il a été pensé avant d'avoir été écrit. Estas palavras, completamente justas, dão testemunho do cuidado com que está escripto o livro.

Os pontos de Arithmetica cuja exposição é mais difficil, como a introducção da noção de fracção e a theoria dos numeros irracionaes, são n'esta obra excellente tractados com a maior clareza e da maneira mais propria para serem comprehendidos pelos alumnos. O auctor, vendo quanto é inconveniente para os alumnos uma exposição demasiadamente abstracta d'estes assumptos, introduz, com a noção de numero fraccionario e de numero irracional, a representação d'estes numeros por segmentos de recta, e explica as operações sobre estes numeros pelas operações sobre as rectas que os representam.

A obra é dividida em seis partes, em que são estudadas, além das doutrinas que habitualmente são consideradas em livros d'esta natureza, a theoria das quantidades negativas, os principios da theoria das congruencias binomias, etc.

Terminando diremos que o Tratado de Arithmetica do sr. Hambert é um livro excellente, com a publicação do qual este sabio geometra prestou um grande serviço aos alumnos, que têm n'elle um bom guia para o seu estudo, e aos professores que têm n'elle um bom modelo para o seu ensino.

P. Painlevé. — Mémoire sur les équations différentielles du premier ordre, (Paris, G. Villars, 1892).

A theoria geral da integração das equações differenciaes de primeira ordem tem sido objecto da parte do sr. Painlevé de trabalhos importantes. Na presente memoria, que mereceu a alta honra de ser premiada pela Academia das sciencias de Paris, estudou este eminente geometra a equação completa $F(x, y, y')=0$ para procurar o que acontece a cada integral particular d'esta equação quando se faz variar x de uma maneira qualquer no plano onde esta variavel se representa, tendo em attenção os *pontos criticos* do integral, isto é os pontos em que alguns valores de y se permutam. Partindo dos trabalhos dos srs. Fuchs e Poincaré a respeito dos integraes que só têm *pontos criticos fixos* (isto é que não variam com as constantes arbitrarias da integração) e generalisando estes ultimos, estuda os integraes que têm *pontos criticos moveis*, no caso em que, x variando sem descrever curvas fechadas que contenham os pontos criticos fixos, z adquire um numero limitado de valores em cada ponto x, e determina as condições para que esta circumstancia se dê. Para tractar esta questão difficil faz o auctor, em dois capitulos preliminares, um estudo profundo de algumas propriedades caracteristicas das equações differenciaes de primeira ordem e das propriedades das transformações racionaes das curvas algebricas.

Ch. J. de la Vallée Poussin. — Étude des integrales à limites infinies, etc. (Annales de la Société scientifique de Bruxelles, t. XVI).

—— *Recherches sur la convergence des intégrales définies (Journal de math. pures et ap., 1892).*

Na primeira d'estas bellas e importantes memorias o auctor, considerando os integraes com limites infinitos das funcções continuas, dá regras precisas para a differenciação e integração das funcções definidas por estes integraes. Para esse fim introduz a noção de convergencia uniforme dos integraes definidos (considerando como *uniformemente convergente* no intervallo de $\alpha = a$ a $\alpha = b$ o integral $\int_p^\infty f(x, \alpha)\, dx$ quando a todo o numero positivo ε corresponde um numero n' tal que seja

$$\left| \int_p^\infty f(x, \alpha)\, dx \right| < \varepsilon$$

para todo o valor de α no intervallo considerado e todo o valor de n superior a n') e dá methodos para reconhecer se qualquer integral dado é uniformemente convergente. Dos principios expostos faz applicação aos integraes mais importantes que têm sido considerados pelos geometras.

Na segunda memoria considera o illustre geometra belga os integraes das funcções descontinuas em um numero finito ou infinito de pontos. Faz primeiramente um estudo profundo das condições de convergencia tanto dos integraes simples como dos integraes duplos e estuda em seguida ás condições em que é possivel inverter a ordem das integrações.

P. Pizzeti. — *I fondamenti matematici per la critica dei risultati sperimentali (Atti della R. Università di Genova, 1892).*

N'este excellente trabalho estuda o sr. Pizzeti, debaixo do ponto de vista theorico, o problema que tem por objecto combinar do modo mais vantajoso as observações e assignar a precisão de um resultado experimental. N'este estudo não se occupa, como elle mesmo diz, das particularidades de interesse puramente practico do problema, mas sómente da sua parte fundamental e phylosophica. A exposição da theoria a que o trabalho é consagrado é acompanhada de uma critica profunda dos trabalhos mais importantes dos geometras a este respeito e de muitas informações historicas relativas a cada ponto considerado.

Revue semestrielle des publications mathématiques, Amsterdam, Versluys.

Com o fim de fazer conhecer sem demora importante o titulo e um resumo do assumpto das memorias mathematicas publicadas nos principaes jornaes scientificos, vem a Sociedade mathematica de Amsterdam de fundar uma revista, com o titulo precedente, confiando a sua direcção aos illustres professores Schoute, Korteweg, Kapteyn, Kluyver e Zeeman. Em janeiro e julho de cada anno será publicado um fasciculo d'esta revista, contendo o fasciculo de janeiro a analyse dos trabalhos publicados desde 1 de março até 1 de outubro do anno precedente e o fasciculo de outubro a analyse dos trabalhos publicados desde 1 de outubro do anno precedente até 1 de março do anno corrente.

Com esta publicação presta a Sociedade mathematica de Amsterdam um serviço relevante aos geometras dando-lhes sem demora conhecimento do que se vae publicando sobre sciencias mathematices.

G. Fontené. — *L'hyperespace a* n — 1 *dimensions, Paris, Gauthier-Villars, 1892.*

Em geometria não euclideana as propriedades metricas estão ligadas á quadrica directriz de uma correspondencia por polares reciprocas. Na presente Memoria o sr. Fontené, collocando-se n'um ponto de vista mais geral, considera, em logar d'esta correspondencia por polares reciprocas, uma correlação metrica geral e estuda as propriedades metricas do espaço assim constituido.

A. Macfarlane. — *Principles of the Algebra of Physics, (Salem, 1891).*

—— *The imaginary of Algebra, (Salem, 1892).*

Referem-se estes opusculos á extensão ao espaço da theoria das quantidades geometricas. N'elles o auctor, professor na Universidade de Texas, lança os fundamentos de uma algebra mais geral do que a ordinaria, que unifica o methodo de Hamilton e o methodo de Grassmann. Encontram-se ainda n'estes opusculos muitas indicações historicas e interessantes observações criticas a respeito do assumpto considerado.

S. Pincherle. — *Analisi algebrica, Milano, Hoepli, 1893.*

O presente manual de Analyse algebrica faz parte de uma collecção de manuaes que com o nome de *Manuali Hoepli* está sendo publicada em Milão. É um pequeno livro em que o sr. Pincherle conseguiu reunir a parte mais essencial da Analyse algebrica, sem que da concisão, a que foi obrigado pelo espaço a que tinha de se limitar, resulte falta de clareza ou omissão de alguma consideração necessaria para o rigor das demonstrações e regular encadeamento dos assumptos.

Eis o objecto de cada um dos doze capitudos d'esta obra excellente:

I. Numeros inteiros. II. Numeros reaes. III. Numeros complexos. IV: Limites. V. Raizes. VI. Calculo combinatorio. VII. Applicações do calculo combinatorio (desenvolvimento do binomio, potencias similhantes dos numeros naturaes, probabilidades). VIII. Series. IX. Productos infinitos. X. Fracções continuas. XI. Series de potencias. XII. Funcção exporneciai. Funcções circulares.

C. A. Laisant. — Recueil de problèmes de Mathématiques, Paris, Gauthier-Villars.

Mais dois volumes de obra util, a que nos referimos na pagina 83 do t. XI d'este *Jornal*, vêm de ser publicados.

O primeiro é dedicado á Geometria analytica a tres dimensões e á Geometria superior, e ahi são successivamente considerados problemas relativos a figuras rectilineas, a figuras esphericas, a curvas e superficies de segunda ordem, aos logares geometricos de pontos, aos logares geometricos de rectas, ás superficies envolventes, ás curvas e superficies algebricas e ás curvas e superficies em geral.

O outro volume é dedicado a Arithmetica, Algebra elementar e Trigonometria, e ahi são considerados os problemas relativos á parte d'estas sciencias que em Portugal é estudada nos Lyceus, reservando o auctor para volumes seguintes os problemas que exigem maiores conhecimentos.

Annuaire pour l'an 1893, publié par le Bureau des Longitudes, (Paris, Gauthier-Villars).

Além das informações praticas que é uso conter esta util publicação, o *Annuaire du Bureau des Longitudes* para 1893 contem artigos sobre moedas, statistica, geographia, etc., e as noticias scientificas seguintes: *Sobre o Observatorio do Monte Branco*, por Jansen. *Sobre a correlação dos phenomenos de electricidade estatica e dynamica e a definição das unidades electricas*, por Cornu. *Discurso sobre Aeronautica*, por Janssen. *Discurso pronunciado nos funeraes de O. Bonnet*, por Tisserand, etc.

E. Lampe. — Die Entwickelung der Mathematik im Zusammenhange mit der Ausbreitung der Kultur, (Berlim, 1893).

Contem este opusculo um interessante discurso pronunciado na Real Eschola technica superior de Berlim pelo illustre Director d'esta Eschola o sr. E. Lampe, no dia 26 de janeiro de 1893, a respeito do desenvolvimento adquirido pelas sciencias mathematicas na actualidade. Nota-se n'este discurso uma noticia desenvolvida sobre as publicações periodicas que têm sido fundadas nos diversos paizes para o estudo especial das sciencias mathematicas.

Davide Besso. — Sopra un opuscolo di Michelangelo Ricci (Periodico di Matematica, etc., t. VIII).

Ricci nasceu em Roma em 1619 e morreu n'esta mesma cidade em 1682. O opusculo a que o sr. Besso se refere intitula-se: *Exercitatio geametrica de maximis et minimis.*

Merriman. — Final formulas for the algebraic solution of quartic equations (Bul. of the New York Math. Society, 1892).

A. Gützmer. — *Uber gewisse partielle Differentialgleichungen höherer Ordnung, (Berlin, 1893).*

G. Pirondini. — *Intorno alle indicatrici spheriche delle linnee dello spazio (Rivista di Matematica,* t. III).

M. Lerch. — *Studie se oboru Malmstenovskych rad a invariantu forem kvadratickych (Mémoires de l'Académie de Prague, 1893).*

M. Lerch. — *Sur une integrale d'Euler (Bulletin des sciences mathématiques, 1892).*

Demonstração simples da formula de Euler

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x} = \frac{\pi}{\operatorname{sen} a\pi}.$$

Ch. Hermite. — *Sur la transformation des fonctions elliptiques (Mémoires de l'Académie de Prague, 1892).*

H. Burkhardt. — *Ueber einen fundamentalen Satz der Lehre von den endlichen Gruppen linearer Substitutionen (Mathematische Annalen,* t. 41).

G. Vivanti. — *Sull'uso della representatione geometrica nella teoria aritmetica dei numeri eomplessi* (*Rivista di Matematica*, t. II).

F. Giudice. — *Sulle equazioni algebriche* (*Rivista di Matematica*, t. II),

---

D. André. — *Sur le partage en quatre groupes des permutations des* n *premiers nombres* (*Comptes rendus de l'Acad. des sciences de Paris*, 1893).

R. Guimarães. — *Sobre uma formula geometrica* (*Progreso matematico*, t. II).

Guccia. — *Due proposizioni relative alle involuzioni di specie qualunque dotate di singolarità ordinarie* (*Rend. del Circolo matematico di Palermo*, 1893).

G. T.

SUR LES SÉRIES DE FONCTIONS

PAR

S. Pincherle

(Professeur à l'Université de Bologne)

Je me propose, dans cette note, de montrer comment on peut passer d'une série de la forme

$$(1) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{x-a_n}$$

à une série de la forme

$$(2) \ldots\ldots \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_n}{(x-a_0)(x-a_1)\ldots(x-a_n)}.$$

Je suppose que pour toutes les valeurs de x qui ne coïncident avec aucun des points $a_0, a_1, \ldots a_n, \ldots$ la série

$$(3) \ldots\ldots\ldots\ldots S(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{t^{n+1}(x-a_n)}$$

soit convergente pour toutes les valeurs de t telles que l'on ait

$|t| > \alpha$, α étant un nombre positif fini. Si

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$$

est une série de puissances convergente dans un cercle de rayon α' supérieur à α, on aura, en désignant par (ρ) une circonférence de centre $t=0$ et de rayon compris entre α' et α:

$$(4) \ldots\ldots\ldots \frac{1}{2\pi i}\int_{(\rho)} S(t, x)\, \varphi(t)\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n}{x - a_n}.$$

Réciproquement, toute série (1) telle que $\Sigma c_n t^n$ soit convergente dans un cercle de rayon supérieur à α peut s'exprimer par une intégrale définie de la forme du premier membre de (4).

