz sombra. O plano vertical levantado por este raio luminoso encontra o plano do quadrilatero *(m n p q, m'n'p'q')* em uma recta, cujas projecções são kl e $k'l'$. A segunda d'estas projecções encontra em b' a projecção vertical $B'f'$ d'aquelle raio luminoso. Logo (b, b') é o ponto em que o mesmo raio luminoso encontra o plano indefinido do quadrilatero. Similhantemente se acham os pontos (a, a') e (c, c') communs ao plano do quadrilatero e aos raios luminosos $(Ag, A'g')$ e $(Ch, C'h')$. A sombra produzida pelo triangulo $(ABC, A'B'C')$ sobre $(nmpq, n'm'p'q')$ seria o triangulo $(abc, a'b'c')$, se por ventura este triangulo estivesse todo dentro d'aquelle quadrilatero. A figura mostra que a sombra produzida sobre $(mnpq, m'n'p'q')$ é apenas o trapezio $(acde, a'c'd'e')$.

A sombra produzida pelo mesmo triangulo $(ABC, A'B'C')$ sobre o plano horisontal de projecção seria ghf, se não existisse nem o plano vertical de projecção, nem o plano $(nmpq, n'm'p'q')$. Attendendo a um e outro plano, a sombra produzida pelo triangulo $(ABC, A'B'C')$ sobre os planos de projecção será $gst'rh$. Parte d'esta sombra confunde-se com a sombra produzida pelo quadrilatero $(mnpq, m'n'p'q')$, a qual se obtem da seguinte maneira. O ponto (p, p') produz sombra em P' sobre o plano vertical de projecção, e, se não existisse este plano, produziria sombra em u sobre o plano horisontal de projecção. Logo a sombra produzida pela recta $(np, n'p')$ é a linha quebrada nNP'. A sombra produzida pela recta $(mq, m'q')$ parallela áquella, é a linha quebrada mMQ', conduzida parallelamente a nNP' e terminada na projecção vertical $q'Q'$ do raio luminoso correspondente ao vertice (q, q'). A sombra produzida por o quadrilatero $(mnpq, m'n'p'q')$ sobre os planos de projecção é portanto formada pelos trapezios $mMNn$ e $NP'Q'M$.

O processo empregado n'esta figura, para se obterem as sombras produzidas, (a, a'), (b, b'), (c, c'), por diversos pontos sobre um plano qualquer, é geral e constitue o fundamento do chamado *methodo dos planos secantes.*

As duas rectas fg e ba devem encontrar-se n'um ponto o de mn, e o mesmo succederá ás rectas fh e bc. Esta circumstancia póde ser aproveitada para achar os pontos a e c, e por consequencia a' e c', por um outro modo. Os pontos e' e E devem estar n'uma parallela ás projecções verticaes dos raios luminosos. D'estas observações póde deduzir-se um outro processo para construir o triangulo $(abc, a'b'c')$, depois de achadas as sombras produzidas sobre os planos de projecção, tanto pelo triangulo $(ABC, A'B'C')$, como pelo quadrilatero $(mnpq, m'n'p'q')$.

CAPITULO XXII

SOMBRAS DE FIGURAS A TRES DIMENSÕES

§ 607. *Construir as sombras de um prisma vertical.*

Seja abc (fig. 629) a projecção horisontal commum das duas bases, $a'b'$ e $a''b'$ os traços verticaes dos planos das mesmas bases. A recta cC conduzida por c parallelamente ás projecções horisontaes dos raios luminosos, sendo prolongada, corta o triangulo abc; outrotanto não succederá ás rectas aH e bD que, em condições analogas, se tirarem por a e por b. D'estes factos deve concluir-se: 1.º ou as duas faces verticaes do prisma, que passam por $(c, c'c'')$, estão ambas na sombra, ou pelo contrario recebem luz ambas; 2.º das duas faces, que concorrem na aresta $(a, a'a'')$, bem como das duas que concorrem em $(b, b'b'')$, uma recebe luz e outra está na sombra. Logo das tres faces verticaes somente recebe luz a face

$(ab, a'b'b''a'')$. Examinando a projecção vertical do prisma reconhece-se immediatamente, que das duas bases apenas a superior está illuminada. A *linha de sombra propria do prisma*, sendo um polygono formado pelas arestas, que unem uma face alumiada com outra não alumiada, terá por vertices successivos os pontos (a, a''), (b, b''), (b, b'), (c, c') e (a, a'). A parte do prisma envolvida na sombra não é visivel na figura 629.

Construindo a sombra produzida sobre os planos de projecção pelos lados successivos do polygono de sombra propria, obtem-se a figura $ABDEFGHA$, que evidentemente representa a *sombra produzida* pelo prisma sobre aquelles planos.

Do mesmo modo se construem as sombras proprias e produzidas nas figuras 630 e 631.

Observação. Na figura 629 a linha de sombra propria não é rigorosamente formada pelos pontos de contacto dos raios luminosos tangentes á superficie. Acontece isto em todos os polyedros, e muitas vezes em outros corpos limitados por duas ou mais superficies distinctas. Póde, porém, dizer-se que n'estes corpos a sombra propria é determinada pelos *raios luminosos rasantes*, isto é, pelos raios luminosos, que se apoiam sobre o envolucro do corpo sem penetrar n'elle, ou pelo menos não penetrando senão alem do ponto d'apoio relativamente ao sentido do movimento da luz.

