Academia das Ciências de Lisboa

BIBLIOTECA DE ALTOS ESTUDOS

MODERNAS CONCEPÇÕES DA MECÂNICA

POR

AURELIANO DE MIRA FERNANDES

IMPRENSA DA UNIVERSIDADE

COIMBRA — 1933

Sala
Est. 2
Tab. 216
N.º 8

MODERNAS CONCEPÇÕES
DA
MECÂNICA

3821

Academia das Ciências de Lisboa

BIBLIOTECA DE ALTOS ESTUDOS

MODERNAS CONCEPÇÕES

DA

MECÂNICA

POR

AURELIANO DE MIRA FERNANDES

centro ciência viva
ROMULO DE CARVALHO
AC
MNCT
53
FER

IMPRENSA DA UNIVERSIDADE
COIMBRA — 1933

MODERNAS CONCEPÇÕES DA MECÂNICA

(Lições feitas no Instituto de Altos Estudos da Academia das Ciências de Lisboa, em 1 e 4 de Fevereiro de 1933).

MODERNAS CONCEPÇÕES DA MECANICA

Nessa formosa alegoria sôbre a peregrinação e destino da alma, que é a parte mais bela do *Phedro* de Platão, compara Sócrates a dolorosa gestação das asas do entendimento ao abrolhar inquieto da dentição infantil. E assim é. Feito à custa de indizíveis tormentos, de cruciantes perplexidades, de dolorosos suplícios no produzir e infindáveis hesitações no afirmar, o saber humano gera-se numa aflitiva tortura e engrandece-se numa permanente intranqüilidade. Quando se lhe afigura incontestável a posse dum domínio científico, pela adaptação perfeita da teoria à experiência, vem, quási sempre, um mais cuidadoso exame do raciocínio revelar discordâncias que a inevitável imperfeição experimental não comporta; ou vem um aperfeiçoamento da experiência pôr em dúvida a verosimilhança da teoria. E ainda aquele saber que se não louva na confirmação dos sentidos, porque é meramente especulativo e concepcional, tem nas suas definições e postulados, que são os fundamentos de tôda a sua estrutura, abundante matéria de crítica e invencíveis razões de suspeitosa impaciência.

Contingente e precária, como os agentes espirituais que lhe deram o ser, lhe alentaram o crescimento, lhe animaram a consciência dos seus direitos e a fé nos seus destinos, a ciência humana tem sentido, na sua longa evolução, todos os triunfos, todos os precalços, tôdas as dúvidas. Têm-na engrandecido inesperadas revelações do génio e laboriosas pesquisas de obstinada perseverança; têm-na quebrantado enganosas ousadias e imprudentes assertos; têm-na surpreendido inquietantes incertezas e amargas desilusões. Mas é consolador indício de seguro progredimento que, dia a dia, a maiores temeridades correspondam menos cruéis dissabores; e testemunho iniludível de progressiva estabilidade que o declínio das teorias atinja, cada vez menos, a substância do conhecimento científico. O que fica de pé, quando as teorias vacilam e baqueiam, o conjunto das relações invariantes de uma teoria para outra, pecúlio perdurável do saber, é cada vez mais extenso, mais sólido e mais claro: extensão que deve interpretar-se como sinal de que nos avizinhamos da verdade; solidez e clareza que são feliz augúrio de perfeição. E não atribuamos à ciência responsabilidades que lhe não pertencem na génese dessa torturante inquietação que é a mais vincada característica das gerações de hoje. A liberdade de exame e de crítica, que necessàriamente condiciona o seu desenvolvimento e assegura o seu valor, não é subordinável a paradigmas morais; nem há que imputar à ciência impedimentos de estruturação de uma moral científica. O que a ambas, moral e ciência, importa possuir, é sinceridade e independência: nem interdições de análise, nem prescrições de itinerário; nem transigências de raciocínio, nem coacções de finalidade. E, dentro dêstes princípios, não é possível uma colisão de valores, que não seria contraditória com a separação dos seus domínios.

* * *

Nessa tormentosa jornada em demanda da verdade, tem sido a mecânica uma das disciplinas científicas de mais acidentada evolução e mais melindrosa conquista. Porquê?

Em primeiro lugar, porque a textura dos seus postulados não tem a intuïção flagrante que caracteriza, por exemplo, os postulados geométricos. Encobertos pela complexidade das aparências, dissimulados pela permanente vicissitude que é todo o fenómeno de movimento, só à custa de minúcias de análise e sagacidades de crítica conseguiram direitos de primazia e foros de legalidade. Em segundo lugar porque a mecânica serve de indispensável alicerce a tôdas as ciências de *previsão e medida;* o que exige a conciliação dos seus princípios e das suas leis com todos os dados experimentais. E, precisamente, por serem verdades comuns a numerosos campos doutrinários, os seus postulados não podem afirmar o que é apenas particular e relativo a qualquer deles. Em terceiro lugar, finalmente, porque o estudo do movimento é condicionado por uma aparelhagem matemática que só muito tarde veio a constituir-se. E é curioso constatar, entre a análise e a mecânica, desde êsse fecundo e renovador século XVII, a competência de auxílio, o paralelismo de evolução e a concordância de destinos.

* * *

É sabido que a ciência do movimento só começou a ter prerogativas de maior idade, quando atingiu o exame *quantitativo* e *causal* dos fenómenos naturais. Quási exclusivamente *descritiva* e *qualitativa*, a ciência da antigüidade clássica, apurada e comentada pelo escolasticismo, criou êsse notável monumento que é a geometria grega, e estabeleceu, com acertado critério, as leis dalguns fenómenos de equilíbrio. De resto, a resolução de um problema de estática é a dum problema geométrico, acrescida duma determinação causal; e nem sempre o equívoco na definição das causas perturba ou invalida a realidade das conseqüências. Por isso a estática, na esteira da geometria, pôde alcançar uma adolescência precoce, quando a dinâmica era ainda aquela fantasia subtil e caprichosa que pode ler-se na *Física* de Aristóteles. E, no entanto, a estática, sem a dinâmica, é um corpo sem vida: incapaz de prever a sucessão dos fenómenos, inhábil para determinar as suas afinidades.

E é essa a razão por que a mecânica só adquiriu categoria científica com a criação da dinâmica, devida principalmente a Galileu e Newton; o primeiro, definindo, por uma intuïção genial, o conceito de aceleração; o segundo, estabelecendo os postulados da dinâmica clássica, e tirando dêles, pela utilização dos algoritmos da análise infinitésimal, de que fôra o principal progenitor, as leis fundamentais da ciência do movimento. Esta foi a segunda grande prestação de auxílio das matemáticas puras à mecânica: a primeira foi o amparo dispensado pela geometria de Euclides à estática de Arquimedes. Advertirei que já aqui se manifesta a reciprocidade de serviços a que atrás aludi: a descoberta dos princípios do cálculo infinitésimal foi, sobretudo, inspirada pela observação dos fenómenos do movimento; e o conceito de aceleração, deduzido por Galileu das suas notáveis experiências sôbre a queda dos graves, teria sido, meio século depois, sem nenhum fundamento experimental, um simples facto analítico. Mas Galileu é anterior à criação dos métodos infinitèsimais: morreu no mesmo ano em que nasceu Newton. E a genialidade da sua obra não está apenas na inexcedível intuïção do seu labor experimental: está também, e talvez sobretudo, no extraordinário poder de iluminado com que o seu talento supria a falta dum instrumento analítico indispensável à edificação racional da mecânica. Não resisto à tentação, embora abusando da condescendência dos que me escutam, de citar um exemplo, por todos conhecido, da sublime inspiração do seu génio. Como se sabe, para os escolásticos, a velocidade dum ponto material era *produzida*, a cada instante, pela vizinhança de outros pontos materiais. Para êles não havia velocidade adquirida: um ponto material do qual, num dado instante, se afastassem infinitamente todos os outros, ficaria em repouso. Para a mecânica newtoniana, a presença de outros pontos materiais *modifica*, a cada instante, em grandeza e direcção, a velocidade do ponto considerado; de sorte que a ausência brusca dêsses pontos vizinhos deixaria o ponto em movimento rectilínio e uniforme. Divergência fundamental entre as duas escolas, esta do conceito de inércia. Pois bem: Galileu admitia que a *fôrça* exercida por um ponto material sôbre outro vizinho depende apenas das suas posições relativas e não das suas velocidades. E ninguém desconhece a influência por êste princípio exercida na elaboração da mecânica clássica. ¿Era uma afirmação de orígem experimental? Não se vê bem de que experiências êle a teria inferido. ¿Era uma reminiscência do escolasticismo, em cujas doutrinas se iniciara a sua formação espiritual? Assim o conjectura Painlevé, com judiciosas razões. Mas onde os escolásticos afirmavam que a velocidade dum ponto material é *causada* pelos pontos vizinhos, Galileu assegurava que a acção dêsses pontos não é *influen-*

ciada pela velocidade que o ponto já possui. Para êle a fôrça ainda não é, como para Newton, uma causa apenas *modificadora* e não *eficiente* da velocidade; mas a velocidade também não é causa eficiente da fôrça. E ¿não representará esta asserção meio caminho andado para o estabelecimento da concepção newtoniana de que o movimento ulterior a um dado instante é o efeito dêsses dois agentes, fôrça actuante e velocidade adquirida? A separação dos dois conceitos, na génese dos fenómenos dinâmicos, foi Galileu quem a iniciou. E ninguem dirá que ela não foi, sem o auxílio da análise e sem um fundamento experimental que se não descortina, uma revelação de génio.

* * *

Não é meu intento, nem sequer a título de simples comemoração, a referência, mesmo sumária, do que foram os progressos da mecânica newtoniana até aos primeiros anos dêste século; o exame, embora rápido e ligeiro, da sua carreira triunfal. Não caberiam, essa referência e êsse exame, nos moldes desta exposição, nem seriam próprios da índole dêste curso e da alta cultura daqueles que têm a paciência de me ouvir.

Attamen errores non sunt artis, sed artificum, diz Newton, no prefácio da sua obra monumental *Philosophiae naturalis principia mathematica,* ao estabelecer as relações da Geometria com a Mecânica, no sentido que esta palavra tinha no seu tempo.

Queria êle acentuar a inevitável imperfeição da experiência e a necessidade de construir uma ciência racional do movimento. Como essa ciência se criou, progrediu, fortaleceu e frutificou nas mais fecundas teorias e nos mais belos grangeios do engenho humano, é por todos sabido. Logo na primeira infância, é o mesmo Newton quem lhe assegura pergaminhos de nobreza e lhe certifica natural robustez, com a teoria da gravitação universal, tão rica pelas suas conseqüências, como formosa pela sua simplicidade. Já na adolescência, é Lagrange quem lhe exalta a elegância, aperfeiçoando-lhe a indumentária analítica e lhe aumenta a distinção, disciplinando-lhe os métodos. Da sua primogénita, a Mecânica Celeste, que nasceu adulta como a Minerva da fábula, é Laplace o principal sistematizador, criando, com ela, o mais sólido apoio das doutrinas de Newton, e forjando um modêlo que havia de servir, até aos nossos dias, à estruturação teórica dos mais variados domínios científicos. ¡E que modêlo! Deve-lhe a ciência do século XIX, a-par-dos enormes benefícios que ao seu engrandecimento trouxeram as doutrinas mecanistas, êste inolvidável serviço: a concepção da lei física como relação de estados infinitamente vizinhos; como norma de conexão infinitésimal. A génese dêste conceito estava, de resto, na lógica dos mesmos princípios que à mecânica servem de fundamento; era um corolàrio da necessária subordinação das teorias mecânicas à análise matemática. E desde então a lei física teve a sua tradução analítica numa equação diferencial.

Foi nesses moldes da mecânica celeste que se vasaram as primeiras teorias da Física Matemática, a começar pela dos fenómenos capilares, do mesmo Laplace. O seu êxito na análise e previsão dos movimentos planetários, a simplicidade da concepção e a fertilidade de conseqüências de todas as leis de fôrças centrais, cuja grandeza é função apenas da distância, fizeram dêste paradigma (além de tudo mais, por essa *aspiração de unidade,* sôbre a qual o espírito humano se compraz em construir um ideal de perfeição), um modêlo, quási universal, de arquitectura científica, desde os fins do século XVIII até aos tempos modernos. E ainda quando as grandes crises de crescimento e renovação vieram sobressaltar os conceitos mecanistas, houve quem não perdesse a fé numa futura consagração da sua solidez. Já em nossos dias, e com as restrições de discontinuïdade da teoria quântica, o átomo de Bohr é um sistema laplaciano.

* * *

Das crises a que há pouco aludi, originadas na aparente insuficiência do modêlo dinâmico das fôrças centrais para a completa explicação de alguns fenómenos físicos, a primeira foi procurar soluções tão interessantes pela sua originalidade como pelo seu alcance filosófico. Foi uma crise de regime.

A teoria mecanista criara, como ilação lógica dos seus postulados, um certo número de princípios gerais (conservação da energia, menor acção, relatividade, etc.), aos quais vieram juntar-se outros de menos mediata origem experimental, como o princípio de Carnot e a lei da conservação da massa. Fortalecidos pela generalidade da sua observância, ¿porque não seriam êles as normas do raciocínio, os preceitos dirigentes, as leis invioláveis da construção científica? Se êles se verificavam sempre, como resultados da experiência, ¿porque não havíamos de adoptá-los, como fundamentos da teoria?

¿Não tinham poder suficiente de evidência que os acreditasse como postulados? Mas tinham garantias de veracidade em todo o passado da ciência do movimento. ¿Onde estava, de resto, essa nitidez de evidência nos princípios sôbre que se estabelecera a mecânica das fôrças centrais?

E assim se fundou a Mecânica das *Grandes Leis*, que deu à ciência entre outras, a teoria electromagnética da luz.

Não discutamos a grandeza dos seus triunfos, a oportunidade do seu aparecimento, a fecundidade do seu labor. Mas não esqueçamos que o incremento da sua capacidade de previsão e medida foi conquistado à custa dum doloroso sacrifício: a desistência de acompanhar os fenómenos em tôdas as minúcias do seu desenvolvimento, na continuïdade da sua essência, na intimidade da sua marcha, no segrêdo da sua gestação. ¿ Circunstância de menor valia, na aquisição da verdade final, única valiosa e apetecida? Talvez. Mas, em todo o caso, insuficiência de conhecimento. E, por isso, subsistiu, como já disse, em tantos espíritos, a crença numa vitória final das doutrinas mecanistas. Mal pensavam êles que a nova crise, atingindo quási tôdas as grandes leis, duma maneira directa ou reflexa, havia de criar à ciência as inesperadas e perturbantes atitudes da hora presente; que a sua solução não estava num regresso ao passado, embora com mais aperfeiçoados utensílios de análise; mas sim numa renovação radical de conceitos e hábitos que, por uma longa ancestralidade e pelas aparências do meio ambiente, se tinham consolidado no espírito dos investigadores.

