XI, XII, XIII

JORNAL

DE

SCIENCIAS MATHEMATICAS E ASTRONOMICAS

PUBLICADO

PELO

DR. F. GOMES TEIXEIRA

Professor na Academia Polytechnica do Porto,
antigo Professor na Universidade de Coimbra,
socio da Academia Real das Sciencias de Lisboa, etc.

VOLUME XI

COIMBRA
IMPRENSA DA UNIVERSIDADE
1892

DOIS THEOREMAS DE GEOMETRIA ELEMENTAR

POR

Francisco da Ponte Horta

Demonstrou-se em Geometria analytica, no estudo das propriedades da parabola, que a circumferencia circumscripta ao triangulo formado por tres tangentes a essa curva passa pelo fóco. Parece-me porém de algum interesse dar a esta proposição uma feição mais abstracta e geral, facilitando o seu ingresso na Geometria elementar, enunciando-a e demonstrando-a do seguinte modo:

Se tres circumferencias de circulo se interceptarem no mesmo ponto, e as suas tres outras intercecções estiverem em linha recta, digo que os centros d'estas circumferencias estarão n'outra circumferencia que passará pelo ponto commum das tres primeiras.

Seja M a intersecção commum das tres circumferencias C, C′ e C″; e B, A e B′ as tres intersecções restantes.

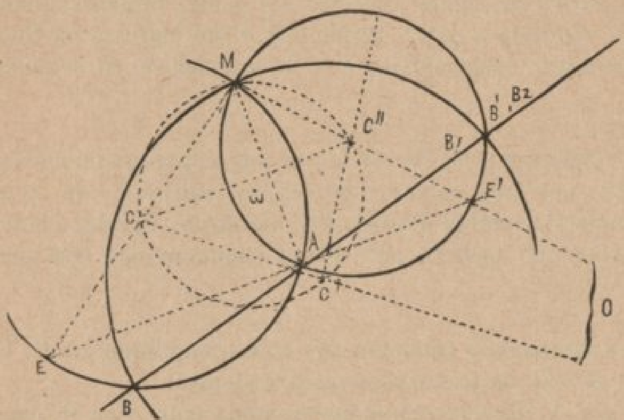
Tire-se por A (intersecção comprehendida entre C e B′) uma transversal parallela á linha dos centros das circumferencias que se intersectam em A, a qual cortará as mesmas circumferencias em E e E′. Se tirarmos a recta CC′, C′C″, MC e MC″ ter-se-ha produzido o triangulo OC′C″, cortado pela recta MC antiparallela a C′C″.

Com effeito, por serem eguaes os angulos BAE e B′AE′, ter-se-ha $\widehat{BE}^0 = \widehat{B'E'}^0$, e por conseguinte $\widehat{MB}^0 = \widehat{MB'}^0$, e logo

$MCO = OC''C'$; concluindo-se o existirem os quatro pontos M, C, C' e C'' na mesma circumferencia ω.

Reciprocamente, se de tres vertices d'um quadrilatero inscriptivel, como centros, descrevermos circumferencias que passem pelo quarto vertice, digo que as outras tres intersecções d'estas circumferencias estarão em linha recta.

Sejam por sua ordem CM, $C'M$, $C''M$ as tres circumferencias dadas e sejam B e A respectivamente as intersecções da 1.ª e 2.ª, e da 1.ª e 3.ª, e supponha-se que a 3.ª não encontra a 2.ª na intersecção B' d'esta com a recta AB, mas que corta esta recta em B_1 ou B_2; descreva-se então nova circumferencia C''_1 por A, M, B'. A primitiva circumferencia C'' e a actual C''_1 teem ambas os respectivos centros na recta CC'' perpendicular á corda MA, situados á direita d'ella; e visto que ambos esses centros estão na circumferencia ω (propos. diret.), já cortada pela dita perpendicular á esquerda de MA; segue-se que esta circumferencia será cortada por uma recta em tres pontos C, C'' e C''_1, o que é absurdo.



BIBLIOGRAPHIA

L. C. Almeida. — Primeiras noções sobre o calculo das quantidades geometricas. — Coimbra, 1892.

Contem este opusculo a theoria das operações sobre quantidades geometricas e a da representação d'estas quantidades por numeros imaginarios. A exposição d'estas doutrinas é feita com a maior clareza e simplicidade, de modo a poderem ser comprehendidas pelos alumnos dos Lyceus.

Contém ainda o mesmo opusculo as demonstrações do theorema fundamental da Algebra que se baseam nas theorias n'elle estudadas.

E. Mosnat. — Problèmes de Géométrie analytique, t. II. — *Paris, 1892.*

Deu-se na pag 21 do t. X d'este jornal noticia do vol. I d'esta boa collecção de problemas. No presente volume o auctor occupa-se ainda da Geometria analytica plana, appresentando a este respeito 699 problemas, uns com as respectivas soluções e outros simplesmente enunciados. Os assumptos a que estes problemas se referem são aquelles que são exigidos aos candidatos ás Escholas Polytechnica e Normal de Paris.

Estes assumptos sendo entre nós estudados numa cadeira do primeiro anno dos cursos superiores de Mathematica, recommendaremos esta collecção de problemas aos alumnos que frequentam esta cadeira.

Ed. Weyr. — *Sur l'intégrale elliptique de troisième espèce* (*Bolletin da Academia bohemia de Praga*, t. II).

N'este bello artigo o auctor determina os integraes definidos

$$\int_0^K \frac{k^2 sna\, cna\, dna\, sn^2 x}{1-k^2 sn^2 a\, sn^2 x} dx, \quad \int_K^{K+iK'} \frac{k^2 sna\, cna\, dna\, sn^2 x dx}{1-k^2 sn^2 a\, sn^2 x},$$

obtendo por um meio novo dois resultados importantes devidos ao sr. Hermite.

R. Guimarães. — *Nota sobre la construccion de una normal a una elipse* (*El Progreso matematico*, t. II).

Exposição de um meio facil de traçar a normal á ellipse, cujos eixos são a e b, pelos pontos cujas distancias ao centro são $a+b$ e $a-b$, e demonstração de que existe um ponto na circumferencia de raio $a-b$ tal que a normal traçada por elle passa pelo ponto de desvio maximo.

G. de Longchamps. — *Le calcul des séries convergentes* (*El Progreso matematico*, t. II).

N'este artigo tracta o sr. Longchamps de resolver, em alguns casos, o problema que consiste em determinar o numero de termos de uma serie convergente dada que é necessario tomar para ter a somma da serie com uma approximação determinada.

P. Günther. — *Das Additionstheorem der elliptischen Functionen* (*Journal für die reine und angewandte Mathematik*, t. 109).

P. Günther. — *Ueber die eindentigen Functionen von zwei durch eine algebraiche Gleichung verbundenen Veränderlichen* (*Item*).

O auctor d'estes dois bellos trabalhos falleceu em Berlin em 27 de setembro de 1891, tendo apenas 24 annos de idade. Estas duas memorias foram publicadas depois da sua morte.

Ed. Weyr. — *Construction von Osculationskegelschnitten der durch krumme projectivische Reihen und Büschal erzugten Curven* (*Bolletin da Academia bohemia de Praga*, t. II).

—— *Zur Theorie der Flächen, welche eine Schar von Kegelschnitten enthalten* (*Monatshefte für Mathematik und Physik*, t. II).

G. Vivanti. — *Notice historique sur la théorie des ensembles* (*Bibliotheca mathematica, 1892*).

H. Burkhardt. — *Zur Reduction des Problems der Geraden der allgemeinen Fläche dritter Ordnung auf das Transformationsproblem der hyperelliptischen Functionen* p=2. (*Nachrichten von der* K. *Gesellschaft der Wissenschaften zu Gottingen, 1892*).

L. Königsberger. — *Ueber die Irreductibilität der algebraischen partiellen Differentialgleichung* (*Sitzungsberichte der k. bayer Akad. der Wiss.*, t. XXI).

J. Bergbohm. — *Neue Intégrationsmethoden auf Grund der Potenzial, Logarithmal und Numeralrechnung, Stuttgart, 1892*).

J. Bergbohm. — *Neue Rechnungsmethoden der hoheren Mathematik.* — *Stuttgart, 1892*).

R. Mehmke. — *Ueber eine allgemeine Construction der Krümmungsmittelpunkte ebener Curven und eine neue Begründung der Fundamentalsatse der Flächentheorie* (*Rivista di Matematica*, t. II).

J. A. Serrasqueiro. — *Tratado de Geometria Elementar*, 8.ª edição, *Coimbra, 1892.*

—— *Tratado Elementar de Arithmetica*, 11.ª edição, *Coimbra, 1892.*

G. T.

SUR LA CONIQUE OSCULATRICE DES LIGNES PLANES

PAR

GEMINIANO PIRONDINI

(à Parme)

I

Equation de la conique osculatrice

Rapportons une ligne plane quelconque L au système d'axes formé par une de ses tangentes (axe des ξ) et par la normale correspondante (axe des η) et soient: ξ, η les coordonnés d'un point quelconque; s et ρ l'arc et le rayon de courbure de L; ε l'inclinaison d'une tangente quelconque sur l'axe des ξ. On a les formules:

$$\rho=\frac{ds}{d\varepsilon};\quad d\xi=\cos\varepsilon\,.\,ds;\quad d\eta=\sin\varepsilon\,ds;\quad \frac{d\eta}{d\xi}=\operatorname{tang}\varepsilon;$$

et à l'origine A des axes, où l'on a $\varepsilon=0$, on peut écrire:

$$(1)\begin{cases}\dfrac{d}{d\xi}=0;\quad \dfrac{d^2\eta}{d\xi^2}=\dfrac{1}{\rho};\quad \dfrac{d^3\eta}{d\xi^3}=-\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{d\rho}{ds};\\[2ex] \dfrac{d^2\eta}{d\xi^4}=\dfrac{3}{\rho^3}+\dfrac{2}{\rho^3}\left(\dfrac{d\rho}{ds}\right)^2-\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{d^2\rho}{ds^2}.\end{cases}$$

Une conique quelconque K, tangente à la courbe donnée L à l'origine A des axes, a pour équation :

$$(2) \qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dy = 0,$$

A, B, C, D étant des constantes et les coordonnées x, y étant comptées suivant les axes des ξ et des η respectivement.

Si l'on dérive successivement l'équation (2) quatre fois par rapport à x, en remarquant que l'on a :

$$x=0, \quad y=0, \quad \frac{dy}{dx}=0$$

à l'origine A, on trouve que la première des équations dérivées est vérifiée par identité et les autres suivantes deviennent :

$$(3) \begin{cases} D\dfrac{d^2y}{dx^2} + A = 0; \quad D\dfrac{d^3y}{dx^3} + 3B\dfrac{d^2y}{dx^2} = 0; \\ \\ D\dfrac{d^4y}{dx^4} + 3C\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + 4B \cdot \dfrac{d^3y}{dx^3} = 0, \end{cases}$$

les dérivées étant évaluées à l'origine A.

Les quantités A, B, C, D peuvent être déterminées de façon, à rendre au point A :

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{dy}{dx}; \quad \frac{d^2\eta}{d\xi^2} = \frac{d^2y}{dx^2}; \quad \frac{d^3\eta}{d\xi^3} = \frac{d^3y}{dx^3}; \quad \frac{d^4\eta}{d\xi^4} = \frac{d^4y}{dx^4}$$

ce qui, en force des (1), (3), nous donne :

$$\frac{A}{D} = -\frac{1}{\rho}; \quad \frac{B}{D} = \frac{1}{3}\frac{\rho'}{\rho}; \quad \frac{C}{D} = \frac{3\rho\rho'' - 2\rho'^2 - 9}{9\rho}.$$

En prenant $D = 9\rho$, on peut dire que l'équation de la conique osculatrice à une ligne plane quelconque (courbes dont le contact mutuel est du quatrième ordre) est la (2), A, B, C, D étant définis comme il suit :

$$(4) \qquad A = -9; \quad B = 3\rho'; \quad C = 3\rho\rho'' - 2\rho'^2 - 9; \quad D = 9\rho.$$

Cette conique est donc une ellipse, une parabole ou une hyperbole suivant que la quantité

$$3\rho\rho'' - 2\rho'^2 - 9$$

est, au point considéré, $< 0, = 0, > 0$.

Application. — D'après ce qui vient d'être dit,

$$3\rho\rho'' - 2\rho'^2 - 9 = 0$$

est l'équation différentielle de la courbe dont toute conique osculatrice est une parabole.

Et puisque par le calcul habituel on obtient :

$$\int \frac{d\rho}{\sqrt{a\rho^{\frac{2}{3}} - 9}} = s + b,$$

a et b étant des constantes, on voit que la ligne cherchée est elle-même une parabole (*); les coniques osculatrices coïncident donc, dans ce cas, avec la ligne osculée.

Les points où la conique osculatrice d'une ligne plane est une parabole sont donc des points isolés; et sur la courbe donnée, dans le voisinage d'un de ces points, les coniques osculatrices sont d'un côté des ellipses et de l'autre des hyperboles.

Par exemple sur la chaînette:

$$\rho = \frac{s^2}{a} + a$$

il y a seulement le point $s = a\sqrt{\frac{1}{2}}$ où la conique osculatrice est une parabole; dans les autres points cette conique est une ellipse ou une hyperbole suivant que:

$$s < a\sqrt{\frac{2}{3}}, \quad \text{ou} \quad s > a\sqrt{\frac{1}{2}}.$$

II

Centre de la conique osculatrice

Si la conique osculatrice est une ellipse ou une hyperbole, le centre est à distance finie; en désignant par x_0, y_0 ses coordonnés par rapport à la tangente et à la normale au point de contact, on a:

$$x_0 = -\frac{BD}{B^2 - AC}, \quad y_0 = \frac{AD}{B^2 - AC},$$

(*) Cesaro — Sur deux classes remarquables de lignes planes — N. Annales de Mathématiques, 1888.

c'est-à-dire à cause des (4):

$$(5) \qquad x_0 = \frac{3\rho\rho'}{9+\rho'^2-3\rho\rho''}, \quad y_0 = \frac{9\rho}{9+\rho'^2-3\rho\rho''}.$$

Prenons pour direction positive de l'axe des y celle qui va du point de contact au centre de courbure et pour direction positive de l'axe des x la direction de la courbe suivant laquelle le rayon de courbure augmente. On voit alors que le centre de la conique osculatrice à la ligne plane L est placé, par rapport à la tangente de L, du côté de la concavité ou de la convexité, et, par rapport à la normale de L, du côté où le rayon de courbure croît ou diminue, suivant que cette conique est une ellipse ou une hyperbole.

Lorsque la conique osculatrice est une parabole, le centre est à l'infini sur la droite passant par le point de contact et inclinée à la tangente de la ligne osculée de l'angle φ défini par l'équation :

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{y_0}{x_0} = \frac{3}{\rho'}.$$

Application. — Si l'on exclut de notre considération le cercle, la première des (5) nous apprend qu'il ne peut pas être $x_0 = 0$; la normale à la courbe osculée n'est donc jamais un axe de la conique osculatrice.

Nous allons voir, avec plus de généralité, s'il y a des lignes où les axes des coniques osculatrices sont inclinés d'un angle constant sur les tangentes des lignes osculées. Si θ est l'inclinaison d'un axe de la conique sur l'axe des x, on a :

$$\operatorname{tang}(2\theta) = \frac{2B}{A-C} = \frac{6\rho'}{2\rho'^2-3\rho\rho''},$$

d'où il suit :

$$3\operatorname{tang}(2\theta)\,.\,\rho\rho'' - 2\operatorname{tang}(2\theta)\,.\,\rho'^2 + 6\rho' = 0.$$

Lorsque $\rho''=0$, l'équation que l'on vient d'écrire donne :

$$\rho = 3 \cot(2\theta) \,.\, s\,;$$

toute spirale logarithmique appartient donc à la famille des lignes dont il s'agit ; et si l'on désigne par i l'inclinaison constante de cette courbe sur les rayons vecteurs issus du pôle, on a :

$$\cot\theta = \frac{\cot i \pm \sqrt{9+\cot^2 i}}{3}.$$

Si ρ'' n'est pas $=0$, on obtient à l'aide d'un calcul usuel :

$$\frac{k}{3}\operatorname{tang}(2\theta)\int\frac{d\rho}{\rho^{\frac{2}{3}}+k} = s + a,$$

k et a étant des constantes arbitraires.

1.^{ER} CAS. — Si $k<0$, en remplaçant k par $-k^2$, on a après une quadrature :

$$\rho^{\frac{1}{3}} + k\log\sqrt{\frac{\rho^{\frac{1}{3}}-k}{\rho^{\frac{1}{3}}+k}} = b - \frac{\cot(2\theta)}{k^2}\,.\,s,$$

b étant une constante.

2.^{EME} — Si $k<0$, on remplace k par k^2 et un procédé analogue au précédent nous donne :

$$\rho^{\frac{1}{3}} - k \,.\, \mathrm{arc}\,.\,\mathrm{tang}\left(\frac{\rho^{\frac{1}{3}}}{k}\right) = b + \frac{\cot(2\theta)}{k^2}\,.\,s,$$

b étant une constante.

Le problème proposé est donc résolu dans toute sa généralité.

Cas particulier. — Si $\theta = \frac{\pi}{4}$, l'équation différentielle du problème se réduit à :

$$3\rho\rho'' = 2\rho'^2,$$

d'où par intégration :

$$\rho = (as + b)^3,$$

a et b étant des constantes.

III

Axes de la conique osculatrice

L'équation de la conique osculatrice rapportée à ses axes est :

$$Mx^2 + Ny^2 + P = 0,$$

M, N, P étant liés par les relations :

$$M + N = A + C; \quad MN = AC - B^2; \quad P = Dy_0,$$

et y_0 étant donné par la deuxième des (5).
Si donc on pose :

$$^{1} = \sqrt{-\frac{M}{P}}, \quad ^{1} = \sqrt{-\frac{N}{P}},$$

on obtient:

$$(6)\begin{cases}\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{9\rho}\sqrt{\dfrac{9+\rho'^2-3\rho\rho''}{2}\left(18+2\rho'^2-3\rho\rho''-\sqrt{36\rho'^2+(2\rho'^2-3\rho\rho'')^2}\right)}\\[2ex]\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{9\rho}\sqrt{\dfrac{9+\rho'^2-3\rho\rho''}{2}\left(18+2\rho'^2-3\rho\rho''+\sqrt{36\rho'^2+(2\rho'^2-3\rho\rho'')^2}\right)}\end{cases}$$

Lorsque la conique osculatrice est une ellipse, on a:

$$9+\rho'^2-3\rho\rho''>0;\quad 18+2\rho'^2-3\rho\rho''=(9+\rho'^2-3\rho\rho'')+(9+\rho'^2)>0$$

$$(18+2\rho'^2-3\rho\rho'')^2>36\rho'^2+(2\rho'^2-3\rho\rho'')^2,$$

ce qui démontre que a et b sont des quantités réelles et de plus:

$$a>b;$$

$2a$ est donc le grand-axe de l'ellipse osculatrice et $2b$ le petit-axe.
Si la conique osculatrice est une hyperbole, on a:

$$9+\rho'^2-3\rho\rho''<0$$

et conséquemment:

$$(18+2\rho'^2-3\rho\rho'')^2<36\rho'^2+(2\rho'^2-3\rho\rho'')^2,$$

c'est-à-dire:

$$18+2\rho'^2-3\rho\rho''<\sqrt{36\rho'^2+(2\rho'^2-3\rho\rho'')^2}.$$

L'expression de a est donc réelle et celle de b est imaginaire;

$2a$ est par conséquent l'axe réel de l'hyperbole osculatricc et $2b\sqrt{-1}$ la longuer réelle de l'axe imaginaire.

