MANUEL JOSÉ DE CARVALHO

ASPECTOS DA MATEMÁTICA NOS ÁRABES

COIMBRA — 61

Com os melhores cumprimentos
do

Manuel José Montezuma de Carvalho

COIMBRA

Separata dos números 22, 23 e 24 da revista C. N. A.

Ao Senhor Dr. Sílvio Pélico ofereço com a mais alta consideração este pequeno trabalho

Man. José de Carvalho

Aos drs. António de Figueiredo Barbosa

e

Artur dos Reis Torgal

ASPECTOS DA MATEMÁTICA NOS ÁRABES

Os Árabes, na realidade, são sòmente os naturais da Arábia, península situada entre o Golfo Pérsico, o Oceano Índico e o Mar Roxo. Eram de raça semita e viviam em tribos independentes. Umas eram sedentárias, outras possuíam uma vida errante e, por isso, os seus componentes dominavam-se de «beduínos». E dentre os Árabes de tais tribos existiam uns que, julgando-se descendentes de Ismael, se chamavam de ismaelitas ou agarenos.

Cada tribo tinha os seus ídolos mas, todas se uniam para adorar o deus de Abraão. Daí, ser o Árabe, no primordial da sua existência, inculto e ignorante. Vivia de tradições religiosas e na crença messiânica dos costumes.

Quando surgiu Maomet (569-623) para estabelecer o Islamismo — «resignação da vontade de Deus» — iniciou-se para os Árabes uma nova existência. Compreendendo a necessidade de proclamar a «guerra santa» para impor a sua religião, converteu os pacíficos pastores e comerciantes num Povo de conquistadores sab a autonomia dos califas, seus sucessores. Estenderam-se as conquistas, primeiramente, da Arábia à Síria, da Palestina à Mesoptâmia e ao Egipto. Para os territórios conquistados nomeia-se um emir. Após o incidente entre o emir Moavia e o califa Ali do qual resultou a formação do califato de Omeya, seguiram-se novas conquistas: Alexandria, Tripoli, Argélia, Marrocos e Espanha.

Os primeiros califas não mostraram interesse especial pela cultura. Não evitaram, mesmo, a destruição da famosa Biblioteca de Alexandria. Mas, após a conquista da Espanha em 711, surge uma nova era de califas denominados «abádis» que, educados no amor à cultura, iniciam a vida cultural do Mundo Árabe.

Servem as linhas acima de introdução ao que nos propomos abordar já que dão uma explicação sumária da mudança radical efectuada no temperamento e no espírito dos Árabes que, em menos de três séculos, se tornaram filósofos, matemáticos, astrónomos, físicos, químicos e médicos. Compreende-se, assim, que um Povo ignorante se tornasse detentor, após o estabelecimento na região ocidental da Península, duma cultura superior à que havia formado o império bizantino entre os anos de 395 e 1043.

Daí os seus contributos em todos os domínios do conhecimento e o continuarem as especialidades que gregos e romanos haviam encetado.

Foi na Medicina e no campo matemático que se deu uma maior intussuscepção do génio árabe. Mas, convém dizer que as suas atenções dirigiram-se quase sempre ao comentário e à explicação. A expansão e o aperfeiçoamento da cultura eram o fim último de suas actividades.

Vejamos com certo pormenor, agora, os dados mais salientes introduzidos pelos Árabes nos vários ramos da Matemática.

I — Aritmética

Mantendo as definições da Aritmética grega acerca de igualdade e desigualdade, de maior e menor, de par e ímpar, de primo e composto, de deficiente e números amigos, pouco alteraram os conceitos gregos. A actividade criadora neste sector resume-se, apenas, à criação dum critério de divisibilidade por sete que não teve eco nos matemáticos modernos. Baseava-se o referido sistema de divisibilidade por sete no teorema de Benalbama: se num número de vários algarismos multiplicarmos o primeiro algarismo da esquerda por 3, adicionarmos ao produto o 2.º algarismo na mesma ordem e multiplicarmos, depois, por 3 a soma efectuada e assim sucessivamente até se esgotarem os algarismos, o resultado obtido e o número proposto dão um mesmo resto ao serem divididos por 7. Expliquemo-nos. Se, por exemplo, o número 5824 for divisível por 7 é por que o número $[(3 \times 5 + 8) \times 3 + 2[= 217$ está contido em 7.

