ESCOLAS REGIMENTAIS

ARITMÉTICA

Para o 2.º e 3.º cursos de habilitação

POR

JOÃO ANTONIO CORREIA DOS SANTOS
Coronel de Infantaria, habilitado com o curso do Estado Maior e prof. no Colégio Militar

E

CAPITÃO LUÍZ A. DE SANT'ANNA
Professor Diplomado

**Livro aprovado pela Comissão nomeada
Pelo Ministério da Guerra
para a escolha dos livros**

— LISBOA —
Imprensa Lucas & C.ª
— Rua Diário de Notícias, 59 a 61 —
— 1 9 3 1 —

ARITMÉTICA

ESCOLAS REGIMENTAIS

ARITMÉTICA

Para o 2.º e 3.º cursos de habilitação

POR

JOÃO ANTÓNIO CORREIA DOS SANTOS
Coronel de Infantaria, habilitado com o curso do Estado Maior e prof. no Colégio Militar

E

CAPITÃO LUÍZ A. DE SANT'ANA
Professor Diplomado

**Livro aprovado pela Comissão nomeada
Pelo Ministério da Guerra
para a escolha dos livros**

LISBOA
Imprensa Lucas & C.ª
— Rua Diário de Noticias, 59 a 61 —
1931

2.º CURSO DE HABILITAÇÃO

PROGRAMA

Desenvolvimento da matéria do curso anterior; números fraccionários; simplificação, redução ao mesmo denominador, adição, subtracção, multiplicação, divisão e potenciação de fracções; extracção da raiz quadrada a números inteiros e decimais; números complexos e incomplexos; redução de números complexos a incomplexos e vice-versa; operações sôbre complexos; razões e proporções aritméticas e geométricas e as suas propriedades fundamentais.

ADVERTÊNCIA

No compêndio da parte literária do 1.º curso encontra-se a matéria, que convém recapitular, com exercícios numerosos de aplicação prática.

CAPÍTULO I

Números fraccionários

a) Propriedades gerais

1 — Se dividirmos a unidade que empregamos para medir uma grandeza em um certo número de partes iguais, podemos depois tomar algumas destas. Assim, se dividirmos um metro em quatro partes iguais e tomarmos 3 destas, diremos que temos três quartos da unidade. Se despejarmos a água contida num vaso de litro para outros dois vasos menores, iguais entre si, e tomarmos o líquido contido num dêstes vasos, dizemos que temos meio litro de água. Quando a grandeza que tomamos para unidade fôr dividida em partes iguais, cada uma destas chama-se *parte alíquota da unidade.*

Ao número, que representa uma ou mais partes iguais da unidade, chama-se *fracção* ou *quebrado*. Vê-se pois que um número quebrado difere de um número inteiro em que êste representa a unidade repetida mais ou menos vezes e aquele representa uma parte alíquota da unidade, repetida 2, 3 ou mais vezes.

O número, que indica em quantas partes a unidade foi dividida, chama-se *denominador*, e aquele que indica quantas vezes uma dessas unidades se contém na fracção chama-se *numerador*. Assim, por exemplo, se dividirmos a unidade em 8 partes e a fracção contiver 5 vezes uma delas, diremos que 8 é o denominador e 5 e numerador.

O numerador e o denominador chamam-se termos da fracção.

2 — Representa-se uma fracção escrevendo o numerador por cima do denominador, separados por um traço.

A fracção acima indicada escrever-se-á portanto $\frac{5}{8}$

As fracções assim representadas chamam-se quebrados.

Para ler uma fracção enuncia-se primeiro o numerador e depois o denominador. Quando o denominador tiver os valores 2 a 9, ler-se-á meio, têrço, quarto, quinto, sexto, sétimo, oitavo e nono. Assim os quebrados:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{3}{5}, \frac{3}{6}, \frac{5}{7}, \frac{4}{8}, \frac{5}{9},$$

ler-se-ão: um meio, dois terços, três quartos, três quintos, três sextos, cinco sétimos, quatro oitavos, cinco nonos.

Quando o denominador da fracção fôr superior a 10, lê-se o denominador seguido da determinação *avos*. Por exemplo a fracção $\frac{5}{12}$ lê-se cinco doze avos.

Se o denominador fôr 10, 100, 1000, etc., ler-se-á décimos, centésimos, milésimos, etc. Assim as fracções

$$\frac{2}{10}, \frac{5}{100}, \frac{7}{1000}$$

leem-se respectivamente:

dois décimos, cinco centésimos, sete milésimos.

Estas fracções, que têem por denominadores 10, 100, 1000, etc., chamam-se fracções decimais e serão tratadas em capítulo especial.

3 — Uma fracção que tem o numerador igual ao denominador equivale à unidade. Por exemplo $\frac{3}{3}$ equivale à unidade, e compreende-se fàcilmente que assim seja, visto que êste quebrado significa que dividimos a unidade em três partes, ou tôda a unidade.

4 — O quebrado cujo numerador é menor que o denominador é *próprio* e representa uma grandeza menor que a unidade. No caso contrário o quebrado é *impróprio* e representa uma grandeza maior que a unidade. Se os dois termos são iguais, o quebrado é igual à unidade.

5 — Para achar o número de vezes, que um quebrado impróprio contém a unidade, divide-se o numerador pelo denominador: o cociente é o número procurado. O valor exacto do quebrado, quando a divisão der resto, é a soma do cociente mais um que-

brado próprio com o mesmo denominador, tendo por numerador o resto da divisão. A esta operação chama-se *extraír os inteiros* ao quebrado.

Exemplo:

$$\frac{59}{7} = 8 + \frac{3}{7}$$

Usualmente não se emprega o sinal mais (+) e escreve-se $8\,\frac{3}{7}$

Ao número assim escrito chama-se *número mixto*.

Número mixto é portanto o que consta da parte inteira e de fracção. [1]

6 — Quando o numerador é divisível pelo denominador, o quebrado representa um número inteiro.

Exemplos:

$$\frac{12}{4} = 3 \qquad \frac{27}{9} = 3$$

Daqui se conclui que a um número inteiro póde sempre dar-se a forma de fracção com determinado denominador, bastando para isso tomar para numerador o produto do número dado pelo que se destina para denominador.

Exemplos:

$$9 = \frac{9 \times 7}{7} = \frac{63}{7}; \quad 5 = \frac{5 \times 6}{6} = \frac{30}{6}$$

7 — Quando temos dois ou mais quebrados é necessário conhecer-se a regra, para se poder saber qual dêles é o maior. Seja o quebrado $\frac{2}{5}$ e outro com o mesmo denominador $\frac{3}{5}$; o primeiro indica que dividimos a unidade em cinco partes e tomámos duas delas e o segundo indica que dividimos a unidade no mesmo número de partes e tomámos três delas.

---

[1] Alguns autores também chamam aos números mixtos, números fraccionários e outros chamam também fraccionários aos números quebrados ou fracções. Mas em rigor, deverá dizer-se número mixto ou expressão fraccionária, quando haja um número, que se possa decompor em um inteiro e uma fracção ou quebrado.

Exemplo:

$$\frac{59}{7} = 8 + \frac{3}{7}$$

Logo vê-se que o segundo quebrado é maior que o primeiro.

Dados dois quebrados com o mesmo denominador o maior será aquele que tiver maior numerador.

Suponhamos agora que os quebrados são $\frac{3}{5}$ e $\frac{3}{6}$, isto é, com o mesmo numerador e denominadores diferentes.

O primeiro indica que dividimos a unidade em 5 partes e o segundo que dividimos a unidade em 6 partes. Ora quanto menor fôr o número de partes iguais em que dividimos a unidade, tanto maior será cada uma dessas partes: logo $\frac{1}{5}$ vale mais do que $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$; $\frac{3}{5}$ valem mais do que $\frac{3}{6}$.

Quando forem dados dois quebrados, que têem numeradores iguais, será maior aquele que tiver menor denominador.

Quando se multiplica o numerador de um quebrado ou se divide o denominador por um número, o quebrado torna-se tantas vezes maior, quantas são as unidades dêsse número.

Por exemplo, multiplicando por 5 o numerador do quebrado $\frac{3}{8}$, resulta o quebrado $\frac{15}{8}$, o qual é cinco vezes maior que $\frac{3}{8}$, como conseqüência do que dissemos anteriormente.

Do mesmo modo, se dividirmos por 3 o denominador do quebrado $\frac{5}{18}$, resulta $\frac{5}{6}$, que é 3 vezes maior que $\frac{5}{18}$. Compreende-se bem que, quanto maior fôr o número de partes iguais, em que se dividir a unidade, tanto menor será cada uma dessas partes e assim $\frac{5}{18}$ é três vezes menor que $\frac{5}{6}$.

8 — *Quando se divide o numerador de um quebrado, ou se multiplica o denominador por um número, o quebrado torna-se tantas vezes menor quantas são as unidades dêsse número.*

Por exemplo, dividindo por três o numerador do quebrado $\frac{6}{7}$ resulta o quebrado $\frac{2}{7}$ que é três vezes menor que $\frac{6}{7}$.

Da mesma forma, se multiplicar por três o denominador do quebrado $\frac{5}{6}$, resulta $\frac{5}{18}$, que é três vezes menor que $\frac{5}{6}$.

9 — *Do que fica exposto conclui-se que um quebrado não muda de valor quando se multiplicam ou dividem ambos os termos pelo mesmo número.*

Por exemplo, multiplicando por 3 os dois termos do quebrado $\frac{3}{5}$, resulta o novo quebrado $\frac{9}{15}$, que é igual ao primeiro, como se depreende do que se disse nos n.^{os} 6 e 7.

Com efeito quando multiplico o numerador por três, o quebrado torna-se três vezes maior; mas, como multiplicamos depois o denominador por 3, torna-se 3 vezes menor, de forma que o quebrado fica com o mesmo valor.

Considerações análogas fazemos, quando dividimos por 5 ambos os termos do quebrado.

Esta propriedade dos quebrados é muito importante na aplicação que dela se faz à simplificação e à redução de duas ou mais fracções ao mesmo denominador.

b) Simplificação de fracções

10 — Como uma fracção não muda de valor quando ambos os seus termos se dividem pelo mesmo número, podemos por êste meio simplificá-la, isto é, obter outra de termos menores mas com o mesmo valor.

Reduzir um quebrado à sua expressão mais simples é simplificá-lo, de modo que os seus termos sejam os menores, que fôr possivel.

A fim de com facilidade se executar esta operação é conveniente saber as regras por meio das quais se pode conhecer de pronto se um número tem algum dos divisores 2, 3, 4, 5, 9, e 11, isto é, se a divisão dêsse número por estes divisores se faz sem resto.

11 — Diz-se que um número é *divisível* por outro, quando dividido por êle não deixa resto. O primeiro número chama-se *múltiplo* do segundo e o segundo *submúltiplo* ou *divisor* do primeiro.

1.º Todo o número que termina à direita em 0, 2, 4, 6 ou 8 é divisível por 2, e chama-se número *par*.

Os números 36, 44, 78, 90 são pares.

2.º Um número será divisível por três, se depois de se lhe extraírem os noves, der de resto 0, 3 ou 6. Será também divisível por 9, se o resto fôr 0.

Os números 63957 e 56643 são divisíveis por 3; o número 2754 é divisível por 3 e por 9.

3.º Um número é divisível por 4, quando a divisão do número formado pelos dois primeiros algarismos da sua direita por 4, der resto 0.

O número 754936 é divisível por 4, porque 36 dividido por 4 não dá resto.

São também divisíveis por 4 os númeres 9732 e 1824.

4.º Um número é divisível por 5, quando términa à direita em 0 ou 5.

São divisíveis por 5 os números 7245 e 3970.

5.º Um número é divisível por 11, se a soma dos algarismos de ordem ímpar, a contar da direita, menos a soma dos de ordem par, dividida por 11, não der resto.

O número 3936495728 é divisível por 11, porque somando os algarismos de ordem ímpar $8 + 7 + 9 + 6 + 9 = 39$ e os algarismos de ordem par $2 + 5 + 4 + 3 + 3 = 17$ e subtraíndo um do outro, se obtém o número 22, que é divisível por 11.

12 — Regra para simplificar um quebrado. *Dividem-se ambos os termos do quebrado por 2, se a divisão fôr possível; dividem-se ainda por 2 ambos os termos do novo quebrado, se êles forem divisíveis por 2; e assim sucessivamente, até que se chegue a um quebrado cujos termos não sejam divisíveis por 2. Dividem-se então por 3 os dois termos do último quebrado, se fôr possível, os dois termos do quebrado resultante ainda por 3, e assim por deante, até se obter um quebrado cujos termos não sejam divisíveis por 3. Passa-se então ao divisor 5, depois ao divisor 7, em seguida a 11, 13, 17, 19, etc.*

Exemplo: simplificar o quebrado $\frac{462}{594}$.

Os dois termos do quebrado são divisíveis por 2; dividindo por 2 tanto o numerador como o denominador obtém-se um novo quebrado igual ao anterior $\frac{231}{297}$.

Examinando os dois termos desta fracção, verificamos, com o emprêgo das regras acima indicadas, que têem os divisores comuns 3 e 11 e assim ficar-nos-ão os quebrados

$$\frac{231:3}{297:3} = \frac{77}{99} \text{ e } \frac{77:11}{99:11} = \frac{7}{9}$$

portanto

$$\frac{462}{594} = \frac{7}{9}$$

c) Redução de quebrados ao mesmo denominador

13 — Reduzir *quebrados ao mesmo denominador é buscar outros quebrados respectivamente iguais aos primeiros, tendo todos os novos quebrados o mesmo denominador.*

Para reduzir dois quebrados ao mesmo denominador multiplicam-se os dois termos de cada quebrado pelo denominador do outro.

Por exemplo para reduzir ao mesmo denominador os dois quebrados :

$$\frac{3}{8} \text{ e } \frac{4}{9}$$

multiplicamos os dois termos do primeiro por 9 e os dois termos do segundo por 8. Resultam dêste modo os quebrados :

$$\frac{27}{72} \text{ e } \frac{32}{72}$$

que têem o mesmo denominador e são respectivamente equivalentes aos primeiros.

Quando se tenha de reduzir três ou mais quebrados ao mesmo denominador, multiplicam-se os dois termos de cada um pelo produto dos denominadores de todos os outros.

Sejam por exemplo os quebrados:

$$\frac{2}{5}, \frac{4}{7}, \frac{3}{8}, \frac{2}{9}$$

multiplicam-se os dois termos do primeiro pelo produto $7 \times 8 \times 9$ dos denominadores dos outros três; multiplicam-se os termos do segundo quebrado pelo produto $5 \times 8 \times 9$, os dois termos do terceiro pelo produto $5 \times 7 \times 9$ e os dois termos do quarto quebrado pelo produto $5 \times 7 \times 8$.

Resultam pois os seguintes quebrados:

$$\frac{2\times7\times8\times9}{5\times7\times8\times9}; \frac{4\times5\times8\times9}{7\times5\times8\times9}; \frac{3\times5\times7\times9}{8\times5\times7\times9}; \frac{2\times5\times7\times8}{9\times5\times7\times8}$$

ou efectuando as operações:

$$\frac{1008}{2520}, \frac{1440}{2520}, \frac{945}{2520}, \frac{560}{2520}$$

14 — Dadas duas ou mais fracções, para sabermos qual delas é a maior, reduzimo-las ao mesmo denominador; a maior será a que ficar com maior numerador.

Exemplo: Sejam as fracções

$$\frac{3}{4}; \frac{5}{7}; \frac{4}{9}$$

Reduzindo ao mesmo denominador temos as fracções:

$$\frac{189}{252}; \frac{180}{252}; \frac{112}{252}$$

que lhes são respectivamente iguais.

Como a fracção $\frac{3}{4}$ ficou com maior numerador, segue-se que esta é maior.

EXERCÍCIOS

1.º Dispor por ordem de grandeza as seguintes fracções:

a) $\frac{2}{15}; \frac{9}{15}; \frac{3}{15}; \frac{10}{15}; \frac{7}{15}$

b) $\frac{12}{7}; \frac{12}{15}; \frac{12}{5}; \frac{12}{23}$

c) $\frac{7}{8}; \frac{9}{11}; \frac{17}{19}$

d) $\frac{7}{11}; \frac{12}{19}; \frac{23}{36}; \frac{32}{41}$

R.: a) $\frac{2}{15}$; $\frac{3}{15}$; $\frac{7}{15}$; $\frac{9}{15}$; $\frac{10}{15}$

b) $\frac{12}{23}$; $\frac{12}{15}$; $\frac{12}{7}$; $\frac{12}{5}$

c) $\frac{9}{11}$; $\frac{7}{8}$; $\frac{17}{19}$

d) $\frac{12}{19}$; $\frac{7}{11}$; $\frac{23}{36}$; $\frac{32}{41}$

2.º Extraír os inteiros contidos nas expressões:

$$\frac{41}{9};\ \frac{311}{12};\ \frac{326}{13};\ \frac{767}{224}$$

R.: $4\,\frac{5}{9}$; $25\,\frac{11}{12}$; $25\,\frac{1}{13}$; $3\,\frac{95}{224}$

3.º Reduzir à expressão mais simples as fracções:

$$\frac{68}{204};\ \frac{581}{830};\ \frac{4260}{7455};\ \frac{184500}{48608}$$

R.: $\frac{1}{3}$; $\frac{7}{10}$; $\frac{4}{7}$; $3\,\frac{9669}{12152}$

4.º O dia que fracção é da semana, do mês e do ano?

5.º Dar ao número 19 a forma de fracção com os denominadores 10, 15, 19, respectivamente.

6.º Reduzir ao mesmo denominador as fracções:

a) $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{2}{3}$

b) $\frac{11}{12}$, $\frac{19}{20}$, $\frac{7}{13}$, $\frac{30}{36}$

R.: *a)* $\frac{15}{30}, \frac{24}{30}, \frac{20}{30}$

b) $\frac{8580}{9360}, \frac{8892}{9360}, \frac{5040}{9360}, \frac{7800}{9360}$

7.º Uma torneira despeja 10 litros de água em 3 minutos, outra 16 litros em 5 minutos. Que porção de água despeja cada torneira em 1 minuto? E qual é delas, que despeja maior quantidade de água num minuto?

R.: A primeira despeja num minuto $\frac{10}{3}$ ou $\frac{50}{15}$

A segunda despeja $\frac{16}{5}$ ou $\frac{48}{15}$ no mesmo tempo

d) Operações

15. *Adição* — 1.º caso: Quando os quebrados têem o mesmo denominador, obtém-se a mesma soma adicionando os numeradores e dando à soma o denominador comum.

Exemplo: $\frac{3}{7} + \frac{5}{7} + \frac{4}{7} = \frac{3+5+4}{7} = \frac{12}{7}$

2.º caso: Se os quebrados têem denominadores diferentes, reduzem-se ao mesmo denominador e procede-se depois como no primeiro caso.

Exemplos:

1.º $\frac{3}{5} + \frac{4}{7} = \frac{3 \times 7}{5 \times 7} + \frac{4 \times 5}{7 \times 5} = \frac{21}{35} + \frac{20}{35} = \frac{41}{35}$

2.º $\frac{5}{9} + \frac{4}{5} + \frac{3}{4} + \frac{2}{3} = \frac{5 \times 5 \times 4 \times 3}{9 \times 5 \times 4 \times 3} +$

$\frac{4 \times 9 \times 4 \times 3}{5 \times 9 \times 4 \times 3} + \frac{3 \times 9 \times 5 \times 3}{4 \times 9 \times 5 \times 3} + \frac{2 \times 9 \times 5 \times 4}{3 \times 9 \times 5 \times 4}$

$$\frac{300}{540} + \frac{432}{540} + \frac{405}{540} + \frac{360}{540} =$$

$$\frac{300 + 432 + 405 + 360}{540} = \frac{1497}{540}$$

16 — A adição dum número inteiro com uma fracção ou a redução de um número mixto a quebrado, faz-se multiplicando o inteiro pelo denominador da fracção, adicionando o produto ao numerador e dando à soma o mesmo denominador.

Exemplos:

$$3 + \frac{4}{7} = \frac{3 \times 7 + 4}{7} = \frac{25}{7}$$

$$2\,\frac{3}{5} = \frac{2 \times 5 + 3}{5} = \frac{13}{5}$$

17 — Para fazer a adição de números mixtos, adicionam-se as partes inteiras das parcelas, depois as fracções; extraem-se os inteiros a esta soma e juntam-se à soma das parcelas inteiras.