Posons maintenant

$$p_n(x) = (x - a_0)(x - a_1) \ldots (x - a_n),$$

et considérons les polynômes en t

$$q_n(t) = \frac{1}{p'_n(a_0)} + \frac{t}{p'^n(a_1)} + \frac{t^2}{p'_n(a_2)} + \ldots + \frac{t^n}{p'_n(a^n)},$$

où $p'_n(x)$ est la dérivée de $p_n(x)$.

On a immédiatement

$$(5) \ldots\ldots\ldots \frac{1}{2\pi i}\int_{(\rho)} S(t, x)\, q_n(t)\, dt = \frac{1}{p_n(x)},$$

d'après la formule de décomposition d'une fraction rationnelle en ses fraction simples.

Or, je dis que toute série de puissances $\varphi(t)$ peut, au moins formellement, se développer en une série de la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n q_n(t).$$

En effet, en multipliant $q_0 = 1$, $q_1(t)$, $q_2(t)$, ... $q_n(t)$ respectivement par $1, p_0(a_n), p_1(a_n), \ldots p_{n-1}(a_n)$ et en sommant, on obtient

$$1 + p_0(a_n)\, q_1(t) + p_1(a_n)\, q_2(t) + \ldots + p_{n-1}(a_n)\, q_n(t) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} t^k \left(\frac{p_{k-1}(a_n)}{p'_k a_k)} + \frac{p_k(a_n)}{p'_{k+1}(a_k)} + \ldots + \frac{p_{n-1}(a_n)}{p'_n(a_k)} \right);$$

or le coefficient de t^k, pour $k < n$, en dehors du facteur

$$\frac{(a_n - a_0)(a_n - a_1) \ldots (a_n - a_{k-1})}{(a_k - a_0)(a_k - a_1) \ldots (a_k - a_{k-1})}$$

commun à tous ses termes, est égal à

$$1 + \frac{a_n - a_k}{a_k - a_{k+1}} + \frac{(a_n - a_k)(a_n - a_{k+1})}{(a_k - a_{k+1})(a_k - a_{k+2})} + \ldots +$$

$$+ \frac{(a_n - a_k)(a_n - a_{k+1}) \ldots (a_n + a_{n-1})}{(a_k - a_{k+1})\, a_k - (a_{k+2}) \ldots (a_k - a_n)},$$

lequel, par une formule connue dans la théorie des fonctions interpolaires, est identiquement nul. Pour $k=1$ au contraire, le coefficient est égal à l'unité. On obtient ainsi

$$(6) \quad t^n = 1 + p_0(a_n)\, q_1(t) + p_1(a_n)\, q_2(t) + \ldots + p_{n-1}(a_n)\, q_n(t)$$

qui permet d'obtenir le développement *formel* de $\varphi(t)$ en une série de fonctions $q_n(t)$. Si l'on a

$$\Sigma\, c_n t^2 = \Sigma\, g_n q_n(t),$$

les coefficients g_n sont donnés par

$$(7) \quad g_n = c_n p_{n-1}(a_n) + c_{n+1} p_{n-1}(a_{n+1}) + \ldots + c_{n+\nu} p_{n-1}(a_{n+\nu}) + \ldots$$

Quant à la convergence de ce développement, elle dépend d'abord du système $a_0, a_1, \ldots a_n, \ldots$; ensuite, pour un système donné, du rayon de converge de le série de puissances $\varphi(t)$. Supposons que ce développement converge uniformément le long de toute la circonférence qui a été précédemment indiquée par (ρ); on aura

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(\rho)} S(t, x)\, \varphi(t)\, dt = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} g_n \int_{(\rho)} S(t, x)\, q_n(t)\, dt,$$

d'où, par la formule (5),

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(\rho)} S(t, x)\, \varphi(t)\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_n}{p_n^{\nu}(x)}.$$

En rappelant la formule (4), on conclut enfin

$$(8) \ldots \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{x-a_n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_n}{(x-a_0)(x-a_1)\ldots(x-a_n)},$$

où les coefficients g_n sont exprimés par la formule (7) en fonction des c_n. C'est là la formule qu'il s'agissait d'établir.

La question inverse, où étant donnée une série de la forme (2), on veut la transformer en une série (1), ou bien, ce qui revient au même, la résolution du système infini d'équations linéaires (7) par rapport aux inconnues c_n, est beaucoup plus facile. On a, en effet,

$$\frac{1}{p_n(x)} = \frac{1}{p'_n(a_0)(x-a_0)} + \frac{1}{p'_n(a_1)(x-a_1)} + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{p'_n(a_n)(x-a_n)},$$

d'où, formellement,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_n}{p_n(x)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_\nu}{x-a_\nu},$$

où

$$(9) \ldots c_\nu = \frac{g_\nu}{p'_\nu(a_\nu)} + \frac{g_{\nu+1}}{p'_{\nu+1}(a_\nu)} + \ldots + \frac{g_{\nu+\mu}}{p'_{\nu+\mu}(a_\nu)} + \ldots,$$

Ce qui résout le problème. Il est facile aussi de donner une condition sous laquelle cette résolution *formelle* est en même temps *effective*. En supposant

$$\lim_{n=\infty} a_n = \infty,$$

et que pour toutes valeurs de r, s on ait un nomber positif d tel que

$$|a_r - a_s| > d;$$

enfin, en supposant que la série $\Sigma g_n t^n$ soit convergente dans un cercle de rayon non nul, d'où suit l'existence de deux nombres positifs M et α tels que

$$|g_n| < M\alpha^n,$$

on aura pour $\alpha < d$

$$|c_\nu| < \frac{M\alpha^\nu}{d^{\nu-1}(d-\alpha)},$$

et sous la même condition, la série $\Sigma \frac{c_\nu}{x-a_\nu}$ est convergente absolument et uniformément pour toutes les valeurs de x, les a_n exclus.

Application. Pour farie une application de ce qui précède, supposons $a_n = n$. On a alors

$$p_n(x) = x(x-1)(x-2)\ldots(x-n)$$

et

$$q_n(t) = \frac{(-1)^n(1-t)^n}{n!},$$

le devéloppement de $\varphi(t)$ en série de $q_n(t)$ n'est donc autre chose que le devéloppement en série de Maclaurin, et l'on a

$$(10) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \varphi(t) = \Sigma g_n \frac{(t-1)^n}{n!},$$

où $g_n = \varphi(1)$. La formule (8) est applicable pourvu que le devéloppement (1) soit convergent dans un cercle de centre $t = 1$ et de rayon plus grand que 2, et sous cette condition on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!\,(x-n)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(n)}(1)}{x(x-1)(x-2)\ldots(x-n)},$$

que j'ai déjà donnée sous une forme un peu différente dans les *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. II, *décembre, 1888.*

SOBRE A ADDIÇÃO E AS DIFFERENCIAES NAS FUNCÇÕES ELLIPTICAS

POR

J. PEDRO TEIXEIRA

I

A primeira das funcções duplamente periodicas,

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots \varphi_1(x-z) = \frac{dn(x-z)}{sn(x-z)\,cn(x-z)},$$

$$(2) \quad \ldots\ldots\ldots \varphi_2(x-z) = \frac{cn(x-z)\,dn(x-z)}{sn(x-z)},$$

tem os polos principaes x e $x+\omega$, com os residuos -1 e $+1$; e a segunda, os polos principaes x e $x+i\omega'$, com aquelles mesmos residuos.

As propriedades das funcções ellipticas, relativas á addição dos semiperiodos, mostram que as funcções consideradas satisfazem ás relações

$$(3) \quad \ldots\ldots \varphi_1(x-i\omega') = \frac{k^2}{\varphi_1(x)} = \frac{k^2\,snx\,cnx}{dnx},$$

$$(4) \quad \ldots\ldots \varphi_2(x-i\omega') = -\varphi_2(x) = -\frac{cnx\,dnx}{snx},$$

que havemos de utilisar no que vae seguir-se.

Como a funcção

$$sn z\, sn(z+a),$$

é tambem duplamente periodica e tem os infinitos principaes $i\omega'$, $i\omega' - a$, com os residuos $\frac{1}{k' sn\, a}$, $-\frac{1}{k' sn\, a}$, o theorema de Liouville applicado aos productos

$$sn z\, sn(z+x)\, \varphi_1(x-z),$$

$$sn z\, sn(z+x)\, \varphi_2(x-z),$$

dá

$$(5) \ldots \begin{cases} sn(x+\omega)\, sn(x+a+\omega) - sn\, x\, sn(u+a) \\ + \dfrac{1}{k' sn\, a}[\varphi_1(x-i\omega') - \varphi_1(x+a-i\omega')] = 0, \end{cases}$$

$$(6) \ldots \begin{cases} sn(x+\omega')\, sn(x+a+i\omega') - sn x\, sn(x+a) \\ + \dfrac{1}{k' sn\, a}[\varphi_2(x-i\omega') - \varphi_2(x+a-i\omega')] = 0. \end{cases}$$

Tendo em vista as relações (3) e (4) e as propriedades das funcções ellipticas, a que já nos referimos, estas equações dão:

$$(5') \ldots \begin{cases} \dfrac{cn\, x\, cn(x+a)}{dn x\, dn(x+a)} - sn\, x\, sn(x+a) \\ = \dfrac{1}{sn\, a}\left[\dfrac{sn(x+a)\, cn(x+a)}{dn(x+a)} - \dfrac{sn x\, cn x}{dn x}\right], \end{cases}$$

$$(6')\ldots\ldots\begin{cases}\dfrac{1}{k^2 sn\,x\,sn(x+a)}-sn\,x\,sn(x+a)\\[2ex] =\dfrac{1}{k^2 sn\,a}\left[\dfrac{cn\,x\,dn\,x}{sn\,x}-\dfrac{cn(x+a)\,dn(x+a)}{sn(x+a)}\right].\end{cases}$$

É d'estas relações que tiramos os theoremas annunciados na epigraphe d'esta nota pela analyse que segue.

II

Multiplicando ambos os membros da segunda por $k^2 sn\,a$, e attendendo a que as expressões

$$k^2 sn\,x\,sn\,a\,sn(x+a),\qquad \frac{cn(x+a)\,dn(x+a)}{sn(x+a)},$$

são funcções symetricas de x e a, vem

$$\frac{sn\,a}{sn\,x\,sn(x+a)}-\frac{cn\,x\,dn\,x}{sn\,x}$$

$$=\frac{sn\,x}{sn\,a\,sn(x+a)}-\frac{cn\,a\,dn\,a}{sn\,a},$$

ou

$$(7)\ \ldots\ldots\ sn(x+a)=\frac{sn^2x-sn^2a}{sn\,x\,cn\,a\,dn\,a-sn\,a\,cn\,x\,dn\,x},$$

que é a formula de addição relativa á funcção $sn\,x$.

Se quizessemos passar para a formula ordinaria, bastaria multiplicar ambos os termos da fracção antecedente pelo binomio

$$sn\,x\,cn\,a\,dn\,a+sn\,a\,cn\,x\,dn\,x.$$

As formulas de addição relativas ás outras funcções são consequencias da anterior e das relações elementares conhecidas; podiam, porém, estabelecer-se directamente por um processo analogo.

A equação (5'), por meio de considerações muito simples, dá o theorema de addição debaixo da fórma

$$sn(x+a)=\frac{sn\,x\,cn\,x\,dn\,a+sn\,a\,cn\,a\,dn\,x}{sn\,x\,sn\,a\,dn\,x\,dn\,a+cn\,x\,cn\,a}.$$

Fazendo n'esta equação $k=0$, resulta

$$\operatorname{sen}(x+a)=\frac{\operatorname{sen} x\cos x+\operatorname{sen} a\cos a}{\operatorname{sen} x\operatorname{sen} a+\cos x\cos a},$$

que é uma fórma do theorema de addição da funcção angular seno.