Deve-se aos Árabes o conhecimento da numeração decimal construída pelo matemático indiano Aryabhata que a utilizou pela primeira vez no seu livro de Aritmética escrito no ano 500. Tal numeração distinguia-se das que haviam sido criadas pelos gregos e romanos porquanto os algarismos possuiam um valor relativo e um valor posicional. A escrita grega era constituída por um alfabeto de vinte e quatro letras, além de pontos e outros sinais. As letras com 3 episemas constituíam a numeração de 1 a 999, os pontos e os restantes sinais convencionais estendiam a numeração ao milhar. Os romanos utilizavam a conhecida numeração romana.

A partir do genial invento indiano, o astrónomo Brahumagupta expõem no seu *Brabamasphute Seddnauta* o sistema para o cálculo numérico, a que nos referiremos adiante. Dominou-o de *devanagari*.

Tabit ihu Quna ampliou a teoria dos números amigos. Al-Amuhi conheceu o carácter dos quadrados perfeitos. Estabeleceu, também, a prática das proporções, regras de três simples, composta e a do desconto, além da de falsa posição.

Pertence a Bealhana, Alkalasadi e a Al-Amuhi a explicação minuciosa da regra da falsa posição apresentando, para isso, especificações muito interessantes que hoje se resolvem fàcilmente através da Álgebra. Assim, por exemplo: qual o número que, juntado ao seu quarto e aos três quintos da soma do número com a sua quarta parte e diminuído de cinco é igual ao referido número. A resolução indicada pelos árabes faz-se à custa da fórmula

$$\frac{a \times d + e \times b}{d + h}$$

em que a e c indicam respectivamente a posição I e II, b e d a I e II desviação.

Realizam, também, as cinco espécies de operações aritméticas a partir da ideia de Brahaomasphuta.

Mahammad ihu y Al Massar descreve o modo de realização da adição e subtração. Na multiplicação dos números dígitos utilizam metade duma «tábua de Pitágoras», partida segundo a diagonal. Para multiplicar os números polidígitos idealizam vários métodos diferentes, dos quais o do quadrilátero de Al-Kalasadi e o seguido actualmente foram os mais utilizados.

A prática da divisão tornou-se sempre difícil. Todavia, utilizando a prova dos noves, sabiam aplicar as igualdades $D = d \times c + r$ e $\frac{D}{d} = c + \frac{r}{d}$ que são, na realidade, formas diversas da indicação da divisão.

Com respeito à potenciação e radicação mantêm em absoluto o conteúdo da Aritmetica grega. À primeira aproximação grega

$$\sqrt{a^2 + r} = a + \frac{2}{2a}$$

juntou Benalmana a aproximação bizantina

$$\sqrt{a^2 + r} = a + \frac{r}{2a + 1}$$

do que resultou um método rigoroso de extracção de raízes e análogo ao actual. Diferia, apenas, pela disposição que era a das colunas. Exemplifiquemos:

Raiz quadrada		3		5		8
Radicando	1	2	8	1	7	2
Quadrado do I algarismo 3		9				
Resto		3				
Produto do dobro de 3 pelo 2.º algarismo, 5	3		0			
Diferença 38—30			8			
Quadrado do 2.º algarismo, 5			2	5		
Resto de 81—25			5	6		
Produto do dobro da raiz quadrada achada seguido do 3.º algarismo por esta, ou seja. 708 × 8			5	6	6	4
Resto final						8
Dobro da raiz achada seguida do 3.º algarismo				7	0	8
Dobro do primeiro algarismo, 3, seguido do 2.º algarismo					6	5

Devem se a Al-Kalasadi as primeiras extracções de raízes segundo este método. Apresentou este matemático, também, um outro processo de extracção de raízes que foi posto de parte e esquecido porquanto, necessitando da fórmula

$$a + \frac{r}{2a} + \frac{\left(\frac{r}{2a}\right)^2}{2\left(a + \frac{r}{2a}\right)}$$

vinha complicar a resolução dum problema fàcilmente resolúvel.

