Associação portuguesa
para o Progresso
das Sciências

(CONGRESSO DO PORTO)

Sôbre o determinante de Ronsky

PELO

Dr. PACHECO DE AMORIM

Imprensa da Universidade
Coimbra, 1923

Homenagem do Aut

SOBRE O DETERMINANTE DE RONSKY

PELO

DR. PACHECO DE AMORIM

PROPOSIÇAO 1.ª

Seja

$$R = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ u_1' & u_2' & \dots & u_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_1^{(n-1)} & u_2^{(n-1)} & \dots & u_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

um determinante de Ronsky e

$$R_1 = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_n \\ A_1' & A_2' & \dots & A_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_1^{(n-1)} & A_2^{(n-1)} & \dots & A_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

outro determinante do mesmo tipo, formado com os complementos algébricos dos elementos da última linha do 1.º Digo que

$$R_1 \equiv R^{n-1}.$$

*

* *

Com efeito, por força das propriededes dos menores dum determinante qualquer, é:

$$(1) \quad \begin{cases} (1) \quad \sum_{i=1}^{n} A_i u_i^{(j)} = 0 & (j < n-1) \\ (2) \quad \sum_{i=1}^{n} A_i u_i^{(n-1)} = R. \end{cases}$$

Derivando a equação (1), obtemos:

$$\sum_{i=1}^{n} A_i u_i^{(j+1)} + \sum_{i=1}^{n} A_i' u_i^{(j)} = 0. \qquad (j < n-1)$$

Mas, em virtude da mesma equação (1),

$$\sum_{i=1}^{n} A_i u_i^{(j+1)} = 0$$

para todos os valores de j, tais que $j+1 < n-1$; e, em virtude (2),

$$\sum_{i=1}^{n} A_i u_i^{(j+1)} = R$$

para $j+1 = n-1$.

Logo

$$(2) \qquad \begin{cases} (3) \quad \sum_{i=1}^{n} A_i' u_i^{(j)} = 0 & (j < n-2) \\ (4) \quad \sum_{i=1}^{n} A_i' u_i^{(n-2)} = (-1) \cdot R. \end{cases}$$

Derivando as equações (3) e procedendo do mesmo modo, obtemos o systema

$$(3) \qquad \begin{cases} (5) \quad \sum_{i=1}^{n} A_i'' u_i^{(j)} = 0 & (j < n-3) \\ (6) \quad \sum_{i=1}^{n} A_i'' u_i^{(n-3)} = (-1)^2 \cdot R. \end{cases}$$

É manifesto que, procedendo desta forma k vezes, obtemos o sistema

$$(k+1) \qquad \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} A_i^{(k)} u_i^{(j)} = 0 & (j < n-k-1) \\ \sum_{i=1}^{n} A_i^{(k)} u_i^{(n-k-1)} = (-1)^k \cdot R. \end{cases}$$

Seguindo com estas operações até $k = n-1$, obtemos a equação final

$$(n-1) \qquad \sum_{i=1}^{n} A_i^{(n-1)} u_i = (-1)^{n-1} \cdot R.$$

Posto isto, multipliquemos os determinantes propostos R e R_1, linha a linha. Se dispuzermos os resultados obtidos em colunas, vir-nos há

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_n \\ A_1' & A_2' & \dots & A_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_1^{(n-1)} & A_2^{(n-1)} & \dots & A_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ u_1' & u_2' & \dots & u_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_1^{(n-1)} & u_2^{(n-2)} & \dots & u_n^{(n-1)} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} O & O & \dots & O & \mp R \\ O & O & \dots & \pm R & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & -R & \dots & * & * \\ R & * & \dots & * & * \end{vmatrix},$$

onde os asteriscos representam elementos que não importam ao valor do produto.

