Asociación Española ⁎
para el Progreso ⁎ ⁎ ⁎ ⁎
de las Ciencias ⁎ ⁎ ⁎ ⁎ ⁎ ⁎

O teorema da probabilidade composta na teoria da probabilidade dos conjuntos

PELO

DR. DIEGO PACHECO D'AMORIN

PROFESOR DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Huelves y Compañia ⁎ ⁎ ⁎ ⁎
⁎ ⁎ Hilarión Eslava, 5. Madrid

Homenagem
do Autor

O teorema da probabilidade composta na teoria da probabilidade dos conjuntos

PELO

Dr. Diego Pacheco d'Amorin

PROFESOR DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA

(Sesión del 16 de Mayo de 1932)

Introdução

As origens do Cálculo das Probabilidades no século XVII e a sua evolução nos séculos XVIII e XIX, mostram que este ramo das ciências matemáticas tendía para uma *teoria geral dos jogos de azar*, acrescida das aplicações da mesma teoria a certos fenómenos, vulgarmente ditos *casuais*. Bruscamente, porem, essa lenta evolução sofreu um entorse e muitos autores passaram a considerar o Cálculo das Probabilidades como um simples capitulo da teoria dos conjuntos.

Era uma forma pouco elegante de evitar as dificuldades que apareciam no elimiar desta ciência. O determinismo cientifico, como era interpretrado nos principios do corrente século, pretendia lançar o *acaso* não só para fora dos limites das ciências, mas até para fora da própria realidade.

O Cálculo das Probabilidades, tal como nascera e evoluira, constituia para o acaso um reducto inexpugnável. Daqui surgiu uma oposição entre o *espirito* do Cálculo das Probabilidades e a filosofía ciêntifica então dominante, que muito contribuiu para desviar esta ciência do curso natural da sua evolução.

Por outro lado, o Cálculo das Probabilidades que nasceu da resolução de certos problemas particulares dos jogos de azar em uso no século XVII e que ainda nos principios do século XVIII se ocupava principalmente destes jogos, foi a pouco e pouco esquecendo as suas origens e passou a considerar como simples e secundaria aplicação, aquilo que de facto era o seu fundamento.

O Cálculo das Probabilidades como que se envergonhava da sua baixa extracção e procurava deixar no esquecimento a sua origem. Esta tendência que é já visivel na «Ars Conjectandi» e que se agravou durante o século passado, teve como consequência imediata o *desenraizamento* progressivo do Cálculo das Probabilidades e tornou possivel a sua redução a um mero capítulo da teoria dos conjuntos.

É claro que se não pode negar a ninguem o direito de tratar *formalmente* o Cálculo das Probabilidades como um ramo da teoria dos conjuntos. Mas o *Cálculo das Probabilidades*, assim considerado, e a *teoria dos jogos de azar*, são coisas diferentes.

* * *

No que vai seguir-se, consideramos o *Cálculo das Probabilidades como a teoria geral dos jogos de azar, acrescida das aplicação da mesma teoria a certos fenómenos naturais* (1).

CAPÍTULO I

Probabilidade descontínua

1. *Noção primitiva.*—Ha em todos os jogos de azar uma *operação essencial* que é a *que consiste em tirar à sorte um elemento duma dada classe*. Por exemplo, tirar à sorte uma carta dum baralho.

Esta operação envolve uma noção que não pode definir-se e que tomaremos como *primitiva*.

2. A classe em que se faz a tiragem à sorte, pode ser constituida por um número finito de elementos (ou por uma infinidade numeravel) e di-la hemos então *descontínua*; ou por uma região qualquer

(1) As ideias expostas nesta comunicação encontram-se em germen em a nossa tese de doutoramento (Elementos de Cálculo das Probabilidades), publicada em Coimbra em 1914.

do espaço a n dimensões, e dir-se ha *contínua;* ou por um conjunto qualquer. Começaremos pelas classes finitas.