§ 608. *Construir as sombras de um prisma horisontal.*

Seja (fig. 632) $(abcdef, a'b'c'd'e'f')$ o prisma dado. A base $(abc, a'b'c')$ produz sombra sobre ambos os planos de projecção e o mesmo succede á base $(def, d'e'f')$. A sombra produzida por a primeira é $AxC'B'uA$ e a produzida pela segunda é $DyF'E'zD$. As rectas DA, $F'C'$ e $E'B'$, das quaes as duas ultimas devem ser parallelas, representam as sombras das tres arestas lateraes. A sombra produzida é, pois, formada pelo polygono $AxC'B'E'zDA$. A sombra propria é composta das arestas do prisma, que projectam sombra sobre os lados do polygono de sombra produzida, isto é, das arestas $(ac, a'c')$, $(cb, c'b')$, $(be, b'e')$, $(ed, e'd')$ e $(da, d'a')$.

Este systema de construir primeiro as sombras produzidas, para depois deduzir d'ellas as sombras proprias, constitue o *methodo das projecções obliquas*.

Não é difficil perceber á vista da figura, que as faces não illuminadas são $(abc, a'b'c')$ e $(abed, a'b'e'd')$ e, conhecidas estas, teem-se immediatamente as cinco arestas de sombra propria, das quaes promptamente se deriva a sombra produzida.

§ 609. *Construir as sombras de um prisma obliquo.*

Para se determinarem com todo rigor as arestas de separação de sombra e luz, corte-se o prisma (fig. 633) por um plano vertical[1] parallelo aos raios luminosos. O traço horisontal XY d'este plano é parallelo á projecção horisontal dos raios de luz. A intersecção d'elle com o prisma é evidentemente (§ 389) o polygono $(stuvxy, s't'u'v'x'y')$. Imaginando rectas parallelas ás projecções verticaes dos raios luminosos, reconhece se immediatamente, que estão alumiadas as faces do prisma, a que pertencem os lados $s't'$, $t'u'$ e $u'v'$ do polygono $s't'u'v'x'y'$, e não alumiadas as outras tres faces, e por consequencia que as arestas $(ag, a'g')$ e $(dq, d'q')$

[1] Ha, em geral, tres processos distinctos para construir as sombras de qualquer figura: o dos *plano tangentes*, o dos *planos secantes* e o das *projecções obliquas*. Do primeiro é impossivel tratar n'este livro, dos dois ultimos alguma cousa se disse já (§§ 606 e 608). O dos planos secantes reduz-se a cortar o corpo por diversos planos verticaes parallelos aos raios luminosos, e a determinar para cada secção os pontos s' e v' (fig. 633) pertencentes á sombra propria e depois as sombras produzidas por estes pontos. Na fig. 633 é sufficiente empregar um plano secante.

pertencem á separação de sombra e luz. Reconhece-se tambem facilmente que as arestas $(ab, a'b')$, $(bc, b'c')$, $(cd, c'd')$, $(gn, g'n')$, $(nm, n'm')$ e $(mq, m'q')$, pertencentes ás bases do prisma, fazem egualmente parte da linha de separação. A linha de sombra propria do prisma fica assim determinada e, conhecida ella, basta construir a sua sombra produzida para se ter a do prisma.

Empregando as construcções já explicadas, acha-se que a sombra produzida pela aresta $(ag, a'g')$ é a linha quebrada apG', parte da qual está encoberta pelo prisma. A sombra produzida pela aresta $(dq, d'q')$ é a linha quebrada drQ' formada por duas rectas respectivamente parallelas aos lados de apG'. Conhecida a primeira linha quebrada, e os pontos d e Q' da segunda, fica portanto esta tambem determinada. Finalmente resta achar os pontos M' e N' para se acabar de traçar a sombra produzida pelo prisma.

§ 610. *Construir as sombras d'uma pyramide.*

Seja (fig. 634) a base da pyramide o polygono horisontal $(abcdef, a'b'c'd'e'f')$, e o vertice o ponto (V, V').

Conduzindo pelo vertice (V, V') uma parallela $(VV_1, V'V_1')$ aos raios luminosos e procurando o ponto (V_1, V_1'), em que ella encontra o plano da base da pyramide, tem-se o ponto d'este plano, onde cairia a sombra do vertice da pyramide, se porventura tal plano se suppozesse existir. Conduzindo por V_1 e por cada uma das projecções horisontaes a, b, c, etc. da base da pyramide linhas rectas e procurando quaes d'ellas, V_1c e V_1f, limitam o angulo dentro do qual existem todas as outras, acham-se os vertices, c e f, pelos quaes passam as arestas lateraes da pyramide pertencentes á linha de sombra propria.

Sabendo-se que $(Vc, V'c')$ e $(Vf, V'f')$ fazem parte da linha de sombra propria, não será difficil descobrir, que esta se completa com as tres arestas $(cb, c'b')$, $(ba, b'a')$ e $(af, a'f')$ da base.

Construindo as sombras produzidas nos planos de projecção pelas cinco arestas, de que se compõe a linha de sombra propria, obtem-se a linha de sombra produzida.

O ponto (c, c') produz a sua sombra C no plano horisontal de projecção, o ponto (V, V') produz a sombra u' no plano vertical de projecção, logo a aresta $(cV, c'V')$ tem por sombra uma linha quebrada Cxu'. Mas o ponto (c, c') produziria sombra em c_1' sobre o plano vertical de projecção, se porventura não existisse o plano horisontal de projecção, logo, ainda na mesma hypothese, a sombra produzida sobre o plano vertical de projecção pela aresta $(Vc, V'c')$ seria $u'c_1'$. D'este modo se obtem o ponto x que, unido com C e com u', serve para completar a determinação de Cxu'. A sombra produzida por $(Vf, V'f')$ está toda no plano vertical e é $u'F'$.