Ao dealbar da era nova, nas vésperas da grande revolução científica a que estamos assistindo, vinha oferecer os seus serviços à Mecânica o Cálculo das Probabilidades. Já adulto, e senhor de vastos domínios, dêle se servia Gibbs para lançar os fundamentos da Mecânica Estatística, onde as leis dos fenómenos aparecem como uma conseqüência da lei dos grandes números. A tradução analítica da lei física já não é dada apenas por um sistema de equações ou inequações diferenciais, consignando os postulados da mecânica newtoniana, ou exprimindo as condições de estacionaridade duma certa funcional: é feita também à custa de determinadas funções estatísticas. E a utilidade algorítmica dêste conceito havia de engrandecer-se e adornar-se de inesperados valores na construção das teorias modernas.

* * *

Dou por finda, meus senhores, esta breve *alusão* às doutrinas do passado. Como adverti, não tem sequer pretensões de sumária referência, quanto mais de ligeiro exame. Mas tem um intuito, que, em minha opinião, lhe atenua o atrevimento. E é êste: acentuar que, em face das novas teorias e concepções da mecânica, ainda em trabalhoso apuramento e delicada instabilidade, a velha ciência do movimento é quási sempre um guia, a todo o instante uma advertência e muitas vezes um recurso.

* * *

Propus-me expor, num pequeno número de lições, as ideas gerais que neste momento dominam a teoria relativista e a mecânica quântica. Essa exposição, necessàriamente elucidada por desenvolvimentos de cálculo, será feita noutro lugar, àqueles a quem interessarem minudências de especulação. Para aqui trago apenas, a título de sumário, o breve relato dos seus principais conceitos; e a título de admissão num grémio de Altos Estudos, a débil contribuïção pessoal do meu esfôrço. O primeiro é justificado pela necessidade de esclarecer convenientemente a segunda. Por isso, a mesma insignificância dos propósitos me obriga a mais demorada exposição.

RELATIVIDADE

RELATIVIDADE

O mérito primacial das doutrinas de Copérnico está na destruïção do grosseiro prejuízo de que a Terra devia ter um significado absoluto, como sistema de referência dos movimentos. A negação dêsse privilégio, feita no campo cinemático, foi confirmada pela obra de Newton no campo da dinâmica. ¿De que maneira? Formulando, na lei da atracção universal, a explicação das leis de Kepler. Foi grande a importância que teve a extinção dessa prerogativa nos progressos da mecânica. Mas não foi menor o seu valor no campo filosófico, afirmando, pela primeira vez, um princípio de liberdade de referência, cuja limitação devia apenas subordinar-se a razões de comodidade na análise e de simplicidade na expressão das leis. E todos aqueles que já resolveram problemas de mecânica sabem como a adequada escolha do sistema de referência esclarece e facilita a resolução, orienta e inspira o raciocínio; porque o sistema de referência é, no domínio especulativo, uma perspectiva. Pois bem: o princípio da relatividade da mecânica clássica afirmava que essa perspectiva das leis dinâmicas é a mesma para dois sistemas de referência que estão animados, um em relação ao outro, duma translacção rectilínea e uniforme. E êle é uma conseqüência imediata da circunstância de ter a lei geral da dinâmica, como característica cinemática, a aceleração e esta ser a mesma em relação a *ambos* os sistemas.

Na passagem dêste princípio para o conceito relativista de Einstein, há um amontoado de ruínas, sôbre as quais desvaira uma multidão de fantasmas. São ruínas as concepções do espaço e do tempo sôbre as quais se sistematizou a geometria grega e a mecânica clássica; é uma ruína também o velho conceito substancial de matéria, invariante fundamental de tôdas as transformações. E sôbre os seus despojos, vagueiam os espectros das antigas ideas de energia e fôrça, esbulhadas dos seus privilégios, decaídas da sua soberania. Dos três agentes desta formidável revolução, filosófico, matemático e físico, não foi, talvez, o matemático o de menor eficácia e galhardia. Por isso ela se nos afigura, se não definitiva nas suas conclusões, pelo menos fortemente apoiada nos seus embasamentos.

E, no entanto, torna-se necessário um certo esfôrço, demolidor de velhos preconceitos e falsas evidências, para nos adaptarmos às novas doutrinas; porque há nelas, até certo ponto, uma nova concepção da realidade.

* * *

Foi Riemann, na sua célebre tese *Sôbre as hipóteses que servem de fundamento à Geometria* e como conseqüência das suas vistas geniais sôbre o conceito de espaço, quem primeiro advertiu o *punctum saliens* da imperfeição das teorias clássicas, posta a claro, em nossos dias e por caminhos diversos, pela obra de Einstein.

No final dessa notável *Memória*, o ilustre criador das geometrias de espaço heterogéneo acentua que, se o espaço é uma multiplicidade contínua, a *causa* das relações métricas, nêle definidas pela forma fundamental, deve ser procurada fora da multiplicidade, *nas fôrças de ligação que nela actuam.* Está aqui a afirmação de que a métrica espacial é determinada pelos fenómenos que no espaço se produzem; o espaço, em si, é uma variedade amorfa, e é apenas *o que nêle existe* que lhe dá forma e confere padrões de medida. ¡Como tudo isto é claro, mesmo para aqueles que apenas conhecem nas suas linhas gerais a etiologia do pensamento einsteiniano! ¡E como tudo isto foi, o que não admira, absolutamente incompreensível para os contemporâneos de Riemann!

E para o mesmo Riemann, que na sua obra não desenvolve as conseqüencias do seu genial asserto, teria sido impossível a sistematização do universo, enquanto o considerasse uma simples variedade a três dimensões, de carácter espacial e não uma variedade quatridimensional: o *espaço-tempo*. Porque é só numa tal variedade que as leis dos fenómenos podem ser formuladas dum modo invariante, em relação a todos os sistemas de coordenadas, de harmonia com o princípio da relatividade; e, sem êsse princípio, sem essa invariância, não teria sido possível a Einstein atribuir à gravitação o papel de regulador das relações métricas.

Por outras palavras: a geometria diferencial de Riemann, definindo a métrica dos espaços abstractos por uma forma diferencial, cujos coeficientes são funções das coordenadas, só podia ser útil à estructuração da métrica do espaço físico, quando o tempo deixasse de ser uma coordenada excepcional e privilegiada, passando a figurar, como qualquer outra, na determinação local dos pontos do Universo; e tirando assim todo o significado ao conceito clássico de simultaneidade.

* * *

Como todos sabem, o edifício da mecânica einsteineana, que teve, no campo experimental, o valioso apoio de algumas experiências célebres, entre elas a de Michelson-Morley, precisava, no campo matemático, de um algoritmo adequado à representação das leis dos fenómenos sob forma invariante. A criação dêsse algoritmo, que é o *cálculo diferencial absoluto*, deve-se a Ricci e Levi-Cívita, que lançaram os seus fundamentos no princípio dêste século.

E, se é certo que êle já tinha, na hora própria, o desenvolvimento necessário à prestação de serviços que a doutrina relativista lhe pedia, não é menos verdade que esta tenha sido a principal determinante do seu rápido incremento e da sua definitiva estruturação. Sôbre êle assenta tôda a moderna Geometria diferencial de Schouten, Blaschke, Weyl e Cartan (para não citar senão astros de primeira grandeza) e à sua custa se alargaram enormemente os conceitos espaciais de Riemann. A noção de transporte paralelo, definida, para os espaços de Riemann, por Levi-Civita, à custa duma variedade euclideana ambiente, serviu de base, principalmente a Struick e Schouten, para a definição de tôdas as leis lineares de transporte; e, a cada uma dessas leis, a métrica faz corresponder uma estrutura espacial diferente. Teremos ocasião de ver, dentro em breve, como é possível escolher, entre essas diversas estruturas de conexão linear, alguma que permita, atribuída ao universo físico, a inclusão dos fenómenos electromagnéticos, a par dos fenómenos gravitatórios, na determinação das relações métricas do espaço; atingindo-se assim essa concepção unitária, ideal de perfeição e de síntese, que tem sido, nos últimos anos, uma das maiores curiosidades da especulação científica.

* * *

Vejamos ràpidamente como se é conduzido á idealização de Einstein, a partir da mecânica newtoniana. Nesta, como se sabe, as equações do movimento dum ponto livre são as condições de estacionaridade do integral de Hamilton

$$1) \qquad \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{L}\, dt,$$

considerado entre dois instantes determinados t_0 e t_1, de resto arbitrários.

A função de Hamilton

$$\mathrm{L} = \frac{1}{2} m v^2 + \mathrm{U}$$

é a soma da energia cinética com a função de fôrças.

Suporemos unitária a massa do ponto e, portanto,

$$2) \qquad \mathrm{L} = \frac{1}{2} v^2 + \mathrm{U}.$$

Em coordenadas cartesianas (y_1, y_2, y_3), as condições de estacionaridade do integral 1), equivalentes, no seu conjunto, à equação variacional

$$3) \qquad \delta \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{L}\, dt = 0,$$

são

$$4) \qquad y_i' = \frac{\partial U}{\partial y_i} \quad (i = 1, 2, 3),$$

entendendo-se que, na equação 3), as variações δy_i das coordenadas de espaço são nulas nos extremos e, de resto, arbitrárias, sendo $\delta t = 0$.

* * *

Efectuemos, no espaço ordinário, a transformação de coordenadas

$$A) \qquad y_i = f_i(x_1, x_2, x_3, t) \quad (i = 1, 2, 3),$$

sendo x_i parametros lagrangeanos quaisquer. Por hipótese, o sistema A) pode resolver-se em ordem às coordenadas x_i, tomando a forma

$$A') \qquad x_i = F_i(y_1, y_2, y_3, t) \quad (i = 1, 2, 3).$$

Em relação às novas coordenadas, as condições de estacionaridade do integral de Hamilton, *com as restrições indicadas*, tomam a forma

$$4') \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial x_i'}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

das conhecidas equações de Lagrange.

Acontece, porém, que, *suprimindo a condição* $\delta t=0$, e atribuindo ao tempo t as mesmas características variacionais das coordenadas de espaço x_i, as equações 4') *são ainda* as condições de estacionaridade do integral de Hamilton; isto é, equivalentes, no seu conjunto, à equação variacional 3), como é fácil verificar.

Na variedade quatridimensional *espaço-tempo*, habitualmente chamada *cronotopo*, um sistema de equações

$$5) \qquad x_i=\varphi_i(t) \qquad (i=1,\ 2,\ 3)$$

define uma *linha horária*, em qualquer sistema de coordenadas espaciais x_i, conservando ao tempo t o carácter de coordenada *excepcional, absoluta*.

Com essa convenção, podemos dizer que os integrais das equações 4') são as linhas horárias do cronotopo; de maneira que a equação variacional 3) exprime, *sob forma invariante,* para qualquer transformação A) ou A'), as leis do movimento.

Suponhamos, porém, que o tempo t deixa de ter, no cronotopo, o carácter de coordenada privilegiada, transformando-se segundo a mesma lei geral de transformação das coordenadas espaciais. Isto é, consideremos, no cronotopo, em vez da transformação A'), a transformação

$$\text{B}') \qquad \begin{cases} x_i=\text{F}_i\,(y_1\,,\ y_2\,,\ y_3\,,\ t) & (i=1,\ 2,\ 3) \\ x_0=\text{F}_0\,(y_1\,,\ y_2\,,\ y_3\,,\ t) \end{cases}$$

e chamemos à nova coordenada x_0, por uma razão óbvia, *tempo local.* Ela depende, com efeito, no sistema cartesiano, do *tempo* e do *lugar*. Como dois pontos, que têm *diferentes* coordenadas espaciais y_1, y_2, y_3 e a *mesma* coordenada t, não têm, em geral, a *mesma* coordenada x_0, o conceito de *simultaneidade,* em relação à nova definição do tempo, deixa de ter um significado absoluto: é relativo ao sistema de referência. Conservará êsse significado absoluto apenas quando a última equação B′) fôr da forma $x_0 = F_0(t)$.

Pois bem: a equação variacional 3), invariante, como lei geral do movimento, para tôdas as transformações A′), *já o não é,* para tôdas as transformações B′), como é evidente.

Escrevamos a equação variacional 3) sob a forma

$$3') \qquad \delta \int_{t_0}^{t_1} (c^2 - L)\, dt = 0$$

onde c é uma constante. Ela é manifestamente equivalente a 3) visto que

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} dt = 0,$$

pela condição imposta a δt de se anular nos extremos do intervalo de integração.

Tomemos c suficientemente grande para que, em

ROMULO DE CARVALHO

relação à velocidade v do movimento que se considera, sejam desprezíveis o quadrado de $\beta = \frac{v}{c}$ e grandezas da mesma ordem, como $\frac{U}{c^2}$ por exemplo.

Será, com essa aproximação,

$$c^2 - L = c^2\left(1 - \frac{1}{2}\beta^2 - \frac{U}{c^2}\right) \sim$$

$$\sim c^2 \sqrt{1 - \beta^2 - \frac{2U}{c^2}} = c\sqrt{c^2 - v^2 - 2U}.$$

E a equação 3′) toma a forma

$$3'') \qquad \delta \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{c^2 - v^2 - 2U}\, dt = 0,$$

suprimindo o factor c.

Pondo

$$dl^2 = dy_1{}^2 + dy_2{}^2 + dy_3{}^2,$$

será, no sistema cartesiano (y_i, t),

$$v^2 = \frac{dl^2}{dt^2}.$$

E, fazendo

$$6) \qquad ds^2 = (c^2 - 2U)\, dt^2 - dl^2,$$

a equação 3'') toma a forma

$$7) \qquad \delta \int ds = 0.$$

Admitamos que o cronotopo é uma variedade riemanniana, cuja métrica é definida por 6). Mostra a equação 7) que *as linhas horárias do ponto móvel são as geodésicas dessa métrica.* Se efectuarmos uma transformação B') de coordenadas, o elemento linear tomará a forma

$$6') \qquad ds^2 = \sum_{ik=0}^{3} g_{ik}\, dx_i\, dx_k,$$

onde os coeficientes g_{ik} são funções determinadas das coordenadas x_i. Mas, pela natureza invariante do ds^2, *a equação* 7) *exprime as leis do movimento sob forma invariante para qualquer transformação* B'). E é na possibilidade desta expressão que consiste *o princípio da relatividade geral de Einstein.*

As linhas horárias dum ponto no cronotopo são, pois, as geodésicas da métrica nêle definida pela forma fundamental 6). E, na definição dessa métrica, lá figuram, na função U, *aquelas causas* das relações métricas que o génio de Riemann previa: *as fôrças de ligação que actuam na multiplicidade.*

Mostra a equação 6) que a métrica do cronotopo é dada por uma forma *indefinida,* que pode, portanto, tomar valores negativos, para os quais *ds* seria imaginário. Mas as mesmas convenções, há pouco estabelecidas, nos asseguram que os fenómenos se passam numa *região* em que o ds^2 é sempre positivo. Com efeito, de 6) resulta que

$$ds^2 = c^2\, dt^2 \left(1 - \frac{2\,U}{c^2} - \frac{v^2}{c^2}\right).$$

E, dentro da aproximação estabelecida, em que $\frac{U}{c^2}$ e $\frac{v^2}{c^2}$ são infinitésimos a desprezar, o ds^2 é sempre positivo.