III

Escrevendo os segundos membros das equações (5') e (6') sob as fórmas

$$\frac{a}{sn\,a}\cdot\frac{1}{a}\left[\frac{1}{\varphi_1(x+a)}-\frac{1}{\varphi_1(x)}\right],$$

$$-\frac{1}{k^2}\cdot\frac{a}{sn\,a}\cdot\frac{1}{a}[\varphi_2(x+a)-\varphi_2(x)],$$

e attendendo a que

$$\lim_{a=0}\frac{a}{sn\,a}=1,$$

temos :

$$(8) \quad \dots\dots\dots\dots \quad d_x \frac{1}{\varphi_1(x)} = \frac{cn^2 x}{dn^2 x} - sn^2 x,$$

$$(9) \quad \dots\dots\dots\dots \quad d_x \varphi^2(x) = k^2 sn^2 x - \frac{1}{sn^2 x}.$$

As equações (1) e (2) mostram que :

$$\frac{1}{\varphi_1(x)} \cdot \varphi_2(x) = cn^2 x,$$

e por isso

$$\varphi_2(x)\, d_x \frac{1}{\varphi_1(x)} + \frac{1}{\varphi_1(x)}\, d_x \varphi_2(x) = 2\, cn\, x\, d_x\, cn\, x.$$

Substituindo n'esta equação os valores de $\frac{1}{\varphi_1(x)}$, $\varphi_2(x)$ e das suas derivadas, dados pelas equações (8) e (9), vem, depois d'um calculo simples :

$$d_x\, cn x = -\, sn x\, dn x.$$

As outras equações

$$d_x\, sn x = cn x\, dn x,$$

$$d_x\, dn x = -\, k^2\, sn x\, cn x,$$

são consequencias d'aquella e das relações fundamentaes conhecidas.

IV

As equações (5) e (6) dão theoremas de addição dos semiperiodos com respeito á funcção $snx\,sn(x+a)$; porém, as considerações empregadas, para estabelecer aquellas equações, não são particulares áquella funcção, podendo empregar-se para obter theoremas do mesmo uso respeitantes a todas as funcções duplamente periodicas, d'onde, por ventura, se poderão tirar theoremas geraes de addição. Assim, se $F(x)$ fôr duplamente periodica e tiver os polos principaes α_j $(j=1, 2, \ldots m)$, com os residuos respectivos A_j $(j=1, 2, \ldots m)$, obteremos muito facilmente:

$$(10) \ldots\ldots \begin{cases} F(x+\omega) = F(x) - \sum_1^m {}_j A_j \varphi_1(x-\alpha_j), \\ F(x+i\omega') = F(x) - \sum_1^m {}_j A_j \varphi_2(x-\alpha_j). \end{cases}$$

D'estas equações deduz-se o seguinte theorema, que poderá ter alguma importancia:

Duas funcções duplamente periodicas são identicas quando tiverem os mesmos polos simples, com os mesmos residuos, e satisfizerem conjunctamente a alguma das relações:

$$(11) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad f(x+\omega) = -f(x),$$

$$(12) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad f(x+i\omega') = -f(x),$$

$$(13) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \begin{cases} f(x+\omega) = \pm \dfrac{C}{f(x)}, \\ f(x+i\omega') = \pm \dfrac{C}{f(x)}. \end{cases}$$

Nos nossos estudos sobre as funcções ellipticas temos encontrado muitas funcções ás quaes é applicavel esta proposição. Por exemplo: a funcção $\varphi_1(x)$, que n'esta nota empregamos como elemento simples de decomposição, e a funcção definida pela serie

$$\Sigma_n \frac{2i\pi}{\omega} e^{\frac{\pi i x}{\omega}} q_1^{2n} \left[e^{\frac{2\pi i x}{\omega}} - q_1^{4n} \right]^{-1},$$

onde $q_1 = e^{-\pi \frac{\omega}{\omega_1}}$, que satisfazem a (**12**).

Quando os polos forem multiplos, as equações (**10**) devem escrever-se d'este modo:

$$(10') \ldots\ldots \begin{cases} F(x+\omega) = F(x) - \Sigma \Big[A_0 \varphi_1(x-\omega) + A_1 d.\varphi_1(x-\omega) + \ldots + \\ \qquad + A_{p-1} d_\omega^{p-1} \varphi_1(x-\omega) \Big] \\ F(x+i\omega') = F(x) - \Sigma \Big[A_0 \varphi_2(x-\omega) + A_1 d_\omega \varphi_2(x-\omega) + \ldots + \\ \qquad + A_{p-1} d_\omega^{p-1} \varphi_2(x-\omega) \Big] \end{cases}$$

onde os sommatorios se devem estender a todos os polos ω e onde p designa o grau de multiplicidade d'este polo.

Como exemplo, tomemos a funcção $p(x)$ do sr. Weierstrass, a qual tem 0 como polo duplo. O seu desenvolvimento,

$$p(x) = \frac{1}{x^2} + a_2 x^2 + a_4 x^4 + \ldots,$$

pelo theorema de Laurent, mostra que nas formulas (10') são: $A_0=0$, $A_1=1$, e por isso temos, attendendo a que

$$[d_\omega \varphi_1(x-\omega)]_{\omega=0} = -d_x \varphi_1(x),$$

$$[d_x \varphi_2(x-\omega)]_{\omega=0} = -d_x \varphi_2(x),$$

as seguintes equações

$$p(x+\omega) = p(x) + d_x \varphi_1(x),$$

$$p(x+i\omega') = p(x) + d_x \varphi_2(x) \text{ . } (*).$$

Substituindo n'esta ultima equação o valor de $p(x+i\omega')$, dado pela equação

$$p(x) = \frac{1}{sn^2 x} - \frac{1+k^2}{3},$$

(*) Halphen, no seu tractado das funcções ellipticas, obteve as equações seguintes para a addição dos semiperiodos de $p(x)$:

$$p(x+\omega) = e_1 + \frac{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}{p(x)-e_1},$$

$$p(x+i\omega') = e_3 + \frac{(e_3-e_2)\, e_3-e_1)}{p(x)-e_3}.$$

obtemos

$$k^2 sn^2 x = p(x) + d_x \varphi_2(x) + \frac{1+k^2}{3},$$

que, integrada entre 0 e x, dá a funcção $Z(x)$ do sr. Hermite (*), expressa na funcção $\varphi_2(x)$ e na funcção $\zeta(x)$ do sr. Weierstrass.

Esta funcção $Z(x)$ figura, como é sabido, na expressão do arco de ellipse.

(*) Nota do sr. Hermite no Calculo de Lacroix.

SUR LES LIGNES GÉODÉSIQUES DES PARABOLOIDES

PAR

R. MARCOLONGO

On sait intégrer les équations différentielles des lignes géodésiques des paraboloïdes par les fonctions elliptiques; les coordonnées d'un point de la géodésique peuvent s'exprimer rationnellement par des fonctions θ d'un seul argument, comme j'ai montré dans une note insérée dans les «Rend. Acc. d. Lincei, Maggio 1890». Dans une autre note, en employant les fonctions p et σ, j'ai mis l'équation des lignes géodésiques sous une forme très simple. En employant encore les mêmes fonctions je veux montrer directement la propriété que les coordonnées des points de la géodésique sont des fonctions rationnelles de fonctions doublement periodiques de deuxième espèce et d'un seul argument. Il ne faudra plus s'appuyer sur une formule donnée par Rosenhain et sur ses transformées.

Considérons le paraboloïde elliptique:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$$

et soient λ_1, λ_2 les racines, differentes de zero, de l'équation:

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}=2z+\lambda$$

qui sont les paramètres des paraboloïdes elliptiques et hyperboliques homofocaux au premier. Si l'on pose:

$$S(\lambda) = \lambda(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda) = \lambda^4 + 4a_1\lambda^3 + 6a_2\lambda^2 + 4a_3\lambda$$

avec: $c^2 = a^2 - \mu'^2$, où μ'^2 est une constante comprise entre zéro et $a^2 - b^2$, l'équation différentielle des lignes géodésiques est:

$$\frac{\lambda_1\, d\lambda_1}{\sqrt{S(\lambda_1)}} + \frac{\lambda_2\, d\lambda_2}{\sqrt{S(\lambda_2)}} = 0.$$

Faisant:

$$\lambda = -a_1 + \frac{1}{2}\frac{p'u - p'\alpha}{pu - p\alpha}$$

α étant une constante définie par les deux relations:

$$p\alpha = a_1^2 - a_2; \quad p'\alpha = a_3 - 3a_1 a_2 + 2a_1^3,$$

l'équation des lignes géodésiques est:

$$\frac{\sigma(u_1+\alpha)\,\sigma(u_2+\alpha)}{\sigma u_1 \,.\, \sigma u_2} = \rho\, e^{2w};$$

ρ est une constante et:

$$w = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{\sigma'\alpha}{\sigma\alpha}\right)(u_1 + u_2).$$

Les racines λ_r de l'équation:

$$S(\lambda) = 0$$

sont réelles et égales à: $0, -a^2, -b^2, -c^2$; le discriminant des fonctions elliptiques est positif et α é réel et compris entre 0 e 2ω; les racines sont données en fonction de α par les formules:

$$\lambda_r = -a_1 - \frac{1}{2}\frac{p''\left(\frac{\alpha}{2}+\omega_r\right)}{p'\left(\frac{\alpha}{2}+\omega_r\right)} = -a_1 - \frac{1}{2}\frac{p'\left(\frac{\alpha}{2}+\omega_r\right)+p'\alpha}{p\left(\frac{\alpha}{2}+\omega_r\right)-p\,\alpha}$$

$(r=0, 1, 2, 3;\ \ \omega_0=0)$; elles sont rangées dans l'ordre

$$\lambda_0 > \lambda_3 > \lambda_2 > \lambda_1;$$

(Halphen. Fonct. Ellip. T. 1.° p. 121) et puisque l'on a:

$$a^2 > c^2 > b^2 > 0$$

l'on devra poser:

$$-a^2 = -a_1 - \frac{1}{2}\frac{p'\left(\frac{\alpha}{2}+\omega\right)+p'\alpha}{p\left(\frac{\alpha}{2}+\omega\right)+p\,\alpha},$$

$$-b^2 = -a_1 - \frac{1}{2}\frac{p'\left(\frac{\alpha}{2}+\omega'\right)+p'\alpha}{p\left(\frac{\alpha}{2}+\omega'\right)+p\,\alpha}.$$

Si nous définissons donc deux autres paramètres μ, ν tels que:

$$\mu^2 = a^2 + \lambda_1;\ \ \nu^2 = -a^2 - \lambda_2$$

nous aurons :

$$\mu^2 = \frac{1}{2}\,\frac{p'\left(\frac{\alpha}{2}+\omega\right)+p'\alpha}{p\left(\frac{\alpha}{2}+\omega\right)-p\alpha}+\frac{1}{2}\,\frac{p'u_1-p'\alpha}{pu_1-p\alpha};$$

$$\nu^2 = -\frac{1}{2}\,\frac{p'\left(\frac{\alpha}{2}+\omega\right)+p'\alpha}{p\left(\frac{\alpha}{2}+\omega\right)-p\alpha}-\frac{1}{2}\,\frac{p'u_2-p'\alpha}{pu_2-p\alpha}.$$

La formule d'addition pour la fonction ζ nous donnera:

$$\mu^2=\zeta(u_1+\alpha)-\zeta u_1+\zeta\left(\omega-\frac{\alpha}{2}\right)-\zeta\left(\omega+\frac{\alpha}{2}\right).$$

C'est une fonction rationnelle de pu_1 et $p'u_1$, qui a les infinis $u_1=0$, $u_1=-\alpha$, et les zéros $u_1=\omega-\frac{\alpha}{2}$, $u_1=-\omega-\frac{\alpha}{2}$; elle a donc la forme:

$$A\,\frac{\sigma\left(u_1-\omega+\frac{\alpha}{2}\right)\sigma\left(u_1+\omega+\frac{\alpha}{2}\right)}{\sigma u_1\,\sigma(u_1+\alpha)},$$

où A est une constante; multipliant les deux membres par $u_1+\alpha$, puis faisant $u_1=-\alpha$, on trouve :

$$A=\frac{\sigma\alpha}{\sigma\left(\omega+\frac{\alpha}{2}\right)\sigma\left(\omega-\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Mais si l'on se rappelle que:

$$\sigma(u+\omega) = -\sigma(u-\omega)\, e^{2\eta\omega}$$

on a:

$$\mu^2 = -\frac{\sigma\alpha}{\sigma^2\left(\omega - \frac{\alpha}{2}\right)} \cdot e^{2\eta\left(u_1 + \frac{\alpha}{2} - \omega\right)} \frac{\sigma^2\left(u_1 + \frac{\alpha}{2} - \omega\right)}{\sigma u_1\, \sigma(u_1 + \alpha)}.$$

