AO

SEU AMIGO E MESTRE

O ILL.^{MO} E EX.^{MO} SR.

DR. ANTONIO JOSÉ TEIXEIRA

Do conselho de Sua Magestade, lente jubilado da Faculdade de Mathematica na Universidade de Coimbra, vogal do Conselho Superior de Instrucção Publica, par do reino e antigo deputado da nação, etc., etc., etc.

D.

O Auctor

TRIGONOMETRIA ESPHERICA

I

Noções preliminares e formulas fundamentaes

1. A trigonometria espherica tem por objecto a resolução dos triangulos esphericos, isto é, obter o conhecimento de todos os elementos de um triangulo espherico, quando são dados os sufficientes para determinar os outros. Chama-se triangulo espherico a porção da superficie de uma esphera comprehendida entre tres arcos de circulos maximos que se interceptam dois a dois. — Sabido é que os pontos de intercepção dos tres arcos de circulos maximos são vertices de mais de um triangulo espherico. Assim (fig. 1.ª) os vertices A, B, C pertencem tanto ao triangulo que tem por lados $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, e por angulos oppostos a estes lados α, β, γ, como áquelles cujos elementos sejam os lados $BDC = 360° - a$, b, c, e os angulos $360° - \alpha$, $180° - \beta$, $180° - \gamma$, ou a outro com os angulos, $360° - \beta$, $180° - \alpha$, $180° - \gamma$, e os lados $360° - b$, a e c, etc., etc.; mas a determinação das partes de um triangulo onde haja elementos superiores a 180° vem sempre a depender da resolução de outro formado de elementos menores. Por este motivo basta considerar sómente os triangulos esphericos n'estas condições.

Se do centro da esphera tirarmos rectas para os pontos em que os arcos se interceptam, serão ellas as arestas de um triedro com o vertice no mesmo centro, cujos elementos, tres faces e tres angulos diedros, são os elementos do triangulo espherico; os lados d'este são os arcos que medem os angulos planos do triedro, e os diedros do triedro são os angulos do triangulo espherico.

Tambem se sabe que, se de um ponto qualquer tirarmos tres perpendiculares sobre as faces de um triedro, estas rectas serão as arestas de um novo triedro, que se chama supplementar em relação ao primeiro; os angulos planos de um são supplementos dos diedros do outro, e as faces d'este supplementos dos diedros d'aquelle. Se o ponto d'onde partem as perpendiculares fôr o vertice do primeiro triedro e centro de uma esphera, os pontos onde a superficie d'esta é encontrada pelas perpendiculares são os polos dos arcos, lados do triangulo espherico que aquelle triedro determina; e reciprocamente os vertices d'este triangulo são os polos do que é formado pelos arcos de circulos maximos que unem duas a duas aquellas intersecções. Entre os elementos de ambos os triangulos, os quaes se dizem polares um a respeito do outro, ha pois as mesmas relações que entre os dos dois triedros suplementares: os lados e angulos do primeiro são supplementos dos angulos e lados do segundo.

Por este modo em triangulos de elementos menores que 180.º, e attendendo a que os elementos de um triangulo espherico são os mesmos que os do triedro respectivo, dos theoremas geometricos relativos aos triedros conclue-se immediatamente que:

1.º *A somma dos tres lados é sempre menor que 360º.*

2.º *A somma dos tres angulos está comprehendida entre dois e seis rectos.*

3.º *Qualquer lado é menor que a somma dos outros dois e maior que a sua differença.*

4.º *Dois triangulos sphericos são eguaes, quando os tres an-*

gulos, ou os tres lados, ou dois lados e o angulo comprehendido, ou um lado e os dois angulos adjacentes forem respectivamente eguaes cada um a cada um e semilhantemente dispostos. Quando se verificam aquellas condições de egualdade, mas desacompanhadas da *mesma disposição* das partes, dois triangulos assim constituidos dizem-se *symetricos*, correspondem a triedros com a mesma denominação, e, sendo os triangulos existentes em espheras do mesmo raio, teem areas eguaes.

5.º *O arco de circulo maximo abaixado do vertice de um triangulo espherico isosceles perpendicularmente sobre a base, divide-a ao meio, como tambem divide ao meio o angulo do vertice.*

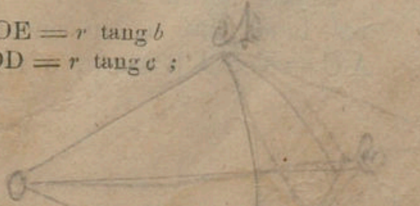
6.º *Em qualquer triangulo espherico a lados eguaes ficam oppostos angulos eguaes, a maior lado maior angulo, e reciprocamente.*

2. Seja ABC (fig 2.ª) um triangulo espherico traçado sobre uma esphera, cujo raio $OA = r$, e o centro é em O, e supponhamos que cada um dos lados $AB = c$, $AC = b$ é menor do que 90°. Tirando por A um plano perpendicular ao raio OA, este plano cortará as faces do triedro correspondente segundo as rectas AE, AD, DE, que formam o triangulo rectilineo DAE e onde o angulo DAE é o mesmo que o angulo A do triangulo espherico. A recta DE, opposta aquelle angulo, é tambem lado do triangulo rectilineo DOE, opposto ao angulo DOE o qual tem por medida o arco $BC = a$ do triangulo espherico. As intersecções AE, AD do plano secante com as faces AOE, AOD do triedro formam com OA e as rectas OE, OD os triangulos rectangulos OAE, OAD. Estes nos dão:

$$OE = \frac{OA}{\cos AOE} = \frac{r}{\cos b} \qquad \overline{OD}^2 - \overline{AD}^2 = r^2$$

$$OD = \frac{OA}{\cos AOD} = \frac{r}{\cos c} \qquad \overline{OE}^2 - \overline{AE}^2 = r^2$$

$$AE = AO \ \text{tang}\, AOE = r \ \text{tang}\, b$$
$$AD = OA \ \text{tang}\, AOD = r \ \text{tang}\, c \ ;$$



e dos triangulos OED, AED tiramos

$$\overline{DE}^2 = \overline{OE}^2 + \overline{OD}^2 - 2OE \cdot OD \cos a ,$$

$$\overline{DE}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{AD}^2 - 2AE \cdot AD \cos A ,$$

equações que, por subtracção e attendendo aos valores antecedentes, nos dão

$$0 = 2r^2 - \frac{2r^2 \cos a}{\cos b \cos c} + 2r^2 \operatorname{tang} b \operatorname{tang} c \cos A$$

d'onde se tira a formula

$$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A \qquad (1)$$

que estabelece a relação entre os tres lados e o angulo opposto a um d'elles.

3. Esta formula, como se vê, foi deduzida na hypothese de serem os lados b e c, tanto um como outro, menores que 90°, pois só assim é que as rectas AD, AE tangentes aos arcos AB, AC encontram as arestas OB, OC do triedro, e subsistem por isso aquelles triangulos rectilineos e as consequencias que se derivam. Mas a formula é ainda verdadeira nos outros casos, como passamos a mostrar.

Seja primeiro $c > 90°$ e $b < 90°$. Prolonguemos (fig. 3.ª) os lados AB e BC até se encontrarem em B', e o angulo $B' = B$. Fazendo $CB' = a'$, $AB' = c'$, ao triangulo AB'C, onde temos $b < 90°$ e $c' < 90°$, é applicavel a formula (1) que nos dá

$$\cos a' = \cos b \cos c' + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c' \cos B'AC ;$$

e como é $a' = 180° - a$, $c' = 180° - c$ e $B'AC = 180° - A$, teremos finalmente

$$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A ,$$

que é a formula (1).

Sejam agora $b > 90°$ e $c > 90°$, e prolonguemos estes lados até o seu encontro em A' (fig. 4.ª). Fazendo $A'C = b'$, $A'B = c'$, o triangulo A'BC nos dá

$$\cos a = \cos b' \cos c' + \text{sen}\, b' \,\text{sen}\, c' \cos A' ,$$

e por ser $A' = A$, $b' = 180° - b$, $c' = 180° - c$, recahimos na formula (1).

Supponhamos que temos ao mesmo tempo $b = 90°$ e $c = 90°$. N'este caso o triangulo é birectilatero, o ponto A é o polo do arco BC e o angulo A tem por medida o mesmo lado $BC = a$; mas por ser então $\cos b = 0$, $\cos c = 0$, $\text{sen}\, b = 1$, $\text{sen}\, c = 1$, a formula (1) applicada nos dá, como deve,

$$\cos a = \cos A ,$$

e por tanto é ainda verdadeira.

Passemos a suppôr que é $b = 90°$ e $c < 90°$. No triangulo ABC (fig. 5.ª) prolongue-se AB até D de modo que seja $AD = 90°$; então A é polo do arco DC, e no triangulo DBC temos

$$D = 90° , BD = 90° - c , DC = a' = A ,$$

podendo a' ser ou não egual a 90°. Se é $a' = 90°$, como já temos $b = 90°$, será C polo do atco AB, e por tanto $A = 90°$, $a = 90°$, e a formula (1), applicada ao triangulo ABC, dá-nos

$$0 = 0$$

e por isso é verdadeira.

Se a' é differente de 90°, então já sabemos por alguns dos casos antecedentes que podemos applicar a formula (1) ao triangulo BDC, onde, fazendo $BD = c'$ nos vem

$$\cos a = \cos a' \cos c' + \text{sen}\, a' \,\text{sen}\, c' \cos D ,$$

e por que é

$$D = 90° , c' = 90° - c , \text{ e } a' = A ,$$

fica-nos

$$\cos a = \cos A \,\text{sen}\, c ,$$

e é o que se obtem, com $b = 90°$, applicando a formula (1) ao triangulo ABC.