A aresta $(af, a'f')$ da base tem por sombra uma linha quebrada AyF', cujos extremos, A e F', se determinam sem difficuldade e o ponto y, commum a ella e á linha de terra, obtem-se construindo a sombra $a_1'F'$, que a mesma aresta produziria no plano vertical de projecção, se se supprimisse o plano horisontal. Não carece de novas explicações a determinação das sombras AB e BC produzidas pelos outros lados da linha de sombra propria.

§ 611. *Dados dois prismas construir a sombra produzida por um sobre o outro e por ambos sobre os planos de projecção.*

Um dos prismas (fig. 635) tem por base o trapezio $(efgh, e'f'g'h')$ e por altura ee', o outro tem por bases os rectangulos $(add_1a_1, a'd')$ e $(add_1a_1, a''d'')$. No primeiro prisma deixam de ser alumiadas as faces gh e he, e no segundo as faces dd_1, d_1a_1 e a base inferior $(add_1a_1, a'd')$.

A aresta vertical $(d, d'd'')$ do segundo prisma produz sombra sobre o plano vertical de projecção n'uma recta $D'D''$ egual e parallela a $d'd''$. Conduzindo por g uma recta cG, parallela ás projecções horisontaes dos raios luminosos, obtem-se sobre a aresta horisontal $(ad, a'd')$ um ponto (c, c'), que produz sombra sobre C' no plano vertical de projecção e que limita a parte $c'd'$ da mesma aresta, que projecta a sombra $C''D'$ sobre o plano vertical de projecção. A sombra $C''D'$ é egual e parallela a $c'd'$. O raio luminoso $(cg, c'C')$ *rasa* a aresta vertical g do prisma $efgh$ no ponto (g, C'), pelo qual passa a sombra produzida sobre a face vertical fg por uma parte da aresta $(ad, a'd')$. Esta sombra produzida é uma recta $C'B'$ parallela a $a'd'$ e terminada no ponto B' situado no raio luminoso $(bf, b'B')$. O ponto (a, a') produz sombra em (A, A') sobre a face vertical ef, de sorte que a aresta $(ad, a'd')$ comprehende tres partes, uma $d'c'$, que produz sombra sobre o plano vertical de projecção, outra $c'b'$, que projecta a sua sombra sobre a face vertical fg e a ultima $b'a'$, que produz sombra na face vertical fe. A aresta horisontal (aa_1, a') projecta sombra sobre a recta $A'a'$, da qual uma parte $A'e''$ está na face fe e a outra no plano vertical de projecção. Finalmente a aresta vertical g produz sombra em GC'' sobre o plano vertical de projecção.

§ 612. *Construir as sombras d'um cylindro vertical.*

A' circumferencia $(adb, a''b'')$, que fórma a base inferior do cylindro (fig. 636), tirem-se as tangentes eE, dD_1 parallelas ás projecções horisontaes dos raios luminosos e pelos pontos de contacto (e, e'') e (d, d'') conduzam-se as geratrizes $(e, e''e')$ e $(d, d''d')$ do cylindro. Estas geratrizes pertencem á linha de separação de sombra e luz. O semi-circulo $(ead, e''a''d'')$, que une a base inferior, á qual não chega a luz, com a parte da superficie convexa do cylindro, que é esclarecida, pertence egualmente á linha de separação, e o mesmo succede á semi-circumferencia $(ebd, e'b'd')$ da base superior do cylindro.

A sombra produzida por a linha mixta composta d'aquellas duas geratrizes e d'estas duas semi-circumferencias é, pois, a sombra produzida pelo cylindro.

A sombra produzida pelo semi-circulo $(ead, e''a'd'')$ sobre o plano horisontal é (§ 605) um semi-circulo egual descripto com o centro no ponto C_1 onde produz sombra o centro (c, c'') d'aquelle semi-circulo. As geratrizes $(e, e''e')$ e $(d, d''d')$ produzem sombra sobre as linhas quebradas E_1EE' e D_1DD' respectivamente parallelas entre si.

A sombra produzida pelo semi-circulo $(emd, e'm'd')$ é uma porção de ellipse $E'M'B'D'$, cada um dos pontos M' da qual se obtem construindo a sombra produzida por um ponto (m, m') d'aquelle semi-circulo.

A figura 637 representa as sombras d'um solido comprehendido entre dois meios cylindros verticaes concentricos e dois planos perpendiculares ao eixo commum. A sombra projectada sobre os planos de projecção por o meio cylindro exterior determina-se como na fig. 636, apenas com a differença de ser a geratriz limite (e, Ge') uma das que pertencem á linha de sombra propria.

Accresce, porém, na fig. 637, a necessidade de saber construir a sombra produzida sobre a parte concava do solido pelo arco de circulo $(abc, a'b'c')$. O ponto de contacto c da tangente parallela ás projecções horisontaes dos raios luminosos é a projecção d'um ponto (c, c') da sombra produzida. Outro ponto d'esta sombra determina-se conduzindo por qualquer ponto (b, b') d'aquelle arco uma parallela $(bB, b'B')$ aos raios luminosos e procurando o ponto B em que a projecção bB encontra o arco abc, porque esse ponto será a projecção horisontal d'um ponto (B, B') pertencente á sombra procurada. D'este modo acha-se que o ponto (a, a') produz sombra em (A, A'). A vertical $A''A'$ é a sombra produzida pela aresta $(a, a''a')$.