Exemplo:

$$2\,\frac{3}{5} + 5\,\frac{4}{7} + 6\,\frac{2}{9}$$

somando as partes inteiras $2 + 5 + 6 = 13$; somando as fracções $\frac{3}{5} + \frac{4}{7} + \frac{2}{9}$, para o que se reduzem primeiro ao mesmo denominador ficam:

$$\frac{189}{315} + \frac{180}{315} + \frac{70}{315} = \frac{439}{315}$$

extraíndo desta soma os inteiros que ela contiver, temos que $\frac{439}{315} = 1\,\frac{124}{315}$. Juntando a parte inteira 1 ao número 13, fica-nos o resultado final $14\,\frac{124}{315}$.

18 — *A adição de números mixtos também se pode efectuar, reduzindo-os à forma de quebrados e aplicando-lhes depois a regra*

da adição de quebrados. Por exemplo para adicionar os números $2\frac{3}{5} + 5\frac{4}{7} + 6\frac{2}{9}$, reduzem-se primeiro à fòrma de quebrados e teremos $\frac{13}{5} + \frac{39}{7} + \frac{56}{9} = \frac{819}{315} + \frac{1755}{315} + \frac{1960}{315} = \frac{4534}{315} =$ $= 14\frac{124}{315}$.

19 — *Subtracção*.— 1.º caso : Subtraem-se quebrados, que tēem o mesmo denominador, subtraíndo os numeradores e dando à diferença o denominador dos quebrados.

Por exemplo :

$$\frac{7}{9} - \frac{4}{9} = \frac{7-4}{9} = \frac{3}{9}$$

2.º caso : Se as fracções tēem denominadores diferentes, reduzem-se ao mesmo denominador e faz-se depois a subtracção, como no primeiro caso.

Exemplo :

$$\frac{5}{9} - \frac{3}{8} = \frac{5\times 8}{9\times 8} - \frac{3\times 9}{8\times 9} = \frac{40}{72} - \frac{27}{72} = \frac{40-27}{72} = \frac{13}{72}$$

20 — *Para subrtaír números mixtos reduzem-se primeiramente à forma de quebrados e aplica-se a regra antecedente*. Dêste modo teremos

$$4\frac{2}{3} - 3\frac{4}{5} = \frac{14}{3} - \frac{19}{5} = \frac{70}{15} - \frac{57}{15} = \frac{13}{15}$$

Também se podia fazer esta operação, subtraíndo primeiro as partes inteiras e depois as fracções, mas êste método é mais trabalhoso e convém pô-lo de parte.

EXERCÍCIOS

1.º Efectuar as seguintes operações :

$$a)\ \frac{10}{14} + \frac{2}{3} + \frac{18}{70}$$

$$b) \ \frac{4}{5} + \frac{7}{10} + \frac{4}{7} + \frac{2}{21}$$

R.: *a)* $1 \frac{67}{105}$ *b)* $2 \frac{1}{6}$

2.° Efectuar as seguintes operações:

$$a) \ 12 \frac{5}{8} + 18 \frac{15}{16} + 37 \frac{31}{32}$$

$$b) \ 14 \frac{11}{12} + 19 \frac{35}{36} + 56 \frac{59}{72}$$

R.: *a)* $69 \frac{3}{8}$ *b)* $91 \frac{17}{24}$

3.° Efectuar as seguintes subtracções:

$$a) \ \frac{11}{12} - \frac{13}{36}; \quad b) \ \frac{17}{19} - \frac{15}{31}; \quad c) \ 13 \frac{2}{3} - 7 \frac{1}{8};$$

$$d) \ 23 \frac{3}{7} - 15 \frac{6}{7}$$

R.: *a)* $\frac{5}{9}$; *b)* $\frac{242}{589}$; *c)* $6 \frac{13}{24}$; *d)* $7 \frac{4}{7}$

4.° Quanto falta a $\frac{5}{11}$ para ser igual a $\frac{7}{9}$?

R.: $\frac{32}{99}$

5.° Quanto se há-de juntar a $4 \frac{2}{5}$ para prefazer 6 unidades?

R.: $\frac{8}{5}$ ou $1 \frac{3}{5}$

21 — *Multiplicação* — A multiplicação de fracções, como a de números inteiros, tem por fim achar um número chamado produto, que se forma de outro chamado *multiplicando*, como um terceiro *multiplicador* se formou da unidade.

Três casos há a considerar:

1.º caso: O multiplicando é fraccionário e o multiplicador inteiro. Neste caso resume-se a operação a repetir a fracção tantas vezes, como parcela, quantas forem as unidades do multiplicador, isto é, fazer a adição de tantos quebrados iguais ao multiplicando, quantas forem as unidades do multiplicador.

Exemplo:

$$\frac{3}{5} \times 4 = \frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5} = \frac{3+3+3+3}{5} =$$
$$= \frac{3 \times 4}{5} = \frac{12}{5}$$

2.º caso: O multiplicando é inteiro e o multiplicador fraccionário. Consiste a operação neste caso em dividir o multiplicando em tantas partes iguais quantas são as unidades do denominador da fracção e repetir uma delas como parcela tantas vezes quantas são as unidades do numerador.

Exemplo:

$$15 \times \frac{3}{4} = \frac{15}{4} \times 3 = \frac{15}{4} + \frac{15}{4} + \frac{15}{4} = \frac{15+15+15}{4} =$$
$$= \frac{15 \times 3}{4} = \frac{45}{4}$$

Do que fica exposto conclui-se que, quando um dos factores é inteiro e o outro fraccionário, se obtém o produto, multiplicando o inteiro pelo numerador da fracção e dando ao produto o denominador desta.

Quando o denominador da fracção é divisível pelo número inteiro pode também obter-se o produto, dividindo o denominador por êsse número, conservando o mesmo numerador.

Exemplos:

$$\frac{13}{24} \times 4 = \frac{13}{24:4} = \frac{13}{6}$$

$$7 \times \frac{5}{28} = \frac{5}{28:7} = \frac{5}{4}$$

3.º caso: O multiplicando e o multiplicador são ambos fraccionários. A operação consiste em dividir o multiplicando em partes iguais quantas são as unidades do denominador do multiplicador e repetir uma delas como parcela tantas vezes quantas são as do numerador.

Exemplo:

$$\frac{3}{7} \times \frac{2}{5} = \frac{3}{7 \times 5} \times 2 = \frac{3}{7 \times 5} + \frac{3}{7 \times 5} = \frac{3 \times 2}{7 \times 5} = \frac{6}{35}$$

O produto de duas fracções é, portanto, uma nova fracção, que tem por numerador o produto dos numeradores e por denominador o produto dos denominadores.

Pôsto isto, apliquemos as regras expostas a mais alguns exemplos, a fim de figurarmos todos os casos, que se podem apresentar.

1.º $\frac{4}{9} \times 6 = \frac{4 \times 6}{9} = \frac{24}{9}$

2.º $\frac{11}{15} \times 5 = \frac{11}{15 : 5} = \frac{11}{3}$

3.º $9 \times \frac{5}{7} = \frac{9 \times 5}{7} = \frac{45}{7}$

4.º $5 \times \frac{4}{15} = \frac{4}{15 : 5} = \frac{4}{3}$

5.º $18 \times \frac{5}{6} = \frac{18}{6} \times 5 = 3 \times 5 = 15$

6.º $\frac{7}{9} \times \frac{3}{5} = \frac{7 \times 3}{9 \times 5} = \frac{21}{45}$

22 — Quando houver mais do que duas fracções a multiplicar, obtém-se o produto do mesmo modo que com duas, formando uma nova fracção, que tenha por numerador o produto dos numeradores e por denominador o produto dos denominadores, como fàcilmente se verifica, multiplicando os dois primeiros factores, o produto dêstes pelo terceiro, e assim sucessivamente.

Exemplo:

$$\frac{4}{3} \times \frac{2}{9} \times \frac{3}{8} \times \frac{5}{6} = \frac{4 \times 2 \times 3 \times 5}{3 \times 9 \times 8 \times 6} = \frac{120}{1296}$$

Se algum dos factores é inteiro, consideramo-lo como uma fracção com a unidade por denominador e aplicamos a regra exposta.

Exemplo:

$$\frac{5}{8} \times \frac{2}{7} \times 6 \times \frac{3}{4} = \frac{5}{8} \times \frac{2}{7} \times \frac{6}{1} \times \frac{3}{4} =$$

$$= \frac{5 \times 2 \times 6 \times 3}{8 \times 7 \times 1 \times 4} = \frac{180}{224}$$

23 — Para se obter o produto de dois ou mais números mixtos, reduzem-se primeiramente a quebrados e opera-se depois com estes, como se ensinou nos números antecedentes.

Exemplo:

$$3\frac{4}{7} \times 5\frac{2}{3} \times 7\frac{3}{5} = \frac{25}{7} \times \frac{17}{3} \times \frac{38}{5} =$$

$$= \frac{25 \times 17 \times 38}{7 \times 3 \times 5} = \frac{16150}{105} = 153\frac{85}{105}$$

EXERCÍCIO

1.º Efectuar as seguintes operações:

a) $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$; $\frac{2}{7} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{5}$

b) $4 \times \frac{2}{3}$; $5 \times \frac{3}{7}$; $\frac{7}{8} \times 3$

R.: *a*) $\frac{8}{15}$, $\frac{12}{140} = \frac{3}{35}$

b) $\frac{8}{3}$, $\frac{15}{7}$, $\frac{21}{8}$.

2.º Efectuar as seguintes operações e simplificar os resultados.

$$13\frac{1}{3}\times 7\frac{1}{8};\ 14\times\frac{7}{8}\times 3\frac{1}{7};\ 60\frac{4}{5}\times$$
$$\times\frac{104}{102}\times 3\frac{248}{420}$$

$$\text{R.}:\quad 92\frac{5}{8},\ 38\frac{1}{2},\ 163\frac{293}{1065}$$

3.º - Achar $\frac{3}{5}$ de 14; $\frac{3}{7}$ de $\frac{5}{8}$; $\frac{15}{16}$ de $3\frac{2}{9}$

$$\text{R.}:\quad \frac{42}{5},\ \frac{15}{56},\ \frac{435}{144}$$

24 — *Divisão* — Para dividir quebrados invertem-se os termos ao quebrado divisor e pratica-se a regra da multiplicação.

Por exemplo, para dividir $\frac{3}{7}$ por $\frac{5}{9}$, inverteremos os termos ao divisor, isto é, passamos o que é numerador para denominador e o que é denominador para numerador, o que dá $\frac{9}{5}$; multiplicamos agora $\frac{3}{7}$ por $\frac{9}{5}$ e obteremos $\frac{27}{35}$.

Por exemplo $\frac{4}{5}:\frac{3}{2}=\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{15}$.

Também se dividem quebrados, dividindo-os termo a termo, isto é, numerador por numerador e denominador por denominador. Esta regra só se aplica, quando os termos do quebrado dividendo são divisíveis pelos termos do quebrado divisor.

Por exemplo, para dividir $\frac{4}{9}$ por $\frac{2}{3}$, poderemos dividir o numerador 4 pelo numerador 2 e o denominador 9 pelo denominador 3 e escrever o segundo cociente, como denominador, debaixo do primeiro, isto é,

$$\frac{4}{9}:\frac{2}{3}=\frac{4:2}{9:3}=\frac{2}{3}$$

25 — *Para dividir um inteiro por um quebrado, ou um quebrado por um inteiro, considera-se o inteiro como um quebrado com o denominador 1, e aplica-se a regra da divisão de quebrados.*

Assim:

$$5 : \frac{2}{9} = \frac{5}{1} : \frac{2}{9} = \frac{5}{1} \times \frac{9}{2} = \frac{45}{2} = 22\ \frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{8} : 5 = \frac{3}{8} : \frac{5}{1} = \frac{3}{8} \times \frac{1}{5} = \frac{3}{40}$$

26 — Para dividir números mixtos, reduzem-se primeiramente à forma de quebrados e aplica-se-lhes depois a regra da divisão de fracções.

Por exemplo:

$$3\ \frac{2}{5} : 4\ \frac{5}{7} = \frac{17}{5} : \frac{33}{7} = \frac{17}{5} \times \frac{7}{33} = \frac{119}{165}$$

$$2\ \frac{5}{7} : 3 = \frac{19}{7} : \frac{3}{1} = \frac{19}{7} \times \frac{1}{3} = \frac{19}{21}$$

EXERCÍCIOS

1.º Efectuar as seguintes operações:

a) $9 : \frac{5}{7}$; $15 : \frac{4}{9}$; $\frac{13}{15} : 6$

b) $\frac{55}{48} : 3\ \frac{7}{8}$; $705\ \frac{5}{9} : 13\ \frac{8}{15}$; $11457\ \frac{14}{17} : 137\ \frac{5}{7}$

R.: *a)* $\frac{63}{5}$; $\frac{135}{4}$; $\frac{13}{90}$

b) $\frac{55}{185}$; $52\ \frac{82}{609}$; $83\ \frac{3179}{16388}$

2.º Efectuar as operações seguintes e simplificar os resultados:

$$a)\ \frac{38}{275} : \frac{133}{385} ; \frac{51}{64} : 3\ \frac{1}{6}$$

R.: $\frac{2}{5}$; $\frac{153}{608}$

$$b)\ 218 \cdot \frac{4}{11} : 6\ \frac{2}{3}$$

R.: $32\ \frac{83}{110}$

Problemas para o emprêgo das operações sôbre quebrados

1.º Que fracção do dia representa um segundo?

R.: $\frac{1}{86.400}$

2.º Uma patrulha percorre 5 léguas em 4 horas e uma outra percorre 4 léguas em 5 horas. Quanto anda a primeira mais do que a segunda em uma hora?

R.: $\frac{9}{20}$ da légua.

3.º De uma pipa de vinho que tinha 360 litros tirou-se um têrço, um quarto e um nono de líquido. Quantos litros ficaram?

R.: 110 litros.

4.º Um cantil vazio pesa 1 $^{3}/_{4}$ quilogramas, cheio de vinho pesa 3 $^{2}/_{7}$ quilogramas. Qual é o pêso do vinho contido no cantil?

R.: $1\frac{15}{28}$ quilogramas.

5.° Compraram-se 15 $^1/_4$ metros de pano por 30$50. A como saíu o metro?

R.: 2$00.

6.° Um indivíduo recebeu 10 $^2/_3$ litros de azeite e deu em troca 23 $^2/_7$ litros de vinho. Qual foi a porção de litros de vinho que deu por cada litro de azeite?

R.: $2^l\frac{41}{224}$

7.° Comprou-se uma peça de pano ao preço de 40$00 por cada 17 metros; vendeu-se pelo preço de 38$00 cada 13 metros e ganhou-se 9$50. Qual era o comprimento da peça de pano?

Em cada metro ganhou-se $\frac{38\$00}{13} - \frac{40\$00}{17}$ ou $\frac{12\$60}{221}$; o número de metros vendidos será $48 : \frac{12\$60}{221}$

R.: $16^m\frac{88}{105}$

8.° Qual é o número cujos $\frac{2}{3}$ aumentados dos seus $\frac{4}{5}$ e diminuídos dos seus $\frac{3}{4}$ perfazem 43?

Os $\frac{2}{3}$ do número mais $\frac{4}{5}$ dão $\frac{22}{15}$; $\frac{22}{15} - \frac{3}{4} = \frac{43}{60}$. Os $\frac{43}{60}$ do número valem 43, logo o número será $\frac{43 \times 60}{43}$ ou 60.

9.° Achar a diferença entre a soma da maior e da mais pequena das fracções $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{7}{12}$ e a soma das duas restantes.

R.: $\frac{7}{72}$

10.º Se eu der um têrço do meu dinheiro, depois metade do que me ficou e finalmente um quarto do último resto, quanto me ficará aínda ?

Da primeira vez ficou $1 - \frac{1}{3}$ ou $\frac{2}{3}$

Da segunda vez dei $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}$ ou $\frac{1}{3}$.

Ficou pois $1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

Da terceira vez dei $\frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$

Para saber quanto resta, tenho de abater a 1

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{12} = \frac{9}{12};\quad 1 - \frac{9}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

11.º Deve-se a quantia de 14.000$00, da qual se paga $^1/_3$ antes do prazo marcado, pelo que o credor concede o abatimento de $^1/_{36}$ da quantia em dívida; passados dois meses paga-se mais $^2/_9$ da quantia em dívida. Quarto falta para o pagamento completo ?

Tinha-se pago:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{36} + \frac{2}{9}$$

Ficará em divida $1 - \frac{21}{36}$ ou $\frac{15}{36}$, o que para a quantia total dava $\frac{14.400\$00 \times 15}{36}$

R.: 6.000$00

12.º Três fontes podem encher um tanque, a 1.ª em 2 horas, a 2.ª em 4 horas e a 3.ª em 2 horas e $^1/_2$. Pregunta-se: quanto aumenta ou diminui em uma hora a água contida no tanque, se ao mesmo tempo se abrem duas torneiras que o faziam vazar, a 1.ª em 1^h e $^1/_2$ e a 2.ª em 3 horas.

As 3 fontes despejarão numa hora $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{2}{5}$ ou $\frac{23}{20}$ do tanque. As duas torneiras esvaziarão $\frac{2}{3} + \frac{1}{3}$ ou o tanque cheio. Logo a água aumentaria $\frac{23}{20} - 1$ da capacidade do tanque.

R.: O tanque enche $\frac{3}{20}$.

13.º Três balas de chumbo pesam 12 quilogramas e $^1/_7$; as duas mais pesadas pesam juntas 9 quilogramas e $^5/_6$; e a mais leve 1 quilograma e $^2/_3$ menos que a média. Qual é o pêso de cada uma?

A mais leve pesa $12\frac{1}{7} - 9\frac{5}{6}$ ou 2 kg. $\frac{13}{42}$

O pêso da média é $2\frac{13}{42} + 1\frac{2}{3} = 3\frac{41}{42}$

O pêso da mais pesada é $9\frac{5}{6} - 3\frac{41}{42}$ ou $5\frac{6}{7}$

14.º Supondo que na composição de 100 quilogramas de pólvora ordinária entram 75 quilogramas de salitre, para 13 de carvão e 12 de enxofre, pregunta-se quanto há de cada uma destas substâncias em $^5/_8$ de quilograma de pólvora.

Em 1 quilograma de pólvora há as seguintes fracções de cada uma daquelas subtâncias:

$$\frac{75}{100}, \frac{13}{100}, \frac{12}{100} \quad \text{ou} \quad \frac{3}{4}, \frac{13}{100}, \frac{3}{25}$$

por conseqüência, sôbre $^5/_8$ do quilograma de pólvora haverá

$$\frac{3 \times 5}{4 \times 8} \text{ ou } \frac{15}{32} \text{ de salitre}$$

$$\frac{13 \times 5}{100 \times 8} \text{ ou } \frac{13}{160} \text{ de carvão}$$

$$\frac{3 \times 5}{25 \times 8} \text{ ou } \frac{3}{40} \text{ de enxofre}$$

15.º Um árabe deixou em testamento a três filhos 17 camelos, que deviam compartilhar da seguinte forma: para o primeiro ficará metade, para o segundo $1/3$ e para o terceiro $1/9$. Não se entendendo na forma de fazerem as partilhas, dirigiram-se ao Califa. Êste para os conciliar emprestou-lhes um camelo, passando a haver 18, e a seguir deu metade ao mais velho, $\frac{1}{3}$ ao segundo e $\frac{1}{9}$ ao terceiro, depois do que retirou o camelo emprestado. Como se explica esta nova partilha?

A explicação é fácil de dar, porque a soma das três fracções $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9}$ ou $\frac{17}{18}$ é menos que a unidade; por conseqüência admitindo a operação possível, se tivessem tomado $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{9}$ de 17, a partilha não seria completa, enquanto que tomando $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{9}$ de 18 obtém-se para soma 17; cumpre-se assim a vontade do testador e pode-se entregar o camelo emprestado.

16.º Uma torneira deita $5\ 1/2$ litros de água por minuto; em quantos minutos encherá uma vasilha, que tenha $250\ 1/3$ litros de capacidade?

R.: $45 \frac{6}{11}$

17.º Num quilograma de água do mar há $\frac{9}{100}$ quilogramas de sal. Que pêso de água do mar se há-de empregar para obter $256 \frac{3}{5}$ de sal?