Supponde finalmente $b = 90°$ e $c > 90°$, tomando no lado AB (fig. 6.ª) uma parte $AD = 90^\circ$, e unindo D com C como no caso antecedente, teremos o triangulo DBC, onde é

$$DC = a' = A \ , \ BD = c - 90^\circ \ , \ BDC = 90^\circ \ ,$$

e a formula (1), que é applicavel, nos dá

$$\cos a = \cos a' \ \cos (c - 90^\circ) = \cos A \ \operatorname{sen} c \ ,$$

como daria, sendo applicada ao triangulo ABC e fazendo $b = 90^\circ$.

Logo a formula (1) é verdadeira em todos os casos.

4. Tirando pelos outros vertices B e C do triangulo espherico planos tangentes á esphera e repetindo as mesmas deducções que no n.º 2, ou permutando as letras na formula (1), o que vale o mesmo, temos mais duas formulas que com aquella formam o grupo

$$\left.\begin{aligned} \cos a &= \cos b \ \cos c + \operatorname{sen} b \ \operatorname{sen} c \ \cos A \\ \cos b &= \cos a \ \cos c + \operatorname{sen} a \ \operatorname{sen} c \ \cos B \\ \cos c &= \cos a \ \cos b + \operatorname{sen} a \ \operatorname{sen} b \ \cos C \end{aligned}\right\} (A)$$

E porque, salvo os casos duvidosos, o que mais tarde discutiremos, um triangulo espherico fica determinado, quando forem dados tres dos seus elementos, das equações que estabelecem as relações entre estes não podem ser distinctas mais do que tres; podemos por isso considerar o grupo (A) como o das formulas fundamentaes da trigonometria espherica. Mas nos diversos casos que se apresentam é conveniente ter formulas que deem immediatamente a expressão da incognita, e as quaes passamos a deduzir combinando aquellas devidamente.

5. A fim de obter uma relação entre dois lados a e b e os angulos oppostos A e B, basta eliminar c entre as duas primeiras formulas (A), o que se consegue facilmente introduzindo n'ellas os senos dos angulo em logar dos cosenos. A primeira equação nos dá

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \ \cos c}{\operatorname{sen} b \ \operatorname{sen} c} \ ,$$

d'onde

$$\operatorname{sen}^2 A = 1 - \cos^2 A = \frac{\operatorname{sen}^2 b \operatorname{sen}^2 c - (\cos a - \cos b \cos c)^2}{\operatorname{sen}^2 b \operatorname{sen}^2 c}$$

$$= \frac{(1 - \cos^2 b)(1 - \cos^2 c) - (\cos a - \cos b \cos c)^2}{\operatorname{sen}^2 b \operatorname{sen}^2 c}$$

$$= \frac{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c}{\operatorname{sen}^2 b \operatorname{sen}^2 c}$$

e por tanto

$$\frac{\operatorname{sen}^2 A}{\operatorname{sen}^2 a} = \frac{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c}{\operatorname{sen}^2 a \operatorname{sen}^2 b \operatorname{sen}^2 c}$$

Este valor de $\frac{\operatorname{sen}^2 A}{\operatorname{sen}^2 a}$ é, como se vê, uma *expressão symetrica* em relação a a, b e c, não muda com a permutação d'estas letras; por conseguinte, da segunda e terceira de (A) tirariamos para valores $\frac{\operatorname{sen}^2 B}{\operatorname{sen}^2 b}$ e $\frac{\operatorname{sen}^2 C}{\operatorname{sen}^2 c}$ a mesma expressão, e assim será

$$\frac{\operatorname{sen}^2 A}{\operatorname{sen}^2 a} = \frac{\operatorname{sen}^2 B}{\operatorname{sen}^2 b} = \frac{\operatorname{sen}^2 C}{\operatorname{sen}^2 c}$$

Extrahindo a raiz quadrada, e attendendo a que os senos de arcos menores do que 180° são positivos, teremos as formulas

$$\left.\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} a} = \frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} b} = \frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} c}\right\} \quad (B)$$

que constituem a chamada regra dos quatro senos.

6. Sejam A', B', C', a', b', c' os elementos do triangulo polar do triangulo ABC.

A primeira de (A) dá-nos

$$\cos a' = \cos b' \cos c' + \operatorname{sen} b' \operatorname{sen} c' \cos A',$$

e porque são

$$\begin{aligned} a' &= 180° - A & \qquad A' &= 180° - a \\ b' &= 180° - B & \qquad B' &= 180° - b \\ c' &= 180° - C & \qquad C' &= 180° - c, \end{aligned}$$

introduzindo estes valores e trocando os signaes a ambos os membros da equação, virá

$$\cos A = -\cos B \cos C + \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \cos a \;;$$

deduzindo do mesmo modo as expressões dos cosenos dos outros dois angulos do triangulo ABC, teremos pois

$$\left.\begin{array}{l} \cos A = -\cos B \cos C + \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \cos a \\ \cos B = -\cos A \cos C + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} C \cos b \\ \cos C = -\cos A \cos B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \cos c \end{array}\right\} \text{(C)}$$

7. Se na primeira das equações (A) introduzirmos o valor de $\cos c$ tirado da terceira, teremos

$$\cos a = \cos a \cos^2 b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos b \cos C + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A \;,$$

passando para o primeiro membro os termos em a, reduzindo e dividido por $\operatorname{sen} b$, fica

$$\cos a \operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a \cos b \cos C = \operatorname{sen} c \cos A \qquad (2),$$

e pela permutação de letras se obteriam mais cinco formulas analogas. Agora, se dividirmos ordenadamente a equação (2) por esta

$$\operatorname{sen} a = \frac{\operatorname{sen} c \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} C}$$

que se tira de (B), vem

$$\cot a \operatorname{sen} b - \cos b \cos C = \cot A \operatorname{sen} C \;.$$

Pela permutação de letras obteem-se mais cinco formulas, as quaes com esta se podem escrever assim:

$$\left.\begin{array}{l} \cos b \cos C = -\operatorname{sen} C \cot A + \operatorname{sen} b \cot a \\ \cos c \cos A = -\operatorname{sen} A \cot B + \operatorname{sen} c \cot b \\ \cos a \cos B = -\operatorname{sen} B \cot C + \operatorname{sen} a \cot c \\ \cos a \cos C = -\operatorname{sen} C \cot B + \operatorname{sen} a \cot b \\ \cos b \cos A = -\operatorname{sen} A \cot C + \operatorname{sen} b \cot c \\ \cos c \cos B = -\operatorname{sen} B \cot A + \operatorname{sen} c \cot a \end{array}\right\} \text{(D)}$$

8. Cada uma das equações dos grupos (A), (B), (C) e (D) contem quatro dos seis elementos de um triangulo; ellas são em numero de quinze, que é o das combinações de seis objectos quatro a quatro. Para as applicações bastará em cada caso escolher a equação conveniente para dar de prompto a incognita em funcção dos elementos conhecidos, e appopriar a mesma equação ao calculo logarithmico. Para auxiliar a memoria podem ser compendiadas nos seguintes enunciados:

1.º *O coseno de um lado qualquer de um triangulo espherico é egual ao producto dos cosenos dos outros dois lados, mais o producto dos senos de estes mesmos lados multiplicado pelo coseno do angulo opposto ao primeiro.*

2.º *Nos triangulos esphericos os senos dos angulos estão entre si como os senos dos lados oppostos.*

3.º *O coseno de um angulo é egual a somma algebrica do producto dos cosenos dos outros dois angulos, mais o producto dos senos de esses mesmos angulos multiplicado pelo coseno do lado opposto ao primeiro angulo, devendo dar-se o signal negativo ao producto em que entrem só angulos.*

4.º *Postos quatro elementos contiguos de um triangulo, o producto dos cosenos das partes medias é egnal á somma dos productos dos senos das mesmas partes multiplicados pelas cotangentes das extremas, lado com lado e angulo com angulo, dando-se o signal negativo ao producto em que figuram angnlos.*

II

Resolução dos triangulos rectangulos

9. Designando pcr a a hypotenusa, faremos $A = 90°$ nas formulas acabadas de deduzir, e assim nos virá: pela primeira de (A)

$$\cos a = \cos b \ \cos c \qquad (3),$$

pela regra dos quatro senos

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen} b = \operatorname{sen} a \ \operatorname{sen} B \\ \operatorname{sen} c = \operatorname{sen} a \ \operatorname{sen} C \end{array}\right\} \qquad (4),$$

pela primeira, sexta, segunda e quinta de (D)

$$\left.\begin{array}{l} \text{tang}\, b = \text{tang}\, a \ \cos C \\ \text{tang}\, c = \text{tang}\, a \ \cos B \\ \text{tang}\, b = \text{sen}\, c \ \text{tang}\, B \\ \text{tang}\, c = \text{sen}\, b \ \text{tang}\, C \end{array}\right\} \quad (5),$$

e finalmente por (C)

$$\left.\begin{array}{l} \cos a = \cot B \ \cot C \\ \cos B = \cos b \ \text{sen}\, C \\ \cos C = \cos c \ \text{sen}\, B \end{array}\right\} \quad (6).$$

N'um triangulo rectangulo, alem do angulo recto que é conhecido, ha mais cinco elementos dos quaes ~~dois~~ bastam para determinar os outros tres. O numero de combinações que se podem formar com esses cinco elementos tomados tres a tres é dez, e tantas são as equações (3), (4), (5) e (6) que resolvem todos os casos dos triangulos esphericos rectangulos, e estão já adaptadas ao calculo logarithmico. Estas formas comprehendem-se todas nos seguintes enunciados, que são as

REGRAS DE NEPER

No triangulo ~~espherico rectangulo~~ o coseno da parte media é egual ao producto dos senos das partes separadas.