Applications — 1) a et b soient des constantes.
Les (6) nous donnent:

$$(7)\quad \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{(9+\rho'^2-3\rho\rho'')\{(9+\rho'^2-3\rho\rho'')+(9+\rho'^2)\}}{81\rho^2}.$$

$$(8)\quad ab=\frac{27\rho^2}{(9+\rho'^2-3\rho\rho'')^{\frac{3}{2}}},$$

d'où, en éliminant $9+\rho'^2-3\rho\rho''$,

$$\rho'=3\sqrt{\left\{\left(\frac{a\rho}{b^2}\right)^{\frac{2}{3}}-1\right\}\left\{1-\left(\frac{b\rho}{a^2}\right)^{\frac{2}{3}}\right\}}.$$

On obtient par intégration:

$$s+\text{const}=\frac{1}{3}\int\frac{d\rho}{\sqrt{\left\{\left(\frac{a\rho}{b^2}\right)^{\frac{2}{3}}-1\right\}\left\{1-\left(\frac{b\rho}{a^2}\right)^{\frac{2}{3}}\right\}}}$$

c'est-à-dire l'équation intrinsèque des coniques (*).
Donc «*entre les lignes planes il n'y a que les coniques dans les-*

(*) Cesaro — *Mémoire* cité.

quelles toutes les coniques osculatrices soient égales entre elles; et dans ce cas les coniques osculatrices coïncident avec la courbe osculée».

2) Si les coniques osculatrices sont des ellipses ayant une surface constante, la (8) nous donne:

$$(9) \qquad 9+\rho'^2-3\rho\rho''=m\rho^{\frac{4}{3}},$$

m étant une constante; cette équation différentielle peut se rendre linéaire du premier ordre par une transformation visible. Une intégration effectuée sur l'équation transformée, nous donne:

$$(10) \qquad 9+\rho'^2+m\rho^{\frac{4}{3}}=n\rho^{\frac{2}{3}},$$

n étant une nouvelle constante.

La (9) réduit la (7) à l'autre:

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{m\rho^{\frac{4}{3}}\left(9+\rho'^2+m\rho^{\frac{4}{3}}\right)}{81\rho^2}$$

qui, par l'application de la (10), devient:

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{mn}{81}.$$

Les conditions:

$$ab=\text{const}, \quad \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\text{const}$$

nous apprendent que la conique osculatrice est toujours égale à soi-même; en appliquant donc le théorème précédent, on a:

«*Si les coniques osculatrices d'une ligne plane sont des ellipses* *à surface constante, cette ligne est elle-même une ellipse; et dans ce cas les coniques osculatrices coïncident avec la courbe osculée».*

3) Si la coniqne osculatrice à une ligne plane est toujours une hyperbole équilatère, on a:

$$\frac{a^2}{b^2}=-1,$$

c'est-à-dire, à cause des (6):

$$3\rho\rho''-2\rho'^2-18=0.$$

Cette équation, par un procédé très connu, donne

$$\int\frac{d\rho}{\sqrt{m\rho^{\frac{4}{3}}-9}}=s+\text{const}, \qquad (m=\text{const})$$

qui représente une hyperbole équilatère (*).

Donc *«entre les lignes planes il n'y a que l'hyperbole équilatère dans laquelle toutes les coniques osculatrices soient des hyperboles équilatères; et dans ce cas les coniques osculatrices coïncident avec la courbe osculée».*

4) Si la conique osculatrice est une ellipse et l'on désigne par S sa surface, on a à cause de l'équation (8):

$$S=\frac{27\pi\rho^2}{(9+\rho'^2-3\rho\rho'')^{\frac{3}{2}}}.$$

Si donc le rapport de la surface du cercle osculateur à celle de

(*) Cesaro — *Mémoire* cit.

l'ellipse osculatrice est une constante k, on a l'équation :

$$(11) \qquad 3\rho\rho'' - \rho'^2 = a$$

dans laquelle :

$$(12) \qquad a = 9\left(1 - \sqrt[3]{k^2}\right).$$

L'équation (11), par un calcul très facile, donne :

$$(13) \qquad \int \frac{dp}{\sqrt{mp^{\frac{2}{3}} - a}} = s + b,$$

m et b étant des constantes.

1ER CAS.— Si $a > 0$, c'est-à-dire $k < 1$, la constante m est positive ; en la remplaçant par m^2 et en effectuant la quadrature (13), on a :

$$(14) \quad m\rho^{\frac{1}{3}}\sqrt{m^2\rho^{\frac{2}{3}} - a} + a \,.\, \log\left(m\rho^{\frac{1}{3}} + \sqrt{m^2\rho^{\frac{2}{3}} - a}\right) = \frac{2m^3}{3} s + b.$$

2EME CAS.— Si $a = 0$, c'est-à-dire $k = 1$, la constante m doit être positive ; en la remplaçant par m^2, la (10) nous donne :

$$(15) \qquad \rho = (cs + b)^{\frac{3}{2}}$$

c et b étant des constantes.

3EME CAS.— Si $a < 0$, c'est-à-dire $k > 1$, posons :

$$(16) \qquad \mathrm{A} = -a = 9\left(\sqrt[3]{k^2} - 1\right)$$

et l'équation (13) devient :

$$\int \frac{d\rho}{\sqrt{A+m\rho^{\frac{2}{3}}}}=s \text{ const}$$

α) — Si $m<0$, on peut la remplacer par $-m^2$ et alors, en effectuant la quadrature, on a :

$$(17) \quad m\rho^{\frac{1}{3}}\sqrt{A-m^2\rho^{\frac{2}{3}}}+A \,.\, \text{arc} \,.\, \text{tang}\left(\frac{\sqrt{A-m^2\rho^{\frac{2}{3}}}}{m\rho^{\frac{1}{3}}}\right)=b-\frac{2m^3}{3}s.$$

β) — Si $m=0$, on a :

$$(18) \qquad \rho=\sqrt{A}\,.\,s+b.$$

γ) — Si $m>0$, on peut la remplacer par m^2, ce qui donne :

$$(19) \quad m\rho^{\frac{1}{3}}\sqrt{A+m^2\rho^{\frac{2}{3}}}-A\log\left(m\rho^{\frac{1}{3}}+\sqrt{A+m^2\rho^{\frac{2}{3}}}\right)=\frac{2m^3}{3}s+b.$$

En résumant, des lignes planes dans lesquelles les coniques osculatrices sont des ellipses ayant un rapport constant $\frac{1}{k}$ aux cercles osculateurs il y en a une seule famille (celle représentée par (14), a étant donné par (12)) si $k<1$; une seule famille (celle représentée par (15)) si $k=1$; trois familles (celles représentées par (17), (18), (19), A étant donné par (16)) si $k>1$.

La (18) nous apprend que les spirales logarithmiques appartiennent à la famille des lignes dont il s'agit ; pour ces courbes le rapport $k\,(>1)$ est lié à l'angle constant i sous lequel les spirales coupent les rayons vecteurs issus du pôle par la relation:

$$\cot i = 3\sqrt{\sqrt[3]{k^2} - 1}.$$

IV

Propriétés caractéristiques de quelques lignes particulières

1) Si A est le point de contact, C_1, C_2 les centres de première et de deuxième courbure de la ligne osculée et C le centre de la conique osculatrice, la condition que les points C_1, C_2, C soient en ligne droite est $y_0 = \rho$, y_0 étant donné par la deuxième equation (5).

Cela nous offre:

$$3\rho\rho'' - \rho'^2 = 0,$$

équation que l'on peut dériver de la (11) en y supposant $a = 0$, ce qui conduit aux lignes représentées par (15).

Donc «*les lignes planes dans lesquelles les centres de première et de deuxième courbure et le centre de la conique osculatrice sont en ligne droite, sont caractérisées par la propriété que la conique osculatrice est toujours une ellipse ayant la même surface du cercle osculateur. Ces lignes sont représentées, en coordonées intrinséques* ρ, s, *par l'équation* (15)».

2) Soit C_3 le centre de troisième courbure de la ligne osculée et les points C_2, C_3, C soient en ligne droite. Puisque C_2 est, par rapport à la normale de la ligne L, du côté où les rayons de courbure diminuent, on doit avoir $x_0 = -\rho_1$, x_0 étant donné par la première des (5) et ρ_1 étant le rayon de courbure de la ligne donnée.

Et puisque $\rho_1 = \rho\rho^1$, il résulte:

$$3\rho\rho'' - \rho'^2 = 12,$$

équation que l'on dérive de la (11) en posant $a = 12$.

Donc «*les lignes planes dans lesquelles les centres de première et de deuxième courbure et le centre de la conique osculatrice sont en ligne droite sont douées de la propriété que la conique osculatrice est toujours une hyperbole. Ces lignes sont représentées en coordonnées intrinsèques* ρ, s, *par l'équation* (14) *pourvu que l'on* y *suppose* $a=12$».

3) Si dans l'équation de la conique osculatrice on posé $x=0$, on a pour y deux valeurs :

$$y_1=0, \quad y_2=\frac{18\rho}{9+2\rho'^2-3\rho\rho''}.$$

Il suit que l'équation :

$$3\rho\rho''-2\rho'^2+9=0, \tag{20}$$

que l'on obtient en posant $y_2=\rho$, représente les lignes planes dans lesquelles les coniques osculatrices passent par le centre de courbure.

L'équation de ces lignes est donc :

$$\int\frac{d\rho}{\sqrt{\frac{9}{2}+m\rho^{\frac{1}{3}}}}=s+\text{const}, \tag{21}$$

m étant une constante.

Si à la condition du passage de la conique osculatrice par le centre de courbure on ajoute l'autre que cette conique soit une ellipse ayant un rapport constant au cercle osculateur, on a le système des équations (11), (20) d'où, en retranchant et intégrant :

$$\rho=3\sqrt{2-\sqrt[3]{k^2}}\,.\,s+\text{const},$$

la constante k étant donnée par l'égalité:

$$k = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{2}}. \tag{22}$$

En appliquant donc ce que l'on a vu à la fin du § III, on a le théorème:

«*La famille de lignes planes dans lesquelles les coniques osculatrices sont des ellipses passant par le centre de courbure et ayant un rapport constant* $\frac{1}{\mathrm{k}}$ *aux cerdes de courbure est constituée par les spirales logarithmiques coupant les rayons vecteurs issus du pôle sous l'angle* i *tel que* $\cot i = \frac{3}{\sqrt{2}}$. *Pour ces lignes le rapport constant* k *est donné par* (22).

Remarque. — Les équations (20), (21) nous donnent:

$$3\rho\rho'' - \rho'^2 - 9 = \rho'^2 - 18 = m\rho^{\frac{4}{3}} - \frac{27}{2}.$$

Si donc $m < 0$, la conique osculatrice est toujours une ellipse; si $m = 0$, on tombe sur les spirales logarithmiques que l'on vient de déterminer et conséquemment la conique osculatrice est toujours une ellipse; si $m > 0$, la conique osculatrice est une ellipse, une porabole ou une hyperbole suivant que la quantité $m\rho^{\frac{4}{3}} - \frac{27}{2}$ est, au point de contact, < 0, $= 0$, > 0.

4) Soit ε l'inclinaison de la tangente au point de contact sur la droit AC_2 joignant A au centre C_2 de deuxième courbure; si l'on remarque que le rayon ρ_1 de deuxième courbure est lié à ρ par la relation $\rho_1 = \rho\rho'$, on a:

$$\operatorname{tang} \varepsilon = \frac{\rho}{\rho_1} = \frac{1}{\rho'}.$$

Et si l'on élimiue x entre l'équation de la conique osculatrice et l'équation:

$$x=\rho' y$$

de la droite AC_2, on a pour y deux valeurs:

$$y_1=0, \qquad y_2=\frac{18\rho}{18+5\rho'^2-3\rho\rho''}.$$

Il suit que l'équation:

$$(23) \qquad 3\rho\rho''-5\rho'^2+9=0,$$

que l'on obtient en posant $y_2=\rho$, représente les lignes planes dont les coniques osculatrices passent par le centre de deuxième courbure. L'équation de ces lignes est donc:

$$(24) \qquad \int\frac{d\rho}{\sqrt{\frac{9}{5}+m\rho^{\frac{10}{3}}}}=s+\text{const},$$

m étant une constante.

Les lignes pour lesquelles sont vérifiées les équations (11), (23) sont représentées par l'équation

$$\rho=\frac{3}{2}\sqrt{2-\sqrt[3]{k^2}}\,.\,s+\text{const},$$

k étant défini par l'égalité:

$$(25) \qquad k=\left(\frac{6}{5}\right)^{\frac{3}{2}};$$

si donc on a présent les dernières considérations du § III, on a:

«*La famille de lignes dans lesquelles les coniques osculatrices sont des ellipses passant par le centre de deuxième courbure et ayant un rapport constant* $\frac{1}{\mathrm{k}}$ *aux cercles osculateurs, est constituée par les spirales logarithmiques coupant les rayons vecteurs issus du pôle sous l'angle* i *tel que* $\cot i = \frac{3}{\sqrt{5}}$. *Pour ces lignes le rapport constant* k *est donné par* (25)».

Remarque.—Les équations (23), (24) nous donnent:

$$3\rho\rho'' - \rho'^2 - 9 = 4m\rho^{\frac{10}{3}} - \frac{54}{5}.$$

Si donc $m < 0$, la conique osculatrice est une ellipse; si $m = 0$, on obtient les spirales logarithmiques que l'on a déterminé, et par conséquent la conique osculatrice est une ellipse; si $m > 0$, la conique osculatrice est une ellipse, une parabole ou une hyperbole suivant que la quantité $4m\rho^{\frac{10}{3}} - \frac{54}{5}$ est, au point de contact, < 0, $= 0$, > 0.

V

Application à la spirale logarithmique

L'équation intrinsèque de la spirale logarithmique L coupant les rayons vecteurs issus du pôle sous l'angle constant i peut s'écrire:

$$\rho = s \, . \cot i;$$

et puisque on en dérive:

$$3\rho\rho'' - \rho'^2 - 9 = -(9 + \cot^2 i) < 0,$$

on conclut que les coniques osculatrices sont des ellipses.

Si ξ, η sont les coordonnées d'un point quelconque de la ligne Δ lieu des centres des coniques osculatrices de L, les équations (5) donnent:

$$\xi = x + \frac{3\,s\,.\cot^2 i}{9 + \cot^2 i}\,.\cos\alpha + \frac{9s\,.\cot i}{9s\,.\cot^2 i}\cos\lambda\,;$$

$$\eta = y + \frac{3\,s\,.\cot^2 i}{9 + \cot^2 i}\cos\beta + \frac{9s\,.\cot i}{9 + \cot^2 i}\cos\mu,$$

$(\cos\alpha,\ \cos\beta)$, $(\cos\lambda,\ \cos\mu)$ étant les cosinus directeurs de la tangente et de normale de L.

En désignant donc par σ l'arc de Δ, on a:

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{4\cot i}{\sqrt{9 + \cot^2 i}} \tag{26}$$

$$\frac{d\xi}{d\sigma} = \frac{\cot i\cos\alpha + 3\cos\lambda}{\sqrt{9 + \cot^2 i}}, \qquad \frac{d\eta}{d\sigma} = \frac{\cot i\cos\beta + 3\cos\mu}{\sqrt{9 + \cot^2 i}}$$

$$(27)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2\xi}{d\sigma^2} = \dfrac{1}{\rho}\,.\,\dfrac{\cot i\cos\lambda - 3\cos\alpha}{4\cot i}, \\[2ex] \dfrac{d^2\eta}{d\sigma^2} = \dfrac{1}{\rho}\,.\,\dfrac{\cot i\cos\mu - 3\cos\beta}{4\cot i}\,; \end{cases}$$

et si ρ_1 est le rayon de courbure de Δ, les (27) donnent:

$$\rho_1 = \frac{4 \cot i}{\sqrt{9+\cot^2 i}} \cdot \rho = \frac{4 \cot^2 i}{\sqrt{9+\cot^2 i}} \cdot s,$$

c'est-à-dire, à cause de la (26):

$$\rho_1 = \sigma \,.\, \cot i.$$

Donc *«le lieu des centres des ellipses osculatrices d'une spirale logarithmique* L *est une nouvelle spirale logarithmique* Λ *égale à la primitive et ayant le même pôle».*

Si A, A_0 sont deux points correspondants des lignes L, Δ; δ la distance AA_0 et φ l'inclinaison de AA_0 sur la tangente de L, on *a*, à cause des (5):

$$\delta = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = \frac{3 \cot i \,.\, s}{\sqrt{9+\cot^2 i}}; \qquad \operatorname{tang} \varphi = \frac{y_0}{x_0} = 3 \operatorname{tang} i,$$

d'où l'on dérive:

$$\delta = s \,.\, \cot i \,.\, \sin \varphi = \rho \,.\, \sin \varphi.$$

Le point A_0 est donc la projection orthogonale du centre de courbure sur la droite AA_0: et puisque les droités comme AA_0 sont inclinées d'un angle constant sur L, on a:

«Les droites joignant les points d'une spirale logarithmique L *aux centres correspondants des ellipses osculatrices sont les tangentes à la spirale* Δ *lieu de ces centres».*

Puisque les formules (6) et celle donnant la surface de l'ellipse osculatrice deviennent dans notre cas:

$$(28)\begin{cases} \dfrac{1}{a}=\dfrac{(9+\cot^2 i)^{\frac{3}{4}}\left(\sqrt{9+\cot^2 i}-\cot i\right)^{\frac{1}{2}}}{9\cot i}\cdot\dfrac{1}{s}; \\ \\ \dfrac{1}{b}=\dfrac{(9+\cot^2 i)^{\frac{3}{4}}\left(\sqrt{9+\cot^2 i}+\cot i\right)}{9\cot i}\cdot\dfrac{1}{s}; \end{cases}$$

$$S=\frac{27}{(9+\cot^2 i)^{\frac{3}{2}}}\cdot\pi\rho^2,$$

on conclut: «*Les ellipses osculatrices d'une spirale logarithmique sont semblables entre elles; le rapport de leur surface à celle du cercle osculateur est la constante* $27\,(9+\cot^2 i)^{-\frac{3}{2}}$».

(Voir, pour cette dernière propriété, la fin du § III).

Considérons le triangle AA_0B don les sommêts sont le point de contact A, le centre A_0 de l'ellipse osculatrice et le point B où la tangente AT est coupée par l'axe de l'ellipse ayant l'inclinaison θ sur la tangente. Puisque (§ II):

$$(29)\qquad \operatorname{tang}(2\theta)=\frac{6\rho'}{2\rho'^2-3\rho\rho''}=3\,.\operatorname{tang} i$$

et l'inclinaison φ de la droite AA_0 sur la tangente est définie de la manière suivante (§ V)

$$\tan\varphi=\operatorname{tang}\,(TAA_0)=3\,.\operatorname{tang} i,$$

il résulte:
$$\varphi=2\theta\,;$$

et cela démontre que le triangle AA_0B est isoscèle sur la base BA_0.

Si donc on remarque que la droite AA_0 est tangente à la spirale Δ et que, dans une ellipse, la tangente, dont le pointe de contact est à la même distance du centre et des traces de cette tangente sur les axes de la conique, est parallèle à la droite joignant les extrémités du cadran elliptique qui contient le point de contact, on arrive aux propriétés suivantes: «*Dans la spirale logarithmique les axes de l'ellipse osculatrice sont inclinés d'un même angle constant sur les tangentes de la ligne donnée et du lieu des centres de ces ellipses*».

«*Si à un point quelconque d'une spirale logarithmique on construit l'ellipse osculatrice, la tangente commune à ces lignes, au point de contact, est parallèle à la droite joignant les deux sommêts de cette conique entre lesquels est placé le point de contact*».