3. *Postulados.*—Si (A) e (B) forem classes finitas dadas, associando cada elemento de (A) com cada um dos de (B), obtemos uma nova classe (A, B) que diremos *composta* das classes dadas. É claro que

$$med\,(A, B) = med\,(A)\,.\,med\,(B)\,.$$

Quer dizer, nas classes finitas, a *medida* é *multiplicativa.*

4. Posto isto, diremos que:

Postulado 1.°

Tirar à sorte um elemento da classe (A) e outro da classe (B), é equivalente a tirar à sorte um só elemento da classe $(A, B,)$ quer estas tiragens sejan simultâneas quer sucessivas. E, recíprocamente, *tirar à sorte um elemento da clase composta $(A, B,)$ é o mesmo que tirar à sorte um elemento de (A) e outro de (B).*

5. Este postulado generaliza-se a tiragens, simultâneas ou sucessivas, feitas em qualquer número de classes e reduz cada grupo de tiragens dessa natureza, a uma só tiragem (n.° 1).

6. Se as tiragens forem sucessivas, a classe (B) pode ser função do elemento tirado à sorte em (A).

7. Um elemento diz-se *simples* quando se considera proveniente duma só tiragens. E *composto* no caso contrário.

Postulado 2.°

8. *Tirar à sorte e simultâneamente, dois elementos duma só classe (A), é equivalente a tirar um elemento de (A) e outro da classe restante* (isto é, da classe que se obtem de (A) pela supressão do 1.° elemento tirado à sorte).

9. Este postulado generaliza-se imediatamente para qualquer número de tiragens simultâneas feitas numa só classe.

10. A combinação destes dois postulados reduz a uma só tiragens numa só classe, qualquer grupo de tiragens que conduza a um elemento composto (n.° 7).

Possibilidade

11. Em relação a um dado sistema de tiragens feitas em determinadas classes, dizem-se *possiveis* todos os elementos (símples ou compostos) a que tais tiragens podem levar.

12. A totalidade dos elementos possíveis forma a *classe total possível*. Qualquer parte desta classe, diz-se uma *classe possível*.

12. A. Em relação a uma tiragem feita numa dada classe, todos os elementos da classe dada são possíveis e a *classe total possível* é a própria classe dada. Se as tiragens forem feitas em duas classes, a 1.ª numa classe (A); e a 2.ª numa classe (B), dependente do elemento A obtido na 1.ª tiragem; os elementos possíveis obtem-se associando cada elemento de (A) com cada um dos elementos da classe (B) que lhe corresponde. A classe ressultante que representarems por (AB) e a que chamaremos *dupla*, será a *classe total possível* a respeito deste sistema de tiragens.

Se as tiragens a efectuar forem tres, obteríamos *classes triplas* para classes totais possíveis, etc.

Possibilidade

13. Possibilidade do elemento tirado à sorte na classe (A) é, por definição (1) o número

$$\pi_A = \frac{1}{(A)}$$

onde (A) representa a medida da classe (A).

14. *Teorema.—A possibilidade dum elemento composto é igual ao producto das possibilidades dos elementos componentes.*

Com efeito, pela propriedade multiplicativa da medida, é

$$(A, B) = (A) \cdot (B)$$

Logo:

$$\pi_{AB} = \frac{1}{(A, B)} = \frac{1}{(A).(B)} = \pi_A \cdot \pi_B$$

(1) Como as classes só interesam ao Cálculo das Probabilidades pela sua medida, represetaremos as classes e as suas medidas pelos mesmos símbolos.