No triangulo espherico rectangulo o coseno da parte media é egual ao producto das cotangentes das partes conjunctas.

No uso e applicação d'estas regras devemos:

1.º Em relação á contagem e ordem dos elementos do triangulo não fazer caso do angulo recto, tomando-o como não existente.

2.º Ver na figura a disposição das tres partes, duas dadas e uma pedida. Quando todas as tres forem contiguas (como C, a e B na fig. 7.ª), chamaremos *conjunctas* as que occupam os extremos (C e B na mesma figura) e *media* a outra. Quando uma ficar isolada das outras duas por elementos que não figuram na formula, será aquella a *media*, e estas as separadas; assim na figura 8.ª b é a media e B e c são as partes separadas.

3.º Em vez de as funcções trigonometricas, que as regras indicam, tomar as complementares, quando for catheto o elemento a que aquellas funcções se referem.

10. As formulas do paragrapho antecedente manifestam immediatamente algumas propriedades dos triangulos rectangulos.

1.º A equação (3) faz ver que, quando um dos lados fôr maior do que 90°, tambem o será um só dos outros, de sorte que o numero de lados maiores que um quadrante é dois ou nada.

2.º Qualquer das duas ultimas formulas (5) mostra que um catheto é da mesma especie que o angulo opposto, isto é, maior ou menor que 90°, comforme o angulo opposto tambem fôr maior ou menor que um recto.

3.º As duas primeiras do mesmo grupo (5) indicam que a hypotenusa e um catheto são da mesma especie quando o angulo comprehendido fôr agudo, e de especie differente se fôr obtuso.

11. Bem que sejam dez as conbinações que se possam formar com cinco elementos tres a tres (ou dois a dois), são só seis os casos distinctos que importa considerar. Assim, quando é dada a hypotenusa e um angulo adjacente, temos a e B ou a e C duas combinações distinctas e um só caso para discutir, etc, etc. Passemos a percorrer todas estes casos.

Primeiro caso. *E' dada a hypotenusa e um catheto,* a e b. A equação (3) dá o catheto c, a primeira de (5) dá C, e a primeira de (4) dá B. Ainda que este angulo é dado por um seno, que tanto compete a um angulo agudo como ao seu supplemento, não ha ambiguidade por sabermos que o angulo B é da mesma especie que b.

Segundo caso. *São dados os dois cathetos,* b e c. A equação (3) dá a hypotenusa, as duas ultimas (5) dão B e C.

Terceiro caso. *E' dada a hypotenusa e um angulo adjacente,* a e B. A primeira das equações (4) dá b, a segunda de (5) dá c, e a primeira de (6) dá C. O lado

b é dado por um seno, mas não ha ambiguidade por ser da mesma especie que B.

Quarto caso. *São dados os dois angulos adjacentes á hypotenusa,* B e C. Obteem-se os tres lados, usando das formulas (6).

Quinto caso. *E' dado um catheto e o angulo adjacente,* b e C. A primeira e a ultima das equações (5) dão a hypotenusa e o outro catheto c, a segunda de (6) dá o angulo B.

Sexto caso. *E' dado um catheto e o angulo opposto* b e B. A primeira das equações (4) dá a, a terceira de (5) dá c, e a segunda de (6) dá C. Todos estes elementos são dados por senos, e assim é este o unico caso duvidoso na resolução dos triangulos esphericos rectangulos. O problema tem duas soluções: mas quando outras condições do mesmo problema determinem a especie de C ou c, por exemplo de C, então será da mesma c, como é sabido, e a de a é determinada depois pela equação (3).

Na figura 9.ª estão representadas as duas soluções, por que com os dados AC$=b$ e B tanto se póde construir o triangulo ABC, como o outro AB'C que com o primeiro forma a lunula BCB'AB; e se vê claramente como os elementos a, c e C de um são os supplementos dos elementos homonymos do outro triangulo.

III

Transformação e adaptação das formulas fundamentaes ao calculo logarithmico; formulas de Delambre e analogias de Neper.

12. A primeira das formulas (A), resolvida em ordem a cos A, dá-nos

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}$$

e introduzindo este valor nas formulas conhecidas

$$\operatorname{sen}\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}},$$

$$\cos\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}},$$

temos

$$\operatorname{sen}\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}b\ \operatorname{sen}c+\cos b\ \cos c-\cos a}{2\operatorname{sen}b\ \operatorname{sen}c}}$$

$$=\sqrt{\frac{\cos(b-c)-\cos a}{2\operatorname{sen}b\ \operatorname{sen}c}}$$

$$=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}\frac{a+c-b}{2}\ \operatorname{sen}\frac{a+b-c}{2}}{\operatorname{sen}b\ \operatorname{sen}c}},$$

$$\cos\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{\cos a-\cos b\ \cos c+\operatorname{sen}b\ \operatorname{sen}c}{2\operatorname{sen}b\ \operatorname{sen}c}}$$

$$=\sqrt{\frac{\cos a-\cos(b+c)}{2\operatorname{sen}b\ \operatorname{sen}c}}$$

$$=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}\frac{a+b+c}{2}\ \operatorname{sen}\frac{b+c-a}{2}}{\operatorname{sen}b\ \operatorname{sen}c}}.$$

Por permutação de letras n'estas formulas, ou repetindo a deducção com os valores de $\cos B$ e $\cos C$ tirados das equações (A), obteem-se formulas analogas para os senos e cosenos dos angulos $\frac{1}{2}B$ e $\frac{1}{2}C$. Depois por divisão obteem-se as tangentes e, chamando $2p$ ao periperimetro $a+b+c$ do triangulo, teremos por fim:

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{sen}\frac{1}{2}A &= \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-b)\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen}b\ \operatorname{sen}c}}\,,\\
\operatorname{sen}\frac{1}{2}B &= \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-a)\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen}a\ \operatorname{sen}c}}\,,\\
\operatorname{sen}\frac{1}{2}C &= \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-a)\operatorname{sen}(p-b)}{\operatorname{sen}a\ \operatorname{sen}b}}\,,
\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

$$\left.\begin{aligned}
\cos\frac{1}{2}A &= \sqrt{\frac{\operatorname{sen}p\ \operatorname{sen}(p-a)}{\operatorname{sen}b\ \operatorname{sen}c}}\,,\\
\cos\frac{1}{2}B &= \sqrt{\frac{\operatorname{sen}p\ \operatorname{sen}(p-b)}{\operatorname{sen}a\ \operatorname{sen}c}}\,,\\
\cos\frac{1}{2}C &= \sqrt{\frac{\operatorname{sen}p\ \operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen}a\ \operatorname{sen}b}}\,,
\end{aligned}\right\}\quad(8)$$

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{tang}\frac{1}{2}A &= \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-b)\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen}p\ \operatorname{sen}(p-a)}}\,,\\
\operatorname{tang}\frac{1}{2}B &= \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-a)\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen}p\ \operatorname{sen}(p-b)}}\,,\\
\operatorname{tang}\frac{1}{2}C &= \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-a)\operatorname{sen}(p-b)}{\operatorname{sen}p\ \operatorname{sen}(p-c)}}\,,
\end{aligned}\right\}\quad(9)$$

N'estas formulas devem sempre os radicaes ser tomados com o signal mais, por ser menor do que 180° cada um dos angulos do triangulo.

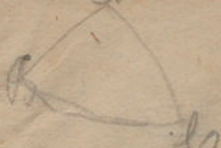
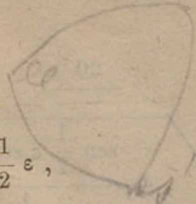
12. Chamando ε ao excesso espherico no triangulo ABC, e designando por a', b', c', A', B', C', os elementos do triangulo polar, temos

$$\varepsilon = A + B + C - 180^\circ$$

$$A' = 180^\circ - a\,,\quad B' = 180^\circ - b\,,\quad C' = 180^\circ - c\,,$$
$$a' = 180^\circ - A\,,\quad b' = 180^\circ - B\,,\quad c' = 180^\circ - C\,,$$

$$p' = \frac{3.\,180^\circ - (A + B + C)}{2} = \frac{3.\,180^\circ - (180^\circ + \varepsilon)}{2}$$

$p' = \frac{a' + b' + c'}{2}$

$$p' = 180 - \frac{1}{2}\varepsilon\,,$$

$$p' - a' = 180 - \frac{\varepsilon}{2} - 180 + \mathrm{A} = \mathrm{A} - \frac{1}{2}\varepsilon\,,$$ 2 triang

$$p' - b' = \mathrm{B} - \frac{1}{2}\varepsilon\,,$$ $a' = 180 - a$

$$p' - c' = \mathrm{C} - \frac{1}{2}\varepsilon\,,$$ $\frac{1}{2}a' = 90 - \frac{a}{2}$

$$\operatorname{sen}\frac{1}{2}\mathrm{A}' = \operatorname{sen}\left(90 - \frac{a}{2}\right) = \cos\frac{a}{2}\,,$$

$$\cos\frac{1}{2}\mathrm{A}' = \cos\left(90 - \frac{a}{2}\right) = \operatorname{sen}\frac{a}{2}\,;$$

então a applicação das formulas (8) e (7) ao triangulo A′B′C′, e depois a divisão ordenada, dá para o triangulo ABC