Si nous revenons un instant au cas d'une ligne quelconque L, et l'on conserve aux symboles φ et δ la même signification qu'auparavant, on a:

$$\operatorname{tang}\varphi=\frac{y_0}{x_0}=\frac{3}{\rho'};\qquad \delta=\sqrt{x_0^2+y_0^2}=\frac{3\rho\sqrt{9+\rho'^2}}{9+\rho'^2-3\rho\rho''}.$$

La condition $\delta=\rho\,.\sin\varphi$, revenant à l'autre:

$$\frac{9+\rho'^2}{(9+\rho'^2-3\rho\rho'')^2}=\frac{1}{9+\rho'^2},$$

donne $\rho''=0$, cas de la spirale logarithmique.

Si l'on rappelle l'expression de tang (2θ) du § II, on voit que la condition $2\theta=\varphi$ équivaut à l'autre:

$$\frac{6\rho'}{2\rho'^2-3\rho\rho''}=\frac{3}{\rho'},$$

ce qui entraîne l'équation $\rho''=0$ de la spirale logarithmique.

Donc «*la propriété que dans la spirale logarithmique le centre de la conique osculatrice est la projection orthogonale du centre de* *courbure sur le diamètre de la conique passant an point de contact, et l'autre que les axes de la conique osculatrice ont la même inclinaison sur la tangente de cette conique au point de contact et sur le diamètre passant par ce point, appartiennent exclusivement à la spirale logarithmique».*

VI

Une propriété générale de la spirale logarithmique et ses applications

Si x_1, y_1 sont les coordonées d'un point quelconque de la ligne L_1 que l'on obtient de la spirale logarithmique L

$$\rho = s \,.\, \cot i$$

en menant par ses points des droites inclinées de l'angle constant φ à la courbe L et en prenant sur ces droites des portions ks proportionnelles à l'arc s, on a:

$$(30) \qquad \begin{cases} x_1 = x + ks(\cos\alpha\cos\varphi + \cos\lambda\sin\varphi); \\ y_1 = y + ks(\cos\beta\cos\lambda + \cos\mu\sin\varphi), \end{cases}$$

$(\cos\alpha, \cos\beta)$, $(\cos\lambda, \cos\mu)$ étant les cosinus directeurs de la tangente et de la normale de L.

Si s_1 est l'arc de L_1 et l'on pose:

$$(31) \quad m = \sqrt{(1 + k\cos\varphi - k\sin\varphi \,.\, \operatorname{tang} i)^2 + k^2(\sin\varphi + \cos\varphi \,.\, \operatorname{tang} i)^2}$$

on obtient:

$$ds_1 = mds$$

$$(32)\quad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{ds_1} = \dfrac{1}{m}\left\{(1+k\cos\varphi - k\sin\varphi.\mathrm{tang}\,i)\cos\alpha + k(\sin\varphi + \cos\varphi.\mathrm{tang}\,i)\cos\lambda\right\} \\ \dfrac{dy_1}{ds_1} = \dfrac{1}{m}\left\{(1+k\cos\varphi - k\sin\varphi.\mathrm{tang}\,i)\cos\beta + k(\sin\varphi + \cos\varphi.\mathrm{tang}\,i)\cos\mu\right\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x_1}{ds_1^2} = \dfrac{1}{m^2}\left\{(1+k\cos\varphi - k\sin\varphi.\mathrm{tang}\,i)\cos\lambda - k(\sin\varphi + \cos\varphi.\mathrm{tang}\,i)\cos\alpha\right\}\dfrac{1}{\rho} \\ \dfrac{d^2y_1}{ds_1^2} = \dfrac{1}{m^2}\left\{(1+k\cos\varphi - k\sin\varphi.\mathrm{tang}\,i)\cos\mu - k(\sin\varphi + \cos\varphi.\mathrm{tang}\,i)\cos\beta\right\}\dfrac{1}{\rho}. \end{cases}$$

Puisque les dernières équations nous donnent:

$$\rho_1 = m\rho = s_1 \,.\, \cot i,$$

on conclut que L_1 est une spirale égale à L; la construction géométrique donnant L_1 nous apprend à son tour que les deux spirales L, L_1 ont le même pôle.

Soient A_1 et A_2 les points de L_1 qui correspondent au point A de L, suivant que l'on regarde les lignes L et L_1 dans la dépendance qui dérive de la construction géométrique précédente ou bien dans la dépendance qui dérive de leur égalité. Soient: O le pôle commun; OAB, OA_1B_1, OA_2 les rayons vecteurs; AC, A_1C_1 les tangentes et AA_1D la droite joignant A à A_1.
On a:

$$BAC = i;\quad CAA_1 = \varphi;\quad OAA_1 = \pi - (i+\varphi).$$

Puisque les cosinus directeurs de AA_1D sont les multiplicateurs de ks dans les (30) et ceux de la tangente A_1C_1 sont donnés par les (32), on a:

$$\cos(C_1A_1D) = \frac{k + \cos\varphi}{m},$$

d'où:

$$C_1A_1D = \text{arc}.\cos\left(\frac{k + \cos\varphi}{m}\right).$$

Il résulte donc:

$$AA_1O = B_1A_1D = i + \text{arc}.\cos\left(\frac{k + \cos\varphi}{m}\right)$$

et

(33) $$AOA_1 = \varphi - \text{arc}.\cos\left(\frac{k + \cos\varphi}{m}\right).$$

Si $R = R_0 . e^{\cot i} . \omega$ est l'équation polaire de L, et (R_1, ω_1), (R_2, ω_2) les coordonnées polaires des points A_1, A_2, on a:

$$R_1 = R_0 e^{\cot i . \omega_1}, \quad R_2 = R_0 e^{\cot i . \omega_2},$$

d'où, en remarquant que $R_2 = OA_2 = OA$:

$$\frac{OA}{OA_1} = \frac{OA_2}{OA_2} = e^{\cot i\,(\omega_2 - \omega_1)}.$$

Et puisque:

$$\frac{OA}{OA_1} = \frac{1}{m}, \quad \omega_2 - \omega_1 = A_1OA_2,$$

il résulte:

(34) $$A_1OA_2 = -\tan i . \log m.$$

Si donc on pose $\chi = AOA_2$, les équations (33), (34) donnent:

$$(35 \qquad \chi = \varphi - \operatorname{tang} i \,.\, \log m - \operatorname{arc.cos}\left(\frac{k+\cos\varphi}{m}\right).$$

Par conséquent «*si l'on mène des droites inclinées de l'angle constant* φ *aux tangentes d'une spirale logarithmique* L, *et sur ces droites on prend des distances* ks *proportionnelles à l'arc de* L, *le lieu* L_1 *des extrémités est une nouvelle spirale logarithmique égale à* L *et ayant le même pôle. On obtient la spirale* L_1 *dans sa position en faisant tourner* L *autour du pôle, suivant la direction dans laquelle les rayons vecteurs augmentent, d'un angle* $\varkappa$ *donné par* (35), m *étant défini par* (31)».

Applications.—S'il s'agit du lieu Δ des centres des ellipses osculatrices de L, on a:

$$\delta = AA_1 = \frac{3\cot i}{\sqrt{9+\cot^2 i}} \,.\, s; \qquad \operatorname{tang}\varphi = 3 \,.\, \operatorname{tang} i,$$

puis

$$k = \frac{3\cot i}{\sqrt{9+\cot^2 i}}; \qquad m = \frac{4\cot i}{\sqrt{9+\cot^2 i}}.$$

La rotation $\varkappa$ que l'on doit donner à la spirale L autour de son pôle, pour obtenir Δ dans sa position, est donc donnée par l'équation:

$$(36) \quad \varkappa = \operatorname{arc.tang}(3\operatorname{tang} i) + \operatorname{tang} i \,.\, \log\left(\frac{\sqrt{9+\cot^2 i}}{4\cot i}\right).$$

Il suit de là que la condition nécessaire et suffisante pour que les spirales Δ, L coïncident, est que l'inclinaison i de la courbe donnée L sur les rayons vecteurs issus du pôle soit une racine réelle de l'équation:

$$\text{arc . tang}\,(3\,\text{tang}\,i) + \text{tang}\,i\,.\,\log\left(\frac{\sqrt{9+\cot^2 i}}{4\cot i}\right) = 0.$$

Si L_1 est la spirale lieu des centres de courbure de L, la distance entre deux points correspondants de ces lignes est

$$\rho = s\,.\,\cot i;$$

on a donc dans ce cas:

$$k = \cot i, \qquad \varphi = \frac{\pi}{2}, \qquad m = \cot i$$

et conséquemment:

$$\varkappa = \frac{\pi}{2} + \text{tang}\,i\,.\,\log\,(\text{tang}\,i).$$

Si l'on identifie cette équation à la (36), on voit que la spirale Λ lieu des centres des ellipses osculatrices de L coïncide avec la spirale L_1 lieu des centres des cercles osculateurs, lorsque l'inclinaison i est une racine réelle de l'équation:

$$\text{arc . tang}\,(3\,\text{tang}\,i) + \text{tang}\,i\,.\,\log\left(\frac{\sqrt{9+\cot^2 i}}{4}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Le théorème précédente conduit à une foule d'autres conséquences très intéressantes; par exemple les lieux des deux foyers de l'ellipse osculatrice, les lieux des quatres sommêts de cette conique, les courbes enveloppées par les deux axes, celles enveloppées par les deux directrices, etc., sont des spirales logarithmiques égales à la primitive et ayant le même pôle. Il n'y a aucune difficulté à déterminer la rotation à laquelle on doit assujétir la courbe donnée pour obtenir chacune des autres.

VII

La spirale logarithmique considérée comme l'enveloppe de ses ellipses osculatrices

Je me propose de déterminer les conditions sous lesquelles on doit déplacer une ellipse variable, pour que elle soit, à chaque instant, la conique osculatrice de la spirale logarithmique enveloppée. Soient:

$$\rho_1 = \sigma . \cot i, \qquad \rho = s . \cot i$$

les équations des spirales égales Δ, L, dont la première est parcourue par le centre de l'ellipse mobile et la deuxième est enveloppée par cette conique. La (26) réduit les (28) aux autres:

$$(37) \quad \begin{cases} a = \dfrac{9\sigma}{4(9+\cot^2 i)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\sqrt{9+\cot^2 i} - \cot i}}, \\[2ex] b = \dfrac{9\sigma}{4(9+\cot^2 i)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\sqrt{9+\cot^2 i} + \cot i}}. \end{cases}$$

Si l'on désigne par ε l'inclinaison d'un des axes de l'ellipse osculatrice sur la spirale logarithmique Δ, une propriété démontrée au § V nous apprend que ε n'est autre chose que l'angle θ de la formule (29); on a donc:

$$(38) \qquad \tang \varepsilon = \frac{\sqrt{9+\cot^2 i} - \cot i}{3}.$$

Cela posé, soit:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

l'équation d'une des ellipses osculatrices et soient A, B les sommêts placés sur les axes des x et des y, C le centre et MN la tangente parallèle à la droite AB; son point de contact P est, par une propriété démontrée au § V, le point de contact entre la conique et la spirale logarithmique osculée.

Or si l'on rappelle l'expression (28) des demi-axes de l'ellipse, on a:

$$\operatorname{tang}(\mathrm{NMC})=\operatorname{tang}(\mathrm{BAC})=\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{9+\cot^2 i}-\cot i}{3}$$

et cette formule démontre que c'est le grand-axe de l'ellipse osculatrice celui dont l'inclinaison sur la tangente au point de contact a été désignée par θ.

On peut donc énoncer le théorème: «*Une ellipse se déplace sur un plan de façon, que le centre parcourt une spirale logarithmique* Δ, *tandis que les demi-axes* a, b *varient suivant la loi exprimée par les équations* (37). *Si le grand-axe de l'ellipse coupe la tangente de* Δ *sous l'angle* ε *défini par la* (38):

1.° la ligne mobile enveloppe une spirale logarithmique L *égale à* Δ *et ayant le même pôle;*

2.° l'ellipse mobile est, dans toute position, la conique osculatrice de la spirale enveloppée.»

APPENDICE

Une nouvelle équation intrinsèque des coniques

Aux §§ I, III de ce mémoire j'ai eu l'occasion de rappeler l'équation en coordonnées intrinsèques ρ, s que M. Cesaro a donné pour les coniques; je prends occasion de cela pour faire connaître une autre équation intrinsèque de ces courbes.

Les équations:

$$x = \mathrm{R} \, . \cos \left(\int \frac{\sqrt{1-\mathrm{R}'^2}}{\mathrm{R}} ds \right),$$

$$y = \mathrm{R} \, . \sin \left(\int \frac{\sqrt{1-\mathrm{R}'^2}}{\mathrm{R}} \, . ds \right)$$

donnent les coordonnées d'un point quelconque d'une ligne plane, s étant l'arc et R le rayon vecteur issu de l'origine des axes. Et puisque ces équations donnent pour le rayon de courbure ρ

$$\rho = \frac{\mathrm{R}\sqrt{1-\mathrm{R}'^2}}{\mathrm{R}\mathrm{R}'' + \mathrm{R}'^2 - 1},$$

on conclut qu'une ligne plane est déterminée d'une manière complète par une équation donnant le rayon vecteur R en fonction de l'arc s.

Je me propose ici de trouver l'équation caractéristique des coniques en coordonnées intrinsèques R, s.

Coniques a centre. — Si O, O_1 sont les foyers, a la distance OO_1, R le rayon vecteur joignant O à un point quelconque A (x, y) de la conique, les cosinus directeurs des rayons vecteurs OA, O_1A et de la tangente à la conique en A sont respectivement :

$$\frac{x}{R}, \quad \frac{y}{R}; \quad \frac{x-a}{\sqrt{R^2+a^2-2ax}}, \quad \frac{y}{\sqrt{R^2+a^2-2ax}}; \quad \frac{dx}{ds}, \quad \frac{dy}{ds}.$$

Par conséquent, si l'on désigne par ω et ω_1 les angles que les rayons vecteurs OA, O_1A font avec la tangente, il résulte :

$$\cos\omega = \frac{xx'+yy'}{R} = \frac{dR}{ds};$$

$$\cos\omega_1 = \frac{(x-a)x'+yy'}{\sqrt{R^2+a^2-2ax}} = \frac{d\sqrt{R^2+a^2-2ax}}{ds}.$$

Or on a pour x l'expression (39) et d'ailleurs, à cause d'une propriété caractéristique des coniques à centre, $\omega = \omega_1$; on a donc pour ces lignes :

$$\frac{dR}{ds} = \frac{d\sqrt{R^2+a^2-2aR\,.\cos\left(\int\frac{\sqrt{1-R'^2}}{R}\,.\,ds\right)}}{ds}.$$

d'où par intégration :

$$R-k = \sqrt{R^2+a^2-2aR\,.\cos\left(\int\frac{\sqrt{1-R'^2}}{R}\,.\,ds\right)},$$

k étant une constante. On a d'ici:

$$\int \frac{\sqrt{1-R'^2}}{R} \, . \, ds = \operatorname{arc} . \cos \left(\frac{2kR + a^2 - k^2}{2aR} \right);$$

et si l'on dérive cette équation par rapport à s, on obtient après quelques calculs:

$$R' = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4R(R-k) - (a^2 - k^2)}{R(R-k)}}.$$

Donc «les coniques dont le centre est à distance finie sont représentées en coordonnées R, s par l'équation:

$$2 \int \sqrt{\frac{R(R-k)}{4R(R-k) - (a^2 - k^2)}} \, . \, dR = s + \text{const.},$$

le pôle étant un des foyers».

Parabole. — Soient: O le foyer, ω et ω_1 les angles que la tangente au pointe A forme avec le rayon vecteur OA et avec le conique passant par A. Nous avons:

$$\cos \omega = \frac{dR}{ds};$$

et si l'on prend l'axe de la parabole pour axe des x:

$$\cos \omega_1 = \frac{dx}{ds}.$$

En rappelant l'expression de x et la propriété caractéristique de la parabole $\omega = \omega_1$, on obtient:

$$\frac{dR}{ds} = \frac{d\left(R \,.\cos\int \frac{\sqrt{1-R'^2}}{R} ds\right)}{ds},$$

d'où par intégration:

$$R - k = R \,.\cos \int \frac{\sqrt{1-R'^2}}{R} ds,$$

k étant une constante arbitraire.

On a de cette équation:

$$\int \frac{\sqrt{1-R'^2}}{R} \,.\, ds = \text{arc} \,.\cos\left(\frac{R-k}{R}\right),$$

d'où par dérivation et après quelques calculs:

$$\sqrt{\frac{2R}{2R-k}} \,.\, R' = 1.$$

Cette équation, multipliée par ds et intégrée, donne:

$$\log\left(\sqrt{2R} + \sqrt{2R-k}\right)^{\frac{k}{2}} + \frac{1}{2}\sqrt{2R(2R-k)} = s + \text{const}.$$

«Telle est l'équation en coordonnées R, s de la parabole, lorsque le pôle coïncide avec le foyer.»

Parme, decembre, 1891.

ALGUNS THEOREMAS DE MECANICA

POR

ANTONIO CABREIRA

Alumno da Eschola Polytechnica de Lisboa

I

Ascenção no plano inclinado

1. VALOR DA FORÇA ASCENCIONAL DE UM CORPO.— Supponhamos dois pontos no espaço, m e M, definindo a linha de maior declive de um plano inclinado, e, ao mesmo tempo, existentes em duas superficies de nivel do peso do corpo, que pretendemos elevar de um para outro dos mesmos pontos. Ora, quer a ascenção se faça segundo a linha de maior declive, ou segundo a vertical, tirada por M, o trabalho desenvolvido é representado sómente pela differença dos potenciaes relativos ás superficies de nivel consideradas.

Logo, se designarmos por F, f, Pj e pj, as forças applicadas ao corpo n'aquellas duas hypotheses, e as projecções, sobre as suas direcções, dos caminhos percorridos no plano e no espaço, teremos a seguinte equação:

$$F \times Pj = f \times pj \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (1).$$

Vejâmos agora qual é a lei da variação d'estes elementos, quando a inclinação do plano permanece invariavel. Não conhecemos F, *à priori*, nem mesmo Pj; pelo contrario, f e pj determinam-se sempre, uma vez que se saiba o valor do peso e qual a distancia que separa as duas superficies de nivel. Notemos porém que a direcção de F faz com o plano inclinado um angulo egual ao angulo de attricto e que dando a este todos os seus valores possiveis, podemos, immediatamente, estabelecer as circumstancias em que F se aproxima, attinge ou excede f, quantidade facilmente conhecida.

Vê-se tambem que F é funcção de α, inclinação do plano, e da resistencia do meio que suppomos invariavel; emquanto que f não depende senão do peso do corpo, da altura percorrida e d'aquelle ultimo elemento. Então se variarmos o angulo de attricto, i, e conservarmos a inclinação do plano, f e pj ficam constantes, d'onde resulta a equação (1) pertencer á fórmula $xy=k^2$. Logo os valores porque F passa, variando-se i, podem-se analyticamente representar pelo ramo superior de uma hyperbole, referida ás suas assymptotas. Deduzâmos pois a solução geral da equação $F\times Pj=f\times pj$, discutindo os valores do angulo de attricto.

Consideremos em primeiro logar nullo o i; neste caso Pj confunde-se com a linha de maior declive, e adquire, por esse motivo, o maximo valor, o que exige F attingir o minimo valor. Á medida que o attricto augmenta, Pj, girando em volta de M, aproxima-se de pj, e portanto F augmenta successivamente, aproximando-se de f.

Determinemos agora o valor que i precisa ter, para F attingir f e depois exceder esta quantidade.

Ora, se nós introduzirmos a egualdade das forças propostas na equação (1) temos, como consequencia a egualdade das projecções sobre as suas direcções dos caminhos percorridos pelo corpo. Mas a direcção de F é perpendicular á geratriz do cone de equilibrio, cujo angulo, com a linha de maior declive, está voltado para m. Por outro lado, aquella ultima egualdade implica a coincidencia das duas projecções. Logo para F ser egual a f é necessario e sufficiente que aquella geratriz fique parallela ás superficies de nivel consideradas, e portanto, que i seja complemento de α.