* * *

É tempo de examinarmos à custa de que sacrifício do rigor se efectuou a substituïção do princípio variacional 3), da mecânica clássica, pelo princípio variacional 7), da mecânica einsteineana; e também se êsse sacrifício, pela sua ordem de grandeza, dentro das possibilidades da experiência, nos permite adoptar a concepção relativista como expressão da realidade e a velha concepção de Galileu e Newton como uma aproximação.

Definimos a constante c como suficientemente grande para que o quadrado de $\frac{v}{c}$ tivesse uma ordem de grandeza desprezível. Suponhamos que v tem o valor de 30 quil. por segundo, velocidade da Terra na sua órbita, e c é a velocidade da luz, ou sejam 300.000 quil. por segundo.

Será

$$\frac{v}{c} = 10^{-4} \text{ e } \frac{v^2}{c_2} = 10^{-8}.$$

Isto é, para êsse valor de c (há razões de ordem física que o impõem, como vai ver-se) e para velocidades que não excedam, em ordem de grandeza, a velocidade de translacção da Terra, a ordem de aproximação dos dois princípios variacionais é de um centésimo-milionésimo. ¿Há fenómenos mecânicos cuja observação permita descriminar grandezas dessa ordem? E, nesse caso, ¿para qual dos dois princípios variacionais se inclinam os resultados da experiência? Adiante veremos que êsses fenómenos existem e que, tanto nos domínios da mecânica macroscópica como nos da mecânica atómica, favorecem a concepção einsteineana.

* * *

Não cabem, meus senhores, nos estreitos limites desta palestra, que tem apenas intuitos de resumida síntese, pormenorizadas explanações de raciocínio. Por isso, me limitarei a acentuar as conseqüências da adopção do princípio variacional 7) como lei dos fenómenos. Dêle resulta, como pode ver-se em todos os tratados de mecânica relativista:

1.° Que a *massa* m dum ponto móvel está relacionada com a massa em repouso m_0 pela lei

8) $$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} - \frac{2\,\mathrm{U}}{c^2}}}$$

que a faz depender da velocidade v e do campo de fôrças U e que, na ausência de campo, em que ela toma a forma

8′) $$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

obriga o número c a ser um limite superior das velocidades.

2.° Que a sua energia (no caso $m_0 = 1$) é

9) $$\mathrm{H} = \frac{c^2 - 2\,\mathrm{U}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} - \frac{2\,\mathrm{U}}{c^2}}}$$

o que a torna indecomponível, como na mecânica clássica, numa parte cinética e outra posicional. Desenvolvendo esta expressão, e com a aproximação do princípio variacional que serve de base à teoria, pode escrever-se

9′) $$\mathrm{H} \sim c_2 - \mathrm{U} + \frac{1}{2} v^2;$$

o que mostra que a energia H se compõe duma parte cinética $\frac{1}{2}v^2$, duma parte posicional U e duma parte *constante* c^2 que pode chamar-se *energia intrínseca.*

Para um ponto, cuja massa em repouso é m_0 e na ausência de campo, essa energia intrínseca será

$$10) \qquad E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m c^2,$$

como resulta de 9) e 8).

E há razões de ordem física, inculcadas pelas propriedades radioactivas da matéria, que nos levam a atribuir a esta energia intrínseca *não apenas um significado teórico,* análogo ao duma constante aditiva de integração, mas também justificados títulos de sensível realidade.

3.° Na ausência de campo, a forma fundamental 6) reduz-se a

$$11) \qquad ds_0^2 = c^2 dt^2 - dy_1^2 - dy_2^2 - dy_3^2,$$

em coordenadas cartesianas ortogonais; e a equação variacional 7) toma a forma

$$7') \qquad \delta \int ds_0 = 0.$$

Pois demonstra-se que é possível determinar um novo sistema de coordenadas $(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3, \bar{t})$ em relação ao qual ds_0^2 toma uma forma análoga a 11):

$$11') \qquad ds_0^2 = c^2\, d\bar{t}^2 - d\bar{y}_1^2 - d\bar{y}_2^2 - d\bar{y}_3^2.$$

A transformação do sistema (y_i, t) no sistema $(\bar{y}_i, \bar{t})$ é do tipo B') e chama-se uma *transformação de Lorentz.*

As equações de Lagrange, em relação ao sistema (y_i, t) e visto ser a função de Hamilton, como resulta de 3'')

$$L_0' = \sqrt{c^2 - v^2} = \sqrt{c^2 - \sum_{i=1}^{3} y_i'^2},$$

tomam a forma

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_0'}{\partial y_i'}\right) = 0,$$

ou

$$\frac{\partial L_0'}{\partial y_i'} = -\frac{y'_i}{L_0'} = \text{const.} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Isto é

$$y_i' = \text{const.} \quad (i = 1, 2, 3)$$

o que significa (princípio de inércia) que, *mesmo em relação ao segundo princípio variacional, o movimento é uniforme, na ausência de campo, referido ao sistema* (y_i, t). E, como a transformação de Lorentz conserva o ds_0 e, portanto, a equação variacional 7'), equivalente a

$$\delta \int L'_0 \, dt = 0,$$

conclui-se que, considerando o sistema $(\bar{y}_i, \bar{t})$ como um sistema de coordenadas ortogonais, em que $\bar{t}$ representa o tempo, *um movimento uniforme em relação ao sistema* (y_i, t) *é ainda uniforme em relação ao seu transformado de Lorentz.*

Tal é o princípio da *relatividade restricta.*

A transformação de Lorentz, no caso particular em que $y_2 = \bar{y}_2$ e $\bar{y}_3 = \bar{y}_3$, (translacção do sistema espacial paralelamente ao eixo y_1) é definida pelas fórmulas

$$\text{C)} \begin{cases} \bar{y}_1 = \dfrac{y_i + vt}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \\ \bar{y}_2 = y_2 \\ \bar{y}_3 = y_3 \\ \bar{t} = \dfrac{t + \dfrac{v}{c^2}\, y_1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}. \end{cases}$$

Esta 4.ª equação mostra que o tempo $\bar{t}$ *é local.*

* * *

4.º Da última fórmula C) resulta também que, sendo y_1 *constante*,

12) $$\Delta \bar{t} = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c_2}}}.$$

Isto é, para um mesmo ponto, e para um observador que o acompanha no seu movimento, o intervalo de tempo entre dois acontecimentos, que nesse ponto se passam, é *menor* do que o intervalo de tempo medido por um observador solidário com o sistema fixo. E, como da 1.ª e 4.ª equações C) resulta

$$\bar{y}_1 = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\, y_1 + v\bar{t}$$

será, *para* $\bar{t}$ *constante*,

13) $$\Delta \bar{y}_1 = \sqrt{1-\frac{v_2}{c^2}}\, \Delta y_1.$$

Isto é, o observador fixo vê, num dado instante t, *diminuídas* as dimensões paralelas à direcção do transporte.

É o princípio da *contracção* de Lorentz.

5.° Da 1.ª e 4.ª equações C) resulta ainda (para v constante)

$$d\bar{y}_1 = \frac{dy_1 + v\,dt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,; \quad d\bar{t} = \frac{dt + \frac{v}{c^2}\,dy_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

E, portanto,

$$\frac{d\bar{y}_1}{d\bar{t}} = \frac{\frac{dy_1}{dt} + v}{1 + \frac{v}{c^2}\frac{dy_1}{dt}}.$$

Ou, pondo

$$\frac{d\bar{y}_1}{d\bar{t}} = v_a \quad \text{e} \quad \frac{dy_1}{dt} = v_r,$$

14) $$v_a = \frac{v_r + v}{1 + \frac{v}{c^2}\,v_r},$$

que é a *lei relativista da composição de velocidades*, no caso particular, definido pelas fórmulas C), duma translacção uniforme paralela a y_1; diferente, como se vê, da lei clássica

$$v_a = v_r + v.$$

6.° Da equação 14) resulta, para $v_r = c$, $v_a = c$. Isto é, quando o móvel atinge a velocidade limite c, em relação ao primeiro sistema, essa velocidade é ainda c, em relação ao segundo,

O mesmo se concluía a partir das expressões 11) e 11') de ds_0^2. Com efeito, elas podem escrever-se sob a forma

$$ds_0^2 = (c^2 - v_r^2)\,dt^2 = (c^2 - v_a^2)\,d\bar{t}^2.$$

Portanto, se $v_r = c$, $ds_0^2 = 0$ e, por conseqüência, $v_a = c$.

Vê-se assim, ao mesmo tempo, que as trajectórias do cronotopo, correspondentes à velocidade c, são aquelas para as quais $ds_0 = 0$ e $\delta \int ds_0 = 0$. São as *geodésicas de comprimento nulo.*

E, como a experiência de Michelson-Morley (entre outras) inculca, para a luz, esta invariância de velocidade, em relação ao sistema de referência, eis a razão porque a teoria da relatividade adopta, para valor da constante c, a velocidade da luz.

* * *

E aqui estão, meus senhores, bem evidentes como conseqüências do segundo princípio variacional, aquelas ruínas, a que há pouco aludi, dos conceitos clássicos da mecânica. A massa deixou de ser uma constante; a energia inclui uma parcela adicional (a energia intrínseca), cujo significado físico é justificado pelas propriedades radioactivas; os velhos conceitos distintos de espaço e tempo fundiram-se num só: a variedade cronotópica, suporte de todos os fenómenos do mundo físico; o princípio de inércia subsiste, mas há uma velocidade limite, que é a mesma para todos os sistemas de referência; a lei da composição de velocidades deixou de ter a forma aditiva simples da cinemática clássica; e as trajectórias dos raios luminosos são as geodésicas de comprimento nulo da métrica do cronotopo e, como tais, determinadas pelos *agentes* dessa métrica.

¿Onde havemos de ir procurar êsses agentes?

Como se sabe, a mecânica newtoniana atribuía ao espaço absoluto, aquele a que os seus postulados se reportam, a origem das fôrças de inércia. A teoria da relatividade restricta, por Einstein formulada antes da teoria geral, considerava a métrica do universo como determinante dessas fôrças de inércia, mas supunha a métrica uma propriedade meramente *formal* do espaço-tempo. O aperfeiçoamento da teoria impunha um passo decisivo: atribuir a essa métrica uma *realidade,* como geradora, que é, doutras *realidades:* as fôrças de inércia.

Mas se a métrica é uma realidade, ela deve sofrer a influência da matéria que no espaço se encontra. E devemos, portanto, recorrer à concepção riemanniana da determinação da estrutura métrica pelo *conteúdo espacial.* Sòmente, agora (e essa é uma indispensável condição de seguro exame) o *espaço conti-*

nente não é a multiplicidade tridimensional de Riemann; é o cronotopo de Einstein-Minkowski.

E assim se chegou a essa maravilhosa síntese que é a *teoria da relatividade geral.*

Recordemos sumàriamente a génese das equações fundamentais de Einstein.

a) Como se sabe, os esforços desenvolvidos num meio contínuo são representados por um tensor duplo (ψ_{ik}) chamado *tensor dos esforços,* cuja divergência λ, de componentes

$$15) \qquad \lambda_i = \Psi_{ik}^{/k} \quad (i = 1, 2, 3),$$

é a fôrça molecular exercida, em cada ponto, pelo meio ambiente.

E a equação vectorial do movimento duma partícula do meio contínuo considerado é

$$16) \qquad \rho \alpha = \rho F + \lambda$$

onde ρ representa a densidade do meio, α o vector aceleração da partícula e F a fôrça de massa; devendo ainda ser satisfeita a equação da continuïdade

$$17) \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho V) = 0.$$

E como ρF pode sempre considerar-se divergência dum tensor duplo, suporemos ρF incluído na divergência do tensor dos esforços.

Às equações 16) e 17) pode dar-se a forma invariante (1)

$$18) \qquad T_{ik}^{/k} = 0 \quad (i = 0, 1, 2, 3)$$

sendo (T_{ik}) o tensor energético, de componentes

$$19) \quad \begin{cases} T_{00} = c^2 \rho \\ T_{0i} = -c \rho v_i \\ T_{ik} = \phi_{ik} + \rho v_i v_k \qquad (i, k = 1, 2, 3) \end{cases}$$

em coordenadas cartesianas ortogonais ($y_0 = ct$, y_1, y_2, y_3) e (v_i) as componentes da velocidade.

Come se vê, as equações do movimento afirmam o *anulamento da divergência do tensor energético*. Êste é um tensor duplo simétrico, (portanto, com 10 componentes), sendo T_{00} a *densidade de energia*, T_{0i} as componentes do *fluxo de energia*, e T_{ik} $(i, k = 1, 2, 3)$ coincidindo com os componentes do tensor dos esforços, no caso estático $v = 0$, como resulta das fórmulas 19).

b) Dada a forma fundamental

$$ds^2 = \sum_{ik=0}^{3} g_{ik} \, dx_i \, dx_k$$

---

(1) *Vidé* Levi-Civita, *Fondamenti di Meccanica relativistica*, pág. 67 e seguintes.

definidora da métrica do cronotopo, construamos, a partir dela, o tensor duplo

$$20)\qquad G_{ik}=\sum_{jh=0}^{3} g^{jh}\,(ij,\,hk)$$

resultante da contracção do tensor de Riemann $(ij\,,hk)$.

A êste tensor (G_{ik}) dá-se o nome de *tensor de Einstein.*

A sua divergência não é nula; mas é fácil verificar, chamando

$$21)\qquad G=\sum_{ik=0}^{3} g^{ik}\,G_{ik}$$

ao seu invariante linear, que é nula a divergência do tensor duplo

$$22)\qquad G_{ik}-\frac{1}{2}\,G g_{ik}$$

chamado *tensor gravitacional.*

c) Em qualquer ponto do cronotopo, um fenómeno mecânico é determinado pela velocidade e densidade da matéria e pelo tensor dos esforços, incluindo neste, como dissemos, a representação das fôrças de massa; é determinado, portanto, pelo tensor energético. Se a métrica espácio-temporal é influenciada pelos fenómenos que se passam no cronotopo, segundo a concepção de Riemann e Einstein, deve ser possível relacionar, sob forma invariante, o tensor energético com os coeficientes g_{ik} da forma fundamental. ¿De que maneira?

Einstein adoptou, como se sabe, as *equações gravitacionais*

$$23)\quad G_{ik} - \frac{1}{2} G g_{ik} = -\mu\, T_{ik} \quad (i, k = 0, 1, 2, 3)$$

que resultam de igualar (à parte um factor constante μ) o tensor energético ao tensor gravitacional.

¿Porquê?

Em primeiro lugar, notemos desde já que, na primeira concepção einsteineana, as fôrças de gravitação, que podiam incluir-se, como tôdas as fôrças de massa, na divergência do tensor energético, se supõem *representadas nos coeficientes da forma métrica fundamental* e, conseqüentemente, no tensor gravitacional, que daí tirou o nome. É a elas (e só a elas) que Einstein atribui a determinação das relações métricas. Os coeficientes g_{ik} do ds^2 cronotópico desempenham, na teoria geral da relatividade, o papel do potencial newtoniano na teoria clássica. E, por isso, as trajectórias dos raios luminosos e os corpos sólidos, à custa dos quais se realizam medidas, são influenciados pelo campo de gravitação.

