I Theses de Mathem.
II. Dissertação inaugural - Refracção
III. Sobre a natureza das linhas trigonometricas
IV Superficies e curvas no espaço
V Calculo das variações
VI Dynamica do ponto material.

Theses
Refracções atmosphericas
Triangulos trigonometricos
Theoria dos contactos
Calculo das variações
Dynamica do ponto material

MATRI . SVAE

ATQVE

FRATRI

EVGENIO . DA . COSTA . E . ALMEIDA

CARISSIMIS . ET . LONGE . COLENDISSIMIS

IN

PERPETVVM

AMORIS . OBSERVANTIAE . GRATIQVE . ANIMI

MONVMENTVM

LVDOVICVS . DA . COSTA . E . ALMEIDA

THESES

EX

ADPLICATA MATHESI DEPROMPTAE,

QUAS,

PRAESIDE

CLARISSIMO ET SAPIENTISSIMO VIRO

D. D. FRANCISCO DE CASTRO FREIRE

CHRISTI MILITIAE COMMENDATORE

MATHESEOS FACULTATIS PRIMARIO PROFESSORE,

AC DECANO

CAET., CAET., CAET.,

IN

CONIMBRICENSI ACADEMIA

PROPUGNANDAS OFFERT

Mensis Julii ~~diebus~~-12.

LUDOVICUS DA COSTA E ALMEIDA.

INAUGURALIS DISSERTATIONIS

EX

MATHESEOS FACULTATIS AMPLISSIMAE DECRETO

ARGUMENTUM:

Appreciação das hypotheses physicas em que se tem fundado a theoria das refracções atmosphericas.

Ex solidorum Mechanica

I

Mechanicae principia fundamentalia sola inveniri ratione, neglecta observatione, minime possunt.

II

Corporum aequilibrii legibus compertis, tunc eorum motus leges inquirendae.

III

De Lagrange doctrinam, T. 1.°, pag. 35, Mech. analyt., nempe « Il est clair que rien n'oblige dans cette methode à se servir de coordonnées rectangles, plutôt que d'autres lignes ou quantités relatives aux lieux des corps » propugnamus.

IV

A velocitatum virtualium atque d'Alembert principiis de Buquoy principium deducitur.

V

Ratio, qua Cl. Vène contra Poisson, T. 1.°, § 270 sententiam «Cette indetermination aurait lieu, en effet, si la table etait rigoureusement inflexible» pressiones assignat, nobis adcurata minime videtur.

VI

Hypothesis $\int x_i y_i dm = \int x_i z_i dm = \int y_i z_i dm = o$ a Poisson in Mech., T. 2.°, § 414 et seqq. admissa quamvis possibilis;

VII

Non tamen necessaria.

VIII

De hypothesi $l' = l'' = o$ § 418 idem adfirmandum.

IX

Omnes conclusiones a Poinsot in *Nova Theoria circa corporum rotationem* ex Euleris analysi quoque deduci possunt.

X

In corporum moventium systemate vivarum virium summa *maximum* aut *minimum* est, quoties idem systema per suas aequilibrii positiones transit:

XI

Primo aequilibrium stabile, secundo instabile.

XII

Minimae actionis principium a Maupertio positum in corporum percussione non semper datur.

Ex fluidorum Mechanica

I

Alio, quam in aequalitatis pressionis principio, Hydrostaticae fundamentum ponimus.

II

Ad efficiendum aequilibrium massae fluidae homogeneae, circum fixum axim volventis, et cujus particulae sese mutuo et ex naturae lege adtrahunt, ellipsoidis trium axium inaequalium figura inservire potest:

III

Minime autem ellipsoidis in polos producti.

IV

Penduli correctio, vulgo dicta *in vacuum reductio,* et Archimedis principio innixa, inexacta.

V

Demonstratio theorematis «ellipticam formam aequilibrio massae fluidae homogeneae, caet. (sicut in these 2), et cujus primitiva figura a sphaerica parum dissimilis ponitur, tantum convenire» a Laplace in Mech. Cel., liv. 3.°, cap. 4.° data, nos minime juvat:

VI

Vera tamen propositio.

VII

Theoria, quae mediorum resistentiam ex corporum conflictu ducit, haudquaque adcurata.

VIII

Doctrina a Cl. Castro in mech. pag. 324 tradita «Concluiremos pois que, se podérmos determinar 'num corpo dous eixos parallelos synchronos, a sua distancia $a+a'$ dará o comprimento do pendulo simples tambem synchrono, sem ser necessario determinar as quantidades a e k relativas á figura do mesmo corpo» tantummodo in vacuo vera.

IX

Aequatio $\frac{d^2V}{da^2}+\frac{d^2V}{db^2}+\frac{d^2V}{dc^2}=o$ a Laplace in Mech. Cel. liv. 3.° cap. 2.° data, si punctus adtractus intra sphaeroidem attrahentem, falsa: pro qua reponenda $\frac{d^2V}{da^2}+\frac{d^2V}{db^2}+\frac{d^2V}{dc^2}=-4\pi\rho$, cum sit ρ sphaeroidis adtrahentis densitas.

X

Sint *A*, *B*, *C*... corpora *conductores* in medio *isolador* alia juxta alia posita, cum horum quidquid quandam positivae aut negativae electricitatis acceperit quantitatem, hujus fluidi ad aequilibrium efficiendum unus tantum distributionis modus.

XI

Superior liberaque fluidi incompressibilis, homogenei atque ponderabilis, quod vase inclusum, constantique subjectum pressioni circum verticalem volvatur axim, revolutionis paraboloidis superficiem exhibebit: hoc tamen per Terrae rotationis motum in polis tantum fit.

XII

Tellus principio fluida.

Ex Astronomia physica

I

Planetarum existentiam Solem inter et Mercurium, quos hodierno memoravit tempore Cl. Leverrier, impugnamus.

II

Coronam luminosam atque *roseas protuberantias*, quas in integris Solis vidimus ecclipsibus, opticam censimus illusionem.

III

De stellarum scintillatione d'Arago sententiam accipimus.

IV

In astrum aberratione computanda eadem semper velocitas luci tribuenda.

V

Atmospherae vera constitutio adhuc latet:

VI

Ex cognitione tamen hujus constitutionis, stratuum sphaericitatis hypothesi permissa, tantummodo hodie pendet refractionum theoriae perfectio.

VII

Ad annuam Stellarum parallaxim supputandam methodus dicta *dos logares relativos* absolutorum methodo anteponenda.

VIII

Astronomicae observationes interplanetarii fluidi existentiam non adhuc firmant.

IX

Bolides esse Terrae Satellites profitentium rejicimus sententiam.

X

Series (11), quas in Astron. Cl. Roderici, Part. 2.ª, pag. 33 legimus, erunt convergentes si $e<o,66195\ldots$ proxime.

XI

Ejusdem Auctoris doctrina in Part. 1.ª, pag. 98, nempe «quando z' não é muito proximo de 90°, a parte principal da expressão de θ é independente d'aquella lei» etiam vera quum atmospherae vis refringens (poder refringente) sit varia ex continuitatis lege.

XII

De primitiva planetarii nostri systematis origine de Laplace theoriam propugnamus.

Ex Coelesti Mechanica atque Geodesia

I

Mutua Planetarum actio, tantum primum massarum excentricitatum inclinationumque ordinem spectando, planetarii nostri systematis stabilitatem alterare nequit.

II

Planetarum alios ab aliis provenisse credimus.

III

Doctrinam, quam apud Laplace Mech. Cel. liv. 3.°, cap. 6.°, invenimus, nempe «si à l'origine la Terre et la Lune avaient été placées sur une même droite, à des distances respectives, etc.,» impugnamus.

IV

Per Solis Lunaeque in Terram actionem fit, ut Terrae rotationis axis unus semperque idem,

V

Diversis tamen spatii locis respondeat: unde et praecessionis et nutationis phaenomena.

VI

Cometae seu in vacuo,

VII

Seu in medio ponderabili resistentique moveantur, eorum phaenomena solam gravitationem explicare non posse, credimus:

VIII

Vi alia opus est: eamque Cl. Faye invenisse probabile ducimus.

IX

In aequatione (9) Francoeur Geod. pag. 264 adplicanda multas intermediasque stationes adhibere oportet.

X

Ejusdem Auctoris aequatio (A'') pag. 230 (edic. 3.ª, Parisiis.), cum triangulorum latera sint permagna, corrigenda.

XI

Ad terrestrium longitudinum differentias computandas lunarium distantiarium methodus praestantissima.

XII

Geodesica opera apud Portucalia sub Cl. Ciera habita quidem imperfecta.

CONIMBRICAE — TYPIS ACADEMICIS — MDCCCLXII

DISSERTAÇÃO INAUGURAL

DISSERTAÇÃO INAUGURAL

PARA O ACTO

DE

CONCLUSÕES MAGNAS

DE

LUIZ DA COSTA E ALMEIDA.

COIMBRA
IMPRENSA DA UNIVERSIDADE
1862

AO

ILLUSTRISSIMO E EXCELLENTISSIMO SENHOR

FRANCISCO DE CASTRO FREIRE

COMMENDADOR DA ORDEM DE CHRISTO,
LENTE DE PRIMA E DECANO DA FACULDADE DE MATHEMATICA
ETC. ETC. ETC.

EM TESTIMUNHO

DE

RESPEITO E GRATIDÃO

LUIZ DA COSTA E ALMEIDA

DISSERTAÇÃO INAUGURAL

ARGUMENTO

Appreciação das hypotheses physicas em que se tem fundado a theoria das refracções atmosphericas.

ADVERTENCIA

Desde Ptolomeu até aos nossos dias o problema das refracções atmosphericas tem occupado a attenção d'um grande número de Geometras e Astronomos. Fazer a historia crítica de todos os seus trabalhos sôbre este ponto sería por certo objecto muito importante, mas que exigiria, para ser levado a cabo, muitissimo mais tempo do que é dado para trabalhos taes como este nosso: limitámos por isso nosso exame aos escriptos de Laplace e Ivory, cujos principios 'nesta theoria nos pareceram ser os mais geralmente seguidos.

DISSERTAÇÃO INAUGURAL

APPRECIAÇÃO DAS HYPOTHESES PHYSICAS EM QUE SE TEM FUNDADO A THEORIA DAS REFRACÇÕES ATMOSPHERICAS

Deducção da equação differencial da refracção

A luz que d'um astro vem incidir sôbre a atmosphera é por ésta refractada, e chama-se refracção atmospherica o angulo que a direcção do raio incidente forma com a que o mesmo raio traz 'no momento de chegar á camada do observador.

Para calcular este angulo, admittiremos: 1.° o systema da emissão na theoria da luz; 2.° supporemos que a refracção da luz é devida a uma attracção das moleculas do corpo para as da luz; attracção que varía com a distancia, de modo a tornar-se insensivel para distancias sensiveis; 3.° e finalmente supporemos a atmosphera quiescente e composta de camadas esphericas e homogeneas, cuja densidade varía d'uma para outra camada segundo uma lei qualquer contínua.

Tomemos para plano da trajectoria o plano vertical que passa pelo centro da terra, pelo observador e pelo astro; e tomemos para coordenadas 'neste plano a distancia do centro da terra a um ponto qualquer da trajectoria, e o angulo formado por aquelle raio com a vertical do observador, coordenadas que designaremos respectivamente por r e v.

Pôsto isto, sera

$$dv = \frac{c\,dr}{r^2\sqrt{q^2 - \frac{c^2}{r^2} - 2\int \varphi dr}} \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

a equação differencial da trajectoria da luz na atmosphera, sendo c e q duas constantes arbitrárias, e φ a fôrça accelaratriz proveniente da attracção das camadas atmosphericas.

E para obtermos o valor da refracção, chamando v' e θ os angulos que a tangente á trajectoria 'num ponto qualquer forma com o raio vector tirado para aquelle ponto e com a vertical do observador, teremos

$$v + v' = \theta \text{ e } r dv = dr \operatorname{tg} v',$$

que, combinados com (1), dão finalmente

$$d\theta = \frac{\frac{c}{r}\varphi\, dr}{\left(q^2 - 2\int \varphi dr\right)\sqrt{q^2 - \frac{c^2}{r^2} - 2\int \varphi dr}} \ldots\ldots\ldots (2).$$

Ésta equação integrada desde $r =$ ao raio da camada em que está o observador até $r =$ ao raio da camada limite da atmosphera dara evidentemente o valor da refracção atmospherica, mas para isso é preciso ainda determinar o valor das constantes c e q, e a expressão da fôrça φ, o que passâmos a fazer.

Suppondo a particula luminosa na camada de raio r e densidade ρ, a camada inferior de quantidade $dr = s$ tera por densidade

$$\rho - \frac{sd\rho}{dr} + \frac{s^2}{1 \cdot 2}\frac{d^2\rho}{dr^2} - \text{etc.}$$

e por espessura ds: e por tanto, representando por $\pi(s)$ a lei de variação da attracção com a distancia, sera a attracção d'aquella camada representada por

$$\pi(s)\,ds\left\{\rho - \frac{sd\rho}{dr} + \frac{s^2}{1 \cdot 2}\frac{d^2\rho}{dr^2} - \text{etc.}\right\}.$$

A acção de camada superior é do mesmo modo representada por

$$\pi(s)\,ds\left\{\rho + s\frac{d\rho}{dr} + \frac{s^2}{1 \cdot 2}\frac{d^2\rho}{dr^2} + \text{etc.}\right\};$$

e portanto a molecula sera effectivamente sollicitada por

$$-2\pi(s)\,ds\left\{s\frac{d\rho}{dr} + \frac{s^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}\frac{d^3\rho}{dr^3} + \text{etc.}\right\},$$

ou mais simplesmente (hypothese 2.ª)

$$-2\pi(s)\,sds\frac{d\rho}{dr},$$

que é preciso integrar desde $s = 0$ até $s = \infty$ para ter o valor da fôrça φ.

Fazendo pois

$$k = \int_0^\infty sds\,\pi(s),$$

será $$\varphi = -2k\frac{d\rho}{dr},\ \int \varphi\, dr = -2k\rho.$$

Resta achar os valores das constantes c e q.

Para isso notaremos que, ou o raio parta do astro para o observador, ou d'este para aquelle, a trajectoria sera evidentemente a mesma, mas como os valores das constantes costumem ser determinados pelas circumstancias iniciaes do movimento, circumstancias que são conhecidas para a camada do observador, e não para a camada limite da atmosphera, sera preferivel aquelle segundo modo de considerar o movimento.

Sendo assim, sera

$$\int \varphi\, dr = 2k\Big((\rho) - \rho\Big);$$

e as constantes c e q serão (Poisson, *Mech.*, § 234)

$$c = an\sqrt{1 + \frac{4k}{n^2}(\rho)}\operatorname{sen}\theta,\quad q = n\sqrt{1 + \frac{4k}{n^2}(\rho)},$$

sendo n a velocidade com que a luz é emittida do astro, e a o raio da camada em que está o observador, e aonde aquella velocidade se torna em $n\sqrt{1 + \frac{4k}{n^2}(\rho)}$.

Por meio dos valores precedentes de φ, c e q, a formula (2) transforma-se em

$$d\theta = -\frac{\frac{2k}{n^2}d\rho\sqrt{1 + \frac{4k}{n^2}(\rho)}\,a\operatorname{sen}\theta}{\left(1 + \frac{4k}{n^2}\rho\right)r\sqrt{1 + \frac{4k}{n^2}\rho - \left(1 + \frac{4k}{n^2}(\rho)\right)\frac{a^2}{r^2}\operatorname{sen}^2\theta}} = \ldots (3),$$

e aonde so resta determinar o valor da constante k, o que poderá conseguir-se tanto por observações astronomicas, como por observações terrestres por meio da fórmula

$$\frac{4h}{n^3}=\frac{i^2-1}{\rho}\dots\dots\dots\dots\dots\dots(4),$$

sendo ρ a densidade do ar sujeito á experiencia, e i a relação entre o seno d'incidencia e refracção para aquelle mesmo ar.

A equação (3) e as considerações de que foi deduzida concordam com as de Laplace no tom. 4.° da Mech. Cel.; ellas são tambem conformes com as empregadas por Ivory no seu trabalho sôbre as refracções, e pelo Sr. Sousa Pinto 'num folheto que sôbre esta materia publicou em 1850. Apesar d'isto, julgâmol-as pouco verosimeis por o serem as duas primeiras hypotheses da página 11 d'onde foram deduzidas.

A respeito d'aquellas hypotheses temos que notar: 1.° que a attracção de que alli se falla varía para o mesmo corpo, segundo uma lei que não é a da proporcionalidade ás densidades do corpo; 2.° e que a lei d'essa variação é differente para raios differentes (Arago, *Mémoires scientifiques*, tom. 1.°, pag. 130).

Estes factos, resultados da experiencia, parecem-nos tornar mui pouco verosimil a hypothese 2.ª e por conseguinte tambem a 1.ª, visto como d'outro modo ficaria inexplicavel no systema, de que alli se falla, o phenomeno de refracção, a cujo respeito diz Arago, *Mémoires scientifiques*, tom. 1.° pag. 123: «La théorie de la refraction envisagée sous le point de vue le plus général, est une des parties les plus importantes de l'optique, non seulement á raison de ses nombreuses applications, mais encore par les conséquences qu'on peut en déduire relativement à la nature de la lumière et aux véritables causes de ses propriétes. Aussi les physiciens que ont développé ou soutenu les divers systêmes imaginés pour l'explication des phénomenes de l'optique se sont-ils particulièrement éfforcés de rattacher la loi de la refraction à l'hypothese qu'ils admettaient».

Provavelmente para evitar estas difficuldades é que Puissant no seu Tractado de Geodesia, e depois d'elle os Srs. Sousa Pinto e Folque nos seus Elementos de Astronomia têm empregado para chegar á equação (3) uma deducção differente da de Laplace.

Assim, não fallando das outras equações que não são mais que principios geometricos applicaveis a todas as curvas, elles empregam para chegar á equação (3) a equação (4) página 15, não a deduzindo dos principios da attracção como o faz Laplace, mas dando-a como um resultado da experiencia; e em vez da equação (1) elles empregam a equação

$$\frac{\operatorname{sen} z}{\operatorname{sen} z^{(i)}}=\frac{n^{(i)}}{n}\,\frac{r^{(i)}}{a},$$

que se deudz das seguintes considerações (a).

Sejam (fig. 1.ª) AA′, BB′, DD′, EE′. . . as superficies que separam uma das outras camadas atmosphericas.

No ponto M′ chamemos z' e ω' os angulos d'incidencia e refracção, e analogamente para os outros pontos M, M′, M″. . .

Chamando mais n, n', n''. . . as razões constantes dos senos dos angulos d'incidencia para os de refracção d'um raio vindo do vacuo para as camadas superiores a O, M′, M″. . . ; e u o angulo d'incidencia no vacuo necessario para o da refracção na camada superior a O sen ω', teremos

$$\frac{\operatorname{sen} u}{\operatorname{sen} \omega'}=n\,,\quad \frac{\operatorname{sen} u}{\operatorname{sen} z'}=n',$$

(a) Esta notação é a do Sr. Sousa Pinto; querendo passar d'ella para a de Laplace, sera necessario substituir as letras z e n por θ e i.

que dão

$$\frac{\operatorname{sen} \omega'}{\operatorname{sen} z'} = \frac{n'}{n},$$

e em geral

$$\frac{\operatorname{sen} \omega^{(i)}}{\operatorname{sen} z^{(i)}} = \frac{n^{(i)}}{n^{(i-1)}}, \dots\dots\dots\dots\dots\dots (5).$$

Demais qualquer triangulo C $M^{(i)}$ $M^{(i-1)}$ dá

$$\frac{r^{(i)}}{r^{(i-1)}} = \frac{\operatorname{sen} z^{(i-1)}}{\operatorname{sen} \omega^{(i)}} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (6)$$

fazendo

$$\mathrm{C}\,M^{(i)} = r^{(i)},$$

e por tanto, combinando (5) e (6), sera

$$\frac{\operatorname{sen} z^{(i-1)}}{\operatorname{sen} z^{(i)}} = \frac{n^{(i)}}{n^{(i-1)}} \cdot \frac{r^{(i)}}{r^{(i-1)}};$$

ou que é o mesmo

$$n^{(i-1)} r^{(i-1)} \operatorname{sen} z^{(i-1)} = n^{(i)} r^{(i)} \operatorname{sen} z^{(i)},$$

ou ainda

$$na \operatorname{sen} z = n^{(i)} r^{(i)} \operatorname{sen} z^{(i)}$$

representando por a o raio CO da camada onde está o observador, que é a equação de que acima fallámos.

N'esta theoria parece-nos podêr ainda ser objecto de dúvida o emprêgo que se faz da equação (4), que, posto ser *sensivelmente* verdadeira para o ar atmospherico experimentado, se póde todavia duvidar que o seja para as camadas taes como as em que suppomos dividida a atmosphera, isto é, d'uma espessura infinitamente pequena.

Por egual motivo julgâmos duvidoso o emprêgo da relação de constancia entre o seno d'incidencia e refracção (*a*).

Pelo que fica dicto se deixa ver que as deducções que se têm feito da equação (3) nos não seguram *á priori* a certeza d'ella, que todavia é certificada *á posteriori*, visto como os resultados que d'ella se deduzem são accordes aos da observação, todos os desvios que se encontram entre as refracções calculadas e observadas tendo sempre outras causas mais provaveis a que possam e devam de ser attribuidos (*b*).

O que vae dicto é relativo á theoria physica da luz, que serviu de fundamento á deducção da equação (3); passâmos agora a examinar a forma, natureza e estado das camadas atmosphericas.

Forma. Se a atmosphera não fôsse sujeita a outras fôrças mais senão ás attractivas, que sôbre ella exerce a Terra, e ás centrifugas provenientes de seu movimento de rotação, ella affectaria uma forma constante, e que sería a do seu equilibrio.

Áquellas fôrças porém vêm-se reunir muitas outras, cuja acção varía do momento para momento, e entre as quaes poderemos con-

(*a*) Desacompanhada de factos que a justifiquem apresenta Ivory, *Trans. Philos.* p. 1838, pag. 175 a seguinte asserção: «Chamando ρ a densidade do ar 'num dado ponto da atmosphera, a densidade d'uma camada inferior áquella da quantidade *dr* terá por densidade $\rho + d\rho$; e é para notar que embora *dr* seja um infinitesimal, deve todavia ser contado como infinitamente grande quando comparado com a distancia insensivel a que se estende a acção dos corpos sôbre a luz, de modo que o podêr refractivo d'aquella camada é exactamente o mesmo que sería, se sua densidade se estendesse invariavel até á superficie da Terra».

(*b*) Kramp — Analyse des refractions, pag. 30.

tar as attracções dos corpos celestes especialmente do Sol e Lua e a acção calorifica do Sol, acção que varía não só d'um para outro clima, em virtude da diversa obliquidade dos raios solares, mas ainda d'um para outro ponto no mesmo clima, em virtude da diversa natureza do solo, com a qual está ligado o podêr absorvente e radiante (*a*).

Assim pois, quando mesmo quizessemos admittir que a figura do equilibrio da atmosphera era a espherica, ve-se pelo que vae dicto, que ésta figura bem como outra qualquer figura fixa não póde mais convir para representar a forma das camadas d'uma atmosphera, que se alguma cousa parece ter de fixo é uma contínua agitação.

Ouçâmos porém a este respeito Ivory «Sería todavia chimerico, diz elle (Trans. Philosoph. p. 1823, § 6), esperar que se podesse encontrar uma fórmula que se adaptasse ás observações destacadas sem grandes desegualdades occasionaes.

Um tal defeito não provém da theoria, mas sim da natureza das proprias observações. Se examinarmos uma serie de refracções ja

(*a*) Le réchauffement du sol, par les rayons solaires, son refroidissement quand il rayonne vers l'espace libre, doivent, indépendamment de toute cause accidentelle, produire habituellement dans les couches inférieures des courants ascendants et descendants, dont les conditions doivent varier sur les diverses verticales de chaque région terrestre, en raison de la nature du sol, ce qui rend impossible l'exacte identité des densités à d'égales hauteurs, par consequent, la configuration sphérique des couches d'égale densité que la théorie actuelle suppose.

On a, pour ainsi dire constamment, la preuve matérielle de ces perturbations accidentelles, et je dirais presque locales de l'atmosphère, lorsqu'on observe attentivement dans les lunettes astronomiques des étoiles si voisines des pôles celestes, que leur mouvement de rotation diurne est presque insensible pendant des courts intervalles des temps. Car, en amenant leurs images tout près des fils d'araignée qui sont tendus au foyer de ces instruments, comme je l'expliquerai plus tard, on les voit presque toujours agitées de petits mouvements vibratoires qui, tour à tour, les rapprochent et les éloignent de ces fils, au point de les cacher quelquefois derrière leur épaisseur, puis de les faire reparaître, en quelques instants. Biot, *Astron.* tom. 1.°, § 134.

observadas, sera facil descobrir exemplos, nos quaes as verdadeiras refracções têm diminuido, quando, segundo as indicações dos instrumentos empregados, ellas deveriam ter augmentado e *vice versa* (*a*).

As refracções são affectadas por circumstancias de que o observador não tem intimação alguma, e que não podem entrar n'uma theoria, qualquer que ella seja.

As causas reaes de taes anomalias são indubitavelmente as mudanças irregulares, que têm logar nas partes remotas da atmosphera e que não são de modo algum indicadas pelo barometro ou thermometro. Nós devemos conceber que a atmosphera está continuamente oscillando em tôrno d'um estado medio, que a theoria deve prescrutar. É para esperar um bom exito n'esta indagação; não de modo que a theoria concorde com todos os casos particulares, mas de maneira que desappareçam os erros n'um grande número d'observações feitas em differentes tempos.»

Vê-se pois que, attribuindo ás camadas atmosphericas a forma espherica, os Geometras não têm por fim senão o representar o estado medio, o unico accessivel a uma theoria, da atmosphera: e para aquelle estado a fórma espherica não tem soffrido da parte das observações o mais leve desmentido, podendo servir de prova o que se lê no prefacio da memoria de Ivory, inserta nas Trans. Philos. para 1838. «Neste processo suppõe-se, e é o que confirma a experiencia, que o resultado será a final o mesmo para a mesma altura acima do horizonte, com tanto que as observações sejam bastante extensas assim no número como no tempo».

(*a*) Falando d'uma d'estas anomalias descoberta por Delambre, diz Biot no Conhecimento dos Tempos para 1838, pag. 71. «Si donc de tels résultats sont exacts, et s'ils ont été calculés exactement, on ne peut les attribuer qu'à un dérangement de sphéricité des couches atmosphériques. Alors on n'y saurait remedier qu'en répétant les observations à différents jours pour attenuer, par compensation, les écarts dus à cette cause que le calcul ne peut atteindre.

Natureza. Calculando a intensidade da fôrça φ nós a suppozemos proporcional á densidade de cada camada, o que equivale a dar á atmosphera uma composição uniforme, visto como a experiencia mostra que em geral a potencia refractiva sómente é proporcional á densidade quando se considera o mesmo corpo em estados differentes de condensação (Laplace, liv. 10.°, cap. 1.°, § 2. Biot, Phys. math. tom. 3.°, pag. 297).

Passâmos a apreciar esta hypothese.

O ar atmospherico era considerado pelo antigos como um dos quatro elementos da natureza, e este êrro subsistiu sem contestação até aos fins do seculo passado, em que Lavoisier por meio d'uma memoravel experiencia mostrou que o ar atmospherico era um composto em que entravam dous elementos, oxygeneo e azote.

As experiencias posteriores, confirmando as consequencias de Lavoisier sôbre a composição do ar atmospherico, têm de mais mostrado que as proporções, em que aquelles dous elementos se acham misturados na atmosphera, são sempre as mesmas em todos os tempos, em todos os logares e alturas a que o homem tem podido chegar (*a*).

Alem d'aquelles dous elementos, a atmosphera contém constantemente dous outros, acido carbonico e vapor aquoso, cujas proporções estão, no dizer de todos os chimicos, longe de seguir a constancia observada nos dois primeiros (Regnault, Chimica, tom. 1.°, § 95. Sr. Julio Pimentel, Lições de Chimica Geral).

Apesar porém d'uma tal variedade d'elementos e provavelmente por causa da sua diminuta quantidade, têm os Physicos em suas indagações sôbre o ar atmospherico desprezado completamente aquellas variações, e considerado o ar atmospherico o mesmo em todos

(*a*) Na celebre ascensão de Gay-Lussac colheu este sabio na grande altura a que se elevou uma porção d'ar atmospherico, que sujeito ás analyses chimicas affectou uma composição relativamente ao oxygeneo e azote, egual á que se tem encontrado no ar das baixas regiões da atmosphera. Tem sido tal a uniformidade de proporções d'aquelles dous elementos, que têm sido objecto de questão entre os chimicos o decidir se elles entravam na atmosphera misturados, se combinados.

os tempos e logares: na obra de Kramp, por exemplo, appresenta este auctor uma tabella das dilatações do ar atmospherico, que eram dadas por seus auctores sem de modo algum declararem qual era o ar (isto é as proporções d'acido carbonico e vapor aquoso) a que se referiam, e a cujo respeito diz Kramp, pag. 8. «Ces différences sont beaucoup trop grandes, pour pouvoir être rejettées sur le compte de l'expérience seule. Il faudra en conclure plutôt que l'élasticité specifique de l'air commun ne dépend pas seulement du dégré de chaleur qu'il éprouve; mais qu'en outre elle doit être fonction de quelque autre qualité de l'air, qui y influe pour le moins autant que la chaleur. Le professeur *Schmidt*, université de *Giessen*, pays de *Hesse*, a constaté par un grand nombre d'expériences laborieuses et exactes, que cette qualité n'est autre chose que l'humidité de l'air, c'est à dire, la quantité de vapeurs aqueuses qu'il tient en dissolution».

Actualmente ainda os Physicos desprezam as variações do acido carbonico, attendem somente ás do vapor aquoso, considerando a composição do ar atmospherico sêcco a mesma em todos os tempos e logares. A este respeito notaremos que, abstrahindo das variações do acido carbonico, que na atmosphera existe em proporções mui diminutas, não so, como já vae dicto, as experiencias de todos os tempos e logares têm confirmado a hypothese de uniformidade de composição do ar sêcco, senão que tambem esta uniformidade está muito em harmonia com a lei physica da diffusão dos gazes, em virtude da qual dous ou mais gazes mettidos no mesmo vaso acabam por se misturar do modo a formar com o tempo um todo homogeneo.

Se porém reflectirmos que as experiencias se não têm estendido a toda a atmosphera; que a analogia entre as circumstancias physicas dos gazes fechados no mesmo vaso, e os que são contidos na atmosphera não é perfeita, visto como a temperatura e pressão, que na atmosphera variam desde a base até ao tôpo, são constantes para aquelles; e finalmente que, embora a analogia se désse, a atmosphera póde não ter ainda de existencia o tempo necessario para o cumprimento da lei da diffusão, seremos levados a concluir que « a uniformidade da composição do ar atmospherico sêcco não póde ser apregoada como princípio incontroverso.»

Restituindo agora ao ar atmospherico o vapor aquoso de que temos abstrahido melhor sobresahirá a verdade do que acabâmos de dizer.

As experiencias dos Chimicos têm mostrado que o ar contém em differentes tempos, diversas proporções do vapor aquoso; Regnault a pag. 140 do tom. 1.º diz: «L'experience a montré que l'air atmospherique libre renferme des quantités d'acide carbonique qui varient de 4 a 6 dix millièmes (do pêso total do ar). Quant à la quantité de vapeur d'eau, elle varie entre des limites assez étendues.»

Apesar porém d'a proporção do vapor aquoso variar com os tempos, resta ainda averiguar se éstas proporções variam ou não para o mesmo tempo a diversas alturas. A resolução d'esta questão pela Chimica sería por extremo trabalhosa, e so poderá um dia ser resolvida pela hygrometria ; infelizmente ésta sciencia, sendo, como diz Kaemtz, uma conquista dos tempos modernos, nem os instrumentos são assás perfeitos nem suas applicações assás numerosas para decidir esta questão, a respeito da qual diz Kaemtz, pag. 87. « Il s'agit uniquement ici de l'humidité relative, et sur ce point les opinions des physiciens sont partagées.» (Veja-se tambem Ivory, prefacio da 2.ª memoria sôbre as refracções).

Estado. As experiencias de Biot e Arago sôbre a refracção dos raios luminosos foram feitas, mirando a objectos terrestres, e desde logo era possivel suspeitar que as consequencias devessem de ser modificadas, quando por ventura a fonte de que parte a luz não fôsse animada dos mesmos movimentos que o corpo refringente.

Para levantar ésta dúvida advertiremos que, como adiante se verá, até uma consideravel distancia do zenith as refracções não dependem do podêr refringente d'outra camada, a não ser d'aquella em que está collocado o observador, de modo que ésta póde ser completamente comparada ao prisma refringente empregado por aquelles astronomos.

Posto isto, e notando que os raios luminosos enviados pelos diversos corpos celestes têm apresentado exactamente as mesmas leis que eram dadas pelas observações terrestres, embora os movimentos d'aquelles corpos sejam, como se sabe, muitissimo differentes uns dos outros e dos da Terra, e embora ésta tenha nas diversas phases do anno movimentos muitissimos variados, concluiremos em fim que as leis da refracção são completamente independentes dos movimentos tanto dos corpos de que parte a luz como d'aquelles aonde ella se vae refractar, e as mesmas como se uns e outros fôssem suppostos em repouso (*a*).

(*a*) «Quelle que soit la théorie de la lumière que l'on adopte, c'est toujours un fait très remarquable, que la composition de la vitesse propre de la lumière avec celle de la terre, qui se manifeste dans le mouvement apparent des étoiles, connu sous le nom d'*aberration*, n'ait cependant aucune influence appreciable sur le refraction de la lumière qu'elles nous envoient à differents jours de l'année.» (Poisson, *Mécanique*, tom. 1.°, § 168).

Integração da equação differencial da refracção segundo Laplace.

Para integrar a equação (3) sería necessario conhecer a relação existente entre ρ e r; mas como tal relação não fôsse conhecida, os Geometras têm feito sôbre ella diversas hypotheses empiricas, de cuja veracidade ou falsidade decidiam pela comparação dos resultados que d'ellas provinham com os da observação.

Laplace, tendo considerado duas d'estas hypotheses e taes, que, crescendo as alturas em progressão arithmetica, as densidades decresciam n'uma d'ellas em progressão arithmetica, e n'outra em progressão geometrica, e vendo que essas hypotheses lhe davam resultados que estavam de lados oppostos das observações, tanto para as refracções como para a gradação do calor, conjecturou que a verdadeira hypothese sería comprehendida entre aquellas duas.

Laplace formou por isso uma hypothese que participava das duas progressões, e segundo a qual foi contada a tábua das refracções do Conhecimento dos Tempos.

Fazendo

$$\frac{a}{r}=1-s, \quad \frac{\frac{2k}{n^2}(\rho)}{1+\frac{4k}{n^2}(\rho)}=\alpha,$$

a equação (3) torna-se em

$$d\theta = -\frac{\alpha \frac{d\rho}{(\rho)}(1-s)\,\mathrm{sen}\,\theta}{\left\{1-2\alpha\left(1-\frac{\rho}{(\rho)}\right)\right\}\sqrt{\cos^2\theta - 2\alpha\left(1-\frac{\rho}{(\rho)}\right)+(2s-s^2)\,\mathrm{sen}^2\,\theta}} \ldots (7),$$

que convem simplificar assim

$$d\theta = -\frac{\alpha \frac{d\rho}{(\rho)}\,\mathrm{sen}\,\theta}{(1-\alpha)\sqrt{\cos^2\theta - 2\alpha\left(1-\frac{\rho}{(\rho)}\right)+2s}},$$

aonde faremos ainda (*a*)

(*a*) **Na supposição d'as densidades decrescerem em progressão arithmetica, sería**

$$\rho = (\rho)(1 - Ms) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (m).$$

Suppondo que ellas decresciam em progressão geometrica, teriamos

$$\rho = (\rho)N^{-qs} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (n).$$

A hypothese actual dá muito aproximadamente

$$\rho = (\rho)(1 + \delta s)c^{-\delta s} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (p).$$

$$s-\alpha\left(1-\frac{\rho}{(\rho)}\right)=u,$$

$$\rho=(\rho)\left(1+\frac{fu}{l'}\right)c^{-\frac{u}{l'}}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(8),$$

o que torna a fórmula em

$$d\theta=\frac{\alpha\frac{du}{l'}\left(1-f+\frac{fu}{l'}\right)c^{-\frac{u}{l'}}\operatorname{sen}\theta}{(1-\alpha)\sqrt{\cos^2\theta+2u}}.$$

Fazendo agora $\cos^2\theta+2u=2l't^2$, teremos

$$d\theta=\frac{2\alpha\, dt\operatorname{sen}\theta}{(1-\alpha)\sqrt{2l'}}\left\{1-f-\frac{f\cos^2\theta}{2l'}+ft^2\right\}c^{\frac{\cos^2\theta}{2l'}-t^2}\ldots(9),$$

Ora de (m), (n) e (p) tira-se

$$\frac{d\rho}{ds}=-(\rho)\mathrm{M},\ \frac{d\rho}{ds}=-(\rho)p\mathrm{N}^{-qs},\ \frac{d\rho}{ds}=-(\rho)c^{-\delta s}(\delta s+1-\delta),$$

das quaes a 1.ª é constante, a 2.ª decresce em progressão geometrica, e a 3.ª sem ser constante decresce mas menos rapidamente do que a 2.ª, sendo assim intermedia d'aquellas duas. (Veja-se a expressão da fôrça φ dada a pag. 14 d'esta dissertação e o fim do § 5, cap. 1.º da Mech. Cel.

que integrada desde $t = \frac{\cos\theta}{\sqrt{2l'}}$ até $t = \infty$ dá, suppondo

$$T = \frac{\cos\theta}{\sqrt{2l'}} \text{ e } \int dtc^{-t^2} = c^{-T^2}\psi T,$$

$$\delta\theta = \frac{2\alpha \operatorname{sen}\theta}{(1-\alpha)\sqrt{2l'}}\left\{1 - \tfrac{1}{2}f - fT^2\right\}\psi T + \frac{\alpha f}{2(1-\alpha)l'}\operatorname{sen}\theta\cos\theta.$$

Ora para a refracção horizontal aquella fórmula dá

$$\vartheta = \frac{\alpha\sqrt{\pi}}{(1-\alpha)\sqrt{2l'}}(1 - \tfrac{1}{2}f);$$

e as observações dão para aquella mesma quantidade o valor 6500″ decimaes ou em partes do raio 0,01021018 . . . , e portanto será

$$0{,}01021018\ldots = \frac{\alpha\sqrt{\pi}}{(1-\alpha)\sqrt{2l'}}(1 - \tfrac{1}{2}f)\ldots\ldots(10).$$

Demais a condição do equilibrio da atmosphera dá, suppondo que se desprezam as variações da fôrça centrifuga e a parte da gravidade, que provém da attracção da atmosphera,

$$dp = -(g)\,a\rho\,ds\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(11)$$

sendo p a pressão variavel, e (g) a fôrça de gravidade diminuida da centrifuga para a camada onde está o observador (a).

E por tanto substituindo por s e ρ os seus valores, integrando, e fazendo por simplicidade

$$(p)=(g)(\rho)\,l,$$

teremos

$$\frac{p}{(p)}=\frac{al'}{l}\left(1+\frac{fu}{l'}\right)c^{-\frac{u}{l'}}+f\frac{al'}{l}c^{-\frac{u}{l'}}+\tfrac{1}{2}\alpha\frac{a}{l}\frac{\rho^2}{(\rho)^2};$$

a qual se torna para a camada em que está o observador, e aonde é $p=(p)$, $u=0$, e $\rho=(\rho)$ em

$$l'(1+f)=\frac{l}{a}-\tfrac{1}{2}\alpha,$$

a qual juncta á equação (10) servirá para determinar as constantes f e l', cujos valores são

$$f=0{,}49042\,,\quad l'=0{,}000741816,$$

que devem de ser substituidos na fórmula (9), e segundo a qual

(a) Poisson, *Mech.* tom. 2.º, pag. 623.

são contadas as refracções do Conhecimento dos Tempos relativas a alturas acima do horizonte menores que 12.°

Procuremos agora o grau de confiança que nos deve merecer a fórmula anterior.

Se para isso lançarmos mão das considerações que levaram Laplace a estabelecer a equação (8), veremos que essas considerações pouca ou nenhuma luz nos podem dar sôbre a verdade ou falsidade d'aquella fórmula, visto como se póde conceber uma infinidade de relações differentes d'aquella, e que todas satisfizessem á condição de serem intermedias das progressões arithmetica e geometrica.

Se porém por meio da relação (8) determinarmos a gradação inicial do calor, acharemos essa gradação tal que a diminuição de 1° do thermometro centigrado corresponde á altura de 59 $\frac{1}{2}$ braças inglezas (aproximadamente 108 metros), valor que anda apenas pelos dous terços do número geralmente adoptado (Ivory, *Trans. Philosoph.* p. 1823, §§ 3 e 14).

Demais, em quanto que as observações d'accôrdo com a theoria mostram que o decrescimento do calor com a altura se accelera á medida que nos elevâmos na atmosphera (*a*) as fórmulas de Laplace significam pelo contrário que aquelle decrescimento se vae tornando cada vez mais lento (*b*).

Finalmente e como comprovação de quanto fica dicto accrescentaremos que a comparação das refracções médias calculadas pelas fórmulas de Laplace com as observadas de Bessel mostra n'aquellas um êrro por excesso, que augmenta successivamente desde 80 até

(*a*) Or, les observations que nous venons de comparer s'accordent pour établir que le décroissement de la temperature s'accélère à mesure que l'on s'éloigne de la surface. Mr. Poisson est parvenu à ce même résultat par des considerations théoriques, fondées sur les lois de la propagation de la chaleur de proche en proche par communication directe dans chaque colonne verticale d'air. Biot, *Astr.* tom. 1.°, pag. 164.

(*b*) Biot, *Astr.* tom. 1.°, pag. 237.

88° e que 'nesta última distancia se póde avaliar em $+4''$ (Ivory, *Trans. Philosoph.* para 1838, § 10).

Alem dos dados fornecidos pela ascensão de Gay-Lussac (*a*), so possuia Laplace para ajuizar de sua fórmula as considerações que o haviam levado á sua descoberta, considerações que já atraz dissemos serem muito vagas, o que Laplace parece não ter desconhecido, sendo elle mesmo quem nos diz, fallando-nos da sua fórmula: «Cependant elle laisserait encore de l'incertitude; la loi de la nature, sur les densités des couches de l'atmosphère n'étant pas exactement celle que nous avons supposé, et variant par mille causes inconnues. Par cette raison les astronomes ne comptent que sur les positions observées à onze ou douze dégrés au moins de hauteur apparente. Heureusement à ces hauteurs la réfraction devient indépendante de ces causes, et l'on peut obtenir avec beaucoup de précision par la seule observation des hauteurs du baromètre et du thermomètre, dans le lieu de l'observateur.

É o que passâmos a ver.

A fórmula (7) desinvolvida em serie torna-se em

$$d\theta = -\frac{\alpha \frac{d\rho}{(\rho)}(1-s)\operatorname{tg}\theta}{1-2\alpha\left(1-\frac{\rho}{(\rho)}\right)}\left\{\begin{array}{l} 1+\dfrac{\alpha\left(1-\frac{\rho}{(\rho)}\right)}{\cos^2\theta}-\left(s-\tfrac{1}{2}s^2\right)\operatorname{tg}^2 \\[2ex] +\tfrac{3}{2}\left\{\dfrac{\alpha\left(1-\frac{\rho}{(\rho)}\right)}{\cos^2\theta}-\left(s-\tfrac{1}{2}s^2\right)\operatorname{tg}^2\theta\right\}^2+\text{etc.}\end{array}\right\}$$

(*a*) Laplace, comparando o decrescimento do calor proveniente de suas fórmulas com o resultante das observações de Gay-Lussac, achou o 1.° mais rapido do que o 2.°, o que vae conforme com o que acima ficou dicto.

ou parando nos termos de segunda ordem relativamente a α e s

$$d\theta = -\alpha \frac{d\rho}{(\rho)} \operatorname{tg}\theta \left\{ 1 - \frac{s}{\cos^2\theta} + \alpha \left(1 - \frac{\rho}{(\rho)}\right) \frac{1 + 2\cos^2\theta}{\cos^2\theta} \right\},$$

que, integrada desde $\rho = (\rho)$ até $\rho = 0$, dá

$$\delta\theta = \alpha \operatorname{tg}\theta \left\{ 1 + \tfrac{1}{2}\alpha \frac{1 + 2\cos^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{1}{\cos^2\theta} \int \frac{s\,d\rho}{(\rho)} \right\},$$

e aonde só resta achar o valor $\int s\,d\rho$ ou o que é o mesmo de $\int \rho\,ds$ por ser $\int s\,d\rho = s\rho - \int \rho\,ds$ que entre os limites $\rho = (\rho)$ ou $s = 0$, e $\rho = 0$, se torna em $\int s\,d\rho = -\int \rho\,ds$.