§ 613. *Construir as sombras d'um cylindro horisontal.*

Imagine-se rebatido o plano vertical ac, que contem uma das bases do cylindro (fig. 638), sobre o plano horisontal de projecção. O centro (e, e') d'aquella base irá cair no ponto E, determinado pela condição de ser a distancia Ee egual á altura $e_1' e_0$ do centro. Conhecido o centro e o raio ec é facil descrever o circulo da base depois de rebatido.

Projectando sobre o plano vertical da base ac o ponto g, traço horisontal do raio luminoso $(eg, e'_1 g')$, obtem-se o ponto G e conduzindo parallelamente á projecção EG tangentes á base do cylindro, obteem-se dois pontos X e Y pelos quaes passam as geratrizes $(mp, m'p')$ e $(nq, n'q')$ da sombra propria. Notando que a base $(ac, a'e'c'e'')$ recebe luz e a base $(bd, b'f'd'f'')$ está na sombra, conclue-se que a linha de separação de sombra e luz comprehende, além d'aquellas duas geratrizes, o semi-circulo $(ncm, n'c'm')$ e o semi-circulo $(qbp, q'b'p')$.

A geratriz $(mp, m'p')$ produz sombra em MP, a geratriz $(nq, n'q')$ produz sombra em $N'xQ$ e as sombras produzidas pelos dois semi-circulos construem-se determinando para alguns dos seus pontos, taes como (c, c') e (n, n') d'um e (b, b') e (p, p') do outro, as sombras C', N' e B e P.

§ 614. *Construir as sombras d'um cylindro obliquo de base circular.*

Por qualquer ponto (p, p') conduzam-se duas rectas, uma $(pr, p'r')$ parallela aos raios luminosos (fig. 639) e outra $(pq, p'q')$ parallela ás geratrizes do cylindro. Tire-se pelos traços horisontaes r e q d'ellas uma recta rq, e parallelamente a ella as tangentes á base $(fmg, f'm'g')$ do cylindro, suppondo que ella é horisontal. As geratrizes $(mr, m'r')$ e $(ns, n's')$, que passam pelos pontos de contacto m e n das duas tangentes, pertencem á linha de sombra propria. Á mesma linha pertencem os semi-circulos $(mfn, m'f'n')$ e $(res, r'e's')$. A geratriz $(ns, n's')$ produz sombra em NS. A sombra produzida por $(mr, m'r')$ é uma recta MR, egual e parallela a NS, conduzida pela sombra M do ponto (m, m'). Os semi-circulos $(mfn, m'f'n')$ e $(res, r'e's')$ projectam as suas sombras sobre os semi circulos eguaes MFN e RES.

§ 615. *Construir as sombras d'uma pyramide conica de base circular.*

Por o vertice (v, v') da pyramide conica (fig. 640) conduz-se uma recta $(vV_1, v'V'_1)$ parallelamente aos raios luminosos e determina-se o encontro (V_1, V'_1) d'ella com o plano horisontal, que contem a base $(mnb, m'n'b')$ da pyramide. As tangentes tiradas de V_1 á base [1] da pyramide conica determinam os pontos (a, a') e (b, b') pelos quaes passam as geratrizes $(Va, V'a')$ e $(Vb, V'b')$ que, reunidas ao arco $(amb, a'm'b')$, constituem a linha de separação de sombra e luz. A sombra produzida pela geratriz $(Va, V'a')$ é na fig. 640 a linha quebrada ayV', e na fig. 641 a linha recta $A'V'$. A sombra produzida pela geratriz $(vb, v'b')$ é bxV' n'aquella figura e BxV' n'esta. Na fig. 641 a sombra produzida pelo arco de circulo $(amb, a'm'b')$ consta do arco de circulo eFB com o centro no ponto C, onde se projecta a sombra do centro (c, c'), e do arco de ellipse $A'P'e$, cada um dos pontos, P', do qual se determina procurando o traço vertical (P, P') do raio luminoso conduzido por um ponto (p, p') da base da pyramide.

[1] Este processo reduz-se a tirar rectas por V_1 e por cada um dos pontos da circumferencia $ambn$ e a escolher duas, V_1a e V_1b, que limitem um angulo dentro do qual estejam todas as outras, analogamente ao que se fez na fig. 634.

Na fig. 640 a sombra produzida pelo arco *(amb, a'm'b')* confunde-se com o proprio arco.

§ 616. *Construir as sombras d'uma pyramide conica truncada.*

O methodo geral consiste em completar a pyramide e proceder depois, como nas fig. 640 e 641, quando se tratou de determinar as geratrizes de sombra propria. Póde, porém, succeder que este methodo deixe de ser applicavel, por ficar bastante affastado o vertice da pyramide completa. Quando isto acontece, tira-se (fig. 642) por qualquer ponto (c, c''') do eixo uma parallela $(cn, c'''n'')$ a uma das geratrizes $(pn, p'n')$ do contorno apparente e descreve-se com o centro em c e raio cn um circulo ned, que será tomado como base d'uma pyramide de vertice (c, c'''), á qual haja de se determinar a sombra. Por commodidade escolheu-se o ponto c''' a uma altura tal que o circulo a descrever se confundisse com a projecção da base superior do tronco.