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{sen}\frac{1}{2}a &= \sqrt{\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}\varepsilon\operatorname{sen}(\mathrm{A}-\frac{1}{2}\varepsilon)}{\operatorname{sen}\mathrm{C}\operatorname{sen}\mathrm{B}}}\,,\\
\operatorname{sen}\frac{1}{2}b &= \sqrt{\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}\varepsilon\operatorname{sen}(\mathrm{B}-\frac{1}{2}\varepsilon)}{\operatorname{sen}\mathrm{A}\operatorname{sen}\mathrm{C}}}\,,\\
\operatorname{sen}\frac{1}{2}c &= \sqrt{\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}\varepsilon\operatorname{sen}(\mathrm{C}-\frac{1}{2}\varepsilon)}{\operatorname{sen}\mathrm{A}\operatorname{sen}\mathrm{B}}}\,,
\end{aligned}\right\}\quad(10)$$

$$\left.\begin{aligned}
\cos\frac{1}{2}a &= \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(\mathrm{B}-\frac{1}{2}\varepsilon)\operatorname{sen}(\mathrm{C}-\frac{1}{2}\varepsilon)}{\operatorname{sen}\mathrm{B}\operatorname{sen}\mathrm{C}}}\,,\\
\cos\frac{1}{2}b &= \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(\mathrm{A}-\frac{1}{2}\varepsilon)\operatorname{sen}(\mathrm{C}-\frac{1}{2}\varepsilon)}{\operatorname{sen}\mathrm{A}\operatorname{sen}\mathrm{C}}}\,,\\
\cos\frac{1}{2}c &- \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(\mathrm{A}-\frac{1}{2}\varepsilon)\operatorname{sen}(\mathrm{B}-\frac{1}{2}\varepsilon)}{\operatorname{sen}\mathrm{A}\operatorname{sen}\mathrm{B}}}\,,
\end{aligned}\right\}\quad(11)$$

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{tang}\frac{1}{2}a &= \sqrt{\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}\varepsilon\operatorname{sen}(A-\frac{1}{2}\varepsilon)}{\operatorname{sen}(B-\frac{1}{2}\varepsilon)\operatorname{sen}(C-\frac{1}{2}\varepsilon)}},\\
\operatorname{tang}\frac{1}{2}b &= \sqrt{\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}\varepsilon\operatorname{sen}(B-\frac{1}{2}\varepsilon)}{\operatorname{sen}(A-\frac{1}{2}\varepsilon)\operatorname{sen}(C-\frac{1}{2}\varepsilon)}},\\
\operatorname{tang}\frac{1}{2}c &= \sqrt{\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}\varepsilon\operatorname{sen}(C-\frac{1}{2}\varepsilon)}{\operatorname{sen}(A-\frac{1}{2}\varepsilon)\operatorname{sen}(B-\frac{1}{2}\varepsilon)}},
\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

formulas onde os radicaes são, como anteriormente, tomados com o signal positivo,

13. Combinando por multiplicação as duas primeiras formulas (7) com as duas primeiras (8), e tembem cada par (7) e (8) entre si, vem

$$\operatorname{sen}\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B = \frac{\operatorname{sen}(p-b)}{\operatorname{sen}c}\sqrt{\frac{\operatorname{sen}p\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen}a\operatorname{sen}b}}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}(p-b)}{\operatorname{sen}c}\cos\frac{1}{2}C,$$

$$\cos\frac{1}{2}A\operatorname{sen}\frac{1}{2}B = \frac{\operatorname{sen}(p-a)}{\operatorname{sen}c}\sqrt{\frac{\operatorname{sen}p\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen}a\operatorname{sen}b}}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}(p-a)}{\operatorname{sen}c}\cos\frac{1}{2}C,$$

$$\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B = \frac{\operatorname{sen}p}{\operatorname{sen}c}\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-a)\operatorname{sen}(p-b)}{\operatorname{sen}a\operatorname{sen}b}}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}p}{\operatorname{sen}c}\operatorname{sen}\frac{1}{2}C,$$

$$\operatorname{sen}\frac{1}{2}A\operatorname{sen}\frac{1}{2}B = \frac{\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen}c}\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-a)\operatorname{sen}(p-b)}{\operatorname{sen}a\operatorname{sen}b}}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen}c}\operatorname{sen}\frac{1}{2}C,$$

d'onde se tira

$$\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}\mathrm{A}\cos\frac{1}{2}\mathrm{B} \pm \cos\frac{1}{2}\mathrm{A}\operatorname{sen}\frac{1}{2}\mathrm{B}}{\cos\frac{1}{2}\mathrm{C}} = \frac{\operatorname{sen}(p-b) \pm \operatorname{sen}(p-a)}{\operatorname{sen} c}$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}\mathrm{A}\cos\frac{1}{2}\mathrm{B} \mp \operatorname{sen}\frac{1}{2}\mathrm{A}\operatorname{sen}\frac{1}{2}\mathrm{B}}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}\mathrm{C}} = \frac{\operatorname{sen} p \pm \operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} c}$$

Mas, recordando as expressões das sommas e das differenças de dois senos em funcção dos senos e cosenos das semisommas e semidifferenças dos arcos, e attendendo a que é $2p = a + b + c$, temos

$$\operatorname{sen}(p-b) + \operatorname{sen}(p-a) = 2\operatorname{sen}\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}(a-b),$$

$$\operatorname{sen}(p-b) - \operatorname{sen}(p-a) = 2\cos\frac{1}{2}c\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a-b),$$

$$\operatorname{sen} p + \operatorname{sen}(p-c) = 2\cos\frac{1}{2}c\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+b),$$

$$\operatorname{sen} p - \operatorname{sen}(p-c) = 2\operatorname{sen}\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}(a+b),$$

e é alem d'isso

$$\operatorname{sen} c = 2\operatorname{sen}\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}c,$$

e por tanto as egualdades antecedentes tornam-se nas seguintes formulas achadas por Delambre:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}C} &= \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}c}\,,\\[2mm]
\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}C} &= \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}c}\,,\\[2mm]
\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}C} &= \frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}c}\,,\\[2mm]
\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}C} &= \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}c}\,.
\end{aligned}\right\}\qquad(13).$$

14. Dividindo a primeira das formulas de Delanbre pela terceira, a segunda pela quarta, a quarta pela terceira, e finalmente a segunda pela primeira, obteem-se as quatro seguintes conhecidas pela denominação de *analogias de Neper*.

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A+B) &= \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\cot\frac{1}{2}C\,,\\[2mm]
\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A-B) &= \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+b)}\cot\frac{1}{2}C\,,\\[2mm]
\operatorname{tang}\frac{1}{2}(a+b) &= \frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}\operatorname{tang}\frac{1}{2}c\,,\\[2mm]
\operatorname{tang}\frac{1}{2}(a-b) &= \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A+B)}\operatorname{tang}\frac{1}{2}c\,,
\end{aligned}\right\}\qquad(14).$$

tices B e A arcos de circulos maximos perpendicularmente sobre os lados oppostos, construem-se os triangulos rectangulos BCE e ACD, dos quaes tiramos, applicando a regra de Neper,

$$\cos C = \cot a \text{ tang CE} = \cot b \text{ tang CD} ,$$

e comparando estas equações com (15) e (17) reconhece-se qne os arcos auxiliares φ e ψ são os arcos CE e CD comprehendidos entre o vertice do angulo dado e os pés d'aquelles arcos perpendiculares. Por esta forma $b - \varphi$ é o arco AE, e $a - \psi$ é BD.

Ora temos tambem no triangulo BCE

$$\text{sen}\,\varphi = \cot C \text{ tang EB}$$

e no triangulo ABE

$$\text{sen}\,(b - \varphi) = \cot A \text{ tang EB} ,$$

equações que, divididas membro a membro, dão

$$\frac{\text{sen}\,(b - \varphi)}{\text{sen}\,\varphi} = \frac{\cot A}{\cot C} ,$$

ou

$$\cot A = \frac{\cot C}{\text{sen}\,\varphi} \text{ sen}\,(b - \varphi) ,$$

que é a equação (16).

Temos ainda nos triangulos rectangulos ABD, ACD

$$\text{sen}\,(a - \psi) = \text{tang AD} \cot B ,$$

$$\text{sen}\,\psi = \text{tang AD} \cot C ,$$

e pela divisão vem

$$\frac{\text{sen}\,(a - \psi)}{\text{sen}\,\psi} = \frac{\cot B}{\cot C} ,$$

ou

$$\cot B = \frac{\cot C}{\text{sen}\,\psi} \text{ sen}\,(a - \psi) ,$$

que é a equação (18).

Tira-se ainda

$$\cos c = \cos (b - \varphi) \cos \text{BE} ,$$

$$\cos a = \cos \varphi \cos BE ,$$

e por tanto

$$\frac{\cos c}{\cos a} = \frac{\cos (b - \varphi)}{\cos \varphi}$$

ou

$$\cos c = \frac{\cos a}{\cos \varphi} \cos (b - \varphi) ,$$

e esta é a equação (19).

Na fig. 11.ª o pé D do arco perpendicular fica sobre o lado a do triangulo. E' o que acontece sempre, se os angulos B e C forem ambos agudos ou ambos obtusos; mas se estes angulos forem de especiaes differentes, então o pé do arco cahirá no prolongamento de CB. Para o reconhecer basta tomar o valor do lado AD nos dois triangulos rectangulos ACD, ABD e, chamando ψ e ψ' os dois segmentos do lado a, vem

$$\operatorname{tang} AD = \operatorname{sen} \psi \operatorname{tang} C = \operatorname{sen} \psi' \operatorname{tang} B ;$$

ora sendo C e B da mesma especie, as suas tangentes são do mesmo signal, pelo que acontece o mesmo a sen ψ e sen ψ', e a é somma dos dois segmentos. Quando B e C forem de especies differentes, sen ψ e sen ψ' teem signaes constrarios, e um dos segmentos de a é negativo; o pé D cahe então no prolongamento de este lado, como se vê na fig. 12.ª O triangulo ABC é n'este caso a differença entre os dois triangulos ACD, ABD e temos

$$\psi = CD , \psi' = BD = \psi - a,$$

e dos dois triangulos rectangulos tiramos

$$\operatorname{sen} (\psi - a) = \cot (180^\circ - B) \operatorname{tang} AD$$

ou

$$- \operatorname{sen} (a - \psi) = - \cot B \operatorname{tang} AD ,$$

e

$$\operatorname{sen} \psi = \cot C \operatorname{tang} AD ,$$

e obtem-se pela divisão de estas duas equações ainda a formula (18)

Quando acontece, como na fig. 13.ª, ser o angulo B agudo e o angulo dado C obtuso, o pé do arco perpendicular cahe em K no prolongamento de a, e fazendo

$$CK = \omega = -\psi ,$$

vem

$$\text{sen}\,(a + \omega) = \cot B \,\text{tang}\, AK ,$$

$$\text{sen}\,\omega = \cot\,(180^\circ - C)\,\text{tang}\, AK ,$$

ou as equações

$$\text{sen}\,(a - \psi) = \cot B \,\text{tang}\, AK ,$$

$$-\text{sen}\,\psi = -\cot C \,\text{tang}\, AK ,$$

que, divididas uma pela outra, dão do mesmo modo a equação (18).