Changeant de signe, et remplaçant u_1 avec u_2 nous aurons:

$$\nu^2 = \frac{\sigma\alpha}{\sigma^2\left(\omega - \frac{\alpha}{2}\right)} e^{2\eta\left(u_2 + \frac{\alpha}{2} - \omega\right)} \frac{\sigma^2\left(u_2 + \frac{\alpha}{2} - \omega\right)}{\sigma u_2\, \sigma(u_2 + \alpha)}.$$

Les coordonnées des points de la ligne géodésique sont:

$$x^2 = \frac{a^2}{h^2}\mu^2\nu^2;\quad y^2 = \frac{b^2}{h^2} h^2 - \mu^2)(h^2 + \nu^2)$$

où: $h^2 = a^2 - b^2$; par conséquent:

$$x^2 = -\frac{a^2}{h^2}\, \frac{\sigma^2\alpha}{\sigma^4\left(\omega - \frac{\alpha}{2}\right)} \cdot \frac{{}^2\sigma\left(u_1 + \frac{\alpha}{2} - \omega\right)\sigma^2\left(u_2 + \frac{\alpha}{2} - \omega\right)}{\sigma u_1\, \sigma u_2\, \sigma(u_1 + \alpha)\, \sigma(u_2 + \alpha)} \cdot e^{2\eta(u_1 + u_2 + \alpha - 2\omega)}$$

ou encore :

$$x = \mathrm{G}\, e^{mu+n} \frac{\sigma\left(u_1 + \frac{\alpha}{2} - \omega\right)\sigma\left(u_2 + \frac{\alpha}{2} - \omega\right)}{\sigma u_1\, \sigma u_2}\,; \; u = u_1 + u_2.$$

G, m, n sont des constantes faciles à former.

Partons maintenant de l'équation à trois termes:

$$\sigma(x-y)\,\sigma(x+y)\,\sigma(z-w)\,\sigma(z+w) +$$

$$+\,\sigma(y-z)\,\sigma(y+z)\,\sigma(x-w)\,\sigma(x+w) +$$

$$+\,\sigma(z-x)\,\sigma(z+x)\,\sigma(y-w)\,\sigma(y+w) = 0$$

en y faisant:

$$2x = u_1 + u_2\,;\; 2y = u_2 - u_1\,;\; 2z = u_1 + u_2 + 2\alpha\,;\; 2w = u_1 + u_2 + \alpha - 2\omega.$$

On trouve :

$$\sigma u_1\, \sigma u_2\, \sigma\left(u + \frac{3\alpha}{2} - \omega\right) \sigma\left(\omega - \frac{\alpha}{2}\right) +$$

$$+\,\sigma(u_1 + \alpha)\,\sigma(u_2 + \alpha)\,\sigma\left(u + \frac{\alpha}{2} - \omega\right)\sigma\left(\omega - \frac{\alpha}{2}\right) =$$

$$= -\,\sigma\alpha\,\sigma(u+\alpha)\,\sigma\left(u_1 + \frac{\alpha}{2} - \omega\right)\sigma\left(u_2 + \frac{\alpha}{2} - \omega\right)$$

ou bien :

$$\frac{\sigma\left(u_1+\frac{\alpha}{2}-\omega\right)\sigma\left(u_2+\frac{\alpha}{2}-\omega\right)}{\sigma u_1\,\sigma u_2}=-\frac{\sigma\left(\omega-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sigma\alpha}.$$

$$\frac{\sigma\left(u+\frac{3\alpha}{2}-\omega\right)+\rho\, e^{2w}\,\sigma\left(u+\frac{\alpha}{2}-\omega\right)}{\sigma(u+\alpha)}.$$

Donc enfin.

$$x=\mathrm{G}_1\, e^{mu+n}\frac{\sigma\left(u+\frac{3\alpha}{2}-\omega\right)+\rho\, e^{2w}\,\sigma\left(u+\frac{\alpha}{2}-\omega\right)}{\sigma(u+\alpha)}.$$

Pour trouver y il faut observer que :

$$h^2-\mu_2=-b^2+a_1-\frac{1}{2}\,\frac{p'u_1-p'\alpha}{pu_1-p\alpha}$$

ou, ce qui est la même chose :

$$h^2-\mu^2=-\frac{1}{2}\,\frac{p'\left(\frac{\alpha}{2}+\omega'\right)-p'\alpha}{p\left(\frac{\alpha}{2}+\omega'\right)-p\,\alpha}-\frac{1}{2}\,\frac{p'u_1-p'\alpha}{p\,u_1-p\,\alpha}$$

c'est à dire que l'on peut obtenir $h^2-\mu^2$, en changeant dans μ^2

le signe et ω en ω'. Ainsi on déduira $h^2 + \nu^2$ en changeant dans ν^2, ω en ω'; on aura donc.

$$y = G_2 \, e^{m'u+n'} \frac{\sigma\left(u + \frac{3\alpha}{2} - \omega'\right) + \rho \, e^{2w} \, \sigma\left(u + \frac{\alpha}{2} - \omega'\right)}{\sigma(u+\alpha)}.$$

Rome, Mai 1893.

BIBLIOGRAPHIA

A. R. Forsyth: Theory of Functions o fa complex variable, Cambridge, 1893.

A obra de que vamos dar noticia é notavel pelo modo profundo, desenvolvido, claro e, em muitos pontos, original como o sr. Forsyth tracta a theoria geral das funcções analyticas. O illustre geometra inglez não só considera todos os pontos d'esta theoria que são essenciaes, mas apresenta como exercicios ou exemplos um numero consideravel de resultados e theoremas interessantes que a este respeito tem sido apresentados pelos geometras.

A theoria das funcções analyticas tem feito nos ultimos tempos progressos notaveis, para o que teem concorrido com trabalhos importantes muitos dos maiores geometras do nosso tempo. Pois o sr. Forsyth toma em consideração todos estes trabalhos e dá noticia de todos estes progressos, tornando assim a sua obra muito propria para dar aos leitores um conhecimento completo do estado actual d'esta parte da Analyse.

As doutrinas de que o auctor se occupa estão dispostas em vinte e dois capitulos, de cujos assumptos vamos dar uma rapida noticia.

Os primeiros sete capitulos são dedicados á theoria das funcções uniformes. No estudo d'estas funcções é empregado o methodo de Cauchy, baseado na theoria dos integraes tomados entre limites imaginarios, que primeiramente é exposta. N'elles se encontram os trabalhos de Cauchy, Weierstrass e Mittag-Leffler a respeito da theoria geral d'estas funcções.

No capitulo VIII é estudada, pelo methodo de Cauchy, a theoria geral das funcções multiformes e em especial a theoria das funcções algebricas, Nos capitulos IX a XIII são estudadas as funcções multiformes definidas por integraes das funcções algebricas e as funcções uniformes que resultam da inversão de alguns d'estes integraes. O methodo seguido é ainda o de Cauchy como foi empregado por Briot e Bouquet na sua obra sobre a theoria das funcções ellipticas. Encontra-se n'estes capitulos um estudo desenvolvido da theoria geral das funcções duplamente periodicas de primeira, segunda e terceira especie, e em especial a theoria das funcções $p(u)$, $\zeta(u)$, $\sigma(u)$ de Weierstrass.

O capitulo XIII é dos mais interessantes da obra. N'elle o auctor resolve a questão que consiste em procurar as funcções que admittem um theorema de adicção algebrico. A solução d'esta questão, obtida por Weierstrass, leva á consideração das funcções ellipticas e dá assim um dos modos de entrar n'esta theoria. O livro do sr. Forsyth é a primeira obra didactica em que é exposto este assumpto, a respeito do qual muito pouco tem sido publicado.

Nos capitulos XIV a XVIII é exposta a theoria das funcções multiformes pelo methodo de Riemann, sendo o primeiro d'estes capitulos destinado á exposição de algumas proposições geometricas necessarias para a exposição do methodo, o segundo ao estudo da representação geometrica empregada por Riemann, o terceiro ao estado das funcções algebricas e seus integraes, o quarto ao problema de Derichlet para o caso de duas variaveis independentes, etc.

Os capitulos XIX e XX conteem um estudo profundo da doutrina relativa á representação conforme.

Finalmente os capitulos XXI e XXII são consagrados á theoria das funcções fuchsianas, ultimamente creada pelos trabalhos de Poincaré.

Como se vê por esta rapida noticia dos assumptos de cada capitulo, o sr. Forsyth empregou no estudo das funcções analyticas os methodos de Cauchy, Riemann e Weierstrass, isto é os tres methodos fundamentaes que existem para este estudo.

Terminando diremos que esta obra excellente, digna dos maiores elogios, nos parece uma das mais proprias para se estudar com largueza a theoria das funcções analyticas e que nos parece destinada a prestar os maiores serviços aos que fazem d'este bello assumpto objecto de seus estudos e de suas indagações.

J. Tannery e J. Molk: Élements de la théorie des fonctions elliptiques, Paris, G. Villars, t. 1, *1893.*

O presente volume é o primeiro de uma obra que constará de quatro volumes, na qual será estudada a theoria das funcções ellipticas com suas principaes applicações. Os auctores empregam principalmente, na exposição d'esta theoria, as notações de Weierstrass, fazendo todavia conhecer a respeito das notações anteriormente empregados o sufficiente para se poderem ler os trabalhos em que estas notações são empregadas.

A exposição do assumpto é feita de modo que possa ser comprehendida pelos que conhecem as doutrinas que são objecto do ensino ministrado nas Faculdades de França e que se encontram nos manuaes actualmente classicos. Para os assumptos de Analyse que não são ensinados n'essas faculdades com assaz desenvolvimento e que teem na obra maior applicação, destinaram os auctores uma parte consideravel do presente volume, em que se encontra uma exposição muito bem feita da theoria das series e dos productos infinitos a dupla entrada, da theoria das series e dos productos infinitos cujos termos dependem de uma variavel e finalmente da theoria das funcções transcendentes inteiras.

A parte relativa á theoria das funcções ellipticas que se encontra no presente volume está distribuida por dois capitulos, sendo no primeiro estudada a theoria geral das funcções periodicas e no segundo a funcção $\sigma(u)$ de Weierstrass e as funcções $p(u)$, $\zeta(u)$, etc. que d'ella derivam.

Seguindo o caminho de Weierstrass, os auctores definem a funcção $\sigma(u)$ por meio de um producto infinito a dupla entrada, tiram d'esta definição as propriedades de $\sigma(u)$ e passam para as funcções $\zeta(u)$ e $p(u)$ por meio de derivações. Encontra-se ainda n'este volume o estudo, feito com a maior clareza, da theoria da transformação das funcções σ.

Pela leitura d'este primeiro volume vê-se já que, com a publicação da sua obra, os srs. Tannery e Molk veem junctar mais um bello trabalho á tão rica collecção de escriptos relativos á theoria das funcções ellipticas, e fornecer aos que querem estudar este ramo de Analyse um livro excellente e dos mais proprios para os guiar n'este estudo.

G. Lazzeri. — Trattato di Geometria analitica, Livorno, 1893.

Contém este livro não só os assumptos das lições de geometria analytica dadas pelo auctor na Eschola naval de Livorno, mas ainda os assumptos d'esta sciencia que em Italia é uso estudar nos cursos universitarios.

Lendo esta obra excellente nota-se em primeiro logar que o sr. Lazzeri não separa a Geometria plana da Geometria no espaço, como já fizera no livro que ha annos publicou sobre Geometria elementar em collaboração com o sr. Bassani.

Nota-se em segundo logar que o auctor teve a boa ideia de dar igual desenvolvimento á exposição do systema de coordenadas cartesianas e do systema de coordenadas projectivas, e de fazer quasi igual uso dos dois systemas, approveitando um ou outro segundo a natureza da questão a resolver.

Abre o livro por uma introducção em que são expostos os principios de Geometria projectiva necessarios para a intelligencia dos assumptos considerados. N'ella são estabelecidas as noções de projectividade, reciprocidade e omologia e é exposto o principio de dualidade.

Segue-se depois a *Primeira parte*, composta de cinco capitulos, onde são estudadas as coordenadas cartesianas e projectivas das fórmas geometricas de primeira, segunda e terceira especie, as propriedades das rectas no plano e das rectas e planos no espaço, e as propriedades do circulo e da esphera.