15. Possibilidade duma classe é, por definição, a sôma das possibilidades dos seus elementos:

$$\omega_{(A')} = \Sigma_{(A')}\, \pi_A \,.$$

16. Desta definição resulta imediatamente que *a possibilidade duma classe é igual à sôma das possibilidades das suas partes.*

16. Asim, se representarmos por $\omega_{(A)}$ a possibilidade da classe (A) e for

$$(A) = (A_1) + \ldots + (A_n)\,,$$

será tambêm

$$\omega_{(A)} = \omega_{(A_1)} + \cdots + \omega_{(A_n)}\,.$$

É o teorema da *possibilidade total.*

17. No caso da classe total possível (A) ser constítuida por elementos igualmente possíveis, a possibilidade duma classe possível (A') qualquer é dada por

$$\omega_{(A')} = \frac{(A')}{(A)}$$

e esta relação mostra que o teorema da *possibilidade total* (n.º anterior) implica a *aditividade* da medida.

18. É tambêm manifesto que se (A, B) for a classe composta de (A) e (B), se tem

$$\omega_{(A,B)} = \omega_{(A)} \cdot \omega_{(B)}\,.$$

19. Alem disso, se $(A\ B)$ é uma classe não composta, mas constituida por elementos compostos, tal que $\omega_{(A)}$ é sempre o mesmo qualquer que sejá A, teremos ainda

$$\omega_{(A\ B)} = \omega_{(A)} \cdot \omega_{(B)}\,.$$

20. Tanto esta modalidade do teorema da *possibilidade composta,* como a anterior, se demostram com toda a facilidade recorrendo a teorema do n.º 14.

21. *Probabilidade.*—Se (A) e (A') forem classes possíveis a res-

peito de dado sistema de tiragens e se (A') for contido em (A), chamaremos probabilidade de (A') em relação a (A), ao número

$$P_{(A)}^{(A')} = \frac{\omega_{(A')}}{\omega_{(A)}}$$

22. Desta definição e dos teoremas anteriores, deduzem-se os dois teoremas fundamentais do Cálculo das Probabilidades, a saber:

Teorema da probabilidade total

23. *A probabilidade duma classe é igual à sôma das probabilidades das suas partes.*

Teorema da probabilidade composta

24. *Seja* (A′ B′) *uma classe dupla contida na classe dupla* (A B) *e tal que, qualquer que seja o elemento* A′, *a probabilidade* $P_{(B)}^{(B')}$ *é sempre a mesma; digo que, neste caso, é*

$$P_{(A\ B)}^{(A'\ B')} = P_{(A)}^{(A')} \cdot P_{(B)}^{(B')} \,.$$

25. Como estes dois teoremas se demonstram recorrendo aos teoremas correspondentes da possibilidade, e estes derivam das propriedades *aditiva* e *multiplicativa* da medida, segue-se que os dois teoremas fundamentais do Cálculo das Probabilidades derivam das duas propriedades fundamentais da medida.

CAPÍTULO II

Regiões contínuas

26. Consideraremos como *ponto* no espaço a n dimensões, um grupo de número reais $(x_1\ x_2\ \ldots\ x_n)$ quaisquer. Chamaremos *espaço* a n dimensões à *totalidade* dos pontos $(x_1\ x_2\ \ldots\ x_n)$.

27. No Cálculo Diferencial e Integral define-se o símbolo

$$\int\int \ldots \int f(x_1\, x_2 \ldots x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n ,$$

onde $x_1\, x_2 \ldots x_n$ são variáveis independentes e o *integral se estendo a campos definidos de certa forma*. A esses campos chamaremos *volumes* a n dimensões.

28. Se $M(t_1\,, t_2 \ldots t_k)$ for um ponto de coordenadas correntes dum volume V' do espaço a k dimensões; e se forem dadas $n > k$ funções de $t_1\, t_2 \ldots t_k$,

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = l_1\,(t_1\, t_2 \ldots t_k) \\ x_2 = l_2 \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_n = l_n \end{array}\right. \qquad (1)$$

tais que os determinantes funcionais de quaisquer k destas funções seja diferente do zero em V', digo que o logar geometrico dos pontos $P(x_1\, x_2 \ldots x_n)$ é uma *variedade* a k dimensões, existente num espaço a n dimensões. As linhas e as superficies ordinárias, são variedades.