Na verdade, multiplicando os elementos da primeira linha de R_1 pelos elementos das diversas linhas de R, obtemos os primeiros membros das equações do sistema (1) e foi com os segundos membros destas equações que formámos a primeira coluna do determinante produto. E da mesma forma se obtiveram as restantes colunas do produto à custa das equações dos sistemas (2), (3), etc.

O desenvolvimento dêste determinante produto dá lugar a um só termo, cujo sinal é dado pelo factor $(-1)^{\frac{(n-1)n}{2}}$, por ser n a ordem suposta de R.

Por sua vez os elementos que entram neste termo são

$$R, \quad (-1)R, \quad (-1)^2 R, \quad \dots \quad (-1)^{n-1} R,$$

elementos cujo produto é

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot R^n.$$

Donde concluimos que

$$R_1 \cdot R = R^n$$

e que

$$R_1 \equiv R^{n-1},$$

c. d. d.

Corolário 1.° — Se o determinante R for nulo ou constante, o determinante R_1 também o será, e recìprocameute.

Corolário 2.° — Se for nulo o complemento algébrico de um elemento qualquer da última linha do determinante de Ronsky, êste determinante também o será.

Corolário 3.° — Se dois quaisquer elementos

$$A_1 A_2 \ldots A_n,$$

de R_1 forem constantes, ou se três quaisquer dos mesmos elementos forem funções lineares da variavel independente x, ou quatro forem polinómios do segundo gráu em x, etc., R_1 e R serão nulos, como é fácil de ver.

Corolário 4.° — Do corolário 2.° déduz-se ainda que será nulo qualquer determinante de Ronsky em que seja nulo o complemento algébrico de um menor qualquer contido nas suas últimas linhas; ou por outra, o determinante de Ronsky será nulo se também o for um menor qualquer contido nas primeiras linhas.

Seja, por exemplo,

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u'_1 & u'_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Nesta suposição diremos que

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u'_1 & u'_2 & u'_3 \\ u''_1 & u''_1 & u''_3 \end{vmatrix} = 0,$$

pelo corolário 2.°

E, continuando desta sorte, chegamos por fim à igualdade

$$R = 0.$$

Scólio. — É de notar que os elementos

$$u_1 \; u_2 \; \ldots \; u_n$$

satisfazem, como já vimos, ao seguinte sistema:

$$\begin{array}{l}
A_1 u_1 + A_2 u_2 + \cdots + A_n u_n = 0 \\
A_1' u_1 + A_2' u_2 + \cdots + A_n' u_n = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
A_1^{(n-2)} u_1 + A_2^{(n-2)} u_2 + \cdots + A_n^{(n-2)} u_n = 0 \\
A_1^{(n-1)} u_1 + A_2^{(n-1)} u_2 + \cdots + A_n^{(n-1)} u_n = (-1)^{n-1} \cdot R.
\end{array}$$

PROPOSIÇÃO 2.ª

Representando por $C[A_k^{(n-1)}]$ o complemento algébrico do elemento $A_k^{(n-1)}$ do determinante R_1, digo que

$$C[A_k^{(n-1)}] \equiv (-1)^{n+1} u_k R^{n-2}.$$

Com efeito,

$$C[A_k^{(n-1)}] = \begin{vmatrix}
A_1 & A_2 & \ldots A_k & \ldots A_n \\
A_1' & A_2' & \ldots A_k' & \ldots A_n' \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
A_1^{(n-2)} & A_2^{(n-2)} & \ldots A_k^{(n-2)} & \ldots A_n^{(n-2)} \\
O & O & \ldots 1 & \ldots O
\end{vmatrix}.$$

Multiplicando $C[A_k^{(n-1)}]$ por R, obtemos

$$C[A_k^{(n-1)}] \cdot R \equiv \begin{vmatrix} O & O & \dots & O & u_k \\ O & O & \dots & \pm O & u_k' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & -R & \dots & * & u_k^{(n-2)} \\ R & * & \dots & * & u_k^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

$$\equiv (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} O & O & \dots & \pm R \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ O & -R & \dots & * \\ R & * & & * \end{vmatrix} \cdot u_k$$

$$\equiv (-1)^{n+1} R^{n-1} \cdot u_k.$$

Donde se conciue que

$$C[A_k^{(n-1)}] \equiv (-1)^{n+1} \cdot u_k \cdot R^{n-2},$$

c. d. d.