A *Parte segunda* contém quatro capitulos onde são respectivamente estudadas as propriedades projectivas das conicas e das quadricas, as propriedades metricas das conicas e das quadricas, os fócos e directrizes das conicas e das quadricas e finalmente as construcções e problemas graphicos relativos ás conicas.

Cada capitulo é seguido de uma lista de problemas bem escolhidos, relativos ao assumpto considerado no capitulo.

Como se vê pelas precedentes indicações, o sr. Lazzeri ao planear o seu livro teve em vista preparar os alumnos com os conhecimentos dos methodos fundamentaes de Geometria analytica necessarios para o estudo dos trabalhos modernos sobre Geometria. Cremos que conseguiu o seu fim, e que este livro será para elles do maior proveito. A clareza e elegancia da exposição tornam a sua leitura facil e attrahente.

M. G. de Longchamps.— Supplément au Cours de mathématiques speciales, Paris, Delagrave, 1893.

No tomo VIII (pag. 111) d'este jornal deu-se noticia da anterior edição do *Supplemento* do sr. Longchamps ao seu Curso de mathematicas especiaes. Na nova edição, que vem de ser publicada, o auctor acrescentou alguns assumptos. Assim contém a nova edição a mais a trigonometria plana e espherica, e a parte da mechanica racional que comprehende a statica, a dynamica do ponto material e a statica do solido invariavel. Na exposição d'estes assumptos revelam-se as mesmas boas qualidades que dissemos já existirem na exposição dos assumptos que se encontravam na anterior edição.

E. Lucas.— Récréations mathématiques, Paris, G. Villars, t. III, *1893.*

O auctor d'esta bella e interessante obra falleceu em Paris em 3 de janeiro de 1891, depois de ter publicado dous volumes d'ella. Entre os seus manuscriptos foram encontrados pelos srs. Delannoy, Laisant e Lemoine, encarregados pela Sociedade mathematica de França de os examinar, mais dous volumes da mesma obra quasi complemente preparados para a publicação. O primeiro d'estes volumes vem de ser publicado. Contém septe recreios assim intitulados: 1.° calculo digital; 2.° machinas de calcular; 3.° o jogo do Camaleão e o jogo da juncção de pontos; 4.° o jogo militar e a tomada da Bastilha; 5.° a pata do ganso e a ferradura; 6.° o jogo americano; 7.° a estrella nacional e os jogos do vermelho e negro. Todos estes recreios são estudados em um bello volume de 200 paginas cuja leitura é das mais agradaveis.

Index du Répertoire bibliographique des sciences mathématiques, Paris, G. Villars, 1893.

Na pag. 143 do vol. IX d'este jornal publicámos as resoluções, tomadas no congresso de mathematica que teve logar em Paris em 1889, relativamente á publicação de um Reportorio bibliographico das sciencias mathematicas. Logo depois foi publicado um opusculo contendo a classificação dos assumptos mathematicos adoptada pelo congresso. Uma nova edição d'este trabalho, mais completa, vem de ser publicada.

R. Bettazzi. — La risoluzione dei problemi numerici e geometrici, Torino, 1893.

N'este opusculo, muito bem feito e muito util, o sr. Bettazzi trata do estudo dos methodos geraes empregados na resolução dos problemas numericos e geometricos.

Principia o auctor pelo estudo dos methodos para a resolução dos problemas em geral, explicando n'esta parte, com o maior cuidado, em que consistem os methodos chamados analytico, synthetico e mixto. Vem depois o estudo dos methodos empregados na resolução dos problemas arithmeticos e algebricos. Vem finalmente o estudo dos methodos, quer puramente geometricos quer algebricos, empregados na resolução dos problemas geometricos. O estudo dos methodos é acompanhado dos exemplos sufficientes para os esclarecer.

Em geral no ensino das mathematicas elementares os alumnos são levados ao conhecimento dos methodos geraes para a resolução dos problemas por uma especie de inducção resultante de repetidas resoluções de problemas que lhes são propostos. Chamar-lhes a attenção para os methodos que empregam é de vantagens evidentes; porisso com a publicação do seu livro, onde estes methodos podem ser estudados com a maior facilidade, prestou o illustre professor do lyceu de Turin um bom serviço aos alumnos.

M. Mansion. — Notice sur les travaux scientifiques de L. Ph. Gilbert, Paris, G. Villars, 1893.

Contém este opusculo interessante a biographia, o retrato e a lista dos trabalhos de L. Ph. Gilbert. D'elle extrahimos os seguintes apontamentos a respeito d'este geometra eminente, que a Belgica perdeu em 4 de fevereiro de 1892.

Ph. Gilbert nasceu a 7 de fevereiro de 1832 em Beauring. Estudou primeiramente no collegio de Dinant e em seguida na Universidade de Louvain, onde tomou o grau de doutor em sciencias physicas e mathematicas em 1855. N'este mesmo anno principiou a reger n'esta Universidade as cadeiras de Analyse infinitesimal e Mecanica analytica, continuando esta regencia até á sua morte. Para o seu ensino d'estas sciencias escreveu os seus excellentes livros: *Cours d'analyse infinitésimal* e *Cours de Mécanique analytique*. Escreveu importantes memorias e notas sobre muitos pontos de analyse, geometria, mecanica, physica mathematica, etc., que foram publicadas nas principaes collecções scientificas da Belgica e da França, e que lhe abriram as portas da Academia das Sciencias de Paris, sendo eleito socio correspondente d'esta Academia em 3 de fevereiro de 1890. Foi um dos fundadores da Sociedade Scientifica de Bruxellas em cujos Annaes publicou algumas das suas principaes memorias.

E. Carvallo. — Traité de Mécanique, Paris, Nony, 1893.

Este livro, escripto pelo auctor para uso dos alumnos da classe de mathematicas elementares dos Lyceus francezes, contém as doutrinas de mechanica exigidas pelos respectivos programmas, isto é, a theoria da composição das forças, dos centros de gravidade, do equilibrio dos solidos e das machinas simples. O destino do livro obrigou o auctor a ter na maior attenção a clareza e simplicidade na exposição dos assumptos. Julgamos que conseguiu que o livro tenha estas qualidades, sem todavia em ponto algum sacrificar o rigor. Escripto todo com o maior cuidado, merece todavia principal attenção o modo como são tratadas a theoria das forças parallelas, e a dos centros de gravidade.

Cada capitulo é acompanhado de uma lista de exercicios bem escolhidos.

E. Lemoine. — La Géométographie ou l'art des constructions géométriques (Association française pour l'avancement des sciences, 1892).

O auctor d'este trabalho tracta de appresentar processos para determinar o grau de simplicidade e de exactidão das construcções geometricas com regoa e compasso, que se empregam para resolver graphicamente os problemas.

As operações elementares de que, segundo o sr. Lemoine, depende qualquer d'estes problemas são: 1.º, pôr a borda da regoa em coincidencia com um ponto; 2.º, traçar a linha recta; 3.º, pôr uma ponta do compasso n'um ponto determinado; 4.º, pôr uma ponta do compasso em um ponto indeterminado de uma linha recta; 5.º, traçar a circumferencia. Representando respectivamente por R_1, R_2, C_1, C_2, C_3 estas operações, qualquer construcção feita com a regoa e o compasso é representada por $l_1 R_1 + l_2 R_2 + m_1 C_1 + m_2 C_2 + m_3 C_3$.

A somma dos numeros inteiros l_1, l_2, m_1, m_2, m_3 representa para o auctor o grau de simplicidade da operação, a somma dos inteiros l_1, m_1 e m_2 o grau de exactidão (porque o grau de exactidão das construcções depende das operações preparatorias e não das operações de traçado).

Estes são os principios geraes do que o sr. Lemoine chama *Géométographia.* Na presente memoria são elles discutidos e applicados a um numero consideravel de exemplos.

Terminaremos aqui esta rapida noticia com o qual tivemos em vista chamar a attenção para um trabalho em que são desenvolvidas considerações que, pela sua applicação em geometria pratica e em especial em geometria descriptiva, nos parecem dever ser conhecidas.

G. T.

NOTA MATEMATICA

POR

JUAN J. DURÁN LORIGA

Capitan de Artilleria

Cuando um triangulo se deforma conservando la base fija en magnitud y posicion y constante el area (esto es moviendose el vertice sobre una paralela á la base) los puntos notables del triangulo describen lineas que es curioso conocer; la naturaleza de las descritas por ciertos puntos se vé facilmente à priori, asi por ejemplo el centro de gravedad marca una paralela á la base fija, el centro del circulo circunscripto se mueve en la mediatriz correspondiente al lado inmovil D. En la presente nota vamos a indicar el procedimiento general para llegar á las ecuaciones de las distintas lineas á que hemos hecho referencia.

Sea ABC el triangulo en cuestion y δ_a, δ_c las coordenadas absolutas mr y $m\varphi$ de un punto cualquiera m con relacion á los lados a y c de dicho triangulo. Tomemos como ejes cartesianos el lado fijo a y la perpendicular en B.

Se tiene evidentemente

$$ms = \frac{m\varphi}{\cos B}, \; rs = mr + \frac{m\varphi}{\cos B}, \; \mathrm{B}r = \frac{sr}{\operatorname{tang} B} = \frac{mr}{\operatorname{tang} B} + \frac{m\varphi}{\operatorname{sen} B}$$

de donde se deduce facilmente llamando h_a la altura relativa al lado a y p la projeccion sobre BC del lado BA

$$\begin{cases} x = \dfrac{p \cdot \delta_a}{h_a} + \dfrac{\delta_a \sqrt{h_a^2 + p^2}}{h_a} \\ y = \delta_a \end{cases}$$

Ahora bien, en los 2.^{os} miembros de las anteriores ecuaciones figuran en general tres parametros variables b, c y p, pero por medio de las relaciones

$$c^2 = h_a^2 + p^2,\ b^2 = h_a^2 + (a-p)^2$$

se llegará o tener un solo parametro p y dos ecuaciones de la forma

$$x = f(p),\ y = \varphi(p);$$

la eliminacion de p conducirá á la ecuacion del lugar geometrico del punto m.

Aplicaciones:

1.ª — Centro de gravedad.

$$\delta_a = \frac{h_a}{3} \qquad \delta = \frac{2S}{3c} = \frac{a h_a}{3\sqrt{h_a^2 + p^2}} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{p}{3} + \dfrac{a h_a}{3\sqrt{h_a^2+p^2}} \cdot \dfrac{\sqrt{h_a^2+p^2}}{h_a} = \dfrac{a+p}{h_a}. \\ y = \dfrac{h_a}{3} \end{cases}$$

El lugar geometrico es pues en este caso, como se vé á priori, una parallela á la base, manifestando el valor de x una propriedad geometrica facil de enunciar.

2.ª — Punto de Lemoine.

$$x = \frac{2\,ap\,S}{h_a(a^2+b^2+c^2)} + \frac{2\,c\,S\sqrt{h_a^2+p^2}}{h_a},$$

$$y = \frac{2\,a\,S}{a^2+b^2+c^2};$$

estas ecuaciones se transforman facílmente en las siguientes

$$x = \frac{a^2p + a\,(h_a^2+p^2)}{2\,(a^2+h_a^2+p^2-ap)},$$

$$y = \frac{a^2\,h_a}{2\,(a^2+h_a^2+p^2-ap)};$$

la eliminacion del parametro p conduce à la siguiente ecuacion para el lugar geometrico:

$$4\,h_a^2x^2 + 4\,(4\,h_a^2+3\,a^2)\,y^2 - 4\,ah_a^2x - 8\,a^2h_a^1y + a^2h_a^2 = 0,$$

que representa una elipse. Si trasladamos los ejes paralelamente tomando como nuevo origen el medio de la ordenada del punto de Lemoine del triangulo isosceles equivalente al dado, resulta la ecuacion

$$\frac{4h_a^2+3a^2}{a^4}x^2+\frac{(4h_a^2+3a^2)^2}{a^4 h_a^2}y^2=1.$$

Vemos pues que los ejes de esta conica son

$$\frac{2a^2}{\sqrt{4h_a^2+3a^2}},\quad \frac{2a^2h_a}{4h_a^2+3a^2}$$

y la estructura de estas expresiones permite deducir facilmente la construccion geometrica para el trazado de la curva.