R.: 2851 quilogramas $\frac{1}{9}$

Potenciação de fracções

27 — *Potenciação de fracções* — Qualquer potência de uma fracção é igual a outra fracção, cujos termos são as potências do mesmo grau dos termos correspondentes da fracção proposta, isto é, para elevar uma fracção a uma potência é necessário elevar tanto o numerador como o denominador a essa potência.

Assim a fracção:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{3^4}{4^4} = \frac{81}{256}$$

É o que já se tinha dito a propósito do cociente de duas potências do mesmo expoente, que já sabíamos ser igual ao cociente das bases elevadas ao mesmo expoente.

$$18^4 : 6^4 = (18 : 6)^4$$

Não se deve confundir a potência de algum dos termos duma fracção com a potência duma fracção. Assim

$$\frac{4^2}{5} = \frac{16}{5}$$

$$\frac{4}{5^2} = \frac{4}{25}$$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{4^2}{5^2} = \frac{16}{25}$$

CAPÍTULO II

Raíz quadrada

28 — Chama-se *quadrado* de um número o produto dos factores iguais a êsse número. Assim o quadrado de 5 é 5×5 ou 25, o de 12 é 12×12 ou 144.

Chama-se raíz quadrada de um número um segundo número, que multiplicado por si mesmo, reproduz o primeiro.

Assim a raíz quadrada de 25 é 5 porque $5 \times 5 = 25$, e a raíz quadrada de 144 é 12.

Indica-se uma raíz quadrada a extraír a um número pelo sinal $\sqrt{\quad}$, chamada *radical;* assim $\sqrt{4}$ indica que é preciso extraír a raíz quadrada ao número 4.

Extracção da raíz quadrada a um número inteiro

29 — *Raíz quadrada de um número menor que 100.*

Tomemos os quadrados dos 10 primeiros números inteiros:

Números	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Quadrados	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

Por êste quadro será fácil obter a raíz quadrada de um número menor que 100 e assim vemos que a raíz quadrada de 16 é 4, que a raíz quadrada de 81 é 9, etc. Mas, se o número dado não estiver no quadro, como por exemplo o número 53, êste fica contudo compreendido entre dois, 49 e 64, e a sua raíz quadrada ficará pois entre

7 e 8 ; será 7 e mais uma parte, que é menor que a unidade. Portanto vemos que a raíz quadrada de 53 não se pode calcular senão aproximadamente.

Ficamos, pois, sabendo que há números, de que se pode obter exactamente a raíz quadrada; êsses são chamados *quadrados perfeitos*. Assim, 49 é um quadrado perfeito; 59 não é quadrado perfeito, porque não há número, que elevado ao quadrado produza 59.

Quando se extrai a raíz quadrada a um número, como 59, que não é quadrado perfeito, procura-se a raíz do maior quadrado contido no número. Ora o maior quadrado perfeito contido em 59 é 49 e a raíz quadrada do maior quadrado perfeito contido em 59 é 7. Ora 7 é pois a parte inteira da raíz quadrada de 59.

30 — *Raíz quadrada de um número maior que 100.*

Suponhamos que pretendemos extraír a raíz quadrada ao número 8669754.

√8'66'97'54	2944		
4	49	584	5884
46.6	9	4	4
441	441	1336	23536
259.7			
2336			
2615.4			
23536			
2618			

1.° Divide-se o número em grupos de dois algarismos, a partir da direita, podendo o último grupo da esquerda ter apenas um único algarismo, que no nosso caso é 8.

2.° Extrai-se a raíz quadrada do primeiro grupo da esquerda 8, e obtém-se assim o primeiro algarismo 2 da raíz. Eleva-se êste algarismo ao quadrado, subtrai-se êste quadrado 4, do primeiro grupo; à direita da diferença 4, escreve-se o grupo seguinte 66 e assim óbtemos o primeiro resto 466.

3.° Separa-se com um ponto o algarismo das unidades do número resultante e divide-se a parte dêste número 46, que fica à esquerda do ponto, pelo dôbro da raíz achada. O cociente obtido será o segundo algarismo da raíz ou um número grande de mais.

4.° Para verificar escreve-se o algarismo achado, 9, à direita do dôbro, 4, da raíz achada e multiplica-se o número resultante 49 pelo mesmo cociente 9. Se o produto 441 obtido fôsse maior que o resto 466, o algarismo 9 era muito grande e experimentava-se outro menor.

Aplicava-se o mesmo processo. Diminui-se então o produto achado 441 do primeiro resto 466 e ao lado da diferença, 25, escreve-se a terceira classe 97.

5.º O algarismo 9 é o segundo algarismo da raíz. Separa-se com um ponto o algarismo 7, da direita do segundo resto. Divide-se o número 259, que fica para a esquerda do ponto, pelo dôbro 58 da raíz achada. O cociente obtido 4 é o terceiro algarismo da raíz, ou um número que é grande de mais e se verifica primeiro, como já se disse (n.º 4).

E assim se continua a operação até se terem baixado todos os grupos de dois algarismos, em que se decompôs o número. Se em alguma das divisões parciais o cociente fôr nulo, escrever-se-á zero na raíz e baixar-se-á a classe imediata.

Completando a operação, achamos o número 2944 para raíz quadrada do número 8669754, dando o resto 2618. Êste resto indica que o número dado não é quadrado perfeito.

Se o resto da operação fôr zero, o número dado é quadrado perfeito e a raíz obtida é exacta. Se o resto da operação não fôr zero, a raíz achada é a raíz do número proposto a menos de uma unidade, e êsse resto é o excesso do número dado sôbre o maior quadrado nêle contido.

31 — *Observação* — O resto da operação não pode exceder o dôbro da raíz e nenhum dos restos sucessivos pode exceder o dôbro da parte já achada da raíz.

32 — Na prática fazem-se mentalmente as subtracções, como sucede na divisão e o cálculo tem a forma seguinte:

$\sqrt{45'29'29}$	673	
92.9	127×7	1343×3
402.9		
0		

33 — Para tirar a prova à operação eleva-se ao quadrado a raíz achada e soma-se a êste quadrado o resto da operação.

A soma deve ser igual ao número proposto. E' o que se pode fàcilmente verificar nos exemplos antecedentes.

Raíz quadrada dum número decimal

34 — *Se o número das casas decimais é par, extrai-se a raíz quadrada, não fazendo caso da vírgula, como se o número proposto*

fôsse inteiro; e na raíz assim obtida, separa-se para dízima metade do número de casas decimais que tem o número dado.

Se o número de casas decimais fôr ímpar, acrescenta-se um zero ao número proposto e aplica-se depois a regra.

Exemplo:

Extraír a raíz quadrada ao número 27588,107; extraímos a raíz quadrada como se êste número fôsse inteiro. A operação dispõe-se assim:

$\sqrt{2'75'88{,}10'70}$	166,09		
1	26	326	33209
17.5	6	6	9
156	156	1956	298881
198.8			
1956			
32107.0			
298881			
2,2189			

E, como o número dado tem 4 algarismos decimais, separamos na raíz achada 2 algarismos para dízima e resultará 166,09. E' esta a raíz quadrada do número dado, avaliado até às centésimas.

35 — A raíz quadrada dum número inteiro, que não fôr quadrado perfeito, pode obter-se com uma, duas ou mais casas decimais. Coloca-se para isto uma vírgula à direita da casa das unidades, e à direita da vírgula um número de zeros igual ao dôbro das casas decimais, que quisermos na raíz. Ao número resultante aplica-se a regra da extracção da raíz quadrada dos números decimais.

Exemplo: achar a raíz quadrada de 53, avaliada até às centésimas.

Como pretendemos duas casas decimais na raíz, acrescentaremos 4 zeros à direita de 53 e extraïremos a raíz quadrada ao número 53,0000; obteremos 7,27, que é a raíz quadrada de 53 avaliada até às centésimas; isto é, com um êrro menor que uma centésima.

36 — O mesmo processo se aplica para obter a raíz quadrada dum número decimal até uma dada casa decimal. Exemplo: avaliar a raíz quadrada do número 5,6 até às centésimas. Como pretendemos que a raíz tenha 2 casas decimais, fazemos com que o número dado 5,6 tenha 4 algarismos decimais, o que se consegue escrevendo 3 zeros à sua direita. Resulta pois 5,6000. Extraíndo agora a raíz quadrada a êste número, obteremos a raíz quadrada de 5,6 avaliada até às centésimas.

EXERCÍCIOS

1.º Extraír a raíz quadrada dos números:

169; 5329; 61009; 457276; 737881

R.: 13; 73; 247; 67~~4~~6; 859

2.º Extraír a menos de 0,1 a raíz quadrada dos números

913894; 1234589; 31488945

R.: 955,9; 1111,1; 5611,5

3.º Extraír a raíz quadrada aos números:

167,9616; 39,15380329; 0,042849

R.: 12,96; 6,25673; 0,207

4.º Calcular a menos de 0,01 a raíz quadrada dos números:

36,14; 581,2794; 167,036

R.: 6,01; 24,10; 12,92

5.º Calcular a menos de 0,00001 a raíz quadrada dos números 2, 3 e 5.

R.: 1,41421; 1,73205; 2,23606

CAPÍTULO III

Números complexos

37 — *Os números complexos* são os números concretos, que se compõem de unidades de espécies diferentes ligadas entre si por uma relação determinada. Assim por exemplo: $2^d\ 10^h\ 7^m$ (2 dias 10 horas e 7 minutos) é um número complexo, porque se compõe de unidades de diferentes espécies: dia, hora, minuto, tendo estas unidades uma relação conhecida. O dia é igual a 24 horas e a hora igual a 60 minutos.

A menor das unidades de que o número se compõe chama-se *unidade de ínfima espécie*. No exemplo citado o minuto é a unidade de ínfima espécie.

Número incomplexo é o número concreto que contém uma só espécie de unidades, por exemplo, 5 horas.

Transformação de números complexos

38 — Chama-se relação de duas unidades, ao número de unidades menores necessárias para prefazer a unidade de espécie maior. Assim a relação entre a hora e o minuto será 60, porque são necessários 60 minutos para prefazer uma hora.

39 — *Redução dum número incomplexo a outro.* Pode-se converter um dado número de unidades duma certa espécie em outras de espécies diferentes.

Quando se deseja converter um dado número de unidades em outras de espécie menor, multiplica-se o número dado pela relação que houver entre as unidades. Assim, quando se queira reduzir 10 libras a schelings (moeda inglesa), isto é, para saber quantos schelings equivalem a 10 libras, multiplicamos 10 por 20 (relação entre a libra e o scheling). O produto 200 é o número de schelings equivalente a 10 libras. Convertem-se 10 horas em minutos, multiplicando 10 por 60, o que dá 600 minutos.

Quando se deseje converter um dado número de unidades em outras de espécie maior, divide-se o número dado pela relação das duas unidades.

Por exemplo, para converter 60 schelings em libras divide-se por 20 (relação entre a libra e o scheling). O cociente 3 representa o número de libras equivalentes a 60 schelings. Da mesma forma o número de horas equivalente a 360 minutos será 6, visto que é êste o cociente de 360 pela relação existente entre a hora e o minuto.

40 — *Redução dum número complexo à ínfima espécie.* Convertem-se as unidades da espécie imediatamente inferior, e ao resultado adicionam-se as unidades desta espécie ; pratica-se o mesmo com as unidades desta soma e assim sucessivamente até se terem adicionado as unidades da ínfima espécie.

Por exemplo, reduzir à ínfima espécie o número $10^d\ 20^h\ 26^m$ (10 dias 20 horas e 26 minutos) :

$$\begin{array}{rr}
 & 10 \times 24 \\ \hline
 & 240^h \\
 & 20^h \\ \hline
 & 260^h \\
 & \times\ 60^m \\ \hline
 & 15600^m \\
 & 26^m \\ \hline
10^d\ 20^h\ 26^m = & 15626^m
\end{array}$$

Vejamos outro exemplo : Reduzir à ínfima espécie 5 libras, 18 schelings e 10 dinheiros.

$$\begin{array}{rr}
 & 5 \times 20 \\ \hline
 & 100^{sh} \\
 & 18 \\ \hline
 & 118^{sh} \\
1 \text{ scheling} = & 12^d \\ \hline
 & 236 \\
 & 118 \\ \hline
 & 1416^d \\
 & 10^d \\ \hline
 & 1426^d
\end{array}$$

Reduzindo 5 £ a schelings, multiplicamos 5 por 20, pois que 1 libra vale 20 schelings e achamos 100, a que somamos 18 ^{sh} e obteremos 118^{sh}.

Multiplicamos êste número por 12, relação entre o scheling e o dinheiro e obtemos 1416 dinheiros. E juntando 10 dinheiros, resulta 1426 dinheiros.

41 — *Reduzir um número complexo a incomplexo*, referido a uma dada espécie de unidade. Reduz-se primeiro o número dado à ínfima espécie, e converte-se o número assim obtido em unidades da espécie pedida, conforme já dissemos anteriormente. Por exemplo: queremos converter $6^d\ 10^h\ 30^m\ 40^s$ (6 dias, 10 horas, 30 minutos e 40 segundos) num número incomplexo reduzido à unidade hora, isto é, procurar o número de horas, que equivalha àquele número complexo. Reduzimos primeiro o número à ínfima espécie

$$
\begin{array}{r}
6^d \\
24^h \\
\hline
144^h \\
10^h \\
\hline
154^h \\
60^m \\
\hline
9240^m \\
30^m \\
\hline
9270^m \\
60^s \\
\hline
556200^s \\
40^s \\
\hline
556240^s
\end{array}
$$

e obteremos $6^d\ 10^h\ 30^m\ 40^s = 556240^s$.

Convertemos agora êste número de segundos em horas, para o que basta dividi-lo por 3600 (relação entre a hora e o segundo) e teremos $\frac{556240}{3600}$ horas, e, extraíndo os inteiros dêste quebrado, $154\frac{184}{360}$ horas.

42 — *Reduzir um número incomplexo a complexo*. Temos a considerar três casos, segundo o número dado fôr inteiro, quebrado ou decimal.

1.º *Reduzir um incomplexo inteiro a complexo.* Extraem-se do número dado as unidades imediatamente superiores, destas extraem-se as seguintes e assim sucessivamente.

Exemplo I : Reduzir 556240 segundos de tempo a complexo.

556240^s	60		
162	9270	60	
424	327	154	24
040^s	270	10^h	6^d
	30^m		

O número dado reduzido a complexo dá $6^d\ 10^h\ 30^m\ 40^s$.

Exemplo II : Reduzir 8515 dinheiros esterlinos (pence) a complexo. Sabe-se que uma libra esterlina contém 20 schelings e cada scheling 12 dinheiros.

8515^d	12	
115	709	20
07^d	108	35 £
	08^{sh}	

8515 dinheiros são pois equivalentes a 30 £ 8^{sh} 19^d .

2.º *Reduzir um incomplexo quebrado a complexo.* Divide-se o numerador pelo denominador, depois de reduzir o primeiro à espécie imediatamente inferior, se fôr necessário, e procede-se do mesmo modo com o resto da divisão.

Exemplo I. Reduzir $\frac{2546}{128}$ da libra esterlina a complexo.

2546	128
1266	19 £ 17^{sh} 9^d $^3/_4$
114 × 20^{sh}	
2280^{sh}	
1000	
104 × 12^d	
1248^d	$\frac{96}{128} = \frac{3}{4}$
96	

Exemplo II. Converter em número complexo $\frac{6}{22}$ da circunferência.

$$
\begin{array}{rl|l}
 & 6 & \\
\text{a circunferência} = & 360 & \\
\hline
 & 2160^{\circ} & 22 \\
\cline{3-3}
 & 180 & 98^{\circ}\ 10'\ 54''\ {}^{6}/_{11} \\
 & 04^{\circ} & \\
1^{\circ} = & 60' & \\
\cline{2-2}
 & 240' & \\
 & 20' & \\
1' = & 60'' & \\
\cline{2-2}
 & 1200'' & \\
 & 100 & \\
 & 12 & \\
\end{array}
$$

Por conseguinte $\frac{6}{22}$ da circunferência valem $98^{\circ}\ 10'\ 54''\ 6/11$.

3.º *Reduzir um incomplexo decimal a complexo.* Multiplica-se a fracção decimal pela razão que houver entre a unidade que ela representa e a imediatamente inferior, e procede-se do mesmo modo com a fracção decimal do produto e assim sucessivamente. O número complexo que se pretende achar é formado pelas partes inteiras dos diversos produtos efectuados.

Exemplo I — Reduzir a complexo 0,565 do ano:

$$
\begin{array}{r}
0{,}565 \times 12^{\text{mes}} \\
\hline
1130 \\
565 \\
\hline
6{,}780
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
0{,}78 \\
30^{\text{d}} \\
\hline
23{,}40
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
0{,}4 \\
24^{\text{h}} \\
\hline
9{,}6
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
0{,}6 \\
60^{\text{m}} \\
\hline
3{,}60
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
0{,}6 \\
60^{\text{s}} \\
\hline
3{,}60
\end{array}
$$

As partes inteiras dão $6^{\text{mes}}\ 23^{\text{d}}\ 9^{\text{h}}\ 3^{\text{m}}\ 3^{\text{s}}$ sobejando aínda 0,6 de segundo.

Operações sôbre números complexos

43 — *Adição* — Para somar números complexos, escrevem-se as parcelas umas debaixo das outras, de modo que as unidades da mes-

ma espécie fiquem na mesma coluna. Somam-se as unidades de cada coluna, a começar pelas da ínfima espécie; se a soma não chega a uma unidade da ordem imediatamente superior, escrevem-se na soma as unidades achadas; se contiver porém unidades de ordem superior, extraem-se essas unidades para se somarem com as da coluna seguinte.

Exemplo :

	20^d	3^h	5^m
	12	10	20
3^{mes}	—	6	10
	10	15	5
4^{mes}	13^d	10^h	40^m

Somando as unidades da ínfima espécie, encontramos 40^m; a soma da 2.ª coluna dá 34^h, mas como êste número prefaz 1^d e 10^h, escreveu-se o 10 por debaixo da 2.ª coluna e adicionou-se 1^d à coluna seguinte. A soma da 3.ª coluna com esta adição deu 43, tirando 30 dias, para prefazer 1 mês, à 4.ª coluna ficam 4 meses.

44 — *Subtracção.* Para subtraír números complexos escreve-se o menor debaixo do maior, de forma que as unidades da mesma espécie fiquem na mesma coluna. Faz-se depois a subtracção em cada uma das colunas, a começar pelas da ínfima espécie. Quando nalguma coluna o número da linha inferior é maior que o da superior tantas unidades, quantas prefazem a unidade da ordem imediata, e quando se passar à seguinte coluna, junta-se uma unidade ao número da linha inferior.

Exemplo:

50^o	$25'$	$30''$
20^o	$27'$	$32''$
29^o	$57'$	$58''$

Começando pelas unidades da ínfima espécie, temos de subtraír $32''$ de $30''$, o que não é possível. Temos pois de juntar $60''$ a $30''$ e subtraïremos $32''$ de $90''$, o que dá um resultado de $58''$ que escrevemos na coluna dos segundos. Como acrescentamos $60''$ ou $1'$ ao número maior, devemos acrescentar $1'$ ao subtractivo e assim temos de subtraír $28'$ de $25'$. Como o subtractivo é aínda menor que o aditivo, temos de adicionar $60'$ a $25'$ e da soma $85'$ subtraïremos $28'$ e restarão

57′. Na coluna seguinte temos de juntar também ao subtractivo 1 grau e teremos de subtraír 21° de 50°, o que dá o resultado de 29°, A diferença dos dois números dados é 29° 57′ 58″.

45 — *Multiplicação*. Sempre que seja preciso fazer uma multiplicação de complexos é fácil ver qual dos factores é o multiplicador, e qual é a sua unidade principal.

Na multiplicação de complexos devemos aínda distinguir dois casos:

1.° Multiplicação dum número complexo, por outro incomplexo.

2.° Multiplicação de dois números complexos.

1.° caso: Para multiplicar um número complexo por outro incomplexo, multiplica-se o segundo por cada uma das partes do primeiro e extraem-se parciais as unidades superiores para as juntar aos produtos parciais seguintes.

Exemplo: Quanto custam 5 toneladas de enxôfre, sabendo que cada tonelada importa em 5£ 12^{sh} 8^{d}?

5 £	12^{sh}	$8^{d} \times 5$	
25	60	40	12
3	3	4^{d}	3^{sh}
28 £	63	20	
	3^{sh}	3 £	

O resultado é de 28£ 3^{sh} 4^{d}.