Conclue-se d'esta discussão que o emprego dos angulos auxiliares para achar os elementos A, B e c equivale a decompor o triangulo ABC em somma ou differença de dois triangulos rectangulos, e resolver estes ultimos.

21. Quarto caso. *E' dado um lado com os dois angulos adjacentes.* Designando por A, B e c os elementos dados, trata-se de achar a, b e C.

Com a terceira e quarta das analogias de Neper calculam-se os lados a e b, e depois qualquer das formulas de Delambre dá sem ambiguidade o angulo C.

Tambem se póde resolver o problema com o emprego de angulos auxiliares. Para isso tiramos do grupo (C)

$$\cos C = -\cos A \cos B + \text{sen}\, A\, \text{sen}\, B \cos c$$

$$= \cos A\,(-\cos B + \text{sen}\, B\, \text{tang}\, A \cos c),$$

e fazendo

$$\text{tang}\, A \cos c = \cot \theta \qquad (20),$$

fica

$$\cos C = \frac{\cos A}{\text{sen}\,\theta}\,\text{sen}\,(B - \theta) \qquad (21).$$

Para obter a com os dados do problema tiraremos do grupo (D)

$$\cot a \operatorname{sen} c = \cot A \operatorname{sen} B + \cos c \cos B$$

$$= \cos c \left(\cos B + \operatorname{sen} B \frac{\cot A}{\cos c} \right),$$

e com o mesmo angulo θ definido pela equação (20), e que se póde escrever

$$\frac{\cot A}{\cos c} = \operatorname{tang} \theta ,$$

fica por fim

$$\cot a = \frac{\cot c}{\cos \theta} \cos (B - \theta) \qquad (22);$$

para ter b tomamos o angulo ω definido pela equação

$$\frac{\cot B}{\cos c} = \operatorname{tang} \omega \qquad (23),$$

e vem

$$\cot b = \frac{\cot c}{\cos \omega} \cos (A - \omega) \qquad (24).$$

22. No triangulo ABC (fig. 14.ª) abaixando de A e B arcos de circulo maximo sobre os lados oppostos, reconhece-se promptamente nos triangulos rectangulos assim formados que os angulos DBA, BAE são os auxiliares θ e ω; e por isso tambem n'este caso o emprego de taes auxiliares vale o mesmo que resolver o triangulo proposto por decomposição em triangulos rectangulos.

Na verdade, designando por k o arco perpendicular BD, o triangulo ABD dá

$$\cos c = \cot A \cot DBA ,$$

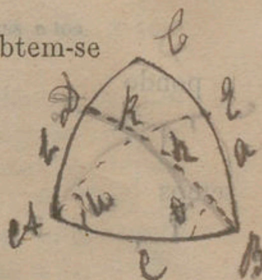
e comparando com (20) vê-se que é DBA $= \theta$. Tiramos ainda

$$\cos A = \cos k \operatorname{sen} \theta ,$$

e no triangulo BCD temos

$$\cos C = \cos k \ \mathrm{sen}\,(B - \theta)\ ;$$

pela eliminação de k entre estas duas equações obtem-se a equação (21).



Os mesmos triangulos dão mais

$$\cos\theta = \mathrm{tang}\, k \ \cot c\ ,$$

$$\cos\,(B - \theta) = \mathrm{tang}\, k \ \cot a$$

e, eliminando k, vem a equação (22).

Dos triangulos ABE, ACE tiramos respectivamente, chamando k' ao arco perpendicular AE, e ω ao angulo BAE,

$$\cos\omega = \mathrm{tang}\, k' \ \cot c\ ,$$

$$\cos\,(A - \omega) = \mathrm{tang}\, k' \ \cot b\ ,$$

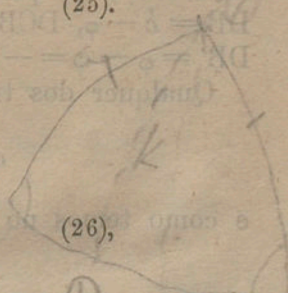
e se conclue a equação (24).

23. Quinto caso. *São dados dois lados e o angulo opposto a um d'elles.* Sejam a, b e A os elementos conhecidos; pedem-se B, C e c.

A regra dos quatro senos dá

$$\mathrm{sen}\, B = \frac{\mathrm{sen}\, A \ \mathrm{sen}\, b}{\mathrm{sen}\, a} \qquad (25).$$

Para ter c tiramos das fundamentaes



$$\cos a = \cos b\ (\cos c + \mathrm{sen}\, c \ \mathrm{tang}\, b \ \cos A)\ ,$$

e fazendo

$$\mathrm{tang}\, b \ \cos A = \mathrm{tang}\,\varphi \qquad (26),$$

vem

$$\cos a = \frac{\cos b}{\cos\varphi} \cos\,(c - \varphi)$$

ou

$$\cos\,(c - \varphi) = \frac{\cos a}{\cos b} \cos\varphi \qquad (27).$$

Para o valor de C recorremos ao grupo (D), do qual tiramos

$$\cot a \ \operatorname{sen} b = \cos b \left(\cos C + \operatorname{sen} C \frac{\cot A}{\cos b} \right),$$

e pondo

$$\frac{\cot A}{\cos b} = \operatorname{tang} \psi \qquad (28),$$

temos

$$\cot a \ \operatorname{tang} b = \frac{\cos (C - \psi)}{\cos \psi} \qquad (29).$$

Se abaixar-mos de C (fig. 15.ª) o arco CD perpendicular ao lado AB, acha-se que o triangulo AB'C é a a differença, ABC a somma, de dois triangulos rectangulos, cuja resolução conduz ás mesmas formulas (27) e (29). De facto, chamando k a esse arco perpendicular, temos no triangulo ACD

$$\cos A = \operatorname{tang} AD \ \cot b \ ,$$

$$\cos b = \cot A \ \cot ACD \ ,$$

e comparando com (26) e (28) vemos que é $AD = \varphi$ e $ACD = \psi$; e por tanto no triangulo ABC fica-nos $DB = c - \varphi$, $DCB = C - \psi$, e no triangulo ACB' é $DB' = \varphi - c = -(c - \varphi)$, $DCB' = \psi - C = -(C - \psi)$.

Qualquer dos triangulos CDB ou CDB' dá

$$\cos a = \cos k \cos (c - \varphi),$$

e como temos no triangulo ACD

$$\cos b = \cos k \cos \varphi \ ,$$

eliminando k vem a equação (27).

Temos ainda

$$\cos \psi = \operatorname{tang} k \cot b \ ,$$

E no triangulo BCD ou B'CD

$$\cos(C-\psi)=\text{tang}\,k\cot a\,,$$

e a eliminação de k entre estas duas equações dá a formula (29).

24. O angulo B é na equação (25) dado por um seno, que tanto pode convir ao angulo agudo encontrado nas tabuas, como ao seu supplemento; e depois de calculados φ e ψ pelas formulas (26) e (28) as equações (27) e (29) determinam cosenos, que tanto podem competir a $(c-\varphi)$ e $(C-\psi)$, como a $(\varphi-c)$ e $(\psi-C)$. Assim temos, em geral, duas soluções: o triangulo ACB com os angulos $B=CBA$, $C=BCA$ e o lado $c=BA$; e o triangulo ACB' com os elementos $B'=CB'A=180^\circ-B$, $C=ACB'$ e $c=AB'$. No primeiro é $DB=c-\varphi$, $DCB=C-\psi$; no segundo temos $DB'=\varphi-c$, $DCB'=\psi-C$.

25. Sexto caso. *São dados dois angulos e o lado opposto a um d'elles.* Sejam A, B e b os elementos conhecidos; pretende-se determinar a, c e C.

Pela regra dos quatro senos temos

$$\text{sen}\,a=\frac{\text{sen A}}{\text{sen B}}\text{sen b} \qquad (30).$$

Para achar C tiramos do grupo (C)

$$\cos A=\cos B(-\cos C+\text{sen}\,C\,\text{tang}\,B\cos a),$$

e com o emprego do angulo auxiliar θ dado por

$$\text{tang}\,B\cos a=\cot\theta \qquad (31)$$

fica

$$\cos A=\frac{\cos B}{\text{sen}\,\theta}\text{sen}\,(C-\theta) \qquad (32).$$

A fim de obter c, servindo-nos da sexta equação do grupo (D), teremos

$$\frac{\cot a}{\cos B}\operatorname{sen} c - \cos c = \cot A \operatorname{tang} B,$$

e pondo

$$\frac{\cot a}{\cos B} = \cot \omega \qquad (33),$$

virá

$$\operatorname{sen}(c - \omega) = \cot A \operatorname{tang} B \operatorname{sen} \omega \qquad (34).$$

Estas mesmas formulas (32) e (34), que nos dão $(C-\theta)$ e $(c-\omega)$, se obteem, como anteriormente, pelos triangulos rectangulos. Sendo na fig. 15.ª $CD = k$ o arco perpendicular, e chamando ω ao arco BD e θ ao angulo BCD, temos nos triangulos BCD e ACD

$$\cos B = \cos k \operatorname{sen} \theta,$$
$$\cos A = \cos k \operatorname{sen}(C - \theta),$$
$$\operatorname{sen} \omega = \cot B \operatorname{tang} k,$$
$$\operatorname{sen}(c - \omega) = \cot A \operatorname{tang} k,$$

e a eliminação de k entre as duas primeiras de estas equações dá a formula (32), entre as duas ultimas conduz á (34).