E agora é fácil justificar formalmente as equações gravitacionais. Na mecânica clássica, o potencial gravífico tem a forma

$$24)\qquad U = f \int_v \frac{\rho\, dv}{r},$$

e verifica-se a equação de Poisson

25) $$\Delta U = -4\pi f \rho,$$

sendo f a constante de gravitação, ρ a densidade de massa e ΔU o laplaciano do potencial. Ora, o segundo membro desta equação 25), àparte um factor constante, coincide com a componente T_{00} do tensor energético, definida por 19). E, como o coeficiente g_{00} da forma fundamental (como mostra a equação 6)) é, em primeira aproximação, $1 - \frac{2U}{c^2}$, a equação 25) estabelece uma relação entre a componente T_{00} e uma expressão ΔU onde entram as segundas derivadas parciais de g_{00}. Como esta equação 25) deve figurar, em primeira aproximação, entre as equações gravitacionais, concluíu Einstein que estas devem obter-se, tornando as componentes do tensor energético proporcionais às de outro tensor, exprimível nas derivadas segundas dos coeficientes g_{ik} da forma fundamental.

Êsse tensor podia ser, à primeira vista, o tensor de Einstein (G_{ik}). Mas, para que se mantivesse, em tôda a sua generalidade, o conceito relativista, era necessário que êsse tensor, tal qual como o tensor energético (T_{ik}), tivesse divergência nula, o que não acontece, como dissemos, a (G_{ik}).

Por isso, Einstein foi levado à consideração do tensor gravitacional, que goza dessa propriedade e com o qual construíu as equações 23).

Nesta breve síntese, considerei apenas os fenómenos mecânicos pròpriamente ditos. Mas as equações gravitacionais subsistem ainda para fenómenos doutra natureza, tais como os electromagnéticos, cujos agentes devem igualmente figurar, a par das fôrças de massa, nas componentes do tensor energético. A análise dêsses fenómenos desempenhou, desde o início, um papel fundamental na construção da teoria da relatividade. Não o examinei, porque tive o intuito de limitar as minhas considerações ao campo estrictamente mecânico, e porque êsse exame não é indispensável ao objecto principal desta exposição: a crítica da concepção *unitária*.

Pelas mesmas razões, não profundarei a análise das conseqüências da teoria einsteineana no campo dos fenómenos macroscópicos. Todos sabem como esta teoria veio explicar a diferença entre o valor observado do deslocamento secular do periélio de Mercúrio e o valor calculado pela mecânica celeste newtoniana. Todos sabem também como ela prevê a deflexão dos raios luminosos ao atravessarem um campo gravitatório e como essa previsão tem sido confirmada pela experiência. Fora dos domínios da mecânica atómica, que adiante analisarei, não abundam as confirmações experimentais da teoria, precisamente porque a divergência, em ordem de grandeza, dos resultados dos dois princípios variacionais (o da mecânica de Newton e o da mecânica de Einstein) é inacessível à experiência, na quási totalidade dos fenómenos. E, por isso, a mecânica clássica, de mais fácil trato, conserva, no estudo dêsses fenómenos, a sua anterior utilidade algorítmica.

Mas o grande valor da mecânica einsteineana está, sobretudo, no seu alcance teórico. Está, talvez, mais ainda na concepção dessa *dependência da geometria e da física* do que na capacidade de formular as leis naturais duma maneira invariante. Porque a primeira é uma vitória do entendimento e a segunda uma perfeição formal.

Embora ambas fortaleçam igualmente o *princípio de unidade do universo.*

* * *

Foi com o intento de estreitar mais ainda essas relações entre a Geometria e a Física que Einstein iniciou em 1928 a construção duma *teoria unitária* do cronotopo.

Como disse, as equações gravitacionais da teoria da relatividade estabelecem a proporcionalidade do tensor energético e de tensor gravitacional. Neste último figuram as acções de gravitação, definidoras da métrica por intermédio dos potenciais g_{ik}, sendo relegada para o tensor energético a representação de tôdas as outras acções físicas, em particular, do campo electromagnético. ¿Não será possível construir uma teoria geométrica do universo que englobe na mesma estrutura cronotópica o campo gravitatório e o campo electromagnético?

As equações gravitacionais 23), quando for nulo o tensor energético (T^{ik}), traduzem o conjunto dos fenómenos de gravitação dum sistema discreto de massas pontuais, cuja *grandeza* é determinada pelas constantes de integração do sistema e cuja *posição* é definida pelas singularidades do cronotopo.

¿Não será possível *substituir* o tensor gravitacional por outro, de maneira tal que as equações 23), na mesma hipótese de anulamento do tensor energético, traduzam o conjunto dos fenómenos gravitatórios e electromagnéticos? Por outras palavras, ¿não será possível transferir a representação dos fenómenos electromagnéticos do tensor energético (T_{ik}) para um tensor meramente cronotópico, que irá substituir o tensor gravitacional nos primeiros membros das equações 23), e que a êste se reduzirá quando não houver campo electromagnético? A síntese ideal será aquela em que os únicos representantes da matéria e da electricidade sejam as singularidades geométricas do contínuo cronotópico e as constantes de integração dum determinado sistema; dispensando-se, portanto a consideração dum tensor energético que, pelo seu significado, é uma imperfeição da teoria; daquela teoria que o génio de Riemann pela primeira vez concebeu: a duma integral geometrização dos fenómenos físicos.

* * *

O exame das, já hoje numerosas concepções duma teoria unitária do Universo, obriga-me, meus senhores, a uma prévia, embora sumária, referência aos modernos conceitos da Geometria Diferencial.

O intuito da teoria da relatividade geral de Einstein limitava-se, como é sabido, a generalizar o espaço-tempo de Minkowski de modo a tornar-se um contínuo físico, em que se verificasse o princípio da covariância das leis físicas com o sistema de referência, e que fôsse, ao mesmo tempo, *capaz* duma síntese geométrica dos fenómenos de gravitação. Sòmente, êstes requisitos não eram suficientes para uma caracterização completa do espaço. Impunham uma generalização do contínuo pseudo-euclídeo de Minkowski, mas apenas em relação *à métrica;* deixavam indeterminadas outras *qualidades* fundamentais, entre elas a definição do *transporte*. E, por isso, Einstein considerou o cronotopo um puro espaço riemanniano. Foi a noção de transporte paralelo, definida em 1917 por Levi-Civita, que veio permitir a classificação dos espaços lineares, realizada poucos anos depois, por Stuick e Schouten e ultimada, em novos moldes, por Cartan.

Se o espaço físico é *afim*, é necessário determinar os parâmetros definidores do transporte vectorial dum ponto P para outro vizinho; isto é, os números Γ^l_{ik} e Γ'^l_{ik} que caracterizam a derivação covariante dum vector covariante e dum vector contravariante:

$$26)\quad \begin{cases} v^l{}_{/k} = \dfrac{\partial v^l}{\partial x^k} + \Gamma^l{}_{ik}\, v^i \\[2ex] v_{l/k} = \dfrac{\partial v_l}{\partial x^k} + \Gamma'^l_{ik}\, v_i . \end{cases}$$

Na geometria pura de Riemann, os parâmetros $\Gamma^l{}_{ik}$ são os símbolos de Christoffel de 2.ª espécie

$$27)\qquad \Gamma^l{}_{ik} = \left\{ {ik \atop l} \right\},$$

e é

$$28)\qquad \Gamma^l{}_{ik} = -\Gamma'^l_{ik} .$$

Mas não é necessário que assim seja: os parâmetros Γ e Γ' são completamente independentes e arbitrários na definição do transporte. Êsses parâmetros não são componentes de tensores: mas são-no as suas combinações

$$29)\quad \begin{cases} \Gamma^l{}_{ik} + \Gamma'^l_{ik} = C_{ki}^{\cdot\cdot l} \\[1ex] \dfrac{1}{2}(\Gamma^l{}_{ik} - \Gamma^l{}_{ki}) = S_{ik}^{\cdot\cdot l} \\[2ex] \dfrac{1}{2}(\Gamma'^l_{ik} - \Gamma'^l_{ki}) = S'^{\cdot\cdot l}_{ik} . \end{cases}$$

É à custa dos tensores C, S, S′ e das derivadas covariantes

30) $$Q_i^{kl} = g^{kl}_{/i}\,; \quad Q'_{ikl} = g_{kl/i}$$

do tensor fundamental que o transporte se define e o espaço afim se caracteriza.

Resulta desta concepção do transporte vectorial, que o vector resultante, em B, do transporte dum vector dado em A, ao longo duma linha AB, depende *essencialmente*, em grandeza e direcção, do caminho ao longo do qual o transporte se realizou.

Os tensores de curvatura (um relativo ao transporte covariante e outro ao transporte contravariante) são *quádruplos;* e exprimem-se igualmente nos parâmetros definidores da métrica. Representá-los-emos, respectivamente por $(R'^{\,\cdots m}_{ikl})$ e $(R^{\cdots m}_{ikl})$.

* * *

Antes de ter sido estabelecida por Struik e Schouten a teoria geral do transporte linear, e logo depois de Levi-Civita ter definido, para os espaços puros de Riemann, o conceito de paralelismo, formulou Weyl a hipótese de ser a grandeza do vector transportado alterada pela lei de transporte (o que não acontece no espaço de Riemann, em que há apenas alteração direccional). A lei de variação de grandeza definiu-a Weyl pela forma linear

31) $$dl = -\,l\,\Psi_i\,dx^i\,;$$

ou antes (por motivos de ordem geométrica) pela forma

$$31') \qquad dl = -l\left(\Psi_i - \frac{\partial \log \lambda}{\partial x^i}\right) dx^i,$$

sendo λ um escalar.

Esta forma 31') viria juntar-se, na concepção de Weyl, à forma fundamental quadrática definidora da métrica cronotópica, como um complemento da estruturação do espaço.

E, como 31') é análoga a fórmulas conhecidas da teoria do potencial, lembrou-se Weyl de interpretar os coeficientes Ψ_i como componentes do potencial electromagnético. E foi esta, na ordem cronológica, a primeira tentativa de resolução do problema unitário.

Razões de ordem física rejeitavam esta concepção. E, no caso geométrico, após a sistematização de Schouten, na qual os espaços de Weyl figuram entre as numerosas possibilidades de transporte linear, deve observar-se que a forma linear 31'), como complemento *independente* da forma fundamental, não favorece o conceito unitário que se procura atingir, e perante o qual tôdas as leis físicas devem exprimir-se, sob forma invariante, pelo anulamento de certos tensores da métrica.

Análoga crítica merecem as tentativas de Eddington, imediatamente posteriores às de Weyl.

Por isso, eu disse que deve atribuir-se a Einstein, com as suas *Notas* apresentadas à Academia das

Ciências de Berlim, a partir de 1928, o início da estruturação duma teoria unitária dos fenómenos físicos. Essas *Notas*, a que se seguiram outras publicações, e, em particular, um artigo nos *Mathematische Annalen* de 1929, fundamentam a teoria unitária do cronotopo no conceito de *paralelismo a distância* (*Fernparallelismus*). Define-o Einstein à custa dum *ennuplo* de congruências ortogonais, que, em cada ponto do espaço, permite, por sua vez, determinar os coeficientes da forma fundamental que caracteriza a métrica cronotópica. Mas a recíproca não é verdadeira: a prévia definição da métrica não determina o ennuplo de congruências, porque os seus parâmetros definidores são em número maior que o dos coeficientes da forma fundamental. Segundo esta concepção, que Einstein, em seguida, relacionou com um princípio variacional hamiltoniano, e sôbre a qual eu não quero deixar de citar o magistral comentário de Levi-Civita, numa Nota apresentada à mesma Academia das Ciências de Berlim, ainda em 1929; segundo esta concepção, dizia eu, a idea dominante é a dum paralelismo *absoluto*, independente do caminho ao longo do qual o transporte se realiza, e ao qual há-de subordinar-se a métrica espacial. Êste paralelismo absoluto importa, para o cronotopo, o *anulamento da curvatura;* conservando-lhe a *torsão*, no sentido de Cartan, como única característica que o distingue dum espaço euclideano. Ao passo que a teoria da relatividade geral, supondo o espaço um contínuo riemanniano puro, lhe atribui *curvatura*, embora sem *torsão*.

E tôdas as posteriores tentativas de construção duma teoria unitária têm tido como objectivo fundamental a conservação, na ausência de campo electromagnético, da estrutura espacial, puramente riemanniana, em que se baseou a teoria da relatividade.

E não pode dizer-se que êsse objectivo, baseado num critério de *redução* e *permanência*, que tem servido de guia a todo o progresso científico, não tenha tentações de beleza e atributos de perfeição.

Não vou referir-me pormenorizadamente a tôdas essas formas de estruturação unitária do espaço. Vou apenas citar duas delas.

Uma das mais recentes, estabelecida por Straneo, numa sucessão de *Notas* publicadas nos *Rendiconti* da Academia dos Linces, em que o Autor foi modificando e aperfeiçoando os seus primitivos conceitos, e que êle deu como definitivamente instituída em Junho do ano passado. E ainda a actual teoria de Einstein e Mayer.

* * *

Em resumo, Straneo supõe que os parâmetros definidores do transporte contravariante são da forma

$$\Gamma^l_{ik} = \left\{ {ik \atop l} \right\} + \Omega_{ik}^{\cdot\cdot l} \tag{32}$$

sem $\Omega_{ik}^{\cdot\cdot l}$ componentes dum tensor hemisimétrico. E procura determinar a lei de transporte de modo tal que:

1.° — Subsista o paralelismo absoluto;

2.° — Se conserve a grandeza dos vectores contravariantes.

Para ser satisfeita a primeira condição, deve ser nulo o tensor de curvatura ($R_{ikl}^{\cdot\cdot\cdot m}$); para ser satisfeita a segunda, conclui Straneo que o tensor hemi-simétrico ($\Omega_{ik}^{\cdot\cdot l}$) há-de ter nulas tôdas a componentes $\Omega_{ik}^{\cdot\cdot i}$, em que o índice de contravariância é igual a um dos índices de covariância.

As *equações da teoria unitária* obtem-nas Straneo igualando a zero as componentes do tensor de curvatura ($R_{ikl}^{\cdot\cdot\cdot m}$).

Estas, pela contracção dos índices i e m, conduzem às equações gravitacionais; pela contracção dos índices m e l, conduzem às equações de Maxwell.

No princípio da sua exposição (que abrange seis ou sete Notas), procurava Straneo obter as equações da teoria sob a forma

$$33) \quad R_{\mu\nu} = K_{\mu\nu} - \frac{1}{2} K g_{\mu\nu} + 2\left(\frac{\partial \Psi_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \Psi_\nu}{\partial x^\mu}\right) = T_{\mu\nu}$$

sendo ($R_{\mu\nu}$) o tensor reduzido de curvatura, ($K_{\mu\nu}$) o tensor reduzido de Riemann-Christoffel, K o escalar de curvatura riemanniana, ($T_{\mu\nu}$) o tensor energético e (Ψ_μ) um vector representativo do potencial electromagnético. As equações 33) satisfazem ao princípio de *redução* a que atrás aludi, duma maneira perfeita; reduzindo-se às equações gravitacionais da relatividade geral, na ausência de fenómenos electromagnéticos. Mas contêm ainda um tensor energético cuja origem é alheia, na sua definição, à métrica do cronotopo; o que não acontece às equações da última teoria de Straneo, publicada no verão passado.