Multiplicámos 5 por 8 e deu 40 dinheiros, dividimos êste número por 12 dinheiros, para reduzir a schelings e deu no cociente 3^{sh} e no resto 4 dinheiros. Os 3^{sh} juntam-se à unidade da mesma espécie, na 2.ª coluna, que dá 63^{sh}, divide-se por 20 para se reduzir a libra, pois, como se sabe, cada libra vale 20 schelings; obtiveram-se 3 £ e 3^{sh}; juntam-se as libras ao produto 25.

2.° caso: Para multiplicar dois números complexos, pode reduzir-se o multiplicador a incomplexo referido à unidade principal e operar depois como no caso antecedente.

Exemplo: Quanto custam 15 arrobas e 10 quilogramas de alumínio custando cada kg. 1£ 5^{sh} 10^{d}?

Como a unidade principal neste caso é o quilograma, reduzindo 15 arrobas e 10 quilogramas a esta unidade, obteremos 235 kg. Multiplicamos 1 £ 5^{sh} 10^{d} por 235 e teremos:

1£	5^{sh}		$10^{d} \times 235$	
235	1175		2350	12
68	195		115	
303	1370	20	70	
	170	68£	10	
	10			

Custam 303 £ 10^{sh} 10^{d} .

Quando o multiplicador reduzido à sua unidade principal fôr fraccionário, é preferível reduzir o multiplicando à ínfima espécie, efectuar a seguir a multiplicação e extraír as unidades de espécie maior.

Exemplo: Um negociante perde por dia 1 £ 10^{sh}. Quanto terá perdido em 10^{d} 20^{h} 30^{m} ?

Para se resolver o problema, temos de repetir 1£ 10^{sh} tantas vezes, quantos são os dias contidos em 10^{d} 20^{h} 30^{m}. Devemos efectuar uma multiplicação, em que o multiplicando é 1 £ 10^{sh} e o multiplicador 10^{d} 20^{h} 30^{m}, sendo o dia a unidade principal. Reduzimos o multiplicador à sua unidade principal, dia, (reduzindo a minutos, achamos 15630^{m} e dividindo êste número por 1440^{m} contidos em um dia obtemos $\frac{15630}{1440}$). É por êste número que devemos multiplicar 1£ 10^{sh}. Reduzindo êste número à ínfima espécie, teremos 30^{sh} e efectuando a multiplicação

$$30^{sh} \times \frac{15630}{1440} = \frac{30 \times 15630}{1440} \text{ ou simplificando } 325 \frac{90^{sh}}{144}$$

Extraíndo dêste número as unidades de espécie maior teremos finalmente 16£ 5^{sh} $\frac{90}{144}$.

É êste o prejuízo que o negociante tem em 10^{d} 20^{h} 30^{m}.

Dêste exemplo se deduz a

Regra para multiplicar números complexos

Vê-se qual dos factores é o multiplicador e qual a sua unidade principal. Reduz-se o multiplicador à sua unidade principal, e por êle se multiplicam as diferentes partes do multiplicando, a começar pelas de ínfima espécie. De cada produto parcial se extraem as unidades da ordem imediata, as quais se juntam ao produto parcial seguinte.

Se o multiplicador reduzido à sua unidade principal fôr fraccionário será preferível reduzir o multiplicando à ínfima espécie e efectuar depois o produto, o qual exprimirá unidades da ínfima espécie do multiplicando, e do qual se extraïrão as unidades de espécie maior.

46 — *Divisão.* Temos de considerar três casos seguintes:

1.º *Divisão de complexos por incomplexos.* Efectua-se fazendo a divisão sucessiva das diferentes unidades do dividendo pelo divisor, começando pelas unidades maiores.

Exemplo: Compraram-se 12 metros de pano por 20 £ 18^{sh} e 10^{d}. A como saíu cada metro?

$$
\begin{array}{l|l}
20\,£ \quad 18^{sh} \quad 10^{d} & \quad 12 \\
\cline{2-2}
\quad\; 8 \times 20 & 1\,£\ 14^{sh}\ 10^{ds}\ 10/12 \\
\cline{1-1}
160 & \\
\;\;18 & \\
\cline{1-1}
178 & \\
\;\;58 & \\
\;\;10 \times 12 & \\
\cline{1-1}
120 & \\
\;\;10 & \\
\cline{1-1}
130 & \\
\;\;10 &
\end{array}
$$

2.º *Divisão de complexos de natureza diferente.* Reduz-se o divisor a incomplexo, reduzido à unidade principal, multiplica-se depois o dividendo pelo denominador do quebrado resultante e divide-se depois o produto obtido, pelo numerador do mesmo quebrado.

Exemplo: Um percurso de $10^{h}\ 50^{m}\ 30^{s}$ num taxímetro custou 5 £ 12^{sh} e 10^{d}; quanto se pagou por cada hora?

$5\,£\ 12^{sh}\ 10^{d} : 10^{h}\ 50^{m}\ 30^{s} = £\ 5 - 12 - 10 : \frac{39030}{3600}$; reduzimos o divisor a segundos e dividimos por 3600 segundos contidos numa hora.

Multiplica-se o dividendo pelo denominador e divide-se pelo numerador: $£\ 5 - 12 - 10 \times \frac{3600}{39030}$

Tipo do cálculo:

$$
\begin{array}{lllll}
5\,£ & 12^{sh} & & 10 \times 3600 & \\
\hline
18000 & 43200 & & 36000 & \underline{\;12\;} \\
\underline{\;2310\;} & \underline{\;3000\;} & & 00 & 3000^{sh} \\
20310 & 40200 & \underline{\;20\;} & & \\
 & 062 & 2310\,£ & & \\
 & 020 & & & \\
 & 000 & & & \\
\end{array}
$$

Temos agora de dividir 20310 £ por 39030, o que não é possível para que nos dê um número inteiro; mas reduzimos as libras a schelings e temos, multiplicando por 20

$$20310 \times 20 = 406200$$

$$
\begin{array}{r|l}
406200 & \underline{\;39030\;} \\
15900 & 10^{sh} \quad 2^{d} \\
\underline{\;12^{d}\;} & \\
31800 & \\
\underline{\;5900^{d}\;} & \\
90800 & \\
12740 & \\
\end{array}
$$

Por cada hora pagaram-se 10^{sh} e 2^{d}.

Exemplo II — Compraram-se 25 pipas, 15 almudes e 6 canadas de vinho, por £ 300 — 12 — 10; a como saíu cada pipa?

$$£\,300 - 12 - 10 : 25^{p}\,15^{alm}\,6^{can} = £\,300 - 12 - 10 : \frac{6486^{can}}{252}$$

A pipa tem 25 almudes e o almude 12 canadas. Reduzimos o dividendo a canadas e divide-se o número total de canadas ou sejam 6436 pelo número de canadas contidas em uma pipa ou sejam 252, para assim se reduzir à unidade principal, que é aqui a pipa.

Tipo do cálculo:

```
 300£        12sh              10d × 252
 ------------------------------------------
 75600      3024               2520  | 12
   152        21                 12  |----
 -----     ----- | 20                 21
 75752      3045 |-----
             104  152 £
              45
              05
```

```
 75752 £          5sh   |  6486
 10892                  |-------------------
   4406 × 20              11 £  13sh  7d
 -----------
 88120
     3
 -----
 88123
 23263
   3805 × 12
 -----------
 ·45660
    258
```

Ficou cada pipa a 11 £ 13^{sh} e 7^{d}.

3.° *Divisão de complexos da mesma natureza.* Reduz-se tanto o dividendo como o divisor à ínfima espécie e depois pratica-se a divisão, como nos números inteiros.

Exemplo: Quantas pipas de vinho se podem comprar com £ 355 — 10 — 8 sendo o custo de cada pipa £ 12 — 11 — 7?

$$\frac{\text{£ } 355 - 10 - 8}{\text{£ } 12 - 11 - 7} = \frac{85328}{3019} = 28 \text{ pipas}$$

EXERCÍCIOS

1.° Reduzir à ínfima espécie os seguintes números:

$(24^{d}\ 20^{h}\ 6^{m})$ $(50\,\text{£}\ 10^{sh}\ 10^{d})$ $(52^{\circ}\ 10'\ 30'')$
$(14^{p}\ 12^{alm}\ 5^{can})$ $(12^{d}\ 17^{h}\ 26^{m}\ 30^{s})$

R.: 35766^{m}; 12130^{d}; $187830''$; 3677^{can}; 1099590^{s}

2.º Reduzir à unidade hora o número $3^d\ 12^h\ 38^m\ 50^s$; à unidade minuto o número $3^o\ 36'\ 15''$; à fracção decimal da hora 23^m 33^s; à unidade scheling o número $13\,£\ 5^{sh}\ 14^{pen}$; à unidade almude $10^p\ 12^{alm}\ 10^{can}$.

R.: $84\,\dfrac{2330}{3600}$ horas; $216\left(\dfrac{15}{16}\right)'$ $0,^h3925$; $265^{sh}\,\dfrac{10}{12}$;

$222\,\dfrac{10}{12}$ alm.

3.º Exprimir em fracção da circunferência os arcos $50^o\ 10'\ 20''$; $55'\ 50''$; em fracções da libra $15^{sh}\ 10^{pen}$.

R.: $0^o,139$; $0^o,0025$; $0,£\,791$.

4.º Converter em complexos os números 584692^s; $5856''$, 30550^{pen}; $\dfrac{3}{11}$ da circunferência; $\dfrac{8749}{11}$ da hora; $\dfrac{1}{6}$ da libra $0,^£625$.

R.: $6^d\ 18^h\ 24^m\ 52^s$; $1^o\ 37'\ 36''$; $127£\ 5^{sh}\ 10^{pen}$; 98^o $10'\ 54''$; $795^h\ 21^m\ 49^s$ ou $33^d\ 3^h\ 21^m\ 49^s\,\dfrac{1}{11}$; $3^{sh}\ 4^{pen}$; $12^{sh}\ 6^{pen}$.

5.º Adicionar os números: $23^h\ 22^m\ 42^s$, $16^h\ 10^m\ 53^s$, $19^h\ 34^m$ 39^s; $7^{mes}\ 20^d\ 16^h\ 48^m\ 10^s$, $1^{mes}\ 25^d\ 20^h\ 56^m\ 12^s$, $29^d\ 22^h\ 16^m\ 15^s$; $10\,£\ 11^s\ 5^d\ {}^3/_4$, $£\ 9 - 17 - 2\ {}^5/_8$; $£\ 1 - 18 - 1\ {}^{15}/_{16}$.

R.: $59^h\ 8^m\ 14^s$; $10^{mes}\ 16^d\ 12^h\ 0^m\ 37^s$; $£22-6-10\ {}^5/_{16}$.

6.º Do arco $55^o\ 30'\ 50''$ subtraír $30^o\ 40'\ 55''$; de $10^d\ 4^h\ 2^m$ subtraír $2^d\ 6^h\ 50^m$; de $50\,£\ 10^{sh}\ 5^d$ subtraír $4£\ 10^{sh}\ 11^d$.

R.: $24^o\ 49'\ 55''$; $7^h\ 21^m\ 12^s$; $49\,£\ 29^{sh}\ 17^{ds}$.

7.º Um indivíduo recebeu $50\,£$ e fez várias compras, pagando $10^{sh}\ 15^d$, $3^£\ 4^{sh}\ 2^d$ e $10^£\ 5^{sh}\ 4^d$. Quanto lhe restou?

R.: A quantia gasta foi de $14^£\ 9^d$. Restou $35^£\ 19^{sh}\ 3^d$.

8.º Um viajante fez o percurso de automóvel, entre duas localidades, em três *etapes*. Na primeira gastou 2^h e 10^m; na 2.ª 5^m e 40^s e na 3.ª atingiu a localidade depois de gastar 1^h e 15^m. O carro levou uma velocidade média de 50 quilómetros à hora; quantos quilómetros distavam as duas localidades?

R.: $175^{km},555$

9. O comandante duma diligência de 10 praças recebeu por cada uma 3^{sh} 5^d por dia, para uma permanência de 30 dias numa localidade. Comprou 5 almudes e 10^{can} de vinho a 10^d cada canada; 110 arrobas e 12^{kg} de lenha a 5^d cada arroba; 10 arrobas de carne a 1^{sh} 5^d cada quilograma e o restante dividiu pelas praças. Qual foi a quantia distribuída e quanto pertenceu a cada praça?

R.: Recebido 51 £ 5^{sh}. Distribuído 8496^d ou 35 £ 8^{sh}; a cada praça pertenceram 3 £ 10^{sh} 9^{ds}.

10.º Um destacamento de 50 praças consumiu durante um mês 24 almudes e 10 canadas de vinho ao preço de 1$50 cada canada. Quanto teve de pagar?

R.: 44$70

11.º Se uma pipa de vinho custar £ 12 — 15 — 10, quanto custam 20 pipas?

R.: £ 255 — 16 — 8

12.º Custando 20 pipas de vinho £ 255 — 16 — 8, quanto custou cada pipa?

R.: £ 12 — 15 — 10

13.º — Compraram-se 35^p 17^{alm} e 10^{can} de vinho por £ 400 — — 16 — 11; a como custou cada pipa?

R.: £ 11 — 3 — 7

14.º Um relógio atraza-se 1^h 23^m 15^s em 1 mês, 6 dias e 14 horas. Quanto se atraza por dia ?

R.: $2^m\ 16^s \frac{472}{878}$.

15.º Comprou-se uma porção de vinho por 173 £ 15^{sh} e 10^{pen} ; cada pipa custou 32 £ 5^{sh}. Quantas pipas se compraram ?

R.: $5^p\ 9^{alm}\ 7^{can}$.

CAPÍTULO IV

Razões e proporções

Chama-se *razão aritmética* à expressão que indica a diferença de dois números. Assim 7 — 2 é uma razão aritmética. Os dois números são os *têrmos* da razão; o primeiro é o *antecedente*, o segundo o *conseqüente.*

Na diferença 7 — 5, 7 é o antecedente e 5 o conseqüente.

Chama-se *proporção aritmética* ou *eqüidiferença* à igualdade entre duas diferenças.

Por exemplo:

$$7 - 5 = 6 - 4$$

é uma eqüidiferença. Os antecedentes das duas diferenças (7 e 6) são os *antecedentes* da eqüidiferença; os conseqüentes das duas diferenças são os *conseqüentes* da eqüidiferença (5 e 4). O primeiro antecedente e segundo conseqüente são os *extremos* (7 e 4); o primeiro conseqüente e o segundo antecedente são os *meios* (5 e 6) da eqüidiferença.

Quando os meios são iguais, a eqüidiferença diz-se *contínua* e qualquer dêles diz-se o *meio aritmético* dos dois números que formam os extremos da eqüidiferença.

Assim no caso:

$$9 - 5 = 5 - 1$$

é uma eqüidiferença contínua, e 5 é o meio aritmético de 9 e 1.

Propriedades das eqüidiferenças

1.º Em tôda a eqüidiferença a soma dos meios é igual à soma dos extremos.

$$14 - 7 = 12 - 5$$
$$12 + 7 = 19 \text{ e } 14 + 5 = 19$$

2.º Qualquer meio duma eqüidiferença é igual à soma dos extremos menos o outro meio; e qualquer extremo é igual à soma dos meios menos o outro extremo.

$$14 - 7 = 12 - 5$$

o meio $12 = 14 + 5 - 7$, o extremo $5 = 12 + 7 - 14$.

3.º O meio de uma eqüidiferença contínua é igual à semi-soma dos extremos.

Assim na eqüidiferença contínua:

$$14 - 12 = 12 - 10$$

$$12 = \frac{14 + 10}{2}$$

Observação. Das propriedades antecedentes conclui-se que a *média aritmética* de dois números é igual à sua semi-soma. Assim a média aritmética de 14 e 10 é 12.

A *média aritmética* de qualquer grupo de números inteiros acha-se dividindo a sua soma pelo número dêles.

Em qualquer eqüidiferença é permitido trocar os meios e trocar as diferenças.

Seja a eqüidiferença:

$$10 - 6 = 8 - 4$$

trocando os meios fica-nos:

$$10 - 8 = 6 - 4$$

que é a eqüidiferença anterior, com os meios trocados, e também

$$8 - 4 = 10 - 6$$

que é a mesma eqüidiferença, com as diferenças trocadas.

Em qualquer eqüidiferença é permitido adicionar ou subtraír o mesmo número: 1.º a ambos os antecedentes; 2.º a ambos os conseqüentes; 3.º a todos os têrmos.

Seja a eqüidiferença:

$$10 - 8 = 6 - 4$$
$$(10 + 5) - 8 = (6 + 5) - 4$$
$$10 - (8 + 5) = 6 - (4 + 5)$$
$$(10 + 5) - (8 + 5) = (6 + 5) - (4 + 5)$$

pois que nestas igualdades se verifica que a soma dos meios é igual *à* soma dos extremos.

Razões e proporções geométricas

Chama-se *razão geométrica* ou simplesmente *razão* ao cociente de dois números; 10 : 2 é uma razão. Os dois números são os têrmos da razão: o dividendo é o *antecedente*, o divisor o *conseqüente*.

Uma razão diz-se *inversa* da outra, quando o antecedente de uma é o conseqüente da outra, e reciprocamente. Assim 10 : 6 e 6 : 10 são razões inversas uma da outra. E' evidente que o produto de duas razões inversas é igual à unidade.

Assim por exemplo:

$$\frac{10}{6} \times \frac{6}{10} = 1$$

Proporção geométrica ou simplesmente proporção é a igualdade entre duas razões. Assim:

$$\frac{12}{3} = \frac{16}{4}$$

é uma proporção, que também se costuma escrever:

$$12 : 3 :: 16 : 4$$

e lê-se: 12 está para 3, como 16 está para 4. A proporção tem quatro têrmos. Os antecedentes e os conseqüentes das duas razões dizem-se os *antecedentes* e os *conseqüentes* da proporção.

Dos quatro têrmos da proporção, o primeiro e o quarto são os *extremos;* o segundo e o terceiro os *meios*. Assim na proporção anterior 12 e 16 são os antecedentes; 3 e 4 são os conseqüentes; 12 e 4 os extremos; 3 e 16 os meios. Quando se dá à proporção a forma fraccionária, os antecedentes são os numeradores dos quebrados e os conseqüentes os denominadores.

Quando os meios são iguais a proporção diz-se contínua, e qualquer dêles é o *meio geométrico* dos dois números que formam os extremos da proporção. Assim por exemplo

$$12 : 6 :: 6 : 3$$

é uma proporção contínua; e 6 é meio geométrico de 12 e 3.

Propriedades das proporções

1.ª Em qualquer proporção *o produto dos meios é igual ao dos extremos.*

Esta propriedade permite-nos fazer as seguintes alterações nos lugares dos têrmos sem alterar a proporção:

1.ª Mudar o lugar aos meios ou aos extremos (alternar);

2.ª Passar os extremos para meios e os meios para extremos (inverter);

3.ª Mudar o lugar às razões (transpor).

Exemplo: seja a proporção

$$\frac{7}{4} = \frac{21}{12}$$

alternando os meios

$$\frac{7}{21} = \frac{4}{12}$$

alternando os extremos

$$\frac{12}{4} = \frac{21}{7}$$

invertendo

$$\frac{4}{7} = \frac{12}{21}$$

transpondo

$$\frac{21}{12} = \frac{7}{4}$$

2.ª Da propriedade fundamental das proporções resulta que um meio é igual ao produto dos extremos dividido pelo outro meio, e um extremo é igual ao produto dos meios dividido pelo outro extremo.

Na proporção

$$\frac{8}{15} = \frac{24}{45}$$

temos:

$$8 \times 45 = 15 \times 24$$

dividindo ambos os membros desta igualdade por 8, vem

$$45 = \frac{15 \times 24}{8}$$

e dividindo por 15 vem

$$\frac{8 \times 45}{15} = 24$$

Por êste modo podemos achar o valor dum têrmo desconhecido duma proporção, quando sejam conhecidos os outros três.

Seja, por exemplo, a proporção

$$\frac{15}{8} = \frac{60}{x}$$

na qual temos

$$x = \frac{8 \times 60}{15} = 32$$

Na proporção

$$\frac{45}{x} = \frac{9}{17} \text{ é}$$

$$x = \frac{45 \times 17}{9} = 85$$

Com a aplicação destas regras podemos aínda achar um número, que esteja em proporção com três quaisquer números dados.