Mas o lado a na equação (30) é dado por um seno, que pertence, em resolução de triangulos, a dois arcos supplementares, e o problema pode muitas vezes ter duas soluções. E' o que melhor passamos a esclarecer pela discussão dos casos duvidosos.

V

Casos duvidosos na resolução dos triangulos esphericos

26. O quinto e sexto caso que acabamos de tratar são os unicos que pódem admittir mais de uma solução, e ainda assim nem sempre. Para conhecer bem as circumstancias que fazem haver ou não uma só, nenhuma, ou mais de uma solução, consideremos uma esphera de centro O (fig. 16.ª), e n'ella um hemispherio cuja base é o circulo maximo AKαMA; pelo polo de este circulo e centro da esphera façamos passar um plano, o qual será perpendicular á base do hemispherio, e cortará a superficie d'este segundo uma circumferencia de circulo maximo representada em perspectiva pela linha MN. Os angulos AMN e ANM são por tanto diedros rectos.

Tomando na circumferencia, que chamaremos *meridiana*, um ponto C que não seja polo da base do hemispherio, e fazendo passar por esse ponto diversos arcos de circulo maximo, teremos que:

1.º Os planos de estes circulos fazem com o plano da base angulos diedros supplementares, sendo o agudo voltado para o segmento menor da meridiana.

2.º Dois arcos equidistantes da meridiana e terminados na base do hemispherio são eguaes.

3.º O segmento menor da meridiana é o menor dos arcos de circulo maximo que se pódem tirar do ponto C para a circumferencia da base; o segmento maior é o maior dos mesmos arcos.

4.º Os arcos são tanto maiores, quanto mais proximos do segmento maior.

Para mostrar a verdade de estas proposições consideremos um de esses arcos, tal como CA, girando em torno do raio CO, e formando assim com o segmento menor $CM = k$ e com arcos da base do hemispherio diversos triangulos rectangulos MCA, MCK, MCα, etc. Chamando então b ao lado CA variavel, e θ ao angulo tambem variavel MCA, temos no triangulo MCA

$$\cos\theta = \cot b \tang k \qquad (\alpha)$$
$$\operatorname{sen} k = \operatorname{sen} b \operatorname{sen} \mathrm{CAM} \qquad (\beta).$$

Ora, por que k é o segmento menor, e por tanto inferior a 90°, sen k e tang k são quantidades e positivas. Então a equação (α) nos faz ver que, crescendo θ desde zero até 90°, b cresce desde o valor minimo k até 90°; quanto for $\theta = 90°$, o triangulo, tal como MCK, é birectangulo e o ponto K é polo do arco CM. A equação (β) dá CAM $= 90^\circ$ quando $b = k$, mas então não ha triangulo; crescendo b desde k até 90°, o angulo CAM, que é sempre agudo, diminue até tomar o valor minimo k, que é quando o ponto k for o polo de CM.

Continuando a crescer o angulo θ desde 90 até 180°, o $\cos\theta$ torna-se negativo e vae augmentando o seu valor absoluto; o mesmo acontece a $\cot b$, como indica a equação (α). Então o arco b continua a crescer desde 90° até ao seu valor maximo $180^\circ - k$, como mostra a mesma equação dando-nos, para $\theta = 180^\circ$,

$$\operatorname{tang} b = -\operatorname{tang} k,$$

e o triangulo espherico degenera n'uma lunula, a qual é a quarta parte da superficie da esphera. Ao mesmo tempo a equação (β), dando-nos

$$\operatorname{sen} \mathrm{CAM} = \frac{\operatorname{sen} k}{\operatorname{sen} b},$$

mostra como o angulo CAM, tendo attingido o seu valor minimo k para $\theta = 90^\circ$, principia a crescer repassando pelos mesmos valores até tornar a ser recto, o que acontece quando $b = 180^\circ - k$, e o triangulo degenera na lunula.

Finalmente, para angulos eguaes de um lado e outro da meridiana, MCA $= \theta$ e MCA$' = -\theta$, a equação (α) dá o mesmo valor para b; os dois triangulos rectangulos são eguaes por symetria. Vê-se ao mesmo tempo que na lunula KCK'MK, onde existe o segmento menor da meridiana, se podem tirar do ponto C para a circumferencia da base muitos pares de arcos eguaes, CB e CB$'$, CA e CA$'$, CF e CF$'$, etc., devendo cada arco ser maior do que k e menor do que um quadrante. Na outra lunula, que com a primeira prefaz o hemispherio, se pode fazer o mesmo, sendo então cada arco superior a 90° e menor de que $180^\circ - k$; taes são os arcos Cα e Cα', CB$''$ e CB$'''$, etc.

27. Sabido isto, figuremos os dados do quinto caso, e supponhamos primeiro o angulo A agudo; o lado b pode ser menor, egual ou maior que um quadrante.

1.º

$$A < 90^\circ ; b < 90^\circ$$

Se $a < b$, na lunula, cujo angulo é CAM = A, pódem construir-se com os mesmos elementos dois triangulos esphericos differentes; o problema tem assim duas soluções, que são os triangulos CBA e CB′A, e o angulo B′ de um é o supplemento do angulo B do outro.

Se $a = b$, ha só uma solução; é o triangulo isosceles ACA′, onde o angulo A′ = A é agudo.

Se $a > b$ e $a + b < 180^\circ$, ha só uma solução, que é um triangulo tal como ACF′, ficando o pé F′ do arco a entre α e A′, pois que o arco Cα de figura é o prolongamento do arco AC = b. O angulo em F′ é agudo.

Se $a > b$, e $a + b \geqq 180^\circ$, não ha solução, por que n'um caso haveria lunula e não triangulo, no outro o pé do lado a cahiria fóra da lunula do angulo A, ficando por isso o lado c maior que uma semicircumferencia.

2.º

$$A < 90^\circ ; b = 90^\circ$$

Se $a < b$, ha duas soluções. Sendo na figura CK = 90°, são dois triangulos CBK e CB′K; um dos angulos B′ é agudo, o outro obtuso.

Se $a = b$, temos lunula ou nada, e por tanto não ha triangulo.

Se $a > b$, tambem não ha solução, por que o terceiro lado do triangulo viria maior que uma semicircumferencia, vindo o pé do arco a a cahir na lunula de angulo 180° — A, por exemplo em B‴.

3.º

$$A < 90^\circ \,;\, b > 90^\circ$$

Seja A o angulo em α, e b o arco $C\alpha$.

Se $a < b$, e $a + b < 180^\circ$, temos duas soluções, taes como os triangulos $BC\alpha$ e $B'C\alpha$, cahindo o pé do lado em algum ponto entre A e A′. Um angulo B é agudo, o outro obtuso.

Se $a < b$ e $a + b = 180^\circ$, existe só uma solução; é o triangulo $\alpha\, CA'$ com o angulo em A′ obtuso.

Se $a < b$ e $a + b > 180^\circ$, ha uma solução unica; é um triangulo como $\alpha\, CF'$, cahindo F′ entre A′ e α, e sendo obtuso o angulo em F′.

28. Supponhamos agora o angulo A recto, e consideremos os casos de ser b menor, egual ou maior que um quadrante.

4.º

$$A = 90^\circ \,;\, b < 90^\circ$$

O triangulo é rectangulo e temos

$$\cos a = \cos b \cos c$$

Se $a < b$, é $\cos a > \cos b$, donde resulta $\cos c > 1$. O triangulo é impossivel, e não ha solução.

Se $a = b$, é $\cos a = \cos b$ e $\cos c = 1$: temos então $c = o$, e não ha solução, por que não existe triangulo.

Se $a > b$ e $a + b < 180^\circ$, ha uma solução unica; é um triangulo rectangulo como MCB ou o seu symetrico MCB′, onde o angulo B é agudo.

Se $a > b$ e $a + b = 180^\circ$, vem $\cos a = -\cos b$, $\cos c = -1$ ou $c = 180^\circ$; fica uma lunula, e não ha solução.

Se $a > b$, e $a + b > 180^\circ$, fazendo $b' = 90^\circ - b$ e $a + b = 180^\circ + a'$, teremos

$a = 180 + a' - b$

$$b = 90° - b',$$

$$a = 90° + (a' + b'),$$

e nos dá

$$\cos c = \frac{\cos a}{\cos b} = \frac{-\operatorname{sen}(a' + b')}{\operatorname{sen} b'};$$

ora, por ser $a' + b' = a - 90° < 90°$, e tambem $b' = 90° - b < 90°$, sahe para valor absoluto do $\cos c$ um numero maior que a unidade, o que é absurdo. Não ha solução.

5.°

$$A = 90°; b = 90°$$

Se $a < b$, temos

$$\cos c = \frac{\cos a}{0} = \infty;$$

o triangulo é impossivel e não ha solução.