PROPOSIÇÃO 3.ª

Representando por

$$C \begin{bmatrix} A_j^{(n-2)} & A_k^{(n-2)} \\ A_j^{(n-1)} & A_k^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

o complemento algébrico do menor

$$\begin{vmatrix} A_j^{(n-2)} & A_k^{(n-2)} \\ A_j^{(n-1)} & A_k^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

contido nas duas *últimas* linhas de R_1, digo que

$$C\begin{bmatrix} A_j^{(n-2)} & A_k^{(n-2)} \\ A_j^{(n-1)} & A_k^{(n-1)} \end{bmatrix} = (-1)^{2(n+1)} \cdot R^{n-3} \cdot \begin{vmatrix} u_j & u_k \\ u'_j & u'_k \end{vmatrix}.$$

Com efeito,

$$C\begin{bmatrix} A_j^{(n-2)} & A_k^{(n--2)} \\ A_j^{(n-1)} & A_k^{(n-1)} \end{bmatrix} \cdot R \equiv$$

$$\equiv \begin{vmatrix} A_1 & \ldots & A_j & \ldots & A_k & \ldots & A_n \\ A'_1 & \ldots & A' & \ldots & A'_k & \ldots & A'_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ O & \ldots & 1 & \ldots & O & \ldots & O \\ O & \ldots & O & \ldots & 1 & \ldots & O \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_1 & \ldots & u_n \\ & & \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ & & \\ u_1^{(n-1)} & \ldots & u_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

$$\equiv \begin{vmatrix} O & O & \ldots & u_j & u_k \\ O & O & \ldots & u'_j & u'_k \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ O & -R & \ldots & u_j^{(n-2)} & u_k^{(n-2)} \\ R & * & \ldots & u_j^{(n-1)} & u_k^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

$$\equiv (-1)^{2(n+1)} \cdot R^{n-2} \cdot \begin{vmatrix} u_j & u_k \\ u'_j & u'_k \end{vmatrix}.$$

Donde se conclue que

$$C\begin{vmatrix} A_j^{(n-2)} & A_k^{(n-2)} \\ A_j^{(n-1)} & A_k^{(n-1)} \end{vmatrix} = (-1)^{2(n+1)} R^{n-3} \cdot \begin{vmatrix} u_j & u_k \\ u'_j & u'_k \end{vmatrix}.$$

c. d. d.

Scólio. — É de notar: 1.º, que os produtos de R_1 por R, e de $C\begin{bmatrix} A_j^{(n-1)} & A_k^{)n-1)} \\ A_j^{(n-2)} & A_k^{(n-2)} \end{bmatrix}$ por R, são determinantes que só diferem pelas duas últimas colunas; 2.º que os menores

$$\begin{vmatrix} A_j^{(n-2)} & A_k^{(n-2)} \\ A_j^{(n-1)} & A_k^{(n-1)} \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{vmatrix} u_j & u_k \\ u'_j & u'_k \end{vmatrix}$$

são contidos em colunas das mesmas ordens, sendo, porém, o primeiro contido nas duas últimas linhas da R_1 e o segundo contido nas duas primeiras linhas de R. Chamaremos *correspondentes* aos menores de R_1 e de R relacionados pela forma que fica dito, seja qual for a sua ordem.