29. Aos volumes e às variedades, chamaremos indistintamente *regiões*.

30. Chamaremos *elemento* dum volume V, de que $M(x_1\, x_2 \ldots x_n)$ é o ponto de coordenadas correntes, à expressão

$$d\,V = dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

31. Para definir o elemento duma variedade (A), consideremos a matriz

$$\left|\begin{array}{c} \frac{dx_1}{dt_1}\,, \frac{dx_2}{dt_1} \ldots \frac{dx_n}{dt_1} \\ \frac{dx_1}{dt_2}\,, \frac{dx_2}{dt_2} \ldots \frac{dx_n}{dt_2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dx_1}{dt_k}\,, \frac{dx_1}{dt_k} \ldots \frac{dx_n}{dt_k} \end{array}\right| \qquad (1)$$

formada com as derivadas parciais das funcções do sistema (1) do n.º 28.

Combinando k a k as colunas desta matriz, obtemos $\binom{n}{k}$ determinantes, todos diferentes de zero por hipótese. Elevando cada um destes determinantes funcionais, da forma

$$\frac{D\,(x_{\alpha_1}\, x_{\alpha_2} \cdots x_{\alpha_k})}{D\,(t_1\, t_2 \cdots t_k)}\,,$$

ao quadrado e somando os resultados,

$$\Sigma \left[\frac{D\,(x_{\alpha_1}\, x_{\alpha_2} \cdots x_{\alpha_k})}{D\,(t_1\, t_2 \cdots t_k)}\right]^2$$

obtemos uma função das variaveis $t_1\, t_2 \cdots t_k$, que representaremos abreviadamente por

$$\left[\frac{D\,(x_1\, x_2 \cdots x_n)}{D\,(t_1\, t_2 \cdots t_k)}\right]^{(2)}$$

32. Posto isto, chamaremos *elemento* da variedade (A) considerada, à expressão

$$d\,(A) = \sqrt{\left[\frac{D\,(x_1\, x_2 \ldots x_n)}{D\,(t_1\, t_2 \ldots t_k)}\right]^{(2)}} \cdot dt_1\, dt_2 \ldots dt_k$$

33. Diremos *ponto composto* dos pontos $M\,(x_1\, x_2 \ldots x_n)$ e $P\,(\gamma_1\, \gamma_2 \ldots \gamma_p)$, o ponto $Q\,(x_1\, x_2 \ldots x_n\, \gamma_1\, \gamma_2 \ldots \gamma_p)$.

34. Região composta das regiões (A) e (B), é a região (A, B) que se obtem compondo cada ponto de (A) com cada um dos pontos de (B).

35. É facil de ver que, quaisquer que sejam as regiões consideradas (A) e (B), se tem sempre

$$d\,(A, B) = d\,(A),\;\; d\,(B).$$

36. Medida do volumen V do n.º 27 é integral multiplo

$$\iint \ldots \int_V dx_1\, dx_2 \ldots dx_n\,.$$

37. Medida da variedade (A) do n.° 28 é $\int\int \ldots \int_{V'} d(A)$, ou seja

$$Med\,(A) = \int\int \ldots \int_{V'} \sqrt{\left[\frac{D\,(x_1\, x_2 \ldots x_2)}{D\,(t_1\, t_2 \ldots t_k)}\right]^{(2)}}\, dt \ldots dt_k\,.$$

38. Estas medidas são aditivas como os integrais que as definem; e é fácil de ver que también são *multiplicativas*, isto é, que ainda nestes casos é

$$med\,(A, B) = med\,(A).\,med\,(B);$$

ou mais simplesmente

$$(A, B) = (A)\,.\,(B),$$

como no caso das classes finitas.

39. Com o símbolo

$$\int_{(A)} f(A) d(A)$$

representamos o

$$\int\int \ldots \int_{V'} f\,(A) \sqrt{\left[\frac{D\,(x_1 \ldots x_n)}{(D\,t_1 \ldots t_k)}\right]^{(2)}}\, dt_1\, dt_2 \ldots dt_n$$

onde $f(A)$ é uma certa função de $x_1\ x_2 \ldots x_n$ e, portanto de, $t_1\ t_2 \ldots t_k'$.