Utilizam anotações muito especiais no que respeita aos números fraccionários. Se os termos são números dígitos empregam indistintamente três espécies de anotações, a última das quais é como a actual. Exemplifiquemos com o uso de cinco nonos: $\begin{matrix}5\\9\end{matrix}\quad\begin{matrix}0\\5\\9\end{matrix}\quad\frac{5}{9}$. Al-Kalasadi e Benalhauna indicam, além do tipo atrás indicado, três categorias de fracções.

E, ao definirem as características dos vários tipos esquematizados, apresentam, para cada um deles, um exemplário de fracções subordinado às condições prescritas para os referidos tipos. Vejamo-lo em correspondência com a actual escrita fraccionária para que possamos compreender o *porquê* de tal classificação.

I — *Fracções em relação* — São, na realidade, fracções continuas ascendentes. Ex. de Al Kalasadi: cinco nonos mais quatro sétimos dum nono, mais três quartos do terço dum sétimo dum nono:

Anotação Árabe	*Interpretação*	*Escrita actual equivalente*
$\frac{3\quad 1\quad 4\quad 5}{4\quad 3\quad 7\quad 9}$	$\cfrac{5+\cfrac{4+\cfrac{1+\frac{3}{4}}{3}}{7}}{9}$	$\frac{[(5\times7+4)\,3+1]\,4+3}{9\times7\times3\times4}=\frac{475}{756}$

II — *Fracções em desuniões* — São aquelas fracções que se devem somar. Ex.: quatro quintos de três sétimos dum quinto unidos a três quartos.

Interpretação Árabe	*Interpretação*	*Escrita actual equivalente*
$\frac{3\ 4}{7\ 5}\quad\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}+\cfrac{4+\frac{3}{7}}{5}$	$\frac{3\times5\times7+(4\times7+3)\times4}{4\times5\times7}=\frac{229}{140}$

III — *Fracções subdivididas* — Equivalem às actuais fracções de fracção. Ex.: a fracção

$$\frac{1}{3}\text{ de }\frac{4}{5}\text{ de }\frac{6}{7}=\frac{24}{105}$$

tem, em árabe, a anotacão $\begin{matrix} 6 & 4 & 1 \\ 7 & 5 & 3 \end{matrix}$ A classificação está, pois, em conexão directa com a complexidade da escrita.

Estudaram as progressões aritméticas e geométricas duma maneira elementar.

Nada acrescentaram à generalização da teoria das proporções de Endoxo de Cnidio — discípulo de Platão em Filosofia e de Arquitas em Geometria — que aparece nos livros V e VI de Euclides.

Calcularam a soma da série dos números naturais, dos números pares e ímpares, além da soma dos seus quadrados e dos seus cubos.

Do exposto vê-se que a Aritmética árabe era mais utilitária do que desinteressada, e o seu rigor lógico veio, pela escola de Bisâncio, dos Gregos. Os Árabes receberam como relíquia este espólio helénico. Limitaram-se a expandi-lo com aquele espírito que Maomet aconselhava.

Compreende-se. Para o Espírito árabe a Aritmética serviu de base à compreensão e ao desenvolvimento do edifício da Álgebra e da Geometria. A Aritmética foi algo de intermediário entre o *entendimento* e a parte algébrica e geométrica da Matemática, como que uma introdução à exactidão algébrica.

II — Álgebra

Nos *Elementos de Geometria* de Euclides — reunião de todas as proposições desta ciência que ao tempo se conheciam — aparece, sob a forma geométrica, a origem da Álgebra, com a resolução das equações do segundo grau. As últimas páginas dos livros de Euclides são dedicadas, de facto, aos teoremas necessários à construção geométrica das raízes da equações do segundo grau.