Se $a = b$, vem

$$\cos c = \frac{0}{0},$$

o que nos indica haver uma infinidade de soluções. Na verdade, se do polo de hemispherio tirarmos quadrantes de circumferencias maximas e taes, que não sejam uns o prolongamento dos outros, dois quadrantes quaesquer n'estas condições e o arco da circumferencia da base comprehendida entre elles fecham um triangulo isosceles ou equilatero, formado assim com os dados do problema; e são innumeraveis os triangulos que d'est' arte se poderão construir.

Se $a > b$, temos ainda $\cos c = \infty$, e não ha solução.

6.°

$$A = 90°; b > 90°$$

Se $a < b$, e $a + b < 180°$, pondo

$$b = 90° + b',$$

$$a + b = 180° - a';$$

temos

$$a = 90^\circ - (a' + b')$$

e nos dá

$$\cos c = -\frac{\operatorname{sen}(a' + b')}{\operatorname{sen} b'};$$

um coseno de valor absoluto maior que a unidade mostra que o triangulo é impossivel, e não ha solução.

De $a < b$ e $a + b = 180^\circ$, temos

$$\cos c = -1,$$

que dando $c = 180^\circ$, mostra existir lunula, e não ha solução.

Se $a < b$, e $a + b > 180^\circ$, temos uma solução; é um triangulo tal como NCB′ ou o seu symetrico NCB, onde o augulo B é obtuso.

Se $a = b$, temos $\cos c = 1$, ou $c = 0$ e não ha solução.

Se $a > b$, por ser $b > 90^\circ$ e tanto este lado como a inferiores a 180°, e porque no segundo quadrante a maior arco corresponde um coseno maior em valor absoluto, a equação

$$\cos c = \frac{\cos a}{\cos b} > 1$$

mostra a impossibilidade de se formar triangulo, e não ha solução.

29. Supponhamos finalmente o angulo A obtuso. Temos ainda de considerar os casos de ser b menor, egual ou maior do que 90°.

7.°

$$A > 90^\circ;\ b < 90^\circ$$

Seja $a < b$. Figuremos por CAN na lunula CANαC o angulo A. Os arcos menores que $CA = b$ e partindo de C terminam entre A e A′, ficando na lunula cujo angulo é $180^\circ - A$. Nas condições postas não pode pois existir triangulo, e não ha solnção.

Sendo $a = b$, temos $c = 0$ e não ha solução.

Se $a > b$, e $a + b < 180^\circ$, ha só uma solução; e tomando $C\alpha' = C\alpha = 180^\circ - b$, vemos que essa solução é um triangulo ACF do qual o lado $a = CF$ termina entre A a α'. O angulo em F é agudo.

Sendo $a > b$, e $a + b = 180^\circ$, só existe uma solução; é o triangulo $AC\alpha'$, onde o angulo em α' é agudo.

Sendo $a > b$, e $a + b > 180^\circ$, temos duas soluções; são triangulos taes como ACB″ e ACB‴, dos quaes o lado a termina n'um ponto de circumferencia da base do hemispherio entre α e α'.

O angulo B de um triangulo é agudo, o outro obtuso.

8.º

$A > 90^\circ$; $b = 90^\circ$

Figuremos $CK = b$, e $CKN = A$.

Se $a < b$, o lado a ficaria na lunula do angulo $180^\circ - A$, terminando entre K e K′, não é possivel formar triangulo com taes elementos, e assim não ha solução.

Se $a = b$, temos lunula ou nada e não ha solução.

Se $a > b$, ha duas soluções, como são os triangulos KCB″ e KCB‴; um tem agudo o angulo B, o outro tem-no obtuso. Estes dois triangulos porém, quando seja $a = A$, reduzem-se ao triangulo rectangulo KCN, formando uma só solução.

9.º

$A > 90^\circ$; $b > 90^\circ$

Seja $C\alpha N = A$ e $C\alpha = b$.

Se $a < b$, e $a + b < 180^\circ$, tomando $C\alpha' = C\alpha$, vê-se que deveria o pé do arco a cahir entre A e α' para que o mesmo lado a fique menor do que o lado b e exista na lunula do angulo A; mas vinha a ser $a+b>180°$. Cahindo o pé do arco A entre A e A′, tinha-se $a<b$ e $a+b<180°$; mas o terceiro dado sahiria maior do que uma semi-circumferencia. E' pois impossivel satisfazer ás condições, e não ha solução.

Se $a<b$, e $a+b=180°$, temos lunula e não ha solução.

Se $a<b$, e $a+b>180°$, ha uma solução unica; é um triangulo como αCF, cahindo o pònto F entre A e α'. O angulo em F é obtuso.

Se $a=b$, temos uma só solução; é o triangulo isosceles $\alpha C \alpha'$.

Se $a>b$, ha duas soluções; são dois triangulos como $\alpha CB'$ e $\alpha CB'''$, tendo um agudo, e outro obtuso, o angulo B.

30. Compendiando n'um quadro os resultados d'esta discussão, e omittindo, por desnecessarios, os casos de impossibilidade, forma-se a seguinte tabella primeira, applicavel ao caso de serem dados dois lados a e b e angulo A opposto ao primeiro d'estes lados.

TABELLA PRIMEIRA

Angulo diedro A	Arco b	Relações de a com b	Numero de soluções
$A < 90^\circ$	$b < 90^\circ$	$a < b$	Duas
		$a = b$	Uma
		$a > b$, e $a + b < 180^\circ$	Uma
	$b = 90^\circ$	$a < b$	Duas
	$b > 90^\circ$	$a < b$, e $a + b < 180^\circ$	Duas
		$a < b$, e $a + b = 180^\circ$	Uma
		$a < b$, e $a + b > 180^\circ$	Uma
$A = 90^\circ$	$b < 90^\circ$	$a > b$, e $a + b < 180^\circ$	Uma
	$b = 90^\circ$	$a = b$	Infinitas
	$b > 90^\circ$	$a < b$, e $a + b > 180^\circ$	Uma
$A > 90^\circ$	$b < 90^\circ$	$a > b$, e $a + b < 180^\circ$	Uma
		$a > b$, e $a + b = 180^\circ$	Uma
		$a > b$, e $a + b > 180^\circ$	Duas
	$b = 90^\circ$	$a > b$	Duas
	$b > 90^\circ$	$a < b$, e $a + b > 180^\circ$	Uma
		$a = b$	Uma
		$a > b$	Duas

31. Applicando esta tabella primeira aos elementos a', b' e A′ do triangulo A′B′C′ polar do triangulo ABC, construe-se um quadro que, attendendo ás relações conhecidas $a' = 180^\circ - A$, $b' = 180^\circ - B$ e $A' = 180^\circ - a$, se torna na seguinte tabella, a qual serve, quando são dados dois angulos A e B e o lado a opposto ao primeiro.

TABELLA SEGUNDA

Arco a	Angulo diedro B	Relações de A com B	Numero de soluções
$a < 90°$	$B < 90°$	$A < B$	Duas
		$A = B$	Uma
		$A > B$, $A + B < 180°$	Uma
	$B = 90°$	$A < B$	Duas
	$B > 90°$	$A < B$, e $A + B < 180°$	Duas
		$A < B$, e $A + B = 180°$	Uma
		$A < B$, e $A + B > 180°$	Uma
$a = 90°$	$B < 90°$	$A > B$, e $A + B < 180°$	Uma
	$B = 90°$	$A = B$	Infinitas
	$B > 90°$	$A < B$, e $A + B > 180°$	Uma
$a > 90°$	$B < 90°$	$A > B$, e $A + B < 180°$	Uma
		$A > B$, e $A + B = 180°$	Uma
		$A > B$, e $A + B > 180°$	Duas
	$B = 90°$	$A > B$	Duas
	$B > 90°$	$A < B$, e $A + B > 180°$	Uma
		$A = B$	Uma
		$A > B$	Duas

APPENDICE

I

Outros modos de deducção das formulas fundamentaes da trigonometria espherica

1. Por outra construcção egualmente simples se podem deduzir as formulas fundamentaes da trigonometria espherica.

Seja O (fig. 17.ª) o centro da esphera, e tiremos raios OA, OB e OC para os vertices do triangulo ABC, no qual suppomos a e b menores que um quadrante, agudos os angulos A e B, e projectemos o ponto C perpendicularmente sobre o plano do lado opposto, e bem assim sobre os raios OA e OB. Sejam P, Q e R estas projecções; tiremos as rectas PQ e PR, as quaes, pelo theorema geometrico chamado das tres perpendiculares, formam angulos rectos com OA e OB; finalmente tiremos QS parallela e PR, e PT parallela a OB.

Temos assim os angulos $PQC = A$ e $PRC = B$, por serem os rectilineos dos diedros A e B do triedro OABC; e os angulos PQS e $AOB = c$ são eguaes como complementos do mesmo angulo OQS.

Chamado R ao raio da esphera, será

$$\begin{aligned} OR &= R \cos a\ , \\ CR &= R \operatorname{sen} a\ , \\ OQ &= R \cos b\ , \\ CQ &= R \operatorname{sen} b\ , \\ QT &= PQ \cos c\ , \\ SR = PT &= PQ \operatorname{sen} c\ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} OS &= OQ \cos c = R \cos b \cos c\ , \\ PQ &= CQ \cos A = R \operatorname{sen} b \cos A\ , \\ PR &= CR \cos B = B \operatorname{sen} a \cos B\ , \\ QS &= OQ \operatorname{sen} QOS = R \cos b \operatorname{sen} c\ ; \end{aligned}$$

e por ser

$$\begin{aligned} OR &= OS + SR, \\ PR &= TS = QS - QT\ , \\ CP &= CQ \operatorname{sen} A = CR \operatorname{sen} B\ , \end{aligned}$$

substituindo os valores precedentes e supprimindo o factor commum R, vem

$$\left.\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A\ , \\ \operatorname{sen} a \cos B &= \cos b \operatorname{sen} c - \operatorname{sen} b \cos c \cos A\ , \\ \operatorname{sen} b \operatorname{sen} A &= \operatorname{sen} a \operatorname{sen} B, \end{aligned}\right\} (a),$$

Estas tres equações não são distinctas, por quanto, se elevar-mos ao quadrado e as sommarmos ordenadamente, obtem-se uma identidade. Projectando porem o ponto B sobre o plano do arco b e sobre os raios OC e ~~OA~~, se tira promptamente a equação

$$\operatorname{sen} C \operatorname{sen} a = \operatorname{sen} A \operatorname{sen} c,$$

a qual com o grupo (a) forma o syntema de tres equações distinctas entre os seis elementos do triangulo.