Construindo as projecções $(cr, c'''r')$ do raio luminoso conduzido pelo vertice (c, c''') da pyramide auxiliar, e tirando pelo traço horisontal (r, r') d'elle tangentes ao circulo ned situado no plano horisontal de projecção, teem-se os pontos d e e, pelos quaes passam as projecções das geratrizes $(ad, a'd')$, $(be, b'e')$ pertencentes á linha de sombra propria. Os arcos de circulo $(apb, a'p'b')$ e $(dme, d'm'e')$ conjunctamente com aquellas duas geratrizes completam a linha de sombra propria. As sombras projectadas pelas geratrizes $(be, b'e')$ e $(ad, a'd')$ são a linha quebrada BxE' e a linha recta $A'D'$. A sombra projectada pelo arco $(dme, d'm'e')$ de circulo é uma porção $D'M'E'$ d'ellipse, da qual cada um dos pontos M' é a sombra produzida por um ponto (m, m') do dito arco. Finalmente a sombra produzida pelo arco $(apb, a'p'b')$ de circulo consta: 1.º de um arco $A'y$ d'ellipse; 2.º d'um arco yB de circulo com o centro no ponto o, onde se projecta a sombra do centro (c, c'') da base inferior do tronco, e o raio eguál a oB. Este arco deve ser tangente a BE_1.

A figura 643 representa as sombras d'um solido compreendido entre duas meias pyramides conicas do mesmo eixo, parallelas entre si e dois planos perpendiculares ao eixo commum.

A sombra relativa á pyramide exterior determina-se como na figura 642, apenas com a differença proveniente de ser n'este caso parte da linha de separação de sombra e luz a geratriz $(mq, m'q')$.

A sombra produzida na parte concava do solido pela aresta $(gb, g'b')$ e pelo arco de circulo $(bf, b'f')$ determina-se do seguinte modo.

Tira-se por (b, b') uma parallela $(bB, b'B')$ aos raios luminosos, une-se o seu traço horisontal B com g e o ponto, s, commum a gB e á circumferencia da base maior da pyramide interior, é a projecção de um ponto (s, s') pelo qual passa a geratriz $(su, s'u')$, que recebe sombra da aresta $(gb, g'b')$. O ponto B'' é evidentemente o limite d'esta sombra produzida.

A sombra produzida pelo arco do circulo $(bu, b'u')$ sobre qualquer secção horisontal $(ty, t'y')$ do tronco interior obtem-se tirando pelo centro (c, c') de $(bu, b'u')$ uma parallela aos raios luminosos, procurando o ponto (x, x'), em que ella encontra o plano $t'y'$ da secção, e descrevendo do centro x com o raio $c'b'$ ou cb um arco. Este arco encontra ty n'um ponto y, que é projecção horisontal do ponto (y, y') procurado.

O ponto (f, f') pertence tambem á sombra produzida, e é um dos seus extremos.

§ 617. *Construir as sombras d'uma esphera.*

Seja (c, c') o centro da esphera (fig. 644) e $(cC, c'C')$ uma parallela aos raios luminosos. Imaginem-se diversas secções feitas na esphera por planos verticaes parallelos aos raios luminosos e a cada uma d'ellas tirem-se tangentes parallelas aos mesmos raios. Os pontos de contacto das tangentes existem na linha de sombra propria da esphera e os traços d'ellas existem na sombra projectada.

Para mais commodamente se executarem todas estas construcções projectam-se aquellas diversas secções sobre um novo plano vertical conduzido por uma recta L_1T_1 parallela ás projecções horisontaes dos raios luminosos e rebate-se depois este plano sobre o plano horisontal.

A projecção do centro da esphera n'este plano vertical de projecção é um ponto o situado na perpendicular oc a L_1T_1 e satisfazendo á condição de ser c_2o egual a c_1c'. Tirando por C, traço horisontal (§ 339) de $(cC, c'C')$, a perpendicular OC a L_1T_1 e unindo O com o tem-se a projecção oO d'uma parallela aos raios luminosos sobre o segundo plano vertical. Sendo ed parallela a cC, o plano vertical conduzido por ed corta a esphera n'um circulo, cuja projecção sobre o plano vertical L_1T_1 é o circulo de centro o e raio oe. Conduzindo a este circulo tangentes parallelas a oO, obtem-se dois pontos p_1 e q_1, cujas projecções horisontaes p e q pertencem á projecção da linha de sombra propria. Tomando sobre perpendiculares a LT as distancias p_3p' e q_3q', respectivamente eguaes a p_2p_1 e q_2q_1 teem-se as projecções verticaes p' e q' de dois pontos da linha de sombra propria. Empregando novos planos verticaes, acham-se outros pontos da mesma linha. A tangente em p_1 encontra em P_1 a recta L_1T_1 e conduzindo a esta a perpendicular P_1P acha-se o ponto P, onde projecta sombra o ponto (p, p'). A sombra de (q, q') é o ponto Q' do plano vertical de projecção. Convém notar que todos os pontos de contacto p_1, q_1, etc. devem ficar sobre uma perpendicular a Oo.

Chega-se ao mesmo resultado cortando a esphera por planos parallelos aos raios luminosos e perpendiculares ao plano vertical de projecção e projectando todas as secções sobre um plano parallelo aos d'ellas.