Este es el procedimento general, pero la eliminacion del parametro p se hace con frequencia penosa y de aqui que convenga en muchos casos acudir á las propiedades particulares del punto que se considere, asi p. e encontrariamos la linea descrita por el ortocentro (que se sabe es una parábola) eliminando p entre las ecuaciones

$$x=\frac{h_a}{p},\quad y=-\frac{1}{p}(x-a)$$

deducidas tomando como ejes el lado fijo y una perpendicular al lado a en B. La eliminacion dá

$$y=-\frac{x^2}{h_a}+\frac{ax}{h_a}$$

y si se toma como nuevo origen el ortoeentro del triangulo isosceles equivalente al dado, pero conservando la misma direcion de ejes, resulta

$$x^2 = -h_a y$$

que representa una parábola de eje vertical y extendiendose por la region de las y negativas. Como los valores

$$x = \pm \frac{a}{2}, \quad y = -\frac{a^2}{4h_a}$$

verifican la ecuacion, resulta que la curva pasa por los vertices de la base, como debe suceder.

Si ahora queremos obtener la linea descrita por el punto de Lemoine, con mas sencillez que anteriormente lo hemos hecho, podemos considerarlo como interseccion de la recta que tiene por ecuacion

$$y = \frac{2Sa}{a^2 + b^2 + c^2}$$

y la que une el medio de la base con el de la altura correspondiente. Si tomamos como ejes la base fija y la mediatriz, la ultima recta tiene por ecuacion

$$y = \frac{h_a}{2p} x$$

teniendo p la misma significacion que anteriormente. Como el primer valor de y se transforma en

$$y=\frac{2a^2h_a}{4h_a^2+3a^2+4p^2},$$

la eliminacion de p conduce á la siguiente ecuacion

$$(4h_a^2+3a^2)y^2+h_a^2x^2-2a^2h_ay=0,$$

y trasladando el origen al medio de la ordenada del punto de Lemoine del triangulo isosceles correspondiente se obtiene la misma ecuacion que antes para la curva descrita por el citado punto.

Resulta por consiguiente que, dado um triangulo cualquiera, se pueden considerar como adjuntas por cada punto notable tres lineas de la naturaleza de las que hemos considerado, pero claro está que la ímportancia que tengan en la geometria del triangulo dependerá de las propriedades de que gozen.

En este concepto puede ser interesante un detenido estudio sobre este particular. Ja insistiremos sobre este punto cuando contemos con tiempo para ello, asi como tambien sobre la deformacion de un triangulo conservando dos vertices fijos y moviendose el tercero sobre la circunferencia circunscripta.

La Coruña, octubre de 1893.

SUR UNE ÉQUATION AUX DIFFÉRENCES FINIES ET PARTIELLES

PAR

G. Vivanti

Cette équation se présente dans le calcul des dérivées successives de la fonction $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$. On a :

$$f'(z) = -e^{\frac{1}{z}},\ f''(z) = \left[\frac{1}{z^4} + \frac{2}{z^3}\right] e^{\frac{1}{z}},$$

et en général :

$$f^{(\nu)}(z) = (-1)^\nu S_\nu(z)\, e^{\frac{1}{z}},$$

où $S_\nu(z)$ est une fonction rationnelle et entière de $\frac{1}{z}$. Nous poserons :

$$S_\nu(z) = \frac{a_{\nu,1}}{z^{m_\nu}} + \frac{a_{\nu,2}}{z^{m_\nu - 1}} + \ldots + \frac{a_{\nu,\, m_\nu - n_\nu + 1}}{z^{n_\nu}},$$

et déterminerons avant tout les nombres m_ν, n_ν. De l'égalité:

$$f^{(\nu+1)}(z)=(-1)^{\nu+1}S_{\nu+1}(z)\,e^{\frac{1}{z}}=(-1)^{\nu}e^{\frac{1}{z}}\left\{\frac{dS_\nu(z)}{dz}-\frac{1}{z^2}S_\nu(z)\right\},$$

il suit:

$$S_{\nu+1}(z)=\frac{1}{z^2}S_\nu(z)-\frac{dS_\nu(z)}{dz},$$

ou bien:

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{a_{\nu+1,1}}{z^{m_{\nu+1}}}+\ldots+\dfrac{a_{\nu+1,\,m_{\nu+1}-n_{\nu+1}+1}}{z^{n_{\nu+1}}}=\dfrac{a_{\nu,1}}{z^{m_\nu+2}}+\ldots+ \\[2ex] \qquad +\dfrac{a_{\nu,\,m_\nu-n_\nu+1}}{z^{n_\nu+2}}+\dfrac{m_\nu\, a_{\nu,1}}{z^{m_\nu+1}}+\ldots+\dfrac{n_\nu\, a_{\nu,\,m_\nu-n_\nu+1}}{z^{n_\nu+1}}, \end{cases}$$

et par conséquent

$$m_{\nu+1}=m_\nu+2,\quad n_{\nu+1}=n_\nu+1.$$

Or $m_1=n_1=2$; donc $m_\nu=2\nu$, $n_\nu=\nu+1$, et:

$$S_\nu(z)=\frac{a_{\nu,1}}{z^{2\nu}}+\frac{a_{\nu,2}}{z^{2\nu-1}}+\ldots+\frac{a_{\nu,\nu+1}}{z^{\nu+1}}.$$

On a en outre, en comparant les coefficients de $\frac{1}{z^{2\nu+2}}$ et ceux de $\frac{1}{z^s}$ dans les deux membres de l'équation (1):

$$a_{\nu+1,1}=a_{\nu',1},\quad a_{\nu+1,2\nu+3-s}=a_{\nu,2\nu+3-s}+(s-1)\;a_{\nu,2\nu+2-s},$$

ou bien en faisant $\nu = x, \ 2\nu + 3 - s = y$:

$$(2) \ldots\ldots\ a_{x+1,y} = a_{x,y} + (2x - y + 2)\, a_{x,y-1}.$$

Il s'agit maintenant d'intégrer cette équation aux différences finies sous les conditions :

$$a_{x,y} = 1, \quad a_{x,y} = 0 \quad \text{pour} \quad y > x.$$

Désignons comme toujours par Δ, Σ la différentiation et l'intégration finies, et par x_y la faculté d'ordre y de x, c. à. d. le produit $x(x-1)\ (x-y+1)$. Nous pouvons écrire l'équation ainsi :

$$\Delta_x\, a_{x,y} = (2x - y + 2)\, a_{x,y},$$

ou encore en intégrant :

$$a_{x,y} = \sum_x (2x - y + 2)\, a_{x,y-1} + \varphi(y),$$

où $\varphi(y)$ est une fonction arbitraire de y, qui peut tout aussi bien contenir x, pourvu qu'elle ait la période 1 par rapport à cette variable. Si toutefois l'on entende par Σ l'intégrale particulière qu'on obtient en sommant l'expression différentielle depuis $x = 1$ jusqu'à $x = x - 1$, il est aisé de voir que la fonction $\varphi(y)$ est identiquement nulle. On a donc :

$$a_{x,y} = \sum_x (2x - y + 2)\, a_{x'y-1},$$

et par conséquent:

$$a_{x,y} = \sum_x (2x - y + 2) \sum_x (2x - y + 3) \ldots \sum_x (2x - 1) \sum_x 2x.$$

Il suit de là pour $y=2$ et pour $y=3$:

$$a_{x,2} = \sum_x 2x = x_2,$$

$$a_{x,3} = \sum_x (2x-1)\, x_2 = \sum_x [x_1 + (x-1)_1]\, x_2 = \sum_x [x_1 x_2 + x_2 (x-1)_1].$$

En posant $u = x_2$, $\Delta v = (x-1)$, et par suite $\Delta u = 2x_1$, $v = \frac{1}{2}(x-1)_2$, $v + \Delta v = \frac{x}{2}$, et en appliquant l'identité connue:

$$(3) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad uv = \Sigma\, [\Delta u\, (v + \Delta v) + u \Delta v],$$

en obtient:

$$a_{x,3} = \frac{1}{2} x_2 (x-1)_2.$$

On peut tenter de généraliser cette formule, en posant:

$$a_{x,y} = \frac{1}{(y-1)!} x_{y-1} (x-1)_{y-1}$$

et il ne reste qu'à en vérifier l'exactitude par la méthode de l'induction complète; en d'autres termes, on doit démontrer que:

$$\frac{1}{(y-1)!}\sum_x (2x-y+1)\,x_{y-1}\,(x-1)_{y-1} = \frac{1}{y!}\,x_y\,(x-1)_y.$$

Désignons par M le premier membre de cette relation, et posons:

$$u = x_y\,,\quad \Delta v = (x-1)_{y-1}\,,$$

d'où il s'ensuit:

$$\Delta u = y\,x_{y-1}\,,\quad v = \frac{1}{y}\,(x-1)_y\,,\quad v + \Delta v = \frac{1}{y}\,x_y\,;$$

en vertu de l'identité (3) nous aurons:

$$M = \frac{1}{(y-1)!}\sum_x [x + (x-y+1)]\,x_{y-1}\,(x-1)_{y-1} =$$

$$= \frac{1}{(y-1)!}\sum_x [x_{y-1}\,x_y + x_y\,(x-1)_{y-1}]$$

$$= \frac{1}{(y-1)!}\sum_x [\Delta u(v+\Delta v) + u\Delta v) = \frac{1}{(y-1)!}u = v\frac{1}{y!}x_y x_{y-1},$$

c. q. f. d.

Les nombres $a_{x,y}$ forment une espèce de triangle arithmétique:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & & & \\
 & & & 1 & & 6 & & 6 & & & \\
 & & 1 & & 12 & & 36 & & 24 & & \\
 & 1 & & 20 & & 120 & & 240 & & 120 & \\
1 & & 30 & & 300 & & 1200 & & 1800 & & 720 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots ,
\end{array}
$$

dont la loi de formation est représentée par l'équation (2).

Mantoue, le 23 mai 1893.

NOVO METHODO DE DESENVOLVER OS DETERMINANTES

POR

J. Pedro Teixeira

Em o *Jornal de sciencias mathematicas e astronomicas* (t. XI, n.° 3), apresentámos processos expeditos para desenvolver os determinantes de terceira, quarta e quinta ordem, inferidos da analyse de seus desenvolvimentos, obtidos pelos methodos conhecidos. Reflectindo posteriormente sobre aquelles processos, descobrimos os principios geraes a que obedecem, os quaes, por nos parecerem de algum interesse, vão fazer objecto d'este trabalho.

Em primeiro logar, estabelecemos proposições novas a respeito dos indices, mediante as quaes derivamos d'um termo do determinante $2n-1$ novos termos, d'um modo expedito; depois, os termos, que denominamos primitivos, pela analogia de seu papel com o de certas raizes de unidade; finalmente, o desenvolvimento do determinante em funcção de certos elementos, dependentes dos termos primitivos, a que correspondem schemas d'um calculo simples e mnemonico.

I

Seja

$$(1) \ldots\ldots\ldots\ldots \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & .. & l_1 \\ a_2 & b_2 & .. & l_2 \\ a_3 & b_3 & .. & l_3 \\ .. & .. & .. & .. \\ a_n & b_n & .. & l_n \end{vmatrix}$$

um determinante do grau n e

$$(2) \ldots\ldots\ldots\ldots (-1)^m d_\delta k_\chi \ldots i_n \ldots a_\alpha l_\lambda$$

um dos seus termos, onde suppomos que se realisam m inversões em relação ás letras e aos indices.

Suppondo n nullo e junctando depois uma unidade a cada indice, resulta

$$(3) \ldots\ldots\ldots (-1)^{m'} d_{\delta+1} k_{\chi+1} \ldots i_1 \ldots a_{\alpha+1} l_{\lambda+1},$$

que é evidentemente um outro termo do mesmo determinante, onde se realisam m' inversões. Procuremos o valor de m'.

Na passagem de (2) para (3), sómente póde ter variado o numero das inversões em relação aos indices, pois que as letras se acham dispostas do mesmo modo nos dois termos. Seja x o numero das letras que precedem i e y o das que se lhe seguem. Pondo esta de parte, os indices das outras realisam em (2) e (3) o mesmo numero de inversões; e, considerando tambem aquella letra, os indices das precedentes não realisam inversões com o seu em (2) e realisam x em (3), emquanto que os das seguintes realisam com aquelle y em (2) que deixam de realisar em (3).