PROPOSIÇAO 4.ª

Representando por M um menor qualquer de R_1 contido nas últimas i linhas e em quaisquer i colunas, e por m o menor correspondente do determinante R e ainda por $C[M]$ o complemento algébrico de M, digo que

$$C[M] \equiv (-1)^{i(n+1)} \cdot m \cdot R^{n-i-1}.$$

Com efeito, efectuando o produto $C(M) \cdot R$ como efectuamos o de $C \begin{vmatrix} A_j^{(n-2)} & A_k^{(n-2)} \\ A_j^{(n-1)} & A_k^{(n-1)} \end{vmatrix}$ por R, obtemos um determinante que só difere do determinante produto de $R_1 \cdot R$ pelas últimas i colunas que são precisamente as i colunas de R em que se contém m.

Desenvolvendo êste determinante em relação aos menores contidos nas suas últimas i colunas, obtém-se um só termo que é

$$\pm m R^{n-i}.$$

Para lhe determinar o sinal, notemos que a paridade dum menor contido nas primeiras i linhas e nas últimas i colunas do determinante de ordem n, é a do número

$$1+2+\cdots+i+(n+n-1+\cdots+n-i+1)=i+ni=i(n+1):$$

ou seja

$$C[M] \cdot R \equiv (-1)^{i(n+1)} \cdot m \cdot R^{n-i};$$

donde se conclue que

$$C[M] \equiv (-1)^{i(n+1)} \cdot m R_1^{n-i-1}$$

c. d. d.

Scólio. — O complemento algébrico de M, $C[M]$ é, com o seu sinal ou com sinal trocado, igual a um menor de R_1 contido nas $n-i$ primeiras linhas. O teorema que acabamos de demonstrar, diz-nos que estes menores admitem como factor a R ou a uma potência de R, logo que a sua ordem seja igual ou superior a duas unidades.

COROLÁRIO 1.º — Se R fôr nulo, são nulos todos os menores de R_1 contidos nas suas K primeiras linhas, qualquer que seja $K \gtreqless 2$.

COROLÁRIO 2.º — No caso particular de $K=2$, teremos:

$$\begin{vmatrix} A_i & A_j \\ A_i' & A_j' \end{vmatrix} \equiv 0$$

para todos os valores de i e j desde 1 até n.

COROLÁRIO 3.º — Mostram-nos estas identidades que se um dos elementos $A_1\, A_2 \ldots A_n$ for constante e diferente de zero, todos os outros elementos serão também constantes, nulas ou não.

COROLÁRIO 4.º — Para os valores de i e j tais que A_i' e A_j' sejam diferentes de zero, teremos:

$$\frac{A_i'}{A_i} \equiv \frac{A_j'}{A_j} \equiv \cdots$$

donde se conclue que

$$\frac{A_i}{a_i} \equiv \frac{A_j}{a_j} \equiv \cdots,$$

sendo a_i e $a_j \ldots$ constantes, não arbitrárias, mas perfeitamente determinadas pelas expressões de $u_1, u_2, \ldots u_n$.

Associando estes resultados com a identidade

$$\sum_{i=1}^{n} A_i u_i \equiv 0,$$

obtem-se

$$\sum_{i=1}^{n} a_i u_j \equiv 0$$

que é a bem conhecida relação linear e homogénea existente entre os elementos

$$u_1 u_2 \ldots u_n,$$

do determinante de Ronsky nulo.

PROPOSIÇAO 5.ª

Da relação

$$C[M] \equiv (-1)^{i(n+1)} m R^{n \quad i-1}$$

demonstrada na proposição 4.ª, deduz-se:

$$M \cdot C[M] \equiv (-1)^{i(n+1)} m M R^{n-i-1}.$$

Somando todas as relações análogas que se obtém com os menores M contidos nas últimas i linhas de R_1, vem:

$$R_1 \equiv (-1)^{i(n+1)} R^{n-i-1} \Sigma m M.$$

E como

$$R_1 \equiv R^{n-1},$$

segue-se que:

$$\Sigma m M \equiv (-1)^{i(n+1)} R^i.$$

No caso particular de $i = 1$, esta relação dá-nos a equação

$$\Sigma A_j^{(n-1)} u_j \equiv (-1)^{n+1} R,$$

já por nós determinada na proposição 1.ª

*

* *

Dados que sejam os elementos $u_1 u_2 \ldots u_n$ de R fàcilmente se calculam os elementos $A_1 A_2 \ldots A_n$ de R_1, que são, como dissémos, os complementos algébricos dos elementos da última linha de R.