No caso particular da inclinação do plano ser de 45° as duas forças têm a mesma intensidade, quando o coefficiente de attricto for a unidade.

Continuemos a augmentar i. Com isso fazemos com que Pj diminua successivamente, e portanto com que F exceda f.

Se i attingisse 90°, Pj annullava se e a direcção de F ficava perpendicular ao plano, caso em que haveria equilibrio.

Esta circumstancia tornava absurda a equação (1) e revellava a impossibilidade do corpo ser conduzido pelo plano inclinado.

Supponhamos, em segundo logar, variavel o angulo α e constante o angulo i.

Estudemos, n'esta hypothese, a lei da variação das quantidades que figuram na equação (1).

Agora a quantidade que fica constante é simplesmente Pj: F, f e pj augmentam com α. Effectivamente, como a linha de maior declive descreve uma rotação de 90° em volta de m, Pj apenas muda de posição no espaço, mantendo a mesma grandeza e a mesma inclinação em relação ao plano; emquanto f, que é funcção da altura, augmenta de grandeza, pois h varia de 0 até ao comprimento mM.

É facil de ver que F só póde ser egual a f quando ainda as duas projecções se confundirem ou, inversamente; e que, antes ou depois, de realisada essa condição, F é menor ou maior que f.

Logo o valor da força ascencional de um corpo pode-se exprimir pelo seguinte theorema:

A força dispendida para elevar um corpo, segundo a linha de maior declive, num plano inclinado, é menor, egual ou maior que a força dispendida para o erguer verticalmente, conforme o angulo de attricto é menor, egual ou maior que o complemento do angulo de inclinação.

2. Supponhamos que pretendemos elevar o corpo, segundo a linha geodesica determinada por dois pontos m e M, existentes em duas superficies de nivel do peso do corpo e n'uma surperficie curva,

Se o corpo percorrer a concavidade da superficie, que imaginamos voltada no sentido dos zz positivos, as cousas passam-se como se o corpo percorresse um plano, cuja inclinação variasse de 0 a 90°; se, pelo contrario a concavidade estiver voltada para os zz negativos, então cahimos na hypothese que figurámos, quando α decrescia, desde 90° até 0.

Logo o theorema anterior applica-se tambem ás superficies curvas.

Identicas considerações podemos fazer para os volumes de revolução, de simples curvatura, porque, em todas as suas geratrizes podemos imaginar um plano tangente, e portanto realisadas as circumstancias que temos estabelecido.

3. Leis do movimento ascencional.— Da equação (1) tira-se

$$F=\frac{fpj}{Pj}.$$

Ora $pj=x$ sen α e $Pj=x$ sen β, designando x a distancia percorrida pelo corpo na linha de maior declive, e β o angulo que a mesma recta faz com a perpendicular, baixada do seu extremo inicial, sobre Pj. Logo

$$P=\frac{f \operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta}=\frac{f \operatorname{sen}\alpha}{\cos i}$$

attendendo a que β é complemento de i. Mas $f=m\frac{d^2h}{dt^2}$; portanto

$$F=m\frac{d^2h}{dt^2}\times\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos i}.$$

Notando tambem que $F=m\frac{d^2x}{dt^2}$, será finalmente verdadeira a seguinte egualdade:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d^2h}{dt^2}\times\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos i}.$$

Supponedo constante a relação $\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos i}$ e integrando vem:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dh}{dt}\times\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos i}+v_0.$$

Representando $\frac{dx}{dt}$ por v, velocidade correspondente a F, e $\frac{dh}{dt}$ por V, velocidade correspondente a f, e considerando nulla a velocidade inicial, chegamos á fórmula

$$v = V \times \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos i}.$$

É evidente que, se as forças impressas ao corpo forem instantaneas, quaesquer que sejam as intensidades, v e V annullam-se, decorrido um certo tempo. Nós porém queremos estudar a hypothese em que F e f são alimentadas por uma fonte de energia, que lhes permitte vencer a acção da gravidade, nas diversas posições do corpo, no espaço. Sendo assim, as forças actuam como se fossem constantes, e segundo as leis que regem o movimento descencional. Temos tambem que as variações do movimento produzido por f, quando eleva o corpo verticalmente, dependem exclusivamente da natureza do meio; o que já não succede a F, cuja velocidade correspondente é além d'isso, funcção de α e de i.

Para determinarmos as leis do movimento ascencional, n'esta hypothese, precisamos pois variar aquellas quantidades, e ainda a natureza do meio em que existe o plano inclinado, elemento que influe no valor de V.

Devemos notar que, se a fonte de energia fosse inexgotavel, poderiamos abstrahir da resistencia do meio, porque, qualquer que ella fosse, seria totalmente vencida pelas forças propostas.

Consideremos então dois meios: o vacuo, e um, cuja densidade contrarie sensivelmente o movimento ascencional.

Discutindo aquella ultima fórmula para o primeiro meio, achamos os seguintes resultados:

Ha movimento uniforme: 1.º — quando α for constante e o $\cos i$ augmentar o mesmo que V; 2.º — quando i for constante e o $\text{sen}\,\alpha$ diminuir tanto quanto V augmentar; 3.º — quando o $\cos i$ soffrer os mesmos accrescimos que $V \text{sen}\,\alpha$.

Ha movimento retardado: 1.º — quando α for constante e $\cos i$ augmentar mais do que V; 2.º — quando i for constante e o $\text{sen}\,\alpha$ diminuir mais do que V augmentar; 3.º — quando o $\cos i$ augmentar mais do que $V \text{sen}\,\alpha$.

Ha movimento accelerado: 1.° — quando α for constante e o $\cos i$ diminuir segundo qualquer lei, ou augmentar menos do que V; 2.° — quando i for constante e o $\operatorname{sen}\alpha$ diminuir menos do que V augmentar, ou augmentar, segundo qualquer lei; 3.° — quando α e i forem constantes: 4.° — quando o $\cos i$ augmentar menos do que $V \operatorname{sen}\alpha$.

A discussão da fórmula $v = V\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos i}$ tem duas partes, correspondentes a dois estados de movimento, quando imaginamos o plano inclinado n'um meio bastante resistente.

Effectivamente, quando o corpo, vindo do vacuo, penetra n'esse meio, a velocidade, proveniente de f, recebe cada vez accrescimos menores, até que o movimento se torna uniforme, n'uma certa superficie de nivel, a partir da qual se dá o retardamento.

Fazendo pois, em primeiro logar, a discussão do valor de v, n'aquella região, obtemos os seguintes resultados:

Ha movimento uniforme: 1.° — quando α for constante e $i = 0$; 2.° — quando i for constante e $\alpha = 90°$; 3.° — quando α e i forem constantes; 4.° — quando $\operatorname{sen}\alpha$ e $\cos i$ diminuirem ou augmentarem na mesma porporção.

Ha movimento retardado: 1.° — quando α for constante e o $\cos i$ augmentar, segundo qualquer lei; 2.° — quando i for constante e $\operatorname{sen}\alpha$ diminuir, segundo qualquer lei; 3.° — quando o $\cos i$ augmentar mais do que o $\operatorname{sen}\alpha$.

Ha movimento accelerado: 1.° — quando α for constante e o $\cos i$ diminuir, segundo qualquer lei; 2.° — quando i for constante e o $\operatorname{sen}\alpha$ augmentar, segundo qualquer lei; 3.° — quando $\cos i$ passar por valores inferiores ao $\operatorname{sen}\alpha$.

Discutindo agora a mesma fórmula para uma superficie de nivel do peso do do corpo, em que V decresce, deduzimos os seguintes resultados:

Ha movimento uniforme: 1.° — quando α for constante e o $\cos i$ diminuir o mesmo que V; 2.° — quando i for constante e o $\operatorname{sen}\alpha$ augmentar tanto quanto V diminuir; 3.° — quando o $\cos i$ diminuir o mesmo que $V \operatorname{sen}\alpha$.

Ha movimento retardado: 1.° — quando α for constante e o $\cos i$ diminuir menos do que V; 2.° — quando i for constante e o $\operatorname{sen}\alpha$ diminuir, segundo qualquer lei, ou augmentar menos do que V diminuir; 3.° — quando α e i forem constantes; 4.° — quando o $\cos i$ diminuir menos do que $V \operatorname{sen}\alpha$.

Ha movimento accelerado: 1.°— quando α for constante e o cos i diminuir mais do que V; 2.°— quando i for constante e o sen α augmentar mais do que V diminuir; 3.°— quando o cos i diminuir mais do que V sen α.

Coordenando estas conclusões, e considerando o movimento desde o vacuo até uma certa profundidade de um meio, sensivelmente resistente, ficam demonstradas as seguintes leis de movimento ascencional:

1.ª— *Quando os angulos de inclinação e attricto são constantes, ha movimento accelerado, uniforme ou retardado, conforme o corpo sóbe pelo plano inclinado, no vacuo, nas primeiras regiões ou na profundidade de um meio resistente.*

2.ª— *Quando sómente é constante o angulo de inclinação, ha movimento uniforme, retardado ou accelerado, conforme o angulo de attricto diminue até* 0 *e em seguida augmenta; ou, depois de diminuir até um certo valor, augmenta bruscamente; ou, por ultimo, augmenta ou diminue, segundo qualquer lei.*

3.ª— *Quando sómente é constante o angulo de attricto, ha movimento uniforme, retardado ou accelerado, conforme o angulo de inclinação, variando descontinuamente, passa por 90°; ou diminue continuamente, ou, depois de diminuir, cresce sensivelmente a partir de uma certa profundidade do meio resistente; ou, por ultimo, augmenta para diminuir a uma certa profundidade do meio resistente.*

4. Analyse da força ascencional.— N'um plano inclinado cujo angulo de attricto está comprehendido entre o e 90°, a força ascencional de um corpo não é parallela nem perpendicular ao plano; logo pode-se decompor em duas componentes tangencial e normal. Estudemos, n'esta hypothese, os valores d'essas componentes.

Sejam então F, P, r, F_t, P_t, r_t, F_n, P_n e r_n a força ascencional o pezo do corpo, a resistencia do plano e as respectivas componentes tangenciaes e normaes.

Ora, porque a resultante de F, P e r, tem uma componente tangencial egual á somma geometrica de F_t, P_t e r_t, bem como uma componente normal expressa por uma somma identica d'aquellas componentes normaes, temos as seguintes equações, que vamos discutir:

$$|F_t|-(|P_t|+|r_t|)=m\frac{dv}{dt}\ldots\ldots\ldots\ldots (a)$$

$$|F_n|-(|P_n|+|r_n|)=\frac{mv^2}{\rho}\ldots\ldots\ldots\ldots (b).$$

Estabeleçamos agora as condições da ascenção, dependentes da natureza do plano; estas são: 1.ª — *a resistencia do plano ha de ser egual ao pezo do corpo;* 2.ª *a resistencia do plano ha de ser superior ao pezo do corpo.*

A primeira condição verifica-se quando

$$|r_n|=|P_n| \text{ e } |r_t|=|P\ |;$$

a segunda condição realisa-se: 1.° quando

$$|P_t|>|r_t| \text{ e } |P_n|<|r_n|;$$

2.° quando

$$|P_t|<|r_t| \text{ e } |P_n|>|r_n|;$$

3.° quando

$$|P_t|<|r_t| \text{ e } |P_n|<|r\ |.$$

Supponhamos, em primeiro logar, constante a inclinação do plano. Sendo assim, a trajectoria do corpo é rectilinea, e, portanto ρ tornar-se infinito, donde resulta a equação (b) transformar-se em

$$|F_n|=|P_n|+|r_n|\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (c)$$

emquanto que a equação (a) subsiste.

Se $|r|=|P|$, fica $|P_n|=|r_n|$. Mas como são de signaes contrarios, a sua somma annulla-se, donde $F_n=0$ e portanto $F = F_t$, circumstancia que só se obtem quando o attricto é nullo. Temos pois que *á primeira condição da ascenção do corpo corresponde o minimo valor para* F_n *e o maximo valor para* F_t.

Introduzamos agora na equação (*c*) as desegualdades representativas da segunda condição de ascenção.

A primeira torna F_n *egual á reacção da resultante das componentes normaes do pezo e da resistencia do plano*. A segunda exprime F_n *pela acção dos mesmos componentes.*

Em todos estes casos F_t *é expressa pela somma geometrica da componente tangencial da resultante de* F, P e r, *e da resultante das componentes* P_t e r_t.

Supponhamos, em segundo logar, que a linha de maior declive do plano inclinado descreve uma rotação de 90° em torno da posição inicial do corpo.

Então o corpo é obrigado a percorrer um arco de quadrante, o que exige a annullação de $\frac{dv}{dt}$. Logo a equação (*a*) transforma-se em

$$|F_t|=|P_t|+|r_t| \dots\dots\dots\dots\dots\dots (d).$$

Consideremos $|r|=P$; d'esta egualdade deduzimos, em virtude da primeira condição de ascenção, $|r_t|=|P_t|$, parcellas de signal contrario a F_t. Logo: F_t *pode-se considerar egual á reacção da resultante dos componentes tangenciaes do pezo do corpo e da resistencia do plano, e nunca se annulla.*

Introduzindo na equação (*d*) as desegualdades a que já nos referimos chegavamos á mesma conclusão.

A equação (*b*) traduz-nos, n'este caso, o valor de F_n: *representa a somma geometrica da força centripeta originada e da resultante das componentes normaes do pezo do corpo e da resistencia do plano.*

II

Somma de areas e derivada volumar

5. Somma de areas. — Supponhamos que $F=F_1+F_2$, sendo estas duas ultimas forças definidas por quaesquer intensidades e direcções differentes, existentes na mesma superficie de nivel do pezo do movel, em repouso, sobre que actuam. Consideremos os seus momentos nullos em relação a um eixo fixo, o dos zz, e que o movel está ligado por um vector á origem das coordenadas.

Sendo assim, o movel se fosse só actuado por F_1 descreveria uma certa trajectoria no tempo t; se, por sua vez, fosse isoladamente sollicitado por F_2, descreveria outra trajectoria, cuja corda, sommada geometricamente com a corda da primeira, havia de dar aquella correspondente á trajectoria que o corpo, actuado por F, descreveria no mesmo tempo t.

Ora a acção isolada de cada uma das forças propostas determina uma area, descripta pelo vector considerado, area limitada por um triangulo.

Mas, como a base de um d'esses triangulos (a corda correspondente á trajectoria originada por F) é egual, como vimos, á somma das outras duas bases (cordas correspondentes a F_1 e F_2) e a altura é commum (a distancia da superficie de nivel ao plano dos xy) temos o seguinte theorema:

A area descripta pelo vector, quando o movel é actuado por F *é egual á somma das areas, descriptas pelo mesmo vector, se o movel, isoladamente, fôr actuado por* F_1 *e* F_2, *nas condições que estabelecemos.*

6. Derivada volumar. — Imaginemos agora a seguinte hypothese:

Um movel, inicialmente em repouso, é durante um certo tempo, t, actuado successivamente por muitas forças constantes, cujas direcções divergem e existem n'uma superficie de nivel do pezo do movel. Em virtude do que dissemos no paragrapho anterior, a resultante r, das duas primeiras forças f_1 e f_2, determinará uma area egual á somma dos determinados por estas forças; depois da acção de f_3, obtemos uma nova resultante r_2, que produz identicos resultados a r_1; e assim por deante.

Ora da formação successiva de todas estas resultantes nasce, necessariamente, uma rotação da corda, correspondente á trajectoria inicial do movel; e portanto, uma revolução da area primitiva descripta pelo vector, area, que augmentando de valor, gera um cone de base espiraliforme.

Feitas estas considerações, chamamos *derivada volumar* ao limite da relação do accrescimo do volume, gerado n'um intervallo de tempo, infinitamente pequeno, para esse mesmo intervallo; e exprimimos o seu valor por $\frac{dV}{dt}$.

7. A derivada volumar, por isso que exprime o limite da relação de um espaço, infinitamente pequeno percorrido n'um intervalo de tempo, tambem infinitamente pequeno, para esse mesmo intervallo, representa a *velocidade volumar*, que, derivada em relação ao tempo, origina a *acceleração volumar* de primeira ordem; e assim successivamente.

Ora uma força qualquer póde ser sempre expressa pelo producto da massa do corpo, sobre que actua, pela acceleração que produz. Logo, teremos a seguinte equação:

$$[f_1]+[f_2]+[f_3]+\ldots=m\left[\frac{d^2V}{dt^2}\right]$$

ou

$$[f_1]+[f_2]+[f_3]+\ldots=m\left[\frac{d\left(\frac{dV}{dt}\right)}{dt}\right].$$

Multiplicando ambos os membros por dt e integrando fica:

$$\int_{t_0}^{t}[f_1]\,dt+\int_{t_0}^{t}[f_2]\,dt+\int_{t_0}^{t}[f_3]\,dt+\ldots=m\left[\frac{dV}{dt}\right]_t-m\left[\frac{dV}{dt}\right]_{t_0}.$$

Portanto fica demonstrado o seguinte theorema:

O accrescimo das quantidades de movimento volumar, adquirido no intervallo que vae de t_0 a t, é egual á somma dos integraes geometricos das impulsões elementares das forças que, n'esse mesmo intervallo de tempo, originaram o movimento volumar.

Se, n'esta ultima expressão dividirmos ambos os membros por m e tomarmos para unidade de tempo o intervallo de tempo que vae de t_0 a t, deduzimos o seguinte enunciado:

A acceleração volumar é egual ao quociente da somma dos integraes geometricos das impulsões elementares das forças, que na unidade de tempo actuaram o corpo, pela massa do mesmo corpo.

8. Impulsão e trabalho da resultante $m\frac{d^2V}{dt^2}$. — Para uma força dotada de potencial, suppondo a massa unidade, os theoremas das forças vivas e das quantidades de movimento dão-nos

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2 = M - M_0$$

$$v - v_0 = \int_{t_0}^{t} F\,dt.$$

Multiplicando esta ultima egualdade por $v + v_0$, dividindo o resultado por 2 e comparando com a primeira, deduzimos

$$\int_{t_0}^{t} F\,dt = 2\,\frac{M - M_0}{v + v_0}.$$

Logo:

A impulsão total de uma força, no intervallo $t - t_0$ é egual ao dobro do quociente do accrescimo do potencial pela somma das velocidades inicial e final.

Applicando este theorema á resultante proposta vem

$$\int_{t_0}^{t} \frac{d^2V}{dt^2}\,dt = 2\,\frac{M - M_0}{\dfrac{dV}{dt} + \dfrac{dV_0}{dt}}$$

ou

$$\frac{dV}{dt}-\frac{dV_0}{dt}=2\,\frac{M-M_0}{\dfrac{dV}{dt}+\dfrac{dV_0}{dt}}$$

d'onde

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dV}{dt}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{dV_0}{dt}\right)^2=M-M_0$$

expressão que define o trabalho de $m\,\dfrac{d^2V}{dt}$ entre duas das suas superficies de nivel.

SOBRE A NORMAL Á ELLIPSE

POR

RODOLPHO GUIMARÃES

Dado um ponto sobre o plano de uma secção conica não é facil de conduzir por elle uma normal á conica. O problema admitte quatro soluções, isto é, podem-se pelo ponto dado tirar quatro normaes e são taes que os pés da 3.ª e o ponto symetrico do pé da 4.ª relativamente ao centro da conica estão situados sobre um circulo (circulo de Joachimsthal). Ha porém certos pontos por onde se podem conduzir normaes de um modo facil. Os pontos do plano de uma ellipse que estão n'estas condições são em grande numero, porém nem todos se podem aproveitar porque as expressões que servem para os definir são extremamente complicadas. Assim, é facil conduzir normaes pelos pontos situados sobre os eixos da ellipse (questão que foi tractada por d'Ocagne no jornal de Longchamps e na *Revue coloniale et maritime*, e por Lebon nos *Nouvelles annales de Mathématiques*). Pelos pontos situados sobre circumferencias de raios $a-b$ e $a+b$ tambem o problema é simples como mostrámos no *El Progresso Matematico*. Ha um outro *ponto particular* por onde se póde conduzir uma normal á ellipse.