Conseguintemente, na passagem de (2) para (3), o numero de inversões variou de $x-y$, e por isso temos

$$m' = m + x - y,$$

$$(-1)^{m'} = (-1)^m (-1)^{x-y}.$$

D'aqui, visto que $x-y$ é impar ou par, conforme n for par ou impar, concluimos:

THEOREMA I. *Se em um termo d'um determinante do grau* n *substituirmos* n *por zero e junctarmos em seguida uma unidade a cada indice, obtemos outro termo, do mesmo ou de differente signal, conforme* n *for impar ou par.*

Exemplo: de $a_2\, b_3\, c_1$ do determinante $(a_1\, b_2\, c_3)$ deduzimos $a_3\, b_1\, c_2$; de $-a_4\, b_1\, c_2\, d_3$ do determinante $(a_1\, b_2\, c_3\, d_4)$ deduzimos $a_1\, b_2\, c_3\, d_4$.

Se applicarmos a operação a que se refere aquelle theorema $n-1$ vezes successivamente a um termo, obtemos $n-1$ novos termos, differentes entre si e do de partida; e repetindo-a sobre o ultimo reproduz-se aquelle, como se vê neste quadro

$$\begin{array}{ll}
-a_1\, b_3\, c_2\, d_4 & -a_1\, b_3\, d_2\, c_4\, e_5 \\
+a_2\, b_4\, c_3\, d_1 & -a_2\, b_4\, d_3\, c_5\, e_1 \\
-a_3\, b_1\, c_4\, d_2 & -a_3\, b_5\, d_4\, c_1\, e_2 \\
+a_4\, b_2\, c_1\, d_3 & -a_4\, b_1\, d_5\, c_2\, e_3 \\
 & -a_5\, b_2\, d_1\, c_3\, e_4.
\end{array}$$

II

Tomando de novo o termo

$$(-1)^m\, d_\delta\, k_\chi \,..\, a_\alpha\, l_\lambda$$

e invertendo a ordem dos indices, obtemos

$$(-1)^{m''}\, d_\lambda\, k_\alpha \,..\, a_\chi\, l_\delta,$$

que é tambem um termo do determinante considerado.

Procuremos o factor $(-1)^{m''}$.

A operação precedente equivale evidentemente a permutar entre si os indices das letras d e l, k e a, etc.; por isso tendo em vista a proposição conhecida, ácerca das permutações dos indices, deduzimos:

$$m'' = m + 2p, (-1)^{m''} = (-1)^m, \text{ se } n \text{ for de fórma } 4p \text{ ou } 4p+1;$$

$$m'' = m + 2p + 1, (-1)^{m''} = -(-1)^m, \text{ se } n \text{ for de fórma } 4p+2 \text{ ou } 4p+3.$$

D'aqui resulta:

THEOREMA II. *Se em um termo d'um determinante do grau* n *invertermos a ordem dos indices, obtemos um outro termo, do mesmo signal, se* n *for da fórma* 4p *ou* 4p + 1, *e de signal differente, se* n *for da fórma* 4p + 2 *ou* 4p + 3.

Exemplos: De $a_3\, b_1\, c_2$ $(n = 4p + 3)$ deduz-se $-a_2\, b_1\, c_3$; de $-a_2\, b_3\, c_4\, d_1$ $(n = 4p)$, $-a_1\, b_4\, c_3\, d_2$; de $a_3\, b_1\, c_2\, d_4\, e_5$ $(n = 4p + 1)$, $a_5\, b_4\, c_2\, d_1\, e_3$; de $a_4\, b_3\, c_1\, d_2\, e_6\, f_3$ $(n = 4p + 2)$, $-a_5\, b_6\, c_2\, d_1\, e_3\, f_4$.

III

Tomemos o termo principal

$$(\alpha) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad a_1\, b_2\, \ldots\, j_{n-2}\, k_{n-1}\, l_n$$

do determinante considerado e, sem alterar a ordem dos indices, levemos a letra j até ao fim, por trocas successivos de logar e de signal. Obtemos d'este modo

$$(j) \ldots\ldots\ldots\ldots \begin{cases} -a_1\, b_2\, \ldots\, k_{n-2}\, j_{n-1}\, l_n, \\ +a_1\, b_2\, \ldots\, k_{n-2}\, l_{n-1}\, j_n. \end{cases}$$

distinctos entre si e do primeiro e que pertencem tambem ao determinante. Em cada um dos termos de (φ) e (j) levemos a letra i até ao fim, pelo processo anterior, o que nos dá um grupo (i) formado de 3.3 termos do determinante. Continuando assim até termos considerado a letra b, obtemos outros grupos (h), (g), .. (b) de termos tambem pertencentes ao determinante. Estes termos receberão aqui a designação de *termos primitivos*. O seu numero é a somma

$$3+3.3+(3+3.3)4+[3+3.3+(3+3.3)4]5+..+$$
$$+\{3+3.3+(3+3.3)4+..\}(u-2)$$

cujo valor é

$$1.3.4..(n-1)=\frac{(n-1)!}{2}.$$

Para formar as permutações das $n-1$ letras $b, c, .. k, l$, consideramos os grupos kl e lk e introduzimos a letra j em todos os logares possiveis, podendo começar no primeiro pela esquerda e no segundo pela direita, e nas permutações resultantes faremos o mesmo a respeito da letra i e assim por deante até termos considerado a letra b. Tendo presente a geração dos termos primitivos, vemos que elles tambem se podiam obter escrevendo a letra a á direita das permutações que se derivam de kl, affectando em cada uma as letras dos indices $1, 2, .., n$, sempre por esta ordem, tomando depois as pares com o signal + e as impares com o signal —; logo o numero dos dictos termos primitivos é egual a $\frac{1}{2}.(n-1)!$, como já tinhamos visto. Porém, o fim principal d'esta nota é o que se segue:

Attendendo ao modo como formamos as permutações das letras $b, c, ... l$, facilmente se reconhece que invertendo a ordem das letras em grupo do derivado de kl obtemos uma do derivado de lk; por isso, e por serem distinctas todas as permutações, se em uma do primeiro grupo invertermos a ordem das letras, não podemos obter uma outra d'este mesmo grupo. D'aqui resulta esta proposição que havemos de utilisar:

Se em um termo primitivo invertermos a ordem das letras, não considerando a letra a, *o resultado não póde ser outro termo primitivo.*

IV

Sendo A, B, C.., L os termos primitivos e $A^{(1)}$, $A^{(2)}$,.. $A^{(n-1)}$ os que se obtem applicando o theorema I successivamente $n-1$ vezes a A, etc., formemos o quadro

$$\begin{array}{ccccc} A & B & C & .. & L \\ A^{(1)} & B^{(1)} & C^{(1)} & .. & L^{(1)} \\ A^{(2)} & B^{(2)} & C^{(2)} & .. & L^{(2)} \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ A^{(n-1)} & B^{(n-1)} & C^{(n-1)} & .. & L^{(n-1)}; \end{array}$$

e, applicando o theorema II a cada um dos seus termos, formemos tambem

$$\begin{array}{ccccc} A_1 & B_1 & C_1 & .. & L_1 \\ A_1^{(1)} & B_1^{(1)} & C_1^{(1)} & .. & L_1^{(1)} \\ A_1^{(2)} & B_1^{(2)} & C_1^{(2)} & .. & L_1^{(2)} \\ .. & .. & .. & .. & \\ A_1^{(n-1)} & B_1^{(n-1)} & C_1^{(n-1)} & .. & L_1^{(n-1)}. \end{array}$$

Nos dois quadros ha $n!$ termos do determinante, os quaes vamos provar que são distinctos.

Os termos d'uma columna qualquer do primeiro quadro são distinctos uns dos outros, pelo que já se disse (I).

Um termo $D^{(i)}$ da columna dos D do primeiro quadro só poderia ser identico ao termo $H^{(i)}$ de columna dos H, pois que é o unico d'esta columna onde a letra a entra com o indice com que figura em $D^{(i)}$; porém, como nos dois termos ha pelos menos duas letras com indices differentes, é impossivel aquella identidade.

No segundo quadro não ha dois termos identicos; porque, se o contrario tivesse logar, haveria tambem dois termos identicos no primeiro, o que já se demonstrou não poder dar-se.

Os termos do primeiro quadro são distinctos dos do segundo; porque, se assim não fosse, a inversão dos indices em um termo d'aquelle poderia reproduzir um de seus outros termos, o que não póde dar-se, pelas razões que se seguem.

Suppunhamos que $F^{(i)}$ reproduzia $D^{(j)}$, pela inversão dos indices. Evidentemente, tambem $F^{(i+1)}$ reproduziria $D^{(j+1)}$ e, continuando, concluiriamos que F reproduziria tambem um da columna dos D, o qual não podia ser senão $D^{(n-1)}$, que tem a letra a com o indice n; por isso, sendo, por exemplo,

$$F = a_1\, g_2\, h_3\, c_4\, d_5\, e_6\, f_7\, b_8\,,$$

deveriamos ter

$$D^{(n-1)} = a_8\, g_7\, h_6\, c_5\, d_4\, e_3\, f_2\, b_1\,;$$

como, applicando o theorema I ao ultimo termo de qualquer columna, reproduzimos o primeiro (I), teremos

$$D = a_1\, g_8\, h_7\, c_6\, d_5\, e_4\, f_3\, b_2\,,$$

que, postos os indices pela ordem natural, dá

$$D = a_1\, b_2\, f_3\, e_4\, d_5\, c_6\, h_7\, d_8\,.$$

. .

Comparando F com D, concluir-se-ha que, pondo de parte a letra a, um se transforma no outro pela inversão da ordem das letras, e por isso (III) um não será termo primitivo, o que é contra a hypothese.

V

Sendo os termos precedentes todos distinctos, em numero de $n!$ e todos pertencentes ao determinante, o desenvolvimento d'este é a sua somma algebrica.

Designando, pois, a somma algebrica d'um termo primitivo e dos que d'elle se derivam, por meio dos theoremas (I) e (II), pelo termo primitivo encerrado em colchetes, teremos

$$(a)\ldots(a_1\, b_2 \ldots l_n) = \{a_1\, b_2 \ldots l_n\} - \{a_1\, b_2 \ldots k_{n-2}\, j_{n-1}\, l_n\} +$$

$$+ \{a_1\, b_2 \ldots k_{n-2}\, l_{n-1}\, j_n\}$$

$$+ \ldots,$$

onde os signaes são os dos termos primitivos.

VI

Para achar rapidamente o desenvolvimento d'um colchete, procederemos do seguinte modo:

Escreva-se o termo primitivo e, applicando-lhe o theorema II, escreva-se á direita o resultado, e em seguida applique-se a cada um d'estes dois termos $n-1$ vezes successivamente o theorema I.

Assim teremos:

para $$n=4p,$$

$$\begin{aligned}\{a_1\, b_2 \,..\, k_{n-1}\, l_n\} = {} & a_1\, b_2 \,..\, k_{n-1}\, l_n + a_n\, b_{n-1} \,..\, k_2\, l_1 \\ & - a_2\, b_3 \,..\, k_n\, l_1 - a_1\, b_n \,..\, k_3\, l_2 \\ & + a_3\, b_4 \,..\, k_1\, l_2 + a_2\, b_1 \,..\, k_4\, l_2 \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & - a_n\, b_1 \,..\, k_{n-2}\, l_{n-1} - a_{n-2} \,..\, k_1\, l_n\,;\end{aligned}$$

para $$n=4p+1,$$

$$\begin{aligned}\{a_1\, b_2 \,..\, k_{n-1}\, l_n\} = {} & a_1\, b_2 \,..\, k_{n-1}\, l_n + a_n\, b_{n-1} \,..\, k_2\, l_1 \\ & + a_2\, b_3 \,..\, k_n\, l_1 + a_1\, b_n \,..\, k_3\, l_2 \\ & + a_3\, b_4 \,..\, k_1\, l_2 + a_2\, b_1 \,..\, k_4\, l_3 \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + a_n\, b_1 \,..\, k_{n-2}\, l_{n-1} + a_{n-2} \,..\, k_1\, l_n\,;\end{aligned}$$

para $$n=4p+2,$$

$$\begin{aligned}\{a_1\, b_2 \,..\, k_{n-1}\, l_n\} = {} & a_1\, b_2 \,..\, k_{n-1}\, l_n - a_n\, b_{n-1} \,..\, k_2\, l_1 \\ & - a_2\, b_3 \,..\, k_n\, l_1 + a_1\, b_n \,..\, k_3\, l_2 \\ & + a_3\, b_4 \,..\, k_1\, l_2 - a_2\, b_1 \,..\, k_2\, l_3 \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & - a_n\, b_1 \,..\, k_{n-2}\, l_{n-1}, + a_{n-1}\, b_{n-2} \,..\, k_1\, l_n\,;\end{aligned}$$

para $$n=4p+3,$$

$$\begin{aligned}\{a_1 b_2 \ldots k_{n-1} l_n\} = & \, a_1 b_2 \ldots k_{n-1} l_n - a_n b_{n-1} \ldots k_2 l_1 \\ & + a_2 b_3 \ldots k_n l_1 - a_1 b_n \ldots k_3 l_3 \\ & + a_3 b_4 \ldots k_1 l_2 - a_2 b_1 \ldots k_4 l_3 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + a_n b_1 \ldots k_{n-2} l_{n-1} - a_{n-1} b_{n-2} \ldots k_1 l_n .\end{aligned}$$