40. Dum modo geral, com

$$\int f(A, B, \ldots L)\, d\,(A).\, d\,(B) \ldots d\,(L)$$

designamos o integral da expressão que se obtem quando se substituem $d\,(A)$, $d\,(B) \ldots$ pelas suas expressões (n.os 30 e 32).

41. Do mesmo modo que se forman as classes duplas, triplas, etc. (n.° 12, A), se forman regiões duplas, triplas, etc. E é facil de ver que se (AB) for a região dupla que se obtem compondo cada ponto de (A) com cada um dos pontos (n.° 12, A) da região (B), função do ponto A de coordenadas correntes da região (A), se tem:

$$\int_{(A\,B)} f\,(A, B)\; d\,(A)\; d\,(B) = \int_{(A)} d\,(A) \int_{(B)} (f\,A, B)\; d\,(B).$$

Probabilidade Contínua

Noção primitiva

42. Suporemos conhecida a operação que consiste en *lançar à sorte um ponto numa região qualquer;* ou (o que vale o mesmo) *tirar à sorte um elemento duma região qualquer.*

43. A esta·noção andam ligados dois postulados identicos aos da probabilidade descontínua e que é inutil repetir (n.os 4 e 8).

As definições de ponto possível, região possivel e região total possível, são perfeitamente identicas às dos n.os 11 e 12.

44. Chamaremos *possibilidade do ponto* A *lançado à sorte no região* (A), *à expressão*

$$\pi_A = \frac{d\,(A)}{(A)}$$

45. A esta expressão chamaremos também possibilidade do elemento $d\,(A)$, sendo $d\,(A)$ o elemento a que A serve de suporte.

46. Como, lançar à sorte um ponto em (A) e outro em (B) equivale a lançar à sorte um ponto em (A, B), quer os lançamentos sejam simultâneos quer sucessivos, segue-se que

$$\pi_{A\,B} = \frac{d\,(A, B)}{(A, B)} = \frac{d\,(A)\,.\,d\,(B)}{(A)\,.\,(B)} = \pi_A \cdot \pi_B$$

Logo, *a possibilidade do elemento composto é igual ao producto das possibilidades dos elementos componentes.*

47. Tudo mais segue como na probabilidade descontínua, substituindo as *somas por integrais.*

Assim: A possibilidade da classe (A'), contida em (A) é, por definição,

$$\omega_{(A')} = \int_{(A')} \pi_A$$

48. Pela propriedade aditiva da medida que é extensivel aos integrais, ainda se verifica o *teorema da possibilidade total.*

49. E pelos números 41 e 46 ainda

$$^{\omega}(A\,B) = {}^{\omega}(A) \cdot {}^{\omega}(B)$$

todas as vezes que $^{\omega}(B)$ seja independente de A.

50. A probabilidade define-se como em o n.º 21 e os dois teoremas fundamentais subsistem nos mesmos termos e pelas mesmas razões.

CAPÍTULO III

Probabilidade dos Conjuntos

51. A *probabilidade*, considerada como noção basilar da teoria matematica dos jogos de azar, é *aditiva* e *multiplicativa*, porque a *medida* é *aditiva* e *multiplicativa*. As propriedades fundamentais da probabilidade, tanto contínua como descontínua, nascem das propriedades da *medida*.

Compreende-se, pois, que se possa extender a noção de probabilidade áqueles conjuntos para os quais se saiba definir uma *medida* que seja *aditiva* (no sentido completo) e *multiplicativa*, no sentido do n.º 38. Com efeito, para os conjuntos nestas condições, as expressões que nos dão a possibilidade duma classe, quer ela seja simples quer composta, tem sempre sentido e os teoremas relativos à possibilidade e à probabilidade de quaisquer conjuntos dados, subsistem integralmente e nas mesmas condições.

