Asociación Española
para el Progreso
de las Ciencias

LIGAÇÃO DA ANALISE INDETERMINADA COM A ANALISE COMBINATORIA

POR

CARLOS EUGENIO ALVARES PEREIRA
PROFESSOR DO COLÉGIO MILITAR

Huelves y Compañía
Hilarión Eslava, 5. Madrid

Ligação da analise indeterminada com a analise combinatoria

POR

Carlos Eugenio Alvares Pereira

PROFESSOR DO COLÉGIO MILITAR

(Sesión del 23 de Mayo de 1929)

Procurando a relação entre o numero de raizes inteiras e positivas exceptuando as soluções nulas, das equações indeterminadas da forma:

$$x + y = 10$$
$$x + y + z = 10$$
$$x + y + z + v = 10$$

em que os coeficientes das incognitas são iguais a unidade e em que o 2.° membro é constante, e o numero de combinações de 10 objetos dois a dois, tres a tres, n a n, notámos que essa relação é uma fracção que tem por numerador o numero de incognitas das equações consideradas e por denominador o 2.° membro da equação.

Passaremos a indicar as tentativas que fizémos para chegar a esta conclusão e finalmente a sua justificação.

Suponhamos a equação $x + y = 10$ e procuremos as suas raizes inteiras e positivas, exceptuando as soluções nulas.

Uma das raizes inteiras é evidentemente $x = 1$ e $y = 9$.

Todas as raizes inteiras são dadas pelas fórmulas:

$$x = 1 + t \text{ e } y = 9 - t.$$

As raizes inteiras e positivas serão as dadas pelos valores de t que tornem simultaneamente $1 + t > 0$ e $9 - t > 0$ ou $t > -1$ e $t < 9$, ou sejam 9 raizes.

O numero de combinações de 10 objectos dois a dois é 45 e a relação entre o numero de raizes e o numero de combinações e

$$\frac{9}{45}=\frac{1}{5}=\frac{2}{10}$$

Suponhamos agora a equação: $x+y+z=10$ e façamos $y+z=u$, para reduzirmos a forma: $x+u=10$.

Todas as raizes inteiras são dadas pelas formulas $x=1+t$ é $u=9-t$ e todas as raizes inteiras e positivas pelos valores de t que tornem simultaneamente $1+t>0$ e $9-t>0$, ou sejam os valores de $t>-1$ e $t<9$
e portanto os valores 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
aos quais correspondem os valores de

$$\begin{array}{lcl} u=9 & e & x=1 \\ u=8 & e & x=2 \\ u=7 & e & x=3 \\ u=6 & e & x=4 \\ u=5 & e & x=5 \\ u=4 & e & x=6 \\ u=3 & e & x=7 \\ u=2 & e & x=8 \\ u=1 & e & x=9 \end{array}$$

e como $u=y+z$, verefica-se que o numero de raizes que resultam para cada uma das hipóteses apresentadas é sucessivamente 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 e portanto a sua totalidade: $8+7+6+5+4+3+$ $+2+1=36$.

Na contagem das raizes exceptuou-se a ultima hipotese por conduzir a soluções nulas.

O numero de combinações de 10 objectos tres a tres e 120.

A relação entre o numero de raizes e de combinaçoes é: $\frac{36}{120}=\frac{3}{10}$

Continuando ainda a verificar se o principio se mantem para a equação: $x+y+z+v=10$, fazendo $y+z+v=w$, para a reduzir a forma: $x+w=10$, já sabemos que as raizes que satisfazem são as que tornam simultaneamente:

$$\begin{array}{llll} x=1 & w=9 & ou & y+z+v=9 \\ x=2 & w=8 & ou & y+z+v=8 \\ x=3 & w=7 & ou & y+z+v=7 \\ x=4 & w=6 & ou & y+z+v=6 \\ x=5 & w=5 & ou & y+z+v=5 \\ x=6 & w=4 & ou & y+z+v=4 \\ x=7 & w=3 & ou & y+z+v=3 \end{array}$$

e contando o numero de raizes para cada uma das hipoteses apresentadas, verificamos que são respectivamente: 28, 21, 15, 10, 6, 3, 1, e portanto a sua totalidade: $28 + 21 + 15 + 10 + 6 + 3 + 1 = 84$

O numero de combinações de 10 objectos quatro a quatro e 210, e a relação entre o numero de raizes e de combinações $\frac{84}{210} = \frac{4}{10}$.