Dados que sejam os elementos $A_1 A_2 \ldots A_n$ de R_1, também se podem calcular, em geral, os elementos $u_1 u_2 \ldots u_n$ de R, com a auxílio das proposições atrás demonstradas.

Seja

$$(1) \qquad A_1 = \varphi_1(x), \quad A_2 = \varphi_2(x), \quad \ldots \quad A_n = \varphi_n(x)$$

sendo $\varphi_1(x) \ldots \varphi_n(x)$ funções dadas.

Pedem-se as expressões de $u_1 u_2 \ldots u_n$ em x.

As equações (1) constituem um sistema de equações diferenciais de ordem $n-1$, a n variáveis.

Para o integrar, derivémo-lo $(n-1)$ vezes, o que nos dá o seguinte quadro:

$$\begin{array}{llll}
A_1 & = \varphi_1(x) & \ldots A_n & = \varphi_n(x) \\
A_1' & = \varphi_1'(x) & \ldots A_n' & = \varphi_n'(x) \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
A_1^{(n-1)} & = \varphi_1^{(n-1)}(x) & \ldots A_n^{(n-1)} & = \varphi_n^{(n-1)}(x).
\end{array}$$

Multiplicando as equações da primeira coluna por u_1, as da segunda por u_2, ... as da última por u_n, e somando em seguida as equações correspondentes a uma mesma linha, obtemos o seguinte sistema:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l}
\varphi_1(x) u_1 \quad + \varphi_2(x) u_2 \quad + \ldots + \varphi_n(x) u_n \quad = 0 \\
\varphi_1'(x) u_1 \quad + \varphi_2'(x) u_2 \quad + \ldots + \varphi_n'(x) u_n \quad = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\varphi_1^{(n-1)}(x) u_1 + \varphi_2^{(n-1)}(x) u_2 + \ldots + \varphi_n^{(n-1)}(x) u_n = (-1)^{n-1} \cdot R,
\end{array} \right.$$

que é formado pelas equações postas em evidência no scólio da proposição 1.ª

Do sistema (1) deduz-se, pois, o sistema (2). Recìprocamente de (2) deduz-se (1), se $R \neq 0$. Para isso basta derivar $(n-1)$ vezes o systema (2) e notar que entre as equações assim obtidas se encontram as do systema:

$$\begin{array}{l}
\varphi_1(x) u_1 \quad + \varphi_2(x) u_2 \quad + \ldots + \varphi_n(x) u_n \quad = 0 \\
\varphi_1(x) u_1' \quad + \varphi_2(x) u_2' \quad + \ldots + \varphi_n(x) u_n' \quad = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\varphi_1(x) u_1^{(n-1)} + \varphi_2(x) u_2^{(n-1)} + \ldots + \varphi_n(x) u_n^{(n-1)} = R,
\end{array}$$

Daqui se conclue, se for $R \neq 0$, que

$$\varphi_1(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & u_2 & \dots & u_n \\ 0 & u'_2 & \dots & u'_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & u_2^{(n-2)} & \dots & u_n^{(n-2)} \\ R & u_2^{(n-1)} & \dots & u_n^{(n-1)} \end{vmatrix}}{R} = A_1.$$

E da mesma forma se obtém as demais equações do systema (1).

No caso de $R \neq 0$, os dois systemas (1) e (2) são, pois, equivalentes e as soluções de um são as do outro.