Exemplos:

1.º Calcular um número que esteja em proporção com os números 20, 16 e 35.

Escreveremos:

$$\frac{20}{16} = \frac{35}{x}$$

donde resulta:

$$x = \frac{16 \times 35}{20} = 28$$

2.º Sabe-se que 7 metros de pano custaram 2$45, e quere-se saber quanto custam 25 metros.

Formaremos a proporção

$$\frac{7}{25} = \frac{2\$45}{x}$$

donde resulta

$$x = \frac{2\$45 \times 25}{7} = 8\$75$$

Quando os meios são iguais, isto é, quando a proporção fôr *contínua*, qualquer dêles é o meio geométrico de dois números, que formam os extremos da proporção.

Por exemplo:

$$24 : 12 :: 12 : 6$$

é uma proporção contínua, e 12 é o meio geométrico de 24 e 6.

Aplicando a propriedade fundamental, resulta

$$12^2 = 6 \times 24$$

ou

$$12 = \sqrt{6 \times 24} = \sqrt{144}$$

Vê-se, pois, que numa proporção contínua o meio é igual à raíz quadrada do produto dos extremos.

Chama-se *meio geométrico* de dois números a raíz quadrada do produto dêsses dois números.

3.º Em tôda a proporção a soma ou diferença dos antecedentes está para a soma ou diferença dos conseqüentes como qualquer antecedente para o seu conseqüente.

Assim à proporção

$$18 : 9 :: 14 : 7$$

pode dar-se a forma:

$$(18 + 14) : (9 + 7) :: 18 : 9$$
$$(18 - 14) : (9 - 7) :: 18 : 9$$

4.º Em tôda a proporção a soma ou diferença dos dois primeiros têrmos está para a soma ou diferença dos dois últimos como o primeiro para o terceiro ou como o segundo para o quarto.

Assim à proporção

$18 : 9 :: 14 : 7$ pode dar-se a forma

$$(18 + 9) : (14 + 7) :: 18 : 14$$

ou

$$(18 + 9) : (14 + 7) :: 9 : 7$$
$$(18 - 9) : (14 - 7) :: 18 : 14$$
$$(18 - 9) : (14 - 7) :: 9 : 7$$

EXERCÍCIOS

1.º Qual é a razão do comprimento de duas linhas cujas medidas são respectivamente $14^m,6$ e $6^m,2$?

R.: $2{,}35 \frac{15}{31}$

2.º Medindo duas grandezas com a mesma unidade verifica-se que a primeira tem $^2/_3$ e a segunda $^6/_9$. Qual é a razão destas grandezas ?

R.: 1

3.° Calcular o têrmo desconhecido das seguintes proporções:

$$18 : 3 :: 24 : x; \quad \frac{148}{27} = \frac{x}{10}; \quad \frac{0{,}83}{1{,}65} = \frac{0{,}74}{x}$$

$$\frac{4}{7} : \frac{3}{5} :: x : \frac{2}{7}; \quad 2\,\frac{1}{3} : 5 :: 9\,\frac{1}{4} : x$$

4.° Calcular o meio geométrico dos dois números 48 e 12.

R.: 24.

3.º CURSO DE HABILITAÇÃO

PROGRAMA

Revisão das matérias dos cursos anteriores — Proporcionalidade directa e inversa; regra de três simples e composta (método de redução à unidade e regra prática), juros, descontos, câmbios e fundos públicos, regras de liga, mistura e companhia.

CAPÍTULO I

Grandezas proporcionais

1 — *Relação de duas grandezas.* — *Chama-se relação de duas grandezas da mesma espécie* o número que exprime quantas vezes a primeira contém a segunda ou partes desta segunda.

Assim dizemos que a relação de duas grandezas 8^m e 2^m é 4; isto é, que a primeira é quatro vezes maior que a segunda, ou que a segunda se contém quatro vezes na primeira.

A relação das duas grandezas é de $\frac{2}{7}$, isto é, a primeira é dois sétimos da segunda, ou por outros têrmos: a primeira obtém-se, dividindo a segunda em 7 partes iguais e tomando 2 destas partes.

2 — Podemos aínda dizer que a *relação entre duas grandezas da mesma espécie* é o número que serve de medida à primeira, quando se toma a segunda para unidade.

Porque, se a relação de dois comprimentos é $\frac{2}{7}$, o primeiro é dois sétimos do segundo, e se o segundo é a unidade, o metro por exemplo, o primeiro tem para medida $\frac{2}{7}$ do metro.

3 — *Grandezas directamente proporcionais.*

Diz-se que duas grandezas, que dependem uma da outra, são *directamente proporcionais*, ou simplesmente *proporcionais*, se a relação de dois valores quaisquer duma delas é igual à relação dos valores correspondentes da outra.

Diz-se aínda que as duas grandezas variam na *razão directa*.

Daqui resulta que, quando duas grandezas são directamente proporcionais, como por exemplo, o pré dum sargento e o número de dias que êle fez serviço, se uma delas se torna 2, 3, 4 vezes maior, a outra torna-se igualmente 2, 3, 4 vezes maior; e se a primeira se torna 2, 3, 4 vezes menor, a segunda torna-se igualmente 2, 3, 4 vezes menor.

Assim por exemplo, um sargento recebeu respectivamente por

(a)....	2	4	5	10 dias de pré
(b)...	40\$00	80\$00	100\$\$0	200\$00

vê-se que o pré é proporcional ao número de dias, porque a relação entre dois valores de (a) é igual à relação entre dois valores de (b)

$$\frac{4}{2} = \frac{80\$00}{40\$00} = 2 \qquad \frac{10}{5} = \frac{200\$00}{100\$00} = 2$$

4 — Os exemplos mais freqüentes de grandezas directamente proporcionais são os seguintes:

O preço duma mercadoria e o seu pêso, se a mercadoria se vende a pêso.

Assim sucede com o pão, a carne, a farinha, o açúcar, etc., que são vendidos a pêso.

O preço duma mercadoria e o seu volume, se a mercadoria se vende em volume.

Assim os cereais e os líquidos vendem-se em volume a tanto por litro.

O preço duma fazenda e o seu comprimento.

O salário dum operário e a duração do seu trabalho, quando é pago por dia.

O salário dum operário e a quantidade de trabalho que êle produz, quando é pago segundo o número de peças obtidas.

O trabalho feito por vários operários durante o mesmo tempo e o número dêstes operários.

O caminho percorrido por um combóio, sem paragens, e o tempo gasto no percurso.

5 — *Grandezas inversamente proporcionais.* — Duas grandezas, que dependem uma da outra, são *inversamente proporcionais*, quando a relação de dois valores quaisquer duma é igual à *relação inversa* dos valores correspondentes da outra.

Diz-se aínda que as duas grandezas variam na *razão inversa*.

Daqui resulta que, se duas grandezas são *inversamente proporcionais*, quando uma delas se tornar 2, 3, 4....n vezes maior ou menor, a outra torna-se ao mesmo tempo 2, 3, 4... n vezes menor ou maior.

O número de operários é inversamente proporcional ao tempo, que é preciso para se fazer uma obra. Quando o número de operários fôr metade do que era, o tempo gasto será o dôbro; o volume e a pressão dos gazes é um outro exemplo, porque quanto maior fôr a pressão a que se sujeitar o gás, menor será o volume que êle ocupa; duas fracções que teem o mesmo numerador são inversamente proporcionais aos seus denominadores.

7 — Quando duas quantidades são proporcionais, pode uma delas servir para avaliar a outra; assim o espaço pode ser avaliado pelo tempo, a fôrça pela velocidade, o capital pelo juro, etc.

8 — Consideramos o caso da proporcionalidade das grandezas na sua forma mais simples, isto é, quando elas teem uma só dependência, mas na maior parte dos casos esta dependência é múltipla e por isso temos de atender aos seguintes princípios fundamentais:

1.º *Quando uma quantidade é proporcional a cada uma de várias outras, independentes entre si, é também proporcional ao seu produto.*

Assim a grandeza de uma obra é proporcional ao número de operários empregados e ao número de dias de trabalho e portanto é também proporcional ao produto do número de operários pelo número de dias de trabalho.

O juro é proporcional ao capital e ao tempo e portanto é também proporcional ao produto do capital pelo tempo.

2.º *Quando uma quantidade é inversamente proporcional a cada uma de várias outras, independentes entre si, é também inversamente proporcional ao produto dessas outras.*

Assim por exemplo, o número de operários precisos para fazer uma obra é inversamente proporcional, ao número de dias de trabalho e ao número de horas de trabalho e portanto é inversamente proporcional ao produto do número de dias de trabalho pelo número de horas de trabalho diário.

II — Regra de três

9 — Chama-se *regra de três* o processo que tem por objecto a resolução dum problema dependente duma ou mais proporções.

Para se poder aplicar esta regra à resolução dum problema, é necessário que as quantidades que entrem no seu enunciado sejam proporcionais directa ou inversamente e além disto sejam *duas a duas homogéneas*, isto é, da mesma espécie.

A regra de três pode ainda definir-se: uma operação por meio da qual se procura o valor do quarto têrmo duma proporção, de que são conhecidos os valores dos outros três têrmos. Resolver a regra de três é calcular o valor da quantidade desconhecida.

A regra de três é *simples*, quando se aplica à solução dum problema, que depende só duma proporção e aplica-se a duas grandezas.

A regra de três é *composta*, quando se aplica à resolução dum problema, que depende de mais duma proporção e se aplica a mais de duas grandezas.

Na regra de três simples chamam-se *principais* as duas quantidades da mesma espécie que são ambas conhecidas e *relativas* às outras duas, uma das quais é desconhecida.

A regra de três simples divide-se em *directa* e *inversa*, segundo as grandezas, que nela entram, são directa ou inversamente proporcionais.

As quantidades, que entram no enunciado do problema, escrevem-se em duas linhas horizontais, a que se dá o nome de *períodos*, ficando debaixo de cada quantidade a que é homogénea com ela.

Regra de três simples

10 — *Directa*. As regras de três simples podem resolver-se pelas *proporções*, pelo método *de redução à unidade* e pelo *processo prático*.

Apliquemos cada um dêstes modos de resolução a um exemplo.

Um viajante percorreu 60 quilómetros em 10 horas; quanto percorrerá em 36?

	Principal		Relativa
1.º período	10^h	. . . . . .	60^{km}
2.º período	36^h	. . . . . .	X

a) — *Método das proporções*. A regra é directa, porque quanto mais tempo decorre, maior será o percurso supondo que a velocidade se conserva a mesma.

Estabelece-se depois a relação entre as quatro grandezas pela ordem que estão escritas e igualam-se as duas razões, de forma que nos fica:

$$\frac{10}{36} = \frac{60}{x} \text{ donde se tira } x = \frac{60 \times 36}{10} = 216 \text{ km.}$$

Na regra de três directa, o primeiro valor da principal está para o segundo valor da principal, como o primeiro valor da relativa para o segundo valor da relativa.

b) — *Método da redução à unidade.* Determina-se o valor da relativa correspondente ao valor da principal, e a solução acha-se depois multiplicando ou dividindo aquele valor pela segunda principal, conforme a regra de três fôr directa ou inversa.

Em 10 horas o viajante percorreu 60 km.

Em 1 hora percorrerá 10 vezes menos ou $\frac{60}{10}$.

Em 36 horas percorrerá 36 vezes mais do que numa hora ou

$$\frac{36 \times 60}{10}$$

donde se vê que $x = \frac{36 \times 60}{10} = 216$ km.

c) — Processo prático

10 horas	. . . .	60 km.
36 »	. . . .	x »

O valor da incógnita acha-se multiplicando a quantidade, que lhe fica por cima, pela razão das outras duas, *tomando para antecedente desta razão a segunda principal*, quando a regra de três fôr directa, ou tomando para antecedente a *primeira principal* quando a regra de três fôr inversa.

Aplicando esta regra ao mesmo exercício temos:

$$x = \frac{36}{10} \times 60 = 216 \text{ km.}$$

Regra de três simples inversa. São precisos 60 dias a 24 operários para concluírem uma obra. Quantos operários serão precisos para realizarem a obra em 48 dias?

As quantidades operários e dias são inversamente proporcionais, porque, dobrando o número de operários, o tempo do trabalho deve ficar reduzido a metade; logo o problema resolve-se por uma regra de *três inversa.*

Resolução:

60 dias. . . . . 24 operários
48 » . . . . x »

Na regra de três inversa, o primeiro valor da principal está para o segundo valor da principal, como o segundo valor da relativa para o primeiro valor da relativa.

a) — *Método das proporções.* Estabelece-se a relação entre as quatro grandezas, invertendo a ordem das duas últimas e escrevendo da forma seguinte:

$$\frac{60}{48} = \frac{x}{24} \text{ donde se tira } 60 \times 24 = 48 \times x$$

$$x = \frac{60}{48} \times 24 = 30$$

São precisos 30 operários.

b) — *Método de redução à unidade.*

Para fazer uma obra em 60 dias são precisos 24 operários.

Para fazer a mesma obra num dia são precisos 60 vezes mais operários ou 24×60.

Para fazer em 48 dias são precisos 48 vezes menos operários ou $\frac{24 \times 60}{48}$ e assim fica-nos:

$$x = \frac{24 \times 60}{48} = 30 \text{ operários}$$

c) — *Processo prático:*

60 dias . . . . 24 operários
48 » . . . . x »

$$x = \frac{24 \times 60}{48} = 30 \text{ operários}$$

Regra de três composta

10 — À regra de três composta podem-se aplicar os mesmos métodos que à regra de três simples, como se vê nos exemplos a seguir:

1.º *Se 15 operários fizeram em 12 dias 180 metros de obra, 20 operários em 10 dias quantos metros farão?*

Êste problema depende duma regra de três composta, porque tem mais de três quantidades conhecidas. O número de metros de obra é proporcional ao número de operários e ao número de dias de trabalho; sê-lo-á também ao produto do número de operários pele número de dias.

Resolução:

1.º período.	15^{op}	12^{d}	180^{m}
2.º »	20	10	x

a) *Método das proporções:*

15 oper.	12^{d}.	180^{m}
20 »	10^{d}.	x

$$15 \times 12 : 20 \times 10 :: 180 : x$$

$$x = \frac{20 \times 10 \times 180}{15 \times 12} = 200^{m}$$

b) *Método de redução à unidade:*

15^{op}	12^{d}.......	180^{m}
20^{op}.......	10^{d}.......	x^{m}

Se 15 operários em 12 dias fizeram 180^{m}

1 operário » 12 » fará $\frac{180}{15} = 12^{m}$

1 » » 1 dia » $\frac{12}{12} = 1^{m}$

20 operários » 1 » farão $20 \times 1 = 20^{m}$

20 » » 10 » » $20 \times 10 = 200^{m}$

c) *Processo prático :*

$$\begin{array}{lll} 15^{op} \ldots & 12^{d} \ldots & 180^{m} \\ 20^{op} \ldots & 10^{d} \ldots & \text{»} \end{array} \qquad x = 180 \times \frac{10}{12} \times \frac{20}{15} = 200^{m}$$

O valor de x é igual à quantidade que lhe fica por cima multiplicada por tantos quebrados quantos são os têrmos conhecidos do 2.° período e cada um dêstes quebrados tem por numerador um número do 1.° período e por denominador um número correspondente do 2.° período, quando a quantidade a que estes números se referem fôr *inversamente proporcional à relativa ;* e tem por numerador um número do 2.° período e por denominador o número correspondente do 1.° período, se a quantidade a que estes números se referem fôr *directamente proporcional à relativa ;* ou por outra, se as *quantidades são inversamente proporcionais às relativas, escrevem-se os números corespondentes pela ordem em que estão nos períodos, e, se são directamente proporcionais, escrevem-se na ordem inversa.*

Apliquemos esta última regra a outros exemplos.

2.° 16 operários abriram uma vala de 94 metros de comprimento, 3 de largura e dois de profundidade em 9 dias, trabalhando 10 horas por dia.

Quantos dias serão necessários a 27 operários, trabalhando 11 horas por dia, para abrirem uma vala de 135 metros de comprimento, 4 de largura e 3 de profundidade ?

Operários	comprimento	largura	profundidade	dias	horas
16	94	3	2	9	10
27	125	4	2	X	11

$$X = 9 \times \frac{16 \times 135 \times 4 \times 3 \times 10}{27 \times 94 \times 3 \times 2 \times 11} = 13{,}9 \text{ dias}$$

EXERCÍCIOS

1.° Sabe-se que 100 graus do termómetro centígrado equivalem a 80° do termómetro Reaumur. ¿Quando êste marcar 18°, quanto indicará o primeiro?

R.: 22 ,5.

2.º Em uma cidadela 50 soldados tinham víveres para 100 dias, mas a guarnição foi aumentada e passou a ser de 625 homens. Quanto tempo durarão os víveres?

R.: 8 dias.

3.º Um proprietário tinha ajustado vender 7 dúzias de carneiros a um marchante, pela quantia de 8.400$00; mas êste na ocasião da compra tinha apenas 7.000$00, e o vendedor não queria entregar-lhe fiado. Pregunta-se quantos carneiros pôde receber o marchante, com a quantia de que dispunha?

R.: 70.

4.º Um operário recebeu 128$00 por 16 dias de trabalho; que quantia teria recebido se trabalhasse 24 dias?

R.: 192$00.

5.º Dois pedreiros fizeram uma parede em 48 dias, trabalhando 10 horas por dia. Quantos dias teriam gasto, se tivessem trabalhado 12 horas por dia?

R.: 40 dias.

6.º Uma pessoa deixa apenas a fortuna de 1.000$00, para pagar por sua morte a quantia de 12.400$00 de dívidas; quanto receberá um crédor a quem se deve 160$00?

R.: 12$90.

7.º Em 28 dias 12 operários fizeram metade de uma certa obra; em quanto tempo estará acabada, se forem despedidos 4 operários?

R.: 42 dias.

8.º O gás contido no cano de uma espingarda está à pressão de 3500^{kg}, ocupando o volume de 100^{cm^3}. Qual será a pressão a que fica a mesma massa gasosa, se ocupar 0,240 litros, sabendo que os volumes e as pressões são grandezas inversamente proporcionais?

R.: 1458^{kg}.

9.º 180 atiradores executaram fogo à vontade durante 20 minutos, disparando cada atirador 3 tiros por minuto. Qual foi a percentagem dos tiros, sabendo que no alvo acertaram 550 projécteis?

R.: 5,09 %.

10.º Uma roda dá 20 voltas em 5 minutos. Quantas voltas dará em 1^h e 15^m?

R.: 300 voltas.

11.º Se um arco de círculo de 54º tem de comprimento $3^m,2$, qual será o comprimento de um arco de 30º, pertencente ao mesmo círculo?

R.: $1^m,777$.

12.º Um industrial tinha-se comprometido a fornecer 5000^m de pano, com $^5/_4$ de largura, para o fardamento das tropas, mas na data da entrega verificou-se que a fazenda não tinha a largura indicada, de forma que teve de fornecer 5250^m. Qual era a largura dêste pano?

R.: $1^m,19$.

13.º Um negociante deseja dar 250$00 aos pobres, tôdas as vezes que ganhar 3.154$00. Que importância dará quando tiver ganho 5.225$00?

R.: 414$15,5.

14.º Encontrando-me ao pé de uma tôrre, verifiquei que a sombra que ela projecta, mede $30^m,5$. Medindo igualmente a sombra dum arbusto na proximidade da tôrre, encontrei 4^m. A altura do arbusto é $1^m,60$. Qual é a altura da tôrre?

R.: $12^m,2$.

15.º Uma roda dá 4590 voltas em 27 minutos; quantas voltas dará em 2^h e 24^m?

R.: 24.480 voltas.

16.º Duas rodas dentadas estão engrenadas uma na outra; a menor tem 76 dentes e a maior 228. Quantas voltas deve dar a menor enquanto a outra der 5?

R.: 15.

17.º O preço do diamante varia proporcionalmente ao quadrado do seu pêso. Sabendo-se que um diamante em bruto, com o pêso de 212 milig. vale 10$50, calcular o preço de um diamante que tenha o pêso de $9^{gr},50$.

R.: Temos a proporção:

$$\frac{x}{10\$50} = \frac{9500^2}{212^2}$$

donde se tira o valor de x = 20$07.