Para isso teremos, integrando a equação (11) do equilibrio (*a*)

$$\int \frac{\rho\,ds}{(\rho)} = \frac{l}{a},$$

o que torna o integral da refracção em

$$\delta\theta = \alpha \operatorname{tg}\theta \left\{ 1 + \frac{\tfrac{1}{2}\alpha(2\cos^2\theta + 1) - \dfrac{l}{a}}{\cos^2\theta} \right\} \ldots . \; (9)$$

(*a*) A introducção d'esta condição deverá ser olhada não como indicando uma influencia directa do movimento sôbre as refracções (vejam-se as pagg. 23 e 24 d'esta Dissertação), mas sim como influindo nos elementos meteorologicos das camadas dos quaes depende a sua fôrça refractiva.

Restava ver até que ponto teria logar aquella fórmula, que, por ter provindo d'um desinvolvimento em serie, exigia para que podesse subsistir não só que a serie fôsse convergente, mas ainda que os termos desprezados fôssem insensiveis. Laplace occupou-se d'este trabalho, e o resultado de suas indagações foi que a 74° de distancia zenithal o êrro proveniente de se não reterem na fórmula (7) senão os termos de 2.ª ordem era apenas de $0'',15$ (*a*), e por tanto insensivel, sendo ainda menor aquelle êrro para menores distancias.

A equação precedente, tendo sido deduzida muito simplesmente da equação differencial da refracção sem 'nesta introduzir condição alguma nova, a não ser a condição do equilibrio, a qual condição ao menos nos nossos climas parece ser contemporanea da hypothese da esphericidade, visto como as mesmas causas que alteram uma, parecem alterar tambem a outra d'aquellas hypotheses, concluiremos por fim que a fórmula (12) goza da mesma certeza, e fica sujeita ás mesmas considerações que a fórmula (3) de que ella foi deduzida (*b*).

(*a*) Será mais conveniente o dizer com o Sr. Sousa Pinto (Astr. tom. 1.º pag. 188) que o êrro n'esta distancia é menor que $1''$.

(*b*) Nós devemos advertir que, quando mesmo se queira admittir com Biot, *Astr.* tom. 1.º, pag. 246, que a equação (3) póde subsistir independentemente da esphericidade das camadas atmosphericas e no estado d'agitação normal d'estas, ainda assim o emprêgo, que fizemos da equação de equilibrio, parece não podêr dar a (12) um grau de certeza differente do de (3), por quanto a variabilidade d'estas pequenas agitações deve produzir nos valores de l, taes como elles seriam observados, pequenas variações, cuja grandeza e signal devem ter a cada instante valores mui differentes, de maneira que seus effeitos se devem compensar 'num pequeno número d'observações de modo a dar uma média constante e a mesma que a que resulta da equação de equilibrio (*a*).

E mesmo nas regiões intertropicaes, aonde por effeito dos ventos alisados o estado d'equilibrio não póde mais ser admittido como estado medio (*b*), o emprêgo

(*a*) Biot, *Astronomie*, tom. 1.º, pag. 250.
(*b*) Kaemtz, *Metereologie*, pag. 257.

Resta achar os valores das quantidades α e l.

Supponhamos para isso que estes valores tenham sido determinados para a temperatura 0° e pressão $0^m,76$, e procuremos os seus valores correspondentes a outra qualquer pressão e temperatura.

Chamando p', τ' e ρ' a pressão, temperatura e densidade primitivas e p, τ e ρ os novos elementos, teremos entre uns e outros a relação

$$\frac{p}{p'}=\frac{1+\epsilon\tau}{1+\epsilon\tau'}\,\frac{\rho}{\rho'},$$

aonde ϵ representa o coefficiente de dilatação dos gazes, e que, como se sabe, não é mais do que a combinação dos principios de Gay-Lussac e Mariotte.

Por meio da relação precedente poderemos determinar $\frac{\rho}{\rho'}$ quando todos os mais elementos forem conhecidos.

E como é

$$\alpha=\frac{\frac{2k}{n^2}(\rho)}{1+\frac{4k}{n^2}(\rho)},$$

vê-se que a mesma fórmula, que dá a relação de ρ para ρ', servirá

d'aquella condição parece não podêr alterar sensivelmente os resultados, para prova do que nós damos o seguinte trecho transcripto de Caillet (Addição ao Conhecimento dos Tempos para 1851) «et l'on peut tirer de là cette remarque importante' qu'une erreur d'un certain nombre de mètres dans la constante l n'altère pas les refractions d'une manière appreciable.»

para dar a relação de α correspondente a ρ para α correspondente a ρ'.

Procuremos agora as variações de l.

Sendo constante a temperatura, sabe-se pela lei de Mariotte, que as pressões são proporcionaes ás densidades, e por tanto, attendendo á equação $(p) = (g)(\rho)\,l$ concluiremos que l é independente das pressões.

Demais se, conservando-se constante a pressão, a temperatura variar de 0° a τ°, o volume primitivo tornar-se-ha pelo princípio de Gay-Lussac em $1 + \epsilon\tau$ e a densidade (ρ) passará para $\frac{(\rho)}{1+\epsilon\tau}$, que, substituido em $(p) = (g)(\rho)\,l$, dá

$$l' = \frac{(p)}{(g)(\rho)}(1 + \epsilon\tau) = l(1 + \epsilon\tau).$$

Depois d'isto sómente resta achar os valores das constantes α e l relativos á temperatura 0° e pressão $0^m,76$.

D'estas duas quantidades a primeira já vimos pag. 15 o modo por que podia ser determinada.

Quanto á última Laplace adopta para esta quantidade um valor, que elle diz ter sido deduzido da comparação d'um grande número d'alturas medidas barometricamente com os seus valores obtidos trigonometricamente (a).

(a) A mesma quantidade poderia tambem ser determinada pela comparação das refracções calculadas com as observadas, ou ainda pela comparação das densidades do mercurio com a do ar, por quanto da relação $(p) = (g)(\rho)\,l$ se deixa ver que l é inversamente proporcional a (ρ), e como esta altura é para o barometro do mercurio um comprimento $0^m,76$, bastará multiplicar este valor pela relação entre a densidade do mercurio e a do ar para ter o valor de l relativo ao ar (Ivory, *Trans. Philosoph.* para 1823, § 4).

Finalmente o auctor da Mechanica Celeste fecha o seu trabalho sôbre as refracções procurando as correcções, que para estas resultam da humidade do ar, correcções que segundo os seus calculos se limitavam a augmentar o valor de α relativa ao ar sêcco.

A este respeito advertiremos que experiencias posteriores feitas por Biot e Arago têm demonstrado que esta correcção é completamente nulla, e que em tudo o que for relativo a α poderemos substituir o ar sêcco ao ar humido debaixo da mesma pressão e temperatura (Biot, *Physique mathematique*, tom. 3.°, pag. 316, e Addições ao Conhecimento dos Tempos para 1838; Arago, *Mémoires scientifiques,* tom. 1.°, pagg. 123, 329 e seguintes) (*a*).

Para terminar o que ha a dizer relativamente aos trabalhos de Laplace, advertiremos que este auctor despreza para l as correcções da humidade.

Esta falta poderá facilmente ser supprida da seguinte maneira. A relação entre a densidade do ar humido e do ar sêcco é (Biot, *Conn. des Temps,* pag. 15)

$$\gamma = 1 - \tfrac{3}{8}\frac{\pi}{p} \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13),$$

sendo π a pressão exercida pelo vapor d'agua ali existente; e como

(*a*) O êrro de Laplace proveio de ser inexacta a relação $\frac{10}{14}$ entre a densidade do vapor d'agua e do ar sêcco, e que elle empregou como conforme ás experiencias de Dalton, Wath e Sausure (Biot, *Phys.* tom. 3.°, pag. 316).

Mr. Biot tem empregado para o mesmo fim a relação $\frac{10}{16}$, o que o tem levado a concluir a mesma compensação que resulta das observações directas já citadas, mas sem estas ainda o resultado theorico de Biot sería duvidoso, visto a hypo-

l é inversa de (ρ) será

$$l' = \frac{l}{1 - \frac{3}{8}\frac{\pi}{p}}$$

o valor de l relativo ao ar humido.

Á vista porém do que se disse na nota (b) da pag. 35 nós cremos que, ao menos para os nossos climas (a), se poderá sem temor d'êrro escrever com Laplace

$$l = l'.$$

these que elle faz de ser o podêr refringente do vapor d'agua egual ao da agua liquida (b).

(a) Heureusement, le terme dont il s'agit, n'a qu'une faible influence dans les applications de la formule aux climats temperés. Mais elle deviendrait plus sensible dans les pays chauds. (Biot, *Astron.* tom. 1.°, pag. 218).

(b) On voit donc à quelle erreur Laplace s'était exposé en calculant le pouvoir refringent de la vapeur d'eau d'après celui de l'eau liquide, et en déclarant que l'égalité de ces deux pouvoirs refringents était ce qu'il y avait de plus naturel à admettre dans la théorie Neutoniènne (Arago, *Mémoires scientifiques*, tom. 1.°, pag. 123).

Integração da equação differencial da refracção segundo Ivory.

Supposta a atmosphera quiescente e homogenea, nós teremos entre seus elementos as seguintes relações

$$dp = -(g)\,a\,\rho\,ds\,,\ \frac{p}{p'} = \frac{1+6\tau}{1+6\tau'}\,\frac{\rho}{\rho'} \ldots\ldots\ldots (1),$$

das quaes a primeira é a equação do equilibrio, e a segunda, chamada por Biot equação de dilatabilidade, é a combinação das leis de Mariotte e Gay-Lussac.

Isto posto, 'numa atmosphera como a que suppomos, isto é, homogenea, haverá n'um ponto qualquer d'ella quatro elementos a considerar, que são: distancia ao centro da terra, pressão, densidade, e temperatura; e por tanto bastará reunir mais uma ás duas relações (1) para que, sendo dado um d'aquelles elementos, possam ser achados todos os outros.

Na sua segunda Memoria (*a*) Ivory adopta para esta relação a fórma

$$\frac{1+6\tau}{1+6\tau'}=1-fR_1+f'(R_2+R_3)+f''(R_3+2R_4+R_5)+\text{etc.},$$

sendo f, f', f'',... coefficientes constantes, e aonde se faz

$$R_1=1-c^{-u},\ R_2=1-u-c^{-u},\ R_3=1-u+\frac{u^2}{2}-c^{-u}.$$

....

$$R_i=1-u+\frac{u^2}{2}-\frac{u^3}{2.3}+\ldots\ldots+\frac{u^{i-1}}{1.2.3\ldots i-1}-c^{-u},$$

sendo $\frac{\rho}{\rho'}=c^{-u}$.

Substituindo por R_1 R_2... os seus valores precedentes, a fórmula

(*a*) Ivory tem-nos dado duas Memorias sôbre as refracções publicadas, uma no anno de 1823, outra no de 1838, e insertas ambas nas Transacções Philosophicas. Estas duas Memorias, sendo escriptas em Inglez, pouco mais podémos fazer do que tomar conhecimento de suas fórmulas. Demais, a segunda Memoria, comprehendendo em si a primeira que ella é destinada a completar (*a*), foi sôbre ella que dirigimos especialmente o nosso exame.

(*a*) Ivory, Trans. Philosoph. p. 1838, § 7.

(2) transforma-se em

$$\frac{1+\beta\tau}{1+\beta\tau'}=1+Au+Bu^2+Cu^3+\ldots\ldots\ldots\ldots(15),$$

e debaixo d'esta forma se deixa vêr, que o systema (1) e (2) ou (1) e (3) é perfeitamente geral e applicavel a todas as atmospheras quer d'ar sêcco quer d'ar misturado, uma vez que 'neste último caso a mistura seja homogenea.

E com effeito, uma vez que se admitta a existencia d'uma relação, que juncta a (1) complete os nossos conhecimentos sôbre os elementos physicos da atmosphera, e mesmo sem conhecer a fórma d'essa relação, nós podemos conceber que entre essa e (1) se façam as eliminações necessarias para que por fim se obtenha uma só relação entre τ e u, relação que se poderá escrever debaixo da fórma $\frac{1+\beta\tau}{1+\beta\tau'}=F\ (u)$, e que, sendo desenvolvida pelo theorema de Maclaurin, reprodurizá a fórmula (3).

A existencia da equação (2) com a fórma que se lhe suppoz, póde egualmente demonstrar-se, quando em vez de suppôr a atmosphera formada d'ar sêcco, nós a supponhamos formada d'uma mistura d'ar e vapor aquoso, e embora a mistura não seja homogenea; porém o emprego que fizemos da equação $\frac{p}{p'}=\frac{1+\beta\tau}{1+\beta\tau'}\frac{\rho}{\rho'}$ deixará de ter logar 'neste último caso. Para o fazer vêr bastará notar que entre as pressões, temperaturas e densidades do ar humido, a combinação da equação (13) com os principios de Mariotte e Gay-Lussac fornece a equação

$$\frac{1-\frac{3}{8}\frac{\pi}{p'}}{1-\frac{3}{8}\frac{\pi'}{p'}}=\frac{1+\beta\tau}{1+\beta\tau'}\frac{\rho}{\rho'},$$

a qual sómente poderá concordar com a 2.ª de (1), quando se queira suppor $\frac{\pi}{p}=\frac{\pi'}{p'}$, o que equivale a dar á atmosphera uma composição uniforme.

Fica por este modo demonstrado o que tinhamos affirmado, que o systema (1) e (2) é perfeitamente geral e applicavel a todas as atmospheras, quer d'ar sêcco, quer d'ar misturado com vapôr aquoso, uma vez que 'neste último caso se supponha a mistura homogenea (*a*).

Depois d'isto sómente resta achar os valores dos coefficientes f, f', f''... o que se poderá conseguir applicando as fórmulas (1) e (2) a phenomenos atmosphericos bem conhecidos.

D'estes phenomenos o decrescimento do calor com a altura é um dos que tem sido mais estudado, embora ainda hoje seu conhecimento seja muito imperfeito.

Em ordem a applicar a estes phenomenos as equações anteriores deveremos procurar por meio d'estas as relações entre as alturas e temperaturas.

Feito isto acharemos que essa relação é a seguinte

$$\frac{z}{1+\frac{z}{a}}=\frac{p'}{\rho'}\left\{\frac{1+f}{f}+\frac{f-f'-f^2}{2f^3}q^2+\text{etc.}\right\},$$

(*a*) Mais la relation qu'il a supposé exister entre les densités de l'air humide à diverses temperatures, me parait n'être physiquement exacte que pour le seul cas où les tensions de la vapeur aqueuse seraient, dans toutes les couches aériennes, proportionelles aux pressions totales qui s'y exercent; ce qui donne á ces couches une composition chimique uniforme comme melange de vapeur et d'air sec (Biot, *Astr.* tom. 1.º pag. 236).

aonde z representa a altura acima da superficie da terra, e aonde se fez para abbreviar $\frac{1+6\tau}{1+6\tau'}=1-q$.

Agora e antes de applicar a equação precedente nós devemos notar, que embora a theoria demonstre e algumas experiencias confirmem a acceleração no decrescimento do calor á medida que nos elevamos na atmosphera, todavia as observações a este respeito são muito diminutas, e a maior parte d'ellas apenas indicam (como em breve se verá do quadro que transcrevemos de Ivory) um decrescimento uniforme.

Demais, se na fórmula anterior nós desprezassemos os termos em q^2, q^3..., obteriamos a relação

$$\frac{z}{1+\frac{a}{z}}=\frac{p'}{\rho'}\times\frac{1+f}{f}\times q \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

d'onde se deduziria tambem um decrescimento uniforme do calor.

D'este modo se deixa ver que as observações até hoje feitas sôbre o decrescimento do calor não denunciam de modo algum a existencia dos termos em q^2, q^3...; e não poderão por tanto taes observações servir para determinar os coefficientes f', f''..., que todos elles dependem d'aquelles termos.

A fórmula anterior póde escrever-se debaixo da fórma

$$z=0^{m},76\times 10462\times\frac{1+f}{f}q,$$

adoptando o número 10462 para representar a relação da densidade do mercurio para a do ar sêcco debaixo da pressão $0^m,76$ e temperatura 0°.

Resta achar a relação de z com q.

O professor Playfair segue a opinião do decrescimento uniforme da temperatura, e avalia este decrescimento em 270 pés por 1° Fahr.

O mesmo valor tem a auctoridade do professor Lisbe.

Dalton adopta em vez d'aquelle o valor de 300 pés.

Ramond no seu Tractado sôbre a fórmula barometrica fornece o valor do $164^m,7$ para a depressão do 1° centigrado.

Finalmente da ascensão de Gay-Lussac conclue-se para o mesmo effeito uma altura de 173 metros.

Com estes muitos valores obteve Ivory $f=\frac{2}{9}$ para o ar sêcco.

Querendo agora achar o valor correspondente ao ar humido, bastará na fórmula (4) substituir em vez de ρ' o seu valor

$$\rho'\left(1-\tfrac{3}{8}\frac{\pi'}{p'}\right),$$

depois do que obteremos para o ar humido um valor $\left(\frac{1+f}{f}\right)$, que comparado com o correspondente $\frac{1+f}{f}$ relativo ao ar sêcco, fornecerá entre um e outro a relação

$$\left(\frac{1+f}{f}\right)=\frac{1+f}{f}\left(1-\tfrac{3}{8}\frac{\pi'}{p'}\right).$$

No estado medio de humidade no paiz, a que pertence Ivory, é

$$\pi'=0^{poll.},18\,,\ p'=30^{poll.}$$

e d'este modo encontra-se

$$\left(\frac{1+f}{f}\right)=\frac{1+f}{f}\left(1-\frac{1}{144}\right),$$

que mostra a differença insignificante que existe entre os valores de f relativos ao ar sêcco e ao ar humido, differença que menor se torna ainda quando se reflecte, que é só uma pequena parte das refracções (quasi a duodecima no horisonte) a que depende de f, por cujo motivo Ivory considerou os valores de f os mesmos no ar humido como no ar sêcco.

Na impossibilidade de determinar o coefficiente seguinte f' pelo processo empregado na avaliação de f, Ivory conservou nas suas fórmulas da refracção um valor indeterminado áquelle coefficiente, o qual dá para as refracções partes, que são indicadas no quadro seguinte:

θ	$f'\varphi(\theta)$
85°	$f'\times 1'',5$
$85\frac{1}{2}$	2 ,0
86	3 ,3
$86\frac{1}{2}$	4 ,9
87	4 ,4
$87\frac{1}{2}$	11 ,2
88	17 ,0

E, como a comparação das refracções theoricas de Ivory com as observadas de Bessel mostra, que o êrro d'aquellas não póde ser avaliado em mais de $2''$, e como Ivory na reducção das suas fórmulas a numeros desprezou o termo em f', vê-se que o valor d'este não póde exceder a $\frac{1}{10}$.

Apesar da pequena influencia que tem sôbre as refracções os termos dependentes de f', é todavia possivel que as observações futuras sobre as refracções venham a denunciar essa influencia, o que, se assim acontecer, não só a theoria das refracções, mas ainda os nossos conhecimentos sôbre a gradação do calor na atmosphera, receberão um aperfeiçoamento, que difficilmente se poderia alcançar por outra via.

O mesmo se poderá dizer relativamente aos outros coefficientes f'', f''', etc.

Depois de assim haver determinado as refracções médias, restava ver as correcções que a estas se deveriam applicar para as adaptar ás circumstancias meteorologicas da observação. N'este trabalho, que faz o objecto do § 14 da Memoria de Ivory, considerou este auctor como constantes os coefficientes f, f', f''..., vindo assim a admittir, como elle mesmo o diz, que em todos os tempos a altura necessaria para deprimir de 1° o thermometro é sempre a mesma.

N'este ponto devemos nós advertir, que as observações sôbre o decrescimento do calor, ainda que muito imperfeitas, mostram comtudo uma influencia sensivel da estação, e ainda da hora do dia sôbre aquelle phenomeno (*a*). Como porém a lei de taes variações seja ainda hoje desconhecida, os Physicos têm sido obrigados a supprir esta falta admittindo um valor constante, correspondente á média dos muitos valores observados (*b*).

(*a*) Kaemtz, *Météorologie*, pag. 194 e seguintes; Daguin, *Phys.* tom. 2.°, part. 1.ª

(*b*) Et enfin par le même manque de données méteorologiques on s'est reduit

Terminaremos dizendo com M. Biot, *Astr*. tom. 1.°, § 131: «En général, on a pu voir, par l'exposition précedente, que la théorie des refractions, quoique si importante pour l'astronomie, laisse encore beaucoup à desirer, quant à la determination exacte des éléments météorologiques sur les quels elle repose».

à prendre la loi du décroissement des densités, suivant les verticales, la même dans tous les temps; quoique pour les couches inferieures du moins, cette constance soit démentie par des faits de la dernière evidence (Biot, *Astron.* tom. 1.°, pag. 251).

NOTAS

Nota á pagina 12

A simples inspecção da equação differencial da refracção mostra que, passados 90°, o valor d'esta começa a tomar valores eguaes aos que tinha antes d'aquella distancia, de modo que a refracção para uma distancia $90°+\theta_1$ é egual á refracção correspondente a $90°-\theta_1$, e como as refracções calculadas augmentam desde a distancia zenithal 0 até 90°, poderia concluir-se d'ali que a partir de 90° as refracções começavam a diminuir, o que é totalmente contrario á observação, a qual mostra que ellas vão continuamente augmentando até ás maiores distancias zenithaes observadas.

Esta anomalia provém de que, passados 90°, a refracção não póde mais obter-se por uma só integração da equação (3) effectuada desde $\rho=(\rho)$ até $\rho=0$.

Para o fazer ver notemos que M. Biot tem mostrado que, á medida que se sóbe na trajectoria da luz na atmosphera, o angulo θ vai diminuindo, e tão rapidamente que a uma pequena altura acima do logar em que está o observador, a refracção, operada desde a entrada da luz na atmosphera até á sua chegada áquella camada, póde obter-se pelo processo de pag. 32, quando mesmo a distancia zenithal seja proxima de 90° para o logar do observador (*a*).

(*a*) Biot, Addições ao Conhecimento dos Tempos para 1839, pagg. 41, 43, 79.

Sendo assim, e notando que a maior distancia zenithal com que a luz póde chegar ao observador é de 91° (*a*), ver-se-ha que antes da luz chegar ao logar do observador O (fig. 2), ella passou por um outro ponto H (*b*), para o qual era $\theta = 90$, e tal que d'um lado e d'outro d'este ponto a trajectoria é evidentemente symetrica relativamente á linha CH tirada do centro C da Terra para aquelle ponto.

Desta consideração resulta o que tinhamos dicto que, passados 90°, a refracção se não póde mais obter por uma só integração effectuada desde $\rho = (\rho)$ até $\rho = 0$, por quanto a luz, depois de ter attravessado desde a sua entrada em L na atmosphera até ao ponto H, camadas, cujas densidades eram crescentes, passou em seguida a atravessar outras desde H até O cujas densidades eram decrescentes.

No caso actual a inspecção da fig. 2 mostra, que a somma dos desvios operados na luz desde L até O é egual á somma dos operados desde L até até H e desde H até O, ou tambem egual á somma dos operados desde L até S' menos os operados desde S' até O (sendo S' o astro ficticio correspondente ao prolongamento da trajectoria para a parte direita de CZ).

Assim a refracção correspondente a uma distancia zenithal apparente $90° + \theta$, obter-se-ha por dous methodos; 1.° calculando a refracção horizontal para o ponto H, e junctando-lhe a refracção operada desde H até O, refracções que ambas se obterão pela integração da equação (3), depois de conhecidos os elementos meteorologicos e posição do ponto H; 2.° duplicando a refracção horisontal do ponto H, e tirando d'esta a refracção para a camada do observador, e relativa a um astro S' tão elevado acima do horizonte, quanto o observado S parece abaixo.

(*a*) Elle continue d'augmenter lorsque l'astre est vu au dessous l'horison, comme la figure 2 le represente; et ce cas peut se realiser jusqu'à le distance apparente de 90° 30' ou peut-être de 91°, en plaçant l'observateur au sommet des plus hautes montagnes. (Biot. Addicções ao Conhecimento dos Tempos, p. 1839, pag. 40).

(*b*) Quanto á maneira de determinar o ponto H, veja-se Biot, Addições ao Conhecimento dos Tempos para 1839, pag. 42.

Nota á pagina 18

Se é certo, como acima deixamos dicto, que as deducções empregadas para chegar á equação differencial da refracção nos não certificam a existencia d'ella, pelo menos inculcam-n'a com muita probabilidade.

Esta probabilidade torna-se bem clara no 2.° methodo de deducção, em que a equação differencial é deduzida simplesmente das duas equações

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta'}=i\,,\quad \frac{i^2-1}{\rho}=\text{const. dada pela observação dos desvios,}$$

das quaes a 1.ª tem sido sempre dada pela observação.

Quanto á última notaremos, que aquella equação não tem sido sempre verificada pela observação, e foi até d'ahi que tirámos um dos principaes argumentos contra a theoria da emissão, o não ser 'nesta theoria a attracção proporcional á densidade. Porém devemos notar, que para que a observação deixasse de ser conforme com aquella equação, foi mistér a Arago empregar o mesmo corpo em estados de condensação tão differentes como certamente não tem logar na nossa atmosphera (Arago, *Memoires scientifiques*, tom. 1.°, pag. 126).

Assim a equação differencial da refracção, que deriva d'aquellas duas equações, deve ter o mesmo grau de certeza que ellas, e sómente poderemos desconfiar de sua existencia pelo receio de que as equações de cima se não verificassem em camadas d'uma espessura infinitamente pequena, como o é a das atmosphericas.

Passando agora ao 1.° methodo de deducção, notaremos que a observação do phenomeno da refracção claramente mostra que este phenomeno, isto é, o desvio do raio luminoso póde ser explicado por uma attracção do meio, e para medida d'aquella attracção poderemos tomar de duas cousas uma, ou desvio do raio luminoso, ou a modificação que soffre sua velocidade.

Supponhamos que se toma para aquella medida o desvio do raio, como até hoje se tem sempre feito: então se por meio d'essa fôrça formos calcular os desvios do raio, esses desvios concordarão com os observados, por isso mesmo que o valor da força foi determinado com essa mesma condição.

Quando porém, por meio d'aquella fôrça fôrmos calcular outro qualquer phenomeno que não sejam os desvios, o resultado do calculo não poderá de maneira alguma concordar com a observação, fôra mister para isso ou um feliz acaso, ou que a fôrça empregada fôsse a da natureza. Assim, pois, a refracção dos raios luminosos póde com toda a certeza ser explicada por uma attracção dos corpos transparentes, quando porém por meio d'aquella attracção se vai calcular a velocidade da luz nos meios transparentes, encontram-se como já se poderia esperar, resultados mui differentes dos observados, pois que por aquelle modo a velocidade deveria ser maior nos meios mais refringentes, quando a observação mostra exactamente o contrario.

Embora porém a velocidade calculada seja mui diversa da observada, poderemos e deveremos todavia por meio d'aquella chegar a resultados mui conformes com os observados, quando a empreguemos a calcular os desvios da luz.

Por outras palavras, a velocidade, que um movel tem na sua orbita é um elemento, que influe em duas circumstancias: 1.º na natureza da orbita, porque da combinação da velocidade n'um dado ponto com a que lhe communica a fôrça acceleratriz resulta o elemento seguinte da orbita; 2.º e d'aquella velocidade depende tambem a maior ou menor rapidez com que o corpo vai d'um a outro ponto. D'estes dois phenomenos o 1.º concordará com a observação; o 2.º não; o contrário aconteceria se em vez de determinar a attracção pelo desvio a tivessemos determinado pela velocidade.

O que vai dicto servirá para explicar como aconteça que a equação differencial da refracção concorde com a observação, embora para chegar áquella equação empregassemos na determinação das constantes uma fórmula tão disparatada e differente da observação, como era aquella que dizia que, sendo n a velocidade da luz no vazio, essa velocidade na camada do observador era

$$n\sqrt{1+\frac{4k(\rho)}{n^2}}.$$

Nota á pagina 23

Nas Transacções Philosophicas de 1721 appareceu publicada por Halley uma tábua de refracções, de que era auctor o immortal Newton. Esta tábua não continha o menor indicio dos processos, que tinham sido empregados para a estabelecer, de modo que se ignorava mesmo se ella era o fructo do empirismo ou da theoria applicada a uma atmosphera de temperatura constante, e á qual parecia adaptarem-se os numeros da tábua, a 1.ª hypothese parecendo a mais natural, quando se reflectia que o cálculo theorico d'uma similhante tábua sómente tinha sido effectuado muito mais tarde, e por methodos d'integração, que Newton por certo ignorava.

A correspondencia de Newton com Flamsteed, publicada por Mr. Baily, tem vindo não só decidir esta questão, mas habilitar os Geometras a podêrem calcular os valores numericos das refracções, quando os nossos conhecimentos sôbre a constituição physica da atmosphera sejam mais avançados.

E com effeito além de que 'naquella correspondencia expressamente declara Newton, que sua tábua era o resultado da theoria, apresenta elle alem d'isso um theorema, que dá a verdadeira expressão analytica do elemento differencial da refracção, tal como nós hoje o empregâmos, indicando mesmo como d'aquelle elemento se podem tirar os valores numericos das refracções.

Este methodo porém a uma extrema difficuldade reunia uma tal falta de rigor debaixo da fórma que elle o apresentava, que sua tábua de refracções, que hoje sabemos ser bem calculada para o caso d'uma temperatura constante por elle admittida, o não teria podido ser por aquelle methodo.

Tinham-se por tanto sómente, como diz M. Biot (Journal des Savants, pag. 642), os vestigios de seus passos, pelos quaes era preciso recobrar a estrada, tornal-a practicavel, e mostrar onde ella conduzia. Ésta tarefa, accrescenta M. Biot, era por extremo difficil; porque se não é facil o comprehender todo o alcance do seu pensamento, quando elle o quer patentear, muito menos o é fazel-o reapparecer e desinvolvel-o, quando elle mesmo tem podido ter a intenção de não o exprimir muito abertamente, como na questão actual.

Apesar d'esta grande difficuldade M. Biot tem emprehendido descobrir qual a fórma dada ao elemento differencial da refracção para que se lhe podesse applicar com facilidade e rigor o methodo citado por Newton, e que é o denominado *methodo das quadraturas numericas*.

O bom exito d'esta empreza tem por certo bem compensado as difficuldades da mesma.

M. Biot tem com effeito conseguido não so dar ao elemento differencial a forma conveniente, mas, o que por certo é mais importante, elle tem visto que ésta mesma forma convinha áquelle elemento, qualquer que fôsse a ordem por que se fizesse a succession dos podêres refringentes nas camadas atmosphericas, uma vez que éstas conservassem a figura espherica.

Como se sabe, a theoria das refracções atmosphericas exige essencialmente duas cousas: 1.ª conhecimento dos elementos physicos e chimicos das camadas atmosphericas; 2.ª um methodo d'integração assás poderoso para do elemento differencial passar ao integral da refracção.

Debalde se cansaria o Physico a alcançar aquelle conhecimento, se depois o Geometra o não soubera introduzir em seus calculos. Esta circumstancia na realidade bem desanimante, é hoje, graças aos trabalhos do Astronomo francez, completamente dissipada; os Physicos podem ficar seguros do bom exito de suas indagações, e a theoria das refracções não tem que esperar senão pelos resultados d'aquelles para chegar á sua perfeição desejada.

M. Biot, a quem a theoria das refracções deve tão grande passo dado para a sua perfeição, tem tambem estudado muito a questão debaixo do ponto de vista physico, indicando observações proprias para estudar a esphericidade das camadas atmosphericas (Astr., n.° 159), bem como para deduzir as outras duas equações, que junctas ás do equilibrio e dilatabilidade, completam nossos conhecimentos sôbre a constituição da atmosphera (Astron. n.° 90 e seguintes).

Elle tem mesmo deduzido de suas considerações applicadas ás observações de Gay-Lussac, Humboldt e Boussingnault alguma cousa sôbre aquellas duas equações, mas é mister confessar, como elle mesmo o diz (Astr. fim do n.° 90), que ésta applicação deverá antes de ser considerada como exemplo do que como resultado final.

FIM

ERRATAS

A pag. 16, linha 25, aonde se lê sen ω' deve lêr-se ser ω'.

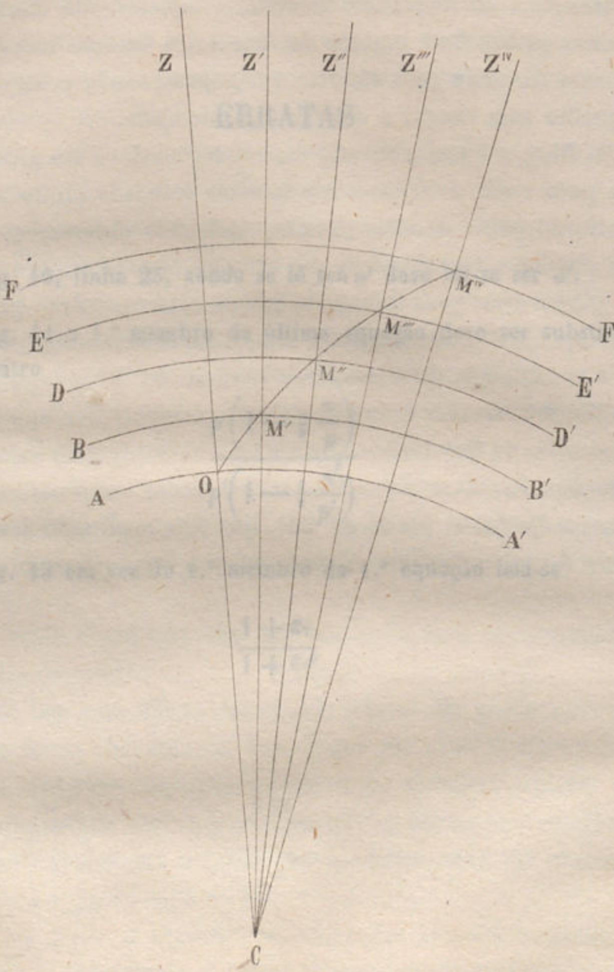
A pag. 41 o 1.º membro da última equação deve ser substituido por est'outro

$$\frac{p\left(1-\frac{3}{8}\frac{\pi}{p}\right)}{p'\left(1-\frac{3}{8}\frac{\pi'}{p'}\right)}$$

A pag. 43 em vez do 1.º membro da 1.ª equação leia-se

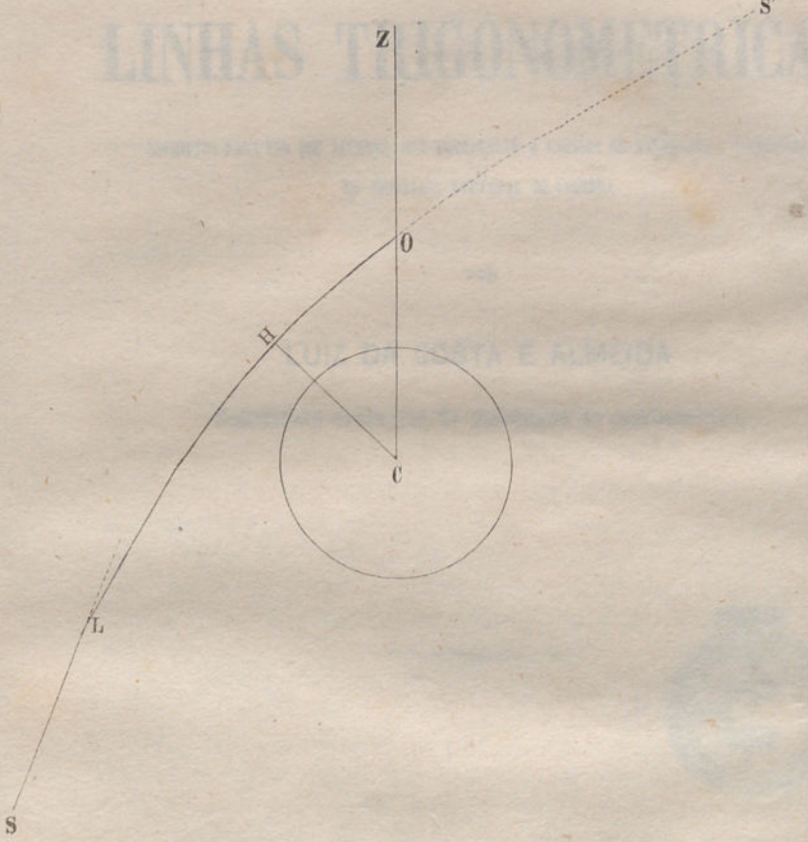
$$\frac{1+6\tau}{1+6\tau'}$$

Fig. 1.



Clemente, Lith. Lith. da Imp. da Universidade.

Fig. 2.



Clemente, lith. Lith. da Impr. da Universidade

BREVES APONTAMENTOS

SOBRE A PROCEDENCIA, NATUREZA E SIGNAES

DAS

LINHAS TRIGONOMETRICAS

ESCRIPTOS PARA USO DOS ALUMNOS, QUE FREQUENTAM A CADEIRA DE MATHEMATICA ELEMENTAR
NO SEMINARIO EPISCOPAL DE COIMBRA

POR

LUIZ DA COSTA E ALMEIDA

Substituto ordinario da faculdade de mathematica

COIMBRA
IMPRENSA DA UNIVERSIDADE
1868

. . . . . . je ne leur aurais jamais donné le conseil de d'Alembert: *Avancez et la foi vous viendra.*

(Duhamel — *Des methodes dans les sciences de raisonnement*).

BREVES APONTAMENTOS

SOBRE A

PROCEDENCIA, NATUREZA E SIGNAES

DAS

LINHAS TRIGONOMETRICAS

1

Conhecendo os elementos de um triangulo sufficientes para o determinar, e pertendendo obter a grandeza de qualquer dos outros elementos, construiremos com os dados o triangulo respectivo, e depois a medição directa dará a grandeza, que se procura.

É este o processo immediatamente fornecido pela geometria synthetica.

A trigonometria propriamente dita resolve o mesmo problema de um modo diverso.

Nesta sciencia deduzem-se as formulas que exprimem as relações, que ligam umas com as outras as diversas partes de um triangulo; e como essas formulas sejam geraes e applicaveis a toda a especie de triangulos, basta, para resolver qualquer problema, substituir nellas os valores dos elementos dados em logar dos symbolos respectivos, por que eram representados nas formulas.

Os processos da geometria synthetica são na practica subjeitos a erros inevitaveis, provenientes dos instrumentos, de que é preciso lançar mão para a construcção graphica dos triangulos; e d'ahi vem a preferencia dada á trigonometria para a resolução de todos os problemas, em que se exige grande exactidão. Nesta sciencia, com effeito, os elementos dos triangulos são determinados com uma precisão indefinida.

2

A resolução de um triangulo qualquer pode facilmente reduzir-se á resolução de dois triangulos rectangulos (vide § 8); e este processo, simples e natural, é provavel começasse a ser empregado logo na origem da trigonometria.

Vejamos pois a maneira de resolver esta especie de triangulos.

Este problema é ainda susceptivel de consideravel simplificação. Imaginando um triangulo rectangulo, cujos lados tenham uma grandeza absoluta arbitraria; suppondo depois que nesse triangulo um angulo agudo se faz passar por todos os valores desde zero até 90° variando em correspondencia o outro angulo agudo; e finalmente suppondo formada uma tabella, onde para cada um dos triangulos assim formados se encontrasse a grandeza dos lados e a dos angulos; essa tabella sería tambem sufficiente para conduzir á resolução de quaesquer triangulos rectangulos, por differentes que fossem d'aquelles, a que se referem as taboas. Com effeito, se os dados do problema são sufficientes para a sua completa resolução, como devemos suppor, tambem o serão necessariamente para determinar entre os triangulos calculados um, a que seja similhante o triangulo, que se pertende resolver; e desde logo serão immediatamente conhecidos os angulos do novo triangulo, e tambem o serão por simples proporções os lados do mesmo triangulo.

3

Como é facil de ver, para o fim a que são destinados os triangulos rectangulos dados pela *tabella*, não é mister conhecer a grandeza absoluta dos lados d'esses triangulos; basta simplesmente conhecer as suas razões, isto é, as relações que esses lados têm entre si. E como essas relações sejam de um uso continuo, tem-se-lhes dado nomes e assignado caracteres particulares a fim de exprimir simplificadamente em linguagem e representar algebricamente os theoremas relativos á resolução dos triangulos.

4

As razões, de que acabamos de fallar, são seis, pois tantas são as permutações que com os tres lados de um triangulo se podem formar dois a dois. Chamando a a hypothenusa, e b e c os cathetos, estas razões são

$$\frac{b}{a},\ \frac{c}{a},\ \frac{b}{c},\ \frac{c}{b},\ \frac{a}{b},\ \frac{a}{c}$$

Em linguagem temos:

1.º a razão de um catheto para a hypothenusa chama-se seno do angulo opposto áquelle catheto:

2.º a razão de um catheto para outro chama-se tangente do angulo opposto ao primeiro d'aquelles cathetos:

3.º a razão da hypothenusa para um catheto denomina-se secante do angulo comprehendido por aquellas duas linhas.

D'esta sorte temos, empregando a notação usual,

$$\frac{b}{a}=\operatorname{sen}B,\ \frac{c}{a}=\operatorname{sen}C,\ \frac{b}{c}=\operatorname{tg}B,\ \frac{c}{b}=\operatorname{tg}C,\ \frac{a}{b}=\sec C,\ \frac{a}{c}=\sec B.$$

Para abreviar tambem se usa dizer coseno de um angulo em logar de seno do complemento do mesmo angulo; e assim a respeito da tangente e da secante.

5

Em logar das definições anteriores podemos dar as seguintes, que lhe são evidentemente equivalentes: seno de um angulo (agudo) é o numero, que exprime a relação, que a perpendicular, abaixada de um ponto qualquer de um dos lados do angulo sobre o outro lado, tem para a hypothenusa correspondente. E analogamente para a tangente e para a secante.

Em fim, suppondo que do vertice do angulo como centro e com um raio qualquer se descreva um arco de circulo, podemos ainda ás definições precedentes substituir as seguintes:

1.° seno de um angulo ou de um arco, é a relação que a perpendicular, abaixada da extremidade do arco sobre o raio que passa pela outra extremidade, tem para o raio correspondente; assim na fig. 1

$$\text{sen } B = \frac{QP}{BP} = \frac{QP}{R} \ldots\ldots (1)$$

2.° *Tangente* de um angulo ou de um arco é a relação, que tem para o raio, a parte da tangente á extremidade d'aquelle arco, comprehendida entre essa extremidade e o raio produzido, que passa pela outra extremidade; assim

$$\text{tg } B = \frac{MN}{BM} = \frac{MN}{R} \ldots\ldots (2)$$

3.° *Secante* é a relação (*a*) que tem para o raio a linha comprehendida entre o centro do arco e a extremidade externa da tangente, e por tanto

$$\text{sec } B = \frac{BN}{BM} = \frac{BN}{R} \ldots\ldots (3)$$

Como o denominador de (1) (2) e (3) é constantemente o raio R, tambem se usa por maior brevidade dizer; seno é a perpendicular abaixada da extremidade do arco sobre o raio que passa pela outra extremidade; e assim a respeito da tangente e da se-

(*a*) C'est ainsi que les lignes trigonometriques se ramènent à ne plus être que de simples rapports, et c'est sous ce point de vue qu'il serait convenable de les présenter tout d'abord.