Ainda que, deduzidas n'uma hypothese particular, as formulas são geraes, pois vimos, discutindo a primeira d'ellas em diversas condições, que esta sempre se verificava; e vimos egualmente como, applicando aos outros dois lados b e c, o theorema que elle representa, se consegue o grupo (A), do qual se deduzem, como então fizemos, todas as formulas de trigonometria espherica.

2. As mesmas equações (a) se podem ainda obter pelas formulas de transformação de coordenadas. (Fig. 18.ª)

Sejam x, y, z as coordenadas rectangulares do ponto C; designemos por R a sua distancia CO á origem, por a o angulo que esta recta faz com a parte positiva do eixo dos z, e por B′ o angulo diedro do plano COz com o dos zx, o qual tem por medida o seu rectilineo formado em O pelo eixo dos x com a projecção OP da recta OC sobre o plano dos xy. Temos assim

$$y = R \text{ sen } a \text{ sen } B'$$
$$x = R \text{ sen } a \cos B'$$
$$z = R \cos a$$

Agora, conservando a mesma origem e o mesmo eixo dos y, tomemos novo systema de coordenadas rectangulares; o plano dos $x'z'$ é ainda o mesmo que o dos zx, mas os eixos Ox e Ox' fazem entre si um angulo, o qual é o mesmo que o formado por Oz com Oz', e que designaremos por c. Projectando então o ponto C sobre o plano dos $y'x'$, chamando b ao angulo COz', e A ao diedro comprehendido pelos planos COz', e z'Ox, e contando o diedro a partir de este plano, como o diedro B′, teremos do mesmo modo

$$x' = R \text{ sen } b \cos A\,,$$
$$y' = R \text{ sen } b \text{ sen } A\,,$$
$$z' = R \cos b$$

Pelas formulas de transformação de eoordenadas são

$$z = x' \text{sen } c + z' \cos c,$$
$$y = y'\,,$$
$$x = x' \cos c - z' \text{sen } c\,,$$

e, pondo n'ellas os valooes precedentes das coordenadas de um e de outro systema, e supprimindo o factor commum R, vem

$$\cos a = \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A + \cos b \cos c\ ,$$
$$\operatorname{sen} a \operatorname{sen} B' = \operatorname{sen} b \operatorname{sen} A\ ,$$
$$\operatorname{sen} a \cos B' = \operatorname{sen} b \cos c \cos A - \cos b \operatorname{sen} c\ .$$

Ora uma superficie espherica, cujo centro seja O, e o raio $R = CO$, é encontrada nos pontos A, B e C pelas rectas Oz', Oz e OC, as quaes são as arestas de um triedro com o vertice em O, que tem por elementos os angulos planos a, b e c, e os diedros A, $B = 180° - B'$, e $BCOA = C$. As faces d'este tiedro determinam na superficie da esphera o triangulo ABC, e ás equações antecedentes, fazendo $B' = 180° - B$, tornam-se nas seguintes

$$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A\ ,$$
$$\operatorname{sen} a \operatorname{sen} B = \operatorname{sen} b \operatorname{sen} A\ ,$$
$$\operatorname{sen} a \cos B = \cos b \operatorname{sen} c - \operatorname{sen} b \cos c \cos A\ ,$$

que são as equações (a).

D'estas equações a primeira dá, pela permutação das letras, o grupo que foi designado por (A), e pelo uso do triangulo polar o grupo (C); a divisão entre as outras duas dá uma equação, que por permutações fornece o grupo (D), e a regra dos quatro senos egualmente constitue o grupo (B).

II

Problemas de trigonometria espherica

1.º

Calcular o volume de um parallelipipedo obliquo, conhecendo as arestas e os angulos que estas fazem entre si. (Fig. 19.ª)

Seja M um vertice do parallelipipedo, onde as tres arestas $MA = a$, $MB = b$ e $MC = c$ se encontram e fazem os angulos $BMC=\alpha$, $CMA=\beta$ e $AMB=\gamma$; abaixemos do ponto C, extremidade da aresta c, as perpendiculares CP e CQ sobre a face AMB e a aresta MA ou seus prolongamentos, e tiremos a recta PQ. Tomando M para centro de uma esphera, as intersecções da sua superficie com as faces do parallelipipedo formam um triangulo espherico, que tem por elementos α, β, γ e os angulos diedros cujas arestas são MA, MB, e MC; o angulo rectilinio CQP é a medida do angulo A.

Escolhendo para base do parallelipipedo a face determida pelas arestas a e b, será $CP=h$ a altura, e designando por V o volume do parallelipipedo e por h' a perpendicular CQ, temos

$$h'=c \operatorname{sen}\beta\,,$$
$$h=h' \operatorname{sen} A\,,$$

a por tanto

$$h=c \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen} A\,,$$

que nos dá

$$V=abc \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\gamma \operatorname{sen} A\,.$$

Ora, fazendo $\alpha+\beta+\gamma=2p$, temos

$$\operatorname{sen}\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-\beta)\operatorname{sen}(p-\gamma)}{\operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\gamma}}\,,$$

$$\cos\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}p \operatorname{sen}(p-\alpha)}{\operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\gamma}}\,,$$

que, por ser

$$\operatorname{sen} A=2\operatorname{sen}\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}A\,,$$

nos dão

$$V=2abc\sqrt{\operatorname{sen}p \operatorname{sen}(p-\alpha)\operatorname{sen}(p-\beta)\operatorname{sen}(p-\gamma)}\,.$$

2.º

Dadas as coordenadas geographicas de dois pontos da su-

perficie da terra, achar sobre a mesma superficie a menor distancia entre esses pontos.

Suppoem-se a terra espherica, e os dois pontos projectados sobre a superficie dos mares prolongada.

Sejam A e B (fig. 5.ª e 10.ª) os dois logares. Se o meridiano principal CD passa entre elles (fig. 10.ª), temos um triangulo espherico ABC, onde o angulo C no polo é a somma da longitude oriental de B com a longitude occidental de A, e por tanto conhecido. Os lados *a* e *b* são os complementos das latitudes dos mesmos logares, quando ficam no mesmo hemispherio; se um d'elles ficar em hemispherio opposto, o respectivo lado será egual a 90° mais a latitude n'esse hemispherio. Temos assim no triangulo ABC conhecidos dois lados e o angulo comprehendido.

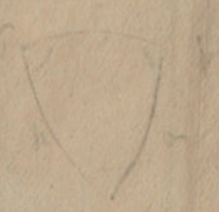
O mesmo acontece quando, como na fig. 5.ª, o meridiano principal cahe fóra do angulo dos meridianos dos dois logares; então o angulo C é a differença das suas longitudes.

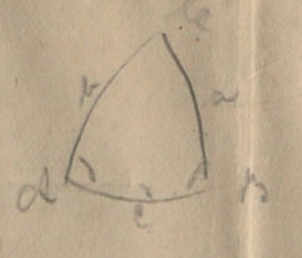
A incognita é o arco AB. As formulas (15) e (19) do n.º 19 dão-nos em graos o valor d'esse arco, e adoptando para comprimento do grao medio G = 111137^m, teremos em metros a distancia pedida, multiplicando por G o numero, inteiro ou fraccionario, que exprime aquelle arco em graos.

2º caso

FIM

TRIGOIOMETRIA ESPHERICA





$\cos b = -\cos A \cos B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \cos c$

$\cos b = \cos A(-\cos B + \operatorname{tang} A \operatorname{sen} B \cos c)$

$\operatorname{tang} A \cos c = \cot \theta$

$\cos b = \cos A\left(-\cos B + \operatorname{sen} B \frac{\cos \theta}{\operatorname{sen} \theta}\right)$

$\cos b = \frac{\cos A}{\operatorname{sen} \theta} \operatorname{sen}(B - \theta)$

$\cos B \cos c = -\operatorname{sen} B \cot A + \operatorname{sen} c \cot a$

$\operatorname{sen} B \cot A + \cos B \cos c = \operatorname{sen} c \cot a$

$\operatorname{sen} c \cot a = \cos c\left(\cos B + \operatorname{sen} B \frac{\cot A}{\cos c}\right)$

$\frac{\cot A}{\cos c} = \tan \theta$

$\operatorname{sen} c \cot a = \frac{\cos c}{\cos \theta}(\cos B \cos \theta + \operatorname{sen} B \operatorname{sen} \theta)$

$\operatorname{sen} c \cot a = \frac{\cos c}{\cos \theta} \cos(B - \theta)$

$\cos b = \frac{\cot c}{\cos \theta}(A - \theta)$

ERRATAS

Pag.	Linha.	Erros	Emendas
14	16	formas	formulas
15	25	todas	todos
16	10	*opposto*	*opposto,*
20	5	positivo,	positivo.
23	11	um, o mesmo;	um; o mesmo,
„	23	isoceles	isosceles
24	22	a tratar	tratar
25	20	*os dois*	*dois*
„	25	o lado *c*:	o lado *c*.
„	27	equáção	equação