A equação da ellipse sendo verificada pelos valores

$$x'^2 = \frac{a^4}{a^2+b^2}, \quad y'^2 = \frac{b^4}{a^2+b^2}$$

temos que a equação da normal no ponto definido por estas coordenadas é

$$x - y - = \frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

e os pontos N e N' de intersecção da normal sobre os eixos têm por coordenadas

$$\left(0, \frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{e} \quad \frac{-c^2}{\sqrt{a^2+b^2}}, 0\right).$$

Vê-se pois que o triangulo ONN', que a normal intercepta sobre os eixos, é rectangulo e isosceles, sendo

$$\mathrm{ON} = \mathrm{ON}' = \frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\mathrm{NN}' = \sqrt{2} \cdot \frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Unindo o ponto medio D de NN' com o centro O temos que o triangulo ODN é rectangulo em D e isosceles e portanto

$$\mathrm{OD} = \frac{1}{2}\mathrm{NN}' = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$\mathrm{DON} = \frac{\pi}{4}.$$

Logo, por todo o ponto D situado no plano de uma ellipse e distante do centro O de uma grandeza definida pela expressão (1) e fazendo um angulo de 45° com o eixo maior, é possivel conduzir uma normal á ellipse. A normal procurada é então a recta perpendicular a OD».

Estudei tambem uma outra normal especial, isto é a normal conduzida por um ponto M da ellipse, tal que OMA = 45°. Parece-me comtudo que as formulas a que chego são já conhecidas e mesmo sem utilidade. Em todo o caso vou aqui consideral-o.

«Se o vector OM faz um angulo $\frac{\pi}{4}$ com o eixo maior OA de uma ellipse, as coordenadas do ponto M, são

$$x' = y' = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

e a equação da normal no ponto M será

$$a^2x - b'y = \frac{ab\,c^2}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Fazendo n'esta expressão

$$x = \frac{b}{a}\sqrt{a^2+b^2}$$

acha-se

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{b}{a}\sqrt{a^2+b^2} \\ y &= \frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Se tambem fizermos na mesma expressão (1)

virá

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{a}{b}\sqrt{a^2+b^2} \\ x &= \frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Ora os pontos definidos pelas coordenadas (2) e (3) assim como as do ponto M, satisfazem á relação

$$y_1(x_2-x_3)+y_2(x_3-x_1)+y_3(x_1-x_2)=0$$

que exprime a condição para que os tres pontos estejam em linha recta.

Logo dado um dos dois pontos N ou N′ definido pelas coordenadas (2) ou (3) pode-se por elle conduzir uma normal á ellipse. Basta para isso unil-o ao ponto M da intersecção da ellipse com o vector OM tirado a 45° sobre OA».

O motivo porque me parece que estes pontos são conhecidos é por causa da ligação que ha entre elles. Com effeito a expressão

$$\frac{b}{a}\sqrt{a^2+b^2}$$

é igual á grandeza OE que a tangente em M intercepta sobre o eixo menor prolongado; e, fazendo

$$x=\frac{b}{a}\sqrt{a^2+b^2}=\mathrm{OE},$$

a 2.ª das expressões (2) torna-se

$$y=\frac{b^2}{\left(\frac{\mathrm{OE}}{2}\right)}.$$

Da mesma fórma as coordenadas do 2.° ponto N′ são

$$y=\mathrm{OF}$$

e

$$x=\frac{a^2}{\left(\frac{\mathrm{OF}}{2}\right)}.$$

BIBLIOGRAPHIA

Gino Loria. — *Nicola Fergola e la scuola di matematici che lo ebbe a duce (Genova, 1892).*

Nicolau Fergola nasceu em Napoles em 1753, e n'esta cidade ensinou as mathematicas, ora particular ora publicamente, desde 1775 até 1822, anno em que morreu. É das descobertas d'este geometra eminente e das descobertas dos mathematicos illustres que sairam da sua escola que o sr. Gino Loria se occupa na sua bella e importante memoria, traçando d'este modo a historia de um periodo brilhante para as sciencias geometricas, que dá a maior honra á Italia.

A presente memoria foi publicada pela Universidade de Genova, e constitue mais um trabalho valioso com que o sabio professor d'esta Universidade veio augmentar a lista dos trabalhos importantes com que tem enriquecido a historia das mathematicas.

Albert Winterhalter. — *The international astrophotographic Congress and a visit to certain europian Observatories and other institutions (Washington, 1889).*

N'este volume, publicado pelo Observatorio de Washington, o auctor, delegado d'este Observatorio ao Congresso de Astrophotographia que teve logar em Paris em 1887, apresenta o relatorio das sessões d'este Congresso, e o relatorio das visitas que fez a muitos dos observatorios da Europa. Na sua digressão pelo nosso continente viu o illustre astronomo americano os principaes observatorios da França, Inglaterra, Allemanha, Austria, Belgica, Holanda, Dinamarca, etc., e a respeito de cada um d'elles apresenta na presente obra informações detalhadas, dando noticia da sua organisação actual, descrevendo os seus principaes instrumentos, informando a respeito da sua historia, etc. Excellentes estampas, representando os principaes observatorios visitados e os principaes instrumentos vistos pelo auctor, acompanham a bella obra de que estamos a dar noticia e contribuem consideravelmente para a tornar mais interessante.

Terminando diremos que não conhecemos obra alguma melhor do que a presente para se tomar conhecimento do estado actual dos principaes observatorios da Europa.

C. A. Laisant e E. Perrin. — *Premiers principes d'Algèbre (Paris, 1892).*

Dos livros, em numero consideravel, que têm sido publicados a respeito dos primeiros principios de Algebra, nenhum conhecemos em que estes principios sejam mais bem expostos do que no livro excellente que vêm de publicar os srs. Laisant e Perrin. Cremos bem que qualquer estudante regularmente inteligente, apprendendo por este livro, não encontrará difficuldade alguma em comprehender os principios da Algebra e que, quando terminar a sua leitura, ha de manejar com facilidade o calculo algebrico. É garantia d'isto a clareza com que o livro está escripto e a boa escolha dos numerosos exercicios que seguem a cada assumpto considerado.

As doutrinas que contém o novo manual de Algebra são aquellas que no nosso paiz constituem os programmas dos Lyceus e estão divididas em trinta e quatro lições, mais ou menos extensas segundo é mais ou menos facil a doutrina estudada em cada lição. As onze primeiras lições são consagradas ao estudo das operações algebricas e ao estabelecimento de algumas formulas que são consequencia das regras para effectuar estas operações.

As lições doze a vinte e nove são consagradas ao estudo das equações do primeiro grau a uma e a muitas incognitas, ao estudo das equações do segundo grau a uma incognita, e á resolução e discussão, feita com o maior cuidado, dos problemas que levam ás equações precedentes.

As lições trinta a trinta e quatro são consagradas ao estudo das progressões, dos logarithmos e dos problemas de juros compostos e annuidades.

N'um appendice, muito bem feito, occupam-se em seguida os auctores dos arranjos e combinações, do desenvolvimento do binomio, da continuidade e representação geometrica dos trinomios do segundo grau, etc. Nota-se n'este appendice demonstrações muito interessantes de algumas proposições arithmeticas por intermedio de um taboleiro de xadrez.

Terminaremos esta rapida noticia recommendando vivamente aos professores e estudantes dos nossos Lyceus este excellente livro.

H. Burkhardt. — *Bernhard Riemann,* (*Göttingen, 1892*).

Contém este opusculo um discurso pronunciado pelo sr. Burkhardt na Sociedade mathematica de Göttingen, no dia do vigesimo quinto anniversario da morte de Riemann, para recordar os trabalhos d'este geometra celebre.

A. Gützmer. — *Bemerchungen über die Iteration linearer homogener Differentialgleichungen* (*Sitzungsbericht der k. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften, Prag, 1892*).

Refere-se este artigo ao mesmo assumpto a que se refere o artigo publicado pelo mesmo geometra na pag. 3 do t. x d'este jornal.

E. Lemoine. — *Sur les triangles orthologiques et sur divers sujets de la Géométrie du triangle* (*Association française pour l'avancement des sciences, 1888*).

—— *Sur les transformations systématiques des formules relatives au triangle. Transformation continue. Divers résultats concernant la Géométrie du triangle* (*Item, 1891*).

—— *Étude sur une nouvelle transformation dite transformation continue* (*Mathesis, 1892*).

—— *Sur une transformation relative à la Géométrie du triangle* (*Bulletin de la Société mathématique de France, 1891*).

—— *Sur la transformation continue* (*Item*).

Todos os artigos precedentes são relativos á nova Geometria do triangulo. O auctor d'elles é um dos geometras que mais têm concorrido para a formação e progresso d'este ramo da Geometria.

No primeiro artigo estuda o sr. Lemoine as propriedades dos triangulos ABC e A'B'C' que satisfazem á condição de as perpendiculares abaixadas de A, B e C sobre B'C', C'A', A'B' concorrerem n'um mesmo ponto. Em seguida apresenta um numero consideravel de proposições e formulas, relativas aos elementos notaveis do triangulo, das quaes nos é impossivel dar noticia em curto espaço.

Nos outros artigos estuda o auctor uma transformação geometrica por meio da qual de cada formula relativa ao triangulo se tiram outras, e continua a apresentar muitas formulas e proposições relativas á Geometria do triangulo.

R. Guimarães. — Sur les transformées des sections planes du cône de révolution (Journal des mathématiques élementaires, 1892).

N'este artigo acha o auctor a equação polar da transformada de uma secção plana qualquer feita n'um cone de revolução, o que o leva a rectificar uma passagem da Geometria descriptiva de Amiot.

Harold Jacoby. — The Rutherfurd photographic measures in the group of the Pleiades (New-York, 1892).

Contém este opusculo os resultados das observações photographicas do grupo de Pleiades feitas por Rutherfurd nos annos de 1872 e 1874.

Gino Loria. — Sulla teoria della curvatura delle superficie (Rivista di Matematica, t. II).

Contém este artigo um modo de expor a theoria da curvatura das superficies sem introduzir hypothese alguma relativa á posição dos eixos cartesianos relativamente á superficie a estudar. Este modo de exposição é o adoptado pelo auctor no seu curso na Universidade de Genova.

G. *Vivanti.* — *Su certi integrali primi delle equazioni del moto d'un punto (Rend. del R. Istituto Lombardo, 1892).*

Os integraes de primeira ordem das equações do movimento de um ponto estudados pelo auctor são os da fórma

$$Ax'^2 + By'^2 + Cz'^2 - Dy'z' - Ez'x' - Fx'y' = 2V + c,$$

A, B, C, D, E, F, V representando funcções das coordenadas x, y, z do ponto e c a constante arbitraria.

G. *Vivanti.* — *Sulla determinazione di quattro funzioni mediante una equazione unica (Rend. del Circulo matematico di Palermo,* t. VI).

Determinação das funcções $f(x)$, $F(x)$, $\varphi(y)$, $\Phi(y)$ que satisfazem á equação

$$(f-\varphi)^2 - (F - yf')(\Phi - x\varphi') = 0.$$

H. G. *Zeuthen.* — *Nouvelle démonstration du principe de correspondance de Cayler et Brill et méthode à la détermination des coïncidences de correspondances algébriques sur une courbe d'un genre quelconque (Mathematische Annalen,* t. XL).

G. *Peano.* — *Generalizzazione della formula de Simpson (Atti della R. Accademia di Torino, 1892).*

G. Pirondini. — *Ligne d'intersection d'une surface de révolution avec un cilindre dont les génératices sont parallèles à l'axe* (*El Progreso matematico*, t. II).

Asaph Hall. — *Saturn and its Ring (Washington, 1889).*

S. Pincherle. — *Sulla forme differenziale lineare* (*Rend. della R. Accademia dei Lincei, 1892*).

A. Gutzmer. — *Zur Erinnerung au Paul Günther (Zeitschrift für Mathematik und Physik, 1891).*

G. Veronese. — *Osservazioni sopra una dimonstrazione contra il segmento infinitesimo attuale* (*Rend. del Circolo matematico di Palermo*, t, VI).

G. T.

SUR L'ADDITION DES ARGUMENTS DANS LES FONCTIONS ELLIPTIQUES

PAR

M. CH. HERMITE*

Soit $R(\xi)$ un polynôme quelconque du 4^{me} degré en ξ, et $\xi=\varphi(x)$ la fonction définie par l'égalité:

$$x=\int\frac{d\xi}{\sqrt{R(\xi)}},$$

on a, en désignant par a une constante, la relation suivante:

$$\frac{2\varphi'(a)}{\varphi(x+y)-\varphi(a)}=\frac{\varphi'(a+y)+\varphi'(a)}{\varphi(a+y)-\varphi(a)}+\frac{\varphi'(a-y)+\varphi'(a)}{\varphi(a-y)-\varphi(a)}$$

$$-\frac{\varphi'(a+y)-\varphi'(x)}{\varphi(a+y)-\varphi(x)}-\frac{\varphi'(a-y)+\varphi'(x)}{\varphi(a-y)-\varphi(x)}.$$

C'est le théorème pour l'addition des arguments dans la fonction $\varphi(x)$; j'indiquerai succinctement comment on en conclut les formules qui concernent les quantités $sn\,(x+y)$, $cn\,(x+y)$ et $dn\,(x+y)$. Supposons à cet effet que $\varphi(x)$ soit une fonction impaire et prenons $a=0$; les deux premiers termes se détruisent, et l'on trouve ainsi:

$$\frac{2\varphi'(0)}{\varphi(x+y)} = -\frac{\varphi'(y)-\varphi'(x)}{\varphi(y)-\varphi(x)} + \frac{\varphi'(y)+\varphi'(x)}{\varphi(y)+\varphi(x)}$$

$$= 2 \cdot \frac{\varphi(x)\varphi'(y)-\varphi'(x)\varphi(y)}{\varphi^2(x)-\varphi^2(y)}$$

d'où:

$$\varphi(x+y) = \frac{\varphi'(0)\left[\varphi^2(x)-\varphi^2(y)\right]}{\varphi(x)\varphi'(y)-\varphi'(x)\varphi(y)}.$$

Cela étant, les résultats cherchés s'obtiennent par un calcul facile en faisant successivement

$$\varphi(x) = snx, \quad \varphi(x) = \frac{snx}{cnx}, \quad \varphi(x) = \frac{snx}{dnx}.$$

Pour parvenir à l'addition des arguments dans la fonction $p(x)$, il faut supposer a infiniment petit, et employer l'expression $p(x) = \frac{1}{a^2}$, en négligeant le carré et les puissances supérieures de a. On est de cette manière amené à la relation suivante:

$$p(x+y) = p(x) + p(y) - \frac{1}{2} D_x^2 \log\left[p(x)-p(y)\right]$$

$$- D_{xy}^2 \log\left[p(x)-p(y)\right]$$

$$- \frac{1}{2} D_y^2 \log\left[p(x)-p(y)\right]$$

d'où se conclut sans peine la formule habituelle:

$$p(x+y) = -p(x) - p(y) + \frac{1}{4}\left[\frac{p'(x)-p'(y)}{p(x)-p(y)}\right]^2$$

DEMONSTRAÇÃO DO SEGUNDO THEOREMA DA MEDIA

POR

J. Bruno de Cabedo

(Professor na Universidade de Coimbra)

Se $f'(x)$ e $\varphi(x)$ são funcções finitas e determinadas entre a e x, a formula de integração por partes

$$\int f(x)\,\varphi(x)\,dx = f(x)\int_a^x \varphi(x)\,dx - \int\left[f'(x)\int_a^x \varphi(x)\,dx\right]dx$$

dá

$$\int_a^x f(x)\,\varphi(x)\,dx = \left[f(x)\int_a^x \varphi(x)\,dx\right]_a^x - \int_a^x\left[f'(x)\int_a^x \varphi(x)\,dx\right]dx.$$

Posto isto, designando por x_1 uma quantidade comprehendida entre a e x, e suppondo que, dentro d'este intervallo, $f(x)$ varía no mesmo sentido, o primeiro theorema da media applicado ao integral $\int_a^x\left[f'(x)\int_a^x \varphi(x)\,dx\right]dx$ transforma a formula anterior na seguinte:

$$\int_a^x f(x)\,\varphi(x)\,dx = f(x)\int_a^x \varphi(x)\,dx - [f(x) - f(a)]\int_a^{x_1} \varphi(x)\,dx.$$

RÉSOLUTION COMPLÈTE DES ÉQUATIONS INDÉTERMINÉES

$$x^2+1=2y^2; \quad x^2-1=2y^2;$$

PAR

E. Lemoine

Ancien élève de l'école polytechnique

Nous allons d'abord établir quelques résultats qui nous serviront à résoudre la question.

Trouver le terme de rang n *d'une suite ainsi formée : le* 1^{er} *terme est a, le* $2^{ème}$ *b et le terme de rang* n *se forme en ajoutant 2 fois le terme de rang* n — 1 *au terme de rang* n — 2.

$$\left.\begin{array}{ll}
1^{\text{er}}\ \text{terme} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & a+\ \ 0 \\
2^{\text{ième}}\ \text{terme} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 0+\ \ b \\
3^{\text{ième}}\ \text{terme} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & a+\ 2b \\
4^{\text{ième}}\ \text{terme} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 2a+\ 5b \\
5^{\text{ième}}\ \text{terme} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 5a+12b \\
6^{\text{ième}}\ \text{terme} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 12a+29b \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &
\end{array}\right\} (K)$$

Remarquons que, si l'on appelle A_n et B_n les coefficients de a et de b dans le $n^{ième}$ terme, on a $A_n = B_{n-1}$. Ce qui est facile à démontrer en faisant voir que si la chose a lieu pour trois termes consécutifs elle a lieu pour le suivant.

On conclut de là que la suite des coefficients de a à partir du $2^{\text{ième}}$ terme de K est la même que la suite des coefficients de b à partir du 1^{er} terme et sont les nombres 0, 1, 2, 5, 12, 29,... formés avec 0 et 1, comme la suite K est formée avec a et b.

Formons avec ces nombres 0 et 1 le tableau H de ces coefficients.

$$\left.\begin{array}{lr}
1^{\text{er}}\ \text{terme} \ldots & 0 = 0 \\
2^{\text{ième}}\ \text{terme} \ldots & 1 = 2^0 \\
3^{\text{ième}}\ \text{terme} \ldots & 2 = 2^1 \\
4^{\text{ième}}\ \text{terme} \ldots & 5 = 2^2 + 1 \\
5^{\text{ième}}\ \text{terme} \ldots & 12 = 2^3 + 2.2 \\
6^{\text{ième}}\ \text{terme} \ldots & 29 = 8^4 + 3.2^2 + 1 \\
7^{\text{ième}}\ \text{terme} \ldots & 70 = 2^5 + 4.2^3 + 3\ .2^1 \\
8^{\text{ième}}\ \text{terme} \ldots & 169 = 2^6 + 5.2^4 + 6\ .2^2 + 1 \\
9^{\text{ième}}\ \text{terme} \ldots & 408 = 2^7 + 6.2^5 + 10.2^3 + 4\ .2^1 \\
10^{\text{ième}}\ \text{terme} \ldots & 985 = 2^8 + 7.2^6 + 15.2^4 + 10.2^2 + 1 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\} \text{(H)}$$

et comparons le tableau H avec le triangle arithmétique de Pascal (tableau L)

1									
1	1								
1	2	1							
1	3	3	1						
1	4	6	4	1					
1	5	10	10	5	1				
1	6	15	20	15	6	1			
1	7	21	35	35	21	7	1		
1	8	28	56	70	56	28	8	1	
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

(L)

On aperçoit que les coëfficients des puissances de 2 dans les colonnes du tableau H sont les nombres correspondents des colonnes du tableau L, et il est facile de voir que la loi est générale en montrant que, si elle a lieu dans le tableau H jusqu'au $n^{\text{ième}}$ terme, elle a lieu pour le suivant.