Mas as soluções de (2) são

$$u_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \varphi_2 & \dots & \varphi_n \\ 0 & \varphi'_2 & \dots & \varphi'_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (-1)^{n-1} R & \varphi_2^{(n-1)} & \dots & \varphi_n^{(n-1)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \dots & \varphi_n \\ \varphi'_1 & \varphi'_2 & \dots & \varphi'_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1^{(n-1)} & \varphi_2^{(n-1)} & \dots & \varphi_n^{(n-1)} \end{vmatrix}} = \frac{R}{R_1} \begin{vmatrix} \varphi_2 & \dots & \varphi_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_2^{(n-2)} & \dots & \varphi_n^{(n-2)} \end{vmatrix}.$$

Dum modo geral

$$u_k = \frac{(-1)^{n-1} R}{R_1} C[\varphi_k^{(n-1)}],$$

representando por $C[\varphi_k^{(n-1)}]$ o complemento algébrico do elemento $\varphi_k^{(n-1)}(x)$ do determinante do sistema (2) que é R_1.

Como

$$R_1 = R^{n-1},$$

virá:

$$u_k = (-1)^{n+1} \frac{C[\varphi_k^{(n-1)}]}{R^{n-2}},$$

relação esta já achada na proposição 2.ª

Vê-se pois que o sistema (1) proposto, admite um sistema de soluções desprovidas de constantes arbitrárias, se $R_1 \neq 0$ e que êsse sistema é único.

No caso de $R_1 = 0$, ou bem se verificam as relações expostas no corolário 2.° da proposição 4.ª, ou não.

Se não, o sistema proposto é incompatível, o que significa que as funções dadas

$$\varphi_1(x) \quad \varphi_2(x) \quad \ldots \quad \varphi_n(x)$$

não podem corresponder aos valores dos complementos algébricos dos elementos da última linha dum determinante de Ronsky, porque se correspondessem, de facto, as ditas relações haviam de verificar-se.

Se as ditas relações se verificam, teremos então que

$$\frac{\varphi_1(x)}{\alpha_1} = \frac{\varphi_2(x)}{\alpha_2} = \ldots = \frac{\varphi_n(x)}{\alpha_n} = \lambda(x)$$

e as equações propostas transformam-se em

$$(3) \qquad A_1 = \alpha_1 \lambda(x); \quad A_2 = \alpha_2 \lambda(x) \quad \ldots \quad A_n = \alpha_n \lambda(x).$$

Destas equações deduz-se, por ser $R = 0$,

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n = 0.$$

Ora, do sistema formado por esta equação e por uma qualquer das equações (3), deduzem-se todas as outras equações (3).

Seja, por exemplo,

$$(4) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n = 0 \\ \begin{vmatrix} u_2 & u_3 & \ldots & u_n \\ u_2' & u_3' & \ldots & u_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_2^{(n-2)} & u_3^{(n-2)} & \ldots & u_n^{(n-2)} \end{vmatrix} = \alpha_1 \lambda(x). \end{array} \right.$$

Eleminando u_2 entre estas duas equações, obtemos

$$A_2 = \alpha_2 \lambda(x).$$

Eliminando u_3, obtemos

$$A_3 = \alpha_3 \lambda(x);$$

e assim para as demais.

Vê-se, pois, que quaisquer valores de $u_1 u_2 \dots u_n$ que satisfaçam ao sistema (4), satisfarão a (3). Mas o sistema (4) é indeterminado. Logo (3) também o será.

Em resumo, o sistema (1) de equaçães diferenciais de ordem $(n-1)$ admite um sistema de soluções desprovidas de constantes arbitrárias, caso $R_1 \neq 0$. De contrário, ou é indeterminado, ou incompatível, segundo se verificam ou não as relações

$$\begin{vmatrix} \varphi_i(x) & \varphi_j(x) \\ \varphi_i'(x) & \varphi_j'(x) \end{vmatrix} = 0$$

que se obtém dando a i e a j todos os valores desde 1 a n.