E, partindo da referida representação geométrica, desenvolveu Diofanto de Alexandria o estudo das equações, a tal ponto que pode ser considerado, entre os Gregos, o criador da Álgebra e da Análise indeterminada.

Estes trabalhos incluiu Diofanto no seu livro de Aritmética. É que foi desta disciplina que irradiaram os vários ramos da Matemática. Tudo o que em Filosofia, Ciência e Arte a velha Grécia nos deixou, aparece admiràvelmente unido. Deram os Gregos pensamento à ciência, ciência ao pensamento e casaram estes com a Arte.

Mas, continuemos. Foram os Árabes que iniciaram verdadeiramente a formação e a orientacão da Álgebra. Emanciparam-na da Aritmética. Formaram com ela uma nova via da Matemática.

Assim, Mahamad ihu Mùsã al-Juãrizmi indica no seu *Hisab al-Jabrwa'l Muqãbala* (1) o modo pelo qual se pode e deve transpôr e reduzir os termos semelhantes nas equações. Exemplifiquemos.

Se escrevia a equação que hoje se apresentaria por

$$5x^2 - 6x + 2 = 4x^2 + 7$$

passava-a, aplicando-lhe *al-Jabr*, à correspondente

$$5x^2 - 4x^2 = 6x + 7 - 2$$

e, pela utilização de *al-muqãbala*, traduzia-a por

$$x^2 = 6x + 5$$

Na obra referida reproduz, também, conhecimentos que havia adquerido dos índios e dos persas através da escola de Gundisapur, além da indicação da *transformação* de equações. Não há indício de que conhecesse o labor de Diofanto. Convém dizer, também, que a ele se deve indirectamente a criação da palavra *álgebra*, pois esta tem a sua origem em al-jabr.

Os árabes que sucedem a Al Jwarizmi juntam às principais operações al-jabr e al-muqabal a prévia operação de *desembaraçar denominadores.* Houve, também, matemáticos como Ahñ Zakariya al Hassan (antes de 1200), Taki al-din al-Haubati (antes de 1410) e Ibn al Haim († 1412) que para encontrarem a forma $x^2 + px = q$ efectuam a operação a que chamaram de *albatt*, ou seja, a divisão de toda a operação pelo coeficiente do termo em x^2. Assim, passavam, pela referida operação, da forma $ax^2 + bx = c$ à correspondente $x^2 + \frac{b}{a} x = \frac{c}{a}$ que vinha simplificar a resolução e a determinação dos termos da equação do segundo grau.

E, por isso, apresentam as regras a que se recorre para a resolução dos vários casos em que se pode apresentar a equação completa do segundo grau. Exprimiram-nos por palavras que hoje se podem traduzir pelas fórmulas

$$x = \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} - \frac{p}{2} \quad \text{para o caso} \quad x^2 + px = q$$

$$x = \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} + \frac{p}{2} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad x^2 = px + q$$

$$x = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad px = x^2 + q$$

---

(1) Álgebra de al-Jwãrizni foi tradazida para o latim por Gerardo de Cremona e foi editada por Roseu em texto árabe cam tradução inglesa em Londres, 1851.

Não estudaram o caso $a x^2 + b x + c = o$ nem o seu equivalente $x^2 + p x + q = o$ por terem duas raízes negativas. Era-lhes incompreensível o conceito indiano de *número negativo.*

Al-Jayyami obtem a resolução da equação $x^3 = c x^2 + b x + a$ de coeficientes positivos mediante a intercepção de duas hipérboles e, Ahu Mahmud demonstrou a impossibilidade da resolução por números inteiros da equação $x^3 + y^3 = z^3$. Ampliam nas suas exposições o simbolismo utilizado por Diofonto nos seus livros.

Pelo exposto, concluímos que os problemas apresentados pelos Árabes na Álgebra são originais e interessantíssimos. A Álgebra árabe não se limitou à pureza geométrica. Caracteriza-se, como a indiana, pela audácia.