F. LOURCY — *Leçons de G. Analytique* — Sixième edition.

cante. É uma simplificação perfeitamente analoga á que se usa no enunciado da seguinte proporção de geometria — a superficie de um triangulo é egual á metade do producto da base pela altura — aonde os termos *base* e *altura* designam os numeros que representam a relação das linhas d'aquelle nome para a unidade, qualquer que ella seja, que é o lado do quadrado que se adoptou para unidade de superficie, do mesmo modo que alli os termos — *seno, tangente* e *secante* — significam os numeros que representam a medida d'aquellas linhas (definidas como dissemos) tomando para unidade o raio, qualquer que seja, a que correspondem os arcos descriptos.

6

Uma vez comprehendida a vantagem de conhecer as seis relações, a que démos os nomes de seno, tangente, etc., vejamos a maneira de as calcular.

Simplifica-se esse calculo em vista das seguintes considerações:

1.° Conhecido o valor de uma qualquer das relações mencionadas, é possivel determinar as cinco restantes, correspondentes ao mesmo angulo, a que se refere a primeira.

2.° Conhecidas as seis relações para um pequeno arco, v. g., para o arco de 1″, é facil calcular as mesmas relações para os arcos multiplos d'aquelles, taes como 2″, 3″, etc.

I

Suppomos conhecida a relação $\frac{b}{a} = \operatorname{sen} B$:

$$a),\quad \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}},\ \text{ou}\ \cos B = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 B} \ldots (4)$$

$$b),\quad \frac{b}{c}=\frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}},\qquad \text{ou tang B}=\frac{\text{sen B}}{\text{cos B}}\ldots\ldots\text{(5)}$$

$$c),\quad \frac{c}{b}=\frac{\frac{c}{a}}{\frac{b}{a}},\qquad \text{ou cot B}=\frac{\text{cos B}}{\text{sen B}}\ldots\ldots\ldots\text{(6)}$$

$$d),\quad \frac{a}{c}=\frac{1}{\frac{c}{a}},\qquad \text{ou sec B}=\frac{1}{\text{cos B}}\ldots\ldots\ldots\text{(7)}$$

$$e),\quad \frac{a}{b}=\frac{1}{\frac{b}{a}},\qquad \text{ou cosec B}=\frac{1}{\text{sen B}}\ldots\ldots\text{(8).}$$

II

Sejam (fig. 2) o angulo $abc=\varphi$, e $dbf=\psi$; e os dois triangulos abc e bdf rectangulos, o primeiro em a, e o segundo em d.

Temos $$\frac{ab}{bf}=\frac{ab}{bc}\cdot\frac{bc}{bf}=\frac{ab}{bc}\left(\frac{bd}{bf}-\frac{cd}{bf}\right)$$

ou $$\frac{ab}{bf}=\frac{ab}{bc}\cdot\frac{bd}{bf}-\frac{ab}{bc}\cdot\frac{cd}{df}\cdot\frac{df}{bf},$$

isto é, $\cos(\varphi+\psi) = \cos\varphi\cos\psi - \cos\varphi \,.\, \mathrm{tg}\,\varphi \,.\, \mathrm{sen}\,\psi$

ou $\cos(\varphi+\psi) = \cos\varphi\cos\psi - \mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\psi \ldots\ldots (9).$

Com este valor e com a formula (4) facilmente se determina (*b*) (*c*)

$$\mathrm{sen}\,(\varphi+\psi) = \mathrm{sen}\,\varphi\cos\psi + \mathrm{sen}\,\psi\cos\varphi \ldots\ldots\ldots (10).$$

As formulas (9) e (10) combinadas com (5) dão

$$\mathrm{tg}\,(\varphi+\psi) = \frac{\mathrm{tg}\,.\,\varphi + \mathrm{tg}\,\psi}{1 - \mathrm{tg}\,\varphi\,\mathrm{tg}\,\psi} \ldots\ldots (11).$$

E assim por deante a respeito de $\cot(\varphi+\psi)$, $\sec(\varphi+\psi)$, etc.

(*b*) A formula (10) pode tambem ser achada directamente. Com effeito temos (fig. 2.ª)

$$\frac{af}{bf} = \frac{ac}{bf} + \frac{cf}{bf} = \frac{ac}{bc} \cdot \frac{bc}{bf} + \frac{cf}{df} \cdot \frac{df}{bf} = \frac{ac}{bc} \cdot \left(\frac{bd}{bf} - \frac{cd}{df} \cdot \frac{df}{bf}\right) + \frac{cf}{df} \cdot \frac{df}{bf}$$

ou $\mathrm{sen}\,(\varphi+\psi) = \mathrm{sen}\,\varphi\,(\cos\psi - \mathrm{tg}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\psi) + \sec\varphi\,\mathrm{sen}\,\psi$

isto é, $\mathrm{sen}\,(\varphi+\psi) = \mathrm{sen}\,\varphi\cos\psi + \mathrm{sen}\,\psi\cos\varphi.$

(*c*) Fazendo $\varphi+\psi=\theta$, será $\psi=\theta-\varphi$, e as formulas (9) e (10) transformam-se em

$$\cos\theta = \cos\varphi\cos(\theta-\varphi) - \mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,(\theta-\varphi)$$

$$\mathrm{sen}\,\theta = \mathrm{sen}\,\varphi\cos(\theta-\varphi) + \cos\varphi\,\mathrm{sen}\,(\theta-\varphi);$$

as quaes dão, eliminando successivamente $\cos(\theta-\varphi)$, e $\mathrm{sen}\,(\theta-\varphi)$,

$$\mathrm{sen}\,(\theta-\varphi) = \mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi - \mathrm{sen}\,\varphi\cos\theta \ldots\ldots (12)$$

$$\cos(\theta-\varphi) = \cos\theta\cos\varphi + \mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta \ldots\ldots (13).$$

7

Suppondo conhecido sen a (sendo a um arco qualquer) as formulas (4), (5), (6), (7) e (8) determinam cos a, tg a, etc. etc.

Em seguida, fazendo em (10) $\varphi = \psi = a$, obteremos sen $2a$, com o qual e com a formula (4) se obterá o valor de cos $2a$, que tambem se poderia achar fazendo em (9) $\varphi = \psi = a$. Depois a formula (5) ou (11) determinará o valor de tg $2a$. E assim por deante a respeito de todas as mais relações pertencentes ao arco $2a$.

Para obter sen $3a$, faremos em (10) $\varphi = 2a$, $\psi = a$; e depois acharemos as demais relações, usando do mesmo processo já indicado a proposito do arco $2a$.

Continuando com este methodo achariamos as linhas trigonometricas de todos os arcos multiplos de a.

Resta por tanto simplesmente determinar o seno d'um arco a, o qual, como é facil de perceber, para o fim que nos propômos, deve ser mui pequeno e tal, que sejam insensiveis as differenças entre os valores de duas relações trigonometricas do mesmo nome pertencentes a dois arcos consecutivos na e $(n+1)a$.

Para isso seja (fig. 3.ª) $ab = bd = a$. Tirem-se a corda ad e as tangentes ae e de.

Será $$ad < abd < aed;$$

(d) De $abd < aed$ tira-se $\operatorname{tg} a > \alpha$, ou $\operatorname{sen} a > \alpha \cos a > \alpha\sqrt{1-\alpha^2}$ attendendo a (12).

Temos tambem $\dfrac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}a}{\cos\frac{1}{2}a} > \frac{1}{2}\alpha$, donde se deduz

$$2 \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}a \cos\tfrac{1}{2}a = \operatorname{sen} a > \alpha \cos^2\tfrac{1}{2}a = \alpha\,(1 - \operatorname{sen}^2\tfrac{1}{2}a);$$

e por tanto $$\operatorname{sen} a > \alpha - \tfrac{1}{4}\alpha^3.$$

Este limite é preferivel ao dado por (15).

d'onde se conclue (d), sendo r o raio

$$\text{sen}\, a < \frac{a}{r} = \alpha \ldots\ldots (14)$$

$$\text{sen}\, a > \alpha \sqrt{1 - \alpha^2} \ldots\ldots (15)$$

ou $$\text{sen}\, a > \alpha - \frac{1}{4}\alpha^3 \ldots\ldots (16)$$

Conhece-se d'este modo que o valor de sen a está comprehendido entre α e $\alpha - \frac{1}{4}\alpha^3$. Ora a differença entre estas quantidades é $\frac{1}{4}\alpha^3$, a qual é susceptivel de se tornar tão pequena quanto se quizer, e por tanto insensivel, escolhendo a convenientemente pequeno. Nesse estado será ainda com maior approximação sen $a = \alpha$, e por tanto conhecido (e).

Fica d'este modo justificada a hypothese, que fizemos, da possibilidade de formar as taboas trigonometricas: o que é bastante para o nosso fim.

Devemos todavia accrescentar que existem outros processos e formulas differentes, por meio das quaes se pode hoje conseguir com maior simplicidade a formação d'aquellas taboas (f).

8

Com o que fica dito não pode offerecer difficuldade a resolução dos triangulos rectangulos. Passaremos por isso á resolução dos

(e) A quantidade α, que tambem se chama arco rectificado, exprime a relação do arco a para o raio.

Este numero é facil de calcular quando se conhece a graduação do arco.

(f) On ne peut qu'admirer, diz Cagnoli, la patience de ceux qui les ont construites par des moyens extrêmement pénibles, sans le secours du calcul differentiel et de tant de formules qu'on a trouvèes depuis. (CAGNOLI — *Trigonometrie*).

obliquangulos, tomando para primeiro problema «determinar os tres angulos de um triangulo, suppondo conhecidos os tres lados.»

Seja (fig. 4.ª) ABC o triangulo de que se tracta. Do vertice C sobre a base tire-se a perpendicular CD, e assim ficará o triangulo decomposto em dois outros, rectangulos (vide § 2).

No primeiro ACD conhecemos o lado $AC = b$, e por tanto se fosse conhecido qualquer outro lado seria facil resolvel-o, e depois o segundo triangulo BDC.

Ora chamando

$$CD \ldots y, \text{ e } AD \ldots x,$$

temos $$b^2 = y^2 + x^2,\ a^2 = y^2 + (c - x)^2 \ldots \quad (1)$$

e d'estas se tira:

$$x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c} \ldots\ldots \quad (2)$$

Estamos pois habilitados para resolver o triangulo ADC, e assim

se obtem $$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \ldots \quad (3)$$

$$y = b \operatorname{sen} A.$$

A primeira d'estas duas equações determina o angulo A, e a segunda habilita-nos para resolver o triangulo BCD, e por conseguinte para determinar o angulo B. Com effeito neste triangulo conhecemos agora $BC = a$, e $CD = b \operatorname{sen} A$, e por tanto teremos B pela equação

$$a \operatorname{sen} B = b \operatorname{sen} A \ldots\ldots \quad (4)$$

O angulo C será determinado pela formula muito conhecida $A + B + C = 180$.

A fig. 4 suppõe que é agudo cada um dos angulos A e B. Se o angulo A for obtuso terá logar a fig. 4', e neste caso procedendo como acima acharemos

$$b^2 = y^2 + x^3,\ a^2 = y^2 + (c + x)^2$$

$$x = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2c}$$

$$\cos(180 - A) = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2bc} \ldots\ldots (3')$$

$$a \operatorname{sen} B = b \operatorname{sen} (180 - A) \ldots\ldots (4')$$

Finalmente se o angulo B for obtuso (fig. 4''), os valores de A e B serão dados por

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \ldots\ldots (3'')$$

$$a \times \operatorname{sen}(180 - B) = b \operatorname{sen} A \ldots\ldots (4'')$$

A comparação dos valores do a b e c poderá servir para determinar aquelle dos systemas (3) e (4), de que se deva usar em cada caso particular para determinar A e B.

Quando os dados do problema fossem outros, v. g., dois lados e o angulo comprehendido, ou dois angulos e um lado, etc. etc., procederiamos de um modo identico, decompondo sempre o triangulo proposto em dois outros rectangulos (vide o § 2).

9

Acabámos de dizer que a comparação dos valores de a b e c pode servir para distinguir aquelle dos systemas (3) e (4), de que se deva usar em cada problema para determinar A e B. Supponhamos porém que se não faz essa comparação, e que tendo logar a fig. 4', ou 4'', e devendo por isso usar respectivamente de (3') ou (3''): empregavamos (3) para determinar A.

Neste ultimo caso achariamos servindo-nos de (3) um valor perfeitamente identico ao que seria dado por $(3')$.

Passemos ao segundo caso. Nesta hypothese o 2.° membro de $(3')$ é um valor necessariamente positivo, e conseguintemente se com os valores de a b e c, com que deveriamos calcular aquelle 2.° membro, calcularmos o 2.° membro de (3), acharemos para este um valor *negativo,* posto que *numericamente* egual ao 2.° membro de $(3')$.

D'aqui se conclue que em todo e qualquer caso se pode sempre empregar a formula (3) para determinar *cos* A: ficando entendendo que, se o valor de *cos* A sahir positivo, o angulo A é agudo, e o seu valor aquelle que corresponde ao valor numerico de *cos* A; se porém aquelle valor for negativo, o angulo A será obtuso e supplementar do angulo agudo, correspondente ao valor achado de coseno tomado com o signal contrario.

Exprime-se isto mais simplificadamente dizendo «que os angulos obtusos têm cada um o seu coseno, que é negativo e numericamente egual ao coseno do seu respectivo supplemento.»

Passemos agora á determinação de B. Supponhamos que se ignora qual das duas figuras, 4 ou $4''$, é a que pertence ao problema que se resolve. Em ambos os casos teremos de calcular $\frac{b \text{ sen } A}{a} = \text{sen } Z$; e depois tomaremos para B o angulo Z assim achado, ou o supplemento d'esse angulo.

Para determinar a escolha d'um ou outro d'estes angulos poderá depois servir, v. g., a comparação dos valores de a b e c, como já por vezes temos dito.

Poderemos pois dizer, que em ambos os casos da fig. 4, ou $4''$, o angulo B pode ser determinado pela mesma formula

$$a \text{ sen } B = b \text{ sen } A,$$

uma vez que se combine em dizer, que qualquer angulo obtuso tem um seno egual em numero e signal ao seno do seu respectivo supplemento.

E nesta mesma hypothese a formula $(4')$ pode ainda ser substituida por (4), que é por tanto uma formula geral applicavel a qualquer dos casos da fig. 4, 4′ ou 4″.

10

A formula (3), que serviu para determinar o angulo A, pode egualmente ser empregada para determinar os dois restantes B e C.

E a mesma formula pode ainda servir para resolver o triangulo, quando os dados forem outros, v. g., dois lados e o angulo comprehendido, etc., etc.

O mesmo se pode dizer a respeito da formula (4), de modo que uma ou outra pode ser considerada como fundamental para a resolução dos triangulos rectilineos.

Aquellas formulas podem tambem ser empregadas para demonstrar varios theoremas relativos aos mesmos triangulos.

Para taes fins é, geralmente, preciso combinar umas com as outras, pelas diversas operações algebricas, as formulas (3), (4) e suas analogas, e as formulas dadas em (6, I) applicadas aos angulos A, B e C do triangulo.

Escrevamos pois aquellas formulas, e bem assim estas ultimas referidas ao angulo A do triangulo proposto. Teremos, suppondo agudo cada um dos angulos A, B e C,

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos \mathrm{A} \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos \mathrm{B} \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos \mathrm{C} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (5)$$

$$a \operatorname{sen} \mathrm{B} = b \operatorname{sen} \mathrm{A},\ b \operatorname{sen} \mathrm{C} = c \operatorname{sen} \mathrm{B} \ldots\ldots (6)$$

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{sen}^2\mathrm{A} + \cos^2\mathrm{A} = 1,\ \operatorname{tg}\mathrm{A} = \frac{\operatorname{sen}\mathrm{A}}{\cos\mathrm{A}},\quad \cot\mathrm{A} = \frac{\cos\mathrm{A}}{\operatorname{sen}\mathrm{A}} \\ &\qquad\qquad \sec\mathrm{A} = \frac{1}{\cos\mathrm{A}},\ \operatorname{cosec}\mathrm{A} = \frac{1}{\operatorname{sen}\mathrm{A}} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (7)$$

e o resultado da combinação d'estas formulas umas com as outras, pelas operações algebricas, será uma nova formula, que representaremos por

$$f(\text{sen A}, \cos A, \text{tang A}, \cot A, \sec A, \text{cosec A}) = o \ldots . (8)$$

designando a letra f um funcção qualquer (g).

Seja agora obtuso o angulo A, e chame-se A′ o supplemento d'aquelle angulo. As formulas (5), (6) e (7) transformam-se neste caso em

$$\left.\begin{array}{l} a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cos A' \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \end{array}\right\} \ldots\ldots (5')$$

$$a \text{ sen B} = b \text{ sen A}', \; b \text{ sen C} = c \text{ sen B} \ldots\ldots (6')$$

$$\text{sen}^2 A' + \cos^2 A' = 1, \; \text{tg A}' = \frac{\text{sen A}'}{\cos A'}, \; \cot A' = \frac{\cos A'}{\text{sen A}'}, \text{ etc.. } (7')$$

que podem escrever-se

$$\left.\begin{array}{l} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc(-\cos A') \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \end{array}\right\} \ldots\ldots (5'')$$

$$a \text{ sen B} = b \text{ sen A}', \; b \text{ sen C} = c \text{ sen B} \ldots\ldots (6'')$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{sen}^2 A' + (-\cos A')^2 = 1, \; (-\text{tg A}') = \dfrac{\text{sen A}'}{(-\cos A')}, \\ \cot A' = \dfrac{(-\cos A')}{\text{sen A}'}, \; (-\sec A') = \dfrac{1}{(-\cos A')}, \; \text{cosec A}' = \dfrac{1}{\text{sen A}'} \end{array}\right\} (7'')$$

(g) Veja-se a nota (a) pag. 102 da 3.ª edição dos *Elementos d'Algebra*, do Sr. Manso Preto.

ou, fazendo nellas

$$\operatorname{sen} A' = x,\ -\cos A' = x',\ -\operatorname{tg} A' = y,$$

$$-\cot A' = y',\ -\sec A' = z,\ \operatorname{cosec} A' = z',$$

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \times x' \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (5''')$$

$$a \operatorname{sen} B = bx,\ b \operatorname{sen} C = c \operatorname{sen} B \ldots\ldots (6''')$$

$$x^2 + x'^2 = 1,\ y = \frac{x}{x'},\ y' = \frac{x'}{x},\ z = \frac{1}{x'},\ z' = \frac{1}{x} \ldots (7''')$$

Ora, comparando (5) (6) e (7) com (5''') (6''') e (7'''), vê-se que se passa d'aquellas para estas mudando nas primeiras sen A em x, cos A em x', tg A em y, cot A em y' etc.: e por tanto, se operarmos sobre as ultimas, do mesmo modo que se operou sobre (5) (6) e (7) para obter (8), acharemos um resultado, que será a mesma formula (8) mudando nella sen A em x, cos A em x', etc., etc., isto é, sen A em sen A', cos A em — cos A', tg A em — tg A', sec A em — sec A', e cosec A em cosec A'. Pode pois dizer-se que a formula (8), deduzida na supposição de ser agudo o angulo A, tem egualmente logar quando este angulo for obtuso, uma vez que se fique entendendo que neste caso por sen A, cos A, tg A, etc., etc., se representa a relação trigonometrica do mesmo nome pertencente ao supplemento d'aquelle angulo, considerando como negativas todas estas relações excepto o seno e a cosecante (*h*) (*i*).

(*h*) «Todas as linhas trigonometricas dos arcos do segundo quadrante são eguaes ás mesmas linhas trigonometricas do seu supplemento, mudando todas de signal, excepto o seno e a cosecante.»

(*Elementos de trigonometria rectilinea* — pelo Sr. Manso Preto 2.ª edição, pag. 12).

(*i*) Il faut donc, lorsqu'on dit que *telles ou telles quantités deviennent*

Terminaremos com a seguinte observação.

Se no decurso do calculo, que suppomos effectuar-se com as formulas (5) (6) e (7), soubermos que um qualquer dos angulos, que alli entram, o qual representaremos por θ, é a somma de dois outros φ e ψ, poderemos, sem receio d'errar, substituir por sen $(\varphi+\psi)$ e cos $(\varphi+\psi)$ os seus desenvolvimentos achados no § 6, ainda quando se ignore se o angulo θ é agudo ou obtuso.

No primeiro caso está isso demonstrado.

Supponhamos pois que o angulo θ é obtuso; e em primeiro logar consideremos agudos os angulos φ e ψ:

Neste caso sen θ representa o mesmo que sen $(180^\circ-\theta)$; ora

$$\operatorname{sen}(180^\circ-\theta)=\operatorname{sen}(90^\circ-\varphi+90^\circ-\psi)=$$

$$=\operatorname{sen}\varphi\cos\psi+\operatorname{sen}\psi\cos\varphi.$$

Da mesma sorte, cos θ entra nas formulas como synonimo de $-\cos(180-\theta)$; e como

$$\cos(180^\circ-\theta)=\cos(90^\circ-\varphi+90^\circ-\psi)=$$

$$=\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\psi-\cos\varphi\cos\psi,$$

será $\quad -\cos(180^\circ-\theta)=\cos\varphi\cos\psi-\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\psi,$

négatives ......, considerer cette locution comme une manière abrégée de dire que ces quantités devront être remplacées dans le resultat du calcul par des expressions algébriques en effet négatives ......, à fin de corriger la fausse supposition que l'on a faite dans la mise en équation, en regardant ces équations comme immédiatement applicables á tous les cas. Ce n'est donc là qu'un langage fictif, mais d'ailleurs très-utile, puis qu'il donne le moyen d'embrasser par une même formule tous les cas particuliers d'un probleme, en se reservant d'y faire à la fin les modifications qui pourront se trouver encore nécessaires, à l'effet d'eliminer les contradictions que n'auraient pas entièrement fait disparaitre les transformations opérés dans le cours du calcul.

(CARNOT — *Reflexions sur la metaphysique du calcul infinitèsimal* — quatrième edition, page 154).

que é o mesmo que se obteria applicando a formula (9) a $\cos(\varphi + \psi)$.

Se um dos angulos, φ por exemplo, fosse obtuso, teriamos

$$\text{sen}\,\theta = \text{sen}\,(180^\circ - \varphi - \psi)$$

$$= \text{sen}\,(180^\circ - \varphi)\cos\psi - \text{sen}\,\psi\cos(180^\circ - \varphi)$$

$$= \text{sen}\,\varphi\cos\psi + \text{sen}\,\psi\cos\varphi$$

E da mesma sorte

$$\cos\theta = -\cos(180^\circ - \theta) = -\cos(180 - \varphi - \psi)$$

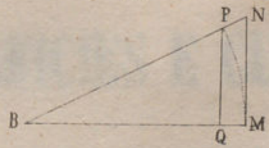
$$= -[\cos(180^\circ - \varphi)\cos\psi + \text{sen}\,(180^\circ - \varphi)\cos\psi]$$

$$= \cos\varphi\cos\psi + \text{sen}\,\varphi\,\text{sen}\,\psi.$$

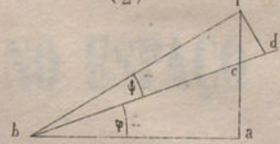
As outras formulas, que se encontram em (6, II), são, conforme alli se viu, o resultado da combinação de (9) e (10) com as formulas dadas em (6, I), e poderemos por tanto repetir a respeito d'ellas o racioccinio que ha pouco empregámos a proposito de (5) (6) e (7) do presente numero.

FIM.

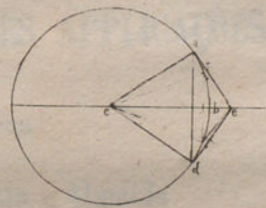
(1)



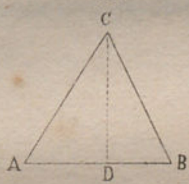
(2)



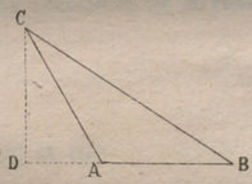
(3)



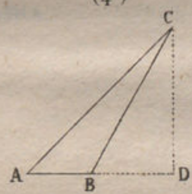
(4)



(4′)



(4″)



THEORIA DOS CONTACTOS

DAS

SUPERFICIES E CURVAS NO ESPAÇO

E

SUAS PRINCIPAES APPLICAÇÕES

POR

Luiz da Costa e Almeida

SUBSTITUTO ORDINARIO DA FACULDADE DE MATHEMATICA

ABRIL DE 1869

J. P. d'Azevedo
2.º anno mathematica 77-78

COIMBRA
IMPRENSA DA UNIVERSIDADE

J'avoue même que j'attacherais moins de prix à mettre dans la démonstration d'un théorème cette rigueur extrême, si recherchée maintenant de quelques personnes, qu'à faire clairement apercevoir la raison de ce théorème et ses connexions avec les autres vérités mathématiques.

(*Preface du Traité élémentaire de la Théorie des fonctions*, par M. Cournot).

ADVERTENCIA

Na collocação das materias seguimos precisamente a mesma ordem, por que as achámos dispostas no Calculo Differencial de Francoeur; a fim de que os alumnos do segundo anno mathematico, para uso dos quaes destinámos especialmente estes apontamentos, podessem acompanhar, querendo, o estudo d'aquelle livro com a leitura d'estes folheto.

Depois de havermos deduzido as regras geraes para estabelecer os contactos, accrescentámos alguns theoremas novos, que facilitam em muitos casos a applicação d'aquellas regras.

Tractando da determinação das superficies e curvas osculadôras, empregámos, na maior parte dos casos, mais de um processo, porque nos differentes caminhos, que levam á solução, se descobrem, muitas vezes, propriedades tambem differentes; e quasi sempre traduzimos no methodo dos limites, que os alumnos já conhecem, os principios empregados pelos que usam do calculo infinitesimal, por entendermos que é este o melhor meio de lhes inspirar confiança nos resultados obtidos por este ultimo methodo, de que mais tarde necessariamente se hão de servir.

Procurámos tornar claras, quanto possivel, as ideias de *flexão* e *torsão;* calculámos a primeira, e por uma simples mudança de lêtras passámos d'ella para a *torsão,* evitando assim calculos laboriosos e transformações difficeis.

Em fim, na deducção da fórmula, em que se comprehende o theorema de Meusnier, seguimos um processo inverso do geralmente adoptado. A maior parte dos auctores, depois de haverem deduzido aquella fórmula, concluem que o circulo osculador da secção normal e o da obliqua, que passa pela mesma tangente, existem ambos na mesma esphera; nós, pelo contrario, soccorremos-nos a esta propriedade para demonstrar aquelle theorema. E parece-nos, que d'este modo facilitámos a demonstração.

☞ As citações e os numeros escriptos á margem referem-se ao Calculo Differencial de Franc. 2.ª Ed. de Coimbra.

SUPERFICIES E CURVAS NO ESPAÇO

1. *Contactos de duas superficies.* Sejam F. n.º 124

$$z_i = f(x_i,\ y_i) \quad \text{e} \quad z_i = F(x_i,\ y_i)$$

as equações de duas superficies, e $(x,\ y,\ z)$ as coordenadas de um ponto, que lhes é commum.

Nesta hypothese teremos

$$z = f(x\ y) \quad \text{e} \quad z = F(x\ y);\ldots\ldots\ldots\ldots\ (1)$$

e a distancia entre os pontos das duas superficies, correspondentes ás mesmas variaveis independentes $x+h,\ y+k$, será:

$$\delta = h(p-P)+k(q-Q)+\frac{1}{2}h^2(r-R)+hk(s-S)+\frac{1}{2}k^2(t-T)+\ldots,$$

designando por $p,\ q,\ r,\ s,\ t\ldots$ os coefficientes differenciaes $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dxdy}$, $\frac{d^2z}{dz^2}\ldots$ tirados da primeira de (1); e por $P,\ Q,\ R,\ S,\ T\ldots\ldots$ os correspondentes da segunda.

Suppondo $k=\alpha h$, sendo α uma constante, teremos

$$\delta = h[(p-P)+\alpha(q-Q)]+\frac{1}{2}h^2[(r-R)\cdot 2\alpha(s-S)+\alpha^2(t-T)]+\ldots..$$

e se fôr

$$p - P + \alpha\,(q - Q) = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

a expressão anterior ficará reduzida a

$$\delta = \frac{1}{2} h^2[(r - R) + 2\alpha\,(s - S) + \alpha^2\,(t - T)] + \ldots\ldots$$

Empregando agora o mesmo raciocinio do § 99, concluiremos; que para uma terceira superficie, que tenha com a primeira o ponto commum (x, y, z), mas entre a qual e a primeira se não verifique a relação correspondente a (1) para o mesmo valor de α, a distancia Δ será maior que δ para valores muito pequenos de h; o que significa que as duas primeiras superficies se approximam mais uma da outra, nas proximidades do ponto (x, y, z) e na direcção α, do que a primeira e terceira.

Se porém quizermos que as duas superficies tenham um contacto de primeira ordem em todas as direcções, a relação (2) deverá ser satisfeita para todo e qualquer valor de α, o que sómente poderá acontecer reduzindo-se a uma identidade, isto é, sendo $p = P$ e $q = Q$.

Pelo mesmo modo se veria que, para terem as duas superficies um contacto de segunda ordem em todas as direcções, era necessario e sufficiente que se verificassem, além das condições precedentes, as relações $r = R$, $s = S$ e $t = T$ (*).

E assim por deante.

Do que acabâmos de dizer resulta tambem, que se duas superficies têm um contacto da ordem n, a differença entre os pontos correspondentes das mesmas supercies é da ordem $n + 1$; quer dizer, esta differença é dada por uma serie, na qual $n + 1$ representa a somma dos expoentes de h e k nos termos, em que esta somma é menor.

Contactos de uma superficie com uma curva. Sejam $z_{\prime} = fx_{\prime}$ $y_{\prime} = \varphi x_{\prime}$ as equações d'uma curva; e $z_{\prime} = F(x_{\prime}\, y_{\prime})$ a de uma superficie, que passa pelo ponto (x, y, z) da curva.

(*) Este mesmo raciocinio prova tambem que se uma superficie tiver com outra um contacto da ordem n em $n + 1$ direcções, as duas superficies terão um contacto d'aquella ordem em todas as direcções.

Chamando δ a distancia entre os pontos, correspondentes a $x+h$, d'aquella curva e outra ~~qualquer~~ traçada sobre a superficie, e cujas equações são $z_{,} = F(x_{,}, y_{,})$ e $y_{,} = \varphi x_{,}$: teremos

$$\delta = h\left[\frac{dz}{dx} - \left(\frac{dz}{dx}\right)\right] + \frac{1}{2}h^2\left[\frac{d^2z}{dx^2} - \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)\right] + \ldots\ldots$$

aonde se representam por $\frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2} \ldots$ as derivadas de z, tiradas da equação $z = fx$, e por $\left(\frac{dz}{dx}\right), \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right), \ldots$ as derivadas d'aquella mesma quantidade, tiradas de

$$z = F(x, y) = F[x, \varphi x].$$

Se fôr
$$\frac{dz}{dx} = \left(\frac{dz}{dx}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

provar-se-ha como acima, que para outra superficie que passe pelo ponto commum (x, y, z), mas entre a qual e a curva não haja uma relação analoga a (3), a distancia Δ entre a curva e esta superficie será maior que δ. Neste caso diz-se que a primeira superficie tem com a curva um contacto de primeira ordem, e que a distancia δ é de segunda ordem.

E assim por deante a respeito dos contactos mais intimos.

Contactos entre duas curvas. Sejam

$y_{,} = fx_{,}$ e $z_{,} = Fx_{,}$ as equações d'uma curva,

$y_{,} = \varphi x_{,}$ e $z_{,} = \psi x_{,}$ as equações d'outra,

e (x, y, z) as coordenadas de um ponto commum.

A distancia entre os pontos das duas curvas, correspondentes á mesma variavel independente $x+h$, será

$$\delta=\sqrt{[f(x+h)-\varphi(x+h)]^2+[F(x+h)-\psi(x+h)]^2}$$

$$=\sqrt{[h(f'-\varphi')+\frac{1}{2}h^2(f''-\varphi'')+\ldots]^2+[h(F'-\psi')+\frac{1}{2}h^2(F''-\psi'')+\ldots]^2};$$

e, para que esta expressão se reduza a uma quantidade de segunda ordem, é necessario e sufficiente que sejam

$$f'=\varphi' \text{ e } F'=\psi' \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Neste caso diz-se que as duas curvas têm um contacto de primeira ordem, e prova-se facilmente que para valores muito pequenos de h, a distancia Δ entre a primeira e outra qualquer curva, que passa pelo ponto (x, y, z), mas que não satisfaz ás condições correspondentes a (4), é maior que δ.

Para haver um contacto de segunda ordem, era mister que alem das condições (4) se verificassem tambem as relações $f''=\varphi''$ e $F''=\psi''$. E assim por deante.

Do que acabamos de dizer resulta que:

1.º Se duas curvas no espaço têm entre si um contacto de certa ordem, as suas projecções sobre qualquer dos planos coordenados têm tambem um contacto d'aquella mesma ordem; e reciprocamente (*).

(*) D'aqui se conclue immediatamente, que sendo $z_1=Fx_1$ e $y_1=fx_1$ as equações d'uma curva, as da sua tangente no ponto (x, y, z) serão

$$z_1-z=\frac{dF}{dx}(x_1-x),\ y_1-y=\frac{df}{dx}(x_1-x),$$

representando x_1 y_1 e z_1 as coordenadas correntes da recta.

2.° Se uma curva tem um contacto determinado com outra, traçada sobre uma superficie, a primeira curva terá tambem um contacto d'aquella mesma ordem com esta superficie.

Sejam as duas curvas

$$z_{\prime}=fx_{\prime}\ ,\ y_{\prime}=\varphi x_{\prime} \qquad \text{e} \qquad z_{\prime}=F(x_{\prime},\ y_{\prime})\ ,\ y_{\prime}=\psi x_{\prime},$$

e supponhâmos que estas têm um contacto de 2.ª ordem, e por tanto que é

$$\frac{df}{dx}=\left(\frac{dF}{dx}\right),\ \frac{d^2f}{dx^2}=\left(\frac{d^2F}{dx^2}\right),$$

aonde representamos por $\left(\frac{dF}{dx}\right)$ e $\left(\frac{d^2F}{dx^2}\right)$ as derivadas, primeira e segunda, de z em ordem a x, tiradas da equação $z=F(x,\ y)$, na qual se suppõe $y=\psi x$, ou, o que vale o mesmo, $y=\varphi x$, visto ser

$$\varphi x=\psi x, \qquad \frac{d\varphi}{dx}=\frac{d\psi}{dx}\ ,\ \text{e}\ \frac{d^2\varphi}{dx^2}=\frac{d^2\psi}{dx^2}.$$

Temos pois a curva $z_{\prime}=fx_{\prime}\ ,y_{\prime}=\varphi x_{\prime}$ e a superficie $z_{\prime}=F(x_{\prime}\,y_{\prime})$, e as relações $\frac{df}{dx}=\left(\frac{dF}{dx}\right),\ \frac{d^2f}{dx^2}=\left(\frac{d^2F}{dx^2}\right)$, e por tanto a curva tem com a superficie um contacto de 2.ª ordem.

3.° Se uma curva tem um contacto da ordem n com duas superficies, que se intersectam, a curva terá tambem um contacto d'aquella ordem com a intersecção das superficies.

Sejam, a curva $\qquad z_{\prime}=Fx_{\prime}\ ,\ y_{\prime}=fx_{\prime},$

e as superficies $\qquad z_{\prime}=\varphi(x_{\prime},\ y_{\prime})\ ,\ z=\psi(x_{\prime}\ ,\ y_{\prime})\ ;$

e supponhâmos que a curva tem com cada uma d'essas superficies um contacto de primeira ordem, e por tanto que é

$$\frac{dF}{dx}=\frac{d\varphi}{dx}+\frac{d\varphi}{dy}\frac{df}{dx} \quad \text{e} \quad \frac{dF}{dx}=\frac{d\psi}{dx}+\frac{d\psi}{dy}\frac{df}{dx}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5).$$

Considerando a curva, resultante da intersecção das superficies, as derivadas $\frac{dz}{dx}$ e $\frac{dy}{dx}$ serão dadas pelas equações

$$\frac{dz}{dx}=\frac{d\varphi}{dx}+\frac{d\varphi}{dy}.\frac{dy}{dx},\ \frac{dz}{dx}=\frac{d\psi}{dx}+\frac{d\psi}{dy}\frac{dy}{dx};$$

e como substituindo nestas formulas, em logar d'aquellas derivadas, os valores correspondentes, tirados das equações da curva dada, recahimos nas equações (5), que por hypothese são satisfeitas, vê-se que effectivamente a intersecção das superficies tem um contacto de primeira ordem com a curva proposta.

4.° Se $n+1$ curvas traçadas numa superficie tiverem, em um ponto d'esta, um contacto da ordem n com outras tantas curvas traçadas noutra superficie, sem que as curvas existentes em qualquer das superficies sejam osculadoras entre si; a primeira superficie terá com a segunda um contacto da ordem n (*).

A equação $z_{,}=f(x_{,}, y_{,})$ com cada uma das seguintes $y_{,}=\varphi x_{,}$, $y_{,}=\varphi_{1}x_{,}$ $y_{,}=\varphi_2 x_{,}$ representa tres curvas; as outras tres são dadas por

$$z_{,}=F(x_{,}, y_{,}) \qquad \text{com} \qquad y_{,}=\psi x_{,} \quad y_{,}=\psi_1 x_{,} \quad y_{,}=\psi_2 x_{,}:$$

e suppõe-se que cada uma das primeiras tem um contacto de segunda ordem com a correspondente da segunda superficie.

(*) Este theorema comprehende o da nota de pag. 2.

Nesta hypothese temos

$$\frac{df}{dx}+\frac{df}{dy}\frac{d\varphi}{dx}=\frac{dF}{dx}+\frac{dF}{dy}\frac{d\psi}{dx} \text{ ou } \frac{df}{dx}-\frac{dF}{dx}=\frac{d\varphi}{dx}\left(\frac{dF}{dy}-\frac{df}{dy}\right), \dots\dots\dots \quad (6)$$

$$\frac{df}{dx}+\frac{df}{dy}\frac{d\varphi_{,}}{dx}=\frac{dF}{dx}+\frac{dF}{dy}\frac{d\psi_{,}}{dx} \text{ ou } \frac{df}{dx}-\frac{dF}{dx}=\frac{d\varphi_{,}}{dx}\left(\frac{dF}{dy}-\frac{df}{dy}\right); \dots\dots\dots \quad (7)$$

e visto não ser $\frac{d\varphi}{dx}=\frac{d\varphi_{,}}{dx}$, as duas equações (6) e (7) sómente podem coexistir, sendo

$$\frac{df}{dx}=\frac{dF}{dx} \text{ e } \frac{df}{dy}=\frac{dF}{dy}, \text{ ou } p=P \text{ e } q=Q.$$

Como as curvas têm por hypothese um contacto de segunda ordem, será tambem

$$\frac{d^2f}{dx^2}+2\frac{d^2f}{dxdy}\frac{d\varphi}{dx}+\frac{d^2f}{dy^2}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2+\frac{df}{dy}\frac{d^2\varphi}{dx^2}$$

$$=\frac{d^2F}{dx^2}+2\frac{d^2F}{dxdy}\frac{d\psi}{dx}+\frac{d^2F}{d^2y}\left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2+\frac{dF}{dy}\frac{d^2\psi}{dx^2},$$

ou

$$\left(\frac{d^2f}{dx^2}-\frac{d^2F}{dx^2}\right)+2\left(\frac{d^2f}{dxdy}-\frac{d^2F}{dxdy}\right)\frac{d\varphi}{dx}+\left(\frac{d^2f}{dy^2}-\frac{d^2F}{dy^2}\right)\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2=0 \dots\dots \quad (8)$$

que póde escrever-se

$$L+2M\frac{d\varphi}{dx}+N\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2=0;$$

e similhantemente

$$L+2M\frac{d\varphi_1}{dx}+N\left(\frac{d\varphi_1}{dx}\right)^2=0$$

$$L+2M\frac{d\varphi_2}{dx}+N\left(\frac{d\varphi_2}{dx}\right)^2=0;$$

e, visto não haver egualdade entre duas quaesquer das tres quantidades $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d\varphi_1}{dx}$, $\frac{d\varphi_2}{dx}$, as tres relações precedentes sómente poderão subsistir conjunctamente, sendo $L=0$, $M=0$, $N=0$, isto é

$$r=R,\ s=S,\ t=T;$$

e assim por adeante.

Os principios anteriores servem para resolver o seguinte poblema: «Dadas as equações d'uma curva ou superficie, determinar os parametros, que entram nas equações d'uma outra curva ou superficie de natureza conhecida, de modo que esta fique tendo com a primeira um contacto ou osculação de ordem designada.»

Quando uma curva ou superficie, tem com uma curva, ou com uma superficie, o contacto mais intimo que é possivel, designa-se, de ordinario, sem mencionar a ordem do contacto: diz-se, por exemplo, tangente a uma curva, plano tangente a uma superficie, plano osculador d'uma curva, circulo osculador, etc., etc.

O que fica dicto com referencia aos contactos, por se fundar na formula de Taylor, suppõe que este desenvolvimento é applicavel pelo menos até á ordem de osculação, o que facilmente se reconhecerá em cada caso particular.

2. *Plano tangente a uma superficie.* 1.º Methodo.— A equação d'um plano qualquer é F. n.º 125

$$z_{,}=Ax_{,}+By_{,}+C \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

sendo A, B e C parametros indeterminados.

Como o plano deve passar pelo ponto (x, y, z) da superficie $z_{,}=f(x_{,}, y_{,})$, temos esta equação de condição

$$z=Ax+By+C \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

E para que neste mesmo ponto haja um contacto de primeira ordem, deve ser $p=P$, $q=Q$, isto é

$$p=A\,,\ q=B \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

As equações (2) e (3) determinam A, B e C; e, substituindo-os em (1) acharemos a equação do plano tangente

$$z_{,}-z=p(x_{,}-x)+q(y_{,}-y) \ldots\ldots\ldots\ldots (4),$$

ou
$$\frac{df}{dz}(z_{,}-z)+\frac{df}{dy}(y_{,}-y)+\frac{df}{dx}(x_{,}-x)=0,$$

suppondo implicita a equação da superficie.

2.º Methodo. Procuraremos a equação d'um plano, que passe pelos tres pontos (x, y, z), $(x+h, y, z+l)$, $(x, y+k, z+L)$.

As condições precedentes dão para determinar A, B e C as tres seguintes equações

$$z = Ax + By + C$$

$$z + l = A(x + h) + By + C$$

$$z + L = Ax + B(y + k) + C.$$

A equação do plano, que se procura, será pois

$$z_{,} - z = \frac{l}{h}(x_{,} - x) + \frac{L}{k}(y_{,} - y).$$

Agora, fazendo decrescer h e K, obteremos no limite

$$z_{,} - z = \frac{dz}{dx}(x_{,} - x) + \frac{dz}{dy}(y_{,} - y).$$

Assim o plano tangente póde considerar-se como o limite, para que tendo o plano secante, que passa por aquelles tres pontos, quando se suppõe que o segundo e terceiro se approximam indefinidamente do primeiro (*).

3.º Methodo. Sobre a superficie $z_{,} = f(x_{,}, y_{,})$ tracemos uma curva qualquer, que passe pelo ponto (x, y, z). Suppondo que é $y_{,} = \varphi x_{,}$ a equação da projecção da curva sobre o plano xy, serão, as equações da curva

$$y_{,} = \varphi x_{,} \qquad z_{,} = f(x_{,}, y_{,}) = f[x_{,}, \varphi x_{,}] = \psi x_{,},$$

(*) Por um modo identico podiamos determinar novamente as equações da tangente a uma curva.

e as da sua tangente naquelle ponto

$$y_{\prime}-y=\frac{d\varphi}{dx}(x_{\prime}-x),\quad z_{\prime}-z=\frac{d\psi}{dx}(x_{\prime}-x)=\left(\frac{df}{dx}+\frac{df}{dy}\frac{d\varphi}{dx}\right)(x_{\prime}-x),$$

$$\text{ou } y_{\prime}-y=m(x_{\prime}-x),\quad z_{\prime}-z=(p+qm)(x_{\prime}-x)\ldots\ldots(1),$$

chamando m a tangente trigonometrica do angulo, que a tangente á curva plana $y_{\prime}=\varphi x_{\prime}$ forma com o eixo de x.