18.º Empregaram-se 68 sapadores, trabalhando $8^h\ ^1/_3$ por dia, durante 30 dias para cavarem uma trincheira de 107^m de comprimento, de $1^m\ ^1/_2$ de largura e $3^m\ ^1/_5$ de profundidade. Qual será o comprimento de uma trincheira cavada por 54 sapadores, trabalhando $8^h\ ^2/_3$ por dia, durante 43 dias, se a trincheira devesse ter 2^m de largura e $3^m\ ^4/_5$ de profundidade?

chega-se ao valor $x = \dfrac{107 \times 54 \times \frac{26}{3} \times 43 \times 1{,}50 \times \frac{16}{5}}{68 \times \frac{25}{3} \times 30 \times 2 \times \frac{19}{5}}$

R.: $79^m,9$ ou 80^m, por excesso.

Juro simples

9 — Quando o possuïdor duma certa soma de dinheiro a empresta durante algum tempo a uma outra pessoa, recebe desta como renda ou remuneração uma certa quantia a que se chama *juro*.

Chama-se *capital* qualquer quantia emprestada ou posta a render.

A pessoa a quem se empresta o dinheiro deve em regra pagar, além do que recebeu, uma outra quantia, que se suponha equivaler ao ganho, que teria a pessoa que empresta o dinheiro (prestamista), se o tivesse em seu poder.

A quantia que se convenciona pagar por cada 100 unidades durante cada unidade de tempo, chama-se taxa ou *razão de juro*.

Para indicar uma taxa servimo-nos do símbolo %, que significa por cento.

A unidade de tempo geralmente adoptada nas questões de juro é o ano, que se supõe ter 360 dias. Assim, se o juro fôr de 10 por cento ou se a taxa fôr 10, o devedor tem de pagar de prémio em cada ano tantas vezes 10 centavos quantas vezes o capital emprestado contiver 100 centavos. No comércio e nos bancos é raro o praso de tempo atingir a duração dum ano. Para se avaliar êste praso atribui-se a cada mês o número de dias que êle tem realmente.

O tempo é contado desde o dia do empréstimo do dinheiro, inclusivamente, até ao dia do pagamento, exclusivamente.

10 — O juro pode ser *simples* ou *composto*.

É *sïmples*, quando o prestamista recebe o dinheiro no fim de cada unidade de tempo. Geralmente o juro dum capital emprestado é pago adeantadamente, subtraído da importância do dinheiro emprestado. Terminado o praso do empréstimo o prestamista recebe o capital completo. No caso do juro simples, o capital fica o mesmo durante todo o tempo do empréstimo.

O juro é *composto*, quando o juro não é pago no fim de cada unidade de tempo e se vai adicionando ao capital em dívida. Forma-se assim um novo capital para a unidade de tempo imediata. Diz-se então que há uma capitalização de juros, visto que o juro, que não foi pago, fica a vencer juros nas unidades de tempo seguintes. Há assim o juro não só do capital, mas também o juro de juro, que passa para capital, a adicionar ao primitivo.

11 — Em uma questão de juros simples há a considerar :

1.º O capital,
2.º O juro,
3.º A taxa,
4.º O tempo.

Quando são conhecidas três destas quantidades, determina-se fàcilmente a quarta. Resultam daqui quatro problemas diferentes a resolver.

12 — Os juros são proporcionais aos capitais e aos tempos e portanto (8) são tambem proporcionais ao seu produto.

13 — *Fórmula dos juros simples.* Tratemos apenas do caso do juro simples.

Se representarmos por c qualquer capital, por r a taxa e por t o número de anos, que o capital esteve a render, sendo j o juro desconhecido dêsse capital, teremos, dispondo o cálculo, como se fôsse uma regra de três composta,

$$\left.\begin{array}{llllll} 100 & \text{rende num} & 1 \text{ ano} & \text{a quantia} & r \\ c & \quad » & \text{em } t \text{ anos} & \text{a} \quad » & j \end{array}\right\}$$

Como se trata de quantidades directamente proporcionais teremos como se sabe (10)

$$j = r \times \frac{c}{100} \times \frac{t}{1} = \frac{rct}{100} = \frac{crt}{100} \quad (1)$$

E assim acharemos o valor de j, conhecidos os valores de c, r, t.

Pode suceder que o tempo esteja referido a meses ou a dias e assim a fórmula (1) tem de ser modificada conforme se der qualquer dos dois casos.

Quando o tempo é referido a meses, temos de dividir o número de meses por 12 para que o tempo fique reduzido à unidade ano.

Assim a fórmula (1) ficará modificada:

$$j = \frac{c \times r \times \frac{t}{12}}{100} = \frac{c \times r \times t}{1200} \quad (2)$$

Se o tempo está expresso em dias, na fórmula (1) faz-se uma modificação análoga, dividindo o número de dias por 360, para reduzir o tempo à unidade ano.

$$j = \frac{\dfrac{c \times r \times \dfrac{t}{360}}{100}}{} = \frac{c \times r \times t}{36000} \quad (3)$$

12 — *Divisores fixos.* Nos bancos trabalha-se geralmente nos cálculos de juros para prasos de dias e com uma taxa que se mantém a mesma durante longos períodos e por isso adoptam operações abreviadas, tendo em vista que só variam os capitais e os tempos. E assim recorrendo à fórmula (3), dividindo ambos os têrmos da fracção por r, fica-nos:

$$j = \frac{c \times t \times r : r}{36000 : r} = \frac{c \times t}{36000 : r}$$

e representando o cociente 36000 : r por d fica-nos

$$j = \frac{c\,t}{d} \quad (4)$$

Como se disse, o ano comercial considera-se igual a 360 dias' mas para qualquer cálculo onde o ano seja de 365 dias, em vez de (3) se dividir por 360, dividir-se há por 365, e assim o cociente d será igual a 36.000 : r ou a 36.500 : r. Êste divisor d chama-se divisor fixo relativo à taxa r.

13 — Podemos também por meio da fórmula (1) calcular o valor do capital, da taxa e do tempo quando sejam conhecidas três das outras quantidades.

Se multiplicarmos ambos os membros da igualdade (1) por 100 fica-nos:

$$100 \times j = c \times t \times r$$

Dividindo ambos os membros desta igualdade por $t \times r$ acha-se:

$$c = \frac{100 \times j}{t \times r} \quad (5) \text{ para o tempo referido a anos}$$

Dividindo ambos os membros da igualdade (4) por $c \times r$ acha-se o valor de t

$$t = \frac{100 \times j}{c \times r} \quad (6)$$

Dividindo ambos os membros da igualdade (4) por $c \times t$ acha-se o valor de r

$$r = \frac{100 \times j}{c \times t} \quad (7)$$

Os valores de c, t e r, referidos a dias ficam:

$$c = \frac{1200 \times j}{t \times r} \quad (8)$$

$$t = \frac{1200 \times j}{c \times r} \quad (9)$$

$$r = \frac{1200 \times j}{c \times t} \quad (10)$$

Para se deduzirem estas fórmulas basta multiplicar por 1200 ambos os membros da igualdade (2) e dividir depois ambos os membros dessa igualdade por $t \times r$, por $c \times r$, e por $c \times t$.

Os valores de c, t e r, referidos a dias ficam:

$$c = \frac{36000 \times j}{t \times r} \quad (11)$$

$$t = \frac{36000 \times j}{c \times r} \quad (12)$$

$$r = \frac{36000 \times j}{c \times t} \quad (13)$$

para o que basta multiplicar ambos os membros da igualdade (3) por 36000 e dividir depois ambos os membros por $t \times r$, $c \times r$ e $c \times t$.

Caso em que o capital está somado com o juro

14 — Um capital está a render juro durante um ano e 3 meses à razão de 8 % ao ano. Sabe-se que a soma do capital com o juro tem o valor de 855$00. Desejamos saber qual é o capital e qual é o juro.

O capital 100 vence em 12 meses o juro.... 8

Em 15 meses ou em $\frac{15}{12}$ anos vencerá.... $\frac{15}{12} \times 8$.

A soma do capital 100 com o juro será:

$$100 + \frac{15}{12} \times 8$$

Representando por c o valor do capital, que somado com o seu juro prefaz 855$00 em 1 ano e 3 meses, têmos:

$100 + \frac{15}{12} \times 8$ corresponde ao capital 100

855$00 corresponderá ao capital................ c

$$c = 777\$27$$

$$j = 855\$00 - 777\$27 = 77\$73$$

Podemos deduzir fàcilmente a fórmula a aplicar, no caso em que o capital esteja somado com o juro.

Da fórmula (1)

$$j = \frac{c\,r\,t}{36000}$$

$$r = \frac{j \times 36000}{c\,t} \qquad \frac{r}{j} = \frac{36000}{c\,t}$$

multiplicando ambos os membros da segunda igualdade por t vem:

$$\frac{r}{j} \times t = \frac{36000 \times t}{c\,t}$$

ou

$$\frac{r\,t}{j} = \frac{36000}{c}$$

Nesta proporção a soma dos antecedentes está para a soma dos conseqüentes, assim como qualquer antecedente está para a o seu conseqüente; temos:

$$(a)\ \frac{r\,t + 36000}{j + c} = \frac{r\,t}{j} \text{ ou } \frac{r\,t + 36000}{j + c} =$$

$$= \frac{36000}{c}\ (b)$$

Podemos achar o juro por meio de (a) e o capital por meio de (b) exprimindo o tempo em dias.

Exemplo : Um capital rendeu a 8 % um certo juro e no fim de 180 dias a soma do capital com o juro era de 1.550$00. Qual é o valor do capital e do juro?

Da fórmula (b) tira-se o valor do capital:

$$c = \frac{36000 + (j \times c)}{r\,t + 36000} = 1.490\$39$$

Conhecendo o valor do capital acha-se fàcilmente o valor do juro subtraíndo-o do valor conhecido, que representa a soma do capital e juro

$$j = 1.550\$00 - 1.490\$39 = 59\$61$$

Também se pode calcular o valor do juro empregando a fórmula (a) de onde se tira;

$$j = \frac{r\,t \times (j + c)}{36000 + r\,t}$$

$$j = \frac{8 \times 180 \times 1.550\$00}{37440} = 59\$61.$$

Também podemos deduzir a fórmula para achar o valor do capital, quando êle está somado com o juro, da maneira seguinte, que é mais tarde também aplicada quando tratarmos do desconto por dentro :

Representemos por N o valor da soma do capital com o juro:

$$N = c + j$$

mas já sabemos que $j = \frac{c\ r\ t}{36000}$

substituindo o valor de j, fica-nos

$$N = c + \frac{c\ r\ t}{36000}$$

$$36000 \times N = 36000\ c + c\ r\ t$$

$$36000\ N = c\ (36000 + r\ t)$$

$$c = \frac{36000\ N}{36000 + r\ t} \qquad (14)$$

o valor do juro é:

$$j = N - \frac{36000 \times N}{36000 + r\ t}$$

$$j = \frac{(36000 + r\ t)\ N - 36000\ N}{36000 + r\ t}$$

$$j = \frac{N\ r\ t}{36000 + r\ t} \qquad (15)$$

Exercício — 1.029$30 representa a soma do capital com o juro, que um certo capital rendeu durante 1 ano, 2 meses e 11 dias a 6 % ao ano. Qual é o valor do capital e qual é o valor do juro?

t = 401 dias; r = 6; N = 1.029$30.

Empregando a fórmula (14) têmos que:

$$c = \frac{36000 \times 1.029\$30}{36000 + 6 \times 401} = 964\$81$$

conhecido o valôr de c, o valôr de j será: j = N — c = 1.029$30 — — 964$81 = 64$49.

O valôr de j obtido por meio do emprêgo da fórmula (15) é

$$j = \frac{1.029\$30 \times 6 \times 401}{36000 + 6 \times 401} = 64\$48$$

Aplicação das fórmulas dos juros a diversos casos concretos

I — *Exercicio* — Calcular o juro que renderá o capital de 2.100$00 a 3 % durante 4 anos.

Neste caso na fórmula (1) c = 2.100$00, r = 3, t = 4

$$j = \frac{2.100\$00 \times 3 \times 4}{100} = 252\$00$$

II — *Exercício* — Qual é o capital que à taxa de 10 % ao ano durante 4 anos dá o juro de 100$00?

Pela fórmula (5)

$$c = \frac{100 \times 100\$00}{10 \times 4} = 250\$00$$

III — *Exercício* — Que tempo deverá estar a render o capital de 250$00, para que à taxa de 10 % renda 100$00?

Pela forma (6)

$$t = \frac{100\$00 \times 100}{250\$00 \times 10} = 4 \text{ anos}$$

IV — *Exercício* — Qual deve ser a taxa para que o capital de 10.000$00 renda 2.000$00 em 10 anos?

Pela fórmula (7)

$$r = \frac{100 \times 2.000\$00}{10.000\$00 \times 10} = 2\ \%$$

V — *Exercício* — Qual é o juro vencido pelo capital de 800$00 em 1 ano e 4 meses a 8 e $^5/_8$?

Pela fórmula (2)

$$j = \frac{800\$00 \times 16 \times 8{,}625}{1200} = 92\$00$$

VI — Calcular o juro vencido pelo capital 360$00 que esteve a render 1^a, 2^{mes} e 10 dias à taxa de 5 %.

Pela fórmula (3) onde $c = 360\$00$, $r = 5$, $t = 1^a\ 2^{mes}$ 10 dias ou 430 dias temos

$$j = \frac{360\$00 \times 430 \times 5}{36000} = 21\$50$$

VII — Achar o capital que a 6 % dá de juro em 4 meses 40$00.

Pela fórmula (8) temos

$$\frac{1200 \times 40\$00}{6 \times 4} = 2{:}000\$00$$

VIII — Qual é o capital que em 2 anos, 4 meses e 10 dias à taxa de 5 % dá de juro 50$00?

Pela fórmula (11) temos:

$$c = \frac{36000 \times 50\$00}{5 \times 850} = 423\$52$$

2^a 4^{mes} e 10^d são iguais a 850 dias

IX — Qual foi a taxa dum empréstimo dum capital de 360.000$00 que rendeu em 10 meses 30.000$00?

Substituindo os valores dados na fórmula (10) temos:

$$r = \frac{1200 \times 30.000\$00}{360.000\$00 \times 20} = 10\ \%$$

X — Qual foi a taxa dum empréstimo dum capital de 3.600$00 que rendeu em 85 dias 59$50 ?

Aplicando a fórmula (13) temos :

$$r = \frac{36000 \times 59\$50}{3.600\$00 \times 85} = 7\ \%$$

XI — Quantos meses deve estar a render o capital de 5.200$00 para dar de juro 520$00 á taxa de 4 %.

Aplicando a fórmula (9) temos :

$$t = \frac{1200 \times 520\$00}{5.200\$00 \times 4} = 30^{mes} \text{ ou } 2^{a} \text{ e } 6^{mes}$$

XII — Quantos dias deve esfar a render o capital de 1.300$00 para dar de juro 130$00 à taxa de 4 % ?

Aplicando a fórmula (12) temos

$$t = \frac{36000 \times 130\$00}{1.300\$00 \times 4} \ 900^{d} \text{ ou } 2^{a} \text{ e } 180^{d} \text{ ou } 2^{a} \text{ e } 6^{m}$$

15 — *Aplicação do método dos divisores fixos* — No n.º 12 já vimos que o divisor fixo se obtém, dividindo pela taxa o número 36000. Conhecido o divisor fixo, para uma dada taxa acha-se o juro dum capital qualquer, *multiplicando o capital pelo número de dias e áividindo êste produto pelo divisor fixo.*

Exemplo — Qual é o juro do capital de 15.000$00 à taxa de 8 por cento, no fim de 50 dias ?

O divisor fixo corresponde à taxa de 8 % é

$$36000 : 8 = 4500$$

o juro será pois :

$$j = \frac{15.000\$00 \times 50}{4500} = 166\$66$$

Nota — Ao produto do capital pelo número de dias dá-se habitualmente no comércio o nome de *número*. E assim também se diz que, para achar o juro dum capital, *divide-se o número pelo divisor fixo*.

16 — A aplicação do método dos divisores fixos tem grande utilidade quando se deseja achar os juros de diversos capitais colocados à mesma taxa. Para êsse efeito aplica-se a regra seguinte:

Para achar os juros de vários capitais colocados à mesma taxa, em tempos diferentes, somam-se os números dos capitais (nota do n.º 13) e divide-se esta soma pelo dívisor fixo correspondente à taxa.

Um comerciante tem de pagar três emprestimos que contraíu: o 1.º de 12.000$00 com o juro de 50 dias; o 2.º de 10.000$00 com o juro de 90 dias e o 3.º de 5.000$00 com o juro de 60 dias, todos à taxa de 8 %. Qual é o júro total que tem de pagar pelos três empréstimos?

Os números dos três capitais são:

12.000$00 × 50 =	600.000$00
10.000$00 × 90 =	900.000$00
5.000$00 × 60 =	300.000$00
A soma dos números	1:800.000$00

O divisor fixo correspondente a 8 % é 4500, logo o juro dos depositos é

$$\frac{1{:}800.000\$00}{4500} = 400\$00$$

Descontos

17 — *Definições* — No comércio a compra de mercadorias é raro fazer-se a dinheiro de contado, mas por meio dum documento escrito, que constitui um título de dívida comercial, chamada *letra*.

Há duas espécies de letras de comércio, conforme elas são criadas pelo comprador ou pelo devedor.

18 — *A letra à ordem* é um reconhecimento assinado pelo comprador na qual êste se compromete a pagar ao vendedor ou a qual-

quer outra pessoa, que se apresente em seu nome (à sua ordem) a importância da letra, numa data determinada, chamada *data de vencimento.*

19 — *O saque* ou *letra de câmbio* é, pelo contrário, uma letra criada pelo vendedor, por meio da qual êle solicita do comprador que lhe pague, ou à sua ordem, a importância devida numa data fixa, chamada data do vencimento do saque

20 — Numa letra figuram sempre, pelo menos, duas pessoas jurídicas: o *credor* que assina a letra e se chama o *sacador* e o devedor que tem de pagar e se chama o *sacado.*

Uma letra é preenchida nas seguintes normas:

(Parte anterior da letra)

(Lugar onde está impresso o sêlo)

Aceito
J. Manuel Godinho, L.da

Lisboa,... de Fevereiro, de 193 .

São 800$00

A 20 de maio de 1930 pagará V. S.ª por esta minha única via de letra a mim ou à minha ordem, a quantia de oitocentos escudos em moeda corrente da República.

Ao Sr. J. Manuel Godinho, Lda.
Rua da Prata, 406 — Lisboa

a) *J. J. Fernandes, Lda.*

21 — O possuïdor duma letra à ordem pode ceder a sua propriedade a uma outra pessoa. E' o que se chama *endossar* a letra. Para êsse efeito o possuïdor escreve nas costas da letra a fórmula seguinte:

Pague-se ao Sr. Joaquim Amaral, L.da (que é o nome do novo proprietário); *põe a data e assina*

J. J. Fernandes L.da

A letra pode assim servir como dinheiro e passar por diversas mãos, para pagar dívidas, antes do dia do seu vencimento. É como uma nota de banco garantida pelo indivíduo que se constituír devedor.

Quando a letra seja novamente endossada, o 1.º endossado escreve nas costas a seguir ao que já estava escrito:

Pague-se ao Sr. F... (e assina).

22 — O indivíduo, que transmite a propriedade da letra por meio de endôsso, chama-se *endossante*, e o que a recebe chama-se *endossado*.

O sacador, para garantir o pagamento da letra, quando não tem confiança na pessoa a quem vende a mercadoria, pode exigir que a letra seja caucionada por um fiador, que lhe garanta o pagamento e diz-se então que o sacado presta uma fiança ou *aval*.

Neste caso o fiador do sacado toma o nome de *dador de aval*.

O fiador ou *dador de aval* fica com a responsabilidade jurídica do pagamento da letra, no caso do aceitante não a pagar do dia do vencimento.

23 — Se a letra não fôr paga pelo aceitante no dia do seu vencimento, o portador deve, sempre que houver outros firmantes, além dêle e do aceitante, fazê-la protestar, levando-a a um notário para lavrar o têrmo de protesto. Protestada a letra, o portador fica com o direito a ir receber a sua importância de qualquer dos firmantes anteriores. Se a não protestar, perde o direito contra êsses firmantes, ficando apenas com o direito contra o aceitante.

Não sendo a letra paga, o sacador, ou quem o represente, fá-la protestar, nas 24 horas subseqüentes, para proceder juridicamente no tribunal do comércio contra o devedor.