Investigando a origen d'esta relação, notámos que o numero de combinações de m objectos n a n depende, quanto á forma como se géram os diferentes agrupamentos que hão-de dar lugar ao numero total de combinações, do numero m (total) dos objectos, por isso que cada agrupamento difére, pelo memos, por um objecto, ao passo que o numero de soluções das equações, emquanto á forma dos agrupamentos que as hão-de gerar, depende do numero de incognitas das equações, visto que os objectos são agrupados diferentemente em cada uma das hipoteses e apenas a sua totalidade tem de ser igual a m.

Para demonstrarnos, na generalidade, que a relação entre o numero de soluções inteiras e positivas, exceptuando as soluções nulas, da equação indeterminada da forma:

$$x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_n = m$$

e o numero de combinações de m objectos n a n, sendo m o 2.º membro da equação e n o número de incognitas, e igual a relação $\frac{n}{m}$ começamos por demostrar o seguinte.

Teorema.—O numero de raizes inteiras e positivas, exceptuando as soluçôes nulas, da equação indeterminada:

$$x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_n = m,$$

é igual ao numero de combinaçóes de m-1 objectos n-1 a n-1.

Com efeito, supondo que a equação tem apenas duas incognitas, teremos:

$$x_1 + x_2 = m,$$

e o numero de soluções inteiras e positivas, exceptuando as soluções nulas, é evidentemente:

$$m\text{-}1 = C^{m-1}_{n-1}$$

(numeros de combinações de m-1 objectos n-1 a n-1, em que $n = 2$)

Pelo método de indução matematica, vamos demonstrar que se admitirmos que o teorema é verdadeiro quando a equação tiver n incognitas, ainda se verificará para $n + 1$.

Suponhamos uma equação, com $n + 1$ incognitas, da forma:

$$x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_n + x_{n+1} = m$$

e façamos: $$x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_n + \cancel{\partial} = y$$

resultará a equação: $$y + x_{n+1} = m$$

O numero total de soluções inteiras e positivas, exceptuando as soluções nulas, será a soma do numero de soluções das equações:

$$\begin{array}{ll}
y = n & x_{n+1} = m-n \\
y = n+1 & x_{n+1} = m-n-1 \\
y = n+2 & x_{n+1} = m-n-2 \\
\cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot \\
y = m-1 & x_{n+1} = 1
\end{array}$$

ou das equações equivalentes:

$$\begin{array}{ll}
x_1 + x_2 + \ldots\ldots\ldots + x_n = n & x_{n+1} = m-n \\
x_1 + x_2 + \ldots\ldots\ldots + x_n = n+1 & x_{n+1} = m-n-1 \\
x_1 + x_2 + \ldots\ldots\ldots + x_n = n+2 & x_{n+1} = m-n-2 \\
\cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot \\
x_1 + x_2 + \ldots\ldots\ldots + x_n = m-1 & x_{n+1} = 1
\end{array}$$

cujo numero total de soluções inteiras e positivas, exceptuando as soluções nulas, será, admitindo que o teorema é verdadeiro para n incognitas:

$${}^{n-1}C_{n-1} + {}^{n}C_{n-1} + {}^{n+1}C_{n-1} + \ldots\ldots + {}^{m-2}C^{n-1}$$

mas, como aquela soma e igual a: $${}^{m-1}C_n$$

em consequencia d'um corolario do teorema que nos diz: que: o numero de combinações de m objectos n a n e igual ao numero de combinações de $m-1$ objectos n a n, mais o numero de combinações de $m-1$ objectos $n-1$ a $n-1$, está demostrado que o teorema e verdadeiro para $n+1$ incognitas; e como e verdadeiro para duas será verdadeiro para trez e assim sucessivamente para qualquer numero de incognitas.

Corolario.—Na equação indeterminada da forma:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = m$$

a relação, do numero de soluções inteiras e positivas, exceptuando as soluções nulas, para o numero de combinações de m objectos n a n, e igual a $\frac{n}{m}$.

Com efeito, representando o numero de soluções por ${}^mS_n$ e o numero de combinações por ${}^mC_n$.

$$\frac{{}^mS_n}{{}^mC_n} = \frac{{}^{m-1}C_{n-1}}{{}^mC_n} = \frac{n}{m}$$