On a donc en désignant par N_{2n-1} et N_{2n} le $2n-1^{\text{ième}}$ et le $2n^{\text{ième}}$ termes du tableau H

$$N_{2n-1} = 2_{2n-3} + C^1_{2n-4}\, 2^{n-5} + C^2_{2n-4}\, 2^{2n-7}$$

$$+ \ldots\ldots C^{2n-1}_{2n-4} .2$$

$$N_{2n} = 2^{2n-2} + C^1_{2n-3} .2^{2n-4} + C^2_{2n-3} .2^{2n-6}$$

$$+ \ldots\ldots C^{2n-2}_{2n-3} .2^2 + 1;$$

d'après cela si Δ_p est le $p^{\text{ième}}$ terme du tableau K on a:

$$\Delta_p = a\, N_{p-1} + b\, N_p.$$

Soient maintenant à résoudre en nombres entiers positifs ou négatifs les deux équations indéterminées

$$(1)\quad x^2 + 1 = 2y^2$$

$$(2)\quad x^2 - 1 = 2y^2$$ (voir, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1872, pag. 173).

Il est évident que, x et y représentant des nombres entiers et positifs, si x, y est une solution soit de (1) soit de (2) les couples

$$-x, -y; \quad +x, -y; \quad -x, +y$$

seront aussi des solutions; il nous suffira donc de chercher toutes les solutions positives.

Il est facile de voir que si x et y sont une solution de (1)

$$x+2y, \quad \text{et} \quad x+y$$

seront une solution de (2) et que si x et y sont une solution de (2)

$$x+2y \quad \text{et} \quad x+y$$

sont une solution (1); pour le démontrer substituons dans (2)

$$x+2y \quad \text{et} \quad x+y$$

à la place de x et de y, et il viendra

$$(x+2y)^2-1=2(x+y)^2$$

d'où

$$x^2+1=2y^2,$$

ce qui est vérifié par hypothèse etc.

On déduit de là que, si x et y sont une solution de (1),

$$3x+4y, \quad 2x+3y$$

sont aussi une solution de (1) ainsi que

$$3x-4y \quad \text{et} \quad 3y-2x;$$

si de même x et y sont une solution de (2),

$$3x+4y,\ 3y+2x \quad \text{et} \quad 3x-4y \quad \text{et} \quad 3y-2x$$

seront aussi des solutions de (2).

Une solution connue de (1) ou de (2) conduit donc à une famille de solutions de (1) ou de (2);

$$x=1, \quad y=1$$

est une solution évidente de l'équation (1), de même que

$$x=1, \quad y=0$$

pour l'équation (2)

Il dérive donc de ces valeurs *une famille* de solutions pour les équations (1) et (2); nous allons démontrer que toutes les solutions possibles de ces équations appartiennent à cette même famille; il suffit de le démontrer pour l'une des équations (1) ou (2) puisque nous avons vu que leurs solutions sont liées linéairement.

Nous allons donc le démontrer seulement pour (1).

Soit x, y une solution de (1) en nombres *entiers et positifs;* nous avons vu que

$$x' = 3x - 4y$$

$$y' = 3y - 2x$$

est aussi une solution; comme on a:

$$x = 3x' + 4y', \quad y = 2x' + 3y'$$

il est clair que, si x' et y' sont positifs, on aura

$$x' < x \quad y' < y;$$

comme de x' et de y' on peut déduire une solution x'', y'', etc., il est clair que nous pouvons supposer que x, y est la dernière solution positive de la famille décroissante de solutions qu'elle engendre. Ces solutions décroissantes sont données par les formules

$$x_1 = 3x - 4y$$

$$y_1 = 3y - 2x.$$

Puisque x et y positifs sont une solution de (1) on a:

$$y_1 = 3y - 2\sqrt{2y^2 - 1}$$

ce qui est toujours positif dans l'hypothèse faite de $y > 0$ et le signe du radical étant explicité; mais comme x et y sont par hypothèse la plus petite solution positive de (1), et ces valeurs sont toutes deux positives, il faut qu'on ait

$$x_1 > 0 \quad \text{ou} \quad 3\sqrt{2y^2 - 1} - 4y < 0$$

ou

$$2y^2-9<0 \quad \text{ou} \quad y<\frac{3}{\sqrt{2}};$$

ainsi l'y de la dernière solution positive d'une famille quelconque de solutions est plus petit que $\frac{3}{\sqrt{2}}$, il ne peut donc être que 2, 1, ou 0.

Or $y=2$ ne correspond à aucune valeur entière de x satisfaisant à (1);
$y=1$ donne $x=1$, ce qui conduit à la famille que nous avons signalée;
$y=0$ ne correspond à aucune valeur entière de x.

Donc toute solution de (1) appartient à la famille dérivée de $x=1$, $y=1$ et par suite toute solution de (2) à la famille dérivée de $x=1$, $y=0$. Cela posé, nous aurons donc complètement résolu l'equation (1) si nous donnons toutes les solutions positives de la famille de solutions que nous avons reconnue.

En partant pour l'équation (2) des valeurs $x=1$ $y=0$ et pour l'équation (1) de $x=1$ $y=1$, on peut former le tableau T des solutions positives de ces deux équations

Valeurs de	x	y	
Pour l'equation (2)	1	0	(T)
.... (1)	1	1	
.... (2)	3	2	
.... (1)	7	5	
.... (2)	17	12	
.... (1)	41	29	

On voit que la colonne des x du tableau T coïncidera avec les termes du tableau K dans lequel on suppose $a=1$, $b=1$ et que la colonne des y du tableau T coïncidera avec les termes du tableau K où l'on suppose

$$a=0, \quad b=1.$$

On déduit de ce qui précède que toutes les solutions positives de (1), et par suite toutes les solutions, sont données par

$$x_n = N_{2n-1} + N_{2n} = N_{2n+1} - N_{2n}$$

$$y_n = N_{2n}$$

et toutes les solutions de (2) par

$$x_2 = N_{2n-2} + N_{2n-1}$$

$$y_n = N_{2n-1}.$$

REMARQUE. N_{2n-1} a : $n-1$ termes,

N_{2n} a : $n+1$ termes.

Il est très facile de voir que la question que nous venons de traiter peut s'énoncer ainsi :

Donner explicitement toutes les valeurs entières de n *pour lesquelles* $2n^2-1$ *est un carré parfait et toutes les valeurs entières de* n *pour lesquelles* $2n^2+1$ *est un carré parfait.*

La solution que nous venons de donner des équations indéterminées (1) et (2) s'appuie sur la formation du tableau H, c'est-à-dire sur la résolution d'une équation aux différences finies

$$U_n = 2 . U_{n-1} + U_{n-2}$$

laquelle n'est qu'un cas particulier de la suivante

$$U_n = l . U_{n-2} + m U_{n-1}.$$

Nous allons terminer cette note en donnant la solution complète de cette dernière équation en supposant que les deux premiers termes soient a et b.

Formons le tableau K′ de la série:

$$
(\mathrm{K}')\left\{
\begin{array}{ll}
1^{\text{er}} \text{ terme:} & a+0 \\
2^{\text{ième}} \text{ terme:} & 0+b \\
3^{\text{ième}} \text{ terme:} & la+mb \\
4^{\text{ième}} \text{ terme:} & lma+(l+m^2)\,b \\
5^{\text{ième}} \text{ terme:} & l(l+m^2)\,a+m\,(\mathrm{U}+m^2)\,b \\
6^{\text{ième}} \text{ terme:} & lm\,(al+m^2)\,a+(l^2+3lm^2+m^4)\,b \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
2p^{\text{ième}} \text{ terme:} & lm\Big[(p-1).l^{p-2}+C_p^3.l^{p-3}.m^2+ \\
 & \quad +C_{p+1}^5.l^{p-4}.m^4+\ldots(2p-4)l.m^{2p-4}+m^{2p-2}\Big]a \\
 & \quad +\Big[l^{p-1}+C_p^2.l^{p-2}.m^2+C_{p+1}^4.l^{p-3}m^4+\ldots \\
 & \quad +C_{2p-3}^{2p-4}.l.m^{2p-4}+m^{2p-2}\Big]b, \\
(2p+1)^{\text{ième}} \text{ terme:} & l\Big[l^{p-1}+C_p^2.l^{p-2}.m^2+C_{p-1}^4.l^{p-3}.m^4+\ldots \\
 & \quad +C_{2p-3}^{2p-4}.l.m^{2p-4}+m^{2p-2}\Big]a \\
 & \quad +m\Big[pl^{p-1}+C_{p+1}^3.l^{p-2}.m^2+C_{p-2}^5.l^{p-3}.m^4+\ldots \\
 & \quad +C_{2p-2}^{2p-3}.l.m^{2p-4}+m^{2p-2}\Big]b,
\end{array}\right.
$$

et il suffit de montrer que si la loi est vraie jusqu'à un certain terme elle est générale.

NOTE SUR LES SÉRIES DONT LES TERMES SONT FONCTIONS D'UNE VARIABLE COMPLEXE

PAR

CH. DE LA VALLÉE POUSSIN

(Professeur à l'Université de Louvain)

Remarque préliminaire. — Soit $f(z)$ une fonction continue d'une variable complexe z; on sait que si $f(z)$ est synectique dans une aire A, la valeur de l'intégrale

$$\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$$

ne dépend que des extrémités de la ligne d'intégration, à supposer que l'on ne sorte pas de A.

Réciproquement, soient z_0 et z les extrémités d'une ligne L; si l'intégrale, effectuée le long de cette ligne,

$$\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$$

ne dépend que de z_0 et de z (L étant dans A), la fonction $f(z)$ est synectique dans l'aire A.

En effet, la fonction

$$\varphi(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$$

est alors une fonction uniforme de sa limite supérieure z; de plus cette fonction a une dérivée unique et bien déterminée $f(z)$, car

$$\lim_{h=0} \frac{\varphi(z+h)-\varphi(z)}{k} = \lim \int_z^{z+h} f(z)\,dz = f(z);$$

donc $\varphi(z)$ est synectique: il en est alors de même pour toutes ses dérivées, et pour $f(z)$ en particulier.

Théorème. — Considérons la série

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_n + \ldots\ldots,$$

dont tous les termes sont fonctions synectiques de z dans une aire A; si cette série converge uniformément dans la même aire:

1°) La somme de la série est une fonction synectique dans l'aire A;

2°) La série des dérivées d'ordre ρ

$$\frac{d^\rho u_0}{dz^\rho} + \frac{d^\rho u_1}{dz^\rho} + \ldots\ldots + \frac{d^\rho u_n}{dz^\rho} + \ldots\ldots$$

est uniformément convergente dans toute aire A' intérieure à A et a pour somme $\frac{d^\rho f(z)}{dz^\rho}$.

Démonstration. Soit ε un nombre arbitrairement petit; puisque la série converge uniformément, on aura, pour n assez grand,

$$f(z) = u_0 + u_1 + \ldots\ldots + u_n r_n,$$

$$|r_n| < \varepsilon,$$

et l'on sait d'ailleurs que $f(z)$, donc r_n aussi, seront des fonctions continues de z dans l'aire A.

Soient z_0 et z les extrémités d'une ligne d'intégration L; on aura

$$\int_L f(z)\,dz = \int_{z_0}^{z} u_0\,dz + \int_{z_0}^{z} u_1\,dz + \ldots\ldots + \int_{z_0}^{z} u_n\,dz + \int_L r_n\,dz,$$

$$\left|\int_L r_n\,dz\right| < \varepsilon S,$$

S étant la longueur de la ligne L.

Faisons tendre n vers l'infini et ε vers zéro, nous aurons, à la limite,

$$\int_L f(z)\,dz = \int_{z_0}^{z} u_0\,dz + \int_{z_0}^{z} u_1\,dz + \ldots\ldots + \int_{z_0}^{z} u_n\,dz + \ldots\ldots,$$

ce qui prouve deux choses: 1°) que la série infinie

$$\int_{z_0}^{z} u_0\,dz + \int_{z_0}^{z} + u_1\,dz + \ldots\ldots$$

et convergente; 2°) que la somme de cette série ne pouvant dépendre que de z_0 et de z, extrémités de la ligne L, il en sera de même pour la valeur de l'intégrale

$$\int_L f(z)\,dz,$$

et, par conséquent, en vertu de notre remarque préliminaire, $f(z)$ est synectique.

La démonstration de la seconde partie du théorème en dérive immédiatement.

Soient z un point de l'aire A′, R sa plus courte distance au contour de l'aire A; la fonction $f(z)$ sera synectique dans un cercle de rayon R, décrit autour du point z, et, par conséquent, r_n le sera également; d'ailleurs, on a sur ce cercle

$$|r_n| < \varepsilon,$$

d'où par un théorème bien connu on conclut au point z

$$\left|\frac{d^\rho r_n}{dz^\rho}\right| < \frac{1 \,.\, 2 \ldots \rho}{R^\rho}\varepsilon.$$

Considérons maintenant l'équation

$$\frac{d^\rho f(z)}{dz^\rho} = \frac{d^\rho u_0}{dz^\rho} + \frac{d^\rho u_1}{dz^\rho} + \ldots\ldots + \frac{d^\rho u_n}{dz^\rho} + \frac{d^\rho r_n}{dz^\rho};$$

tant que le point z restera dans A′ supposé intérieure à A, R restera supérieur à un nombre fixe, donc

$$\left|\frac{d^\rho r_n}{dz^\rho}\right|$$

tendra uniformément vers zéro quand u tendra vers l'infini, donc la série des dérivées d'ordre ρ est uniformément convergente et a pour somme

$$\frac{d^\rho f(z)}{dz^\rho},$$

quel que soit ρ.

Remarque. — Les propriétés des fonctions supposées connues dans cette démonstration sont démontrées dans presque tous les traités avant celles des séries potentielles. Cependant, la plupart de celles-ci sont généralement établies par des considérations spéciales, tandis qu'elles ne sont que des cas particuliers du théorème précédent. Il nous paraîtrait plus philosophique de commencer par établir le théorème général et de l'appliquer ensuite aux séries potentielles. On peut se demander en outre si la première partie du théorème n'est pas implicitement supposée dans la démonstration des théorèmes classiques de Weierstrass et de Mittag-Leffler pour la représentation des fonctions. Ce sont ces considérations didactiques qui nous ont engagé à rédiger cette petite Note.

BIBLIOGRAPHIA

J. Alves Bonifacio. — *Geometria elementar plana e no espaço (Porto, 1892).*

Contém este manual de Geometria elementar todos os assumptos que ordinariamente fazem parte das obras d'esta natureza, dispostos com boa ordem em dez livros, sendo os cinco primeiros dedicados á Geometria plana, os quatro seguintes á Geometria no espaço, e o ultimo aos principios da theoria geometrica das secções conicas e das superficies de segunda ordem. Eis um resumo dos assumptos tractados em cada um d'estes livros: I. Angulos. Perpendiculares e obliquas. Parallelas. II. Arcos e cordas. Tangentes á circumferencia. Medida dos segmentos de recta, dos arcos e dos angulos. III. Triangulos. Linhas perpendiculares no circulo. IV. Polygonos. Rectificação da circumferencia. V. Areas. VI. Planos e rectas no espaço. VII. Pyramides, prismas e polyedros. VIII. Cylindro, cone e esphera. IX. Areas e volumes. X. Propriedades elementares da ellipse, da hyperbole e da parabola. Transversaes no triangulo. Figuras homotheticas. Superficies do segundo grau.

Cada livro é acompanhado de numerosos exercicios relativos ás doutrinas n'elle tractadas.

A clareza com que é feita a exposição dos assumptos, a boa ordem na disposição dos mesmos e a boa escolha das demonstrações empregadas tornam o novo manual de Geometria elementar muito proprio para o ensino da Geometria nos Lyceus.

A Faculdade de Mathematica da Universidade de Coimbra (Coimbra, 1892).

Contém este opusculo um pequeno additamento á *Memoria* *historica da Faculdade de Mathematica*, publicada em 1872 pelo sr. dr. F. de Castro Freire; as propostas appresentadas ao Conselho superior de Instrucção publica no biennio de 1885 a 1886 pelo illustre delegado da Faculdade o sr. dr. L. da Costa e Almeida; e finalmente um projecto de reforma da mesma Faculdade elaborado por ella em 1887.

C. A. Laisant. — Recueil de problèmes de Mathématiques (Géométrie analytique à deux dimensions), Paris, Gauthier-Villars, 1892.

Este volume é o primeiro de uma obra muito util, que constará de sete volumes, na qual serão reunidos, dispostos por ordem scientifica, os enunciados dos problemas que têm sido propostos nas *Nouvelles Annales*, na *Nouvelle Correspondance*, no *Journal de Mathématiques élémentaires*, no *Mathesis*, etc. As soluções não são appresentadas, mas cada problema é acompanhado de uma indicação do logar em que n'aquelles jornaes se encontra a solução.

No presente volume são reunidos os problemas que se referem á Geometria analytica plana e á Geometria superior. Está dividido em sete partes em que são respectivamente dispostos os problemas relativos ás figuras rectilineas e circulares, ás conicas, ás curvas algebricas, ás curvas transcendentes, aos logares geometricos, ás envolventes e as trajectorias. Cada uma d'estas partes é subdividida em muitas outras. Esta distribuição ordenada dos problemas permitte procurar-se com facilidade se um certo problema vem na collecção e em que logar foi publicada a solução. A utilidade de uma publicação d'esta natureza é evidente; porisso com ella fez o sr. Laisant um grande serviço aos que cultivam as sciencias mathematicas.

X. Antomari. — Leçons de Cinématique et de Dynamique (Paris, Nony, 1892).

Contém este volume a parte da Cinematica e da Dynamica que é exigida pelos programmas de admissão á Eschola Polytechnica de Paris. Contém além d'isso a parte da Statica do solido invariavel em que se tracta da determinação dos centros de gravidade. Na exposição das doutrinas, que é feita com a maior clareza, o auctor subordina o estudo da Statica ao estudo da Dynamica.

A obra é dividida em tres partes, sendo na primeira estudada a Cinematica do ponto, na segunda a Dynamica do ponto e na terceira a theoria dos centros de gravidade dos solidos.

N'um capitulo preliminar é estudada a theoria geometrica dos vectores, cuja importancia em Mecanica é bem conhecida.

Cada capitulo é seguido de muitos exercicios para os alumnos se familiarisarem com as doutrinas tractadas.

J. Deruyts. — Essai d'une théorie générale des formes algébriques (Bruxelles, 1891).

O illustre auctor d'este bello e importante trabalho tem-se occupado muitas vezes da theoria das fórmas algebricas em artigos publicados nas principaes collecções scientificas belgas. Na presente memoria coordena e completa os resultados obtidos nos trabalhos anteriores. N'ella estende ao caso de muitas series de qualquer numero de variaveis os resultados anteriormente obtidos pelos geometras para o caso de muitas series de duas variaveis. Considerando principalmente as funcções invariantes, reduz estas funcções a certas funcções invariantes com $n-1$ series de n variaveis, a que dá o nome de *covariantes primarios*, cujas propriedades estuda desenvolvidamente.