Em Maio findo, e antes de ter conhecimento da última forma atribuída por Straneo às equações da teoria unitária, publiquei, nos *Rendiconti* da Academia dos Linces, uma *Nota* que, além de ser um comentário às Notas anteriores de Straneo, estabelecia uma interpretação das equações 33), em que é rigorosamente respeitada a concepção de transporte linear; e em que o vector (Ψ_μ), representativo do potencial electromagnético, está relacionado, duma maneira extremamente simples, com os parâmetros definidores do transporte.

O comentário era o seguinte:

O professor Straneo adopta, na sua Nota IV, uma forma de derivação covariante que supõe as equações 28) e, portanto, o anulamento de tensor ($C_{ik}^{\cdot\cdot l}$). O seu transporte é, portanto, *invariante por contracção*, na classificação dos transportes lineares de Schouten (1). E daí resulta, atendendo à forma por

(1) *Vidé* o livro do autor: *Fundamentos da Geometria diferencial dos espaços lineares*, pág. 94.

êle adoptada para os parâmetros, nessa Nota IV,

$$34) \qquad \Gamma^l_{ik} = \left\{ {ik \atop l} \right\} + (A^l_i \Psi_k - A^l_k \Psi_i)$$

(onde (A_i^k) é o conhecido tensor mixto unitário), que o transporte não é *contravariante métrico*; isto é, não conserva a grandeza dos vectores transportados. Ou então *não é um transporte afim.*

Mostrava eu ainda que uma lei de transporte linear, que conserva simultâneamente a grandeza dos vectores covariantes e contravariantes, não pode conduzir a um tensor reduzido de curvatura como o do primeiro membro da equação 33), se for hemisimétrico.

* * *

A minha interpretação das equações 33) e, portanto, da teoria unitária, supondo o cronotopo um espaço afim, era estabelecida por uma ou outra das duas seguintes conexões lineares:

1.ª — O tensor $\left(C^{\cdot\cdot\gamma}_{\alpha\beta}\right)$ *não é nulo,* mas da forma

$$C^{\cdot\cdot\gamma}_{\alpha\beta} = C_\alpha \, A^\gamma_\beta$$

sendo (C_α) um determinado vector.

Os tensores $\left(S'^{\cdot\cdot\gamma}_{\alpha\beta}\right)$ e $\left(K'_{\alpha\beta\gamma}\right)$ são nulos. Daí resulta que os parâmetros definidores são

$$35)\qquad \begin{cases} \Gamma^{\lambda}_{\alpha\gamma} = \left\{ {\alpha\gamma \atop \lambda} \right\} + C_{\gamma}\, A^{\lambda}_{\alpha} \\ \Gamma'^{\lambda}_{\alpha\gamma} = - \left\{ {\alpha\gamma \atop \lambda} \right\}. \end{cases}$$

Com esta lei de transporte, o tensor reduzido de curvatura contravariante tem a forma do primeiro membro da equação 33); sendo

$$36)\qquad -2\,\Psi_{\mu}^{\bullet} = C_{\mu}.$$

Isto é, o vector (Ψ_{μ}) que define o potencial electromagnético *depende da métrica,* atenta a significação do tensor $\left(C^{\cdot\cdot\gamma}_{\alpha\beta}\right)$ e, portanto, do vector (C_{μ}).

Esta conexão linear que, na teoria do transporte de Schouten, se chama *invariante por incidência, covariante simétrica e contravariante métrica,* é caracterizada pelas seguintes propriedades:

a) Conservam-se os ângulos dos vectores transportados, mas *só se conserva a grandeza dos vectores contravariantes.* (A não ser que o vector (C_{μ}) seja um gradiante, porque, nesse caso, a conexão, por uma mudança da medida covariante, converte-se numa pura conexão de Riemann).

b) Distingue-se do transporte de Weyl, porque o tensor C não é nulo e é nulo o tensor Q'.

2.ª — O tensor $\left(C_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot\gamma}\right)$ é ainda da forma

$$C_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot\gamma} = C_\alpha A_\beta^\gamma$$

e os tensores $\left(S_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot\gamma}\right)$ e $\left(Q_\alpha^{\cdot\beta\gamma}\right)$ são nulos. Os parâmetros definidores do transporte são então da forma

$$35') \qquad \begin{cases} \Gamma_{\alpha\gamma}^{\lambda} = \left\{ {\alpha\gamma \atop \lambda} \right\} \\ \Gamma_{\alpha\gamma}^{\prime\lambda} = -\left\{ {\alpha\gamma \atop \lambda} \right\} + C_\gamma A_\alpha^\lambda . \end{cases}$$

Agora, é o tensor reduzido de curvatura covariante que tem a forma do primeiro membro da equação 33), sendo

$$2\,\Psi_\mu = C_\mu .$$

E conservam-se ainda os ângulos dos vectores transportados, mas *só se conserva a grandeza dos vectores covariantes* (a não ser que (C_μ) seja um vector gradiante).

Ambas estas conexões, como se vê, dão ao espaço uma estrutura afim e englobam a representação dos fenómenos electromagnéticos na métrica do cronotopo.

* * *

Na sua última Nota, Straneo adopta a conexão 32), forma com ela o tensor $(R_{ikl}^{\cdot\cdot\cdot m})$ de curvatura contravariante, obrigando o tensor $(\Omega_{ik}^{\cdot\cdot l})$ *apenas* às condições de anular o tensor (R) (para que o paralelismo seja absoluto) e de conservar as grandezas dos vectores.

Para isso, é necessário que o tensor (Ω_{ikl}) *suposto hemisimétrico nos índices* i e k, *o seja também nos índices* k e l.

E, portanto, que as componentes $\Omega_{ik}^{\cdot\cdot i}$ sejam tôdas nulas, como já disse. E assim se obtêm as equações gerais da teoria unitária de Straneo,

$$37) \qquad K_{ikl}^{\cdot\cdot\cdot m} + \Omega_{il/k}^{\cdot\cdot m} + \Omega_{il}^{\cdot\cdot\lambda}\,\Omega_{\lambda k}^{\cdot\cdot m} = 0$$

onde $(K_{ikl}^{\cdot\cdot\cdot m})$ representa o tensor de Riemann e onde a derivação covariante é tomada em relação ao tensor fundamental (g_{ik}).

Destas equações resulta, contraindo em i e m,

$$37') \qquad K_{kl} + \Omega_{ml}^{\cdot\cdot\lambda}\,\Omega_{\lambda k}^{\cdot\cdot m} = 0$$

que são equivalentes às equações gravitacionais; e, contraindo em m e k,

$$37'') \qquad \Omega_{il/m}^{\cdot\cdot m} = 0$$

que se reduzem às equações de Maxwell.

* * *

Na sua teoria, Straneo pretende que a condição 28) se verifique e, portanto, que os dois tensores (R) e (R′) de curvatura sejam iguais. De modo que o transporte por paralelismo absoluto, conseguido para os vectores contravariantes, subsiste ainda para os vectores covariantes.

Sendo assim, é fácil de ver que o tensor ($C_{ik}^{\cdot\cdot l}$) é nulo e o tensor ($\Omega_{ik}^{\cdot\cdot l}$) da teoria de Straneo é o tensor hemisimétrico ($S_{ik}^{\cdot\cdot l}$).

Por outro lado, sendo nulo o tensor ($C_{ik}^{\cdot\cdot l}$), a conservação da grandeza dos vectores contravariantes traz como conseqüência a conservação da grandeza dos vectores covariantes. E mostram as equações gerais da teoria do transporte linear que, nesse caso, tanto o tensor ($S_{ik}^{\cdot\cdot l}$) como o tensor

$$S_{ik}^{l\cdot\cdot l} = -S_{ik}^{\cdot\cdot l},$$

gozam da propriedade de terem nulas tôdas as componentes em que o índice superior é igual a um dos índices inferiores.

* * *

A teoria de Straneo pode, porém, generalizar-se da seguinte maneira:

Os parâmetros definidores do transporte são

$$38)\qquad \begin{cases} \Gamma_{ik}^{l} = \left\{ {ik \atop l} \right\} + \Omega_{ik}^{\cdot\cdot l} \\ \Gamma_{ik}^{\prime l} = -\left\{ {ik \atop l} \right\} + \Omega_{ik}^{l\cdot\cdot l} \end{cases}$$

sendo, portanto,

$$39) \qquad C_{ik}^{\cdot\cdot l} = \Omega_{ik}^{\cdot\cdot l} + \Omega_{ik}^{\prime\cdot\cdot l}.$$

Suponhamos que se não verifica a condição 28), isto é, que o tensor $(C_{ik}^{\cdot\cdot l})$ não é nulo. Nesse caso, como é fácil mostrar, o anulamento do tensor $(Q_i^{\cdot kl})$ não implica o anulamento do tensor (Q'_{ikl}). Por outro lado, não sendo nulo $(C_{ik}^{\cdot\cdot l})$, os dois tensores de curvatura, $(R_{ikl}^{\cdot\cdot\cdot m})$ e $(R_{ikl}^{\prime\cdot\cdot\cdot m})$, são, em geral, diferentes. De modo que, o anulamento de $(Q_i^{\cdot kl})$ e $(R_{ikl}^{\cdot\cdot\cdot m})$, que são as condições para que seja invariante a grandeza dos vectores covariantes e para que seja absoluto o paralelismo dos vectores contravariantes, não importa a invariância de grandeza dos vectores contravariantes, nem o paralelismo absoluto dos vectores covariantes.

E, no entanto, as equações de Straneo verificam-se, com tôdas as suas notáveis conseqüências, na interpretação das leis naturais, desde que o espaço satisfaça a uma destas duas condições:

a) Anulamento da curvatura contravariante e invariância de grandeza dos vectores covariantes.

b) Anulamento da curvatura covariante e invariância de grandeza dos vectores contravariantes.

E aqui está, meus senhores, como as equações de Straneo podem ser satisfeitas por infinitas estruturas do cronotopo.

A sua é, de-certo, a mais simples; mas nada nos diz que as necessidades da teoria física não venham a impor alguma dessas infinitas estruturas, compatíveis com as suas equações, às quais acabo de fazer referência. Elas obrigam o espaço a não ter idênticas curvaturas, covariante e contravariante; e a não ser *equi-métrico* nos dois transportes. Mas essa estrutura, compatível com a teoria geral dos espaços afins, não sei porque não há-de ser uma realidade física. E é assim que eu concebo uma teoria unitária do Universo.

* * *

Falta-me, apenas, considerar a moderna teoria unitária de Einstein e Mayer, apresentada nos *Berliner Berichte de 1931 e 1932*.

Esta teoria é constituída à custa dum espaço a *cinco* dimensões, que se faz corresponder a cada ponto do cronotopo quatridimensional. Representemos êsse espaço por V_5 e o cronotopo por V_4; designemos por letras gregas os índices relativos a V_5 e por letras latinas os índices relativos a V_4.

Façamos corresponder, a cada vector de V_5, um vector de V_4, pela relação

41) $$a^k = \gamma^k_\alpha \, a^\alpha \left\{ \begin{matrix} k = 1, 2, 3, 4 \\ \alpha = 1, 2, 3, 4, 5 \end{matrix} \right\}.$$

Seja (A^α) um vector de V_5 tal que

42) $$\gamma^k_\alpha \, A^\alpha = 0 \quad \text{e} \quad g_{\alpha\beta} \, A^\alpha \, A^\beta = 1$$

sendo $(g_{\alpha\beta})$ o tensor métrico de V_5. Em virtude de 42), (A^{α}) é um vector unitário cujo transformado em V_4 é nulo.

Chama-se o *vector característico*.

Entre os tensores métricos do V_5 e V_4 é fácil ver que existe a relação

$$43) \qquad g_{\alpha\beta}\,\gamma_i^{\alpha}\,\gamma_k^{\beta} = g_{ik}\,.$$

E que

$$44) \qquad a^{\beta} = \gamma_k^{\beta}\,a^k + \rho\,A^{\beta}\,,$$

sendo

$$\rho = A_{\alpha}\,a^{\alpha}\,.$$

Isto é, um vector do V_5 só é determinado pelo seu correspondente de V_4 a menos dum múltiplo do vector característico.

A métrica de V_4 é riemanniana pura, determinada por (g_{ik}); as derivadas covariantes $g_{\alpha\beta/k}$ são nulas. E o transporte paralelo dum vector (a^k) obriga a derivada covariante do seu transformado em V_5 a ter a direcção do vector (A^{α}). Isso determina uma relação da forma

$$45) \qquad \gamma_{k|q}^{\alpha} = A^{\alpha}\,F_{kq}\,;$$

sendo (F_{kq}) um tensor duplo hemisimétrico, se impusermos a condição de que um deslocamento do vector, na sua própria direcção, tem como conseqüência um deslocamento idêntico do seu transformado.

Pois bem, as equações gravitacionais e electromagnéticas do cronotopo são, respectivamente,

$$46) \quad \begin{cases} K_{qp} - \frac{1}{2} K g_{pq} = F_{kq} F^k_p - \frac{1}{4} g_{qp} F_{kl} F^{kl} \\ F^{pk}_{|k} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{g}\, F^{pk}) = 0\,. \end{cases}$$

Tal é a súmula da teoria, onde o tensor F desempenha um papel semelhante ao do tensor Ω de Straneo. O espaço auxiliar V_5 tem uma grande importância na sistematização teórica da mecânica atómica, dentro da concepção unitária do espaço físico (como resulta dalguns trabalhos recentes).

À primeira vista, porém, êste recurso da teoria apresenta-se como um artifício denunciador de imperfeição.

Na teoria de Einstein e Mayer, das coordenadas de V_5 só uma é temporal, sendo as outras quatro espaciais. Já posteriormente, em Outubro passado, Schouten e van Dantzig consideram, na sua interpretação da teoria unitária, um espaço V_5 com duas coordenadas temporais e três espaciais, tôdas homogéneas.

* * *

Terminei, meus senhores, as minhas resumidas considerações sôbre a estrutura do espaço físico. Atingiu-se o ideal de Riemann da subordinação de todos os fenómenos físicos a uma concepção geométrica; e, inversamente, da determinação da geometria do cronotopo pelo conteúdo espacial. O princípio de *unidade*, como ideal científico e filosófico, fica visìvelmente robustecido e dignificado. E ficam também, agora como sempre, os domínios do pensamento matemático sobejamente apetrechados para uma possível interpretação de futuras exigências da teoria física.

Singular destino êste, o duma ciência cuja evolução é, em regra, tanto mais interessante quanto mais desinteressada!