Em qualquer dos casos a construcção empregada reduz-se a uma simples applicação do *methodo dos planos secantes.*

A figura 645 representa as sombras d'um solido limitado por duas meias espheras concentricas e por um plano. As linhas de separação de sombra e luz e de sombra produzida do hemispherio exterior construem-se como na figura 644, apenas com a differença de serem perpendiculares ao plano vertical de projecção e parallelos á projecção vertical $c'C'$ dos raios luminosos os planos secantes auxiliares. Cortando, por exemplo, por um plano a'_1p' perpendicular ao plano vertical, aquelle hemispherio obtem-se um semi-circulo, cuja projecção no plano parallelo L_1T_1 é um semi-circulo egual $a''p''m''$. Conduzindo a este semi-circulo uma tangente parallela a oO e projectando o ponto de contacto p'' sobre $a_1'p'$, acha-se a projecção vertical p' d'um ponto da linha de sombra propria. A projecção horisontal p determina-se pela condição de ser pp_2 egual a $p''p_1$. Os pontos de contacto p'', g'', etc. estão n'uma recta perpendicular a oO. A projecção vertical da curva de sombra propria é uma ellipse, que tem o semi-eixo maior, $c's'$, egual ao raio da esphera exterior e o semi-eixo menor $c'g'$ egual á projecção de og'' sobre $d'C'$.

A curva de sombra produzida determina-se, como em todos os outros casos já tratados, comtanto que se saiba que, a linha de sombra propria, da qual ella é sombra produzida, comprehende a linha $(spgr, s'p'g'r')$ e o semi-circulo $(sur, s'u'r')$.

Resta agora construir a sombra produzida pelo semi-circulo $b'd'v'$ sobre a parte concava do solido. Empregam-se tambem para esse fim planos perpendiculares ao plano vertical de projecção e parallelos a $c'C'$.

A recta $a'm'$ representa o traço d'um d'esses planos e o semi-circulo $a''p'm''$ é a projecção sobre o plano auxiliar L_1T_1 da secção feita por aquelle plano na semi-esphera interior. Uma recta $a''m''$ parallela a oO mostra, que o ponto projectado em a'' produz sombra em m'', e por consequencia que o ponto a' produz sombra sobre o ponto m' da esphera interior. Assim se determinam outros pontos b', n', v', etc.

Convém notar, que todos os pontos, taes como m'', n'', etc., estão n'uma recta, que passa por o. D'esta observação não é difficil concluir que a curva de sombra produzida é um semi-circulo maximo da esphera.

§ 618. *Construir as sombras d'um nicho espherico.*

Imagine-se um prisma, no qual se abriu uma cavidade limitada por meio cylindro de revolução e por um quarto de esphera de raio egual ao do cylindro, e ter-se-ha o nicho representado na figura 646.

A linha de separação de sombra e luz no prisma é formada pelas arestas $(r_1, r''r')$, $(r_1s_1, r's')$, (s_1s, s') e $(s, s''s')$. Conhecida a linha de separação é facil construir a sombra produzida.

A sombra produzida no interior do nicho é devida: 1.º á aresta $(a, a''a')$, cuja sombra cae toda na parte cylindrica do nicho; 2.º ao arco $a'E'd'$, que produz sombra tanto na parte cylindrica como na espherica do nicho.

A sombra $A''A'$ produzida por $(a, a''a')$ determina-se como na figura 637. A sombra produzida por um ponto (h, h') sobre a parte cylindrica do nicho construe-se, tirando a recta $(hH, h'H')$ parallela aos raios luminosos e procurando a projecção horisontal H do ponto (H, H') commum áquella recta e á superficie cylindrica. Finalmente a sombra m' produzida por um ponto g' sobre a cavidade espherica do nicho obtem-se exactamente como na figura 645.

As duas curvas, $A'H'e'$ e $e'm''d'$, de sombra produzida *tocam-se* n'um ponto e' do diametro $a'b'$. Este ponto e' determina-se conduzindo por b' a perpendicular $b'B$ a L_1T_1, procurando o ponto B_1, em que ella encontra a recta om'', que contém as projecções no plano L_1T_1 de todos os pontos de $e'm'd'$ e tomando de b para b_1 uma parte egual a BB_1. A recta cb_1 corta o semi-circulo aAb no ponto e, do qual se deriva, por uma perpendicular a LT, o ponto e'.

As curvas $d'm'e'$ e $d'g'E'$ gosam da propriedade das tangentes em pontos, como E' e e', situados em perpendiculares a $c'd'$, se encontrarem n'um ponto t de $c'd'$. Esta propriedade póde aproveitar-se para tirar com facilidade tangentes á curva $d'm'e'$.

§ 619. *Construir as sombras d'um solido formado por um parallelipipedo rectangulo sobreposto a meio cylindro recto.*

A linha de sombra propria do meio cylindro é uma geratriz, que tem o traço (fig. 647) no ponto a do semi-circulo NMa, onde a tangente aB segue a direcção das projecções horisontaes dos raios luminosos. O raio luminoso $(bB, b'B')$ toca a superficie cylindrica no ponto b'', onde acaba a linha de sombra $a''b''$ propriamente dita e vae depois projectar sombra no ponto (B, B') do plano vertical de projecção. A parte $(bq, b'q'')$ da aresta $(nq, n'q'')$ do parallelipipedo produz sombra no plano vertical em $B'Q''$, a parte $(bn, b'n')$ da mesma aresta projecta a sua sombra sobre o cylindro em $b''M'N'$. Qualquer ponto M' de $b''M'N'$ obtem-se construindo as projecções mM e $m'M'$ do raio luminoso passando por um ponto (m, m') da aresta e determinando o ponto d'encontro M da projecção horisontal mM com a semi-circumferencia N_1Ma. A aresta (np, n') consta de duas partes, uma, nn_1, que produz sombra, $N'N_1'$, sobre o cylindro e outra n_1p, que leva a sua sombra sobre o plano vertical em $N_1'n'$.