S. Pincherle. — Contributo alla integrazione delle equazioni differenziali lineari mediante integrali definiti (Memorie della R. Acad. di Bologna, 1892).

O objecto d'esta importante memoria é a transformação do integral $\varphi(t)$ de uma equação linear qualquer, regular e com coefficientes racionaes, no integral de uma nova equação linear, tambem regular e com coefficientes racionaes, por meio da relação

$$J(x) = \int_{\alpha} A(t, x)\, \varphi(t)\, dt,$$

nos casos de $A(t, x)$ representar uma das funcções $(t-x)^{\rho}$ ou $G^{\rho}(t, x)$, $G(t, x)$ sendo uma funcção inteira.

V. Retali. — Sullo sportamento finito di una figura piana nel suo piano (Memorie della R. Acad. di Bologna, 1892).

N'esta memoria o auctor rectifica uma proposição enunciada por Charles no n.° 17 da sua memoria — *Propriétés rélatives au déplacement fini quelconque dans l'éspace d'une figure de forme invariable.*

P. H. Schoute. — Le déplacement le plus général dans l'espace à n *dimensions (Annales de l'École Polytechnique de Delft,* t. VII).

N'esta memoria muito interessante tracta M. Schoute, professor na Universidade de Groningen, de obter por methodos geometricos muitos resultados relativos á questão da congruencia e da symetria de duas figuras no espaço a *n* dimensões, anteriormente obtidos pelo sr. Rahusen por meio da theoria dos determinantes. Em seguida estuda de uma maneira mais profunda estas questões e deduz um meio de representação simples da relação entre duas figuras congruentes e da relação entre duas figuras symetricas no espaço a *n* dimensões.

J. Duran Loriga. — Sobre las funciones simétricas simples de las racines de una ecuacion (El Progreso matematico, t. II).

Dr. J. Bergbohm. — *Entwurf einer neuen Integralrechnung etc. (Leipzig, 1892).*

M. Lerch. — *Základové theorie Malmsténovskych rad (Bulletin da Academia de Praga,* t. II).

—— *Poznámky* k *theorii interpolace (Item).*

—— *Prispevky* k *theorii funkci elliptickch, etc. (Item).*

M. d'Ocagne. — *Sur la construction de la parabole osculatrice en un point d'une courbe donnée (Nouvelles Annales des Mathématiques, 1892).*

—— *Sur la corrélation entre les systèmes de coordonnées ponctuelles et les systèmes de coordonnées tangentielles (Item).*

—— *Sur la liaison entre les expressions du rayon de courbure en coordonées ponctuelles et en coordonnées tangentielles (Bulletin de la Société mathématique de France, 1891).*

—— *Sur une détermination particulière du centre de courbure des lignes planes (Item).*

—— *Détermination du rayon de courbure en coordonnées parallèles ponctuelles (Bulletins de l'Académie de Belgique, 1891).*

S. Pincherle. — *Sulle forme differenziali lineari (Rend. della R. Ac. dei Lyncei, Roma, 1892).*

A. Gützmer. — *Bemerkung über die Jacobische Thetaformel (Journal für die reine und augwandte Mathematik,* t. 110).

V. Retali. — *Sur quelques problèmes concernant le double contact et le contact du troisième ordre des coniques (Mathesis, 1892).*

E. Cesáro. — *Sulle curve di Bertrand* (*Rivista di Matematica*, t. II).

J. Deruyts. — *Sur une extension de la loi de réciprocité de M. Hermite* (*Bulletins de l'Acad. de Belgique, 1891*)..

—— *Sur le développement de certaines fonctions algèbriques* (*Mémoires de l'Acad. de Belgique, 1892*).

G. Pirondini. — *Contatto e ortogonalitá di due elicoide* (*Rivista di Matematica*, t. II).

G. Vivanti. — *L'infinito nella natura e nella scienza* (*Milano, 1892*).

—— *Sugli integrali delle equazioni del moto d'un punto che sono funzioni lineari fratte delle velocità componenti* (*Rend del Circolo matematico di Palermo, 1892*).

G. T.

PROCESSOS EXPEDITOS PARA ACHAR OS DESENVOLVIMENTOS DE ALGUNS DETERMINANTES

Determinantes de terceira ordem

POR

José Pedro Teixeira

Tome-se o typo, $a_1\, b_2\, c_3$, inverta-se a ordem dos indices e mude-se de signal; nos termos assim obtidos juncte-se a cada indice uma unidade, considerando, no acto de addição, o indice tres como nullo, e repita-se esta operação tres vezes sobre cada termo, conservando os signaes: a somma algebrica dos termos assim obtidos é o desenvolvimento do determinante de terceira ordem.

Convirá dispôr o calculo assim:

$$\begin{aligned} &+a_1\, b_2\, c_3 - a_3\, b_2\, c_1 \\ &+a_2\, b_3\, c_1 - a_1\, b_3\, c_2 \\ &+a_3\, b_1\, c_2 - a_2\, b_1\, c_3. \end{aligned}$$

Para os determinantes literaes, esta regra é mais expedita ainda do que a de Sarrus.

Determinantes de quarta ordem

Tome-se o termo typo, $a_1\, b_2\, c_3\, d_4$, troquem-se as letras a e b e mude-se de signal, e no resultado troquem-se as letras a e c e mude-se tambem de signal; inverta-se a ordem dos indices nos tres termos assim obtidos, conservando os signaes; juncte-se, em cada um dos seis termos, uma unidade a cada indice, considerando, no acto da addição, o indice quatro como nullo, e repita-se a operação quatro vezes, mudando sempre de signal: a somma algebrica dos termos assim obtidos é o desenvolvimento do determinante de quarta ordem.

Disponha-se o calculo assim:

$$a_1 b_2 c_3 d_4 - b_1 a_2 c_3 d_4 + b_1 c_2 a_3 d_4 +$$
$$+ a_4 b_3 c_2 d_1 - b_4 a_3 c_2 d_1 + b_4 c_3 a_2 d_1$$

$$- a_2 b_3 c_4 d_1 + b_2 a_3 c_4 d_1 - b_2 c_3 a_4 d_1 -$$
$$- a_1 b_4 c_3 d_2 + b_1 a_4 c_3 d_2 - b_1 c_4 a_3 d_2$$

$$+ a_3 b_4 c_1 d_2 - b_3 a_4 c_1 d_2 + b_3 c_4 a_1 d_2 +$$
$$+ a_2 b_1 c_4 d_3 - b_2 a_1 c_4 d_3 + b_2 c_1 a_4 d_3$$

$$- a_4 b_1 c_2 d_3 + b_4 a_1 c_2 d_3 - b_4 c_1 a_2 d_3 -$$
$$- a_3 b_2 c_1 d_4 + b_3 a_2 c_1 d_4 - b_3 c_2 a_1 d_4$$

Tambem se póde achar o desenvolvimento do determinante da maneira que se segue: Repitam-se as tres primeiras linhas e forme-se o quadro:

$$\begin{array}{cccc}
a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\
a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\
a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\
a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \\
a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\
a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\
a_3 & b_3 & c_3 & d_3
\end{array}$$

Forme-se o somma dos productos dos elementos das diagonaes que se cruzam nos pontos de ordem impar (*) e d'esta somma

(*) Consideramos os pontos que os dividem em partes eguaes.

subtrahe-se a somma dos productos dos elementos das diagonaes que se cruzam nos pontos de ordem par, e seja A_1 o resultado. Repetindo a mesma operação nos quadros

$$\begin{array}{cccc}
b_1 & a_1 & c_1 & d_1 \\
b_2 & a_2 & c_2 & d_2 \\
b_3 & a_3 & c_3 & d_3 \\
b_4 & a_4 & c_4 & d_4 \\
b_1 & a_1 & c_1 & d_1 \\
b_2 & a_2 & c_2 & d_2 \\
b_3 & a_3 & c_3 & d_3
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccc}
b_1 & c_1 & a_1 & d_1 \\
b_2 & c_2 & a_2 & d_2 \\
b_3 & c_3 & a_3 & d_3 \\
b_4 & c_4 & a_4 & d_4 \\
b_1 & c_1 & a_1 & d_1 \\
b_2 & c_2 & a_2 & d_2 \\
b_3 & c_3 & a_3 & d_3
\end{array}$$

e sejam A_3 e A_3 os resultados; será

$$A_1 - A_2 + A_3$$

o valor do determinante de quarta ordem.

Determinante de quinta ordem

Tome-se o termo typo, $a_1\,b_2\,c_3\,d_4\,e_5$, troquem-se a e b, depois a e c, depois a e d, mudando de signal a cada troca; obtemos assim:

$$a_1\,b_2\,c_3\,d_4\,e_5 - b_1\,a_2\,c_3\,d_4\,e_5 + b_1\,c_2\,a_3\,d_4\,e_5 - b_1\,c_2\,d_3\,a_4\,e_5 \quad (1)$$

N'esta expressão, troquem-se b e c e mude-se de signal, o que dá

$$-a_1 c_2 b_3 d_4 e_5 + c_1 a_2 b_3 d_4 e_5 - c_1 b_2 a_3 d_4 e_5 + c_1 b_2 d_3 a_4 e_5 ; \quad (2)$$

e tambem b e d, mudando tambem de signal, o que dá

$$-a_1 d_2 c_3 b_4 e_5 + d_1 a_2 c_3 b_4 e_5 - d_1 c_2 a_3 b_4 e_5 + d_1 c_2 b_3 a_4 e_5 \quad (3)$$

Em (1), (2) e (3) inverta-se a ordem dos indices, conservando os signaes; e, nos termos obtidos, juncte-se a cada indice uma unidade, considerando, no acto da somma, o indice 5 como nullo, e repita-se a operação cinco vezes, conservando os signaes: a somma algebrica dos termos assim obtidos é o desenvolvimento do determinante de quinta ordem

Tambem se póde obter o mesmo desenvolvimento do modo seguinte: Repitam-se as quatro primeiras linhas e forme-se o quadro:

$$\begin{array}{ccccc}
a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\
a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\
a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & e_3 \\
a_4 & b_4 & c_4 & d_4 & e_4 \\
a_5 & b_5 & c_5 & d_5 & e_5 \\
a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\
a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\
a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & e_3 \\
a_4 & b_4 & c_4 & d_4 & e_4
\end{array}$$

e os que se deduzem d'aqui collocando a primeira linha successivamente em 2.°, 3.° e 4.° lugar; formem-se depois os productos dos elementos das diagonaes e sejam A_1, A_2, A_3, A_4 as sommas d'estes productos relativos aos quatro quadros; repitam-se todas estas operações relativamente aos determinantes $(a_1\ c_2\ b_3\ d_4\ e_5)$,

$(a_1 d_2 c_3 b_4 e_5)$, que se obtem do proposto trocando b e c, e b e d, e sejam A'_1, A'_2, A'_3, A'_4, e A''_1, A''_2, A''_3, A''_4 as quantidades analogas ás precedentes: será

$$A_1 - A_2 + A_3 - A_4$$

$$- A'_1 + A'_2 - A'_3 + A'_4$$

$$+ A''_1 - A''_2 + A''_3 - A''_4$$

o valor do determinante $(a_1 b_2 c_3 d_4 e_5)$

SUR UNE REPRÉSENTATION DES FONCTIONS EXPONENTIELLES PAR DES PRODUITS INFINIS

PAR

M. A. Bassani

(Professeur à l'Ecole Navale de Livourne)

---

1. Sous le même titre M. Lipschitz publia une Note dans les Comptes Rendus de l'Académie de France (T. XCIX, pag. 701), dans laquelle l'habile analyste déduit, à partir de la série très-connue

$$\sum_1^\infty \varphi(n)\frac{z^n}{1-z^n} = \sum_1^\infty n\, z_n,$$

où $\varphi(n)$ est la fonction arithmétique de Gauss, un développement en produit infini de la fonction exponentielle $e^{-\frac{z}{1-z}}$.

La même question, traitée sous un point de vue plus général, forme le sujet du présent travail, dans lequel je me suis borné à considérer seulement quelque exemple rélatif aux développements susdits, quoïque la méthode puisse s'etendre à une foule d'autres.

2. Soit

$$\text{(1)} \qquad S(z) = F(1) + F(2)\,z + F(3)\,z^2 + F(4)\,z^3 + \ldots$$

une série infinie, absolument convergente quand z est comprise au dédans d'un cercle de rayon égal à l'unité, décrit de l'origine comme centre, n étant un nombre entier positif fini on infini et $F(n)$ une fonction entière de n. Supposons que l'on ait

$$F(n)=\Sigma f(\delta), \tag{2}$$

où f est une fonction, qu'il faut déterminer, et la somme Σ se rapporte à tous les diviseurs δ du nombre n. On sait que pour chaque fonction F il existe une et une seule fonction f, qui vérifie la (2); cette fonction est donnée, en désignant par $u, v, w, \ldots$ les facteurs premiers de n, par la rélation suivante

$$f(n)=F(n)-\Sigma F\left(\frac{n}{u}\right)+\Sigma F\left(\frac{n}{uv}\right)-\Sigma F\left(\frac{n}{uvw}\right)+\ldots$$

ou, en employant la fonction renversante de M. Cesàro, dont le savant professeur a fait ressortir toute l'importance dans ses beaux travaux d'arithmétique supérieure, par la rélation

$$f(n)=\Sigma \mu\left(\frac{n}{\delta}\right)F(\delta)=\Sigma \mu(\delta)F\left(\frac{n}{\delta}\right),$$

où les sommes se rapporteut à tous les diviseurs δ du nombre n.

La fonction $\mu(\delta)$ est la fonction renversante susdite; elle est généralement nulle, mais egale à $(-1)^k$ lorsque δ est le produit de k facteurs premiers, inégaux.

Cela posé, si l'on substitue dans la (1) au lieu de $F(n)$ la valeur donnée par la (2), et, en égard à la convergence absolue de (1), on arrange convenablement les termes, on trouve la série

$$S(z)=f(1)\frac{1}{1-z}+f(2)\frac{z}{1-z^2}+f(3)\frac{z^2}{1-z^3}+\ldots \tag{3}$$

qui intégrée, à partir de 0, le long d'une ligne comprise à l'intérieur du cercle de convergence, nous donne

$$(3)' \quad -\sum_1^\infty F(n)\frac{z^n}{n} = f(1)\log(1-z) + \frac{f(2)}{2}\log(1-z^2) + \frac{f(3)}{3}\log(1-z^3) + \dots,$$

qu'on peut mettre sous la forme

$$(4) \qquad e^{-\sum_1^\infty F(n)\frac{z^n}{n}} = \prod_1^\infty (1-z^n)^{\frac{f(n)}{n}},$$

la convergence du produit ayant lieu dans le domaine de convergence de la série (1).

En écrivant $\frac{1}{z}$ au lieu de z, on trouve aussi

$$(5) \qquad e^{\sum_1^\infty \frac{F(n)}{n\, z^n}} = \prod_1^\infty \left(\frac{z^n}{z^n-1}\right)^{\frac{f(n)}{n}}$$

et le second membre est convergent en déhors du cercle ayant son centre à l'origine et son rayon egal à l'unité.

3. Pour appliquer les résultats à quelque exemple, considérons la fonction arithmétique $\varphi_\nu(x)$, qui représente le nombre des fractions irréductibles, de numerateur x, non inférieures à ν. On voit que cette fonction comprend la fonction $\varphi(x)$ de Gauss pour $\nu = 1$, et dans ce cas est egale au nombre des nombres premiers avec x et inférieurs à x.

En employant le symbole $E\left(\frac{x}{\nu}\right)$ pour indiquer le plus grand entier contenu en x, on démontre très-aisément que

$$\Sigma\varphi_\nu(\delta) = E\left(\frac{n}{\nu}\right),$$

d'où l'on tire, en s'aidant de la (4),

$$(6) \qquad e^{-\sum_1^\infty E\left(\frac{n}{\nu}\right)\frac{z^n}{n}} = \prod_1^\infty (1-z^n)^{\frac{\varphi_\nu(n)}{n}} \qquad [\nu = 1, 2, 3, \ldots]$$

Maintenant posons

$$S(z) = \sum_1^\infty E\left(\frac{n}{\nu}\right)\frac{z^n}{n};$$

on aura alors, en dérivant,

$$z\,S'(z) = \sum_1^\infty E\left(\frac{n}{\nu}\right) z^n,$$

qu'on peut mettre sous la forme

$$z\,S'(z) = \sum_{\nu}^{2\nu-1} z^n + 2\sum_{2\nu}^{3\nu-1} z^n + 3\sum_{3\nu}^{4\nu-1} z^n + \ldots,$$

ou, en effectuant les sommes dans le second membre,

$$z\,S'(z) = \frac{z^\nu(1-z^\nu)}{1-z} + 2\,\frac{z^{2\nu}(1-z^\nu)}{1-z} + 3\,\frac{z^{3\nu}(1-z^\nu)}{1-z} + \ldots$$

$$= \frac{1-z^\nu}{1-z}\,\frac{z^\nu}{(1-z^\nu)^2}.$$

On en tire, en intégrant,

$$S(z)=\int_0^z \frac{z^{\nu-1}\,dz}{(1-z)(1-z^\nu)},$$

et par conséquent la (6) peut être écrite ainsi:

$$(6)' \qquad e^{-\int_0^z \frac{z^{\nu-1}\,dz}{(1-z)(1-z^\nu)}}=\prod_1^\infty (1-z^n)^{\frac{\varphi_\nu(n)}{n}}.$$

En particulier, pour $\nu=1$ on a $\int_0^z \frac{dz}{(1-z)^2}=\frac{z}{1-z}$, et la dernière formule devient

$$(7) \qquad e^{-\frac{z}{1-z}}=\prod_1^\infty (1-z^n)^{\frac{\varphi(n)}{n}},$$

qui est la formule de M. Lipschitz.

En remplaçant, dans la précédente, z par $\frac{1}{z}$, on trouve

$$(7)' \qquad e^{\frac{1}{z-1}}=\prod_1^\infty \left(\frac{z^n}{z^n-1}\right)^{\frac{\varphi(n)}{n}}$$

pourvu qu'on ait $\mathrm{mod}\, z > 1$.

Lorsque $\nu=2$, on a

$$S(z)=\int_0^z \frac{z\,dz}{(1-z)(1-z^2)}.$$

En posant $z = \sin\varphi$, ou trouve

$$\int \frac{z\,dz}{(1-z)(1-z^2)} = \int \frac{\operatorname{tang}\varphi\,d\varphi}{1-\sin\varphi} = \int \frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\cos^3\varphi} + \int \frac{\sin\varphi\,d\varphi}{\cos^3\varphi}$$

$$= \frac{1+\sin\varphi}{2\cos^2\varphi} + \frac{1}{2}\log.\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right),$$

et pour cela

$$S(z) = \frac{z}{2(1-z)} + \frac{1}{2}\log.\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\arcsin z}{2}\right);$$

donc

$$(8)\qquad e^{-\frac{z}{2(1-z)} - \frac{1}{2}\log\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\arcsin z}{2}\right)} = \prod_1^\infty (1-z^n)^{\frac{\varphi_2(n)}{n}}.$$

4. Une fonction qui présente quelque analogie avec la précédente est la fonction $i(x)$ de M. Cesàro (*), qui représente le nombre des fractions irréductibles, dont un terme au moins est égal à x. La fonction en question n'est que le double de la fonction de Gauss, sauf pour $x=1$, car $i(1) = 2\varphi(1) - 1$; par conséquent on peut écrire

$$\Sigma\, i(\delta) = 2n - 1,$$

et de la (4) on tire

$$(9)\qquad e^{-\sum_1^\infty \frac{2n-1}{n} z^n} = e^{-\frac{2z}{1-z} + \log(1-z)} = \prod_1^\infty (1-z^n)^{\frac{i(n)}{n}}.$$

(*) *Annali di Matem. di Brioschi,* serie 2.ª, pag. 235.