Dando a m nas equações (1) todos os valores positivos ou negativos, desde zero até ao infinito, achariamos as equações de todas as tangentes a todas as curvas traçadas na superficie, e que passavam por (x, y, z); e, eliminando m entre aquellas duas equações, obteremos a equação do logar geometrico correspondente a todas aquellas tangentes

$$z_{\prime}-z=p(x_{\prime}-x)+q(y_{\prime}-y).$$

3. A recta que, passando por um ponto de uma superficie, é perpendicular ao respectivo plano tangente, diz-se normal á superficie nesse ponto. F. n.º 126

Satisfazendo ás condições precedentes, acharemos que a normal, conduzida pelo ponto (x, y, z) da superficie $z_{\prime}=f(x_{\prime}, y_{\prime})$, é representada pelas equações

$$x_{\prime}-x+p(z_{\prime}-z)=0,\ y_{\prime}-y+q(z_{\prime}-z)=0\ldots\ldots\ldots(1).$$

4. *Superficies cylindricas.* Chamam-se assim as superficies geradas por uma recta indefinida, que se move conservando-se constantemente parallela a uma recta fixa, e que em todas as suas posições encontra sempre uma curva determinada. F. n.º 127

Sejam $\quad x=az,\ y=bz\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$

as equações da directriz rectilinea;

e $\quad f(x, y, z)=0,\ F(x\ y\ z)=0\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$

as da directriz curvilinea.

As equações de toda e qualquer recta parallela a (1) são

$$x = az + m,\ y = bz + n, \dots\dots\dots \quad (3)$$

sendo m e n arbitrarias. Mas d'entre todas estas rectas, sómente concorrem para a formação da superficie, as que satisfazem á condição de encontrar a curva (2); a qual condição estabelece entre m e n uma relação

$$m = \varphi n \dots\dots\dots\dots\dots \quad (4)$$

resultante da eliminação de x, y e z entre (2) e (3).

D'este modo, dando a n um valor qualquer em (4), tirando d'esta equação o correspondente de m, e substituindo esses valores em (3), obteriamos a generatriz numa das suas posições. Dando a n um novo valor, obteriamos uma nova posição da generatriz; e assim por deante. As equações d'esta linha serão pois

$$x = az + \varphi n \qquad y = bz + n, \dots\dots \quad (5)$$

sendo n uma quantidade arbitraria.

Todos os pontos, e só esses, cujas coordenadas (x, y, z) satisfizerem a (5), pertencerão á superficie cylindrica; e esses serão exactamente os mesmos, que satisfazem á equação resultante da eliminação de n entre aquellas duas equações (*). Fazendo pois esta eliminação acharemos

$$x - az = \varphi (y - bz) \dots\dots\dots \quad (6)$$

que é a equação da superficie cylindrica.

(*) Conhece-se isto facilmente suppondo as duas equações (5) resolvidas em ordem a n.

As diversas superficies cylindricas, que têm a mesma directriz rectilinea, differem umas das outras pela fórma de φ.

A equação (6), suppondo φ variavel, pertence a todas estas superficies.

Derivando esta equação, suppondo variaveis x e z, e depois y e z, obteremos

$$1-ap=-bp\,\varphi' \quad \text{e} \quad -aq=(1-bq)\,\varphi';$$

e, eliminando φ'

$$ap+bq=1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Como esta equação se conserva a mesma, qualquer que seja a fórma de φ, concebe-se que ella deve representar uma propriedade commum a todas as superficies cylindricas, cuja directriz rectilinea é a mesma, e seja qual for a directriz curvilinea.

É o que vamos ver.— Se em qualquer ponto d'uma d'estas superficies tirarmos o plano tangente, como este deve conter a generatriz, a qual é parallela a (1), tambem o plano tangente será parallelo a esta recta. Ora a equação do plano tangente é $\quad z_{,}-z=p(x_{,}-x_{,})+q\,(y_{,}-y)$,
e a condição, necessaria e sufficiente, para que este plano seja parallelo a a (1) é

$$ap+bq=1.$$

Superficies conicas. Estas superficies são geradas por uma recta sujeita a passar por um ponto fixo, e a encontrar constantemente uma curva determinada.

Sendo *a, b* e *c* as coordenadas do ponto fixo (vertice do cóne), as equações de qualquer recta. que passa por aquelle ponto, são

$$x-a=m\,(z-c) \qquad y-b=n\,(z \quad c)\;.\;.\;.\;(1)$$

sendo m e n parametros variaveis. E para que (1) encontre a directriz, cujas equações representaremos por

$$f(x, y, z)=o,\ F(x, y, z)=o \ ,\ .\ .\ (2)$$

deve ter logar a equação de condição

$$m=\varphi n\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (3)$$

resultante da eliminação de x, y e z entre (1) e (2). Eliminando pois m e n entre (1) e (3), virá a equação da superficie conica

$$\frac{x-a}{z-c}=\varphi\left(\frac{y-b}{z-c}\right)\ .\ .\ .\ .\ (4).$$

As diversas superficies conicas, que têm o mesmo vertice, differem umas das outras pela fórma de φ.

Derivando a equação (4), em ordem a x e z, e depois em ordem a y e z, vem

$$z-c+p(a-x)=p(b-y)\varphi' \quad , q(a-x)=[(z-c)-q(y-b)]\varphi',$$

e dividindo estas duas equações uma pela outra, para eliminar φ', e fazendo as possiveis reducções, acharemos

$$z-c=p(x-a)+q(y-b),$$

que exprime uma propriedade commum a todas as superficies conicas, que têm o mesmo vertice.

Vejamos em que consiste esta propriedade. Se por qualquer ponto de uma d'estas superficies tirarmos o plano tangente, como este deve conter a generatriz, a qual passa por (a, b, c), tambem o plano tangente passará por este ponto; e por conseguinte terá sempre logar a equação

$$c - z = p(a - x) + q(b - y).$$

As superficies cylindricas e conicas fazem parte d'uma classe mais extensa, a das superficies planificaveis, de que em breve havemos de achar uma propriedade geral e caracteristica.

Superficies conóides. Estas superficies consideram-se geradas por uma recta, que se move conservando-se constantemente parallela a um plano director, e encontrando em todas as suas posições duas directrizes, uma curvilinea, e a outra rectilinea. Quando a directriz rectilinea é perpendicular ao plano director, o conóide diz-se recto. É o caso de que tractâmos, suppondo que a directriz rectilinea coincide com o eixo dos z, e que o plano director é o dos xy.

As equações de qualquer recta, parallela ao plano dos xy, e que encontra o eixo dos z, são

$$z = c \qquad y = mx \ldots\ldots\ldots (1)$$

sendo c e m arbitrarias.— E para que esta recta encontre a directriz curvilinea, deve ter logar entre c e m a relação

$$c = \varphi m \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

proveniente da eliminação de x, y e z entre (1) e as duas equações d'esta directriz.— Eliminando pois c e m entre (1) e (2), acharemos a equação da superficie conóide

$$z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Derivando esta equação, suppondo variaveis primeiramente x e z, e depois y e z, e eliminando φ' entre as duas equações resultantes, acharemos

$$px + qy = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

que exprime uma propriedade commum a todos os conóides rectos, que tem por directriz rectilinea o eixo dos z.

Vamos ver em que consiste esta propriedade.— Se por qualquer ponto d'aquellas superficies tirarmos o plano tangente e outro parallelo ao dos xy, da intersecção d'estes dous planos resultará uma recta, evidentemente parallela ao plano dos xy, e que encontrará o eixo dos z.

Aquella intersecção é representada pelas equações

$$z_{\prime} - z = p(x_{\prime} - x) + q(y_{\prime} - y) \qquad z_{\prime} = z,$$

e a condição, necessaria e sufficiente, para que esta recta encontre o eixo dos z, cujas equações são $\quad x_{\prime} = 0, \quad y_{\prime} = 0,$

é
$$py - qx = 0.$$

Superficies de revolução. Estas superficies são geradas por uma circumferencia, cujo centro se move ao longo d'uma recta fixa, conservando-se o plano do circumferencia constantemente perpendicular áquella linha, e variando o raio, de modo que a circumferencia encontra sempre uma curva determinada. — A recta fixa denomina-se eixo de revolução; e chama-se meridiano a curva resultante da intersecção da superficie por um plano que passa pelo eixo.

É evidente que estas superficies podem considerar-se geradas pelo meridiano gyrando em torno do eixo; e d'ahi vem a sua denominação.

No que vamos dizer suppomos que o eixo de revolução coincide com o dos z.

As equações de toda e qualquer circumferencia, cujo centro está no eixo dos z, e cujo plano é perpendicular a este eixo, são

$$z=c, \qquad x^2+y^2=r^2=K \ldots\ldots\ldots (1)$$

sendo c e r ou K parametros variaveis.

Para que esta circumferencia encontre a directriz curvilinea, deve ter logar a equação

$$c=\varphi(k), \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

que provêm de eliminar x, y e z entre (1) e as duas equações d'esta curva. Por tanto, obteremos a equação da superficie, eliminando k e c entre (1) e (2), o que dá

$$z=\varphi(x^2+y^2) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Derivando esta equação, acharemos

$$p=2x\varphi' \qquad q=2y\varphi';$$

e eliminando φ' vem

$$py-qx=0.$$

Da geração d'esta especie de superficies resulta evidentemente que a normal, tirada por um ponto qualquer, existe no plano meridiano correspondente, aliás a symetria da superficie em relação a qualquer plano meridiano accusaria a existencia de duas normaes, collocadas symetricamente d'um e outro lado d'este plano, o que não pode ser, visto que a cada ponto da superficie corresponde uma só normal. Ora a equação de condição, para que duas rectas existam no mesmo plano, obtem-se, eliminando

$x_{,}$, $y_{,}$ e $z_{,}$ entre as equações d'essas rectas (*), e portanto, a condição, para que a normal

$$x_{,}-x+p\,(z_{,}-z)=o,\ y_{,}-y+q\,(z_{,}-z)=o$$

e o eixo dos z $\qquad x_{,}=o \qquad y_{,}=o$

existam em um mesmo plano, é

$$py-qx=o.$$

F. n.º 128 5. Empregando as equações da tangente a uma curva, demonstrou-se em o n.º 2, que o plano tangente a uma superficie, em um dado ponto, podia considerar-se como o logar geometrico de todas as tangentes, tiradas por aquelle ponto, ás curvas traçadas na superficie e que passavam por elle. Reciprocamente, por meio d'esta propriedade do plano tangente, deduzem-se com facilidade as equações da tangente a uma curva.

Sejam as equações da curva

$$z_{,}=fx_{,} \qquad y_{,}=\psi x_{,} \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(1).$$

A curva plana $z_{,}=fx_{,}$ é a projecção de (1) sobre o plano dos xz; e esta projecção obteve-se por meio de uma superficie cylindrica, cujas generatrizes eram perpendiculares áquelle plano. Se pelo ponto (x, y, z) da curva (1) tirarmos o plano tangente á superficie cylindrica, este plano conterá a tangente á curva, tirada por aquelle ponto, a tangente á projecção da curva, tirada pelo ponto d'esta, que é a projecção do primeiro, e tambem a generatriz correspondente da superficie cylindrica. E como esta generatriz é perpendicular ao plano dos xz, vê-se que a tangente á projecção da curva é a projecção da tangente á curva.

(*) Quando duas rectas existem no mesmo plano, ou se encontram ou são parallelas. No primeiro caso evidentemente deve ter logar a equação (7) (Part. 3.ª, pag. 348). Se são parallelas, como é então $a=a'$ e $b=b'$, ainda tem logar a mesma equação; o que aliás era facil de prever, por quanto esta indica apenas que existe um systema de valores (finitos ou infinitos) de x, y e z, que satisfaz conjunctamente ás quatro equações das duas rectas.

As equações da tangente a (1) serão pois

$$z_{,}-z=\frac{df}{dx}(x_{,}-x) \qquad y_{,}-y=\frac{d\psi}{dx}(x_{,}-x)\ldots\ldots\ldots(2)$$

como já sabiamos.

Os cosenos dos angulos, que a tangente fórma com cada um dos tres eixos coordenados, são (Parte 3.ª, n.º 204)

$$\cos\alpha=\frac{\dfrac{dx}{dz}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{dx}{dz}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dz}\right)^2}}$$

$$\cos\beta=\frac{\dfrac{dy}{dz}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{dx}{dz}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dz}\right)^2}}$$

$$\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{dx}{dz}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dz}\right)^2}}.$$

As fórmulas precedentes tornam-se symetricas generalisando a variavel independente (n.º 41). Nesta hypothese, representando simplesmente por dx, dy e dz as derivadas $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ e $\frac{dz}{dt}$, e pondo por simplicidade $dx^2+dy^2+dz^2=ds^2$ (*), acharemos

$$\cos\alpha=\frac{dx}{ds},\ \cos\beta=\frac{dy}{ds},\ \cos\gamma=\frac{dz}{ds}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Se representarmos por a, b e c as coordenadas de um ponto qualquer da curva dada, e por x, y e z as coordenadas variaveis da tangente; as equações (1) e (2) transformam-se em

$$c=fa,\qquad b=\psi a\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

$$z-f=f'.(x-a),\qquad y-\psi=\psi'.(x-a)\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Attribuindo a a nas equações (5) todos os valores possiveis, achariamos as diversas tangentes á curva (4); e, eliminando a entre aquellas duas equações, obteremos a equação do logar geometrico de todas aquellas tangentes, isto é, da superficie gerada por uma recta, que se move conservando-se constantemente tangente a (4).

Esta superficie e todas as que admittem este modo de geração chamam-se planificaveis.

Sem fazer a eliminação podemos dizer que a primeira de (5) é a equação da superficie, considerando a uma funcção de x e y determinada pela segunda d'aquellas equações. As diversas superficies planificaveis differem umas das outras pela fórma das funcções designadas por f e ψ.

Posto isto, derivemos a equação da superficie, isto é, a primeira de (5), em ordem a x e z, e depois em ordem a y e z. Acharemos, represen-

(*) A respeito da significação concreta do que se representa por ds, veremos mais adiante que exprime a derivada do arco.

tando $\dfrac{da}{dx}$ por a', $\dfrac{da}{dy}$ por a'', e fazendo as possiveis reducções

$$p=f'+a'\,(x-a)\,f'' \qquad q=a''\,(x-a)\,f'' : \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6);$$

e como a segunda de (5) dá para determinar a' e a''

$$0=\psi'+a'\,(x-a)\,\psi'' \qquad 1=a''\,(x-a)\,\psi'',$$

se tirarmos d'estas equações os valores d'aquellas quantidades, e os substituirmos em (6), veremos que x desapparece, e fica

$$p=\varphi\,(a), \quad q=\pi\,(a),$$

e por conseguinte $\qquad p=\Phi\,(q), \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$
sendo φ, π e Φ funcções dependentes das primitivas f e ψ.

Derivando (7) vem

$$r=\Phi'.\,s \quad s=\Phi'.\,t,$$

e, eliminando Φ', acharemos finalmente

$$rt-s^2=o. \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Esta equação exprime uma propriedade commum a todas as superficies planificaveis, independente da curva primitiva representada por (4).

Continuando a representar por A, B e C os parametros d'um plano, e suppondo que este é o tangente, teremos

$$A=p, \ B=q, \ C=z-px-qy.$$

Ora nas superficies planificaveis ha sempre uma direcção (determinada pela tangente), segundo a qual não varia a posição do plano tangente (*). Os valores de A, B e C devem pois ser constantes para todos os pontos situados naquella linha, e por conseguinte teremos nessa mesma direcção

$$\frac{dA}{dx}=o,\ \frac{dB}{dx}=o,\ \frac{dC}{dx}=o,$$

isto é

$$r+sm=o,\qquad s+tm=o,\qquad x\,(r+sm)+y\,(s+tm)=o,$$

representando $\frac{dy}{dx}$ por m.

Aquellas tres relações equivalem sómente a duas

$$r+sm=o,\qquad s+tm=o$$

e, eliminando m, acharemos (**)

$$rt-s^2=o.$$

Plano normal a uma curva em um ponto d'ella é o plano, que passa

(*) A tangente (5) assenta na superficie planificavel, e se por um ponto d'aquella tirarmos o plano tangente á superficie, este conterá sempre a tangente: e por que alem d'isso é $p=\varphi\ (\alpha)$ e $q=\psi\ (\alpha)$, vê-se que o plano tangente em um ponto d'aquella recta ainda o é em qualquer ponto da mesma tangente.

Esta propriedade expressa pela equação (8) distingue as superficies regradas planificaveis das enviesadas, que admittem tambem uma generatriz rectilinea, mas nas quaes o plano tangente varia d'um para outro ponto d'esta linha.

(**) Para cada valor attribuido a m, estas fórmulas exprimem duas relações, que têm logar para os pontos da superficie situados na generatriz respectiva; e, eliminando m, acharemos um resultado, que pertencerá a todos os pontos de qualquer generatriz, e que será, por conseguinte, a equação da superficie.

por esse ponto e é perpendicular á tangente respectiva. A equação do plano normal á curva (1), será pois (Fr. tom. 3.º, n.º 200) (*)

$$z_{,}-z+\frac{dx}{dz}(x_{,}-x)+\frac{dy}{dz}(y_{,}-y)=o, \ldots\ldots (9)$$

ou $$(z_{,}-z)\,dz+(y_{,}-y)\,dy+(x_{,}-x)\,dx=o$$

generalisando a variavel independente.

6. *Plano osculador d'uma curva* F. n.º 129

1.º Methodo. A equação geral do plano é

$$z_{,}=Ax_{,}+By_{,}+C \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

sendo A, B e C indeterminadas.

(*) As equações de qualquer recta, que passa pelo ponto (x, y, z) da curva, são

$$x_{,}-x=m\,(z_{,}-z) \qquad y_{,}-y=n\,(z_{,}-z)$$

sendo m e n arbitrarias. E, para que a recta seja perpendicular á tangente, deve ser

$$m\frac{dx}{dz}+n\frac{dy}{dz}+1=0 \quad \text{ou } n=-\frac{dz}{dy}\left(1+m\frac{dx}{dz}\right).$$

Substituindo este valor nas equações da recta, acharemos as equações da normal

$$x_{,}-x=m\,(z_{,}-z), \quad y_{,}-y=-\frac{dz}{dy}\left(1+m\frac{dx}{dz}\right)(z_{,}-z);$$

e como resta ainda uma arbitraria m, vê-se que em cada ponto d'uma curva ha uma infinidade de normaes. Eliminando m entre estas duas equações, acharemos a do plano normal.

Se designarmos por x, y e z as coordenadas do ponto da curva

$$z_{,}=fx_{,} \qquad y_{,}=\psi x_{,},$$

pelo qual deve passar o plano, teremos a seguinte equação de condição

$$z=Ax+By+C \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

E, para que neste mesmo ponto haja um contacto de segunda ordem, deve ser (n.º 1)

$$\frac{dz}{dx}=\left(\frac{dz}{dx}\right) \quad \text{e} \quad \frac{d^2z}{dx^2}=\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right),$$

ou

$$f'=A+B\psi' \text{ e } f''=B\psi'' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

As equações (2) e (3) determinam A, B e C, e, substituindo-os em (1), virá a equação do plano osculador

$$\psi''.(z_{,}-z)=(f'\psi''-\psi'f'')(x_{,}-x)+f''(y_{,}-y) \ldots\ldots (4)$$

2.º Methodo. Procuremos a equação do plano, que passa pelos tres pontos da curva correspondentes aos valores x, $x+h$ e $x+2h$ de $x_{,}$.

A equação de qualquer plano, que passa por (x, y, z), é

$$z_{,}-z=A(x_{,}-x)+B(y_{,}-y) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5);$$

e, para que este plano passe pelo segundo e terceiro ponto, devem ter logar as equações de condição

$$l=Ah+Bk, \qquad l_{,}=2Ah+Bk_{,} \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

chamando k e l os augmentos de y e z provenientes da mudança de x em $x+h$ nas equações da curva, e $k_{,}$ e $l_{,}$ os correspondentes á mudança de x para $x+2h$.

Eliminando A entre as duas equações (6), tirando B da equação resultante, e tomando o limite attendendo a que é

$$k = h\psi' + \tfrac{1}{2} h^2 \psi'' + \ldots \qquad l = hf' + \tfrac{1}{2} h^2 f'' + \ldots$$

$$k_{\prime} = 2h\psi' + 2h^2\psi'' + \ldots \qquad l_{\prime} = 2hf' + 2h^2 f'' + \ldots,$$

acharemos $\quad \lim. B = \dfrac{f''}{\psi''} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7).$

Da primeira de (6) tira-se

$$\lim. A = \lim. \frac{l}{h} - \lim. B. \lim. \frac{k}{h},$$

ou $\quad \lim A = f' - \psi' \dfrac{f''}{\psi''} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8).$

Substituindo em (5), em logar de A e B, os seus limites dados por (7) e (8), recahiremos na equação (4). Na linguagem dos infinitamente pequenos, exprime-se isto, dizendo que o plano osculador passa por tres pontos consecutivos da curva.

3.° Methodo. As equações da tangente á curva, tirada pelo ponto (x, y, z), são

$$z_{\prime} - z = f'.(x_{\prime} - x) \qquad y_{\prime} - y = \psi'.(x_{\prime} - x).$$

E para que o plano (5), que tambem passa por aquelle ponto, contenha esta tangente, é sufficiente a condição (Fr. T. 3.°, n.° 199).

$$Aa + Bb = 1 \quad \text{ou} \quad A + B\psi' = f' \ldots\ldots\ldots\ldots (9).$$

Se pelo ponto (x, y, z) tirarmos uma recta, parallela á tangente tirada pelo ponto correspondente a $x+h$; a condição, para que o plano contenha esta segunda recta, é

$$A+B\psi'(x+h)=f'(x+h)\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (10).$$

Eliminando A entre (9) e (10), teremos

$$B\left(h\psi''+\frac{1}{2}h^2\psi'''+\dots\right)=hf''+\frac{1}{2}h^2f'''+\dots\dots,$$

d'onde se tira lim. $B=\dfrac{f''}{\psi''}$.

Em seguida obteremos lim. A por meio da equação (9).

No methodo infinitesimal diz-se, que o plano osculador contem duas tangentes infinitamente proximas.

A equação (4) toma uma fórma symetrica generalisando a variavel independente por meio das fórmulas do (n.º 41). D'este modo, empregando as mesmas simplificações do n.º anterior, acharemos

$$(dx\,d^2y-dy\,d^2x)(z_{,}-z)+(dz\,d^2x-dx\,d^2z)(y_{,}-y)$$
$$+(dy\,d^2z-dz\,d^2y)(x_{,}-x)=o;$$

que póde escrever-se com mais simplicidade

$$Z(z_{,}-z)+Y(y_{,}-y)+X(x_{,}-x)=o\dots\dots\dots\dots (11)$$

pondo $\quad Z=dx\,d^2y-dy\,d^2x,\ Y=d^2z\,dx-dx\,d^2z,\ X=dy\,d^2z-dz\,d^2y.$

D'entre a infinidade de normaes a uma curva, que se podem tirar por um ponto d'ella, chama-se principal a que existe no plano osculador respectivo. As equações d'esta linha serão as dos dois planos — normal e osculador — ou as seguintes, que d'ellas se deduzem com facilidade,

$$\left.\begin{array}{l}(z_{,}-z)\,(Z\,dx-X\,dz)+(y_{,}-y)\,(Y\,dx-X\,dy)=o\\ (z_{,}-z)\,(Z\,dy-Y\,dz)+(x_{,}-x)\,(X\,dy-Y\,dx)=o\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ (12).$$

Attendendo ás expressões de X e Z, acharemos

$$Z\,dx-X\,dz=dx\,(dx\,d^2y-dy\,d^2x)-dz\,(dy\,d^2z-dz\,d^2y)=$$

$$=d^2y\,(dx^2+dy^2+dz^2)-dy\,(dx\,d^2x+dy\,d^2y+dz\,d^2z)=$$

$$=d^2y.ds^2-dy\,ds\,d^2s=ds\,(ds\,d^2y-dy\,d^2s);$$

donde se tira

$$\left.\begin{array}{c}Z\,dx-X\,dz=ds^3d\left(\dfrac{dy}{ds}\right),\ X\,dy-Y\,dx=ds^3d\left(\dfrac{dz}{ds}\right)\\ Y\,dz-Z\,dy=ds^3d\left(\dfrac{dx}{ds}\right)\end{array}\right\}\ldots\ldots\ (13),$$

e por tanto as equações (12) da normal principal transformam-se em

$$\left.\begin{array}{l}(x_{,}-x)\,d\left(\dfrac{dz}{ds}\right)=(z_{,}-z)\,d\left(\dfrac{dx}{ds}\right)\\ (y_{,}-y)\,d\left(\dfrac{dz}{ds}\right)=(z_{,}-z)\,d\left(\dfrac{dy}{ds}\right)\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (14).$$

Designando por (α), (β) e (γ) os angulos que a normal principal fórma com cada um dos tres eixos coordenados, e pondo por simplicidade

$$R=\left[\left(d\left(\frac{dx}{ds}\right)\right)^2+\left(d\left(\frac{dy}{ds}\right)\right)^2+\left(d\left(\frac{dz}{ds}\right)\right)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

acharemos (Parte 3.ª, n.º 204)

$$\cos(\alpha)=\frac{d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{R},\ \cos(\beta)=\frac{d\left(\frac{dy}{ds}\right)}{R},\ \cos(\gamma)=\frac{d\left(\frac{dz}{ds}\right)}{R}\ldots (15).$$

F. n.º 130 7 *Circulo osculador.— Flexão d'uma curva.* 1.º Methodo. Considerando o circulo como intersecção de uma esphera do mesmo raio como um plano central, as esquações do circulo serão

$$\left.\begin{array}{l}(x_{\prime}-a)^2+(y_{\prime}-b)^2+(z_{\prime}-c)^2=n^2\\ z_{\prime}-c=A(x_{\prime}-a)+B(y_{\prime}-b)\end{array}\right\}\ldots\ldots (1)$$

sendo indeterminadas as coordenadas a, b e c do centro, o raio n, e ainda os parametros A e B dos quaes depende a posição do plano do circulo (*).

Como o circulo ha de passar pelo ponto (x, y, z), teremos as equações de condição

$$\left.\begin{array}{l}(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=n^2\\ z-c=A(x-a)+B(y-b)\end{array}\right\}\ldots\ldots (2)$$

E, para que o circulo tenha naquelle mesmo ponto um contacto de segunda ordem com a curva, as derivadas $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$ tiradas das equações do circulo, deverão ser eguaes ás correspondentes da curva. Ora, derivando primeira e segunda vez as equações (2), obtem-se

$$x-a+(y-b)\frac{dy}{dx}+(z-c)\frac{dz}{dx}=o,\ \frac{dz}{dx}=A+B\frac{dy}{dx}$$

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+(y-b)\frac{d^2y}{dx^2}+(z-c)\frac{d^2z}{dx^2}=o\ ,\ \frac{d^2z}{dx^2}=B\frac{d^2y}{dx^2},$$

(*) Como o circulo existe neste plano, a curva terá com elle um contacto de 2.ª ordem (n.º 1—2), e por conseguinte este plano será o osculador da curva; o que o calculo confirma.

e por conseguinte, suppondo que as equações da curva dada são as mesmas do n.° anterior, teremos, para determinar os parametros do circulo, as equações (2) e seguintes (*)

$$\left.\begin{array}{l} x-a+(y-b)\psi'+(z-c)f'=o\ ,\ f'=A+B\psi' \\ 1+\psi'^2+f'^2+(y-b)\psi''+(z-c)f''=o\ ,\ B\psi''=f''. \end{array}\right\}\cdots\cdots (3)$$

Resolvendo as equações, acharemos

$$\left.\begin{array}{l} a=x-\dfrac{(1+\psi'^2+f'^2)(\psi'\psi''+f'f'')}{\psi''^2+f''^2+(f'\psi''-\psi'f'')^2}, \\[2ex] b=y+\dfrac{(1+\psi'^2+f'^2)[\psi''+f'(f'\psi''-\psi'f'')]}{\psi''^2+f''^2+(f'\psi''-\psi'f'')^2} \\[2ex] c=z+\dfrac{(1+\psi'^2+f'^2)[f''-\psi'(f'\psi''-\psi'f'')]}{\psi''^2+f''^2+(f'\psi''-\psi'f'')^2} \\[2ex] n=\dfrac{(1+\psi'^2+f'^2)^{\frac{3}{2}}}{[f''^2+\psi''^2+(f'\psi''-\psi'f'')^2]^{\frac{1}{2}}} \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

(*) Continuando a considerar o circulo como intersecção de uma esphera com um plano central, como já conhecemos a equação do plano que tem com a curva um contacto da segunda ordem (plano osculador), bastará determinar os parametros da esphera, de modo que o centro fique neste plano, e que a esphera tenha com a curva um contacto d'aquella ordem (n.° 1—3).

Ora a condição, para que o centro da esphera esteja no plano osculador, é

$$\psi''(c-z)=(f'\psi''-\psi'f'')(a-x)+f''(b-y)\,;$$

e as condições, para que a esphera tenha com a curva um contacto de segunda ordem, são expressas por

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=n^2$$

$$x-a+(y-b)\psi'+(z-c)f'=o$$

$$1+(y-b)\psi''+(z-c)f''+\psi'^2+f'^2=o$$

Em fim chegariamos ainda ao mesmo resultado, procurando as equações de

Generalisando a variavel independente para tornar symetricas as formulas precedentes, e repetindo as hypotheses do n.° anterior para as poder escrever com mais simplicidade, as formulas (4) transformam-se em

$$\left.\begin{aligned} a=x+\frac{ds^2(Ydz-Zdy)}{X^2+Y^2+Z^2},\ b=y+\frac{ds^2(Zdx-Xdz)}{X^2+Y^2+Z^2},\\ c=z+\frac{ds^2(Xdy-Ydx)}{X^2+Y^2+Z^2},\ n=\frac{ds^3}{[X^2+Y^2+Z^2]^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}\right\}\ldots\ldots (5)$$

Em fim, se empregarmos as formulas (13) do n.° anterior, e attendermos a que é

$$(Ydz-Zdy)^2+(Zdx-Xdz)^2+(Xdy-Ydx)^2=ds^2(X^2+Y^2+Z^2)-$$
$$-(Xdx+Ydy+Zdz)^2=ds^2(X^2+Y^2+Z^2),$$

acharemos que as equações (5) podem ainda apresentar-se debaixo da seguinte forma

$$\left.\begin{aligned} a=x+n^2.\frac{d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{ds},\ b=y+n^2.\frac{d\left(\frac{dy}{ds}\right)}{ds},\ c=z+n^2\frac{d\left(\frac{dz}{ds}\right)}{ds}\\ n=\frac{ds}{\left[\left(d\left(\frac{dx}{ds}\right)\right)^2+\left(d\left(\frac{dy}{ds}\right)\right)^2+\left(d\left(\frac{dz}{ds}\right)\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}\right\}\ldots (6)$$

Pelos pontos da curva correspondentes aos valores x e $x+h$ de x, tirem-se duas tangentes; e designemos, por s o arco da curva começado

um circulo subjeito a passar pelos tres pontos da curva, correspondentes aos valores x, $x+h$ e $x+2h$ de x, e depois fazendo tender h para zero; o que se exprime no methodo infinitesimal, dizendo que o circulo osculador passa por tres pontos da curva infinitamente proximos.

a contar d'uma origem qualquer e terminado no primeiro ponto, por $s+\delta s$ o comprehendido entre aquella origem e o segundo ponto, e finalmente por θ o angulo, que formam entre si as duas tangentes.

É evidente que será

$$\theta=\Phi(s+\delta s),$$

e por tanto

$$\theta=\frac{d\theta}{ds}\,\delta s+\frac{1}{2}\frac{d^2\theta}{ds^2}(\delta s)^2+\ldots\ldots\ldots\ldots,\quad(7)$$

visto ser $\Phi s=o$.

O coefficiente do primeiro termo do segundo membro, $\frac{d\theta}{ds}=\lim.\frac{\theta}{ds}$, mede a flexão ou curvatura da curva no ponto (x, y, z) (*).

(*) Em um circulo de raio r tomemos um arco, cujo comprimento designaremos por δs; e pelas extremidades d'este tiremos duas tangentes. Designando por θ o angulo que estas fazem entre si, ou, antes, o arco rectificado que lhe serve de medida, teremos, como é sabido

$$\theta=\frac{1}{r}\,\delta s.$$

Assim, é $\frac{1}{r}=\frac{\theta}{\delta s}=\frac{d\theta}{ds}$ o factor constante, pelo qual devemos multiplicar qualquer arco δs, para obter o angulo θ, ou, o que vale o mesmo, para avaliar o *quantum* a tangente se *inflectiu* passando de uma para a outra extremidade do arco δs.

Para outro circulo de raio r' teriamos $\theta'=\frac{1}{r'}\,\delta s'$; e por tanto, suppondo $\delta s=\delta s'$,

$$\theta:\theta'::\frac{1}{r}:\frac{1}{r'}.$$

Vê-se pois que, pela comparação de $\frac{1}{r}$ com $\frac{1}{r'}$, poderemos apreciar em qual dos dois circulos a tangente se *inflecte* mais, para arcos do mesmo comprimento.

Mais geralmente, para uma curva qualquer, teremos, como no texto,

$$\theta=\frac{d\theta}{ds}\,\delta s+\frac{1}{2}\frac{d^2\theta}{ds^2}(\delta s)^2+\ldots\ldots\ldots\quad(7);$$

Calculemos este coefficiente, no qual podemos considerar $d\theta$ e ds como representando as derivadas de θ e s em ordem á variavel independente t (§ 41).

Designando por α, β e γ os angulos que a primeira tangente forma com os eixos coordenados, e por α' β' γ' os da segunda, teremos

$$1 = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma$$

$$1 = \cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma'$$

$$\cos\theta = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma';$$

e posto que o coefficiente $\frac{d\theta}{ds}$ não seja sufficiente (como era no circulo) para determinar, depois de multiplicado por δs, o angulo θ, visto o segundo membro de (7) conter outros termos alem do primeiro; todavia, diminuindo convenientemente δs, poderemos sempre conseguir que aquelle primeiro termo represente a parte principal do segundo membro d'aquella equação.

Demais, para outra curva, ou para outro ponto da mesma, teriamos

$$\theta' = \frac{d\theta'}{ds'}\delta s' + \omega';$$

e suppondo $\delta s = \delta s'$, e repetindo, as considerações do n.° 99, conheceremos facilmente que, segundo for $\frac{d\theta}{ds} \gtrless \frac{d\theta'}{ds'}$, será tambem $\theta \gtrless \theta'$ para valores muito pequenos de δs.

Na analyse das curvas o conhecimento da *flexão* offerece a mesma importancia que tem na mechanica a determinação da velocidade num movimento qualquer. Estes dois elementos offerecem analogia em mais de um ponto.

Fixando na curva tres pontos, correspondentes aos valores x, $x+h$ e $x+2h$ de $x_{,}$; unindo o primeiro ponto com o segundo, e este com o terceiro por meio de rectas ou cordas; e finalmente procurando o limite de $\frac{\delta t}{\delta\Sigma}$ (sendo δt o angulo agudo, que fazem entre si aquellas linhas, e $\delta\Sigma$ o comprimento da corda tirada entre os dois primeiros pontos), acharemos, como é facil de prevêr,

$$\lim.\frac{\delta t}{\delta\Sigma} = \frac{d\theta}{ds};$$

d'onde se conclue que, por meio da flexão, podemos ainda determinar com uma aproximação indefinida o angulo δt formado por duas cordas consecutivas.

mas de $\cos\theta = 1 - 2\,\mathrm{sen}^2\,\frac{1}{2}\,\theta$

tira-se $2\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}\,\theta = \sqrt{[2 - 2\cos\theta]}$,

e por isso, attendendo ás formulas anteriores, acharemos

$$2\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}\,\theta = \sqrt{[(\cos\alpha' - \cos\alpha)^2 + (\cos\beta' - \cos\beta)^2 + (\cos\gamma' - \cos\gamma)^2]}$$

ou $2\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}\,\theta = \sqrt{[(\delta\cos\alpha)^2 + (\delta\cos\beta)^2 + (\delta\cos\gamma)^2]}$.

Da formula precedente deduz-se

$$\frac{\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}\,\theta}{\frac{1}{2}\,\theta}\cdot\frac{\theta}{\delta s} = \sqrt{\left[\left(\frac{\delta.\cos\alpha}{\delta s}\right)^2 + \left(\frac{\delta.\cos\beta}{\delta s}\right)^2 + \left(\frac{\delta.\cos\gamma}{\delta s}\right)^2\right]},$$

a qual dá, tomando os limites, e attendendo a que é $\lim\frac{\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}\,\theta}{\frac{1}{2}\,\theta} = 1$,

$$\lim\frac{\theta}{\delta s} = \frac{d\theta}{ds} = \sqrt{\left[\left(\frac{d\cos\alpha}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\beta}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\gamma}{ds}\right)^2\right]} \;\ldots\; (8)$$

Finalmente as formulas (6) dão

$$\frac{d\cos\alpha}{ds} = \frac{d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{ds} = \frac{a - x}{n^2},\quad \frac{d\cos\beta}{ds} = \frac{d\left(\frac{dy}{ds}\right)}{ds} = \frac{b - y}{n^2},$$

$$\frac{d\cos\gamma}{ds} = \frac{d\left(\frac{dz}{ds}\right)}{ds} = \frac{c - z}{n^2},$$

e por tanto (8) reduz-se a

$$\frac{d\theta}{ds}=\frac{\left[\left(d\left(\frac{dx}{ds}\right)\right)^2+\left(d\left(\frac{dy}{ds}\right)\right)^2+\left(d\left(\frac{dz}{ds}\right)\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}{ds}\ldots\ldots \quad (9)$$

ou

$$\frac{d\theta}{ds}=\frac{1}{n}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10).$$

2.º Methodo. Suppondo $t=x$ na fórmula (9), o que não altera o valor de $\frac{d\theta}{ds}$, vem

$$\frac{d\theta}{ds}=\frac{[(d^2s)^2+(ds\ d^2y-dy\ d^2s)^2+(ds\ d^2z-dz\ d^2s)^2]^{\frac{1}{2}}}{ds^3},$$

aonde por dy, dz, d^2y, d^2z, ds, ... se representam as derivadas respectivas d'aquellas quantidades, tomadas em ordem a x.

E debaixo d'esta fórma, e sem novos calculos, se deixa vêr que o valor de $\frac{d\theta}{ds}$ será o mesmo para a curva proposta e para qualquer outra, que tenha com ella um contacto de segunda ordem, e, por tanto, para o seu circulo osculadór. Mas para este já se viu, em a nota anterior, que era $\frac{d\theta}{ds}=\frac{1}{n}$, e, por conseguinte, para a curva dada será tambem

$$\frac{d\theta}{ds}=\frac{1}{n},$$

que é a fórmula (10) já achada.

Attendendo a esta relação e a (9), acharemos

$$n = \frac{ds}{\left[\left(d\left(\frac{dx}{ds}\right)\right)^2 + \left(d\left(\frac{dy}{ds}\right)\right)^2 + \left(d\left(\frac{dz}{ds}\right)\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}},$$

que é a ultima das fórmulas (6).

No ponto de contacto o circulo osculador, que se procura, tem a mesma tangente que a curva, e como o raio do circulo é perpendicular á tangente, segue-se que será tambem normal á curva (pag. 23, nota); e por tanto o raio tirado para o ponto de contacto é a normal principal. As equações d'aquella linha serão pois as (14) da pag. 27; e, para determinar os angulos que ella fórma com os eixos coordenados, teremos as fórmulas (15) do mesmo n.º

$$\cos(\alpha) = \frac{d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{R}, \quad \cos(\beta) = \frac{d\left(\frac{dy}{ds}\right)}{R}, \quad \cos(\gamma) = \frac{d\left(\frac{dz}{ds}\right)}{R}.$$

E, como por outro lado sabemos que é

$$\cos(\alpha) = \frac{a-x}{\pm n}, \quad \cos(\beta) = \frac{b-y}{\pm n}, \quad \cos(\gamma) = \frac{c-z}{\pm n},$$

teremos finalmente

$$a = x \pm n^2 \frac{d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{ds}, \quad b = y \pm n^2 \frac{d\left(\frac{dy}{ds}\right)}{ds}, \quad c = z \pm n^2 \frac{d\left(\frac{dz}{ds}\right)}{ds}.$$

O duplo signal, que se vê nestas fórmulas, provém, não da natureza do problema, mas do processo, que se empregou para o resolver; sendo aliás facil de conhecer, que é o signal $+$ que se deve aproveitar.

F. n.º 131 8. *Torsão d'uma curva.* Se na fórmula (8) do numero anterior suppozermos que α, β e γ representam os angulos, que o plano osculador, tirado pelo ponto (x, y, z) da curva, fórma com os tres planos coordenados, aquella mesma fórmula dará a medida da *torsão* da curva naquelle ponto (*).

(*) Na curva proposta inscrevamos um polygono, cujos vertices successivos designaremos por a, b, c, d, ...

Á medida que estes vertices se forem aproximando entre si, o polygono tenderá para a curva, de modo que poderemos, com uma aproximação indefinida, substituir a curva pelo polygono. O plano, que passa por tres vertices consecutivos a, b e c, é o osculador á curva no ponto a, isto é, póde aproximar-se d'este plano tanto, quanto quizermos (n.º 6, 2.º methodo). Neste mesmo sentido, o angulo agudo, que as duas cordas ab e bc formam entre si, é o determinado pela flexão da curva no ponto a (pag. 32, nota); e o angulo, formado por dois planos osculadores consecutivos abc e bcd, é o determinado pela torsão naquelle mesmo ponto.

Posto isto, façamos gyrar o plano bcd (e com elle os elementos seguintes do polygono, que lhe estão ligados) em torno de bc, até que este plano coincida com o anterior abc; depois façamos mover o terceiro plano cde em volta de cd até coincidir com o precedente: e assim successivamente. D'este modo, a curva proposta ficará substituida por uma curva plana, cuja flexão, nos seus diversos pontos, é egual á flexão da curva primitiva nos pontos correspondentes.

Na curva planificada façamos gyrar, no respectivo plano, a parte $bcde$. . . . . em volta do ponto b, até que o elemento bc fique em direitura com ab; procedendo assim com os elementos seguintes, a curva plana ficará transformada numa linha recta.

Vejamos agora a maneira do reverter d'esta para a curva primitiva.

Para isso *dobraremos* a recta pelo ponto b até que a parte $bcde$..... forme, com o elemento ab, um angulo egual ao que é determinado pela flexão no ponto a da curva proposta; em seguida a recta $bcde$.... pelo ponto e até que os elementos bc e cde.... formem um angulo egual ao determinado pela flexão relativa ao ponto b: e assim por deante.

Feito isto, suppondo fixos o elemento ab e o plano da curva precedente, faremos mover um plano conduzido pelos pontos b, c, d,.... em *torno* de bc (o que corresponde physicamente a uma torsão d'este elemento) até que este plano forme, com o primeiro, um angulo egual ao determinado pela torsão relativa ao ponto a; depois fariamos gyrar um plano conduzido por c, d, e,.... em torno de cd até que este plano formasse com o anterior um angulo egual ao que era designado pela torsão correspondente ao ponto b: e assim successivamente.

Comprehende-se assim a muita propriedade com que se empregam, na theoria

Na determinação d'este elemento podemos calcular separadamente $d\theta$ e ds. Começaremos por $d\theta$.