24 — A letra, pelo facto de não ter sido aceite, não deixa por isso de produzir efeitos contra os firmantes, que à data da apresentação para êsse fim ela já tiver. Desde o momento em que haja nela um sacador e um tomador há já obrigação contraída pelo primeiro de pagar ao segundo, no caso do sacado não cumprir.

O protesto neste caso chama-se protesto por *falta de aceite*.

25 — *Regra de desconto* — Duma maneira geral chama-se *desconto* a quantia que se abate à importância duma dívida, quando ela é paga antes do dia do seu vencimento.

Quando o portador duma letra comercial, pagável em certo praso ou, como se diz vulgarmente, se vence em tal dia, deseja receber a importância da dívida que ela garante, endossa-a geralmente à ordem dum banco. Diz-se que o credor negociou a sua letra ou que a faz descontar. O banqueiro não paga ao endossante a quantia exacta inscrita sôbre a letra, que no caso presente é de 800$00 e à qual se chama valor *nominal*, mas retém em seu poder, a título de juro pelo adeantamento que faz, uma quantia a que chama um *desconto*. Chama-se valor *actual* da letra a soma que o banqueiro dá quando desconta a letra.

O valor actual da letra é pois igual ao seu valor nominal diminuído de desconto.

Há duas espécies de desconto: o *desconto comercial* ou *desconto por fora* e o *desconto racional* ou *desconto por dentro.*

26 — *Desconto comercial* — O desconto comercial duma letra de comércio é o juro do valor nominal dessa letra desde o dia em que o banco adeanta o dinheiro até ao dia do vencimento.

O desconto comercial ou por fora é o único usado nos bancos. Daqui resulta que os cálculos relativos aos descontos são operações como as do juro simples já estudado. A taxa de juro tem o nome de taxa de desconto.

27 — *Cálculo de desconto e do valor actual — Exercício :* No dia 7 de Junho descontou-se uma letra de 1.000$00 pagável no dia 11 de Agôsto do mesmo ano. Qual é o valor actual dessa letra à taxa de 8 %?

Êste problema pode também enunciar-se assim:

Qual é no dia 7 de Junho o valor actual duma letra de 1.000$00 que se vence no dia 11 de Agôsto? A taxa de desconto é de 8 %.

De 7 de Junho a 30 de Junho vão 24 dias (compreendendo o dia da negociação). O mês de Julho tem 31 dias. E do dia 1 de Agôsto a 11 de Agôsto vão 10 dias, visto que não se conta o dia do vencimento. Logo, do dia 7 de Junho a 11 de Agôsto vão 65 dias.

O desconto da letra é o juro de 1.000$00 a 8 % durante 65 dias.

Para se calcular êste juro aplica-se a fórmula (4) do n.º 12,

$$j = Df = \frac{1.000\$00 \times 65}{4500} = 14\$44$$

visto que nos bancos empregam a regra dos divisores fixos. Para a taxa de 8 % o divisor é 36000:8 = 4500;

o juro ou o desconto achado é 14$44.

O valor actual é por conseqüência:

$$1.000\$00 - 14\$44 = 985\$56$$

quantia esta que o portador da letra deverá receber do banco.

Pode também aplicar-se a fórmula $Df = \frac{Nrt}{36000} =$

$$= \frac{1.000\$00 \times 8 \times 65}{36000} = 14\$44.$$

Exercício II — O valor actual duma letra de 650$00 é de 636$73 à taxa de desconto de 7 %. Qual é a data do vencimento da letra?

O desconto da letra é de 650$00 — 636$73 = 13$27. A data do vencimento é o tempo durante o qual 650$00 venceu o juro de 13$27 a 7 %.

Servindo-nos da fórmula (12) de n.º 13 temos:

$$t = \frac{36000 \times 13\$27}{650\$00 \times 7} = 105 \text{ dias}$$

Devemos contar 105 dias a partir da data em que foi descontada a letra, inclusiva, não contando o dia do vencimento.

Fxercício III — Um comerciante descontou uma letra de 560$00 no dia 1 de Março, a qual se vence a 15 de Abril. Recebeu 558$24. Qual foi a taxa que o banco lhe aplicou no desconto?

Como o comerciante recebeu apenas 558$24, o desconto feito pelo banqueiro foi de 560$00 — 558$24 = 1$76.

De 1 de Março a 15 de Abril há 45 dias. A taxa de desconto é pois a taxa de 560$00 que venceu um juro 1$76 durante 45 dias.

Aplicando a fórmula (13) do n.º 13 temos:

$$r = \frac{36000 \times 1\$76}{56000 \times 45} = 2,5 \%$$

Exercício IV — Caso em que o mesmo indivíduo tem de pagar mais do que uma letra. No dia 10 de Março o Banco de Portugal descontou à taxa de 8 % as seguintes letras: a 1.ª de 600$00 com o vencimento a 21 de Junho; a 2.ª de 800$00 com o vencimento a 21 de Julho; a 3.ª de 1.500$00 com o vencimento a 14 de Agôsto. Quanto pagou o banco?

A soma do valor nominal das 3 letras é de 2.900$00. Abatendo a êste valor a importância total dos descontos achamos a quantia que o banco pagou.

Para se achar o desconto total, sendo a taxa de desconto a mesma para as 3 letras, seguimos o método dos divisores fixos, como já se fez no n.º 14.

Para a 1.ª letra, o praso de 10 de Março a 21 de Junho é de 103 dias.

Para a 2.ª letra, até 21 de Julho é de 133 dias.

Para a 3.ª letra, até 14 de Agôsto é de 157 dias.

Os *números* dos 3 capitais são:

$$\begin{array}{rcr} 600\$00 \times 103 & = & 61.800\$00 \\ 800\$00 \times 133 & = & 106.400\$00 \\ 1.500\$00 \times 157 & = & \underline{235.500\$00} \\ & & 403.700\$00 \end{array}$$

O divisor fixo correspondente a 8 % é 4500, logo o desconto total é:

$$Df = \frac{403.700\$00}{4500} = 89\$71$$

28 — *Desconto por dentro* — O desconto por fora não é absolutamente racional, porque prejudica o sacador em benefício do banco. Supunhamos, por exemplo, que uma pessoa desconta uma letra de 4.000$00 a 3 meses, com a taxa de desconto de 3 %. O desconto comercial será (3):

$$Df = \frac{Nrt}{36000} = 30\$00$$

e a pessoa recebeu apenas 4.000$00 — 30$00 = 3.970$00. Ora, se ela colocar imediatamente estes 3.970$00 a 3 %, renderão em 3 meses 29$75 de juro e receberá na época do vencimento da letra 3.970$00 + 29$75 = 3.999$75 em vez de 4.000$00 que receberia, se conservasse a letra. Houve assim um prejuízo de $25.

Êste prejuízo é pequeno, porque o vencimento da letra é por um praso curto; êle seria maior se o vencimento fôsse por um praso maior, podendo até dar-se o caso do valor do desconto ser igual ao valor nominal da letra, o que seria absurdo.

O desconto *racional* ou *desconto por dentro* não prejudica ninguém.

Chama-se valor *actual racional duma letra* a soma que, aumentada dos seus juros até à data do vencimento, reproduziria o valor nominal da letra.

O *desconto racional* ou *desconto por dentro* duma letra é o juro do valor racional actual dessa letra.

Assim à taxa de 5 % uma letra de 105$00, vencida daqui a 360 dias tem um valor racional actual de 100$00; porque 100$00 produzem 5$00 de juro em 360 dias; esta soma aumentada do seu juro é o valor nominal de 105$00 da letra. O desconto racional ou desconto por dentro não é empregado na prática; todavia indicamos, a título de exercício, a marcha a seguir para o calcular.

Exercício — Qual é o valor actual racional e o desconto por dentro duma letra de 850$00 pagável a 90 dias à taxa de 8 %?

O valor actual da letra, somado com o juro que vence êsse valor durante 90 dias, produz o valor nominal de 850$00.

Êste problema é análogo ao do n.º 14. É dada a soma do capital com o juro 850$00 e pede-se o valor do capital. Seguiremos a marcha do problema do n.º 14, sendo a taxa a 8 %.

Da formula (b) do n.º 14 tiremos o valor de c e façamos substituír:

$$t = 90 \qquad r = 8 \qquad c + j = 850\$00$$

$$c = \frac{36000 \times 850\$00}{36000 + 8 \times 90} = 833\$33$$

$$Dd = 850\$00 - 833\$33 = 16\$67$$

O valor do desconto 16$67 também se pode achar pela fórmula do n.º 14.

$$j = \frac{crt}{36000 + rt} \text{ ou } Dd = \frac{Nrt}{36000 + rt} =$$

$$= \frac{850\$00 \times 8 \times 90}{36000 + 8 \times 90} = 16\$67$$

O desconto por fora da mesma letra, de valor nominal 850$00 seria

$$D\,f = \frac{850\$00 \times 8 \times 90}{36000} = 22\$55$$

havendo portanto um prejuízo de 22$55 — 16$67 = 5$88 para o possuïdor da letra.

29 — *Desconto a pronto pagamento, bónus* — Nas operações comerciais raramente se compra pagando logo a mercadoria no acto da compra. Paga-se em regra a 30, 60 e a 90 dias, depois da recepção da encomenda.

Quando o comprador paga a pronto, o vendedor faz-lhe geralmente um desconto que se chama *bónus*, o que equivale a diminuír o preço da venda duma certa quantia.

O desconto ou bónus é proporcional à importância da compra. A taxa de desconto ou bónus é a redução aceite pelo comprador sôbre a compra dum valor nominal de 100 centavos.

Exercício I — Uma pessoa comprou uma mercadoria, cujo preço estava marcado por 180$00. Pagou a pronto, pelo que lhe fazem um desconto de 2 %. Quanto pagou ?

O desconto é achado como um problema de juros dum certo capital, sem se entrar com o valor do tempo.

$$j = \frac{cr}{100}$$

$$j = \frac{180\$00 \times 2}{100} = 3\$60$$

A pessoa pagou 180$00 — 3$60 = 176$40.

Exercício II — Um livro, cujo preço estava marcado por 3$50, foi comprado por 3$00. Qual foi o desconto que fez o livreiro ?

Sôbre 3$50 o desconto foi de $50, sôbre 1$00 o desconto será de

$$\frac{3\$50}{\$50} = \frac{1\$00}{x} \qquad x = \frac{50 \times 100}{350} = 14{,}2\ \%$$

EXERCÍCIOS

1 º Um indivíduo vendeu um objecto por 24$00 escudos e teve de prejuízo 20 % sôbre o preço da compra. Quanto lhe tinha custado êsse objecto ?

R. : 30$00. (80 venda corresponde a 100 compra e 24$00 venda a x compra.)

2.º Um negociante perdeu 7.250$00 numa mercadoria que lhe tinha custado 145.000$00. De quantos por cento foi a perda ?

R. : 5 %.

3.º Uma quantia emprestada a 4 % ao ano rendeu 236$00 de juros em 3 anos. Qual foi essa quantia ?

R. : c = 1.966$66.

4.º A que taxa coloca um apessoa o dinheiro, comprando por 28.000$00 uma casa que rende por ano 1.800$00 ?

R. : r = 6,4 %.

5.º Um sócio da Cooperativa Militar recebeu de dividendo no fim do ano 150$00. Tinha 10 acções de 50$00 cada uma. O juro pago pelo capital foi de 6 % e o bónus do consumo foi de 5 %. Quanto consumiu o sócio ?

R. : 2.400$00.

6.º Qual é o juro que rende o capital 560$00 durante um ano a 5 $^1/_2$ por cento?

R.: 30$80.

7.º Qual é o juro que o capital 2.500$00 rende em 2 anos 5 meses e 10 dias a 6,3 por cento ao ano?

R.: 385$00.

8.º Qual é o capital que a 1,5 por cento vence de juro 215$97 em 3 anos e 10 meses?

R.: 3.756$00.

9.º Que tempo deve estar colocado na caixa económica o capital de 55$00, a 3,5 por cento ao ano, para vencer o juro de 3$00?

R.: 561 dias ou 1ª 6^{mes} 21^{d}.

10.º Um negociante comprou vinho a $80 o almude, e dois anos depois vendeu-o a 1$20. Quantos por cento ao ano lhe rendeu o capital?

R.: 25 %.

11.º Um caminho de ferro, cujas acções estão a 100$00, deu 8$40 de dividendo por cada acção; qual foi a taxa a que os accionistas empregaram o capital?

R.: 8,4 %.

12.º A que taxa se deve colocar a quantia de 10.400$00, para se obter o rendimento de 30$00 por mês?

R.: 3, 4 %.

13.º Uma pessoa empregou uma quantia à taxa de 3 %. O seu rendimento diário é de $72. Qual foi a quantia empregada?

R.: 8.640$00.

14.º Qual é mais vantajoso? Emprestar 3.360$00 a 5 % ou emprestar 1.900$00 a 4 1/2 por cento e o resto a 5 3/4 por cento?

R.: O segundo processo é mais vantajoso, porque o rendimento anual aumenta 1$45.

15.º Durante quanto tempo deverá uma quantia estar emprestada a 6 %, para que os juros produzidos igualem os 3/4 do capital?

R.: Para o capital 100 os 3/4 são 75.

100 para render 6 é preciso 1 ano

100 » » 75 » » $\frac{1 \times 75}{6}$ ou 12ª e 6^nics^.

16.º Qual é o vencimento líquido mensal dum funcionário público que ganha anualmente 6.000$00 e paga 20 % de imposto de rendimento?

R.: 400$00.

17.º Quanto terá de ser pago por uma factura de 136$00, sôbre a importância da qual se fez um desconto de 4 1/2 %?

R. 136$00 — 6$12 = 129$88.

18.º Um sócio da Cooperativa Militar fez as seguintes compras: num sapateiro gastou 12$00, onde lhe deram o desconto de 3 1/2 %; num alfaiate gastou 55$00 com o desconto de 4 %; numa loja de modas comprou fazendas na importância de 150$00, onde lhe deram o bónus de 5,5 por cento. Quanto pagou na totalidade?

R.: 206$13.

19.º O sócio da Cooperativa Militar, que tenha depositado na caixa económica dêste estabelecimento a totalidade dos descontos recebidos no problema anterior, quanto tem em depósito no fim de 6 meses e 20 dias, se a taxa fôr de 4 %?

R.: 11$11.

20 — Um freguês comprou numa papelaria impressos e livros na importância total de 124$00. Quanto economizou nesta compra sabendo-se que nesta casa encontra os artigos 12 % mais baratos do que noutro estabelecimento?

R.: 14$88.

21 — Qual é o valor actual duma letra no desconto por fora de 1.336$00, pagável a 5 meses e 17 dias, supondo a taxa a 5 1/2 %?

R.: 1.336$00 — 34$08,6 = 1.301$91,4.

22 — Calcular o desconto por dentro duma letra de 500$00 que se vence de hoje a 20 dias, à taxa de 6 %?

R.: 1$66.

23 — Fazem descontar por fora duas letras, uma de 1.800$00 a 4 %, pagável em 6 meses, a outra de 1.300$00 a 5 %, pagável em 4 meses e 10 dias. Quanto ficará em poder do banqueiro?

R.: 36$00 + 23$47,2 = 59$47,2.

24 — Uma letra de 180$00, a vencer em 1 de Janeiro, foi descontada em 10 de Novembro do ano anterior, à taxa de 5 %. Qual foi o desconto por dentro?

R.: 1$30.

25 — Qual é o desconto por dentro de uma letra de 370$00 a 90 dias e à taxa de 6 por cento?

R.: Dd. = 5$46.

Câmbio

30 — Chama-se câmbio a permutação ou a troca de dinheiro por dinheiro. É neste sentido que a palava câmbio é tomada comercialmente.

O câmbio divide-se em *interior* e *exterior* conforme a troca do dinheiro se efectua entre praças do mesmo país ou entre praças de países diferentes.

31 — No câmbio *miudo* dá-se a troca de moeda na mesma praça; por exemplo a troca duma moeda de ouro por moeda de prata ou de cobre, ou por notas do banco e recìprocamente.

No câmbio de transferência faz-se a troca de moeda entre duas praças do mesmo país ; por exemplo entre Lisboa e Pôrto ; Pariz e Leão, etc.

Câmbio de transferência é a troca de moeda entre duas praças do mesmo país, por exemplo, entre Lisboa e Pôrto, entre Rio de Janeiro e S. Paulo, etc.

32 — O prémio, que se paga ou recebe pelo câmbio miudo, chama-se *ágio*, e o que se paga ou recebe pelo câmbio de transferência, chama-se *transferência.*

33 — O câmbio de transferência pode efectuar-se de dois modos: ou o negociante, que tem de mandar dinheiro para outra praça, compra na sua praça um cheque e *remete-o* depois ao credor, por intermédio de um banco, ou dá ordem ao credor para *sacar* sôbre êle a quantia a pagar.

34 — Diz-se que o *câmbio* está ao *par*, quando as moedas que se permutam tēem o mesmo valor intrínseco.

Êste valor depende de o pêso do ouro ou o da prata existente numa dada moeda ser igual ao pêso do ouro ou da prata existente na outra moeda.

Os bancos imprimem notas que circulam e tēem o mesmo valor do dinheiro, quando as reservas metálicas do banco emissor correspondem exactamente ao valor das notas em circulação dando-se o caso das notas terem um valor superior à moeda por causa da facilidade do seu transporte. Se o banco emite notas, cuja soma seja superior às suas reservas monetárias, nesse caso o valor da nota sofre uma depreciação e diz-se que há uma *inflaxão.*

35 — No câmbio exterior uma das praças dá sempre o *certo* e a outra o *incerto.*

O *certo* é a *unidade de câmbio*, isto é, a porção fixa de moeda duma certa praça que se toma para base das relações cambiais.

O *incerto*, a que também se dá o nome de *preço de câmbio*, ou simplesmente de *câmbio*, é o valor variável que a unidade de câmbio terá na praça que recebe o certo.

Assim, por exemplo: a praça de Lisboa *dá o certo* a Londres e *recebe* desta praça o *incerto*. O certo de Lisboa é 1$00 e o incerto de Londres é uma quantidade maior ou menor do pence, que depende das circunstâncias económicas e das relações comerciais das duas praças. Se o incerto fôr 2 3/8, diz-se que o câmbio está a 2 3/8, ou que por cada 1$00 português se paga em Londres 2 e 3/8 do pence ou dinheiro esterlino.

Como a libra tem 20 shillings e cada shilling vale 12 pences, a libra vale 240 pences ou dinheiros. Portanto para o câmbio estar ao par é preciso que 1$00 valha 53 1/3 ou 53,33 (tendo-se reduzido 1/3 a dízima), o que se vê fàcilmente pela seguinte regra de três, sabendo que a libra ao par valia 4$50.

4,5 escudos valem 240 pences
1 escudo valerá x »

$$x = \frac{240}{4,5} = 53,33...$$

Exercício I — Estando o câmbio de Lisboa sôbre Londres a 25 d, quanto se pode mandar pagar em Londres com 4.000$00?

Lisboa	Londres
1 esc.	25 d
4.000 »	x

$$x = 4.000 \times 25 = 100.000 \text{ d} = 416£\ 13^{\text{sh.}}\ 4^{\text{d}}$$

Exercício II — Estando o câmbio de Lisboa sôbre Pariz a 60 cent., quanto se pode pagar em Pariz com 500$00?

Lisboa	Pariz
$60	1
500$00	x

$$x = 833 \text{ francos}$$

Exercício III — Estando o câmbio do Rio de Janeiro sôbre Londres a 18, quanto valerá 4.000$000 réis em moeda inglesa?

Rio		Londres
1$000 réis	. . . . .	18 d
4.000$000 »	. . . . .	x

$$x = 72.000 \text{ d} = 300 \text{ £}$$

Exercício IV — Estando o câmbio entre Lisboa e Madrid a 3$14 centavos, qual é a equivalência de 2.150$00 em moeda espanhola?

Lisboa		Madrid
3$14 cent.	. . . . .	1 pt.
2.150$00 »	. . . . .	x

$$x = \frac{2.150\$00 \times 1}{3\$14} = 684^{\text{pts.}}$$

Fundos públicos

36 — O Estado precisa por vezes pedir dinheiro emprestado para fazer face a despezas, para as quais não chegam as suas receitas. Os governos recorrem então ao *crédito* para receber por empréstimo o dinheiro preciso para suprir a insuficiência das receitas e desta maneira contraem *dívidas públicas*, cujos encargos pesam sôbre as respectivas nações.