III — Geometria e Trigonometria.

Passemos, agora, a considerar o labor dos Árabes em torno da geometria e de trigonometria.

Dedicaram-se, primeiramente, à expansão dos postulados e teoremas de geometria que ao tempo se conheciam. Traduziram, por isso, os *Elementos* de Euclides em 790 e, sucessivamente as obras de Arquímedes, Apolónio e demais geómetras gregos. São as traduções das obras de geometria grega os primeiros contactos dos Árabes com esta disciplina.

Com o estudo dos *Siddbantas* e das obras de Héran aperfeiçoaram-se os Árabes na geometria aplicada, em cálculo de superfícies e volumes e na medição de terrenos.

Depois de haverem assimilado a geometria então existente, procuram ampliar-lhe o seu conteúdo e, consequentemente, o referente à Trigonometria.

Apresentam, por isso, uma ampliação da teoria das proporcionalidades e tentam a trissecção dos ângulos.

Estudam pormenorizadamente os polígonos e demais figuras geométricas com a intenção de aplicá-los na decoração dos mosaicos que os tornaram imortais na História da Arte. Assim, Alin Bakr Muhammud Ali ibn Sulaimãn apresenta a fórmula $d^2 = \frac{1}{9}[n(n-1)+6]a^2$ para exprimir o diâmetro dos polígonos de *n* lados iguais a *a* e, Abn Kãmil Suya ihn Aslan apresenta um tratado sobre o pentágono e o decágono. Ahn-l-Wafa Muhammad al--Buzyani dá no seu *Kitab al-bandasa* conhecido por tradução persa dum dos seus discípulos um grande número de construções de Geometria plana e determinações de ângulos, de poliedros regulares, da quadratura da parábola e do volume da paraboloide. Muhammud ibn al-Lait estuda as propriedades dos triângulos e resolve o problema proposto e resolvido parcialmente por Abu Salt.

A partir dos conceitos indianos de *seno*, *coseno* e *cosecante* idealiza Ahmad ibn 'Adallah as restantes funções trigonométricas.

Ahñ Abdallah Mahammad ibn Yahir chega às fórmulas

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg} \alpha}} \quad \text{e} \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \alpha}}$$

a partir das referidas funções e o seu discípulo al Buzyami obtém a fórmula

$$\operatorname{sen}(a+b) = \frac{\operatorname{sen} a \,.\, \cos b + \operatorname{sen} b \,.\, \cos a}{R.}.$$

Yabir ibn Aflah encontrou no seu tratado de triângulos esféricos (1) a relação $\cos A = \cos a \operatorname{sen} B$ e, partindo das fórmulas de Ptolumeu chegou à importante relação $\frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} A} = \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} B} = \frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} c}$

Acabámos de inventariar as principais riquezas matemáticas do espólio opulento dos Árabes. Ele é o fundamento básico do grandiosíssimo edifício matemático levantado pelo génio arquitectural do Homem.

---

(1) Existe apenas um exemplar desta obra que se encontra na Biblioteca Nacional de Paris.

BIBLIOGRAFIA UTILIZADA

D. E. Smith — *History of Mathematics*, 2 vols., New York, 1923-25.

Euclides — *Edizione critica con traduzione latina escolli Euclidis opera omnia edidemnt*, J. L. Heiberg et M. Menge, Leipsia, 1883.

Eric Bell — *Les grands mathématiciens*, Payot, Paris, 1950.

E. T. Bell — *História de las Matematicas*, Buenos Aires, 1949.

F. Colerus — *De Pythagore à Hilbert*, Flammarion, Paris, 1947.

G. Loria — *Storia delle Matematicha*, Milão, 1950.

Gomes Teixeira — *História das Matemáticas em Portugal*, Lisboa, 1934.

Jagjit Singh — *Mathematical Ideas* — London, 1959.

S. Korner — *The Philosophy of Mathematics*, London, 1960.

Composto e impresso na
Tip. Rainha Santa
Telef. 26726 — Coimbra