Tractando da flexão achámos (n.° 7, fórm. (10) e ultima de (5))

$$d\theta = \sqrt{[(d\cos\alpha)^2 + (d\cos\beta)^2 + (d\cos\gamma)^2]} = \frac{(X^2+Y^2+Z^2)^{\frac{1}{2}}}{ds^2} \ldots\ldots\ldots (1)$$

sendo

$$\cos\alpha = \frac{dx}{\sqrt{[dx^2+dy^2+dz^2]}},\ \cos\beta = \frac{dy}{\sqrt{[dx^2+dy^2+dz^2]}}$$

$$\cos\gamma = \frac{dz}{\sqrt{[dx^2+dy^2+dz^2]}};$$

e presentemente temos

$$\cos\alpha = \frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}},\ \cos\beta = \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}};$$

e portanto passaremos da formula relativa á *flexão* para a correspondente á *torsão*, mudando respectivamente na primeira dx, dy e dz em X, Y e Z.

das curvas, as denominações de *flexão* e *torsão*, bem como as de curvas *enviesadas* ou *torcidas* para designar as curvas que não são planas.

Na passagem da linha recta para a curva plana, cada elemento tal como *bc* soffre um primeiro desvio; e depois, na passagem para a curva primitiva, este mesmo elemento é ainda desviado da posição precedente, com a qual fica formando um certo angulo, e pos isso alguns auctores designam a *flexão* e a *torsão* por primeira e segunda curvatura, e chamam curvas de dupla curvatura ás curvas enviesadas.

Chamando pois T, U e V os resultados provenientes de fazer aquella substituição em X, Y e Z, teremos pela formula (1)

$$d\theta = \frac{(T^2+U^2+V^2)^{\frac{1}{2}}}{X^2+Y^2+Z^2}$$

Procuremos a expressão de T. Por ser

$$X = dyd^2z - dzd^2y,$$

teremos $$T = YdZ - ZdY = (dzd^2x - dxd^2z)(dxd^3y - dyd^3x)$$

$$-(dxd^2y - dyd^2x)(dzd^3x - dxd^3z),$$

ou $$T = dx[dz(d^2xd^3y - d^2yd^3x) + dy(d^2zd^3x - d^2xd^3z)$$

$$+ dx(d^2yd^3z - d^2zd^3y)] = Adx.$$

De X passa-se para Y mudando dy e dz em dz e dx, e por tanto passaremos de T para U mudando Y e Z em Z e X; e esta ultima mudança effectua-se mudando respectivamente

$$x \quad y \quad z$$

em $$y \quad z \quad x$$

Fazendo pois esta substituição no valor de T, acharemos

$$U = dy[dx(d^2yd^3z - d^2zd^3y) + dy(d^2zd^3x - d^2xd^3z) +$$

$$+ dz(d^2xd^3y - d^2yd^3x)] = Ady;$$

e similhantemente
$$V = Adz.$$

Será pois $(T^2+U^2+V^2)^{\frac{1}{2}}=Ads$; e por conseguinte

$$d\theta=\frac{Ads}{X^2+Y^2+Z^2},$$

e finalmente

$$\frac{d\theta}{ds}=\text{torsão}=\frac{A}{X^2+Y^2+Z^2}.$$

9 *Esphera osculatriz.* A equação de uma esphera, em que são desconhecidas a grandeza do raio e a posição do centro, é F. n.° 132

$$(x_{\prime}-a)^2+(y_{\prime}-b)^2+(z_{\prime}-c)^2=n^2,$$

sendo a, b, c e n indeterminadas.

Como a esphera ha de passar pelo ponto (x, y, z) da superficie dada $z_{\prime}=f(x_{\prime}\, y_{\prime})$, temos esta primeira equação de condição

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=n^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

E para que haja, neste mesmo ponto, um contacto de primeira ordem, devemos tornar os valores de P e Q, pertencentes á esphera, eguaes aos de p e q relativos á superficie; e, por tanto, como aquelles são dados por

$$(x-a)+(z-c)P=o, (y-b)+(z-c)Q=0,$$

teremos

$$(x-a)+(z-c)p=o\,,\ (y-b)+(z-c)q=0\ \ldots\ldots\ (2)$$

As espheras, cujos parametros a, b, c e n forem taes, que satisfaçam ás equações (1) e (2), terão com a superficie um contacto de primeira ordem.

A equação (1) significa que a esphera passa pelo ponto (x, y, z), e as equações (2) mostram que o centro está sobre a normal á superficie, conduzida por aquelle ponto; e, por tanto, tirada esta normal, todas as espheras, descriptas d'um ponto qualquer d'esta linha como centro, com um raio egual á distancia d'este ao ponto (x, y, z), terão com a superficie um contacto de primeira ordem.

Para que o contacto fosse de segunda ordem, seria preciso, que se verificassem ainda as relações

$$r=R,\ s=S,\ \text{e}\ t=T, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

as quaes junctas a (1) e (2) prefazem o numero de seis, a que em geral não é possivel satisfazer, por serem só quatro os parametros, que entram na equação da esphera. E por isso, geralmente fallando, nem sempre é possivel determinar uma esphera, que tenha com uma superficie, em um designado ponto, um contacto de segunda ordem (*).

F. n.º 133 10 Sobre a superficie dada trace-se uma curva qualquer, que passe pelo ponto (x, y, z).

As suas equações serão

$$z_{\prime}=f(x_{\prime}, y_{\prime}) \qquad y_{\prime}=\varphi x_{\prime} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4);$$

e a distancia entre os pontos d'esta curva, determinados por $x_{\prime}=x+h$, e os correspondentes de qualquer das espheras já achadas, será

$$\delta = \frac{1}{2}[(r-R)+2(s-S)m+(t-T)m^2]h^2+\Delta,$$

pondo $m=\dfrac{d\varphi}{dx}$, e representando por Δ a reunião dos termos, em que entra h com um expoente superior a 2.

(*) Os pontos particulares de cada superficie, onde uma esphera pode ter um contacto de segunda ordem, serão dados pela equação da superficie e pelas equações (1), (2) e (3), nas quaes supporemos desconhecidos os parametros a, b, c e n e as coordenadas x, y, e z. Aquellas equações serão sufficientes para determinar todas estas quantidades.

Como ainda resta uma arbitraria, podemos dispor d'ella para tornar

$$(r - R) + 2(s - S)m + (t - T)m^2 = o\,; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

e assim ficará completamente determinada uma esphera, que terá um contacto de segunda ordem com aquella curva, e ainda com qualquer outra traçada na superficie, e que seja osculadora da primeira, ou, que tenha a mesma tangente (*); o que pode exprimir-se mais concisamente dizendo, que a esphera tem um contacto de segunda ordem com a superficie na direcção assignada por m (**).

Os valores a, b, c e n dados pelas equações (1), (2) e (5) são tambem as coordenadas do centro e o raio do circulo osculador de uma secção feita na superficie por um plano tirado pela normal e pela tangente de que se tracta.

Com effeito o circulo osculador d'aquella secção tem o centro sobre a normal, e portanto será necessariamente o circulo maximo de algumas das infinitas espheras, que têm com a superficie um contacto de primeira ordem; demais a esphera, a que pertence este circulo, tem com a curva mencionada um contacto de segunda ordem, e por tanto ha de verificar-se para ella a relação (5).

Substituindo na equação (5) em logar de R, S e T os seus valores tirados da equação da esphera, resulta

$$(z - c)(r + 2ms + ts^2) + 1 + m^2 + (p + qm)^2 = o \ldots\ldots\ldots (6).$$

(*) As equações da tangente á curva (4) são

$$z_i - z = p(x_i - x) + q(y_i - y) \quad , \quad y_i - y = m(x_i - x)\,;$$

por onde se vê que a condição, necessaria e sufficiente, para que outra curva traçada na superficie, e que passa por (x, y, z), tenha neste ponto a mesma tangente que a primeira, é ser o valor de m o mesmo para as duas curvas.

(**) Pelo ponto $(x, y, 0)$ tiremos no plano dos $x\,y$ uma recta, que forme com o eixo dos x um angulo, cuja tangente seja egual a m, e quaesquer curvas que tenham aquella recta por tangente no ponto dado. Se por estas curvas elevarmos superficies cylindricas, cujas generatrizes sejam perpendiculares ao plano dos $x\,y$, resultarão da intersecção d'estas com a superficie proposta outras tantas curvas, com todas as quaes terá um contacto de segunda ordem, no ponto (x, y, z), a esphera precedentemente determinada.

As equações (6) e (2) dão as coordenadas do centro, e depois determina-se n por meio de (1); acharemos assim (*)

$$\left.\begin{aligned} c &= z + \frac{1+m^2+(p+qm)^2}{r+2ms+tm^2} \\ b &= y - q\,\frac{1+m^2+(p+qm)^2}{r+2ms+tm^2} \\ a &= x - p\,\frac{1+m^2+(p+qm)^2}{r+2ms+tm^2} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

$$n = \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}\,[1+m^2+(p+qm)^2]}{r+2sm+tm^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8).$$

(*) As equações (7) determinam completamente a grandeza e o signal das coordenadas a, b e c. Se tivessemos combinado as equações, d'onde provieram aquelles valores, pelo processo seguido no n.º 133 do Calc. Diff. de Fr., achariamos

$$a = x - \frac{np}{\sqrt{[1+p^2+q^2]}},\quad b = y - \frac{nq}{\sqrt{[1+p^2+q^2]}},\quad c = z + \frac{n}{\sqrt{[1+p^2+q^2]}} \ldots\ldots (9);$$

nas quaes as coordenadas a, b e c participam da ambiguidade do signal proveniente de n.

E para que estes valores concordem com os precedentes, como deve ser, mostra a comparação de (7) e (9) que nestas ultimas expressões devemos dar a $\frac{n}{\sqrt{[1+p^2+q^2]}}$ o mesmo signal que tem $\frac{1+m^2+(p+qm)^2}{r+2ms+tm^2}$, isto é, o mesmo signal que tem o denominador d'esta ultima expressão, por ser o numerador uma quantidade essencialmente positiva. Assim $r+2ms+tm^2$ e $\frac{n}{\sqrt{[1+p^2+q^2]}}$ devem ter constantemente o mesmo signal, e por isso, se, no calculo dos valores de a, b e c pelas formulas (9), convencionarmos em dar sempre a n o signal positivo, deveremos affectar $\sqrt{[1+p^2+q^2]}$ do mesmo signal, que tiver $r+2ms+tm^2$. Mas com esta ultima hypothese, o valor de n obtido pela fórmula (8) sahe sempre positivo, e

A fórmula (8) determina a grandeza de n, e as equações (7) fixam as coordenadas a, b, c do centro do circulo osculador, e mostram por conseguinte em que sentido é dirigida a curvatura da secção de que se tracta (*).

A inspecção de qualquer d'estas fórmulas (7) mostra, que as curvaturas de duas differentes secções são ambas dirigidas no mesmo sentido, ou em sentido contrario, confórme são os mesmos, ou differentes, os signaes da expressão $r+2sm+tm^2$, calculada com os valores de m correspondentes a cada uma das secções. Ora é sabido que, fazendo corresponder m seguidamente a todos os angulos desde zero até 180°, a expressão $r+2sm+tm^2$ conserva constantemente o mesmo signal, se as raizes da equação de 2.° gráo $r+2sm+tm^2=0$ são imaginarias, isto é, se $rt-s^2>0$. Se as raizes são reaes e eguaes, $rt-s^2=0$, o signal de $r+2sm+tm^2$ é ainda constante, mas ha um valor particular de m (o que corresponde á raiz), que torna nulla aquella expressão. Em fim, se as raizes são reaes e desiguaes, $rt-s^2<0$, chamando α a primeira das raizes que se encontra (fazendo variar m como acima se disse) e β a segunda, a expressão $r+2sm+tm^2$ conserva um signal constante para todos os valores de m desde $m=0$ até $m=\alpha$; para $m=\alpha$ annulla-se aquella expressão; depois muda de signal para os valores de m compre-

por tanto as duas condições precedentes, relativas aos signaes de n e de $\sqrt{[1+p^2+q^2]}$, podem resumir-se no seguinte «quando empregarmos as fórmulas (8) e (9), para determinar as cordenadas a, b e c, deveremos em todas ellas dar a $\sqrt{[1+p^2+q^2]}$ o mesmo signal que tiver $r+2ms+tm^2$».

(*) Imaginemos tirados o plano tangente e a normal á superficie no ponto (x, y, z): e supponhamos que, tendo applicado as fórmulas (7) e (8) a uma secção correspondente a um valor particular de m, determinámos de que lado do plano tangente estava collocado sobre a normal o centro de curvatura. Se depois applicarmos as mesmas fórmulas a outra qualquer secção, o centro de curvatura d'esta ficará collocado do mesmo lado que o da primeira secção, ou do lado opposto, confórme $r+2sm+tm^2$ tiver conservado ou mudado o signal. Por tanto, se, no calculo do raio n pertencente á segunda secção, dermos a $\sqrt{[1+p^2+q^2]}$ o mesmo signal (positivo ou negativo) que se lhe attribuio quando se calculou o raio da primeira secção (o que é permittido, visto que a fórmula (8) serve apenas para determinar a grandeza, mas não a direcção do raio), o signal do n pertencente áquella secção, será o mesmo que o do n correspondente á primeira, quando $r+2sm+tm^2$ conservar o mesmo signal; e differente no caso contrario.

D'este modo, uma vez fixada a direcção do raio n para uma secção designada, a fórmula (8) é sufficiente para determinar a grandeza e direcção do raio de curvatura de outra secção qualquer.

hendidos entre α e β; em fim reduz-se novamente a zero para $m=\beta$, e recupera o signal primitivo para os valores seguintes de m.

Podemos pois concluir que: 1.º Se for $rt-s^2>0$, as curvaturas de todas os secções normaes correspondentes ao ponto, de que se trata, serão dirigidas no mesmo sentido; é o que acontece, por exemplo, em qualquer ponto de um ellipsoide. 2.º Se for $rt-s^2=0$, as curvaturas serão dirigidas no mesmo sentido, mas haverá uma secção, a que corresponde uma curvatura nulla: dá-se este caso com as superficies conicas e cylindricas, e em geral com as superficies planificaveis. 3.º Se finalmente for $rt-s^2<0$ (imaginando o plano tangente, tirado pelo ponto (x, y, z), e traçadas nelle as tangentes correspondentes aos valores α e β do m, as quaes encontrando-se naquelle ponto formam quatro angulos, eguaes dois a dois como verticalmente oppostos, que designaremos respectivamente por θ e $180°-\theta$), serão dirigidas no mesmo sentido as curvaturas de todas as secções feitas por planos que passam pela normal e por tangentes comprehendidas no angulo θ. Tambem o serão as curvaturas das secções correspondentes a tangentes comprehendidas em qualquer dos angulos $180°-\theta$; mas a curvatura d'estas ultimas será dirigida em sentido contrario ao das primeiras, comprehendidas no angulo θ. Finalmente para as duas secções feitas por planos que passam pela normal e por qualquer das tangentes que formam este angulo, a curvatura será nulla. Neste caso o plano tangente é ao mesmo tempo secante no ponto de que se tracta, como acontece, por exemplo, em qualquer dos pontos da ellipse de gola no hyperboloide de um só ramo.

F. n.º 134 11. *Secções principaes.* O raio n varía com m, e como a curvatura das differentes secções normaes não pode augmentar ou diminuir indefinidamente, concebe-se que o valor de n será susceptivel de *maximo* e de *minimo*.

Para os determinar formaremos a derivada $\frac{dn}{dm}$, o que dá $\frac{dn}{dm}=$

$$=2\sqrt{[1+p^2+q^2]}\,\frac{m^2[s(1+q^2)-pqt]+m[r(1+q^2)-t(1+p^2)]+pqr-s(1+p^2)}{(r+2sm+tm^2)^2}$$

$$=2\sqrt{[1+p^2+q^2]}.\frac{N}{M};$$

e consecutivamente procuraremos os valores reaes de m, que tornam nulla ou infinita esta derivada, isto é, que satisfazem a qualquer das seguintes relações

$$N = 0,\ M = 0,\ N = \infty \text{ ou } M = \infty.$$

Ás duas ultimas não satisfaz expressão alguma finita de m; e como a hypothese de $M = 0$ torna infinito o valor de n, vê-se que a determinação das secções normaes, a que podem pertencer valores maximos ou minimos, mas finitos, de n, fica apenas dependente da equação $M = 0$.

Resta saber se as raizes d'esta equação são reaes, e, no caso affirmativo, se a cada uma d'estas corresponde effectivamente o valor de n, que se procura.

Esta indagação faz-se com muita facilidade, por um meio indirecto, empregando uma transformação de coordenadas; por quanto d'este modo a expressão de n toma uma forma muito simples, por meio da qual se reconhece facilmente a existencia de um maximo e de um minimo; e como, segundo o que acima se disse, as unicas secções, a que podem corresponder aquelles valores, são determinadas pela equação do segundo gráo $N = 0$, as raizes d'esta equação serão reaes, e os valores de n, que procuramos, serão determinados pela equação (8) do n.º anterior, substituindo successivamente nesta, em logar de m cada uma d'aquellas raizes.

Indiquemos como se faz a transformação.

Tomando para plano dos $x\,y$ o tangente á superficie no ponto (x, y, z), e este ponto para origem das coordenadas, a equação da superficie, que era primitivamente $z = f(x, y)$, ficará transformada em $z = F(x, y)$; mas á equação assim mudada convirão ainda as formulas precedentemente achadas, nas quaes, todavia, as quantidades x, y, z, p, q, ... terão valores numericos differentes dos primitivos.

Assim na hypothese actual teremos $x = y = z = p = q = 0$; a relação $N = 0$ transforma-se em

$$sm^2 + (r - t)\,m - s = o, \ldots\ldots\ldots\ldots\ (1)$$

e a expressão de n fica reduzida a

$$n = \frac{1 + m^2}{r + 2ms + tm^2} \ldots\ldots\ldots\ (2)$$

dando ao numerador um signal unico pelas razões expostas em a nota da pag. 43.

As raizes m' e m'' de (1) são reaes; e como é $m'\,m''+1=0$, conclue-se que as duas tangentes, determinadas por aquella equação, são perpendiculares uma á outra. Isto posto, como aquellas duas linhas existem no plano tangente, que agora coincide com o plano dos $x\,y$, poderemos sempre tomar uma d'aquellas tangentes para eixo dos x, e a outra para eixo dos y; com este systema de coordenadas, uma das raizes de (1) deverá ser nulla e a outra infinita (*), e como a somma das duas é egual a $\frac{t-r}{s}$, este coefficiente será tambem infinito, e por conseguinte $s=0$. Neste mesmo systema a formula (2) ficará reduzida a

$$n=\frac{1+m^2}{r+tm^2};\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (3)$$

e, se chamarmos φ o angulo, que a tangente, determinada por m, forma com o eixo dos x, teremos ainda

$$n=\frac{1}{r\cos^2\varphi+t\,sen^2\varphi},$$

por meio da qual obteremos, com muita facilidade, a grandeza do raio n pertencente a qualquer secção normal determinada por φ.

Designando por N' e N'' os raios das secções normaes, cujas tangentes coincidem respectivamente com os eixos dos x e dos y, teremos pela forma anterior

$$N'=\frac{1}{r}\text{ e }N''=\frac{1}{t},\text{ ou }r=\frac{1}{N'}\text{ e }t=\frac{1}{N''};$$

(*) Para que (1) se reduzisse a uma identidade, era necessario que fosse $r-t=o$, e tambem $s=0$, e por conseguinte ainda teria logar a formula (3). Demais como esta formula se obtinha, neste caso, sem ser preciso fixar a direcção dos eixos dos x e dos y, segue-se que ella substituirá tomando para estes eixos quaesquer duas linhas perpendiculares entre si, tiradas pela origem das coordenadas no plano tangente.

e, substituindo estes valores naquella formula, acharemos finalmente

$$\frac{1}{n} = \frac{\cos^2\varphi}{N'} + \frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{N''} \dots\dots\dots\dots (3)$$

D'esta formula deduzem-se as seguintes consequencias.

1.° A somma *algebrica* das curvaturas de duas quaesquer secções normaes, que formam entre si um angulo de 90°, é constante.

Seja n' o raio de curvatura de uma secção normal, cuja tangente tirada pela origem das coordenadas, forma com o eixo dos x um angulo α, e n' o da secção normal que lhe é perpendicular, e cuja tangente forma, por conseguinte, com aquelle eixo o angulo $90°+\alpha$. Applicando a estas duas secções a formula (3), virá

$$\frac{1}{n'} = \frac{\cos^2\alpha}{N'} + \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{N''}$$

$$\frac{1}{n''} = \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{N'} + \frac{\cos^2\alpha}{N''}$$

e por tanto

$$\frac{1}{n'} + \frac{1}{n''} = \frac{1}{N'} + \frac{1}{N''}$$

2.° Se N' e N'' são ambos do mesmo signal, qualquer raio n tem ainda o mesmo signal, e por conseguinte as curvaturas são todas dirigidas no mesmo sentido. Alem d'isso o maior dos dois raios N' e N'' é maximo absoluto, e o menor é minimo.

Seja $N' > N''$; da formula (3) tira-se

$$\frac{N'}{n} = \cos^2\varphi + \frac{N'}{N''}\operatorname{sen}^2\varphi$$

$$\frac{N''}{n} = \operatorname{sen}^2\varphi + \frac{N''}{N'}\cos^2\varphi;$$

e visto ser $\frac{N'}{N''} > 1$, será tambem $N' > n$ e $N'' < n$.

3.° Sendo $N' = N''$, é tambem $n = N' = N''$. Neste caso as curvaturas das differentes secções normaes são todas eguaes e dirigidas no mesmo sentido.

4.° Se N' e N'' são de signaes contrarios, tornando explicito o signal de N'' em (3), vêm

$$\frac{1}{n} = \frac{\cos^2\varphi}{N'} - \frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{N''};$$

e por esta fórmula se reconhece: que para $\varphi = 0$, é $n = N'$; e que á medida que φ augmenta, o raio n decresce conservando-se todavia positivo, até ser $\frac{\cos^2\varphi}{N'} - \frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{N''} = 0$, ou $tg.\varphi = \sqrt{\frac{N''}{N'}}$. Para este angulo φ o raio n sahe infinito; e depois, continuando φ a crescer, n torna-se negativo, e numericamente decrescente, até ser $\varphi = 90°$, o que dá $n = N''$. Para $\varphi > 90°$, ou $\varphi = 90° + \theta$, o raio n reassume os valores já achados e correspondentes a $\varphi = 90° - \theta$. (Veja-se o n.° anterior pag. 44).

Neste caso, N' e o menor dos raios positivos, e N'' o minimo *(numerico)* ou antes o maximo *(algebrico)* dos negativos.

O que fica dito nos casos 2.°, 3.° e 4.° com referencia ao maximo e ao minimo, póde resumir-se assim. «Se num ponto de uma superficie a curvatura não é constante na direcção das differentes secções normaes, ha sempre duas, e só duas, d'estas secções, cujos planos são perpendiculares entre si, na direcção das quaes é respectivamente maxima e minima a curvatura da superficie.»

Para determinar estas secções ou os seus raios de curvatura, formaremos a equação $N = 0$: se esta se reduzir a uma identidade a curvatura da superficie será uniforme no ponto designado (*); aliás aquella equação terá duas raizes reaes, e, substituindo-as successivamente na fórmula (8) do numero anterior, acharemos os valores de n correspondentes áquellas duas secções.

F. n.° 135 12. Dissemos a pag. 41 que os elementos, determinados pelas fórmulas (1) e (2) do n.° 9, e (5) do n.° (10) eram as coordenadas do centro

(*) Quando a curvatura da superficie fôr constante na direcção das differentes secções normaes, será ainda $\frac{dn}{dm} = 0$, e por conseguinte $N = 0$. E como estas relações hão de subsistir para qualquer valor de m, $N = 0$ será uma identidade.

e o raio de uma esphera, que tinha um contacto de segunda ordem com a superficie, na direcção x assignada por *m*, e ainda na de qualquer outra x da secção nor curva, a que correspondesse a mesma tangente.

Isto posto, e tendo traçado na superficie uma d'estas curvas, supponhamos que se pretende determinar o seu raio de curvatura.

Imaginemos tirado o plano osculador da curva, que será o seu proprio plano, no caso d'esta não ser enviesada; e representemos por ω o angulo, que este plano fórma com o normal que passa pela mesma tangente.

Como a curva tem um contacto de segunda ordem com a esphera e com aquelle plano, segue-se pelo theorema 2.° do n.° 1, que terá tambem um contacto da mesma ordem com o circulo (menor) resultante da intersecção d'estas duas superficies. Este circulo será, por tanto, o osculador da curva, e, chamando n' o seu raio, teremos pela resolução d'um triangulo rectilineo

$$n' = n \cos \omega;$$

na qual se comprehende o theorema de Meusnier.

FIM.

EXPOSIÇÃO SUCCINTA

DOS

PRINCIPIOS FUNDAMENTAES

DO

CALCULO DAS VARIAÇÕES

Il restait donc à trouver la manière de plier le calcul differentiel à ce genre de problemes qui sont essentiellement de son ressort, et de les resoudre sans s'ecarter de la marche simple et uniforme de ce calcul. — (LAGRANGE — *Leçons sur le calcul des fonctions*, pag. 35 *du appendice*).

...... mais rien n'est plus propre que la consideration des mouvements d'um systeme matériel à faire nettement concevoir la coexistence de plusieurs modes distincts de variabilité. (COURNOT. — *Traité èlèmentaire de la thèorie des fonctions*, deuxième edition, T. 2.^{e}, pag. 107).

IMPRENSA DA UNIVERSIDADE

EXPOSIÇÃO SUCCINTA

DOS

PRINCIPIOS FUNDAMENTAES

DO

CALCULO DAS VARIAÇÕES

POR

Luiz da Costa e Almeida

LENTE SUBSTITUTO ORDINARIO DA FACULDADE DE MATHEMATICA

> La méthode des variations.........
> ...repose sur le plus haut degré d'abstraction où les mathematiques se soient élevées jusqu'ici......
>
> LACROIX. *Traité du Calcul. diff. et int.* deuxième edition. T. 2.º, pag. 721.

F. de Azevedo
2.º mathemat...
77-78

MARÇO DE 1870

COIMBRA
EDITOR — J. MELCHIADES
1870

PRINCIPIOS FUNDAMENTAES

DO

CALCULO DAS VARIAÇÕES

1. Se pertendessemos determinar analyticamente o comprimento da linha mais curta das que se podem tirar entre dous pontos sobre um plano; como o comprimento de qualquer d'estas linhas é representado por

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+y'^2}.\,dx,$$

consistiria a difficuldade em achar a relação $y=fx$, que torna minimo o integral precedente.

E se os pontos extremos, em vez de serem dados, estivessem apenas subjeitos á condição de pertencerem respectivamente a duas curvas dadas, seria preciso, para a completa resolução do problema, não só assignar aquella funcção mas ainda determinar as abscissas x_1 e x_2 d'aquelles pontos.

Da mesma sorte, querendo achar a curva plana, da qual o arco, comprehendido entre dous pontos dados, gera, por sua revolução em volta do eixo dos x, a *menor* area, teremos que determinar a relação $y=fx$, que torna minima a expressão

$$2\pi\int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1+y'^2}.\,dx.$$

A resolução d'estas e d'outras questões analogas pertence ao calculo das variações.

2. Para resolver esta especie de problemas consideraremos como conhecida a fórma da curva procurada; supporemos depois que todos os seus pontos se movem de um modo arbitrario, mas permittido pelas condições da questão, para formar uma nova curva (variada); e por ultimo exprimiremos que a mudança, que d'ahi resulta para o integral, deve ser constantemente negativa no caso de maximo, e positiva no de minimo.

O que passamos a desinvolver.

3. Seja $y=fx$ a equação da curva procurada, que tractaremos como se já fosse determinada. Como suppomos que todos os pontos d'esta curva mudam de posição com um movimento, continuamente variavel d'um para outro; o ponto, determinado pela abscissa x naquella curva, terá por coordenadas no fim do tempo t (contado de qualquer origem, que supporemos correspondente á curva $y=fx$)

$$x_{,}=\varphi(x,\,t),\quad y_{,}=\psi(x,\,t);\,.\,.\,.\,.\,.(1)$$

as quaes, para $t=0$, hão de transformar-se em $x_{,}=x$, $y_{,}=y=fx$ (*)(**).

(*) Taes são as unicas condições, a que por em quanto ficam subjeitas as funcções designadas por φ e ψ.

(**) Considerando t como exprimindo o tempo contado de uma origem, que fixámos, tivemos unicamente em vista tornar menos abstracta a theoria que expomos: e tudo que dizemos neste sentido, subsiste egualmente olhando t como um parametro arbitrario, sem que seja preciso attribuir-lhe aquella significação; por quanto é facil mostrar que, quaesquer que sejam as fórmas e posições da curva variada, será sempre possivel achar duas funcções $x_{,}=\varphi(x,\,t)$, e $y_{,}=\psi(x,\,t)$, que para um mesmo valor attribuido a t transformem os valores de x e y, pertencentes á curva primitiva, nos correspondentes de qualquer das variadas.

O que melhor se entenderá pelo que vamos dizer.

Sejam AB a curva primitiva, que suppomos limitada nos pontos A e B, e A'B', A''B'',... outras tantas curvas que chamaremos variadas. ab representa a projecção da primeira curva sobre o eixo dos x, e a mesma significação tem $a'b'$ a respeito de A'B', etc. etc.

Posto isto imaginemos que dividiamos ab em um numero indefinidamente crescente de partes eguaes, e em outras tantas $a'b'$, $a''b''$...; e pelos pontos de divisão elevemos perpendiculares, que irão determinar em cada curva o mesmo

Eliminando x entre as duas equações (1), obteriamos uma relação entre $x_{\prime}$, $y_{\prime}$ e o parametro t, a qual representaria a equação da curva na posição que lhe correspondia naquelle tempo, e que se tornaria em $y=fx$ para $t=0$ (*).

---

numero de pontos: chamaremos correspondentes nas differentes curvas os pontos que correspondem ás mesmas divisões.

Em seguida tracemos uma curva limitada $\beta = \mathrm{F}(\alpha)$, cujas ordenatas β sejam respectivamente eguaes aos valores de x da curva primitiva desde A até B; sobre cada uma d'aquellas ordenadas tomemos comprimentos eguaes ás abscissas correspondentes da segunda curva A'B', o que dará uma nova curva $\beta = \mathrm{F}_1(\alpha)$; e assim a respeito da terceira, quarta, etc.

Tracta-se de fazer ver que é sempre possivel achar uma funcção geral $\beta = \pi(\alpha, t)$, que para um dado valor t_0 de t produza a curva $\beta = \mathrm{F}\alpha$, para o valor t_1, a segunda curva $\beta = \mathrm{F}_1(\alpha)$, para t_2 a terceira, e assim por diante.

E com effeito escrevamos

$$\beta = \pi(\alpha) + t\pi_1(\alpha) + t^2\pi_2(\alpha) + \ldots\ldots\ldots\ldots (\mathrm{A})$$

designando $\pi(\alpha)$, $\pi_1(\alpha)\ldots$ funcções arbitrarias de α, e sendo o numero d'estas funcções pelo menos egual ao das curvas F, F_1, $\mathrm{F}_2\ldots$

Attribuindo a t o valor t_0 a funcção anterior deverá reduzir-se a $\mathrm{F}(\alpha)$, e por tanto será

$$\pi(\alpha) + t_0\pi_1(\alpha) + t_0^2\pi_2(\alpha) + \ldots = \mathrm{F}(\alpha)\ldots (a).$$

E do mesmo modo obteriamos

$$\pi(\alpha) + t_1\pi_1(\alpha) + t_1^2\pi_2(\alpha) + \ldots = \mathrm{F}_1(\alpha)\ldots (a')$$

$$\pi(\alpha) + t_2\pi_1(\alpha) + t_2^2\pi_2(\alpha) + \ldots = \mathrm{F}_2(\alpha)\ldots (a'')$$

....

Determinando pois por meio das relações (a), (a'), $(a'')\ldots$ outras tantas funcções π, π_1, $\pi_2\ldots$ e substituindo-as em (A) acharemos assim a funcção $\beta = \pi(\alpha, t)$, na qual pode ainda entrar qualquer numero de funcções arbitrarias, se o numero d'estas funcções, que entrava em (A) for superior ao das relações (a), (a'), $(a'')\ldots$

Fica assim confirmada a existencia da funcção φ com as propriedades que lhe suppozemos; e o mesmo se pode dizer a respeito de ψ.

Veja-se tambem o n.º 141 das *Reflexions sur la métaphysiqne du calcul infinitesimal*, por M. Cournot, 2.ª ou 3. edição.

(*) Vê-se d'este modo que as hypotheses, que fizemos, equivalem a considerar a curva procurada como intersecção de uma superficie, cujas coordenadas são x, y e t, com o plano dos xy É evidente que por qualquer curva se pode fazer passar uma infinidade de superficies differentes, o que explica, neste sentido, ser arbitraria a funcção π do n.º 6.

Mudando t em $t+\Delta t$, as equações (1) dão

$$x_{,}+\Delta x_{,}=\varphi(x, t+\Delta t),\ y_{,}+\Delta y_{,}=\psi(x, t+\Delta t),$$

d'onde se tira

$$\Delta x_{,}=\frac{d\varphi}{dt}\Delta t+\frac{d^2\varphi}{dt^2}\Delta t^2+\ldots,\ \Delta y_{,}=\frac{d\psi}{dt}\Delta t+\frac{d^2\psi}{dt^2}\Delta t^2+\ldots(2),$$

que representam as mudanças de $x_{,}$ e de $y_{,}$ durante o tempo Δt.

Os primeiros termos dos segundos membros de (2) chamam-se respectivamente variações de $x_{,}$ e de $y_{,}$, e designam-se por $\delta x_{,}$ e $\delta y_{,}$.

Por analogia representaremos tambem Δt por δt; e assim teremos

$$\delta x_{,}=\frac{d\varphi}{dt}\delta t,\quad \delta y_{,}=\frac{d\psi}{dt}\delta t,$$

e por tanto

$$\delta x=\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0\delta t=\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0 t,\ \delta y=\left(\frac{d\psi}{dt}\right)_0\delta t=\left(\frac{d\psi}{dt}\right)_0 t.$$

4. O calculo das variações dos integraes funda-se em alguns principios analyticos, que passamos a demonstrar.

a) Sabemos que é $\delta dx_{,}=d\delta x_{,}$, $\delta dy_{,}=d\delta y_{,}$; e por tanto, pondo $t=0$, será tambem

$$\delta dx=d\delta x,\ \delta dy=d\delta y.$$

De mais, na curva a que correspondem $x_{,}$ e $y_{,}$ como coordenadas correntes, temos que $y_{,}'$ é funcção de $x_{,}$, e como $x_{,}$ é funcção de x e de t, $y_{,}'$ será tambem funcção d'estas duas quantidades; e por conseguinte teremos ainda $\delta dy'=d\delta y'$. E assim por diante.

b) Sendo $V=F(x, y, y', y''\ldots)$, aonde F representa uma funcção determinada, teremos, mudando t em $t+\delta t$, e pondo depois $t=0$,

$$\delta V=\frac{dF}{dx}\delta x+\frac{dF}{dy}\delta y+\frac{dF}{dy'}\delta y'+\ldots$$

(o que significa que as variações se obtem pelo mesmo methodo que as differenciaes).

c) E tambem $\delta dV=d\delta V$.

d) $\delta\int U=\int\delta U$. Represente-se $\int U$ por V; será

$$\int U=V,\ \text{logo}\ U=dV\ \text{e}\ \delta U=\delta dV\ \text{ou}\ \delta U=d\delta V$$

e por tanto $$\int\delta U=\delta V\ \text{ou}\ \int\delta U=\delta\int U.$$

5. Seja $\int_{x_1}^{x_2}Vdx$ (sendo V fucção de x, y, y', $y''\ldots$) o integral, que pertendemos tornar maximo ou minimo. Suppomos que, pelas condições do problema, as extremidades da curva que corresponde ao maximo ou ao minimo são subjeitas a estarem respectivamente sobre duas curvas planas, que representaremos por (A) e (B). (ab) designa aquella curva; e suppomos que adoptamos para φ e ψ funcções taes, que a curva (ab), variando, passa por duas posições consecutivas, numa das quaes a designamos por ($a'b'$), e na outra por ($a'b''$).

Supponhamos por um momento que ($a'b'$), correspondente ao tempo t, representa a curva de maximo ou de minimo. Tirando da equação d'esta curva os valores de $y_{\prime}$, $y_{\prime}'$, $y_{\prime}''\ldots$ expressos em $x_{\prime}$ e t para os substituir em V, e formando o integral indefinido, este poderá ser representado por

$$\int V_{\prime}dx_{\prime}=\xi(x_{\prime}, t)\ldots\ldots(3).$$

E d'aqui se tira

$$\int_{(x_{\prime})_1}^{(x_{\prime})_2}V_{\prime}dx_{\prime}=\xi[(x_{\prime})_2, t]-\xi[(x_{\prime})_1, t]=k_{\prime}.$$

Mudando na expressão precedente t em $t + \delta t$, obteremos a correspondente á curva variada $(a''b'')$ (*)

$$k_{,,} = k_{,} + \delta k_{,} + \omega_{,} \ldots\ldots (4).$$

representando por $\omega_{,}$ a reunião dos termos de ordem superior á primeira em relação a δt.

A formula (4) representa a integral $\int V_{,,}dx_{,,} = k_{,,}$, relativo á curva $(a''b'')$, expresso no integral $k_{,}$ pertencente á curva anterior $(a'b')$. Fazendo nesta formula $t = 0$, obteremos este ultimo, expresso no integral k relativo a (ab),

$$k_{,} = k + \delta k + \omega.$$

D'onde se conclue, empregando a theoria já conhecida, dos maximos e minimos (*Francoeur*. T. 4.º n.º 80)

$$\delta k = 0, \text{ isto é } \delta \int_{x_1}^{x_2} V dx = 0.$$

6. Achámos em o numero anterior, como condição commum ao maximo e ao minimo, $\delta \int_{x_1}^{x_2} V dx = 0$: desinvolvamos esta condição.

(*) Se mudarmos na formula (3) t em $t + \delta t$, obteremos o integral indefinido correspondente á curva $(a''b'')$ $\quad \int V_{,,}dx_{,,} = \xi(x_{,,}, t + \delta t)$.

E d'aqui resulta $\int_{(x_{,,})_1}^{(x_{,,})_2} V_{,}dx_{,} = \xi[(x_{,,})_2, t + \delta t] - \xi[(x_{,,})_1, t + \delta t] = k_{,,}$.

Mas é $\quad (x_{,,})_2 = (x_{,})_2 + \Delta(x_{,})_2 \;$ e $\; (x_{,,})_1 = (x_{,})_1 + \Delta(x_{,})_1$;

e por tanto será $\quad k_{,,} = k_{,} + \delta k_{,} + \omega_{,}$.

Pondo $\int V dx = U$, teremos

$$\delta\int_{x_1}^{x_2} V dx = \delta U_2 - \delta U_1 = \left(\delta U\right)_1^2 = \left(\delta\int V dx\right)_1^2 = \int_{x_1}^{x_2} \delta(V dx) =$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} [dx\delta V - V\delta dx];$$

mas é
$$\int_{x_1}^{x_2} V\delta dx = \int_{x_1}^{x_2} V d\delta x = \left(V\delta x\right)_1^2 - \int_{x_1}^{x_2} dV \,.\, \delta x,$$

e por tanto

$$\delta\int_{x_1}^{x_2} V dx = \left(V\delta x\right)_1^2 + \int_{x_1}^{x_2} [dx \,.\, \delta V - dV \,.\, \delta x] \ldots\ldots (5).$$

Temos tambem

$$\delta V = X\delta x + Y\delta y + Y^{(1)}\delta y' + Y^{(2)}\delta y'' + \ldots$$

$$dV = X dx + Y dy + Y^{(1)} dy' + Y^{(2)} dy'' + \ldots$$

representando por X, Y, $Y^{(1)}$... os coefficientes differenciaes $\frac{dV}{dx}$, $\frac{dV}{dy}$, $\frac{dV}{dy'}$,...

e por conseguinte

$$\left.\begin{aligned} dx\delta V - dV\delta x = Y dx\,(\delta y - y'\delta x) + Y^{(1)} dx\,(\delta y' - y''\delta x) \\ + Y^{(2)} dx\,(\delta y'' - y'''\delta x) + \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} (6).$$

As differentes variações δx, δy, $\delta y'$.... não são completamente independentes, mas acham-se ligadas entre si por meio de relações, que vamos fazer conhecer (*). Eliminando x entre as duas equações (1), acharemos

$$y_{,}=\pi(x_{,},\, t).$$

e d'aqui resulta

$$\delta y_{,}=\frac{d\pi}{dx_{,}}\delta x_{,}+\frac{d\pi}{dt}\delta t, \text{ ou } \delta y_{,}-y_{,}'\delta x_{,}=\frac{d\pi}{dt}\delta t=\omega_{,}\ldots\ldots\ldots(a);$$

e porque é $y_{,}'=\frac{d\pi}{dx_{,}}$, será tambem

$$\delta y_{,}'=\frac{d^2\pi}{dx_{,}^2}\delta x_{,}+\frac{d^2\pi}{dx_{,}dt}\delta t \text{ ou } \delta y_{,}'-y_{,}''\delta x_{,}=\frac{d^2\pi}{dx_{,}dt}\delta t=\frac{d\omega_{,}}{dx_{,}}\ldots\ldots(a'),$$

e da mesma sorte

$$\delta y_{,}''-y_{,}'''\delta x_{,}=\frac{d^3\pi}{dx_{,}^2dt}\delta t=\frac{d^2\omega_{,}}{dx_{,}^2}\ldots(a'').$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Pondo $t=0$ em (a), (a'), (a'')... vem (**)

$$\delta y-y'\delta x=\omega,\ \delta y'-y''\delta x=\frac{d\omega}{dx},\ \delta y''-y'''\delta x=\frac{d^2\omega}{dx^2}, \text{ etc}\ldots(b)$$

(*) Il est clair qu'on ne peut assigner la fonction $y=fx$ dans l'étendue de l'intégrale, sans déterminer par cela même les fonctions dérivées $f'x$, $f''x$, etc., ni faire varier cette fonction sans que toutes les dérivées éprouvent des variations correspondantes. La variation de l'intégrale est donc déterminée implicitement par la seule variation de la fonction y; et toute la difficulté du problème consiste à mettre en évidence, à rendre explicites les liaisons de la variation de y aux variations subordonnées de ses dérivées. (COURNOT. *Theorie des fonctions.* deuxiéme edition, T. 2.° pag. 107).

(**) A respeito da significação de ω veja-se a nota a pag. 555 do *Tratado elementar do calculo differencial e integral*, por Lacroix, 4.ª edição; e neste folheto a nota final, aonde aquella mesma quantidade é representada por $\delta_1 y$.

Por meio das relações precedentes, e attendendo (6), a formula (5) transforma-se em

$$\delta\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{V}dx = \left(\mathrm{V}\delta x\right)_1^2 + \int_{x_1}^{x_2}\left[\mathrm{Y}\omega + \mathrm{Y}^{(1)}\frac{d\omega}{dx} + \mathrm{Y}^{(2)}\frac{d^2\omega}{dx^2} + \ldots\right]dx.$$

Integremos por partes cada um dos termos do segundo membro d'esta ultima expressão (*); teremos

$$\int \mathrm{Y}\omega dx = \int \mathrm{Y}\omega dx,$$

$$\int \mathrm{Y}^{(1)}\frac{d\omega}{dx}dx = \int \mathrm{Y}^{(1)}d\omega = \mathrm{Y}^{(1)}\omega - \int \omega \frac{d\mathrm{Y}^{(1)}}{dx}dx,$$

$$\int \mathrm{Y}^{(2)}\frac{d^2\omega}{dx^2}dx = \int \mathrm{Y}^{(2)}d\frac{d\omega}{dx} = \mathrm{Y}^{(2)}\frac{d\omega}{dx} - \int \frac{d\omega}{dx}\frac{d\mathrm{Y}^{(2)}}{dx}dx =$$

$$= \mathrm{Y}^{(2)}\frac{d\omega}{dx} - \frac{d\mathrm{Y}^{(2)}}{dx}\omega + \int \omega \frac{d^2\mathrm{Y}^{(2)}}{dx^2}dx,$$

$$\int \mathrm{Y}^{(3)}\frac{d^3\omega}{dx^3}dx = \mathrm{Y}^{(3)}\frac{d^2\omega}{dx^2} - \frac{d\mathrm{Y}^{(3)}}{dx}\frac{d\omega}{dx} + \frac{d^2\mathrm{Y}^{(3)}}{dx^2}\omega - \int \omega \frac{d^3\mathrm{Y}^{(3)}}{dx^3}dx^2.$$

....