52. Para estender aos conjuntos a doutrina acima exposta, bastará portanto, dar uma definição de medida que seja ao mesmo tempo *aditiva* (no sentido completo) e *multiplicativa*. É o que vamos fazer, baseando-nos em uma memória de Carathéodory, (1) no que respeita à teoria formal da medida lebesguiana nela apresentada.

Carathéodory baseia toda a teoria formal da medida lebesguiana, na construção duma função de conjunto a que chama *medida exterior*, a qual tem de gozar das seguintes propriedades fundamentais:

---

(1) Uber das lineare Mass von Punktmengeneine Verallgemeinerung des hängenbegriffs. Von C. Carathéodory in Göttingen. Vorgelegt von F. Klein in der Sitzung von 24 Oktober 1914.

1.ª *A cada conjunto de pontos* (A) *dum espaço a* n *dimenções, corresponde um n.º* $\mu^*(A)$, *que pode ser nulo, positivo ou mesmo infinito e que se chama medida exterior de* (A).

2.ª *Se o conjunto* (A) *contem* (B), *é*

$$\mu^* (A) \geqq \mu^* (B) .$$

3.ª *Se* (A) *é uma sôma de conjuntos de pontos, com um numero finito ou com uma infinidade numeravel de parcelas,*

$$(A) = (A_1) + (A_2) + \dots$$

será

$$\mu^* (A) \leqq \mu^* (A_1) + \mu^* (A_2) + \dots$$

4.ª *Se* (A_1) *e* (A_2) *são dois conjuntos de postos cuja distancia é diferente de zero, será sempre*

$$\mu^* [(A_1) + (A_2)] = \mu^* (A_1) + \mu^* (A_2)$$

5.ª *A medida exterior dum conjunto qualquer de pontos é o limite inferior das medidas de todos os conjuntos mensuráveis que contem o conjunto dado.*

53. Com uma medida exterior gozando destas cinco propriedades, Carathéodory define a *mensurabilidade* de modo qne a medida é aditiva no sentido completo; e são mensuráveis os conjuntos fechados e os conjuntos que contem só pontos interiores. Em seguida Carathéodory dá uma definição da *medida linear* que generaliza para definir o que ele chama a *medida p-dimensional no espaço a q-dimensões* ($q > p$).

54. Em toda esta memoria, Carathéodory põe de parte a propriedade multiplicativa da medida e das definições por ele dadas na ultima parte do seu trabalho, não nos parece possível deduzir tal propriedade. Por outro lado, as cinco propiedades atrás enunciadas não têm como consequencia a propriedade multiplicativa para a medida exterior. Para poder satisfazer às exigencias do Cálculo das Probabilidades, é preciso impor à medida exterior uma outra propriedade que ficará sendo a 6.ª.

A medida exterior dum conjunto composto, ha de ser igual ao producto das medidas exteriores dos conjuntos componentes:

$$\mu^* (A, B) = \mu^* (A) \cdot \mu^* (B)$$

55. Com estas seis propriedades, demostra-se fácilmente que se (A) e (B) forem conjuntos mensuraveis, o conjunto (A, B) tambem o será, e a sua medida será igual ao produto das medidas dos componentes:

$$med\ (A, B) = med\ (A).\ med\ (B)$$

que é a propriedade multiplicativa da medida exterior.

Medida de Lebesgue

56. A medida exterior, definida como limite inferior das medidas dos conjuntos abertos que contem o conjunto dado (1), satisfaz às seis propriedades atrás mencionadas. A medida de Lebesgue é, portanto, multiplicativa.

57. A medida de Lebesgue, porem, não é suficiente para o nosso fim, porque dá valor nulo para todas as variedades (linhas, superficies, etc.). É preciso, pois, uma definição da medida exterior K — *dimensional*, no espaço a n *dimensões* ($n > K$), medida exterior essa que goze das seis propriedades acima mencionadas.