O empréstimo contraído pelo Estado pode ser realizado com a condição de ser pago o capital num prazo mais ou menos longo, ou então o Estado não ter de pagar o capital emprestado e só pagar perpètuamente um juro convencionado.

No primeiro caso a dívida chama-se *flutuante* e no segundo caso *fundada ou consolidada.*

Os documentos que o Estado dá aos credores, como recibo do dinheiro que foi entregue, são os *títulos da Dívida Pública.*

Chamam-se *inscrições* os títulos da dívida consolidada interna.

Chamam-se *bonds* os documentos da divida consolidada externa.

A *dívida flutuante* é representada por *escritos* ou *bilhetes de tesouro* e obriga a nação ao pagamento do capital e juro em épocas determinadas.

37 — A *dívida fundada* subdivide-se em *interna* e *externa*, segundo é contraída no país ou no estrangeiro.

38 — As inscrições podem ser de *assentamento* ou de *coupon*; as de assentamento são títulos que contêem o nome do possuïdor, e são averbadas na Junta de Crédito Público, que só paga os juros delas às pessoas ou entidades em nome de quem estiverem averbadas, devendo os recibos ser assinados pelos possuïdores e a assinatura ser reconhecida pelo tabelião.

As de coupon são títulos ao portador, sendo por isso os juros pagos a quem apresentar o coupon do semestre, isto é, uma tira de papel que para êsse fim se corta do próprio título.

Há inscrições de assentamento de 100$000 réis, 500$000 réis, de 1, 5, 10, 15 e 20 contos de réis nominais.

As inscrições de coupon são do valor nominal de 100$000 réis (cem escudos), 500$000 réis (quinhentos escudos) e de conto de réis (mil escudos).

39 — As inscrições vencem um juro anual de 3 %, pago aos semestres, sôbre o seu valor nominal, mas sofrem a título de imposto de rendimento a dedução de 30 %.

40 — As inscrições estão, como todos os títulos sujeitas à influência das circunstâncias gerais do mercado e das condições económicas e políticas da nação e por isso o seu valor é variável. Êste valor, a que se dá o nome de *cotação*, é sempre referido a 1$00 nominal; assim, quando se diz que as inscrições estão a 42,50, significa que 1$00 nominal de inscrição se compra com 42,50 em dinheiro (centavos).

Quando as inscrições estão a 100, diz-se que estão *ao par*, e, quando estão a mais ou menos que 100, diz-se que estão respectivamente *acima* ou *abaixo do par*.

Títulos de emprêsas particulares

41 — *Acções*. — Para a exploração de certos negócios constituem-se emprêsas comerciais e industriais para obterem o capital, que dificilmente seria cedido por um só indivíduo. Constituem-se também *companhias e bancos* formados por indivíduos que se associam concorrendo com os capitais necessários para a exploração da emprêsa.

Para fazer a distribuïção do capital pelos diversos sócios emitem-se títulos, chamados *acções*, podendo cada indivíduo receber o número de acções que desejar, dentro dos limites do capital que a emprêsa instituír, ficando com o direito de comparticipar dos lucros, ou a sofrer os prejuízos proporcionalmente ao capital empregado.

Os *accionistas*, isto é, os possuïdores duma ou mais acções adquirem o direito a uma parte do capital social e a sua responsabilidade pode ter por limite o valor nominal dos títulos que possuírem, ou não ter limite algum.

O primeiro caso dá-se nas sociedades de *responsabilidade limitada* e o segundo dá-se nas de *responsabilidade ilimitada.*

A parte dos lucros que a sociedade distribui anual ou semestralmente pelos sócios chama-se *dividendo.*

Como as acções são papéis de crédito negociáveis, estão sujeitas a variações do seu valor efectivo.

42 — As *obrigações* são títulos que representam a quantia com que cada indivíduo subscreveu para um empréstimo contraído por uma sociedade. Os possuïdores das obrigações têem por garantia os fundos da sociedade emissora, mas recebem apenas o juro estipulado, sem terem direito a qualquer comparticipação nos lucros.

As obrigações podem variar de valor efectivo, como as acções, mas o reembôlso é geralmente feito pelo seu valor nominal, e deixam de vencer juros desde a data em que foram sorteadas.

Problema I — Estando as inscrições a 47,20, quanto valem em dinheiro 15.000$00 em inscrições?

100	valem	47,20
15.000$00	valerão	x

x = 7.080$00

Problema II — Qual é o rendimento anual de 15.000$00 em inscrições?

É preciso atender que o juro real é de 3 menos 30 % ou seja 2,1.

100 centavos nominais rendem	2,1
15.000$00 nominais renderão	x

x = 315$00

EXERCÍCIOS

1.º Estando o câmbio do Pará sôbre o Rio de Janeiro a 2,5 por cento contra o Pará, quanto custará a um negociante desta praça uma letra de réis 2.000$000 sôbre o Rio de Janeiro?

R.: 2.050$000 réis.

2.º Estando o câmbio de Lisboa sôbre Londres a 50 $^3/_4$, quanto teremos de pagar em Londres por 20 libras?

R.: 94$58.

3.º Estando o câmbio de Lisboa sôbre Pariz a $60, quanto se pode mandar pagar em Pariz com 800$00?

R.: 1.333 francos.

4.º Estando o câmbio do Rio de Janeiro sôbre Londres a 18, quanto valem réis 2.000$000 em moeda inglesa?

R.: 150 £.

5.º Estando o câmbio entre Lisboa e Madrid a 2$40 qual é a equivalência de 240$00 em moeda espanhola?

R.: 100 pesetas.

6.º Estando o câmbio de Pariz sôbre Londres a 24, quanto valem em Londres 35.000 francos?

R.: (O câmbio a 24 significa que uma libra vale 24 francos) 1458 £ — 6 ^{sh} — 8 ^{d}.

7.º Estando o câmbio do Rio de Janeiro sôbre Londres a 15 $^5/_8$ e o de Londres sôbre Lisboa a 49 $^3/_4$, quanto se tem de dar no Rio de Janeiro, para pagar em Lisboa por intermédio de Londres a quantia de 2.500$00?

R.: 7.960$000 réis.

$$\begin{array}{lcr} x \text{ rs. equiv. a} & & 2.500\$00 \\ 1\$00 & \text{»} \ \text{»} & 49{,}75 \text{ d} \\ 15{,}625 & \text{»} \ \text{»} & 1\$000^{\text{rs}} \end{array}$$

$$x = \frac{2.500\$00 \times 49{,}75 \times 1\$000}{1\$00 \times 15{,}625}$$

8.º Estando as inscrições a 42,50 que capital nominal se pode comprar com 1.105$00 em dinheiro?

R.: 2.600$00.

9.º Estando as inscrições a 41,75, enquanto importam 4.200$00 nominais de inscrições?

R.: 1.753$50.

10.º Que juro recebe por semestre um indivíduo que possui 8.500$00 em inscrições?

R.: 89$25.

11.º Estando as inscrições cotadas a 50, qual é o juro real dêsses títulos?

R.: 4,2 %.

12.º Qual é a cotação das inscrições, quando se compram 2.500$00 nominais com 1.065$00 em dinheiro?

R.: 42,60.

13.º Estando as inscrições a 44,50, qual é o juro real?

R.: 4,71 %.

14.º Comprando-se as acções do Banco de Portugal a 154$50, que juro produz o capital empregado em 10 acções no ano em que o dividendo seja de 12 %?

R.: 185$40.

15.º As acções do Banco Nacional Ultramarino (de 90$00) têem 12 % de prémio e as do Banco Lisboa & Açores (de 100$00) têem 8 %. Quantas das primeiras rendem tanto como 28 das segundas ?

R. : 20.

Regra de companhia

33 — *A regra de companhia* tem por fim dividir entre várias pessoas os lucros ou as perdas que tiveram na exploração duma emprêsa ou em qualquer negócio feito de sociedade.

Os lucros ou as perdas de cada sócio devem ser distribuídos proporcionalmente ao capital com que entrou e também ao tempo que êsse capital esteve empregado.

A regra de companhia é *simples*, quando as entradas de todos os sócios estão empregadas na sociedade durante o mesmo tempo, e *composta*, quando os intervalos de tempo são desiguais.

Como o lucro ou perda é directamente proporcional ao capital empregado e ao tempo, a regra de companhia pode resolver-se como uma regra de três.

34 — *Exemplo da regra de companhia simples*—Três indivíduos fizeram uma sociedade, para a qual entrou o primeiro com 4.000$00, o segundo com 6.000$00 e o terceiro com 7.200$00. No fim dum ano havia o lucro de 3.600$00. Quanto é o lucro pertencente a cada sócio ?

A soma das quantias com que entraram os sócios é de 17.200$00.

A êste capital corresponde o lucro total de 3.600$00, e, como êste é proporcional ao capital, teremos :

o capital 17.200$00 rendeu . . . . 3.600$00
» » 4.000$00 do 1.º sócio x

$$x = \frac{4.000\$00 \times 3.600\$00}{17.200\$00} = 837\$21$$

Pelo mesmo motivo o lucro do 2.º sócio será :

$$y = \frac{6.000\$00 \times 3.600\$00}{17.200\$00} = 1.255\$82$$

Finalmente, o do 3.º sócio será:

$$z = \frac{7.200\$00 \times 3.600\$00}{17.200\$00} = 1.506\$98$$

35 — *Exemplo de regra de companhia composta* — Três indivíduos constituíram uma sociedade, para a qual entrou o primeiro com 800\$00 por 3 anos, o segundo com 1.400\$00 por 2 anos e o terceiro com 900\$00 por 4 anos. Houve o lucro de 720\$00. Quanto pertenceu a cada um?

Como o lucro é proporcional ao tempo, o lucro do capital 800\$00 em 3 anos equivale ao lucro de 3 vezes o capital 800\$00 num único ano.

Da mesma maneira o capital 1.400\$00 em 2 anos dá o mesmo lucro que duas vezes o capital 1.400\$00 num ano. E aínda 900\$00 em 4 anos equivale a 4 vezes êste capital num ano.

Podemos pois supor que todos os sócios entraram por um ano, o primeiro com 3 × 800\$00, o segundo com 2 × 1.400\$00 e o terceiro com 4 × 900\$00, ficando a questão reduzida a uma regra de companhia simples, que se apresenta da forma seguinte:

Três indivíduos constituíram uma sociedade: o 1.º entrou com 2.400\$00 (3 × 800\$00) o 2.º com 2.800\$00 (2 × 1.400\$00) e o 3.º com 3.600\$00 (4 × 900\$00). O lucro obtido foi de 720\$00. Quanto pertence a cada socio?

Agora prosegue-se na resolução do exercício, como no caso da regra de companhia simples. A soma das entradas é de 8.800\$00. Esta quantia produziu o lucro de 720\$00; logo pela regra de três obtemos:

8 800\$00 produziu	720\$00
2.400\$00 produzirá	x

$$x = \frac{2.400\$00 \times 720\$00}{8.800\$00} = 196\$30$$

O lucro do 2.º sócio será:

$$y = \frac{2.800\$00 \times 720\$00}{8.800\$00} = 229\$99$$

O lucro do 3.º sócio será:

$$z = \frac{3.600\$00 \times 720\$00}{8.800\$00} = 294\$54$$

Regra de mistura ou de liga

36 — A regra de *mistura* ou de *liga* tem por fim resolver alguns dos seguintes problemas:

1.° Calcular o preço duma mistura, conhecendo as quantidades e os preços respectivos das substâncias que a compõem;

2.° Calcular em que proporções se devem misturar substâncias, para que o seu preço médio tenha um valor estipulado.

Exemplo I — Misturam-se 100 litros de vinho a 1\$00 o litro com 60 litros a 1\$60 e 30 litros de água. Qual é o preço porque sai cada litro de mistura?

100	litros a	1\$00	valem	1\$00 × 100 =	100\$00
60	» »	1\$60	»	1\$60 × 60 =	96\$00
30	» »	0\$00	»	=	00\$00
190					196\$00

$$1 \text{ litro de mistura vale pois } \frac{196\$00}{190} = 1\$03$$

Exemplo II — Que porção de licor a 4\$80 o litro deveremos juntar a 100 litros de licor de 6\$00 o litro, para que se possa vender cada litro de mistura a 5\$20, sem perder nem ganhar?

DISPOSIÇÃO DOS DADOS

1 litro de 4\$80 vendido a 5\$20 dá de lucro \$40
1 » » 6\$00 » » 5\$20 » » perda \$80

1.° método: Pelas proporções — Representando por x e por y o número de litros que se devem tomar a 4\$80 e a 6\$00, como o ganho deve compensar o prejuízo, devemos ter:

$$x \times \$40 = y \times \$80$$

$$\frac{x}{y} = \frac{\$80}{\$40}$$

Se der agora a y qualquer valor, por exemplo 100, acho o valor que resulta para x. E assim para y = 100, fica-nos:

$$\frac{x}{100} = \frac{80}{40} \text{ donde } x = 200$$

2.º Outro processo:

DISPOSIÇÃO DOS DADOS

$$\begin{array}{ccccc} 4\$80 & & & & \$80 \\ & & 5\$20 & & \\ 6\$00 & & & & \$40 \end{array}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{\$80}{\$40}$$

dando o y o valor de 100 temos:

$$x = \frac{100 \times 80}{40} = 200 \text{ litros}$$

37 — *Regra de liga* é a regra de mistura aplicada aos metais.

Chama-se *título* de uma liga a relação do pêso do metal precioso, ouro ou prata, para o pêso total.

Por conseqüência, se representarmos por P o pêso total da liga e por p o pêso do metal precioso e por T o título da liga, ter-se-á:

$$T = \frac{p}{P}, \text{ donde } p = P \times T \text{ e } P = \frac{p}{T}$$

Logo, em uma liga, *o pêso do metal precioso é igual ao pêso total multiplicado pelo título, e o pêso total é igual ao pêso do metal precioso dividido pelo título.*

38 — *Exercício I* — Fundiram-se juntamente duas barras de prata; a primeira pesava 1.200 gramas e tinha o título 0,850, a 2.ª tinha o título 0,920 e pesava 2.000 gramas. Qual será o título da liga?

1.200 $\times$ 0,850 = 1020 gr. pêso da prata da 1.ª barra
2.000 $\times$ 0,920 = 1840 gr. pêso da prata da 2.ª barra
1.020 + 1840 = 2860 gr. pêso da prata contido na barra única, que pesa 1.200 + 2000 = 3.200, cujo título da liga será:

$$t = \frac{2860}{3200} = 0{,}893$$

39 — *Exercício II* — Que porção devemos tomar de duas barras de ouro, tendo a primeira o título de 0,800 e a segunda o título de 0,950, para formar uma barra de 2 kg, com o título de 0,910?

DISPOSIÇÃO DOS DADOS

$$\begin{array}{ccc} 0{,}800 & & 0{,}040 \\ & 0{,}910 & \\ 0{,}950 & & 0{,}110 \end{array}$$

Na primeira barra há 0,110 de ouro a menos do que na liga que se deseja obter; na segunda há 0,040 a mais; então, para que se compense, devemos tomar 40 gramas ao título 0,800, tôdas as vezes que tomarmos 110 com o título 0,950. O problema consiste pois em dividir 2 quilogramas, proporcionalmente aos números 40 e 110 ou 4 e 11 e ter-se-á

$$\frac{200 \times 4}{15} = 553^{gr}\ 1/3 \text{ ao título de } 0{,}800$$

$$\frac{200 \times 11}{15} = 1466^{gr.}\ 2/3 \text{ ao título de } 0{,}950$$

Exercício III — Tendo duas barras de prata, cujos títulos sejam respectivamente 0,914 e 0,928, em que relação devem estar os pesos de cada uma, para que, fundidas no mesmo cadinho, a liga obtida tenha o título de 0,916?

A 1 g. da 1.ª barra falta para igualar 1 g. da liga 0,002 de prata pura.

A 1 g. da 2.ª sobeja para igualar 1 g. da liga 0,012.

Representando por x e y os pesos, teremos que

Em x gramas da 1.ª faltam . . $x \times 0,002$
Em y » » 2.ª sobejam. . $y \times 0,012$

Para não haver excesso nem falta deverá ser

$$x \times 0,002 = y \times 0,012$$

ou

$$\frac{x}{y} = \frac{0,012}{0,002} = \frac{12}{2} = \frac{6}{1}$$

isto é, em cada 7 g. de liga devemos empregar 6 g. da primeira barra e 1 g. da segunda.

EXERCÍCIOS

1.º Dois indivíduos constituíram uma sociedade, para a qual deram respectivamente 3.000\$00 e 3.400\$00. O trabalho do primeiro foi calculado em 3/4 do capital social e o do segundo em 1/3 dêsse mesmo capital. No fim do ano o lucro foi de 2.400\$00. Qual é a parte que compete a cada sócio?

O capital social é 3.000\$00 + 3.400\$00 = 6.400\$00

A entrada do 1.º é 3.000\$00 + $\frac{3}{4} \times$ 6.400\$00 = 7.800\$00

A entrada do 2.º é 3.400\$00 + $\frac{1}{3} \times$ 6.400\$00 = 5.533\$33

Ter-se-á então:

Para parte do 1.º

$$\frac{2.400\$00 \times 7.800\$00}{13.333\$33} = 1.404\$00$$

Para parte do 2.º

$$\frac{2.400\$00 \times 5.533\$33}{13.333\$33} = 996\$00$$

2.º Três sócios constituíram uma emprêsa, entrando o primeiro com 2.700$00, o segundo com 5.000$00 e o 3.º com 18.000$00 Passado um ano a sociedade obteve o lucro de 256$20. Quanto pertence a cada socio?

R.: 1.º — 26$91,5; 2.º — 49$84,5; 3.º — 179$44

3.º Dois sócios tiveram o lucro de 150$00, tendo entrado o primeiro com 300$00 durante 15 meses, e o outro com 550$00 por dez meses. Qual é a parte que pertence a cada um?

R.: 1.º — 67$50; 2.º — 82$50.

4.º Três indivíduos associaram-se para fundar uma fábrica, entrando um com 36.000$00, outro com 45.000$00 e o terceiro com 27.000$00. Aconteceu, porém, que passados 4 anos a fábrica teve que fechar, porque dava já 18.000$00 de prejuízo. Qual foi a perda que sofreu cada um dos sócios?

R.: 1.º — 6.000$00; 2.º — 7.500$00; 3.º — 4.500$00.

5.º Um negociante começou uma emprêsa com 216$00; 8 meses depois associou-se outro, que entrou com 3.348$00, e, 14 meses depois da entrada dêste, foi admitido um novo sócio, que contribuíu com 5.400$00. A emprêsa durou 6 anos, deixando por fim 8.640$00 de lucro para repartir pelos sócios. Qual é a parte que pertence a cada sócio?

R.: 1.º — 268$83,3; 2.º — 3.703$92,3; 3.º — 4.667$24,2.

6.º Misturaram-se 20 litros de feijão de 2$60, com 12 litros de feijão de 2$10 e com 8 litros de feijão de 1$90. Qual é o preço da mistura?

R.: 2$31.

7.º Dum barril de vinho que estava cheio e continha 240 litros, cujo preço era de 1$40 o litro, gastou-se 1/4 que se substituíu por vinho de 1$10 o litro. Qual é o preço da mistura?

R.: 1$32,5.

8.º Tendo duas qualidades de café, uma de 7$00 o kg. e outra de 8$60, em que razão se devem misturar, para que a mistura se possa vender a 8$00 o kg.?

R.: $\frac{3}{5}$

9.º Tendo duas qualidades de açúcar, uma de 3$00 o kg. e outra de 3$30, em que razão se devem misturar para que o mixto se possa vender a 3$20 o kg.?

R.: $\frac{1}{2}$.

ÍNDICE

	Págs.
2.º curso de habilitação — Programa	3
Números fraccionários	5
Simplificação de fracções	6
Redução de quebrados ao mesmo denominador	11
Operações sôbre fracções	14
Potenciação de fracções	28
Raíz quadrada	29
Números complexos	35
Operações sôbre números complexos	39
Razões e proporções	49
Razões e proporções geométricas	51
Propriedades das proporções	52
3.º curso de habilitação — Programa	57
Grandezas proporcionais	59
Regra de três	61
Regra de três simples	62
Regra de três composta	65
Juro simples	70
Caso em que o capital está somado com o juro	74
Aplicação das fórmulas dos juros	77
Descontos	80
Câmbio	92
Fundos públicos	94
Títulos de emprêsas particulares	95
Regra de companhia	99
Regras de mistura e de liga	101