(*) O processo do calculo fará ver, que se devem desembaraçar, tanto quanto é possivel, os termos que contém $d\delta x$. (*Fr.* T. 4.º pag. 287, 2.ª ediç. de Coimbra).

Será pois

$$\delta\int_{x_1}^{x_2}\mathrm{V}dx=\left(\omega\left[\mathrm{Y}^{(1)}-\frac{d\mathrm{Y}^{(2)}}{dx}+\frac{d^2\mathrm{Y}^{(3)}}{dx^2}-\frac{d^3\mathrm{Y}^{(4)}}{dx^3}+\ldots\right]\right.$$

$$+\frac{d\omega}{dx}\left[\mathrm{Y}^{(2)}-\frac{d\mathrm{Y}^{(3)}}{dx}+\frac{d^2\mathrm{Y}^{(4)}}{dx^2}-\ldots\ldots\ldots\right]$$

$$\left.+\frac{d^2\omega}{dx^2}\left[\mathrm{Y}^{(3)}-\frac{d\mathrm{Y}^{(4)}}{dx}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\right]\right)_1^2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\left(\mathrm{V}\delta x\right)_1^2+\int_{x_1}^{x_2}\left[\mathrm{Y}-\frac{d\mathrm{Y}^{(1)}}{dx}+\frac{d^2\mathrm{Y}^{(2)}}{dx^2}-\frac{d^3\mathrm{Y}^{(3)}}{dx^3}+\ldots\right]\omega dx.$$

Finalmente, restituindo na expressão precedente por ω, $\frac{d\omega}{dx}$, $\frac{d^2\omega}{dx^2}\ldots$ os seus valores tirados de (b), acharemos um resultado, que se poderá apresentar debaixo da seguinte fórma

$$\delta\int_{x_1}^{x_2}\mathrm{V}dx=\left[\Omega dx+\overset{(0)}{\Omega}\,\delta y+\overset{(1)}{\Omega}\,\delta y'+\ldots+\overset{(n-1)}{\Omega}\,\overset{(n-1)}{\delta y}\right]_1^2$$

$$+\int_{x_1}^{x_2}\left[\mathrm{Y}-\frac{d\mathrm{Y}^{(1)}}{dx}+\frac{d^2\mathrm{Y}^{(2)}}{dx^2}-\frac{d^3\mathrm{Y}^{(3)}}{dx^3}\ldots\ldots\pm\frac{d^n\mathrm{Y}^{(n)}}{dx^n}\right]\omega dx,$$

sendo n o numero que indica a ordem da derivada mais elevada que entra em V.

7. Se representarmos por $\int_{x_1}^{x_2} u\omega dx$ o integral definido, que entra no segundo membro da ultima expressão do numero anterior, e por L a totalidade dos outros termos, a condição do maximo ou minimo ficará expressa por

$$\mathrm{L}+\int_{x_1}^{x_2} u\omega dx=0, \ldots \ldots \ldots (7)$$

a qual deve ter logar para todas as variações da curva procurada; o que sómente pode acontecer sendo $\mathrm{L}=0$, e $u=0$.

Com effeito, dêmos a $x_1, y_1, y'_1, y''_1 \ldots \delta x_1, \delta y_1, \delta y'_1 \ldots x_2, y_2, y'_2 \ldots \delta x_2, \delta y_2 \ldots$ valores determinados e permittidos pelas condições do problema; é evidente que podemos, conservando constantes aquelles valores, attribuir differentes expressões á quantidade ω. Supponhamos pois que attribuimos successivamente a esta quantidade expressões taes, que para cada valor de x as quantidades u e ω tenham primeiramente o mesmo signal e depois signaes contrarios em toda a extensão do integral. Em ambos os casos a quantidade L conserva-se constante por hypothese, mas o integral apresenta signaes contrarios: por tanto, a equação (7) sómente pode subsistir sendo $\mathrm{N}=0$, e $\int_{x_1}^{x_2} u\omega dx=0$ (*). E por que, segundo ha pouco dissemos, a quantidade ω pode ser tal que para cada valor de x tenha constantemente o mesmo signal ou signal contrario ao corespondente de u,

---

(*) Podiamos concluir ainda mais simplesmente a egualdade a zero da expressão $\int_{x_1}^{x_2} u\omega dx$, suppondo que os valores de x, y, y'. y''..., relativos aos limites, eram os mesmos na curva primitiva e na variada; por quanto neste caso seria evidentemente $\mathrm{L}=0$, e por conseguinte tambem $\int_{x_1}^{x_2} u\omega dx=0$.

e a somma de quantidades, todas positivas, ou todas negativas, não poderia ser nulla, será tambem $u = 0$.

Assim a equação (7) do maximo ou minimo resolve-os nas duas

$$L = 0, \; u = 0.$$

Esta ultima é a equação differencial da curva procurada. Integrando-a obteremos a equação finita da mesma curva $F(x, y, a_1, a_2 \ldots a_{2n}) = 0$, na qual entram $2n$ constantes, cujos valores serão determinados de modo que satisfaçam á relação $L = 0$. O que melhor se verá no seguinte numero.

8. A equação $L = 0$ pode escrever-se

$$\underset{2}{\Omega}\, \delta \underset{2}{x} + \overset{(0)}{\underset{2}{\Omega}}\, \delta \underset{2}{y} + \overset{(1)}{\underset{2}{\Omega}}\, \delta \underset{2}{y'} + \ldots\ldots + \overset{(n-1)}{\underset{2}{\Omega}}\, \delta \overset{(n-1)}{\underset{2}{y}}$$

$$-\left(\underset{1}{\Omega}\, \delta \underset{1}{x} + \overset{(0)}{\underset{1}{\Omega}}\, \delta \underset{1}{y} + \overset{(1)}{\underset{1}{\Omega}}\, \delta \underset{1}{y'} + \ldots\ldots + \overset{(n-1)}{\underset{1}{\Omega}}\, \delta \overset{(n-1)}{\underset{1}{y}}\right) = 0,$$

na qual entram $2n + 2$ variações $\delta x_2, \delta y_2, \delta y'_2 \ldots . \delta x_1, \delta y_1, \delta y'_1 \ldots .$ e outros tantos coefficientes $\Omega_2, \overset{(0)}{\Omega_2} \ldots . \Omega_1, \overset{(0)}{\Omega_1} \ldots .$

Supponhamos agora que pelas condições do problema existem m relações entre as variaveis $x, y, y' \ldots . y^{(n-1)}$ relativas aos dous limites. Por meio d'estas relações eliminaremos de $L = 0$ as variações d'outras tantas d'aquellas quantidades, o que reduzirá o seu numero de $2n + 2$ a $2n + 2 - m$. E por que estas variações ficam agora absolutamente independentes, a equação $L = 0$ não poderá subsistir se não sendo respectivamente nullos os coefficientes das mesmas variações.

Teremos assim $2n + 2 - m$ equações, a que é necessario satisfazer para que tenham logar as condições do maximo ou minimo; e junctando aquellas ás m relações que as condições do problema estabelecem entre as mesmas variaveis relativas aos limites, obteremos o numero total $2n + 2$

de relações, a que teremos de satisfazer para a completa resolução do problema. Para isso, tiraremos do integral de $u=0$ os valores de y_1, y_1', y_1''.... expressos em x_1 e nas $2n$ constantes arbitrarias a_1, a_2... a_{2n}; e os de y_2, y'_2, y''_2... expressos nas mesmas constantes e em x_2; e substituindo-os naquellas $2n+2$ equações, obteremos por meio d'estas os valores de x_1, x_2 e das $2n$ constantes arbitrarias; o que resolve completamente o problema (vid. n.º 1).

9. Appliquemos agora a theoria precedente ao primeiro exemplo, de que se falla em o n.º 1.

Neste caso é $V=\sqrt{1+y'^2}$; e por tanto

$$\delta V=\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\,\delta y'.$$

Comparando esta expressão com a de δV dada a pag. 11, acharemos

$$Y^{(1)}=\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}},\ \text{e}\ Y=Y^{(2)}=\ldots=0:$$

com estes valores a equação $u=0$ (vid. n.os 6 e 7) reduz-se a $\dfrac{dY^{(1)}}{dx}=0$, ou $\dfrac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}=\text{constante}$.

Resolvendo esta ultima em ordem a y', virá

$$y'=a,$$

e por meio da integração acharemos finalmente

$$y=ax+a';$$

sendo a e a' duas constantes arbitrarias.

Até aqui temos abstrahido das condições relativas aos limites, as quaes, como é sabido, não influem na natureza da curva, e sómente nos valores das constantes arbitrarias introduzidas pela integração.

Veremos agora o modo de determinar estas constantes, para o que servirá a equação relativa aos limites, que neste caso é

$$\left(\frac{y'(\delta y - y'\delta x)}{\sqrt{1+y'^2}} + \delta x\sqrt{1+y'^2}\right)_1^2 = \left(\frac{\delta x + y'\delta y}{\sqrt{1+y'^2}}\right)_1^2 = 0.$$

Posto isto, distinguiremos diversos casos:

1.º Os pontos extremos são fixos. Neste caso

$$y_2 = C_2,\ y_1 = C_1,\ x_2 = c_2,\ x_1 = c_1$$

são as $2n+2$ equações, de que se falla em o n.º 8.

As duas ultimas determinam os valores de x_1 e x_2; e substituindo nas duas primeiras por y_1 e y_2 as suas expressões tiradas da equação da curva, viria

$$C_2 = ax_2 + a',\ \text{e}\ C_1 = ax_1 + a',$$

que serviriam para determinar a e a'.

2.º A recta deve terminar d'um e d'outro lado em duas ordenadas, tiradas respectivamente ás distancias $x_1 = c_1$ e $x_2 = c_2$.

Temos pois

$$x_1 = c_1,\ x_2 = c_2 \ldots\ldots (k);$$

o que dá $\qquad \delta x_1 = 0,\ \delta x_2 = 0.$

A equação relativa aos limites torna-se neste caso em

$$\left(\frac{y'\delta y}{\sqrt{1+y'^2}}\right)_1^2 = 0,$$

a qual se resolve nas duas

$$\left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right)_2 = 0,\ \left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right)_1 = 0 \ldots\ldots (l).$$

Tirando da equação da recta os valores de y'_1 e de y'_2, e substituindo-os na precedente, virá

$$\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}=0, \text{ d'onde se tira } a=0;$$

o que mostra que a recta é parallela ao eixo dos x.

Como as duas equações (l) não são distinctas, pois equivalem a uma só $a=0$, (k) e (l) fórmam apenas $2n+1$ equações, em logar de $2n+2$ (vej. n.º 8) de que careciamos; e por tanto o problema é indeterminado. E de facto, todas as rectas tiradas parallelamente ao eixo dos x satisfazem á questão.

3.º Caso. Uma das extremidades é um ponto fixo, devendo a outra estar collocada sobre uma ordenada tambem fixa. As conclusões são as mesmas do numero antecedente com referencia á direcção da recta, mas o problema fica determinado.

4.º Caso. A recta é subjeita á condição de ter as suas extremidades collocadas respectivamente sobre duas curvas, cujas equações são

$$y_1=f_1(x_1),\quad y_2=f_2(x_2).$$

Como os dous limites são completamente independentes, poderemos tractar de cada um d'elles em separado.

Das equações relativas ao segundo resulta

$$\delta y_2=f'_2\cdot\delta x_2.$$

Ora a equação relativa a este segundo limite é

$$\left(\frac{\delta x+y'\delta y}{\sqrt{1+y'^2}}\right)_2=0;$$

e por tanto, eliminando δy_2 por meio da penultima equação e egualando a zero o coefficiente resultante de δx_2, virá

$$\frac{1+y'_2 f'_2}{\sqrt{1+y'^2_2}}=0 \text{ ou } 1+y'_2 . f'_2=0\ldots.(m);$$

o que mostra que a recta é normal á segunda curva limite.

A mesma conclusão se tira com referencia á primeira.

Os valores das constantes e os de x_1 e x_2 serão determinados pela equação (m); por outra, analoga á precedente e relativa ao primeiro limite; e pelas equações das duas curvas dadas (*).

10. Os principios anteriores referem-se aos problemas do maximo e minimo *absoluto*. Tractaremos agora da questão do maximo e minimo *relativo*. Dá-se este caso quando se pretende achar a funcção $y=fx$ e os respectivos limites, que tornam maximo ou minimo o integral $\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{V}dx$, com a condição de que um outro integral $\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{U}dx$ dependente d'aquella funcção, tomado entre os mesmos limites, subjeitos ás mesmas condições, tenha um valor designado.

Assim, para achar a curva de comprimento dado, que passa por dous pontos, e que intercepta entre as ordenadas tiradas por estes pontos e o eixo dos x a area maxima; teremos de tornar maximo o integral $\int_{x_1}^{x_2} ydx$, satisfazendo ao mesmo tempo á equação $\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+y'^2}.\,dx=\lambda$, aonde λ designa o comprimento dado da curva.

Formando a variação de $\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{U}dx$, acharemos (n.º 7)

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{U}dx = l + \int_{x_1}^{x_2} u\,(\delta y - y'\delta x)\,dx;$$

e esta expressão, como é sabido, representa a parte, de primeira ordem em relação a t, da variação completa do integral $\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{U}dx$, quando sup-

(*) De proposito escolhemos um exemplo tão simples e de cuja solução já conheciamos as diversas circumstancias, para mostrarmos a exactidão com que o calculo as reproduz.

pomos que x e y se mudam respectivamente em

$$x_{,}=\varphi(x\,,t)=x+\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0 t+\mu,$$

$$y_{,}=\psi(x,\,t)=y+\left(\frac{d\psi}{dt}\right)_0 t+\nu.$$

Sendo assim, e querendo que o integral $\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{U}dx$ conserve o valor primitivo, que suppomos conhecido, é evidente que deverá ser $\delta\int_{x_1}^{x_2}\mathrm{U}dx=0$,

isto é $\qquad l+\int_{x_1}^{x_2} u\,(\delta y-y'\delta x)\,dx=0\,.\,.\,.\,.\,.\,(\mathrm{A}).$

E reciprocamente, se os valores de δy e δx satisfizerem a esta relação, a mudança da funcção e dos limites poderá fazer-se sem que por isso mude o valor de $\int_{x_1}^{x_2}\mathrm{U}dx$. Com effeito, representando por $\Delta\int_{x_1}^{x_2}\mathrm{U}dx$ a mudança completa do integral, a qual provém da mudança tambem completa de x para $x_{,}$, e de y para $y_{,}$, poderemos escrever

$$\Delta\int_{x_1}^{x_2}\mathrm{U}dx=\delta\int_{x_1}^{x_2}\mathrm{U}dx+\Psi\,(\mu,\,\nu),$$

ou $$\Delta\int_{x_1}^{x_2}\mathrm{U}dx=\Psi\,(\mu,\,\nu),$$

visto suppormos $\delta\int_{x_1}^{x_2}\mathrm{U}dx=0$. E como as funcções μ e ν são indeterminadas, concebe-se que poderemos subjeital-as á condição de tornarem

$\Psi\,(\mu, \nu) = 0$, o que daria

$$\Delta \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{U}dx = 0.$$

Assim, a equação (A) exprime a condição unica a que tem de satisfazer as variações de primeira ordem δy e δx, ou antes a quantidade ω, que d'ellas depende, para que a mudança dos limites do integral, e a da funcção se effeituem sem que o integral $\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{U}dx$ mude de valor.

Podemos pois considerar (A) como uma equação de condição a que deve de satisfazer a quantidade ω, que entra no segundo membro da seguinte relação

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{V}dx = \mathrm{L} + \int_{x_1}^{x_2} v\omega dx = 0 \ldots\ldots (\mathrm{B});$$

a qual quantidade deixa por isso de ser absolutamente arbitraria, contra o que se tinha supposto em o n.º 7.

Sendo assim, procuraremos introduzir na equação (B) a condição expressa por (A). Para o que poderá servir o artificio de analyse seguido por Cauchy.

Pondo
$$\int_{x_1}^{x} u\omega dx = \pi\,(x) \ldots\ldots (\mathrm{C}),$$

é evidente que será $\pi\,(x_1) = 0$; e a equação (A) transforma-se em $l + \pi\,(x_2) = 0$.

Assim
$$\pi\,(x_1) = 0,\ \pi\,(x_2) + l = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\mathrm{A}')$$

são as unicas condições a que fica subjeita a funcção π, mas $\pi\,(x)$ é completamente arbitraria entre x_1 e x_2.

De (C) tira-se

$$u\omega = \pi'\,(x),\ \text{ou}\ \omega = \frac{\pi'\,(x)}{u};$$

e substituindo esta ultima expressão em (B), resulta

$$\delta\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{V}dx = \mathrm{L} + \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{v}{u}\right)\pi'(x)\,dx = 0.$$

A fim de introduzir em logar de $\pi'(x)$ a sua primitiva $\pi(x)$, cujas condições já são perfeitamente conhecidas, empregaremos a integração por partes no segundo membro d'aquella relação, o que dará, attendendo a (A'),

$$\delta\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{V}dx = \mathrm{L} + \left(\frac{v}{u}\pi(x)\right)_1^2 - \int_{x_1}^{x_2}\pi(x)\left(\frac{v}{u}\right)' dx$$

$$= \mathrm{L} - l\left(\frac{v}{u}\right)_2 - \int_{x_1}^{x_2}\pi(x)\left(\frac{v}{u}\right)' dx = 0.$$

Como $\pi(x)$ é completamente arbitrario, concluiremos, como em o n.º 7, que a equação se partirá em duas: a primeira é $\left(\frac{v}{u}\right)' = 0$, ou $v + \alpha u = 0$, sendo α uma constante arbitraria; e a segunda será por consequencia $\mathrm{L} + \alpha l = 0$. Aquella é a equação differencial da curva procurada; e á segunda satisfaremos por meio das constantes arbitrarias introduzidas pela integração da primeira, o que servirá ao mesmo tempo para determinar estas.

A constante supernumeraria α, de que não carecemos para satisfazer ás condições do maximo ou minimo (vid. n.º 8), servirá para attender á equação $\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{U}dx =$ *constante*, que accresceu neste problema.

É evidente que as equações $v + \alpha u = 0$, $\mathrm{L} + \alpha l = 0$, que obtivemos, são as mesmas a que chegariamos, se procurassemos o maximo ou minimo *absoluto* da expressão

$$\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{V}dx + \alpha\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{U}dx;$$

o que constitue a regra dada por Euler. Veja-se a nota (*) na pag. seguinte.

Se em logar de uma só relação tivermos duas

$$\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{U}dx = \lambda, \quad \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{T}dx = \gamma,$$

suppondo por em quanto que só tinhamos de attender á primeira relação, teriamos de procurar o maximo ou minimo absoluto de

$$\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{V}dx + \alpha \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{U}dx;$$

e introduzindo agora a segunda condição, transformariamos a expressão precedente na seguinte

$$\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{V}dx + \alpha \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{U}dx + \beta \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{T}dx,$$

(*) Podemos ainda confirmar esta regra pelas seguintes considerações.

Suppondo que tinhamos achado a relação $y = fx$. e os limites correspondentes, que tornam a expressão precedente *maximo absoluto*, e suppondo depois que passavamos da curva respectiva para a variada, teremos

$$\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{V}dx + \alpha \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{U}dx > \int_{(x_{\prime})_1}^{(x_{\prime})_2} \mathrm{V}_{\prime}\, dx_{\prime} + \alpha \int_{(x_{\prime})_1}^{(x_{\prime})_2} \mathrm{U}_{\prime}\, dx_{\prime} \ldots\ldots (a);$$

mas para todas as curvas variadas, em que o segundo integral conserva o seu valor primitivo, é

$$\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{U}dx = \int_{(x_{\prime})_1}^{(x_{\prime})_2} \mathrm{U}_{\prime}\, dx_{\prime} \ldots\ldots (b);$$

e por tanto será tambem

$$\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{V}dx > \int_{(x_{\prime})_1}^{(x_{\prime})_2} \mathrm{V}_{\prime}\, dx_{\prime} \ldots\ldots (c).$$

Reciprocamente de (b) e (c) deduz-se (a).

O mesmo se poderia dizer no caso do minimo.

de que teriamos de procurar o maximo ou minimo absoluto. E assim por deante (*).

11. Temos supposto que debaixo do integral existia uma só variavel principal y, e uma só independente x, o que significa que a curva, de que se tractava, era plana e situada no plano dos xy. No caso de uma curva situada no espaço, V será funcção das duas variaveis principaes y e z e de uma só independente x.

Neste caso supporemos

$$x_{,} = \varphi(x, t), \quad y_{,} = \psi(x, t), \quad z_{,} = \eta(x, t);$$

e a analyse dos n.^{os} 3, 4 e 5 será em tudo aqui applicavel.

Procuremos agora a variação de $\int_{x_1}^{x_2} Vdx$.

Formando a variação de V, acharemos um resultado, que podemos representar por

$$\delta V = X\delta x + Y\delta y + Y^{(1)}\delta y' + Y^{(2)}\delta y'' + \ldots$$
$$+ Z\delta z + Z^{(1)}\delta z' + Z^{(2)}\delta z'' + \ldots;$$

d'onde se conclue facilmente e sem que seja preciso repetir os calculos

(*) Da regra d'Euler conclue-se «que a funcção, que torna maximo ou minimo o integral $\int_{x_1}^{x_2} Vdx$ conservando-se constante o integral $\int_{x_1}^{x_2} Udx$, é a mesma que conviria ao problema em que se pertendesse tornar $\int_{x_1}^{x_2} Udx$ maximo ou minimo permanecendo constante $\int_{x_1}^{x_2} Vdx$.»

Mas os valores das constantes arbitrarias introduzidas pela integração podem não ser os mesmos nos dous problemas.

do n.º 6 que a variação completa do integral é assim representada

$$\delta\int_{x_1}^{x_2} V dx = \left(\omega \left[Y^{(1)} - \frac{dY^{(2)}}{dx} + \frac{d^2Y^{(3)}}{dx^2} - \frac{d^3Y^{(4)}}{dx^3} + \dots \right] \right.$$

$$+ \frac{d\omega}{dx}\left[Y^{(2)} - \frac{dY^{(3)}}{dx} - \frac{d^2Y^{(4)}}{dx^2} - \dots\dots\dots \right]$$

$$+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$+ \omega_{,} \left[Z^{(1)} - \frac{dZ^{(2)}}{dx} + \frac{d^2Z^{(2)}}{dx^2} - \dots\dots\dots \right]$$

$$+ \frac{d\omega_{,}}{dx}\left[Z^{(2)} - \frac{dZ^{(2)}}{dx} + \dots\dots\dots\dots \right]$$

$$\left. + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \right)_1^2$$

$$+ \Big(V\delta x \Big)_1^2 + \int_{x_1}^{x_2}\left[Y - \frac{dY^{(1)}}{dx} + \frac{d^2Y^{(2)}}{dx^2} + \dots\dots\dots \right]\omega dx$$

$$+ \int_{x_1}^{x_2}\left[Z - \frac{dZ^{(1)}}{dx} + \frac{d^2Z^{(1)}}{dx^2} + \dots\dots\dots \right]\omega_{,} dx$$

onde se escreve $\omega_{,}$ em logar $\delta z - z'\delta x$.

E se empregarmos simplificações analogas ás que já se usaram em o n.º 7, a formula antecedente poderá escrever-se

$$\delta\int_{x_1}^{x_2} V dx = L + \int_{x_1}^{x_2} (u\omega + u_{,}\omega_{,})\, dx.$$

Emfim, repetindo as considerações feitas em o ultimo numero citado, e attendendo á indeterminação de ω e $\omega_{,}$, concluiremos que deve ser

$$L = 0, \quad u = 0, \quad u_{,} = 0.$$

As duas ultimas são as equações differenciaes da curva procurada, por meio das quaes obteremos os valores de y e z expressos em x. A primeira, que se refere aos limites, satisfaremos por meio das constantes introduzidas pela integração d'aquellas equações.

As quantidades ω e $\omega_{\prime}$ não seriam independentes como se suppoz, se as condições do problema exigissem que aquella curva estivesse situada sobre uma superficie dada $F(x, y, z) = 0$. Neste caso eliminariamos uma das quantidades ω ou $\omega_{\prime}$ por meio d'aquella relação, e egualariamos a zero o coefficiente da restante; a equação resultante e a dada $F = 0$ serão as da curva procurada.

Para fazer a eliminação, de que acabamos de fallar, procederemos do seguinte modo. De $F = 0$ deduz-se

$$\frac{dF}{dx}dx + \frac{dF}{dy}dy + \frac{dF}{dz}dz = 0$$

e

$$\frac{dF}{dx}\delta x + \frac{dF}{dy}\delta y + \frac{dF}{dz}\delta z = 0;$$

multiplicando a primeira por δx, a segunda por dx, e subtrahindo uma da outra acha-se facilmente

$$\frac{dF}{dy}(\delta y - y'\delta x) + \frac{dF}{dz}(\delta z - z'\delta x) = 0$$

ou

$$\frac{dF}{dy}\omega + \frac{dF}{dz}\omega_{\prime} = 0 \ (*).$$

A mesma theoria se applica evidentemente ao caso de qualquer numero de variaveis principiaes e uma só independente.

(*) Esta equação poderia ter-se deduzido mais simplesmente attendendo a que ω e $\omega_{\prime}$ representam as variações de y e z considerando x constante (vej. nota (**) da pag. 12 e a final), e tomando neste sentido a variação de $F = 0$, o que daria immediatamente

$$\frac{dF}{dy}\delta_{\prime}y + \frac{dF}{dz}\delta_{\prime}z = 0.$$

NOTA SOBRE OS N.os 3, 4, 5

Em logar das hypotheses do n.º 3 podemos usar das seguintes (*)

$$x = x_{\prime}, \quad y_{\prime} = \pi(x, t);$$

o que equivale a suppor que os pontos correspondentes das curvas primitiva e variadas se conservam sempre sobre as mesmas ordenadas.

As variações tomadas neste ultimo sentido são designadas pelo symbolo δ_1; e é evidente que os mesmos principios analyticos demonstrados para δ em o n.º 4 terão egualmente logar para δ_1.

Para determinar a variação do integral, faremos

$$\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{V}dx = \xi(x_1, x_2, t_0)$$

(*) Se na primeira equação da pag. 12 suppozermos $x_{\prime} = x$, teremos

$$y_{\prime} = \pi(x, t);$$

e esta formula indica a maneira como variam as ordenadas correspondentes á mesma abscissa.

sendo x_1 e x_2 os valores respectivos, correspondentes a $t=0=t_0$, de $X_1=\varphi_1 t$, $X_2=\varphi_2 t$.

Suppondo que t_0 se muda em $t_0+\delta t_0$, teremos

$$\delta\int_{x_1}^{x_2} V dx = \frac{d\xi}{dx_1}\delta x_1 + \frac{d\xi}{dx_2}\delta x_2 + \frac{d\xi}{dt_0}\delta t_0.$$

Os dous primeiros termos $\frac{d\xi}{dx_1}\delta x_1 + \frac{d\xi}{dx_2}\delta x_2$ representam, como é sabido pela theoria da differenciação das funcções de muitas variaves, a variação de ξ suppondo constante a funcção y e variaveis os limites; e o ultimo termo representa a variação do mesmo integral suppondo constantes os limites e variavel a funcção.

Procuremos as expressões d'aquelles diversos termos.

Se representarmos $\int V dx$ por ψx, será $\int_{x_1}^{x_2} V dx = \psi(x_2)-\psi(x_1)$, e por tanto

$$\frac{d\xi}{dx_1}\delta x_1 + \frac{d\xi}{dx_2}\delta x_2 = \psi'(x_2)\,.\,\delta x_2 - \psi'(x_1)\,\delta x_1\,;$$

mas é $\quad \psi'(x)=V$, logo $\quad \psi'(x_2)=V_2$, $\psi'(x_1)=V_1$,

e por conseguinte

$$\frac{d\xi}{dx_1}\delta x_1 + \frac{d\xi}{dx_2}\delta x_2 = V_2\delta x_2 - V_1\delta x_1 = \Big(V\delta x\Big)_1^2.$$

Resta achar o ultimo termo $\frac{d\xi}{dt_0}\delta t_0$, que é propriamente o que na theoria presente se chama variação do integral e se indica pelo symbolo δ_1. Teremos assim, attendendo a que x é considerado constante,

$$\frac{d\xi}{dt_0}\delta t_0=\delta_1\int_{x_1}^{x_2}\mathrm{V}dx=\int_{x_1}^{x_2}\delta_1(\mathrm{V}dx)=\int_{x_1}^{x_2}(\mathrm{Y}\delta_1 y+\overset{(1)}{\mathrm{Y}}\delta_1 y'+\overset{(2)}{\mathrm{Y}}\delta_1 y''+..)dx.$$

Integremos por partes cada um dos termos do segundo membro, e d'este modo acharemos

$$\int \mathrm{Y}dx\,.\,\delta_1 y=\int \mathrm{Y}dx\,.\,\delta_1 y$$

$$\int \mathrm{Y}^{(1)}dx\,.\,\delta_1 y'=\int \mathrm{Y}^{(1)}\delta_1(y'dx)=\int \mathrm{Y}^{(1)}\delta_1 dy=$$

$$=\int \mathrm{Y}^{(1)}d\delta_1 y=\mathrm{Y}^{(1)}\delta_1 y-\int d_1 y\,.\,\frac{d\mathrm{Y}^{(1)}}{dx}\,dx.$$

$$\int \mathrm{Y}^{(2)}dx\,.\,\delta_1 y''=\int \mathrm{Y}^{(2)}\delta_1(y''dx)=\int \mathrm{Y}^{(2)}\delta_1 dy'=$$

$$=\int \mathrm{Y}^{(2)}\,d\delta_1 y'=\mathrm{Y}^{(2)}\delta_1 y'-\int \delta_1 y'\,.\,\frac{d\mathrm{Y}^{(2)}}{dx}\,dx=$$

$$=\mathrm{Y}^{(2)}\,\delta_1 y'-\int \frac{d\mathrm{Y}^{(2)}}{dx}\delta_1(y'dx)=\mathrm{Y}^{(2)}\delta_1 y'-\frac{d\mathrm{Y}^{(2)}}{dx}\,\delta_1 y+\int \delta_1 y\,.\,\frac{d^2\mathrm{Y}^{(2)}}{dx^2}.$$

. . . .

Fazendo estas substituições no valor de $\frac{d\xi}{dt_0}\delta t_0$, acharemos uma expressão, que juncta á de $\frac{d\xi}{dx_2}\delta x_2 + \frac{d\xi}{dx_1}\delta x_1$ dará finalmente

$$\delta\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{V}dx = \left(\mathrm{V}\delta x\right)_1^2 + \left[\left(\mathrm{Y}^{(1)} - \frac{d\mathrm{Y}^{(2)}}{dx} + \frac{d^2\mathrm{Y}^{(3)}}{dx^2} - \text{etc.}\ldots\right)\delta_1 y\right]_1^2$$

$$+\left[\left(\mathrm{Y}^{(2)} - \frac{d\mathrm{Y}^{(3)}}{dx} + \ldots\ldots\ldots\ldots\right)\delta_1 y'\right]_1^2$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\int_{x_1}^{x_2}\left(\mathrm{Y} - \frac{d\mathrm{Y}^{(1)}}{dx} + \frac{d^2\mathrm{Y}^{(2)}}{dx^2} - \frac{d^3\mathrm{Y}^{(3)}}{dx^3} + \ldots\ldots\right)\delta_1 y dx.$$

As condições relativas aos limites estabelecem ligação entre as variações δx, δy, $\delta y'$... relativas aos mesmos limites; e por isso para attender áquellas relações é mister transformar as variações representadas por δ_1 nas correspondentes a δ, o que se faz usando das relações já dadas a pag. 12, que podem ainda ser confirmadas usando das seguintes considerações. Em virtude da variação completa correspondente a $\delta_{,}$, o valor relativo a um dos limites transforma-se em

$$y + \Delta_1 y = y + \delta_1 y + \varepsilon,$$

sendo ε da segunda ordem. Mudando neste resultado x em $x + \Delta x$ e aproveitando sómente os termos até á primeira ordem, teremos

$$y + \frac{dy}{dx}\Delta x + \ldots \delta_1 y + \ldots + \varepsilon + \ldots.$$

$$= y + \frac{dy}{dx}\delta x + \ldots \delta_1 y + \ldots + \varepsilon + \ldots\ldots$$

Assim a parte, de primeira ordem em relação a δt, da differença entre o novo valor de y e o primitivo é

$$\delta y = y'\delta x + \delta_1 y\,;$$

e do mesmo modo se acharia

$$\delta y' = y''\delta x + \delta_1 y'$$

$$\delta y'' = y'''\delta x + \delta_1 y''$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

FIM.

ADDITAMENTOS AO N.° 6

Se a expressão V contiver algumas das quantidades x, y, y'.... relativas a qualquer dos limites, e se pelas condições do problema aquellas quantidades não forem invariaveis, deveremos attender á sua variação quando formarmos a do integral. Assim por exemplo, se na expressão V existir a quantidade y'_1, a expressão de δV conterá o termo $\frac{dV}{dy'_1}\delta y'_1$; o que addicionará o termo $\delta y'_1 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dV}{dy'_1}$ á variação do integral já achada em o n.° 6 pag. 14.

Em alguns problemas a expressão que existe debaixo do signal $\int$, pode não ter a fórma Vdx, que lhe attribuimos em o n.° 5.

Querendo uma formula extensiva a todos os casos, bastará suppor que aquella expressão, que designaremos por U, é uma funcção de x, dx, d^2x,... y, dy, d^2y...; e os principios apresentados em os n.os 4, 5 e 6 serão sufficientes para determinar completamente a variação do integral.

Mas ainda que este caso possa comprehender o primeiro, para o que bastaria generalizar a variavel independente, e ter em vista as relações que ligam as derivadas com as differenciaes correspondentes; todavia julgámos dever preferir a primeira hypothese, não só para evitar esta transformação, mas principalmente por que, como já dissemos, os principios de que usamos neste caso, são sufficientes para determinar com muita facilidade a variação do integral na segunda hypothese (*). Vej. o n.° 270 do tom. 2.° dos *Elementos de calculo infinitesimal* — 2.ª edição — por M. Duhamel; e os n.os 232, 233 e 234 do tom. 4.° do *Curso de mathematicas puras* — de Francoeur — 2.ª edição de Coimbra.

Cumpre tambem observar que, applicando o processo que acabamos de propor para formar as equações differenciaes correspondentes ao maximo ou minimo, obteremos em geral mais uma do que comporta o problema: d'onde podemos concluir que aquellas equações não são distinctas, e que uma se comprehende nas outras. É o que se pode verificar em os exemplos I, II e III do *calculo das variações* de Francoeur.

Mas esta superabundancia de equações, longe de ser inconveniente deve antes considerar-se vantajosa; por que, correspondendo cada uma das equações á variação de cada uma das variaveis (vej. n.° 11), e bastando obter as equações necessarias, poderemos escolher, entre todas, as que se deduzirem com mais facilidade, ou as que forem mais simples: o que não acontecia quando U tinha a fórma Vdx, por que neste caso o numero das equações era apenas o sufficiente. Assim por exemplo, para resolver um problema de mechanica, em que se pertende achar a trajectoria de um ponto em movimento, temos de tornar minima a expressão $\int\sqrt{dr^2+r^2d\theta^2}\sqrt{-2\int\varphi dr}$; e para isso deveriamos formar a variação d'aquelle integral em ordem a θ e a r; mas como as equações differenciaes resultantes não devem ser distinctas, e a variação em ordem a θ se pode formar com muita facilidade, será esta a que preferiremos. Formando pois a variação do integral em ordem a θ, acharemos

$$d.\frac{r^2d\theta\sqrt{-2\int\varphi dr}}{\sqrt{dr^2+r^2d\theta^2}}=0,$$

que é exactamente a equação differencial que se encontra a pag. 465 do T. 1.° do *Curso de mechanica* por Duhamel 3.ª edição.

Mas nos exemplos do *Curso de mathematicas puras* de Fracoeur, que citámos, deduziram-se todas as equações, e depois mostrou-se em cada exemplo que uma d'ellas estava comprehendida nas outras.

(*) Lorsque l'éxpression $\int$U est mise sous la forme $\int Vdx$, c'est-à-dire qu'il n'entre dans V que les variables x, y et les coefficients differentiels de y, le calcul du développement de la variation parait un peu plus compliqué, mais il mène à des consequences remarquables. (Lacroix — *Traité èlèmentaire de calc. integr.* cinquième edition, pag. 554).

INDICE

Erratas mais notaveis

Pagiaas	*Linhas*	*Erros*	*Emendas*
5	10	serem dados	serem fixos
8	18	fucção	funcção
9	10	fucção	funcção
10	6	a integral	o integral
12	22	4.ª edição	5.ª edição
16	3	resolve-os	resolve-se

Em o numero 10 a letra *v* designa a mesma expressão que representamos com *u* em o n.º 7.

☞ Cumpre advertir, para evitar qualquer duvida, que neste folheto empregâmos a denominação de *variaveis principaes* para designar as que não são independentes.

DYNAMICA

DO

PONTO MATERIAL

DYNAMICA

DO

PONTO MATERIAL

OU

PRINCIPIOS GERAES SOBRE O MOVIMENTO D'UM PONTO

POR

LUIZ DA COSTA E ALMEIDA

His principiis via ad majora sternitur.

NEWTON.

COIMBRA
IMPRENSA DA UNIVERSIDADE
1878

DYNAMICA

DO

PONTO MATERIAL

PRIMEIRA PARTE

DO MOVIMENTO CONSIDERADO INDEPENDENTEMENTE DAS FORÇAS QUE O PRODUZEM.

I. — Primeiras noções sobre o movimento d'um ponto.

1. A curva que um ponto movel percorre denomina-se *trajectoria;* e chama-se *espaço* a porção da trajectoria comprehendida entre um ponto determinado d'esta linha e a posição do movel num instante qualquer.

Designando por s o espaço, e por t o tempo correspondente, é claro que será $s = f(t)$. Tal é a *equação do movimento*.

O movimento diz-se *uniforme,* quando os espaços crescem proporcionalmente ao tempo, isto é, quando os augmentos do espaço são proporcionaes aos do tempo. Aliás é *variado*.

Designando por s o espaço correspondente ao tempo t, e por $s+\Delta s$ o respectivo a $t+\Delta t$, chama-se *velocidade* do movel no fim do tempo t, o limite para que tende $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, quando Δt tende para zero. A velocidade [1] será pois dada por $\frac{ds}{dt}=f'(t)$.

Figura-se geometricamente este elemento, tomando, a partir da posição occupada pelo movel, sobre a tangente á trajectoria e no sentido do movimento [2] um comprimento egual a $f'(t)$.

Considerando tiradas duas rectas pela posição occupada pelo movel no fim do tempo t, representando uma d'ellas a velocidade do movel nesse instante e sendo a outra egual e parallela á velocidade respectiva ao tempo $t+\Delta t$; é claro, que a recta que unir as extremidades discontiguas d'essas duas linhas será funcção de Δt. E chama-se *acceleração* o limite para que tende o quociente da divisão d'essa recta por Δt, quando Δt tende para zero.

Considerem-se traçadas, a partir d'um ponto O, differentes rectas OA, OB, OC,... OG, OH. Tirem-se, pelo ponto A uma recta AB′ egual e parallela a OB, e no mesmo sentido d'esta linha; por B′ uma recta B′C′ egual, parallela e no mesmo sentido de OC′; por C′ a recta C′D′ egual, parallela e no mesmo

[1] O sr. José Anastacio da Cunha no seu *Ensaio sobre os principios de mechanica* define assim este elemento: «*Velocidade* de um movel em qualquer ponto do espaço que descreve, é o expoente da razão que tem *ultimamente* o espaço infinitesimo, que alli principia a descrever, para o tempo em que o ha de descrever.»

Esta definição, que equivale á que damos no texto, comprehende como caso particular a definição geralmente conhecida de velocidade no movimento uniforme.

[2] «*Direcção* do movel, ou tambem da sua *velocidade*... no principio do espaço, é a recta tirada por esse ponto de sorte que não faça angulo com o espaço.» —*Ensaio sobre os principios de mechanica.*

sentido de OD;...; e por G' a recta $G'H'$ egual e parallela a OH; e finalmente una-se o ponto O com H' por meio d'uma recta. Feito isto, chamaremos a OH' *resultante*, e a OA, OB, OC,...OG, OH *componentes* [1].

Se as componentes forem tres, não situadas no mesmo plano, a resultante será representada, em grandeza e direcção, pela diagonal do parallelipipedo construido sobre essas tres linhas. E se forem sómente duas, a resultante coincidirá com a diagonal do parallelogrammo determinado por essas duas rectas.

Tambem é manifesto que, considerando tres eixos coordenados quaesquer, a projecção da resultante sobre qualquer d'elles é egual á somma das projecções respectivas das componentes. E reciprocamente, se as projecções d'uma linha sobre os tres eixos forem respectivamente eguaes ás sommas das projecções d'outras rectas traçadas em volta d'um ponto, aquella linha coincidirá, em grandeza e direcção, com a resultante d'estas.

2. Em vez de determinar as posições successivas do movel por meio dos espaços percorridos sobre a trajectoria, para o que seria bastante a equação do seu movimento, podemos referil-as a tres eixos coordenados quaesquer, com os quaes esteja invariavelmente ligada aquella curva.

---

[1] Estas denominações — *resultante* e *componentes* — foram primeiramente empregadas na Statica, donde passaram para a Cinematica; como se deprehende das seguintes palavras que transcrevemos da 2.ª edição da *Mechanica* de Duhamel: «Lorsque plusieurs forces sont appliquées à un même point, nous avons vu dans la Statique qu'elles pouvaient être remplacées par une seule; et il y a une construction geometrique très simple pour obtenir cette resultante, lorsque toutes les forces sont representées, pour leurs grandeurs, et pour leurs directions, par des droites partant de ce point. Lorsque des constructions semblables se rencontrent sans qu'il s'agisse des forces, il est commode d'employer des denominations analogues qui indiquent immediatement ce qui autrement exigerait des longues devellopements...»

Neste présupposto, representando por x, y, z as coordenadas variaveis do movel, é claro, que será

$$(1) \qquad x=\varphi(t), \; y=\varphi_1(t), \; z=\varphi_2(t),$$

designando φ, φ_1, φ_2 tres funcções dependentes da natureza do movimento.

Se eliminarmos t entre duas d'essas equações, obteremos a equação da projecção da trajectoria sobre um dos planos coordenados. Por exemplo, fazendo a eliminação entre a primeira equação e a segunda, acharemos a equação da projecção sobre o plano dos xy.

Demais, imaginando sobre cada eixo um ponto movendo-se de modo, que a sua posição coincida constantemente com a projecção respectiva do ponto material considerado, é claro, que a equação do movimento de qualquer d'esses pontos será uma das de (1).

Além d'estas relações outras mais se verificam entre o movimento do ponto material e os das suas projecções sobre os eixos, sobresahindo entre ellas as que vamos expôr.

3. *A velocidade da projecção é egual á projecção da velocidade.*

Sejam, Δx a differença entre os valores de x correspondentes aos tempos t e $t+\Delta t$; Δs e Δs_1 as partes, cuja projecção commum sobre o eixo dos x é Δx, da trajectoria e da velocidade relativa ao tempo t.

Por ser $\lim. \dfrac{\Delta s}{\Delta s_1}=1$, teremos

$$\frac{\dfrac{ds}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{ds}{dx}=\lim.\frac{\Delta s}{\Delta x}=\lim.\frac{\Delta s_1}{\Delta x}=\frac{\Delta s_1}{\Delta x};$$

o que mostra, que entre $\frac{ds}{dt}$ e $\frac{dx}{dt}$ subsiste a mesma relação que entre Δs_1 e Δx, e justifica, por tanto, o principio relativamente á projecção sobre o eixo dos x. E o mesmo se demonstraria relativamente ás projecções sobre os outros eixos [1].