58. Seja (A) um conjunto de medida lebesguiana nula, existente no espaço ($x_1\ x_2\ \ldots\ x_n$). Projectemos (A) sobre cada um dos espaços que se obtem combinando as coordenadas $x_1\ x_2\ \ldots\ x_n$, $n - 1$ a $n - 1$. Se todas ou algumas destas projecções forem de medida lebesguiana diferente de zero, digo que (A) é um conjunto a $n - 1$ dimensões.

Se todas estas projecções forem de medida lebesguiana nula, projectaremos (A) sobre os espaços que se obtem combinando as coordenadas ($x_1\ x_2\ \ldots\ x_n$), $n - 2$ a $n - 2$.

Se todas ou parte destas projecções forem de medida lebesguina diferente de zero, digo que (A) é um conjunto a $n - 2$ dimensões.

Se todas estas projecções forem de medida lebesguina nula, projecto (A) nos espaços sucessivos a $n - 2, \ldots n - K$ dimensões,

(1) Ver La Vallée Poussin, «Integrales de Lebesgue», Guathier-Villars, Paris, 1916.

até obter a primeira projecção de *(A)* de medida lebesguiana diferente de zero. Se forum dos espaços $(x_{d_1}\ x_{d_{2n}} \dots x_{d_{n-k}})$ o 1.º que dá para *(A)* uma projecção de medida lebesguiana diferente de zero, digo que *(A)* é um conjunto a $n - K$ dimensões (1).

59. Posto isto, seja *(A)* um conjunto de pontos K — *dimensional.* Cubramos este conjunto com um agregado de dominios rectangulares a n dimensões e seja D_i um desses dominios. Projectemos sobre os espaços $(x_{d_1}\ x_{d_2} \cdots x_{d_K})$ o conjunto $(A)D_i$ e sejam

$$P_1,\ P_2 \dots P_g$$

as projecções de $(A)\ D_i$ cuja medida lebesguiana é diferente de zero: e sejam

$$D_i^1,\ D_i^2 \dots D_i^g$$

as medidas das projecções de D_i nos espaços em que existem

$$P_1\ P_2 \dots P_g.$$

Formemos com estas medidas a expressão

$$\sqrt{(D_i^1)^2 + (D_i^2)^2 + \cdots + (D_i^g)^2}$$

Formando expressões analogas para os restantes dominios do agregado e somando os resultados, obtemos expressões da forma

$$S = \sum_{(i)} \sqrt{(D_i^1)^2 + (D_i^2)^2 + \cdots + (D_i^g)^2}$$

60. É manifesto que, a cada número positivo ρ, corresponde um conjunto de números $(S)_\rho$, bem determinado, constituido pelas somas S derivadas de agregados de dominios rectangulares de diametros inferiores a ρ.

Estes conjuntos $(S)\rho$ tem um limite inferior que representaremos por $\underline{L}\rho$ e que é uma função bem determinada de ρ.

---

(1) Se *(A)* for de medida lebesguiana diferente de zero di-lo hemos a n dimensões.

É manifesto que, para $\rho' < \rho$, é $\underline{L}_{\rho'} \geqq \underline{L}_\rho$. Consequentemente, $\underline{L}_\rho$. ou cresce indefinidamente, ou tende para un limite determinado quando ρ tende para zero. Podemos, pois, dizer que $\lim\limits_{\rho = o} \underline{L}_\rho$ existe sempre, considerando $+\infty$ como um dos limites para que estas funçães podem tender.

É a este limite que chamaremos *medida exterior K — dimensional* de (A):

$$\mu^*_K (A) = \lim_{\rho = o} \underline{L}_\rho$$

61. A função do conjunto (A) que acabamos de definir, goza das seis propriedades atrás consideradas. Com ela se define uma *medida K — dimensional* que é aditiva, no sentido completo, e multiplicativa.

64. Aos conjuntos que sejam mensuráveis neste sentido, pode generalizar-se o Calculo das Probabilidades, ou melhor, a teoria dos jogos de azar por analogia com a probabilidade continua.