Foi, de princípio, um simples instrumento, baseado na intuïção, criado à semelhança das realidades sensíveis que apenas lhe pediam um adequado algoritmo de contar e medir. Alargou os seus domínios, ao mesmo tempo que afirmava a sua autonomia, como ciência abstracta; e ampliou a sua capacidade formal, *pari passu* com o engrandecimento da sua riqueza doutrinária. Ao seu progresso, por vezes interrompido, esteve sempre subordinado o laborioso evoluir das ciências físicas; e as suas reservas, acumuladas com isenção e dispensadas com munificência, têm sido aviso e vaticínio, auxílio fecundo e garantia segura do saber humano. E agora, nesta concepção geométrica da teoria unitária, já se lhe não confere apenas a incumbência duma simples interpretação;

atribui-se-lhe o encargo duma representação total dos fenómenos físicos. E êsse encargo não é sòmente assumido com galhardia e desempenhado com exito: ficam definidas infinitas estruturas espaciais, compatíveis com a representação dos fenómenos conhecidos, entre as quais poderá escolher-se a que melhor se adapte à figuração de novos conceitos e doutrinas. Admirável opulência e abençoada prodigalidade!

MECÂNICA QUÂNTICA

MECÂNICA QUÂNTICA

Ao findar o século XIX, não era apenas da mecânica newtoniana o senhorio incontestado dos domínios da ciência. Partilhava-os com ela, na explicação doutra categoria de fenómenos, a teoria ondulatória de Maxwell-Hertz. Fundada por Huygens e Descartes, sistematizada no princípio de Fermat, em termos de evidente analogia com o princípio variacional de Hamilton, a teoria ondulatória, graças à explicação dos fenómenos de interferência e, sobretudo, à concepção mecânica da propagação de Fresnel, levava de vencida, no princípio dêste século, a teoria corpuscular de Newton. Com a criação da teoria electromagnética de Maxwell e Hertz, com a descoberta dos electrões por J. J. Thomson e a sua introdução na teoria de Maxwell, realizada por Lorentz, a teoria da luz ficou incluída nas equações do campo electromagnético. Mas tal era a fé nas doutrinas mecanistas que os mesmos fundadores da teoria nova desde logo procuraram uma mecanização do éter que permitisse dar aos fenómenos da electroptica uma explicação mecânica.

E no entanto, embora sem a irrevogável decisão das doutrinas modernas, outros conceitos tinham já combalido fortemente, em pleno século XIX, os fundamentos da teoria mecânica. Nos fins do seu primeiro quartel, Sadi-Carnot fundava a termodinâmica; e, se o princípio de equivalência era de relativamente fácil interpretação mecanista, outro tanto não acontecia ao princípio de Carnot. O conceito de entropia, entre outros, não era fàcilmente subordinável às velhas concepções da mecânica newtoniana. Foi a mecânica estatística de Gibbs e Boltzmann, a que já fiz referência, que veio dar interpretação mecânica às funções termodinâmicas, à custa, bem entendido, de iniludíveis sacrifícios da concepção clássica.

Vivia-se a época das *Grandes Leis* e, com o auxílio do Cálculo das probabilidades, criava-se um instrumento novo de análise dos fenómenos mecânicos, cuja fecundidade mal imaginavam os seus construtores.

Já no fim da vida, o grande Lord Kelvin, analisando as dificuldades de encorporação de tôda a ciência física dentro da doutrina mecanista, mesmo alterada pelas transigências a que há pouco aludi, acentuava dois factos experimentais cuja explicação, dentro da mecânica newtoniana, se lhe afigurava impossível. ¿E quais eram êles?

A constância da velocidade da luz, averiguada na experiência de Michelson e a distribuïção da energia no espectro do corpo negro. Precisamente os dois fenómenos que haviam de servir de base à estruturação das duas grandes teorias do tempos modernos: a da relatividade e a dos *quanta*.

Extraordinária profecia esta do mais alto espírito que no seu tempo dominava as ciências do mundo físico!

* * *

Já vos falei, meus senhores, dos conceitos relativistas e das suas últimas conseqüências, na hora presente.

Vou agora ocupar-me da concepção quântica que, a-par-da outra e mais do que a outra, veio revolucionar o pensamento científico em termos tais, que os mesmos fundamentos axiomáticos da ciência do movimento parecem periclitantes e ilusórios. Não há domínio matemático que a sua estruturação não tenha utilizado e enriquecido. Por sua intenção, alargou-se e fortalèceu-se a teoria das matrizes, em termos não sonhados por Hermite, que nela não podia adivinhar tão indispensável poder algorítmico. Na interpretação da sua doutrina, encontraram mais largos horizontes e mais sólidos modêlos as últimas conquistas da teoria das equações diferenciais. A teoria da relatividade, de tão precário campo experimental no âmbito da mecânica macroscópica, teve na mecânica do átomo extensa e fecunda margem de acção, arena de incontestáveis triunfos e satisfatória confirmação dos seus processos de análise. A teoria dos grupos, à custa do conceito de *representação*, ampliou os seus domínios e encaminha-se, com notável brilho e incontestável êxito, para uma definitiva superintendência de todos os fenómenos físicos. E como não, se ela já era, há tempo, o grande sistematizador da geometria, e esta, graças à concepção unitária, uniu aos seus os destinos da física?

Mais ainda. Embora a álgebra das matrizes estivesse construída por Hilbert e Courant, desde a publicação, em 1924, da sua obra magistral sôbre os *Métodos da física matemática,* foram, sobretudo, as modernas necessidades da teoria quântica que determinaram a consolidação dessa álgebra de transformações, por cujo intermédio o conceito de grupo define, nos seus invariantes, as leis dos fenómenos.

* * *

Assim como a experiência de Michelson-Morley afirmava a invariância da velocidade da luz, os números obtidos por Lummer e Pringsheim, ao determinar a distribuïção da energia no espectro do corpo negro, contrariavam os resultados teóricos, obtidos pelos métodos de Gibbs.

Para resolver a dificuldade, propôs Planck a adopção dum critério *quântico*. *Um oscilador harmónico, vibrando com freqüência* ν, *só pode aumentar ou diminuir a sua energia por múltiplos inteiros do* *quantum elementar* $h\nu$, sendo h uma constante, chamada *quantum de acção,* ou constante de Planck:

$$h = 6{,}55 \, . \, 10^{-27} \text{ erg. seg.}$$

Foram vários os domínios da física em que se revelou o êxito da hipótese de Planck, devendo citar-se, como principais, o da termodinâmica, onde teve satisfatória interpretação estatística o princípio de Nernst, e, sobretudo, o da espectroscopia, onde a perfeição experimental tinha atingido um elevado grau, e onde os dados da experiência não tinham ainda encontrado uma base teórica segura.

Foi apoiado na hipótese de Planck e nos conceitos de Rutherford que Bohr construíu o seu modêlo do átomo. Todos sabem em que consiste êste modêlo. Vamos recordá-lo ràpidamente.

O átomo é constituído por um núcleo, com carga eléctrica positiva e electrões, com carga eléctrica negativa, a mesma para todos.

A massa do núcleo é muito grande em relação à dos electrões e a sua carga é Ne sendo $-e$ a carga de cada electrão e N o seu número, que define também a posição do elemento considerado na escala de Mendeleief. As acções electrostáticas entre o núcleo e os electrões são reguladas pela lei de Coulomb, desprezando-se, pela sua insignificância em face das primeiras, as acções meramente gravíficas. Posta de parte a hipótese estéril dos electrões se encontrarem colados ao núcleo, a estabilidade dêste sistema é necessàriamente *dinâmica:* os electrões gravitam em em tôrno do núcleo.

Mas êsse movimento, se fôr subordinado às leis da electrodinâmica clássica, importa *radiação,* e, por conseqüência, perda de energia, até que o electrão assuma movimento rectilínio e uniforme, o que é impossível, ou esteja em repouso e portanto, colado ao núcleo, hipótese que já rejeitámos, por não ter valor.

Por isso, Bohr admitiu, não sendo de excluir a possibilidade de radiação que explica as riscas espectrais, que essa radiação não existe para determinadas trajectórias electrónicas, chamadas estacionárias e apenas se revela quando o electrão passa duma dessas trajectórias para outra. Se a diferença de energia correspondente às duas trajectórias é ΔW a radiação emitida tem uma freqüência ν definida por

$$1) \qquad \Delta W = h\nu .$$

Por conseqüência, na teoria de Bohr, a resolução dum problema de dinâmica atómica consiste em integrar as equações do movimento dos electrões e, em seguida, determinar as constantes de integração de maneira tal que as trajectórias respectivas sejam estacionárias.

É nesta última operação que consiste a *quantificação* do problema. As freqüências possíveis são tantas quantas as passagens possíveis duma órbita estacionária para outra.

* * *

Esta teoria veio abrir novos caminhos à análise espectral. Serviu, desde logo, para calcular as riscas do hidrogénio e do hélio ionizado; e, com os trabalhos de Sommerfeld, Epstein, Schwarzschild, Landé, Heisenberg e Pauli, entre outros, permitiu resolver o problema dos multipletes e interpretar o fenómeno Zeeman, conduzindo ao estabelecimento empírico da fórmula de Landé, relativa à separação magnética das riscas dum multiplete. Não farei referência à definição dos números quânticos que caracterizam cada estado estacionário e que estão relacionados com os momentos angulares do núcleo e do electrão de série e com o campo magnético. A evolução da teoria quântica tem sido tão rápida e a deformação da concepção inicial tão profunda, que eu não sei se deva justificar o meu silêncio sôbre êsses primeiros resultados da mecânica atómica de Bohr, dizendo que êles são hoje do domínio da física geral, ou dizendo que êles já pertencem aos domínios da história. Por isso, acentuarei apenas o que há de fundamental nessa evolução.

Em 1924, Pauli enunciava o princípio de *exclusão;* e o seu aparecimento marca, talvez, o primeiro contacto da mecânica atómica com a teoria relativista.

Foram, com efeito, exigências do pensamento relativista e a natureza do fenómeno de Zeeman que levaram Pauli a propôr que o número quântico *s* fôsse transferido para o electrão e a afirmar o seu conhecido princípio: *Cada electrão de série é caracterizado por quatro numeros quânticos* (n, l, j, m) *que não podem ser os mesmos para dois electrões do mesmo átomo.*

Ora, a atribuïção ao electrão de série dum quarto número quântico, vinha perturbar gravemente a concepção mecanista, visto que, tratando-se dum ponto, o número dos seus graus de liberdade não podia exceder *três*.

Por isso, logo em 1925, Goudsmith e Uhlenbeck atribuíram ao electrão um movimento rotatório, cujo momento de giração é representado pelo quarto número quântico que lhe era atribuído pela concepção de Pauli. E desde então o *spinor*, ou *electrão girante,* foi uma nova conquista da teoria quântica.

Como se vê, o átomo identificava-se dêste modo com um verdadeiro sistema planetário, a cujos elementos, como na mecânica celeste, era conferido um duplo movimento de translacção e rotação.

* * *

Mas a concepção de Bohr trazia dentro de si o germe da sua própria ruína. Quanto mais a teoria do átomo se aproximava do modêlo laplaciano, mais se destacava o carácter artificial dessas órbitas privilegiadas que impunham, como possíveis, apenas certos valores das constantes de integração do sistema integral geral das equações do movimento. Ela dera lugar, com efeito, a numerosas regras empíricas, como as chamadas regras de selecção, onde intervêm números inteiros e semi-inteiros, mas essas regras, já na análise do espectro do hélio neutro se tinham mostrado incompatíveis com os resultados teóricos.

Por outro lado, uma velha hipótese vinha alentar a descrença na perfeição do modêlo de Bohr. *Velha,* de vinte anos apenas.

Logo depois de estabelecida a hipótese de Planck, e na impossibilidade de explicar pela teoria ondulatória o chamado *fenómeno foto-eléctrico,* ou seja a captação de electrões pela acção da luz, Einstein formulara, em 1905, a hipótese de que a energia radiante de freqüência ν era constituída por entidades insecáveis de grandeza $h\nu$ chamadas *fotões;* e assim explicava êle que um oscilador harmónico só absorvesse energia por *quanta* $h\nu$ como admitia a hipótese de Planck. Sòmente o fotão, pela sua mesma natureza de energia radiante, é caracterizado por uma freqüência que lhe dá condição ondulatória. E, como a hipótese de Einstein não só explicou o efeito foto-eléctrico, mas também a pressão de radiação de Maxwell e, sobretudo, o efeito Compton (em 1923), ela foi, incontestàvelmente, o primeiro traço de união entre essas duas secularmente antagónicas teorias: a corpuscular e a ondulatória. Bem sabemos que a posterior teoria da relatividade havia de dar ao seu autor um maior e inexcedível destaque na estruturação da ciência moderna; bem sabemos também que a concepção de Einstein, aplicada aos fotões, não era ainda a afirmação da aliança *partícula material-onda associada*, afirmada por Broglie, como veremos, em 1925. Mas não é menos certo que, tendo presente a relação que a teoria da relatividade estabelece entre os conceitos de energia e matéria, e tendo presente também a utilização feita por Broglie dos métodos relativistas, a concepção de Einstein, tida como revolucionária à data do seu aparecimento, marca uma *étape* gloriosa na construção da mecânica atómica e na consagração do seu génio.

* * *

O ano de 1925 e o seguinte haviam de ser particularmente fecundos em criações doutrinárias do mais alto valor.

Estudando, com Kramers, a dispersão da luz, pelos métodos da que então era a teoria quântica, Heisenberg criava a *mecânica das matrizes*.

No mesmo ano, Broglie estabelecia o conceito de onda associada a tôda a partícula material em movimento. E logo no princípio do ano seguinte, utilizando as ideas de Broglie, lançava Schrödinger, em três notáveis memórias, os fundamentos da *mecânica* *ondulatória*, por intermédio da qual, pouco depois, interpretava os principais resultados da teoria de Heisenberg.

Entretanto, Dirac iniciava a construção de uma verdadeira mecânica racional quântica, conseguindo conservar às equações diferenciais do movimento electrónico a forma canónica, exprimindo as condições quânticas por parenteses de Poisson, e utilizando assim tôdas as vantagens de invariância que os caracterizam.

Pelos métodos da sua mecânica das matrizes, já em 1925 Heisenberg, com Jordan e Born, reconstruía a teoria do oscilador harmónico e achava directamente a fórmula da dispersão; e logo no princípio de 1926, com Jordan, e utilizando o electrão girante, calculava a estrutura fina dos dobletes alcalinos, as respectivas intensidades no fenómeno Zeeman, deduzia a fórmula de Sommerfeld para o fenómeno de Paschen-Back e, pouco depois, resolvia o problema do espectro do hélio neutro.

Com o instrumento analítico que acabava de criar, Dirac demonstrava vários resultados obtidos por Heisenberg e Jordan e, utilizando os métodos relativistas, explicava o fenómeno Compton, com um rigor não atingido pelo método dos fotões de Einstein. Mas, nem êle, nem Heisenberg utilizavam, na construção da teoria do átomo, a geminação onda-corpúsculo, que já aparece na audaciosa concepção einsteineana.

Essa idea lançou-a, como já dissemos, nesse mesmo ano de 1925, uma memória célebre de Luiz de Broglie.