§ 620. *Construir as sombras d'um solido formado por dois meios cylindros rectos do mesmo eixo e de raios deseguaes.*

A geratriz de sombra propria do meio cylindro de raio menor (fig. 648) é $a''b''$ e determina-se exactamente como na figura 647. Esta recta $a''b''$ projecta a sua sombra em BB' sobre o plano vertical de projecção. O arco $(bn, b'n')$ da base inferior do cylindro de maior raio produz sombra no outro cylindro em $b''M'N'$. Qualquer ponto M' d'esta curva determina-se tambem como na figura 647. Os arcos $(nr, n'r')$ e $(bq, b'q'')$ produzem sombra no plano vertical de projecção, o primeiro em $N'r'$ e o segundo em $B'C'_{1}Q''$. Estes dois arcos, faceis de determinar, pertencem á mesma ellipse $r'N'B'C_1'Q''$. Finalmente o arco $(qs, q's')$ da base superior projecta a sua sombra no plano vertical de projecção sobre um pequeno arco $Q's'$ de ellipse.

§ 621. *Construir as sombras d'um solido formado por meio cylindro recto sobreposto a meia pyramide conica truncada e invertida.*

A geratriz $(ab, a'b')$ de sombra propria da pyramide (fig. 649) determina-se conduzindo por um ponto c do eixo a recta ch' parallela a $c'd$ e construindo a sombra propria da pyramide gerada pela rotação de ch' em torno de cc'. Um plano horisontal $l'h'$ corta esta pyramide n'um circulo ht e corta em (l, l') o raio luminoso $(lc, l'c')$ que passa pelo vertice da mesma pyramide. A tangente lt ao circulo ht determina o ponto t, pelo qual e por c deve passar a projecção horisontal ab da geratriz de sombra propria, tanto da ultima pyramide, como da pyramide dada. Determinar-se-ia mais facilmente a recta ab, se porventura não ficasse muito longe o ponto de concurso das rectas $e'd$ e $g'f$. A tangente em b á base superior do tronco determina na base inferior do cylindro um ponto (k, k'), que produz sombra no cóne em k'' e no plano vertical de projecção em (K, K'). Unindo K' com o ponto z, em que LT encontra a tangente em a á base inferior do tronco, tem-se a sombra produzida no plano vertical pela geratriz de sombra propria $a'k''$.

A base inferior do cylindro produz sombra na pyramide. O ponto d'esta sombra situado em qualquer geratriz $(ed, e'd)$ determina-se conduzindo pelo seu traço horisontal d a recta (ds, ds'), parallela aos raios luminosos, e unindo a projecção s do ponto, em que ella encontra o plano horisontal $r'q''$, com a projecção horisontal e do extremo superior (e, e') da mesma geratriz. A recta es, assim obtida, determina o ponto (n, n'), que produz sombra n'um ponto (N, N') de $(ed, e'd)$. A sombra produzida pela mesma base do cylindro sobre uma secção horisontal $x'y'$ do tronco acha-se tirando $(oc, o'c')$ pelo centro da base parallelamente aos raios luminosos, determinando o encontro (o, o') da parallela com o plano da secção e descrevendo um circulo com o centro em o e o raio egual a $c'r'$ ou cr. A intersecção d'este circulo com o semi-circulo xMy é a projecção horisontal M do ponto (M, M') procurado.

A determinação tanto da sombra propria do cylindro, como da sombra projectada por elle sobre o plano vertical de projecção obtem-se facilmente pelos processos já expostos.

APPENDICE

SOBRE ELEMENTOS DE DESENHO TOPOGRAPHICO

Dá-se o nome de topographia á sciencia que trata dos diversos processos e instrumentos empregados para representar pelo desenho uma porção de superficie da terra que, sem erro sensivel, possa reputar-se plana. Não é possivel, comtudo, nem a lei o exige, tratar, n'um compendio destinado aos lyceus, dos processos que a geometria ensina para representar a fórma do terreno, nem dos instrumentos que dão os elementos indispensaveis para essa representação.

Limitar-se-ha, pois, o estudo do desenho topographico nos lyceus á copia de varias estampas d'esta especie de desenho. Para esse fim apresenta este compendio sete estampas, seis a preto e uma com as côres e signaes adoptados pela direcção geral dos trabalhos geodesicos em Portugal. Das seis estampas a preto, duas estão construidas na escalla $\frac{1}{2500}$ e quatro na escalla $\frac{1}{5000}$ de modo que a 5 metros (ou 5000 millimetros) de terreno corresponde 1 millimetro nas ultimas estampas e 2 millimetros nas primeiras. Cada uma d'estas estampas está dividida em rectangulos, que deverão ser copiados separadamente e depois acabados com as côres e signaes indicados na estampa 77, côres e signaes, que o alumno deve fixar na memoria.

Tintas empregadas no desenho de minuta topographico. Os terrenos arborisados representam-se por verde cobalto ou verde da Prussia com uma arvore, que indique a qualidade do arvoredo. Nas mattas a arvore não tem signal algum, nos montados tem um pequeno traço horisontal, nos pinhaes tem uma especie de pequena estrella, nos olivaes um ponto, nos pomares tres pontos e nos laranjaes um pequenino circulo. O verde cobalto obtem-se combinando o amarello com o azul, de modo que predomine esta ultima côr.

A terra lavrada secca representa-se por *terra de Sienne* queimada e a terra lavrada humida por uma combinação da mesma *terra de Sienne* com verde cobalto.