A velocidade $\frac{ds}{dt}$ chama-se resultante; $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ são as componentes [2] (veja-se o final do n.º 1).

4. *A acceleração da projecção é egual á projecção da acceleração.*

A velocidade do movel no fim do tempo t tem por projecções sobre os eixos coordenados $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$; por tanto, serão $\frac{dx}{dt}+\Delta\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}+\Delta\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}+\Delta\frac{dz}{dt}$ as projecções da velocidade respectiva ao tempo $t+\Delta t$; e, em consequencia, se pelo ponto (x, y, z) tirarmos duas rectas eguaes e parallelas a essas velocidades e no sentido de cada uma d'ellas, as extremidades discontiguas d'essas duas linhas terão respectivamente por coordenadas

$$x+\frac{dx}{dt}, \qquad y+\frac{dy}{dt}, \qquad z+\frac{dz}{dt},$$

$$x+\frac{dx}{dt}+\Delta\frac{dx}{dt}, \quad y+\frac{dy}{dt}+\Delta\frac{dy}{dt}, \quad z+\frac{dz}{dt}+\Delta\frac{dz}{dt}.$$

As projecções sobre os eixos coordenados da recta que unir essas extremidades serão pois $\Delta\frac{dx}{dt}$, $\Delta\frac{dy}{dt}$, $\Delta\frac{dz}{dt}$; e dividindo

[1] Veja-se na *Mechanica* de Delaunay a confirmação d'este principio num exemplo.

[2] A componente da velocidade no sentido de qualquer dos eixos coordenados varía com a direcção do plano em que estiverem os outros dois eixos,

estas expressões por Δt e tomando os limites, acharemos finalmente

$$\frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \frac{d^2z}{dt^2},$$

para representar as projecções da acceleração.

Posto isto, applicando as expressões precedentes ao movimento do ponto que percorre o eixo dos xx, acharemos, que neste movimento as componentes da acceleração ficam representadas por

$$\frac{d^2x}{dt^2}, \quad 0, \quad 0;$$

donde se deduz, por serem nullas as duas ultimas componentes, que $\frac{d^2x}{dt^2}$ representa neste movimento a propria acceleração.

Fica assim demonstrado o theorema em relação ao eixo dos x. E do mesmo modo se provaria a sua exactidão relativamente aos outros eixos.

5. Resulta da definição que démos de acceleração que esta recta existe no plano osculador da trajectoria tirado pela posição do movel. Por tanto, se agora tomarmos este plano para um dos coordenados, a componente da acceleração será nulla relativamente ao eixo que estiver fóra d'esse plano, e a acceleração poderá considerar-se como resultante simplesmente das duas outras componentes.

Neste presupposto, tomando para eixos coordenados a tangente á trajectoria e a normal principal, e attendendo a que, na hypothese de serem rectangulares os eixos primitivos, os cosenos dos angulos que aquellas duas linhas formam respectivamente com os eixos coordenados são

$$\frac{dx}{ds}, \quad \frac{dy}{ds}, \quad \frac{dz}{ds} \quad \text{e} \quad \frac{n}{ds}\,d\,\frac{dx}{ds}, \quad \frac{n}{ds}\,d\,\frac{dy}{ds}, \quad \frac{n}{ds}\,d\,\frac{dz}{ds},$$

onde n designa o raio de curvatura, teremos [1]:

$$\text{acc. tangencial} = \frac{d^2x}{d\,t^2} \cdot \frac{d\,x}{ds} + \frac{d^2y}{d\,t^2} \cdot \frac{d\,y}{ds} + \frac{d^2z}{dt^2} \cdot \frac{d\,z}{ds} =$$

$$\frac{d\,x\,d^2x + d\,y\,d^2y + d\,z\,d^2z}{d\,s\,d\,t^2} = \frac{d^2s}{dt^2}.$$

---

[1] Designando respectivamente por α, β, γ e por a, b, c os angulos que com os eixos coordenados formam a tangente á trajectoria tirada no sentido em que cresce o arco s e a normal principal tirada da posição do movel para o centro de curvatura, teremos

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \qquad \cos\beta = \frac{dy}{ds}, \qquad \cos\gamma = \frac{dz}{ds}$$

$$\cos a = \frac{n}{ds}\, d\, \frac{dx}{ds}, \quad \cos b = \frac{n}{ds}\, d\, \frac{dy}{ds}, \quad \cos c = \frac{n}{ds}\, d\, \frac{dz}{ds};$$

e como é

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{ds}\,\frac{ds}{dt}, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{ds}\,\frac{ds}{dt}, \qquad \frac{dz}{dt} = \frac{dz}{ds}\,\frac{ds}{dt},$$

obteremos, derivando estas ultimas equações e depois eliminando do resultado, por intermedio das primeiras, as derivadas $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ e suas differenciaes,

$$\frac{d^2x}{d\,t^2} = \frac{d^2\,s}{d\,t^2}\,\frac{dx}{ds} + \frac{ds}{d\,t^2}\, d\left(\frac{dx}{ds}\right) = \frac{d^2\,s}{d\,t^2}\cos\alpha + \frac{d\,s^2}{d\,t^2}\,\frac{\cos a}{n}$$

$$\frac{d^2y}{d\,t^2} = \frac{d^2\,s}{d\,t^2}\cos\beta + \frac{d\,s^2}{d\,t^2}\,\frac{\cos b}{n}, \quad \frac{d^2\,z}{d\,t^2} = \frac{d^2\,s}{d\,t^2}\cos\gamma + \frac{d\,s^2}{d\,t^2}\,\frac{\cos c}{n}.$$

Mostram estas expressões, que a acceleração do movel se póde considerar como resultante de duas outras, uma das quaes, representada por $\frac{d^2\,s}{d\,t^2}$, é

$$\text{acc. centripeta} = \frac{n}{ds}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\, d\,\frac{dx}{ds} + \frac{d^2y}{dt^2}\, d\,\frac{dy}{ds} + \frac{d^2z}{dt^2}\, d\,\frac{dz}{ds}\right) =$$

$$\frac{n}{ds^3\,dt^2}\left[d^2x\,(ds\,d^2x - dx\,d^2s) + d^2y\,(ds\,d^2y - dy\,d^2s) +\right.$$

$$\left.d^2z(ds\,d^2z - dz\,d^2s)\right] = \frac{n}{ds^2\,dt^2}(d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 - d^2s^2) = \frac{v^2}{n}\text{[1]}.$$

---

dirigida segundo a tangente, e a outra, expressa por $\frac{ds^2}{dt^2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{v^2}{n}$, é dirigida no sentido da normal principal (veja-se o final do n.º 1); e, como consequencia, que a acceleração existe no plano osculador.

Finalmente a consideração do triangulo, a que nos referimos na definição que démos de acceleração, conduz directamente, e talvez ainda com mais facilidade, aos mesmos resultados (veja-se a *Mechanica racional* de Delaunay).

[1] Entre os movimentos rectilineos o mais simples — pela facilidade com que nelle se determinam todas as circumstancias relativas á posição do movel — é, depois do uniforme, o uniformemente variado, no qual os augmentos, positivos ou negativos, da velocidade são proporcionaes aos augmentos correspondentes do tempo. Neste genero de movimentos, certamente um dos primeiros considerados assim na formação como no estudo da sciencia, a velocidade é dada pela formula $v = a + b\,t$, onde á quantidade b, que representa o augmento de velocidade produzido na unidade de tempo, se dá geralmente o nome de *acceleração*. Assim pois nos movimentos d'esta natureza é $b = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$ a expressão da acceleração.

Ora applicando a este caso as formulas dadas no texto, e attendendo a que, por o movimento ser rectilineo, é $n = \infty$, acharemos que das duas componentes da acceleração, tal como a definimos em o n.º 1, é nulla a centripeta, e que por tanto a acceleração fica simplesmente representada pela sua componente tangencial, isto é, por $\frac{d^2s}{dt^2}$; o que concorda com o valor precedentemente achado.

É porém manifesto que egual concordancia ainda teria logar, se, como fazem alguns auctores, empregassemos o termo *acceleração* para designar o mesmo elemento a que em nossa theoria chamâmos *componente tangencial da acceleração*.

É, por exemplo, nesse sentido que se emprega o termo *acceleração* no —

6. Ainda quando a linha que o movel percorre não seja uma curva material, sempre a poderemos considerar como tal; e o movimento, de que temos tractado, é o do ponto em relação ao systema rigido de que fazem parte a trajectoria e os eixos coordenados que suppomos invariavelmente ligados com ella. Não obstante, se esse systema é considerado em repouso, o movimento do ponto diz-se *real* ou *absoluto:* aliás é *apparente* ou *relativo.*

Entre os elementos de movimento d'um ponto referido a dois systemas d'eixos, uns fixos e moveis os outros, verificam-se relações importantes, por meio das quaes se torna possivel deduzir as circumstancias d'um d'esses movimentos das do outro, quando seja conhecido o movimento do systema movel em relação ao fixo, ao qual se dá o nome de *movimento de transporte.*

Antes porém de deduzir essas relações, e a fim de as poder interpretar convenientemente, torna-se indispensavel dizer duas palavras ácerca dos movimentos de que é susceptivel um corpo solido ou systema rigido qualquer.

Ensaio sobre os principios de mechanica—já citado, onde se lê: «*Acceleração* de um movel em qualquer instante, é o expoente da razão que tem ultimamente para o tempo infinitesimo, que alli nasce, a velocidade que alli nasce com esse tempo, e com elle cresce» e tambem «Direcção do movel, ou tambem da sua velocidade, ou tambem da sua *acceleração* no principio do espaço, é a recta tirada por esse ponto de sorte que não faça angulo com o espaço.»

Veja-se tambem a *Mechanica* de Freycinet, § 7.º, e a de Duhamel, § 15.º da introducção.

II. — Determinação dos movimentos de que é susceptivel um corpo solido.

7. Considerem-se dois systemas d'eixos coordenados, uns fixos e os outros moveis, sendo estes invariavelmente ligados ao corpo. Suppõe-se que, no começo do movimento, os eixos moveis são respectivamente parallelos aos fixos, e que o corpo se move, conservando-se sempre esse mesmo parallelismo [1].

O movimento, que o corpo então tem, chama-se de *translação*; e é facil de ver que, neste movimento, as velocidades dos differentes pontos são constantemente eguaes entre si [2].

Qualquer que seja o movimento d'um corpo, se num determinado instante as velocidades de todos os seus pontos forem eguaes, diremos que, nesse momento, o movimento do corpo é uma *translação instantanea*.

8. Se dois pontos d'um corpo forem fixos, tambem o serão todos os pontos da recta por elles determinada; e o corpo só poderá ter um *movimento de rotação* em torno d'essa linha ou *eixo*.

Neste movimento, qualquer ponto descreve uma circumferencia situada sobre o plano tirado por elle perpendicularmente ao eixo,

---

[1] Se dois dos eixos coordenados moveis forem sempre respectivamente parallelos aos fixos, tambem os outros eixos se conservarão parallelos.

[2] Com effeito, designando por x, y, z as coordenadas d'um ponto do corpo, relativas aos eixos fixos, por x', y', z' as coordenadas do mesmo ponto relativamente aos eixos moveis, e por α, β, γ as coordenadas da origem d'estes eixos em relação aos primeiros; teremos entre essas coordenadas as relações $x = x' + \alpha$, $y = y' + \beta$, $z = z' + \gamma$, das quaes se deduzem, pela derivação,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\alpha}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{d\beta}{dt}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{d\gamma}{dt},$$

que mostram a verdade do que asseverámos.

e cujo centro está sobre esta linha; e as velocidades dos differentes pontos são directamente proporcionaes ás distancias respectivas de cada um d'elles ao eixo da rotação.

Chama-se *velocidade angular* a velocidade dos pontos, cuja distancia ao eixo é egual á unidade. Designando por ω esta velocidade, e por r a distancia de qualquer ponto ao eixo, será $r\omega$ a velocidade d'esse ponto.

Figura-se com muita simplicidade a direcção do eixo da rotação, a velocidade angular e o sentido da rotação, tomando um comprimento egual a essa velocidade sobre o eixo da rotação, e num sentido tal, que um individuo posto em coincidencia com esse comprimento, tendo os pés na origem d'elle, veja executar-se o movimento da esquerda para a direita.

Qualquer que seja o movimento d'um corpo, se num determinado instante as velocidades dos seus differentes pontos tem entre si as relações que acabâmos de indicar, diz-se que o movimento do corpo é, nesse momento, uma *rotação instantanea.*

9. Procuremos as expressões geraes que, para um dado instante, determinam as velocidades dos differentes pontos d'um corpo que tem um ponto fixo.

Nesta determinação empregaremos dois systemas d'eixos coordenados orthogonaes, uns fixos e os outros moveis, sendo estes invariavelmente ligados ao corpo e tendo ambos a sua origem no ponto fixo.

Designando por x, y, z as coordenadas d'um ponto do corpo relativas aos eixos fixos, e por x', y', z' as coordenadas do mesmo ponto respectivas aos eixos moveis, teremos entre umas e outras as relações conhecidas

$$(2)\qquad\left\{\begin{aligned} x &= a\,x' + b\,y' + c\,z', \\ y &= a'\,x' + b'\,y' + c'\,z', \\ z &= a''\,x' + b''\,y' + c''\,z'; \end{aligned}\right.$$

das quaes se deduzem

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x' \dfrac{da}{dt} + y' \dfrac{db}{dt} + z' \dfrac{dc}{dt}, \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = x' \dfrac{da'}{dt} + y' \dfrac{db'}{dt} + z' \dfrac{dc'}{dt}, \\[2ex] \dfrac{dz}{dt} = x' \dfrac{da''}{dt} + y' \dfrac{db''}{dt} + z' \dfrac{dc''}{dt}. \end{cases}$$

Ora, por serem rectangulares os eixos coordenados, as quantidades a, b, c, a', b',... serão ligadas entre si pelas relações

$$(4)\begin{cases} a^2 + a'^2 + a''^2 = 1, \quad b^2 + b'^2 + b''^2 = 1, \quad c^2 + c'^2 + c''^2 = 1, \\ ab + a'b' + a''b'' = 0, \quad ac + a'c' + a''c'' = 0, \quad bc + b'c' + b''c'' = 0; \end{cases}$$

donde resulta que poderemos exprimir as nove derivadas que entram nos segundos membros de (3) em funcção sómente de tres d'ellas. Bastará para isso derivar (4) em ordem a t, e depois, por meio das seis equações resultantes, eliminar de (3) outras tantas derivadas.

É o que vamos fazer, suppondo, para maior simplicidade, que, no instante que se considera, os eixos moveis coincidem com os fixos.

Derivando pois (4), e depois attendendo a que por hypothese é

$$a = b' = c'' = 1, \quad b = c = a' = c' = a'' = b'' = 0,$$

teremos

$$\frac{da}{dt} = \frac{db'}{dt} = \frac{dc''}{dt} = \frac{db}{dt} + \frac{da'}{dt} = \frac{dc}{dt} + \frac{da''}{dt} = \frac{dc'}{dt} + \frac{db''}{dt} = 0;$$

o que transforma (3) em

$$\frac{dx}{dt}=z'\frac{dc}{dt}-y'\frac{da'}{dt},\ \frac{dy}{dt}=x'\frac{da'}{dt}-z'\frac{db''}{dt},\ \frac{dz}{dt}=y'\frac{db''}{dt}-x'\frac{dc}{dt},$$

ou

$$(5)\qquad \frac{dx}{dt}=mz-ny,\ \frac{dy}{dt}=nx-lz,\ \frac{dz}{dt}=ly-mx,$$

pondo por simplicidade $\frac{dc}{dt}=m,\ \frac{da'}{dt}=n,\ \frac{db''}{dt}=l$, e attendendo a que é $x'=x,\ y'=y,\ z'=z$.

Egualando a zero os valores precedentes de $\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{dz}{dt}$, teremos, para determinar os pontos cuja velocidade é nulla, as equações

$$mz-ny=0,\ nx-lz=0,\ ly-mx=0,$$

que equivalem simplesmente a duas, e mostram que os pontos procurados estão todos sobre uma recta que passa pelo ponto fixo.

Posto isto, designando por φ, ψ, θ os angulos que essa recta fórma com os eixos coordenados moveis ou fixos, e pondo $\sqrt{l^2+m^2+n^2}=k$, acharemos

$$\cos\varphi=\frac{l}{k},\ \cos\psi=\frac{m}{k},\ \cos\theta=\frac{n}{k};$$

com estes valores as equações (5) transformam-se em

$$\frac{dx}{dt}=k(z\cos\psi-y\cos\theta),$$

$$\frac{dy}{dt}=k(x\cos\theta-z\cos\varphi),$$

$$\frac{dz}{dt}=k(y\cos\varphi-x\cos\psi);$$

e elevando ao quadrado ambos os membros de cada uma d'estas equações, e sommando-as depois ordenadamente, resulta

$$\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}=v^2=k^2(x^2+y^2+z^2)-k^2(x\cos\varphi+y\cos\psi+z\cos\theta)^2$$

isto é [1]

$$v^2=k^2p^2 \quad \text{ou} \quad v=kp,$$

onde p designa o comprimento da perpendicular abaixada do ponto (x, y, z) sobre a recta considerada.

O movimento do corpo é pois, a todo o momento, uma rotação instantanea; k é a velocidade angular; φ, ψ, θ são os angulos, que o eixo da rotação fórma com os eixos coordenados fixos [2].

---

[1] $x^2+y^2+z^2$ é o quadrado da distancia da origem dos eixos ao ponto (x, y, z); e $x\cos\varphi+y\cos\psi+z\cos\theta$ representa a projecção d'essa distancia sobre a recta determinada pelos angulos φ, ψ, θ.

[2] Do que fica dicto facilmente se conclue que, qualquer que seja a direcção dos eixos moveis, ha sempre uma serie de pontos, dispostos em linha recta, cujas coordenadas, sendo substituidas nos segundos membros das equações (3), os annullam; e que, para os pontos situados fóra d'essa linha, os segundos membros d'aquellas equações representam as componentes, sobre os eixos fixos, de uma recta ou velocidade, cuja direcção é perpendicular ao plano conduzido pelo ponto que se considera e pelo eixo instantaneo, e cuja grandeza é directamente proporcional ao comprimento da perpendicular abaixada d'esse ponto sobre o mesmo eixo.

10. Considerando agora um corpo inteiramente livre, empregaremos ainda dois systemas d'eixos coordenados orthogonaes, fixos uns e os outros moveis. A origem dos eixos moveis é um ponto qualquer do corpo, com o qual se suppõe estes eixos invariavelmente ligados.

Nesta hypothese, teremos (vejam-se as notações empregadas em os n.os 7 e 9):

$$
(6) \qquad
\begin{aligned}
x &= \alpha + a\ x' + b\ y' + c\ z',\\
y &= \beta + a'\ x' + b'\ y' + c'\ z',\\
z &= \gamma + a''x' + b''y' + c''z',
\end{aligned}
$$

donde resultam, pela derivação,

$$
(7) \qquad
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \frac{d\alpha}{dt} + x'\frac{da}{dt} + y'\frac{db}{dt} + z'\frac{dc}{dt},\\
\frac{dy}{dt} &= \frac{d\beta}{dt} + x'\frac{da'}{dt} + y'\frac{db'}{dt} + z'\frac{dc'}{dt},\\
\frac{dz}{dt} &= \frac{d\gamma}{dt} + x'\frac{da''}{dt} + y'\frac{db''}{dt} + z'\frac{dc''}{dt}.
\end{aligned}
$$

Mostram estas equações, que a velocidade de qualquer ponto do corpo póde considerar-se como resultante de duas outras, que tenham respectivamente por projecções sobre os eixos fixos, uma d'ellas

$$
(8) \qquad \frac{d\alpha}{dt},\ \frac{d\beta}{dt},\ \frac{d\gamma}{dt},
$$

e a outra os segundos membros das equações (7) depois de suppressimidos os termos precedentes.

*

Vejâmos pois o que representa cada uma d'essas componentes. Pondo em (7) $x'=y'=z'=0$, resultam

$$\frac{dx}{dt}=\frac{d\alpha}{dt},\quad \frac{dy}{dt}=\frac{d\beta}{dt},\quad \frac{dz}{dt}=\frac{d\gamma}{dt};$$

por onde se vê que a recta, cujas projecções sobre os eixos fixos são $\frac{d\alpha}{dt}$, $\frac{d\beta}{dt}$, $\frac{d\gamma}{dt}$, representa a velocidade da origem dos eixos moveis.

Agora, pelo que respeita á segunda componente da velocidade effectiva de cada ponto, sabemos, pela nota (2) do n.º precedente, que ella é nulla para uma serie de pontos situados sobre uma recta, que passa pela origem dos eixos moveis; e que, para os pontos existentes fóra d'essa linha, além de que já conhecemos a direcção e o sentido d'essa componente, é a sua grandeza directamente proporcional á distancia respectiva de cada ponto áquella recta [1].

Em consequencia d'estas relações chamaremos á primeira componente — velocidade de translação, e á segunda — velocidade de rotação. A velocidade de cada ponto é a resultante d'essas duas.

A velocidade de translação, commum para todos os pontos do corpo, varía com o ponto que se toma para origem dos eixos moveis [2]. Quanto ao eixo indicativo da rotação (n.º 8) a que se

---

[1] Os segundos membros de (7), abstrahindo nelles dos termos (8), são os mesmos que se obteriam, derivando (6) na hypothese de ser fixa a origem dos eixos moveis; donde se conclue que são aqui inteiramente applicaveis as considerações que apresentámos em a nota (2) do n.º 9.

[2] A velocidade de translação é a velocidade da origem, e por tanto varía com esse ponto.

refere a segunda componente da velocidade effectiva, a sua direcção e grandeza são independentes do ponto que se escolhe para essa origem [1].

III. — Comparação dos movimentos *absoluto* e *relativo* d'um ponto.

Machado

11. Sejam x, y, z e x', y', z' as coordenadas respectivas d'um ponto movel relativamente a dois systemas d'eixos coordenados orthogonaes (n.º 10). Designamos por S o systema rigido determinado pelos eixos fixos, e por S′ o systema formado pelos eixos moveis. E finalmente suppõe-se conhecido o movimento de S′ em relação a S.

Entre umas e outras coordenadas teremos pois as relações (6).

Posto isto, derivando a primeira d'essas equações e pondo por simplicidade $\frac{dx}{dt} = v_x$, obteremos

$$(9) \qquad \frac{dx}{dt} = v_x = \frac{d\alpha}{dt} + x'\frac{da}{dt} + y'\frac{db}{dt} + z'\frac{dc}{dt}$$

$$+ a\frac{dx'}{dt} + b\frac{dy'}{dt} + c\frac{dz'}{dt},$$

para representar a componente, no sentido do eixo dos x, da velocidade d'esse ponto.

Applicando esta equação ao ponto do systema S′, com que, no

1 É o que se póde reconhecer sem difficuldade por meio dos valores de k, cos φ, cos ψ, cos θ, dados em o n.º 9, suppondo que tomavamos successivamente para origem dos eixos dois pontos differentes, sendo as direcções d'esses eixos as mesmas em ambos os casos.

momento dado, coincidir o movel, e a que chamaremos ponto *coincidente*, teremos, designando por (v_x) a velocidade d'esse ponto, proveniente do movimento do systema de que elle faz parte,

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)=(v_x)=\frac{d\alpha}{dt}+x'\frac{da}{dt}+y'\frac{db}{dt}+z'\frac{dc}{dt};$$

donde se deduz que no segundo membro de (9), em logar da somma dos termos da primeira linha, poderemos escrever (v_x).

Quanto aos termos da segunda linha, é manifesto que a sua somma representa a componente, no sentido do eixo dos x, da velocidade relativa do ponto movel.

Designando pois por v'_x esta ultima componente, teremos, em logar de (9), a equação

(10) $$v_x=(v_x)+v'_x.$$

E do mesmo modo achariamos

(11) $$v_y=(v_y)+v'_y, \quad v_z=(v_z)+v'_z.$$

Interpretadas geometricamente, as equações (10) e (11) significam que, se pela posição do movel tirarmos duas rectas que representem, uma a velocidade d'esse ponto no seu movimento relativo a S′, e a outra a velocidade do ponto coincidente no movimento de transporte de S′ relativamente a S, a resultante d'essas duas linhas será a velocidade effectiva do ponto considerado.

Considerando tres systemas S, S′, S″, supporemos conhecido o movimento de transporte de S″ em relação a S′, e o d'este systema relativamente a S.

Posto isto, applicando a equação (10) a S e S', teremos

$$v_x = (v'_x) + v'_x;$$

e, applicando a mesma equação a S' e S'', acharemos

$$v'_x = (v''_x) + v''_x;$$

e logo

$$v_x = (v'_x) + (v''_x) + v''_x.$$

E analogamente para os outros eixos.

Finalmente, considerando $n+1$ systemas S, S', S'',... $S^{(n)}$, achariamos, relativamente ao eixo dos x

$$(12) \qquad v_x = (v'_x) + (v''_x) + (v'''_x) + \ldots (v_x^{(n)}) + v_x^{(n)};$$

e equações analogas em relação aos outros eixos.

Estas equações são susceptiveis de uma interpretação geometrica analoga á que démos para o caso de dois systemas [1].

---

[1] A equação (12) e as analogas relativas aos outros eixos não são mais que uma consequencia muito simples d'um principio elementar do calculo differencial.

Com effeito, imaginemos construida a trajectoria $T^{(n)}$ que o movel segue no seu movimento relativo a $S^{(n)}$; bem assim a trajectoria $T^{(n-1)}$ do movimento do ponto considerado relativamente a $S^{(n-1)}$; $T^{(n-2)}$ relativa a $S^{(n-2)}$;...; T relativa a S: depois do que poderemos abstrahir de todos os demais pontos dos differentes systemas rigidos S, S',... e considerar unicamente as trajectorias T, $T^{(1)}$, $T^{(2)}$,...

Devendo o ponto movel achar-se simultaneamente sobre $T^{(n)}$ e sobre $T^{(n-1)}$, estas duas trajectorias deverão ter, a todo o instante, um ponto de inter-

12. Derivando a equação (9) e pondo por simplicidade $\frac{d^2 x}{d t^2} = j_x$, acharemos

$$(13) \quad \frac{d^2 x}{d t^2} = j_x = \frac{d^2 \alpha}{d t^2} + x' \frac{d^2 a}{d t^2} + y' \frac{d^2 b}{d t^2} + z' \frac{d^2 c}{d t^2}$$

$$+ a \frac{d^2 x'}{d t^2} + b \frac{d^2 y'}{d t^2} + c \frac{d^2 z'}{d t^2}$$

$$+ 2 \left(\frac{dx'}{dt} \frac{da}{dt} + \frac{dy'}{dt} \frac{db}{dt} + \frac{dz'}{dt} \frac{dc}{dt} \right),$$

para representar a componente, no sentido do eixo dos x, da acceleração do ponto material.

---

secção commum, que será a posição do movel no momento considerado; quer isto dizer: em quanto o movel percorre $T^{(n)}$, esta curva desloca-se ao longo de $T^{(n-1)}$ de modo que, considerando sómente os dois systemas $S^{(n)}$ e $S^{(n-1)}$, a intersecção commum das duas curvas determina a posição — *absoluta* e *relativa* (n.º 6) — do ponto movel. Do mesmo se veria que $T^{(n-1)}$ se desloca sobre $T^{(n-1)}$, $T^{(n-2)}$ sobre $T^{(n-3)}$, etc.... $T^{(1)}$ sobre T; e todas estas curvas têm, em qualquer instante, um ponto commum de intersecção, que representa nesse momento a posição respectiva do ponto movel.

Posto isto, e attendendo ao principio da differenciação das funcções compostas, teremos

$$dx = d_n x + (d_n x) + (d_{n-1} x) + (d_{n-2} x) + \ldots (d_2 x) + d_1 x),$$

onde designamos, por dx a differencial completa de x, correspondente ao movimento do ponto sobre $T^{(n)}$ e ao d'esta e demais trajectorias, cada uma

Applicando esta equação ao ponto *coincidente,* e representando por $\left(\frac{d^2 x}{d t^2}\right)$ a acceleração d'esse ponto, obteremos

$$\left(\frac{d^2 x}{d t^2}\right) = (j_x) = \frac{d^2 \alpha}{d t^2} + x' \frac{d^2 a}{d t^2} + y' \frac{d^2 b}{d t^2} + z' \frac{d^2 c}{d t^2};$$

por onde se vê, que a somma dos termos da primeira linha do segundo membro de (13) representa a componente, no sentido do eixo dos x, da accelaração do ponto coincidente.

Quanto aos termos da segunda linha, é claro que a somma d'elles representa a componente, no sentido d'esse mesmo eixo, da acceleração relativa do ponto movel. Denotal-a-hemos por j'_x.

Resta conhecer a significação dos termos da terceira linha.

Para isso imaginemos tirada pela posição do movel uma recta parallela e egual ao dobro da que, no momento dado, representa a velocidade relativa do movel; e pelo mesmo ponto tres eixos coordenados respectivamente parallelos aos eixos moveis. Suppõe-se que, tanto aquella recta como estes eixos, estão invariavelmente ligados ao systema movel.

Posto isto, será facil conhecer que aquella extremidade da recta, que não coincide com a origem dos ultimos eixos, tem por coordenadas, em relação a elles, $2 \frac{dx'}{dt}$, $2 \frac{dy'}{dt}$, $2 \frac{dz'}{dt}$; e, em consequencia, attendendo ao que se disse em o n.º 10, poderemos concluir que a terceira linha do segundo membro de (13) repre-

---

sobre a sua immediata; por $d_n x$ a parte d'aquella differencial proveniente unicamente do movimento do ponto material sobre a trajectoria $T^{(n)}$; e geralmente por $(d_i x)$, sendo i um numero que póde ter todos os valores desde 1 até n, a parte da differencial de x proveniente unicamente do deslocamento de $T^{(i)}$ sobre $T^{(i-1)}$. Dividindo pois por dt ambos os membros da equação precedente, recahiremos em (12).

senta a componente, no sentido do eixo dos x, da velocidade [1] de rotação do ponto de S', determinado pela extremidade d'aquella recta.

Designando esta ultima componente por $(j)_x$, teremos pois

$$j_x = (j_x) + j'_x + (j)_x.$$

E como o que dissemos em relação ao eixo dos x póde egualmente repetir-se a respeito dos eixos dos y e dos z, concluiremos finalmente que a recta, representativa da acceleração no movimento absoluto, é a resultante de tres outras, que são: a acceleração do ponto coincidente, a acceleração relativa do ponto movel e a acceleração centripeta composta [2].

Se o movimento de S' relativamente a S for uma simples translação, a acceleração do ponto considerado será simplesmente resultante da acceleração do ponto coincidente (ou de qualquer outro ponto de S') e da relativa. E nesse caso, se a translação for uniforme, a acceleração absoluta será egual á relativa.

Todos estes resultados podem facilmente ampliar-se a tres ou mais systemas n.º (11).

---

[1] Essa velocidade, ou a recta que a representa, a que geralmente se dá o nome de *acceleração centripeta composta,* é perpendicular á velocidade relativa e ao eixo instantaneo da rotação.

[2] Designando por k a velocidade angular no movimento de S', e por θ o angulo que o eixo instantaneo fórma com a velocidade relativa v', acharemos, tendo em vista o que se disse em o n.º 10,

$$acc.\ centr.\ composta = 2\,k\,v' \operatorname{sen} \theta.$$

SEGUNDA PARTE

DO MOVIMENTO PRODUZIDO POR QUAESQUER FORÇAS APPLICADAS A UM PONTO MATERIAL.

I. — Leis fundamentaes do movimento deduzidas da observação [1].

13. *Lei da inercia,* formulada por Kepler.

Consiste esta lei em que *todo o movimento é naturalmente e indefinidamente rectilineo e uniforme.*

Quer isto dizer, que um ponto material, uma vez posto em movimento, sem que depois actue sobre elle força alguma, se moverá indefinidamente em linha recta com uma velocidade constante.

Á primeira vista póde parecer que os factos observados estão em opposição com a presente lei; por quanto observa-se geralmente que, dando a um corpo livre uma impulsão qualquer, o movimento assim produzido, em vez de se prolongar indefinida-

---

[1] É hoje geralmente reconhecida a necessidade impreterivel de recorrer á observação para descobrir e assegurar solidamente os fundamentos em que deve assentar o estudo da mechanica.

Neste convencimento, começaremos por expôr os principios ou leis fundamentaes de que carecemos para o objecto assás limitado, que nos propozemos tractar; e juntamente indicaremos as observações e experiencias que levam a admittir como verdadeiros esses principios.

mente com uma velocidade constante, termina sempre depois d'um intervallo de tempo assás limitado; além de que, na maior parte dos casos, o movel se desvia mui sensivelmente da direcção rectilinea em que foi lançado.

Considerando porem que esses desvios ou alterações, assim na grandeza como na direcção da velocidade inicial, têm sempre outras causas a que podem e devem ser attribuidos, sendo que, á medida que se diminuem os obstaculos que se oppõem á livre manifestação da lei, esta se observa cada vez mais exactamente[1]; e, sobretudo, que a hypothese da inalterabilidade da velocidade inicial, sendo convenientemente combinada com os effeitos naturaes das forças, a que agora chamaremos *perturbadoras*, e a cuja acção nunca podemos subtrahir completamente os corpos que se movem á superficie da terra, explica plena e satisfactoriamente todos os movimentos observados[2], somos fatalmente levados a admittir como verdadeira a lei enunciada.

---

[1] Por exemplo, impellindo uma esphera sobre um plano, observa-se que o centro da esphera se move, sensivelmente, em linha recta, e que, sendo identicas todas as demais circumstancias, o movimento se prolonga tanto mais, quanto mais polida é a superficie da esphera e a do plano sobre que se move; havendo assim motivo para crer, que o movimento se prolongaria indefinidamente, se fora possivel, o que não é, evitar completamente o attrito entre a esphera e o plano, e bem assim a resistencia do ar sobre a superficie da esphera.

[2] Quando se tractar do movimento dos projecteis no vazio, se verá que o processo que se emprega para determinar theoricamente a posição do movel num instante qualquer equivale ao seguinte: «Traça-se uma recta indefinida tirada pela posição inicial do movel na direcção da velocidade ou da impulsão inicial; marca-se sobre essa recta a posição que o movel ahi deveria ter, em virtude da lei da inercia, por effeito daquella velocidade; e depois, partindo d'esse ponto como origem, toma-se, de cima para baixo, sobre a respectiva vertical um comprimento egual ao espaço que o movel teria percorrido, sendo collocado naquella origem sem velocidade, e actuado pela força da gravidade desde o começo do movimento até ao instante que se considera.»

Com A. Comte observaremos, que esta lei não deve ser con-

De modo que, inversamente, se pela posição do movel num instante qualquer levantarmos a vertical, e sobre ella, a partir d'essa posição, tomarmos um comprimento egual áquelle espaço percorrido por effeito da acção da gravidade, a extremidade superior d'essa linha deverá achar-se sobre a direcção da velocidade inicial e coincidir com a posição que o movel ahi teria, em virtude da lei da inercia, por effeito sómente d'aquella velocidade.

Vê-se, pois, que, no movimento dos projecteis, embora curvilineo e realisado com uma velocidade variavel, se encontra implicitamente comprehendida a lei da inercia. E, sendo assim, já se deixa ver que a comparação dos resultados theoricos, respectivos aos movimentos d'esta natureza, com os realmente observados, poderá servir para aquilatar a exactidão d'essa lei.

O que dizemos do movimento dos projecteis póde egualmente repetir-se ácerca dos movimentos do pendulo, e, em geral, a respeito de todo e qualquer movimento. Ora, com quanto os resultados theoricos, fundados, como vimos, naquella lei, não estejam em perfeita harmonia com os observados, é todavia certo que as discrepancias que se encontram, melhor do que pela inobservancia da lei se explicam como sendo devidos a causas ou forças perturbadoras, taes como a resistencia do ar no movimento dos projecteis, e essa mesma resistencia e ainda o attrito nos movimentos do pendulo, etc. etc., sendo certo que, á medida que mais se evitam os effeitos d'essas forças, mais os resultados observados se aproximam dos determinados pela theoria.

Sabe-se, por exemplo, que o movimento do pendulo, que nas circumstancias ordinarias dura apenas alguns minutos, nas experiencias emprehendidas por Borda no Observatorio de Pariz para a determinação da relação entre o metro e o comprimento do pendulo de segundos, pôde prolongar-se por mais de 30 horas, por se haver diminuido consideralvelmente a resistencia do ar, rarefazendo-o.

O accordo, porém, dos resultados theoricos com os observados torna-se principalmente notavel nos movimentos dos corpos do nosso systema planetario, a respeito dos quaes escreveu um auctor distincto «*immenses pendules de l'eternité qui battent les siècles comme les nôtres battent les secondes* (G. de Pontecoulant).»

É que esses corpos, por se moverem num meio extremamente rarefeito e por isso pouco resistente, encontram-se nas circumstancias mais favoraveis para a perfeita observancia da lei da inercia.

fundida com a supposição que se faz na mechanica sobre o estado dos corpos, que ahi se consideram como *inertes*, quer dizer, como privados de força propria, substituindo-se sempre por forças exteriores as forças que por ventura possam residir no proprio corpo, cujo movimento se estuda.

E na verdade, ainda suppondo o corpo privado de força propria, e abstrahindo do que a observação mostra, nenhuma razão se descobre para assegurar que o movimento só possa ser rectilineo e uniforme.

É certo que na definição de *força* se considera como tal toda a causa capaz de produzir alteração no movimento, e por isso poderá parecer que, não havendo força no corpo, tambem não poderá haver alteração no movimento, e que assim deverá este ser rectilineo e uniforme. Cumpre porém notar que, ao fallar-se, na definição de força, de *alteração no movimento*, deve entender-se *alteração no movimento naturalmente produzido*, quer dizer, no movimento tal qual elle é por virtude da propria natureza.

Ora é esse movimento que a lei da inercia affirma ser rectilineo e uniforme. E é manifesto que só pela observação e experiencia se pode isso demonstrar.

14. *Lei da independencia dos movimentos*, formulada por Galileu.

Resume-se esta lei em que, se os diversos pontos d'um systema tiverem, a todo o instante, velocidades eguaes — em grandeza, direcção e sentido —, de modo que o movimento do systema seja uma simples translação, e applicarmos a um d'esses pontos (animado ainda, a todo o instante, d'essa translação) uma força qualquer, esse ponto se desloca em relação aos outros, como se o systema estivesse em repouso. Quer isto dizer, que o movimento commum do systema não altera o movimento relativo do ponto; e d'ahi vem a denominação da lei.

São innumeraveis as provas que se podem apresentar para evidenciar a verdade d'este principio[1]; mas a sua melhor justificação encontra-se no accordo constante dos resultados theoricos fundados nelle com os que a observação quotidianamente nos offerece.

Cumpre advertir que, para o principio de Galileu ter logar, é apenas necessario que o movimento seja commum para todos os pontos, e, por tanto, que o movimento do systema seja uma translação; podendo a velocidade do systema variar, a todo o instante, de grandeza e direcção. Ora, por virtude da lei da inercia, essa variação só póde ter logar por effeito da applicação de novas forças, as quaes se devem suppor eguaes para todos os pontos, a fim de o movimento se conservar commum para todos elles; d'onde resulta que o principio de Galileu póde ainda enunciar-se nos seguintes termos: «*Se aos differentes pontos d'um systema material, animado d'uma translação rectilinea e uniforme, applicarmos quaesquer forças, constantes ou variaveis, continuas ou de impulsão, sendo essas forças eguaes para todos os pontos; e a um dos pontos applicarmos além d'essa força mais uma outra: o ponto, por effeito d'esta ultima força, mover-se-á em relação ao systema, como se este estivesse em repouso.*»

---

[1] Assim dentro em um navio, ou num wagon em movimento, as mesmas forças produzem sempre os mesmos effeitos sobre os corpos a que são applicadas, qualquer que seja a velocidade da translação, uma vez que esses corpos participem a todo o instante do movimento commum do transporte.

Sabe-se que a terra é animada de dois movimentos, um de translação e o outro de rotação em volta da linha dos polos. Todavia, attendendo á immensa grandeza do raio da terra, póde suppor-se, considerando uma pequena extensão da sua superficie, que todos os pontos d'ella tem velocidades sensivelmente eguaes. Ora, não obstante a velocidade de translação da terra variar consideravelmente no intervallo d'um anno, não se tem até hoje notado a mais leve differença entre os movimentos produzidos por uma força qualquer nas epochas comprehendidas nesse espaço de tempo.

Outros mais exemplos podiamos ainda citar, mas, como já dissemos, a melhor justificação da lei de Galileu encontra-se na concordancia dos resultados theoricos com os observados.

Por outras palavras, quer isto dizer que se obtem a posição do movel num instante qualquer, tractando o movimento commum do systema como um movimento de transporte, e o do ponto em relação ao systema como um movimento relativo. Da composição d'esses dois movimentos resultará o movimento absoluto do ponto considerado [1].

II. — Da composição dos movimentos produzidos por forças de impulsão.

15. *Se sobre um ponto material actuarem simultaneamente duas impulsões taes que, obrando separadamente, lhe communicariam, uma d'ellas a velocidade* a *e outra a velocidade* b*: o ponto mover-se-á com uma velocidade constante, representada, em grandesa, direcção e sentido, pela resultante de* a *e* b.

Tome-se para eixo dos x a recta, sobre que se moveria o ponto, se sobre elle actuasse sómente a primeira impulsão, e para eixo dos y a recta que o ponto percorreria por effeito da segunda impulsão. Sobrepostos a estes eixos, no momento em que obram as duas impulsões, considerem-se outros, a que chamaremos dos x' e dos y'; e supponhamos que o systema rigido por estes determinado tem um movimento de translação constante com uma velocidade representada por a.

Resulta do principio de Galileu que, para se obter a velocidade absoluta do movel em qualquer instante, basta compôr a sua velocidade relativa aos eixos moveis com a velocidade de transporte do systema rigido determinado por estes eixos: por tanto, tendo em vista a regra para a composição d'essas veloci-

[1] A doutrina do nosso artigo III da cinematica encontra-se em alguns livros sob a epigraphe «Composição dos movimentos.»

dades (n.º 11), recahiremos na proposição enunciada. Será facil ver que o ponto percorre o eixo movel dos y' com a velocidade b.

A demonstração precedente ainda podia applicar-se quando as duas impulsões obrassem na mesma direcção. Nesse caso tomariamos essa linha para eixo dos x, e para eixo dos y qualquer outra recta tirada pela posição inicial do movel; ou, mais simplesmente, considerariamos sómente o eixo dos x e o dos x'.

D'aqui resulta que *as forças instantaneas são directamente proporcionaes ás velocidades que ellas communicam a um mesmo ponto em repouso.*

A doutrina d'este numero póde tambem servir para determinar o movimento d'um ponto que percorrendo uma linha recta com a velocidade a, seja actuado por uma impulsão que, lhe communicaria, na hypothese de o ponto estar em repouso, a velocidade b.

16. Quando um ponto se move, actuado a todo o instante por uma força contínua, percorre, em geral, uma linha curva com uma velocidade continuamente variavel.

Neste presupposto procuremos determinar *em que se tornaria o movimento, se, a partir d'um dado instante, a força cessasse de actuar sobre o movel.*

Pela lei da inercia já sabemos, que o movimento que pretendemos determinar é rectilineo e uniforme; procuremos pois a grandeza e a direcção da velocidade.

Considerando o movimento curvilineo e variado, designemos por A a posição inicial do movel na trajectoria, e por $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, $A^{(3)}$, ... os pontos d'esta linha por onde elle passa successivamente no fim dos tempos θ, 2θ, 3θ, ... sendo θ qualquer. Representemos por $c^{(i)}$, sendo i um inteiro qualquer, a corda comprehendida entre os pontos $A^{(i)}$, $A^{(i+1)}$; e ponhamos $\frac{c^{(i)}}{\theta} = u^{(i)}$.