E ela sugeriu, logo depois, a Schrödinger a idea duma mecânica nova em que o fenómeno já não é um electrão móvel submetido a fôrças, mas uma *onda*, cuja função característica deve satisfazer a uma certa equação às derivadas parciais, em que a energia é um parâmetro. A Schrödinger nem sequer interessava dar a essa função característica das ondas uma significação física; foi Born quem depois atribuíu ao quadrado do seu módulo o significado de densidade de carga. À teoria de Schrödinger só interessava determinar os *valores próprios* do parâmetro energia, de modo tal que a equação das ondas tivesse uma solução única, contínua e limitada em todo o espaço. E quais são êsses valores próprios? São os níveis de energia do átomo.

A aplicação da nova mecânica ondulatória conduziu imediatamente à fórmula da dispersão, anteriormente achada por Heisenberg, ao cálculo da intensidade das riscas do hidrogénio no fenómeno Stark, e à teoria das perturbações. Essa concordância dos seus resultados com a teoria anterior, valorizou, desde logo, a nova mecânica, cujos processos, os da teoria das equações diferenciais, tinham ao seu dispor, o que não acontecia com os de Heisenberg, uma das mais perfeitas e ricas construções da análise matemática.

Em 1927, Davisson e Germer descobriam a difracção dos electrões. Embora de natureza corpuscular, êles produzem interferências, como se fôssem radiações com um determinado comprimento de onda. E êsse comprimento de onda é o previsto pela teoria de Broglie. Pouco mais tarde, em 1928, Bethe estabelecia uma teoria completa da difracção electrónica, confirmada pela experiência. E é êste, talvez, o mais sólido apoio experimental da mecânica ondulatória.

No campo puramente matemático, a concepção onda-corpúsculo, tem uma notável representação na teoria das características e bicaracterísticas das equações diferenciais, que principalmente se deve a Hadamard e Levi-Civita. Se um fenómeno pode ser representado por um sistema normal de equações às derivadas parciais, as características e bicaracterísticas respectivas traduzem a parte ondulatória e a parte corpuscular do fenómeno, não sendo possível deduzir-se, do simples conhecimento duma das partes do fenómeno, o sistema de equações diferenciais que o representam.

Êste esquema não é apenas duma grande beleza teórica. Aplicando as equações de Dirac, que são a última generalização das de Schrödinger, mostrou recentemente Racah, à custa do conceito de variedade característica, como pode justificar-se em certos casos, o princípio de indeterminação de Heisenberg.

Mas é, sobretudo, nessa álgebra dos estados, a que já aludi, nesse simbolismo em que o conceito de transformação e o do grupo dominam todo o raciocínio abstracto, que se encontra, certamente, o primacial instrumento de análise da física moderna.

E, se o dualismo onda-corpúsculo traduz, afinal, como mostrou Heisenberg, no campo estritamente matemático, uma simples dualidade de representações equivalentes dos fenómenos atómicos, não admira que a teoria física hesite na interpretação dêsse dualismo. Para uns, a realidade é o corpúsculo e a onda uma abstracção, representativa duma probabilidade. Para outros, como Bohr, ambos os conceitos são abstractos. Mas o que não pode recusar-se, como lei física, são os invariantes dos grupos de transformações das grandezas observáveis. E daí provém o incontestado domínio da teoria dos grupos como algoritmo fundamental da teoria física.

* * *

Julgo, meus senhores, ter pôsto suficientemente em evidência, dum lado, a intensidade do labor científico, no campo da mecânica atómica, doutro lado, e a justificar, em parte, essa extraordinária operosidade, a incerteza dos seus resultados, a hesitação das suas últimas conclusões.

Parece-me conveniente para melhor elucidação de alguns dos seus mais instantes e mais notáveis problemas, uma exposição sumária dos seus principais processos de análise.

Na mecânica clássica, afirmar que um sistema é mùltiplamente periódico, é supor que os parâmetros lagrangeanos q_i e os respectivos momentos p_i são susceptíveis de se desenvolver em série de Fourier

$$2) \qquad q_i = \sum q^{(i)}_{n_1 n_2 \ldots} e^{2\pi i (n_1 \nu_1 + n_2 \nu_2 + \ldots) t}$$

sendo ν_1, $\nu_2 \ldots$ as freqüências fundamentais do sistema *e* n_1, $n_2 \ldots$ números inteiros quaisquer. Os coeficientes $q^{(i)}_{n_1 n_2 \ldots}$ do desenvolvimento são independentes do tempo. Se o número de freqüências fundamentais é k, o movimento considerado resulta da sobreposição dos k movimentos fundamentais e de todos os seus harmónicos, uns e outros afectados de certos coeficientes.

Pretendendo aplicar esta representação da teoria clássica à mecânica atómica, tal como fôra criada por Bohr, é de notar, desde logo, que as freqüências fundamentais e as amplitudes dos movimentos electrónicos não são grandezas observáveis. Observáveis são as freqüências e as intensidades das riscas espectrais. Por outro lado, nos sistemas da mecânica clássica as freqüências fundamentais podem ser quaisquer, ao passo que as freqüências espectrais hão-de satisfazer ao *princípio* de *combinação* de Ritz, que, juntamente com a hipótese de existência de trajectórias estacionárias e de níveis energéticos discontínuos, se traduz no postulado de Bohr

$$3) \qquad W_m - W_n = h\nu(mn),$$

sendo o primeiro membro a diferença das energias correspondentes a dois estados estacionários e $\nu(mn)$ a freqüência correspondente à *passagem* de um dêsses estados para o outro. Sendo cada estado estacionário definido por uma conveniente combinação dos números quânticos correspondentes a cada electrão, é manifesta a sua analogia com o harmónico da teoria clássica. Sòmente, entre os harmónicos e as suas freqüências é possível estabelecer uma correspondência *unívoca,* ao passo que, na teoria de Bohr, a cada freqüência espectral correspondem *dois* estados estacionários.

Recorreu, por isso, Heisenberg à representação matricial. Com efeito, uma matriz em que, no cruzamento da linha m com a coluna n, se encontra o elemento

4) $$q(mn)\, e^{2\pi i \nu(mn) t},$$

dá-nos, para cada parâmetro, uma *ordenação* em função do tempo. Mas já não é possível determinar num dado instante, pela soma duma série de Fourier, o valor duma coordenada lagrangiana, ou dum momento. A matriz é apenas um conjunto de dados observáveis na passagem dum estado estacionário para outro; não comporta uma determinação de grandezas num dado instante. Sabemos apenas que os termos diagonais são independentes do tempo, visto que

5) $$\nu(nn) = W_n - W_n = 0$$

e representam, como os termos independentes do tempo numa série de Fourier, um *valor médio* do parâmetro respectivo.

E também ainda como numa série de Fourier, em que cada têrmo vem acompanhado do respectivo conjugado, sabemos que os termos simétricos duma matriz, em relação à diagonal principal, devem ser conjugados entre si e, portanto, as matrizes da teoria de Heisenberg são matrizes de Hermite. E daqui resulta, por ser

$$6) \qquad \nu(mn) = -\nu(nm),$$

em virtude do princípio de combinação, que

$$q(mn) \quad \text{e} \quad q(nm)$$

devem ser conjugados. E, portanto, os termos da diagonal principal devem ser reais.

Na mecânica de Heisenberg não se opera, pois, sôbre números e variáveis numéricas, à custa dos quais se constroem as equações diferenciais do problema. A álgebra das matrizes tem apenas duas operações, a adição e a multiplicação; e, quando aplicadas à teoria atómica, apenas se exige que a soma e o produto satisfaçam ainda ao princípio de Ritz, se queremos que êsses resultados representem, para cada parâmetro, a passagem dum estado estacionário para outro. Segundo essas regras operatórias, a soma e o produto de duas matrizes, cujos elementos são, respectivamente 4) e

$$4')\qquad q'(mn)\, e^{2\pi i (mn) t},$$

têm como elementos

$$6)\qquad S(mn)\, e^{2\pi i \nu (mn) t}$$

e

$$6')\qquad P(mn)\, e^{2\pi i \nu (mn) t},$$

sendo

$$7)\qquad S(mn) = q(mn) + q'(mn)$$

e

$$7')\qquad P(mn) = \sum_i q(mi)\, q'(in).$$

A relação 7') mostra que a multiplicação de matrizes não é uma operação comutativa, o que é fundamental no desenvolvimento da teoria. E as relações 6) e 6') mostram que a determinação do factor exponencial é imediata, conhecidos os coeficientes; de modo que pode dispensar-se a sua escrita, adoptando-se as relações 7) e 7') como definidoras das leis operatórias, e o coeficiente como definidor da matriz.

Com essa convenção, a matriz derivada de $q(mn)$ é $2\pi i \nu\, q(mn)$.

Matriz *unitária* é a que tem iguais à unidade os elementos principais e nulos todos os outros. Representá-la-emos por I (mn).

Matrizes *recíprocas* são aquelas cujo produto é a matriz unitária. Representaremos por A^{-1} a recíproca de A. Isto é,

8) $$A A^{-1} = I.$$

Matriz *transposta* de outra é a que resulta de trocar nessa outra as linhas em colunas. Representaremos por $\tilde{A}$ a transposta de A; isto é,

8') $$A(mn) = \tilde{A}(nm).$$

Na passagem do discontínuo para o contínuo, adoptou Dirac a evidente substituïção das somas por integrais; de modo que a lei correspondente do produto de matrizes será, em virtude de 7'),

7'') $$P(mn) = \int q(mi)\, q'(in)\, di,$$

resultado que não é também comutativo em m e n.

Segundo esta convenção, a matriz unitária I (mn) é a que satisfaz a condição

9) $$\int I(mi)\, P(in)\, di = P(mn).$$

* * *

Chamemos, com Dirac, *números q* às grandezas matriciais, cujo produto não é, portanto, comutativo, e *números* c às grandezas ordinárias; representemos as primeiras por maiúsculas e as segundas por minúsculas. E aceitemos o seguinte princípio, chamado de *correspondência: Se em dois estados estacionários os números quânticos são muito grandes,*

$$a_1, a_2 \ldots$$

no primeiro e

$$b_1, b_2 \ldots$$

no segundo, a freqüência $\nu(mn)$ *correspondente à passagem do primeiro para o segundo, aproxima-se da freqüência*

$$(a_1 - b_1)\nu_1 + (a_2 - b_2)\nu_2 + \ldots$$

do harmónico da teoria clássica correspondente aos números inteiros $a_i - b_i$.

É fácil então demonstrar êste princípio fundamental da teoria de Dirac:

Se A *e* B *são números q e a e b os números* c *correspondentes na teoria clássica, o elemento* (*mn*) *da matriz*

$$\frac{2\pi i}{h}(\mathrm{AB} - \mathrm{BA})$$

tende a coincidir, para grandes números quânticos, com o harmónico $(m - n)$ *do parentesis de Poisson* $[ab]$.

Supõe-se, é claro, que as variáveis independentes são os parâmetros de Lagrange q_i e os seus momentos p_i de modo que

$$10) \qquad [ab] = \sum_i \left(\frac{\partial a}{\partial p_i} \frac{\partial b}{\partial q_i} - \frac{\partial a}{\partial q_i} \frac{\partial b}{\partial p_i} \right).$$

Daqui induziu Dirac, visto que os parâmetros q_i e os momentos p_i da mecânica clássica satisfazem, evidentemente, às condições

$$11) \qquad \begin{cases} [p_i\, q_k] = \begin{cases} 1 \text{ para } i = k \\ 0 \text{ para } i \gtreqless k \end{cases} \\ \left.\begin{array}{l} [p_i\, p_k] = 0 \\ [q_i\, q_k] = 0 \end{array}\right\} \text{quaisquer que sejam } i \text{ e } k, \end{cases}$$

que os números q correspondentes da mecânica atómica devem satisfazer às condições

$$12) \qquad \begin{cases} P_i\, Q_k - P_k\, Q_i = \begin{cases} \dfrac{h}{2\pi i} \text{ para } i = k \\ 0 \text{ para } i \gtreqless k \end{cases} \\ \left.\begin{array}{l} P_i\, P_k - P_k\, P_i = 0 \\ Q_i\, Q_k - Q_k\, Q_i = 0 \end{array}\right\} \text{em todos os casos.} \end{cases}$$

Por outro lado, as equações canónicas da teoria clássica, se fôr H a hamiltoniana, podem escrever-se

$$13)\qquad \begin{cases} p'_i = [\mathrm{H}\, p_i] \\ q'_i = [\mathrm{H}\, q_i] \end{cases}.$$

Portanto. as equações do movimento, na teoria quântica, poderão pôr-se sob a forma

$$14)\qquad \begin{cases} \mathrm{P}'_i = \dfrac{2\pi i}{h}(\mathrm{H\,P}_i - \mathrm{P}_i\,\mathrm{H}) \\[2ex] \mathrm{Q}'_i = \dfrac{2\pi i}{h}(\mathrm{H\,Q}_i - \mathrm{Q}_i\,\mathrm{H}) \end{cases}$$

sendo H uma matriz.

Como se vê, as relações 12) mostram que, tanto os momentos como os parâmetros, são números q permutáveis entre si dois a dois; um parâmetro e um momento só são permutáveis quando têm índices diferentes.

Mostram ainda as mesmas relações que tudo se reduz à mecânica clássica pondo $h=0$.

As equações 12) e 14), induzidas, como dissemos do princípio de correspondência, são os postulados da teoria quântica de Heisenberg-Dirac, mas não são, como é manifesto, resultados duma demonstração.

* * *

Um sistema diz-se não *degenerado* quando não há dois estados estacionários com a mesma energia; isto é

$$15) \qquad \nu(mn) \gtrless 0$$

quando

$$m \gtrless n.$$

Por outro lado, o princípio da conservação da energia exige que seja nula a derivada da matriz hamiltoniana H, em ordem ao tempo; isto é

$$16) \qquad 2\pi i \nu(mn) \mathrm{H}(mn) = 0.$$

Logo, num sistema não degenerado,

$$\mathrm{H}(mn) = 0,$$

quando fôr

$$m \gtrless n.$$

Isto é, a hamiltoniana H é uma *matriz diagonal*. E os seus elementos diagonais são os níveis de energia dos estados estacionários.

Nos sistemas *degenerados*, há estados estacionários para os quais a energia é a mesma e, portanto,

$$\nu(mn) = 0.$$

A matriz H já não será, em geral, diagonal.

* * *

Transformar uma matriz A por meio de outra T é construir a matriz

$$17) \qquad A_1 = T^{-1} A T.$$

Pois bem, é fácil ver que as condições 12) chamadas de *comutação,* são invariantes para qualquer transformação de matrizes.

Por outro lado, do que atrás fica dito, deduz-se muito simplesmente que, dado um sistema de matrizes Q_i e P_i, respectivamente representativas dos parâmetros lagrangianos e dos seus momentos, se êle satisfaz às condições de comutação e converte a hamiltoniana H numa matriz diagonal, ficam, por êsse facto, satisfeitas as equações 14) do movimento e o problema dinâmico fica resolvido. Logo, em mecânica quântica, a resolução dum problema dinâmico consiste em determinar matrizes de Hermite Q_i e P_i que satisfaçam às condições de comutação, embora a hamiltoniana H, que nelas se exprime, não seja diagonal; e em procurar uma matriz transformadora T, que converta H numa matriz diagonal.