Prados seccos representam-se por verde bexiga e prados humidos por verde bexiga combinado com verde cobalto. O verde bexiga obtem-se combinando azul com amarello, de modo que predomine este.

Representam-se as vinhas por violeta, que se obtem combinando carmim com azul.

Lagôas, rios, ribeiras, etc., e, em geral, agua doce, representa-se por azul da Prussia tanto mais carregado, quanto maior fôr a quantidade d'agua.

Representam-se os mares por verde da Prussia, o lôdo por Nankim, e os pantanos por uma combinação de verde cobalto, verde bexiga e azul.

Nas arêas, dunas, etc., usa-se d'uma côr d'ouro, que se obtem misturando carmim com gomma gutta.

Nas hortas emprega-se gomma gutta, nos jardins verde esmeralda.

Para representar matto usa-se de carmim misturado com verde cobalto.

Terrenos penascosos representam-se por uma aguada fraca de sepia natural sobre a qual, depois de secca, se espalham manchas um pouco mais carregadas da mesma tinta.

Nos rochedos emprega-se bistre, ou sepia natural.

Nos desabamentos e nas curvas de nivel emprega-se *terra de Sienne* queimada forte.

Construcções de alvenaria, cantaria ou tijollo representam-se com carmim, mais ou menos carregado, segundo pertencem a edificios publicos ou a particulares.

Construcções de madeira representam-se por sepia natural, construcções de ferro por indigo.

Taipa, adobes, etc., representam-se por *terra de Sienne* queimada.

Finalmente na estampa 77 estão representados e indicados pelos seus nomes tanto estes signaes, como outros de facil comprehensão.

FIM

INDICE

DO

COMPENDIO DE DESENHO LINEAR

SEGUNDO ANNO

DESENHO GEOMETRICO

PARTE I

GEOMETRIA PLANA

CAPITULO I

Do circulo e de alguns instrumentos empregados no desenho

CAPITULO II

Dos angulos

CAPITULO III

Das perpendiculares

CAPITULO IV

Das parallelas

CAPITULO V

Divisão da recta e do angulo em partes iguaes

CAPITULO VI

Das tangentes aos circulos e da rectificação da circumferencia

CAPITULO VII

Traçado dos circulos tangentes a outros ou a linhas rectas dadas

CAPITULO VIII

Dos polygonos em geral. Dos triangulos e dos quadrilateros

CAPITULO IX

Inscripção dos polygonos regulares no circulo. Divisão da circumferencia em partes iguaes

CAPITULO X

Construcção dos polygonos regulares de que se conhece o raio do circulo inscripto, ou a grandeza de um lado

CAPITULO XI

Proporcionalidade das linhas e similhança dos polygonos, escalas

CAPITULO XII

Da equivalencia ou igualdade das áreas e de algumas operações executadas sobre as áreas dos polygonos similhantes

CAPITULO XIII

Linhas formadas pela combinação de diversos arcos de circulo: arcos abatidos, ovaés, óvulos, arcos aviajados e espiraes polycentricas

CAPITULO XIV

Ellipse

CAPITULO XV

Hyperbole

CAPITULO XVI

Parabola

CAPITULO XVII

Evolvente do circulo. Cycloide

CAPITULO XVIII

Epicycloides planas

CAPITULO XIX

Logarithmica; catenaria

CAPITULO XX

Espiral de Archimedes: espiral hyperbolica

TERCEIRO ANNO

PARTE II

GEOMETRIA NO ESPAÇO

CAPITULO I

Considerações geraes sobre as rectas e planos no espaço

CAPITULO II

Principios fundamentaes do methodo das projecções

CAPITULO III

Dos prismas, das piramides e das suas projecções orthogonaes sobre dois planos perpendiculares entre si

CAPITULO IV

Das projecções obliquas e da perspectiva cavalheira ou militar

CAPITULO V

Das secções planas feitas nos prismas e nas pyramides e da planificação d'estas superficies

CAPITULO VI

Das intersecções dos prismas e das pyramides

CAPITULO VII

Dos polyedros em geral, e em especial dos polyedros regulares

CAPITULO VIII

Dos cylindros, das pyramides conicas e da sua representação por projecções

CAPITULO IX

Secções planas e planificação das superficies cylindricas. Helices cylindricas. Intersecção dos cylindros e dos prismas

CAPITULO X

Secções planas e planificação das superficies conicas. Helices conicas. Intersecção dos cónes e dos prismas

CAPITULO XI

Das superficies de revolução em geral e em particular das superficies da esphera e do tóro. Secções planas d'estas superficies. Desenvolvimento da superficie da esphera

CAPITULO XII

Da intersecção de duas superficies curvas

CAPITULO XIII

Das superficies helicoides e da sua applicação aos parafusos e ás escadas

CAPITULO XIV

Definições e principios geraes de perspectiva rigorosa ou ordinaria. Idéa dos panoramas

CAPITULO XV

Perspectiva das linhas rectas ou curvas, descriptas no geometral

CAPITULO XVI

Exercicios sobre perspectiva de figuras descriptas no geometral

CAPITULO XVII

Perspectiva das linhas verticaes. Perspectiva de polyedros

CAPITULO XVIII

Perspectiva axonometrica

QUARTO ANNO

CAPITULO XIX

Dos principios geraes de architectura

CAPITULO XX

Das engrenagens, ou entrosagens e das bombas

CAPITULO XXI

Theoria geral das sombras. Sombras de figuras planas

CAPITULO XXII

Sombras de figuras a tres dimensões

APPENDICE

FIM DO QUARTO E ULTIMO ANNO