Imagine-se que no instante em que o movel, que designaremos por m, parte de A, outro movel, que denotarêmos por m', parte d'essa mesma posição para percorrer successivamente os lados c, $c^{(1)}$, $c^{(2)}$, ... do polygono inscripto naquella trajectoria[1], sendo $u^{(i)}$ a velocidade constante com que m' percorre $c^{(i)}$.

É manifesto que os dois moveis se encontrarão, um com o outro, nas posições A, $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, ...; e, por tanto, suppondo que estes pontos se aproximam indefinidamente entre si, ou, o que vale o mesmo, suppondo que θ tende para zero, será facil concluir que o movimento curvilineo póde considerar-se como limite do polygonal.

Ora, se neste movimento, ao chegar m' ao vertice $A^{(i+1)}$, não actuasse sobre elle força alguma de impulsão, mover-se-ia na direcção de $c^{(i)}$ com a velocidade $u^{(i)} = \frac{c^{(i)}}{\theta}$; passando pois ao limite, concluiremos que, se a partir d'um dado instante a força cessasse de actuar, o ponto se moveria sobre a tangente á trajectoria, tirada pela sua posição nesse instante, com uma velocidade que se pode designar[2] por $\frac{ds}{dt}$.

III. — Do movimento produzido por forças constantes.

17. *Uma força constante em grandeza e direcção, sendo appli-*

---

[1] Pode realisar-se este movimento, fazendo actuar sobre o movel, nos differentes vertices do polygono, forças de impulsão convenientemente escolhidas. (Veja-se o n.º precedente).

[2] Vê-se pois que, em qualquer movimento curvilineo e variado, o elemento a que em n.º 1 demos a denominação de velocidade, representa, em grandeza e direcção, a velocidade do movimento uniforme e rectilineo, em que aquelle movimento se transformaria, se no instante considerado a força cessasse de actuar sobre o movel. (Veja-se a mechanica de Sturm, t. 1.º, pag. 110, e a de Freycinet, t. 1.º, pag. 43).

cada a um ponto material em repouso, produz nelle um movimento uniformemente accelerado.

Evidentemente a trajectoria é neste caso uma linha recta, cuja direcção coincide com a da força; e nós supporemos que a posição inicial do movel é a origem dos espaços.

Considere-se o tempo dividido em intervallos eguaes, o primeiro dos quaes designaremos por θ_1, o segundo por $\theta_2, \ldots$; e por em quanto supponhamos, que a força, em vez de obrar continuamente, somente actua sobre o movel no começo de cada um d'esses intervallos.

Em resultado da acção da força no começo de θ_1, o movel adquirirá uma velocidade v_1 que se conservará constante durante esse intervallo. Depois, por effeito da acção instantanea da força no principio de θ_2, o ponto adquirirá (15) a velocidade $v_2 = 2v_1$, que ficará constante durante esse espaço de tempo. E do mesmo modo se verá que a velocidade nos intervallos $\theta_3, \theta_4, \ldots$ é respectivamente $v_3 = 3v_1$, $v_4 = 4v_1, \ldots$

Por tanto, sendo n e i dois inteiros quaesquer, teremos

$$v_n : v_i :: n : i,$$

e logo

(1) $$v_n : v_i :: n\theta_1 : i\theta_1$$

ou

(2) $$v_n : v_i :: t_n : t_i$$

pondo $n\theta_1 = t_n$, $i\theta_1 = t_i$.

E como a proporção (1) ou a sua equivalente (2) tem sempre logar, qualquer que seja a grandeza de θ_1, que supporemos indefinidamente decrescente, segue-se que ainda subsistirá no limite. Assim, por effeito da acção continua da força constante, as velocidades serão respectivamente proporcionaes aos tempos.

Chamando pois b a velocidade do movel no fim da unidade de tempo, será $v = bt$ a sua velocidade no fim de tempo t. O movimento é pois uniformemente accelerado.

18. *Se principiarem a actuar simultaneamente sobre um ponto material em repouso duas forças, constantes em grandeza e direcção, e taes que, se actuassem separadamente, lhe communicariam, uma a acceleração* a *e outra a acceleração* b; *o ponto mover-se-á com uma acceleração constante, representada, em grandeza e direcção, pela resultante de* a *e* b.

Demonstra-se esta proposição pelas mesmas considerações usadas em o n.º 15, substituindo ahi o termo *velocidade* pelo de *acceleração* e tendo em vista a doutrina do n.º 12.

Resulta d'este theorema que *as forças constantes são directamente proporcionaes ás accelerações que ellas communicam a um mesmo ponto em repouso.*

19. *Se, a partir d'um dado momento, actuar sobre um ponto animado d'uma velocidade* a, *constante em grandeza e direcção, uma força tambem constante; o ponto mover-se-á com uma acceleração que, em grandeza e direcção, é a mesma que a força communicaria a esse ponto, se lhe fosse applicada estando elle em repouso.*

Consideraremos aqui os mesmos systemas d'eixos já empregados em o n.º 15, suppondo porém que se toma para eixo dos x a recta sobre que o ponto se move por effeito da velocidade a, e para eixo dos y a recta sobre que elle se moveria se, estando em repouso na origem, lhe fosse applicada a força. E finalmente suppõe-se que o systema dos x' y' se move com a velocidade constante a.

Posto isto, attendendo ao principio de Galileu e tendo em vista a regra dada em o n.º 12 para a composição das accelerações, concluiremos a proposição enunciada.

IV. — Do movimento produzido por forças continuamente variaveis.

20. *Se um ponto material em repouso for actuado por uma força de direcção constante, mas cuja grandeza seja continuamente variavel; em qualquer instante a acceleração no movimento resultante será a mesma que teria logar, se, a partir d'esse momento, a força se conservasse constante.*

Seja, no fim do tempo t, P a intensidade da força e v a velocidade do movel; e designemos por $P + \Delta P$, $v + \Delta v$ os valores d'essas grandezas no fim do tempo $t + \Delta t$.

Designando por Dv o augmento de velocidade que a força P, considerada constante, produziria durante o tempo Δt, é claro que será

$$(3) \qquad \Delta v = Dv + \delta v,$$

representando δv uma grandeza evidentemente menor, que a velocidade que seria produzida por a força ΔP, considerada constante e obrando[1] durante Δt.

Dividindo pois por Δt ambos os membros de (3), e depois tomando os limites, acharemos[2]

$$\lim. \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim. \frac{Dv}{\Delta t};$$

[1] Suppõe-se Δt assás pequeno para que durante elle a força seja constantemente crescente ou decrescente.

[2] Representando por $\delta_1 v$ o augmento de velocidade que a força ΔP, considerada constante, produziria no tempo Δt, teremos $\frac{\delta_1 v}{Dv} = \frac{\Delta P}{P}$; d'onde resulta, tomando os limites e attendendo a que é $\lim. \frac{\Delta P}{P} = 0, \lim. \frac{\delta_1 v}{Dv} = 0$. D'aqui se

o que demonstra o theorema enunciado, visto como lim. $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ representa a acceleração no movimento considerado, e lim. $\frac{D v}{\Delta t}$ é a acceleração respectiva á força[1] P considerada constante.

O theorema precedente ainda subsistirá quando o ponto material, em vez de estar primitivamante em repouso, seja animado d'uma velocidade qualquer. (Veja-se a demonstração dada em o n.º 19).

21. *Se, em um dado instante, começar a actuar sobre um ponto material animado d'uma velocidade qualquer uma força continuamente variavel em grandeza e direcção; a acceleração no movimento resultante será a mesma que teria logar, se a partir d'esse momento, a força se conservasse constante.*

Seja j a acceleração correspondente á força P considerada constante. Considere-se Δt dividido em um numero qualquer n de partes eguaes, cada uma das quaes designaremos por θ; e sejam $P + \delta_1 P, P + \delta_2 P, \ldots P + \delta_n P = P + \Delta P$ os valores que toma successivamente a força no fim de cada um d'esses intervallos de tempo. Começaremos por suppor que a força, em vez de variar continuamente, conserva durante cada um d'esses pequenos in-

---

conclue que $\delta_1 v$ é infinitamente pequeno em relação a $D v$, e como é $\delta v < \delta_1 v$, será tambem δv infinitamente pequeno em comparação de $D v$.

[1] É manifesto que á força continuamente variavel, que actua sobre o movel durante o tempo Δt, podemos substituir uma força constante P, á qual, em todos os instantes comprehendidos em Δt, virão acrescer novas forças de grandeza tal, que, em qualquer d'esses instantes, a somma d'essas forças com P represente o valor respectivo da força variavel, que realmente actua sobre o movel.

Ora resulta do que fica dito no texto, que a acceleração produzida por essas forças addicionaes é infinitamente pequena em relação á que provêm de P.

tervallos a mesma direcção e intensidade, que tinha no principio d'elle[1].

Posto isto, consideraremos agora o theorema enunciado primeiramente na parte que se refere á grandeza da acceleração, e depois na que diz respeito á direcção d'esse elemento.

a) Designando por j a acceleração respectiva á força P, considerada constante, e por $\delta_1 j$, $\delta_2 j$, ... as correspondentes ás forças δ_1 P, δ_2 P, ..., é claro que, para valores determinados de n e Δt, a differença entre j e a acceleração respectiva ao tempo $t + \Delta t$, obterá o valor maximo quando todas as rectas designadas por $\delta_1 j$, $\delta_2 j$,... forem tiradas na mesma direcção e sentido de j. Tendo isto logar, para um valor determinado de Δt, qualquer que seja o numero n, que suppomos indefinidamente crescente, segue-se que ainda subsistirá no limite; o que significa que, no movimento continuamente variado, a differença entre a acceleração respectiva ao tempo t e a correspondente a $t + \Delta t$ é menor do que seria se a força, variando continuamente de grandeza durante Δt, conservasse a mesma direcção que tinha no fim do tempo t.

Ora neste ultimo caso já sabemos pela nota (1) da pagina precedente que essa differença das accelerações tende para zero com Δt.

b) Pelo que respeita á direcção, sabe-se que, propostas duas rectas a e b, partindo b de uma das extremidades de a; pretendendo dispol-as de modo, que o angulo β, formado por a com a linha c que fecha o triangulo, seja o maior possivel, deve o angulo B ser determinado pela relação sen. $B = \frac{a}{b}$, da qual tambem

[1] O movimento hypothetico assim concebido aproximar-se-á do que realmente tem logar, tanto mais, quanto menor for o intervallo designado por θ; de modo que a todos os respeitos, ou se considerem os movimentos ou as forças que os produzem, poderá o movimento real ser considerado como limite do hypothetico que estamos examinando.

se deduz que, para um valor determinado de a, será B tanto maior, quanto maior for b.

Applicando pois estas considerações ao nosso caso hypothetico, facilmente se comprehende que a disposição das linhas $\delta_1 j$, $\delta_2 j$,... mais conveniente para fazer avultar o angulo θ, formado por j com a acceleração correspondente ao tempo $t+\Delta t$, é a d'aquelles elementos em linha recta e de modo, que seja[1]

$$\text{sen.}\,\theta = \frac{\delta_1 j + \delta_2 j + \ldots}{j}.$$

Isto pois ainda subsistirá no limite; e como pela nota (1) do numero precedente sabemos que lim. $(\delta_1 j + \delta_2 j + \ldots)$ é infinitamente pequeno relativamente a j, concluiremos que é

$$\text{lim.}\,\frac{(\delta_1 j + \delta_2 j + \ldots)}{j} = 0$$

e, por tanto, verdadeiro o theorema enunciado.

V. — Equações geraes do movimento d'um ponto.

22. Como, em virtude dos theoremas dos n.^{os} 18 e 20, as forças contínuas, constantes ou variaveis, são directamente proporcionaes ás accelerações que ellas communicam a um *mesmo* ponto material, segue-se que, para poder determinar a acceleração produzida num ponto por uma dada força, bastará conhecer a acceleração que a esse mesmo ponto daria outra força tambem determinada.

---

[1] Para um valor determinado de Δt, a conclusão precedente tem sempre logar, por maior que seja o numero n.

Para cada ponto material é a gravidade a força que serve de termo de comparação a todas as outras.

Sabe-se que, em cada logar da superficie da terra, essa força é constante, e que ella communica a todos os pontos materiaes a mesma acceleração, cujo valor aproximado é, na latitude de París, $g = 9^{m},80896$.

Com estes elementos, e depois do que fica dito, nada mais facil do que determinar a acceleração produzida num ponto pela applicação de uma força.

Seja P essa força e π o peso do ponto; e designemos por j e g as accelerações respectivas a P e π.

Teremos

$$\frac{P}{\pi} = \frac{j}{g}.$$

Para outra força e outro ponto material teriamos do mesmo modo

$$\frac{P'}{\pi'} = \frac{j'}{g},$$

e logo

$$\frac{P}{P'} = \frac{\pi}{\pi'} \cdot \frac{j}{j'}. \quad (4)$$

Esta equação estabelece uma relação entre as accelerações produzidas em dois pontos materiaes quaesquer e as forças que lhes são applicadas; mas, para que se possa fazer uso d'ella, é mister determinar previamente os valores correspondentes das tres quantidades P', π', j'.

Procuremos pois que peso deverá ter um ponto material para que a unidade de força, que, como se sabe da Statica, é o peso d'um kilogramma, lhe communique uma acceleração egual á unidade, isto é, egual a um metro. E essa unidade de força, a de acceleração, e esse peso assim determinado serão os termos respectivos de comparação para todas as quantidades da mesma especie que tivermos a considerar d'aqui em diante.

A equação (4) dará a solução que se procura. Bastará para isso suppor em (4)

$$P = P' = \pi = 1 \text{ kilogramma}, \qquad j = g = 9^{m},80896,$$

e depois deduzir o valor de $\frac{\pi'}{\pi}$. Acharemos assim $\pi' = 9,80896$.

Com taes unidades, e representando simplesmente por m o numero $\frac{\pi}{\pi'}$, teremos, em logar de (4), a formula

$$P = mj, \tag{5}$$

applicavel a todos os pontos e a todas as forças.

O numero m é o que em Dynamica se chama *massa* do ponto material.

23. Sejam P, X, Y, Z a força que, num dado instante, sollicíta um ponto movel, e as suas componentes no sentido de tres eixos coordenados quaesquer; j, j_x, j_y, j_z a acceleração do movel e as suas componentes no sentido d'esses eixos.

Como a direcção da acceleração j coincide com a da força P, e as accelerações e as forças se compõem e decompõem pelas mesmas regras, teremos

$$\frac{X}{P} = \frac{j_x}{j}, \qquad \frac{Y}{P} = \frac{j_y}{j}, \qquad \frac{Z}{P} = \frac{j_z}{j};$$

mas a acceleração j do movimento effectivo é egual á que a força P produziria no ponto, sendo-lhe applicada estando elle em repouso; e como para esta é $P=mj$, substituindo por P este valor nas equações precedentes, e attendendo a que é

$$j_x=\frac{d^2x}{dt^2}, \qquad j_y=\frac{d^2y}{dt^2}, \qquad j_z=\frac{d^2z}{dt^2},$$

teremos

$$(6) \qquad X=m\frac{d^2x}{dt^2}, \qquad Y=m\frac{d^2y}{dt^2}, \qquad Z=m\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Taes são as equações differenciaes, por meio das quaes poderemos determinar todas as circumstancias de movimento, sendo dadas as forças que sollicitam o movel; ou tambem resolver o problema inverso.

Para se obter a solução do primeiro d'estes problemas, será mister integrar as equações (6). Os integraes conterão seis constantes arbitrarias que se determinam por meio d'esses mesmos integraes e de suas derivadas de primeira ordem, dando a t, x, y, z, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ nessas equações os valores respectivos ao começo de movimento.

Assim determinadas as arbitrarias, essas mesmas seis equações serão bastantes para dar os valores de x, y, z, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ respectivos a qualquer valor de t.

24. Sabe-se que em qualquer posição do movel a direcção da força é a mesma que a da acceleração, e como esta existe no plano osculador, tambem a força ahi será contida.

Posto isto, designando respectivamente por T e Q a componente *tangencial* (dirigida segundo a tangente) e a *centripeta* (dirigida no sentido da normal principal) da força proposta, e attendendo ao que se disse em o n.º 5, teremos

$$T = m\frac{d^2s}{dt^2}, \qquad Q = m\frac{v^2}{\rho}.$$

Resulta d'estas equações que: 1.º Se a força que sollicíta o movel for constantemente dirigida no sentido da tangente á trajectoria, esta será rectilinea; por quanto, de $Q=0$ se deduz $\rho=\infty$: 2.º se a força for constantemente normal á trajectoria, a velocidade do movel será constante; pois que de $T=0$ resulta $\frac{d^2s}{dt^2}=0$ e logo $\frac{ds}{dt}=constante$.

VI. — Movimento d'um ponto sobre uma curva [1] ou sobre uma superficie.

25. Sejam

$$(7) \qquad f(x, y, x)=0, \qquad F(x, y, z)=0$$

as equações da curva fixa sobre que se move o ponto.

Designemos por m a massa do ponto, por P a força exterior que o sollicíta, e por X, Y, Z as suas componentes no sentido dos eixos coordenados, que supporemos rectangulares.

---

[1] Considere-se um arame ou um tubo com uma forma qualquer, e enfiada no arame uma conta, ou mettida no tubo uma esphera. Imaginando o arame ou o tubo reduzidos ao seu eixo de figura, e a mover-se nelle a conta ou a esphera, reduzidas a um ponto, faremos idêa do que deva entender-se por *movimento d'um ponto sobre uma curva*. (Delaunay, *Traité de mécanique rationnelle*).

Sabemos pelo numero precedente que, a todo o instante, o movimento será produzido por duas forças, uma tangencial expressa por $m\dfrac{d^2s}{dt^2}$ e a outra centripeta representada por $m\dfrac{v^2}{\rho}$.

Posto isto, considere-se que, a todo o instante, junctavamos á força exterior, que sollicíta o movel, mais as seguintes

$$m\frac{d^2s}{dt^2},\qquad m\frac{v^2}{\rho},\qquad -m\frac{d^2s}{dt^2},\qquad -m\frac{v^2}{\rho}.$$

Como estas forças se destroem duas a duas no mesmo ponto, é claro que a sua addição não poderá alterar o movimento, nem tão pouco modificar os esforços desinvolvidos entre o ponto e a curva.

Ora, como já se disse, o movimento é unicamente produzido pelas forças $m\dfrac{d^2s}{dt^2}$, $m\dfrac{v^2}{\rho}$; e, por tanto, a resultante das forças P, $-m\dfrac{d^2s}{dt^2}$, $-m\dfrac{v^2}{\rho}$ deverá ser, a todo o instante, normal á curva.

Sendo assim, imaginando a força P decomposta em duas, T, Q, a primeira tangencial e a segunda normal á curva, e depois exprimindo que é nulla a componente, no sentido da tangente, da resultante das forças

$$(8)\qquad -m\frac{d^2s}{dt^2},\qquad -m\frac{v^2}{\rho},\qquad Q,\qquad T,$$

teremos

$$(9)\qquad T-m\frac{d^2s}{dt^2}=0.$$

A acção do ponto sobre a curva, egual e contraria á reacção d'esta sobre o ponto, será representada pela resultante da força *centrifuga*, $-m\frac{v^2}{\rho}$, e de Q.

As equações (7) e (9) resolvem completamente o problema do movimento. Com effeito, por meio de (7) podemos eliminar de (9) duas das variaveis x, y, z, as duas primeiras por exemplo; o que transformará (9) numa equação differencial de segunda ordem entre z e t. D'essa equação deduziremos o valor de z em funcção de t, e depois as equações (7) darão as expressões de x, y.

26. A determinação do movimento d'um ponto obrigado a percorrer uma curva fixa póde tambem obter-se pela theoria do movimento d'um ponto livre. Bastará para isso junctar á força exterior que sollicíta o movel uma força egual á reacção que a curva exerce sobre esse ponto.

D'este modo, designando por X, Y, Z as componentes da força exterior, por N a força desinvolvida pela superficie, e por n, p, q os cosenos dos angulos que a direcção d'esta força forma com os eixos coordenados, teremos

$$(10) \qquad \frac{d^2x}{dt^2}=X+Np, \quad \frac{d^2y}{dt^2}=Y+Np, \quad \frac{d^2z}{dt^2}=Z+Nq.$$

A estas relações devemos ainda acrescentar as seguintes

$$(11) \qquad n\,dx+p\,dy+q\,dz=0, \qquad n^2+p^2+q^2=1,$$

a primeira das quaes exprime (n.º 25) que a direcção de N é normal á curva, e a ultima é a relação conhecida a que devem satisfazer os cosenos dos angulos formados por qualquer recta com os eixos coordenados rectangulares.

Teremos assim cinco equações que, junctas com as da curva, bastarão para determinar x, y, z, N, n, p, q em funcção de t.

Uma força egual e contraria a N dará a pressão exercida pelo ponto sobre a curva.

27. Supponhamos agora que o ponto era obrigado a permanecer sobre uma superficie

$$f(x, y, z) = 0. \tag{12}$$

Raciocinando neste caso como o fizemos em o n.º 25, e usando da mesma notação, se verá que a resultante de (8) deve ser normal á superficie (12).

Neste caso teremos pois ainda a equação (9); e a pressão normal exercida pelo ponto sobre a superficie será a resultante de Q e de $-m\dfrac{v^2}{\rho}$.

Uma força egual e contraria a essa resultante dará a acção da superficie sobre o ponto movel.

Posto isto, designando agora n, p, q os angulos que a normal á superficie, tirada num sentido determinado, forma com os eixos coordenados, teremos ainda neste caso as equações (10).

Estas equações e (12) são bastantes para determinar x, y, z, N em funcção de t.

VII. — Principio[1] das areas.

28. Das equações (6) facilmente se deduz

$$m\left(y\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2y}{dt^2}\right)=yZ-zY,$$

$$m\left(z\frac{d^2x}{dt^2}-x\frac{d^2z}{dt^2}\right)=zX-xZ,$$

$$m\left(x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}\right)=xY-yX.$$

Supponhamos

$$xY=yX,\quad zX=xZ,\quad yZ=zY,$$

ou, o que vale o mesmo,

$$\frac{x}{X}=\frac{y}{Y}=\frac{z}{Z}; \tag{13}$$

[1] «A formula geral...., que dá todas as condições do movimento de um ponto material, está comprehendida noutra analoga, a qual, como adiante veremos, é a formula mais geral da Dynamica, e resolve analyticamente todas as questões do movimento de um systema de corpos.

Antes da descoberta d'esta ultima formula, apenas se resolviam alguns dos problemas de Dynamica por meio de theoremas especiaes, aos quaes por isso se dava o nome de *principios*». (*Elementos de mechanica racional* pelo sr. Castro Freire).

teremos

$$(14)\quad y\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2y}{dt^2}=0,\quad z\frac{d^2x}{dt^2}-x\frac{d^2z}{dt^2}=0,\quad x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}=0,$$

donde se tira

$$(15)\quad y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}=c,\quad z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}=c',\quad x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}=c'',$$

designando c, c', c'' tres constantes arbitrarias.

Procuremos a significação d'estas equações, começando pela primeira.

Designando por r a projecção, sobre o plano dos $y\,z$, do raio vector tirado da origem das coordenadas para a posição do movel, e por θ o angulo que r forma com o eixo dos y, teremos, suppondo os eixos rectangulares,

$$y=r\cos\theta,\quad z=r\,\mathrm{sen}\,\theta,$$

e logo

$$y\,dz-z\,dy=r^2\,d\theta.$$

Ora $r^2\,d\theta$ representa o dobro da area elementar descripta por r durante dt; por tanto, designando essa area por $d\lambda$, teremos, em logar da primeira de (15),

$$d\lambda=\frac{1}{2}c\,dt,$$

donde resulta

$$(16)\qquad \lambda=\frac{1}{2}c\,t,$$

sem nova constante arbitraria, por suppormos que a area λ principia a contar-se da posição de r correspondente a $t=0$.

Do mesmo modo achariamos

$$(17) \qquad \lambda' = \frac{1}{2}c't, \quad \lambda'' = \frac{1}{2}c''t,$$

sendo λ' e λ'' as areas descriptas pelas projecções do raio vector sobre os planos dos xz e dos xy.

Por tanto, *se a direcção da força que sollicíta o movel passar constantemente pela origem das coordenadas*[1], *as areas descriptas pelas projecções do raio vector* (tirado d'esse ponto para o movel) *sobre os planos coordenados crescerão proporcionalmente ao tempo.*

A reciproca é tambem verdadeira.

Com effeito, de (16) e (17) resultam, por duas derivações successivas, as equações (14); e d'estas e das tres primeiras equações da pag. 48 resulta (13).

Nestas duas proposições se encerra o principio das areas.

Multiplicando a primeira das equações (15) por x, a segunda por y, e a terceira por z, e depois sommando-as ordenadamente, resulta

$$(18) \qquad cx + c'y + c''z = 0;$$

o que mostra, que a trajectoria existe num plano que passa pela origem das coordenadas, como aliás se podia prever.

Sendo assim, é manifesto que as areas descriptas sobre os planos coordenados pelas respectivas projecções do raio vector representam as projecções sobre esses planos da area que o raio vector descreve no espaço.

Esta area será pois representada por

$$\frac{1}{2}ct\sqrt{c^2 + c'^2 + c''^2};$$

[1] As equações (13) significam que a direcção da força passa pela origem das coordenadas.

e as areas descriptas pela projecção do raio vector sobre quaesquer outros planos crescerão proporcionalmente ao tempo.

Temos visto, que o principio das areas subsiste sempre que a direcção da força que sollicíta o movel passa por um ponto fixo, caso em que poderemos suppor que a força provêm da acção d'esse ponto.

Posto isto, supponhamos agora que havia dois centros d'acção, e, para maior simplicidade, tomemos um d'esses pontos para origem das coordenadas, e para eixo dos z a recta que passa por esse e pelo outro centro. A todo o instante, a força que sollicíta o movel existirá no plano que passa por elle e pelo eixo dos z, e encontrará este eixo num ponto variavel, cuja coordenada designaremos por z_1.

Em logar das equações (13) teremos pois neste caso

$$\frac{x}{X}=\frac{y}{Y}=\frac{z-z_1}{Z},$$

donde se deduz, sem maior difficuldade, que o principio da proporcionalidade das areas apenas terá logar para as que são descriptas pela projecção do raio vector sobre planos perpendiculares á linha que une os dois centros d'acção.

Egual conclusão se tiraria no caso de haver tres ou mais centros d'acção dispostos em linha recta.

29. As equações (15) equivalem a

$$m\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)=C,\quad m\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)=C',\quad m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=C'',$$

onde C, C′, C″ designam tres constantes arbitrarias.

Ora, considerando, em qualquer momento, a força instantanea capaz de communicar ao movel em repouso a velocidade que elle

*

tem, e attendendo a que, como se deprehende da doutrina dos n.^{os} 15 e 22, as forças instantaneas se podem avaliar pela quantidade de movimento (producto da massa do movel pela velocidade) que ellas communicam a um ponto qualquer em repouso: reconhece-se que as equações precedentes ou as suas equivalentes (15) tambem significam *que são constantes em relação aos eixos coordenados os momentos d'essa força instantanea.*

D'aqui se póde concluir que o momento resultante d'esses tres é tambem constante em grandeza e direcção. E ver-se-ha, sem difficuldade, que o plano d'esse momento é parallelo ao que representa a equação (18).

VIII. — Principio das forças vivas.

30. Visto que, pondo $N=0$ em (10), resultam as equações (6), segue-se que aquellas equações são egualmente proprias para determinar, tanto o movimento d'um ponto livre, como o de um ponto obrigado a mover-se sobre uma superficie ou sobre uma curva.

Posto isto, multiplicando ordenadamente a primeira de (10) por $\frac{dx}{dt}dt=dx$, a segunda por $\frac{dy}{dt}dt=dy$, e a terceira por $\frac{dz}{dt}dt=dz$, sommando depois as equações resultantes, e attendendo a que é $v^2=\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}$, teremos

$$d.mv^2=2(X\,dx+Y\,dy+Z\,dz)+2N(n\,dx+p\,dy+q\,dz),$$

ou, mais simplesmente,

$$(19)\qquad d.mv^2=2(X\,dx+Y\,dy+Z\,dz),$$

visto como, sendo livre o movel, é $N=0$, e no caso de o ponto ser obrigado a mover-se sobre uma curva ou sobre uma superficie[1] é $n\,dx + p\,dy + q\,dz = 0$.

A fim de poder traduzir commodamente em linguagem a equação (19) e ainda outras em que figuram elementos semelhantes, convencionou-se chamar *força viva* d'um ponto material em movimento ao producto da massa d'esse ponto pelo quadrado da sua velocidade, e *trabalho elementar* d'uma força applicada a um ponto em movimento ao producto da força pela projecção sobre ella do espaço elementar ds percorrido pelo seu ponto de applicação[2].

Com taes denominações póde pois dizer-se que a equação (19) exprime que o *augmento infinitesimo da força viva é egual ao dobro do trabalho elementar da força exterior applicada ao movel.*

Considerando agora duas posições taes do movel, que o arco ou espaço que as separa seja finito; como a equação (19) é applicavel a cada um dos elementos ds d'esse espaço, acharemos, procedendo ordenadamente á somma das equações (19) respectivas a todos esses elementos,

$$(20) \qquad mv^2 - mv_0^2 = 2\,\Sigma\,(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz),$$

designando respectivamente por v_0 e v a velocidade do movel na

---

[1] $n\dfrac{dx}{ds} + p\dfrac{dy}{ds} + q\dfrac{dz}{ds}$ representa o coseno do angulo formado por N e ds.

[2] Designando por P a força, será

$$P\,ds\cos(P,\,ds) = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$$

o trabalho elementar.

A expressão $P\,ds\cos(P,\,ds)$ do trabalho mostra que esse elemento póde tambem ser definido como sendo o producto do espaço elementar ds pela projecção da força sobre elle.

E d'esta definição immediatamente se deduz que o trabalho elementar da resultante é egual á somma dos trabalhos elementares das componentes.

origem e no extremo do espaço finito, e devendo o sommatorio applicar-se a todos os elementos d'esse espaço.

Esta equação exprime que *o augmento da força viva é egual ao dobro do trabalho total da força.*

31. No caso de ser $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ a differencial exacta d'uma funcção de x, y, z, poderá effeituar-se a integração indicada no segundo membro de (20); e então acharemos[1], denotando por φ essa funcção,

$$mv^2 - mv_0^2 = 2\,\varphi(x, y, z) - 2\,\varphi(x_0, y_0, z_0). \tag{21}$$

Posto isto, designemos por $x_1\ y_1\ z_1$ as coordenadas do movel respectivas a uma das suas posições. Substituindo essas coordenadas em $\varphi(x, y, z)$, esta funcção tomará um valor determinado, que em geral será *unico*[2], e ao qual designaremos aqui por C. Restituindo agora a x, y, z a sua variabilidade, a equação $\varphi(x, y, z) = C$ representará uma superficie á qual, bem como a todas as que esta equação póde representar dando a C differentes valores, se dá o nome de *superficies de nivel*, pelas razões que vamos expor.

A equação differencial que comprehende todas essas superficies, é

$$X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z = 0, \tag{22}$$

---

[1] Alguns auctores denominam *principio das forças vivas* o theorema contido na equação (20); nós porém, com Timmermans, reservaremos essa denominação para quando o segundo membro d'essa equação for integravel, caso em que (20) se transforma em (21).

[2] Veja-se uma Memoria de M. Bertrand, inserta no 28.º caderno do *Jornal da Escola Polytechnica de França*, ou, na sua falta, um pequeno excerpto d'essa Memoria, publicado no vol. XXII, n.º 12, do *Instituto*, com o titulo de *Theoria mechanica das condições d'integrabilidade das equações differenciaes entre duas e tres variaveis: e sua applicação ao principio das forças vivas.*

onde representamos por δx, δy, δz as differenças das coordenadas de dois pontos infinitamente proximos, ambos situados sobre uma d'essas superficies, as quaes differem das que temos denotado por dx, dy, dz, que designam as mudanças infinitesimas das coordenadas do movel provenientes da sua passagem d'um para outro ponto da trajectoria.

Ora a equação (22) exprime que a força, cujas componentes são X, Y, Z, é normal a cada uma d'essas superficies em qualquer dos seus pontos; e sabe-se, pela theoria da attracção, que ás superficies que gozam d'essa propriedade se dá o nome de superficies de nivel.

Se a trajectoria fosse uma curva plana, tomando o plano d'ella para um dos coordenados, bastariam duas das equações (6) para determinar todas as circumstancias do movimento. Nesse caso o segundo membro de (19) só conteria duas variaveis, e em vez de superficies bastaria considerar *curvas de nivel.*

Podemos agora terminar o que tinhamos para dizer ácerca do principio das forças vivas.

Depois do que fica exposto, é facil ver que a equação (21) exprime que é constante o *augmento* da força viva, proveniente da passagem do movel d'uma superficie para outra; quer dizer, se dois moveis partirem d'uma d'essas superficies, embora com velocidades differentes e seguindo trajectorias diversas, ao chegarem a outra superficie, ambos elles terão *ganho* a mesma força viva, e se, pelo decurso do movimento, algum d'esses moveis voltar a uma superficie por onde já tinha passado, terá no momento do regresso a mesma força viva que possuia quando ahi passou.

32. Attenta a importancia da equação (21), será conveniente indagar em que casos é $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ a differencial d'uma funcção de x, y, z.

Tem isso logar, sempre que a força que sollicíta o movel provem da acção que outros pontos fixos — *centros d'acção* — exercem sobre elle, dependendo a intensidade d'essa acção tão sómente da distancia do centro respectivo ao ponto movel.

Com effeito, designando por a, b, c as coordenadas d'um d'esses centros d'acção, por f a sua distancia ao movel, e por F a funcção de f, que representa a intensidade da força proveniente d'esse centro, teremos, conforme a força fôr attractiva ou repulsiva,

$$X = \pm F\frac{a-x}{f}, \qquad Y = \pm F\frac{b-y}{f}, \qquad Z = \pm F\frac{c-z}{f},$$

e logo

$$Xdx + Ydy + Zdz = \pm F\frac{(a-x)dx + (b-y)dy + (c-z)dz}{f},$$

ou

$$Xdx + Ydy + Zdz = \mp F df,$$

visto ser

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = f^2.$$

Ora Fdf é differencial exacta d'uma funcção de f e, por tanto, d'uma funcção de x, y, z.

O que dissemos da força F póde egualmente repetir-se ácerca de cada uma das forças, F', F'',... provenientes dos outros centros d'acção; e como o trabalho (elementar ou total) da resultante de quaesquer forças applicadas a um ponto é egual á somma algebrica dos trabalhos respectivos das componentes (pag. 53, nota 2) poderemos concluir que é

$$d.mv^2 = \mp 2Fdf \mp 2F'df' \mp \ldots$$

e verdadeira a proposição enunciada[1].

---

[1] D'esta ultima equação póde tambem inferir-se que, por effeito de qual-

Sem que o principio das forças vivas deixe de ter logar, póde tambem o movel ser actuado por uma força dirigida perpendicularmente a um plano fixo e cuja intensidade seja uma funcção qualquer da distancia do movel ao plano.

Com effeito, designando por F_1 essa força e por f_1 a distancia do movel ao plano, será $F_1 \, df_1$ o trabalho elementar de F_1. Ora $F_1 \, df_1$ é differencial exacta de uma funcção de f_1 e, por tanto, de uma funcção de x, y, z.

33. No caso de ser constantemente nullo o trabalho elementar da força exterior que sollicíta o movel, o que sómente poderá dar-se num de dois casos — quando não existir força exterior, ou quando a sua direcção for normal á trajectoria —, deduz-se de (19) que será constante a força viva do movel.

Nisto se resume o chamado principio *da conservação das forças vivas*.

Dá-se, por exemplo, este caso quando um ponto é posto em movimento sobre uma curva ou sobre uma superficie sem que depois actue sobre elle força alguma exterior. Assim, em taes circumstancias, o movel conservará a sua velocidade inicial[1].

Cumpre porém notar que na *realidade* o movimento d'um ponto sobre uma curva ou sobre uma superficie dá sempre logar ao desenvolvimento d'uma força *d'attrito*, a qual obra *tangencialmente* á trajectoria e em sentido contrario do movimento. O tra-

---

quer força F, resultará para o movel um augmento de força viva, quando, sendo attractiva a força, a distancia f diminuir, e uma diminuição quando essa distancia augmentar; e que o inverso terá logar quando a força fôr repulsiva.

[1] Isto mesmo já tinha sido demonstrado em o n.º 24, visto como a força proveniente da curva ou da superficie sobre que o ponto se move é normal á trajectoria. E o mesmo resulta da equação (9), e póde tambem ser demonstrado directamente no caso do movimento ter logar sobre uma curva fixa. (Veja-se a *Mechanica* de Francoeur ou a de Boucharlat).

balho elementar d'essa força será pois constantemente negativo: e, por tanto, attendendo á equação (19), será facil ver que, por effeito d'essa força, a velocidade do movel diminuirá constantemente, e que, em consequencia, se tornará nulla depois d'algum tempo; o que a experiencia confirma.

IX. — Principio da minima acção[1].

34. Este principio tem logar nas mesmas circumstancias em que se verifica o principio das forças vivas, sendo que na demonstração do primeiro se faz uso do segundo.

Digamos em que consiste o theorema.

Supponde que se tracta do movimento d'um ponto livre ou d'um ponto obrigado a permanecer sobre uma superficie, considere-se a parte da trajectoria comprehendida entre dois pontos determinados d'ella, que todavia podem ser quaesquer. Fixando esses dois pontos, imagine-se que se distendia *continuamente* o arco ou parte da trajectoria comprehendida entre elles, e que nós suppomos extensivel e contractil, assentando sempre esse arco sobre a superficie no caso de se considerar o movimento d'um ponto obrigado a permanecer sobre ella.

Supponde que se havia calculado para o movimento sobre a trajectoria primitiva o valor de $\int mv\,ds$, sendo este um integral definido em que os limites se referem aos dois pontos fixos já designados, é sabido que, pretendendo-se passar do valor d'esse integral para o respectivo ao movimento sobre a trajectoria correspondente a uma das posições variadas da primitiva[2], conside-

[1] Na sua denominação conserva ainda hoje este principio claros vestigios das noções metaphysicas que outr'ora lhe andavam ligadas.

[2] No caso de que tractamos as forças X, Y, Z são funcções determinadas de x, y, z. (Veja-se o começo d'este n.º e o que dissemos em o n.º 32).

rada como uma curva material que o movel é obrigado a percorrer, é sabido, diziamos nós, que o valor do novo integral é dado por uma serie ou somma em que a primeira parcella é representada pelo valor já calculado do integral definido respectivo á trajectoria primitiva, e o segundo é expresso pela *variação* d'esse mesmo integral.

Posto isto, o theorema de que tractâmos consiste em que *é nulla a variação do integral definido, respectivo ao movimento sobre a trajectoria primitiva.*

Antes de entrarmos na demonstração do theorema, cumpre advertir que o principio das forças vivas, que por hypothese tem logar no movimento primitivo, ha de egualmente verificar-se no movimento sobre a trajectoria depois de variada e considerada como uma curva rigida que o movel é obrigado a percorrer.

Em todos os movimentos assim considerados a velocidade do movel será pois dada (n.º 31) pela relação

$$(23) \qquad m v^2 = 2k + 2\varphi(x, y, z)$$

sendo φ uma funcção determinada, e designando $2k$ uma constante dependente das circumstancias iniciaes (respectivas ao primeiro ponto fixo considerado), a qual póde ser constante para as differentes trajectorias ou variar continuamente d'uma para outra.

Com quanto o principio da minima acção sómente tenha logar na hypothese de k ser constante para as differentes trajectorias, nós, para melhor patentearmos essa restricção do theorema, começaremos por suppor k variavel.

35. Passando agora a demonstrar o theorema, supporemos a massa do movel representada pela unidade, o que, sem prejudicar a generalidade da demonstração, torna esta mais simples.

Temos

$$(24) \qquad \delta \int v\,ds = \int \delta(v\,ds) = \int v\,\delta ds + \int ds\,\delta v.$$

De

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

resulta

$$ds\,\delta ds = dx\,\delta dx + dy\,\delta dy + dz\,\delta dz;$$

e d'esta

$$(25) \qquad v\,\delta ds = \frac{dx}{dt}d\delta x + \frac{dy}{dt}d\delta y + \frac{dz}{dt}d\delta z.$$

Demais, é

$$ds\,\delta v = dt\,v\,\delta v = \frac{1}{2}dt\,\delta.v^2;$$

e, como de (23) resulta

$$\delta.v^2 = 2\delta k + 2(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z);$$

será

$$ds\,\delta v = dt\,\delta k + dt(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z).$$

Agora, substituindo nesta equação, em logar de X, Y, Z, as suas expressões deduzidas de (10), acharemos [1]

$$ds\,\delta v = dt\,\delta k + \left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right)dt$$

$$-N(n\delta x + p\delta y + q\delta z)\,dt,$$

---

[1] Como já tivemos occasião de dizer, as equações (10) são egualmente applicaveis tanto ao movimento d'um ponto livre como ao d'um ponto obrigado a mover-se sobre uma superficie.

ou, mais simplesmente,

$$(26)\qquad ds\,\delta v = dt\,\delta k + \left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right)dt,$$

visto como, sendo livre o ponto, é $N=0$, e, no caso de ser obrigado a mover-se sobre uma superficie[1], é $n\delta x + p\delta y + q\delta z = 0$.

Finalmente, de (24), (25) e (26) resulta

$$\delta\int v\,ds = \theta\,\delta k + \int d\left(\frac{dx}{dt}\delta x + \frac{dy}{dt}\delta y + \frac{dz}{dt}\delta z\right),$$

onde representamos por θ o valor do integral definido $\int dt$.

Effectuando a integração indicada no segundo membro d'esta equação, e attendendo a que, por serem fixos os dois pontos a que se referem os limites do integral, é, para cada um d'elles, $\delta x = \delta y = \delta z = 0$, acharemos

$$\delta\int v\,ds = \theta\,\delta k,$$

e, suppondo $\delta k = 0$,

$$\delta\int v\,ds = 0.$$

36. Os tres principios, de que ultimamente nos temos occupado, exprimem propriedades muito interessantes do movimento d'um ponto; mas, sob o ponto de vista *analytico*, nem todos elles têm a mesma importancia.

O principio das areas fornece tres integraes de primeira ordem

1 Veja-se a nota (1) da pag. 53.

das equações differenciaes do movimento [1], expressos pelas equações (15).

O das forças vivas dá um integral de primeira ordem, representado pela equação (21).

Finalmente o principio da minima acção não dá integral algum; e apenas poderia servir para se obterem as equações differenciaes do movimento, se por ventura essas equações não estivessem já deduzidas [2].

[1] Como é sabido, as equações differenciaes do movimento admittem seis integraes distinctos de primeira ordem.

Á primeira vista poderá parecer que o principio das areas fornece tambem os tres integraes finitos d'essas equações, sendo esses integraes representados pelas equações (16) e (17). Cumpre porém notar que, sendo desconhecida a expressão das grandezas ahi representadas por λ, λ', λ'', estas equações, com quanto exprimam propriedades dos integraes, não dão a sua formula ou composição analytica.

[2] Veja-se a *Mechanica* de Duhamel, tomo 1.º, pag. 463 e seguintes.

INDICE

PRIMEIRA PARTE

Do movimento considerado independentemente das forças que o produzem.

SEGUNDA PARTE

Do movimento produzido por quaesquer forças applicadas a um ponto material.

☞ A pagina 38, linhas 13 e 14, em logar de «Seja j a acceleração correspondente á força P considerada constante» deve ler-se «No fim do tempo t seja P a intensidade da força que sollicita o movel».

INDICE

PRIMEIRA PARTE

Do movimento considerado independentemente das forças que o produzem.

SEGUNDA PARTE

Do movimento produzido por quaesquer forças applicadas a um ponto material.

☞ A pagina 38, linhas 13 e 14, em logar de «Seja j a acceleração correspondente á força P considerada constante» deve ler-se «No fim do tempo t seja P a intensidade da força que sollicita o movel».