No caso da continuïdade, a que se referem as relações 7'') e seguintes de Dirac, são particularmente importantes as chamadas transformações *unitárias,* que satisfazem à condição

$$18) \qquad \tilde{T}^{\times} T = I,$$

onde $\tilde{T}^{\times}$ representa a matriz *conjugada da transposta* de T. Essas transformações deixam invariante uma forma hermitiana do espaço de Hilbert, a infinitas dimensões e correspondem às rotações dos sistemas ortogonais do espaço ordinário. A transformação T que satisfaz à condição 18) diz-se *normalizada.*

E tudo o que fica dito permite considerar uma transformação de matrizes como uma mudança de sistema de coordenadas no espaço de Hilbert. Tudo se reduz, portanto, na resolução dum problema de mecânica quântica, a achar um sistema hilbertiano de coordenadas que torne diagonal a matriz H. Chamar-lhe-emos o sistema (H).

Note-se, de passagem, que a teoria das matrizes já tinha estabelecido que a mesma transformação ortogonal que torna diagonal uma matriz, torna também diagonais tôdas aquelas que com ela são comutativas.

* * *

É tempo de nos referirmos à concepção de Schrödinger e às suas relações com a teoria matricial.

A equação das ondas de Schrödinger é da forma

$$19)\qquad H\left(\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial q_i}, q_i\right)\Psi(q) = W\,\Psi(q),$$

onde W representa a energia e onde $\Psi(q)$ é a função das *ondas*, abreviadamente expressa em todos os parâmetros lagrangianos. Como a hamiltoniana $H(p_i, q_i)$ é função dos parâmetros e dos momentos, supõe-se, no primeiro membro de 19), que cada momento p_i é substituído, na expressão de H, pelo operador diferencial

$$\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial q_i}.$$

Como já dissemos, Schrödinger não atribuíu inicialmente nenhuma significação física à função das ondas Ψ; procurou apenas determinar os valores da energia W de modo que a equação tivesse uma solução *única, contínua* e *limitada* em todo o espaço das fases. Êsses valores *próprios* de W, introduzidos na equação de Bohr, fornecem as freqüências espectrais.

¿Como interpreta Schrödinger, dentro da sua teoria ondulatória, a concepção matricial de Heisenberg-Dirac?

Notemos, antes de mais nada, que, se a matriz $A(mn)$ é diagonal, podemos representá-la simplesmente por $A(m)$, como é óbvio; o elemento $A(m)$ refere-se ao estado estacionário m.

Posto isto, suponhamos que o primitivo sistema é (Q): isto é, um sistema em que os parâmetros lagrangianos Q são matrizes diagonais. E seja T a matriz transformadora do sistema (Q) no sistema (H); isto é

$$20) \qquad T^{-1} H^{(Q)} T = H^{(H)}$$

sendo $H^{(Q)}$ a hamiltoniana no sistema (Q) e $H^{(H)}$ a hamiltoniana no sistema (H) (diagonal, portanto).

Pois segundo Schrödinger,

$$21) \qquad H^{(H)}(m) = W_m;$$

portanto, a determinação dos valores próprios da equação 19) dá-nos a matriz diagonal H. E, se chamarmos $\Psi_m(q)$ à solução de 19) correspondente ao valor W do parâmetro energia, será

$$22) \qquad T(nm) = \Psi_m(q_n),$$

sendo (q_n) o conjunto dos elementos que ocupam a posição n nas matrizes diagonais (Q).

De modo que, determinados, pela equação de Schrödinger, os níveis energéticos W_m e as correspondentes funções de ondas $\Psi_m(q)$, a matriz transformadora T fica completamente conhecida.

E aqui está como se fêz o entendimento entre as duas teorias. A de Schrödinger, como é manifesto, pelo mesmo valor algorítmico das equações diferenciais, tem um poder de interpretação que não é atingível pela teoria matricial, que conduz, de resto, a uma infinidade de equações simultâneas, no caso do problema discontínuo.

O problema contínuo foi resolvido por Dirac, à custa da sua teoria da transformação, permitindo-lhe essa teoria deduzir a equação das ondas de Schrödinger e generalizá-la sob a forma duma equação integral, que se chama equação de Dirac, em que é a matriz transformadora T a função desconhecida, e que se reduz à equação de Schrödinger quando a hamiltoniana é algébrica.

* * *

Resta-nos averiguar de que maneira será possível interpretar, no campo físico, os resultados duma teoria abstracta (se não matemática no enlace dos seus conceitos, quási sempre estabelecidos, como vimos, à custa duma correspondência indutiva); duma teoria, dizia eu, em que as grandezas são números q não comportando uma *determinação* numérica num dado instante.

E aqui se inicia, na concepção de Heisenberg e Dirac, completada pelo significado atribuído por Born ao quadrado do módulo da função das ondas de Schrödinger, a interpretação *estatística* da teoria quântica.

Como? À custa dos dois seguintes princípios:

1.º — *Uma grandeza representada pela matriz* A, *só pode tomar, como valores, os elementos de* A *no sistema* (A); isto é, num sistema em que A seja matriz diagonal;

2.º — *Se* $T_{(B)}^{(A)}$ *é a matriz transformadora do sistema* (A) *no sistema* (B), $|T_{mn}|^2$ *é a probabilidade de que* A *tenha o valor* $A(m)$ *quando* B *tiver o valor* $B(n)$.

Não é difícil concluir destes princípios, por uma análise simples, que, sendo Δq e Δp os desvios quadráticos médios dum parâmetro lagrangiano e do respectivo momento, se verifica a relação

$$\Delta p \, \Delta q \geqslant \frac{h}{2\pi}. \tag{23}$$

E nela se contém o chamado *princípio de indeterminação* de Heisenberg, que, aliás, se deduz também da concepção dualística onda-corpúsculo de Broglie.

* * *

Numerosas experiências têm sido *concebidas* (embora de impossível realização) em que o referido princípio de Heisenberg, supostas eliminadas tôdas as causas de êrro, seria necessàriamente confirmado.

Não vou mencioná-las, porque nem esta breve resenha de conceitos comporta essa exposição, nem ela é necessária ao meu intento de ligeiro exame do seu alcance e das suas conseqüências.

Claro está que, se por um lado essas experiências, embora ideais, visam a confirmação duma teoria que não foi rigorosamente estabelecida por um raciocínio matemático sem soluções de continuïdade, por outro lado bastaria uma só em contrário para aluir tôda a teoria mecânica de que as relações de Heisenberg são uma conseqüência necessária.

Observemos, antes de mais nada, como o conceito de probabilidade se introduziu na mecânica quântica, dando-lhe feição estatística. Tínhamos efectuado o enlace da teoria matricial de Heisenberg-Dirac com a teoria ondulatória de Broglie Schrödinger, mas nem por isso estávamos mais adiantados sob o ponto de vista da determinação numérica das grandezas físicas, num dado instante. Nem a representação por matrizes comporta outro conhecimento que não seja o dum valor médio *temporal*, definido pelos termos diagonais, nem a função das ondas de Schrödinger tem uma significação física necessária. ¿O que fizemos? Interpretamos simultâneamente o quadrado do módulo duma certa matriz transformadora e o quadrado do módulo da função de ondas como representativos duma certa probabilidade, aliando assim as duas teorias. E, desde então, tôda a análise quântica entra nos domínios da estatística.

Não confundamos, porém, a função que o conceito de probabilidade desempenha na mecânica quântica com a que lhe compete em todos os domínios da experiência. Aqui, as inevitáveis imperfeições da observação determinam a incerteza aliatória que a teoria dos êrros ensina a corrigir. Além, não: a probabilidade intervém intrìnsecamente na definição do mesmo campo fenomenal.

¿O que significam as relações de incerteza de Heisenberg? Que é impossível uma ilimitada perfeição simultânea na medida dum parâmetro lagrangiano e do respectivo momento, visto que o produto dos respectivos desvios quadráticos médios não pode ser inferior a uma certa constante. E, se o pequeno valor dessa constante não consente uma efectiva verificação experimental do princípio, nem por isso êle deixa de ser uma conseqüência certa das leis da mecânica quântica: se conseguíssemos, por uma determinada experiência, obter o valor exacto dum parâmetro, ficaria, no mesmo instante, completamente indeterminado o respectivo momento; para um ponto móvel, o rigoroso exame da sua posição, implicaria a absoluta incerteza da sua quantidade de movimento e, portanto, da sua velocidade.

Não será demais citar um paradoxo célebre do mesmo Heisenberg, acêrca das suas relações de incerteza.

Nada nos impede, diz êle, de medir, num dado instante, a posição, por exemplo, com uma precisão idealmente perfeita; e, num instante futuro, a velocidade, também com o mesmo rigor ideal; e isso nos levaria ao conhecimento de ambas as grandezas, num instante posterior. Logo o princípio de indeterminação é falso.

A imperfeição dêste raciocínio lança muita luz sôbre o verdadeiro alcance do princípio de indeterminação. ¿Em que consiste essa imperfeição? Em supor possível um observador que não influa, com a sua mesma presença, nos fenómenos que está observando. E não é assim: *tôda a observação perturba o sistema em que se realiza, alterando o seu estado, a não ser que o estado inicial e a observação sejam tais que haja a probabilidade* um, *isto é, a certeza, de obter um determinado resultado.*

Não entrarei na análise dêste conceito, magistralmente feita por Dirac, ao construir a sua teoria algébrica dos estados e das observáveis. E é nela, à custa da noção de compatibilidade das observações e dum princípio de sobreposição de estados em que superintende a idea de probabilidade, que se baseia tôda a teoria quântica moderna, e, em especial os dois princípios fundamentais atrás enunciados, e dos quais deriva o princípio de indeterminação.

* * *

Êste princípio, de resto, não é inteiramente novo. Como se sabe, a velha termodinâmica de Carnot-Clausius, definindo a entropia por um processo de integração, determinava-a a menos duma constante arbitrária. E a mecânica estatística de Gibbs-Bolzmann, relacionando a entropia com o conceito de probabilidade, não eliminava essa constante de integração.

O princípio de Nernst resolvia a dificuldade, mas ninguém contesta o carácter arbitrário do seu primitivo enunciado. Por isso, Planck, na sua *Teoria do Calor,* procurando determinar essa constante, criava o conceito de *células* de igual probabilidade. Para êle, o espaço das fases pode dividir-se em células finitas, tais que, todo o sistema material é decomponível em sistemas elementares, cada um dêles interior a uma dessas células; e o *estado* do sistema total, isto é, o *conjunto das observáveis,* não se altera qualquer que seja o deslocamento de cada sistema elementar dentro da respectiva célula.

¡Como isto é já, e em linguagem diferente, uma imperfeita imagem da teoria moderna! Na concepção de Planck, essas células têm, em cada caso, dimensões determinadas e *forma* definida; e para o caso dum parâmetro único q e, portanto, um só momento p, as suas dimensões satisfazem à condição

$$24) \qquad \Delta p . \Delta q = h .$$

¿Que diferença há entre êste conceito e o princípio de indeterminação? Apenas esta: a substituïção de uma igualdade por uma desigualdade e a iliminação da idea de *forma* para as células de igual probabilidade: desde que a ária do rectângulo de lados Δp e Δq se não altere, as dimensões dos lados são indiferentes.

* * *

No princípio de Heisenberg, como vimos, há, portanto, a afirmação, dentro da teoria quântica, da impossibilidade de determinar, num dado instante, com igual e teòricamente ilimitada precisão, os pares de variáveis canónicas, à custa dos quais, a mecânica clássica, por intermédio das suas equações diferenciais, *prevê* o futuro dum sistema dinâmico. Essa impossibilidade de previsão da mecânica quântica deriva da sua mesma natureza estatística; e, embora pondo de parte a insuficiência da sua estruturação matemática e atribuindo o maior valor à confirmação experimental das suas doutrinas, não confundamos a impossibilidade de utilização, por seu *intermédio,* do princípio de causalidade no estabelecimento das leis físicas, com a negação do referido princípio como norma do conhecimento.

Não vem, talvez, longe a hora em que seja possível construir um mais perfeito esquema da realidade atómica. Ainda há pouco o desejava e vaticinava Bohr, julgando esgotadas as possibilidades da teoria quântica, por incapacidade de resolução dos problemas do núcleo. E, se assim fôr, não sofrerá a injúria duma desclassificação peremptória e irremediável aquele princípio de conservação a que eu aludia no prólogo desta minha prática: *o que fica das teorias que vacilam e baqueiam, o conjunto das relações invariantes duma teoria para outra, é cada vez mais sólido, mais extenso e mais claro.* Porquê?

Certamente porque, no mesmo interêsse da teoria nova, figura, como condição da sua perdurabilidade e do seu êxito, o respeito daqueles conceitos da teoria anterior aos quais uma rigorosa experimentação conferira foros de verdade. E êste espírito conservador da essência não é, na evolução científica, incompatível com a modalidade revolucionária dos processos; porque a discrepância formal dêsses processos envolve, cada vez mais, uma concordância de sentido: o de considerar a lei física como o *invariante* dum grupo de transformações, cuja generalidade leva implícita a da lei respectiva.

E quem afirmar que é à luz dêsse conceito de grupo que há de estruturar-se tôda a teoria física, como já se estruturou tôda a teoria geométrica, não correrá, certamente, o risco dum fácil desmentido.

Êsse grupo fundamental, cujos invariantes são as leis naturais, é que não será já um grupo de transformações pontuais, deixando invariante uma certa forma quadrática, como nos espaços riemannianos; mas sim um grupo de transformações de *contacto,* como supõe o recente princípio da *subjectividade* de Mariani. Segundo essa concepção, o sistema móvel é apenas o suporte pontual duma multiplicidade característica, cujo elemento gerador já não é o ponto, mas sim o elemento de contacto; e a sua estrutura já não é, em geral, invariante. Neste conceito se filia, não só uma generalização do princípio da relatividade, mas também uma interpretação das incertezas de Heisenberg e da dualidade onda-corpúsculo da teoria de Broglie. E assim podem incluir-se na mesma figuração matemática a mecânica relativista e a mecânica quântica.

¡Mais uma confirmação do princípio de unidade! ¡Mais um passo para essa estruturação unitária que ao espírito humano se afigura um ideal de perfeição e um modêlo de inteligência do universo! ¡Mais um testemunho iniludível da harmoniosa subordinação das leis às premissas do entendimento! Aquele entendimento cujas asas tiveram, no dizer de Sócrates, o abrolhar inquieto da dentição infantil; e cujo vôo, ora hesitante, ora sereno e firme, tem como destino a verdade e como galardão a glória da sua mesma existência!

centro ciência viva
RÓMULO DE CARVALHO

MUSEU NACIONAL DA CIÊNCIA E DA TÉCNICA

ERRATA

Páginas	*Linhas*	*Onde se lê*	*Leia-se*
35	4	c_2	c^2
40	3	c_2	c^2
57	última	sem	sendo
60	última		$S'^{\,\cdot\cdot\gamma}_{\alpha\beta}$
78	2	suprimir *em*	

RÓ
MU
LO
CENTRO CIÊNCIA VIVA
UNIVERSIDADE COIMBRA
1329658647