Como exemplo tomaremos o determinante do quarto grau. Temos

$$(a_1 b_2 c_3 d_4) = \{a_1 b_2 c_3 d_4\} - \{a_1 c_2 b_3 d_4\} + \{a_1 c_2 d_3 b_4\}.$$

$$\begin{aligned}\{a_1 b_2 c_3 d_4\} = & \, a_1 b_2 c_3 d_4 + a_4 b_3 c_2 d_1 \\ & - a_2 b_3 c_4 d_1 - a_1 b_4 c_3 d_2 \\ & + a_3 b_4 c_1 d_2 + a_2 b_1 c_4 d_3 \\ & - a_4 b_1 c_2 d_3 - a_3 b_2 c_1 d_4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-\{a_1 c_2 b_3 d_4\} = & - a_1 c_2 b_3 d_4 - a_4 c_3 b_2 d_1 \\ & + a_2 c_3 b_4 d_1 + a_1 c_4 b_3 d_2 \\ & - a_3 c_4 b_1 d_2 - a_2 c_1 b_4 d_3 \\ & + a_4 c_1 b_2 d_3 + a_3 c_2 b_1 d_4\end{aligned}$$

$$\{a_1 c_2 d_3 b_4\} = + a_1 c_2 d_3 b_4 + a_4 c_3 d_2 b_1$$

$$- a_2 c_3 d_4 b_1 - a_1 c_4 d_3 b_2$$

$$+ a_3 c_4 d_1 b_2 + a_2 c_1 d_4 b_3$$

$$- a_4 c_1 d_2 b_3 - a_3 c_2 d_1 b_4 .$$

VII

Tome-se, por exemplo, o primeiro colchete do determinante (a) e fórme-se o quadro

$$(b) \ldots\ldots \left|\begin{array}{ccccccc} a_1 & b_1 & c_1 & \ldots & j_1 & k_1 & l_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \ldots & j_2 & k_2 & l_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & \ldots & j_3 & k_3 & l_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-2} & b_{n-2} & c_{n-2} & \ldots & j_{n-2} & k_{n-2} & l_{n-2} \\ a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} & \ldots & j_{n-1} & k_{n-1} & l_{n-1} \\ a_n & b_n & c_n & \ldots & j_n & k_n & l_n \end{array}\right|$$

Os elementos do termo primitivo acham-se na diagonal $a_1\, l_n$ d'este schema, e os que resultam da applicação do theorema (I) acham-se respectivamente nas linhas $a_2\, k_n$ e l_1, $a_3\, j_n$ e $k_1\, l_2$, $a_4\, i_n$ e $j_1\, l_3, \ldots$ a_n e $b_1\, l_{n-1}$, parallelas áquella diagonal.

Os termos que resultam da applicação do theorema (II) acham-se na diagonal $a_n\, l_1$ e nas linhas a_1 e $b_n\, l_2$, $a_2\, b_1$ e $c_n\, l_3$, $a_3\, c_1$ e $d_n\, l_2, \ldots$ $a_{n-1}\, k_1$ e l_n parallelas a ella.

D'aqui e dos theoremas (I) e (II) resulta que:

Para achar o desenvolvimento d'um colchete da formula (a), *forme-se o schema correspondénte* (b) *e depois os productos dos elementos da diogonal* $a_1\ l_n$ *e os dos elementos das linhas* $a_2\ k_n$ *e* l_1, $a_3\ j_n$ *e* $k_1\ l_2$, $a_4\ i_n$ *e* $j_1\ l_3$ *etc.*, a_n *e* $b_1\ l_{n-1}$, *tomando os resultados com o signal* $+$ *ou com os signaes* $+$ *e* $-$ *alternativamente, conforme* n *for impar ou par; depois os productos dos elementos da diagonal* $a_n\ l_1$ *e os dos elementos das linhas* a_1 *e* $b_n\ l_2$, $a_2\ b_1$ *e* $c_n\ l_3$, $a_3\ c_1$ *e* $d_n\ l_4, \ldots\ a_{n-1}\ k_1$ e l_n *seguindo a mesma ordem dos signaes que precedentemente, se* n *for da fórma* $4n$ *ou* $4n+1$, *e ordem contraria, se* n *for da fórma* $4n+2$ *ou* $4n+3$.

Por ordem contraria dos signaes intenda-se que, se os primeiros tiverem sido positivos, os ultimos serão negativos; se os primeiros tiverem sido alternadamente positivos e negativos, os ultimos serão alternadamente negativos e positivos.

Dado o determinante em a notação de Cauchy,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \ldots & j_1 & k_1 & l_1 \\ a_2 & b_2 & \ldots & . & . & . \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n & b_n & \ldots & . & . & . \end{vmatrix},$$

os schemas obtêm-se immediatamente precedendo com as columnas como no termo principal procedemos com as letras para formar os termos primitivos.

Tomemos, por exemplo, o determinante de quarta ordem.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 & d_3 \\ a_4 & c_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 & b_3 \\ a_4 & c_4 & d_4 & b_4 \end{vmatrix}$$

Tomando o primeiro schema, vem, visto que $n = 4p$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = \begin{cases} a_1 b_2 c_3 d_4 - a_2 b_3 c_4 d_1 + a_3 b_4 c_1 d_2 - a_4 b_1 c_2 d_3 \\ a_4 b_3 c_2 d_1 - a_1 b_4 c_3 d_2 + a_2 b_1 c_4 d_3 - a_3 b_2 c_1 d_4 \end{cases}$$

e do mesmo modo se obtem os desenvolvimentos dos outros.

Este processo é, pois, applicavel tanto a determinantes numericos como literaes.

Appliquemol-o ao determinante

$$-5!\, B_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 \\ 1 & 5 & 10 & 10 \end{vmatrix} = \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 4 \\ 0 & 3 & 10 & 10 \end{vmatrix}$$

que dá o segundo numero de Bernoulli (*).

(*) Vide o nosso artigo, *Sur les nombres bernoulliens*, apresentado á Academia Real das Sciencias e publicado no *Jornal de Mathematicas* de abril de 1893.

Temos

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 4 \\ 0 & 3 & 10 & 10 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 4 \\ 0 & 10 & 3 & 10 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 4 & 2 \\ 0 & 10 & 10 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 1.1.6.10 - 1.3.2.10 + 1.3.4.3 - 1.10.4.1 = -4$$

e por isso $B_3 = \frac{1}{30}$.

Porto, dezembro de 1893.

SOBRE UMA FORMULA DE ANALYSE

POR

João Arez

A formula

$$(1)\quad \frac{F(x)+f(x+h)-f(x)}{F_1(x)+f_1(x+h)-f_1(x)}=\frac{F(x)+hf'(x+\theta h)}{F_1(x)+hf'_1(x+\theta h)},$$

que foi deduzida pelo sr. dr. J. B. de Cabedo do theorema dos accrescimos finitos (*), póde ser tirada do theorema de Rolle e ser applicada depois para achar a formula dos accrescimos finitos.

Com effeito, pondo

$$A=\frac{F(x)+f(x+h)-f(x)}{F_1(x)+f_1(x+h)-f_1(x)},$$

a funcção

$$\varphi(z)=F(x)\frac{z-x}{h}+f(z)-f(x)-A\left[F_1(x).\frac{z-x}{h}\right.$$
$$\left.+f_1(z)-f(x)\right]$$

(*) *Jornal de Sciencias math. e astr.* t. IX, pag. 129.

que se annulla para $z=x$ e $z=x+h$, dá, representando por θ uma quantidade positiva e menor que a unidade,

$$\varphi'(x+\theta h)=\mathrm{F}(x).\frac{1}{h}+f'(x+\theta h)-\mathrm{A}\Big[\mathrm{F}_1(x)\frac{1}{h}$$
$$+f'_1(x+\theta h)\Big]=0,$$

equação d'onde se tira a formula (1), resolvendo-a em ordem a A.

Pondo na formula (1) $\mathrm{F}(x)=0$ $\mathrm{F}_1(x)=0$, (só com estas condições obtemos o theorema de Cauchy) e $f_1(z)=x+h-z$ a formula dá a dos accrescimos finitos

$$f(x+h)-f(x)=hf'(x+\theta h).$$

BIBLIOGRAPHIA

A. Rebière. — Mathématiques et Mathématiciens, Paris, Nony, 1893.

Na pag. 56 do vol. IX d'este jornal deu-se noticia da 1.ª edição d'este livro Uma nova edição vem de apparecer contendo o dobro das materias da edição anterior. É um livro interessante, em alguns pontos instructivo, que se lê com o maior prazer. Como dissemos a respeito da 1.ª edição, contém anecdotas relativas a mathematicas celebres, paradoxos interessantes a que levam as mathematicas, noticias sobre problemas curiosos e muitas informações historicas uteis.

Ed. Weyr.— Sur une fonction discontinue (M. da Acad. de Praga, t. II, *1893).*

O auctor construe uma funcção da variavel real x, continua para todos os valores irracionaes de x, que, para os valores racionaes de x é contínua relativamente aos augmentos positivos de x e discontínua relativamente aos augmentos negativos.

G. Vivanti. — Sull'applicazione della funzione elitica p(u) *alla teoria dei poligoni di Poncelet (Rend. del Circolo mat. de Palermo,* t VII).

Deducção simples, por meio da consideração da funcção $p(u)$, dos resultados de Jacobi relativos aos polygonos de Poucelet e estudo dos casos particulares a que correspondem degenerações das funcções ellipticas.

A. Hurwitz. — *Beweis der Trancendenz der Zahl e (Nach. von der k. Gesellschaft de Wis. zu Göttingen, 1893).*

Contém esta nota uma demonstração, muito simples e fundada em considerações completamente elementares, da transcendencia do numero *e*.

L. C. e Almeida. — *Novas regras para desinvolver os determinantes litteraes do terceiro e quarto grão (Instituto, de Coimbra, 1893).*

G. Vivanti. — *Sulle serie di potense i cui coefficienti dipendono di una variable (Annali di Matematica, 1893).*

P. Mansion. — *Sur la loi des grands nombres de Poisson (Bull. de l'Acad. de Belgique, 1893).*

J. Deruytz. — *Sur les formes algébriques (Bull. de l'Acad. de Belgique, 1893).*

— *Sur les relations qui existent entre certaines déterminants (Item).*

— *Sur la réduction la plus complete des fonctions invariantes (Item).*

R. Marcolongo. — *Risoluzione di due problemi relativi alla deformazione di una sfera omogenea isotropa (Rend. della R. Acad. dei Lincei, 1892).*

—— *Intorno ad un punto della teoria della rotazione di un corpo (Rend. del Circolo mat. di Palermo, 1893).*

—— *Sulla ricerca dei centri di curvatura delle traiettorie dei puncti di una figura mobile (Item).*

—— *Alcune applicazioni delle funzioni ellittiche alla teoria dell'equilibrio dei fili flessibili (Rend. della R. Accad. de Napoli, 1892).*

G. Loria.— *L'odierno indirizzo e gli attuali problemis della storia delle scienze esatte, (Genova, 1893).*

Contém este opusculo um interessante discurso sobre os actuaes problemas da historia das sciencias mathematicas, pronunciado pelo auctor no Congresso historico italiano que teve logar em setembro de 1892.

G. Pirondini. — *Alcune formule relative alle linee tracciate sopra una superficie e loro applicazini (Annali di Matematica, 1893).*

E. Lemoine.— *Résultats et théorèmes concernant la Géométrie du triangle (Association française pour l'avancement des Sciences, 1892).*

M. Lerch.— *Z poctu integrálniho (M. da Acad. de Praga, 1893).*

A. Macfarlane. — *The fundamental theorems of Analysis generalised for space, Boston, 1893.*

G. T.

FIM DO VOLUME XI.

INDICE