5. Il est aisé d'obtenir aussi les développements en produits infinis des fonctions exponentielles e^{-z}, $e^{-\text{arc. tg}\, z}$, dont le premier, dû à M. Tchebichef, a été donné par M. Bertrand dans le *Calcul Différentiel.*

En effet, considérant la fonction $\mu(x)$ de M. Cesàro, on voit, par la définition même de la fonction, qu'elle donne lieu à l'égalité

$$F(n) = \Sigma\mu(\delta) = \left| \begin{array}{l} 0 \text{ si } n > 1 \\ \\ 1 \text{ si } n = 1 \end{array} \right.$$

et l'on peut alors en déduire facilement par le moyen de (4)

$$e^{-z} = \prod_1^\infty (1 - z^n)^{\frac{\mu(n)}{n}},$$

c'est-à-dire

$$(10) \quad e^{-z} = \frac{(1-z)(1-z^6)^{\frac{1}{6}}(1-z^{10})^{\frac{1}{10}}(1-z^{14})^{\frac{1}{14}}(1-z^{15})^{\frac{1}{15}}\dots}{(1-z^2)^{\frac{1}{2}}(1-z^3)^{\frac{1}{3}}(1-z^5)^{\frac{1}{5}}(1-z^7)^{\frac{1}{7}}(1-z^{11})^{\frac{1}{11}}\dots}$$

De même, en posant dans (2) $F(n) = \sin\frac{n\pi}{2}$ on obtient

$$f(n) = \Sigma\mu(\delta)\sin\frac{n\pi}{2\delta}.$$

D'ailleurs on a évidemment

$$\sum_1^\infty \sin\frac{n\pi}{2}\cdot\frac{z^n}{n} = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \dots = \text{arc. tang}\, z,$$

..

donc, d'après ce qui a été démontré,

$$(11)\quad e^{-\operatorname{arc\,tang} z} = \frac{(1-z)(1-z^6)^{\frac{2}{6}}(1-z^9)^{\frac{2}{9}}(1-z^{14})^{\frac{2}{14}}\cdots}{(1-z^2)^{\frac{1}{2}}(1-z^3)^{\frac{2}{3}}(1-z^7)^{\frac{2}{7}}(1-z^{11})^{\frac{2}{11}}\cdots}$$

6. En poursuivant l'exposition des résultats, qu'on peut tirer des formules démontrées précédemment, considérons maintenant le cas, où $F(n)=n^r$, r étant un nombre entier positif ou negatif. Posons alors

$$\Sigma\psi_r(\delta)=n^r$$

d'où l'on tire

$$\psi_r(n)=n^r\Sigma\frac{u(\delta)}{\delta^r}=n^r\Pi\left(1-\frac{1}{\rho^r}\right),$$

le produit Π se rapportant à tous les facteurs premiers ρ du nombre n.

En particulier: 1°, pour $r=0$ il est aisé de voir qu'on a

$$\psi_0(n)=\left|\begin{array}{l}0 \text{ si } n>1\\ \\ 1 \text{ si } n=1\end{array}\right.;$$

2° pour $r=1$ on a

$$\psi_1(n)=n\Pi\left(1-\frac{1}{\rho}\right)$$

qui coïncide avec la fonction $\varphi(n)$ de Gauss;

3° pour $r=2$ on obtient

$$\psi_2(n)=\frac{n^2}{N}\varphi(n)\Phi(N),$$

où N est le produit des facteurs premiers de n, et Φ (N), en employant la notation de M. Kronecker, est la somme des diviseurs de N;

4°, pour $r=-1$ on trouve

$$\psi^{(n)}_{-1}=\frac{\mathrm{N}\,\varphi(n)}{n};$$

5° si l'on pose $r=-2$ il en résulte

$$\psi^{(n)}_{-2}=\frac{\mathrm{N}}{n^2}\varphi(n)\,\Phi(\mathrm{N});$$

etc. etc.

En substituant dans la (4) et considérant premièrement le cas, où r est positif, nous avons

$$(12)\quad e^{-\sum_1^{\infty} n^{r-1} z^n}=(1-z)^{\psi_r(1)}(1-z^2)^{\frac{\psi_r(2)}{2}}(1-z^3)^{\frac{\psi_r(3)}{3}}\cdots$$

Mais pour une propriété qui a été mise en évidence par M. Catalan dans son Mémoire «Sur une suite de polynômes entiers», on sait que

$$z+2^{r-1}z^2+3^{r-1}z^3+\ldots=\sum_{i=1}^{r-1}\Delta^i\,(0^{r-1})\,\frac{z^i}{(1-z)^{i+1}},\quad (r>1)$$

où $\Delta^i(0^{r-1})$ représente le coefficiente de $\frac{x^i}{i!}$ dans le développement de $(e^x-1)^{r-1}$ en série ordonnée suivant les puissances de x, c'est-à-dire

$$\Delta^i(0^{r-1})=i^{r-1}-i\,(i-1)^{r-1}+\frac{i\,(i-1)}{2!}(i-2)^{r-1}-\ldots$$

Conséquemment la formule précédente peut s'écrire

$$(13) \quad e^{-\sum_{i=1}^{r-1} \Delta^i (0^{r-1}) \frac{z^i}{(1-z)^{i+1}}} = (1-z)^{\psi_r(1)} (1-z^2)^{\frac{\psi_r(2)}{2}} (1-z^3)^{\frac{\psi_3(3)}{3}} \ldots$$

Maintenant il est aisé d'exprimer le premier membre de cette dernière égalité par le moyen des nombres ultra-bernoulliens, ainsi nommés par M. Trudi, qui en a fait sujet d'étude dans un Mémoire lu à l'Académie de Naples. M. Cesàro reprit ensuite dans les Nouvelles Annales l'étude de ces nombres, et, pour mettre en vue l'analogie, qui existe entre eux et les nombre de Bernoulli, proposa la définition symbolique

$$(B+1)^\nu - zB^\nu = \nu, \quad [\nu = 0, 1, 2, 3, \ldots]$$

z étant une quantité arbitraire différente de zero. On en conclut, de proche en proche,

$$B_0(z) = 0, \quad B_1(z) = -\frac{1}{1-z}, \quad \frac{B_2(z)}{2} = -\frac{z}{(1-z)^2},$$

$$\frac{B_3(z)}{3} = -\frac{z}{(1-z)^2} - \frac{2z^2}{(1-z^3)}, \quad \frac{B_4(z)}{4} = -\frac{z}{(1-z)^2} -$$

$$-\frac{6z^2}{(1-z)^3} - \frac{6z^3}{(1-z)^4}, \ldots$$

$$\frac{B_r(z)}{r} = -\Delta(0^{r-1}) \frac{z}{(1-z)^2} - \Delta^2(0^{r-1}) \frac{z^2}{(1-z)^3} - \ldots -$$

$$-\Delta^{r-1}(0^{r-1}) \frac{z^{r-1}}{(1-z)^r}.$$

En conséquence la formule (13) peut être mise sons la forme remarquable

$$(14) \qquad e^{\frac{B_r(z)}{r}} = \prod_1^{\infty}(1-z^n)^{\frac{\psi_r(n)}{n}}.$$

En particulier, pour $r=1$ les formules (13), (14) n'ont pas de sens, mais il est aisé de voir que nous sommes dans les cas du développement de M. Lipschitz donné auparavant.

Pour $r=2, 3, \ldots$ la (14) donne lieu aux développements

$$e^{-\frac{z}{(1-z)^2}} = \prod_1^{\infty}(1-z^n)^{\frac{\psi_2(n)}{n}},$$

$$e^{-\frac{z(1+z)}{(1-z)^3}} = \prod_1^{\infty}(1-z^n)^{\frac{\psi_3(n)}{n}},$$

. . . .

. . . .

Venons maintenant à considérer le cas, où r est un nombre négatif, et dans le but de mettre sous forme intégrale la somme

$$S(z) = \sum_1^{\infty} \frac{z}{n^{r+1}},$$

qui se présente dans le premier membre de (12), lorsqu'on y fait r négatif, considérons le développement

$$\frac{z}{e^x - z} = z e^{-x} + z^2 e^{-2x} + z^3 e^{-3x} + \ldots$$

qui subsiste tant que mod $z > 1$ et mod $e^{-x} \leq 1$.

En multipliant par $x^r \, dx$ et intégrant de 0 à ∞, en vertu de la formule connue

$$\int_0^\infty e^{-nx} x^r \, dx = \frac{r!}{n^{r+1}},$$

on obtient sans peine

$$\frac{1}{r!}\int_0^\infty \frac{z x^r \, dx}{e^x - z} = \sum_1^\infty \frac{z^n}{n^{r+1}}.$$

Conséquemment la (12) nous donne

$$(15) \qquad e^{-\frac{1}{r!}\int_0^\infty \frac{z x^r \, dx}{e^x - z}} = \prod_1^\infty (1 - z^n)^{\frac{\psi_{-r}(n)}{n}}$$

En particulier, pour $r = 0$, on tire de là

$$e^{\log(1-z)} = 1 - z,$$

qui est évident.

7. Voici maintenant une application très-étendue, qu'on peut faire de (4), en supposant que la fonction $f(n)$ soit un polynôme quelconque en n.

Puisque chaque fonction rationnelle et entière de n, du dégré p, est toujours décomposable suivant la forme

$$a_0 + a_1 n + a_2 \frac{n(n+1)}{2!} + a_3 \frac{n(n+1)(n+2)}{3!} + \ldots$$
$$+ a_p \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+p-1)}{p!},$$

on peut déterminer les coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_p$ de manière à avoir identiquement

$$f(n) = a_0 + a_1 n + a_2 \frac{n(n+1)}{2!} + \ldots + a_p \frac{n(n+1)\ldots(n+p-1)}{p!}.$$

Cela posé, en employant une transformation, due à Jacobi, on obtient

$$f(1)\frac{z}{1-z} + f(2)\frac{z^2}{1-z^2} + f(3)\frac{z^3}{1-z^3} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{p} \frac{a_\nu z^n}{(1-z^n)^{\nu+1}},$$

d'où l'on déduit

$$(16) \qquad e^{\sum_1^\infty \left[\frac{a_0}{n}\log(1-z^n) - \sum_{\nu=1}^{p} \frac{a_\nu}{n\nu} \frac{1-(1-z^n)^\nu}{(1-z^n)^\nu}\right]} = \prod_1^\infty (1-z^n)^{\frac{f(n)}{n}}.$$

En particulier, pour $a_1 = 1$ et $a_0 = a_2 = \ldots = a_p = 0$, on a $f(n) = n$ et $F(n) = \Phi(n)$; donc la dernière formule devient.

$$e^{-\sum_1^\infty \frac{\Phi(n)}{n} z^n} = e^{-\sum_1^\infty \frac{1}{n} \frac{z^n}{1-z^n}} = \prod_1^\infty (1-z^n).$$

Encore, si l'on pose $a_0 = 1$, $a_1 = a_2 = \ldots a_p = 0$, il en dérive $f(n) = 1$ et $F(n)$ égale au nombre des diviseurs de n, que nous désignerons par $\lambda(n)$. On en conclut

$$e^{-\sum \frac{\lambda(n)}{n} z^n} = e^{\sum \frac{\log(1-z^n)}{n}} = \prod_1^\infty (1-z^n)^{\frac{1}{n}},$$

etc. etc.

8. Pour finir, représentons par $\nu(x)$ une fonction généralement nulle, mais, lorsque x est un nombre premier ou puissance d'un nombre premier, égale au logarithme de ce nombre. On aura

$$\Sigma\, \nu(\delta) = \log n,$$

et pour cela

$$(1-z^2)^{\frac{\log 2}{2}}(1-z^3)^{\frac{\log 3}{3}}(1-z^4)^{\frac{\log 2}{4}}\ldots = e^{-\sum_1^\infty \frac{\log n}{n} z^n}.$$

D'ailleurs

$$\Sigma \log n \frac{z^n}{n} = \log\left[1^{\frac{z}{1}} 2^{\frac{z^2}{2}} 3^{\frac{z^3}{3}}\ldots\right],$$

donc

$$(17)\quad (1-z^2)^{\frac{\log 2}{2}}(1-z^3)^{\frac{\log 3}{3}}(1-z^4)^{\frac{\log 2}{4}}\ldots = 2^{-\frac{z^2}{2}} . 3^{-\frac{z^3}{3}} . 4^{-\frac{z^4}{4}}\ldots$$

d'où l'on peut tirer des identités curieuses.

SUR LA DIFFÉRENTIATION DES SÉRIES

(Extrait d'une lettre adressée à Gomes Teixeira)

PAR

M. LERCH

(Professeur à l'École Polytechnique de Prague)

Je prends la liberté vous communiquer une remarque à la quelle m'a donné l'occasion la note de M. de la Vallée Poussin contenue dans le 3me numéro du t. XI de votre journal. Dans mes leçons à l'École technique tschèque j'ai développé une démonstration d'un théorème qui traite un sujet analogue à celui de M. de la Vallée Poussin, mais avec moins d'hypothèses.

Le théorème dont il s'agit est le suivant: Supposons que les termes de la série infinie

$$f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots$$

sont des fonctions uniformes et synectiques dans une aire finie quelconque A et que la série soit uniformément convergente lorsque la variable x parcourt tout le contour S de cette aire A. Alors je dis que la série sera convergente aussi pour tous les points intérieurs de A et qu'elle représente une fonction analytique $F(x)$ dont les dérivées s'obtiennent en différentiant les termes de la série considérée.

Employons à cet effet la formule

$$f_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{f_n(z)\,dz}{z-x},$$

où x est un des points intérieurs de A, l'intégrale étant prise le long du contour S dans le sens positif. Il s'ensuit

$$\sum_{n=m}^{m+p} f_n(x) = \int_S \frac{dz}{z-x} \sum_{n=m}^{m+p} f_n(z);$$

or la série $\Sigma f_n(z)$ étant uniformément convergente sur le contour S, on peut trouver une limite m_0 telle que, pour chaque valeur de m supérieure à m_0, chaque corps de termes éloignés $\Sigma f_n(z)$, $(n = m, m+1, \ldots, m+p)$ a une somme moindre qu'une quantité ε donnée d'avance, quelque soit p.

On aura ainsi l'inégalité

$$\left|\sum_{n=m}^{m+p} f_n(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_S \frac{ds}{|z-x|},$$

en représentant par ds la différentielle de l'arc du contour s. De là il suit que la série $\Sigma f_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ est convergente lorsque x est à l'intérieur de A, mais on ne voit pas encore si cette convergence est uniforme. Pour ce but je représente par k la distance moindre d'un point intérieur x_0 au contour S et je considère l'entourage de ce point donné par l'inégalité $|x - x_0| \leqq \rho$, ρ étant une constante positive moindre que k. La distance de tous les points de cet entourage aux points z du contour S étant inférieure à $k - \rho$, on aura $|z - x| < k - \rho$ et par conséquent

$$\int_S \frac{ds}{|z-x|} < \frac{S}{k-\rho},$$

en convenant de représenter par S la longueur de la périphérie S.

Ainsi lorsque x appartient à l'entourage du point x_0 la somme $\Sigma f_n(x)$, $(n=m, m+1, \ldots m+p)$ sera inférieure à une constante $\frac{\varepsilon S}{2\pi(k-\rho)}$, d'où il suit que notre série converge *uniformément* dans les environs de tous les points intérieurs de l'aire A.

On vois de même que l'on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{F(z)\,dz}{z-x},$$

en posant, sur le contour S,

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z),$$

d'où l'on tire aisément que nous avons dans l'entourage considéré du point x_0

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m (x-x_0)^m, \quad C_m = \frac{1}{2\pi i}\int_s \frac{F(z)\,dz}{(z-x_0)^{m+1}},$$

ce qui prouve que notre série représente une fonction analytique. La quantité C_m est évidemment égale à la série

$$C_m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_s \frac{f_n(z)\,dz}{(z-x_0)^{m+1}}$$

identique avec la suivante

$$C_m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overset{(m)}{f_n}(x_0)}{m!},$$

ce qui démontre qu'aussi les séries dérivées sont convergentes et ont des sommes égales à des dérivées de la somme primitive, ce qui est le résultat auquel nous voulions parvenir.

C'est précisément le théorème de M. Weierstrass modifié pour une aire quelconque. Car l'illustre géomètre considère une somme de termes de la forme

$$f_n(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} x^{\nu},$$

l'aire A étant ici un cercle $|x| \leqq R$, et suppose que la somme $f_n(x)$ soit uniformément convergente pour tous les points de la circonférence $|x| = R$; dans ce cas nous aurons évidemment, en prenant dans notre résultat $x_0 = 0$, $\rho < R$, $|x| \leqq \rho$, l'équation

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^m, \quad C_m = \sum_{n=0}^{\infty} a_{nm}.$$

On peut désirer une généralisation qui aurais plus d'analogie *formale* avec le théorème de l'illustre géomètre, en étudiant une catégorie spéciale des développements

$$f_n(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} \varphi_{\nu}(x)$$

et en se proposant la question relative à des conditions à remplir pourqu'on ait

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} C_{\nu} \varphi_{\nu}(x), \quad C_{\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n\nu}.$$

Cette circonstance se vérifie toutes les fois que les fonctions $\varphi_{\nu}(x)$ soient entières et que l'on ait $\lim\limits_{\nu=\infty} \varphi_{\nu}(x) . x^{-m_{\nu}} = K$, cette quantité-ci étant constante, mais on n'a pas aucun théorème général sur ce sujet.

J'ai essayé de résoudre cette question sous des conditions qui sont souvent remplies.

Je suppose que les fonctions $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... sont synectiques et uniformes dans l'aire A et telles qu'il leur corresponde une suite de fonctions $\psi(z)$, $\psi_1(z)$, $\psi_2(z)$, définies sur la ligne S pour lesquelles l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_S \varphi_m(z)\,\psi_n(z)$$

prise le long du contour S est zéro en général, mais égale à l'unité lorsque $m=n$.

On suppose de plus qu'en représentant par ψ_ν le module maximum de $\psi_\nu(z)$ sur le contour S. la série $\Sigma\psi_\nu\,\varphi_\nu(x)$ soit absolument convergente.

À l'aide de ces hypothèses on établit cette proposition analogue à celle de Cauchy qu'en représentant par g le module maximum sur le contour S de la somme

$$f(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} C_\nu\,\varphi_\nu(z)$$

supposée uniformément convergente sur le contour S, on a l'inégalité

$$|C_\nu|<\frac{S}{2\pi}\,g\psi_\nu.$$

Considérons maintenant une série de la forme

$$V(x)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x),\quad \text{où } f_n(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}\,\varphi_\nu(x),$$

toutes les séries $V(x)$ et $f_n(x)$ étant supposées uniformément convergentes sur le contour S. Nous allons établir 1°) que $V(x)$ converge aussi à l'intérieur de A et 2°) que l'on a $V(x)=\Sigma\varphi_\nu(x)\Sigma a_{n\nu}$.

On tire d'abord de la convergence uniforme $V(z)$ l'inégalité

$\left|\sum_{n=m}^{m+p} f_n(z)\right| < \varepsilon$ ou bien $\left|\sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_\nu(z) \sum_{n=m}^{m+p} a_{n\nu}\right| < \varepsilon$, ($z$ est sur la ligne S),

qui a lieu pour une quantité ε donnée d'avance, lorsque l'entier m surpasse une certaine limite. En employant le théorème (1) on en déduit

$$(\alpha) \qquad \left|\sum_{n=m}^{m+p} a_{n\nu}\right| < \frac{S}{2\pi}\varepsilon\psi_\nu$$

ce qui prouve que les séries $\sum_{n=0}^{\infty} a_{n\nu} = A_\nu$ sont convergentes, et que leurs restes satisfont à l'inégalité

$$(\beta) \qquad \left|\sum_{n=m}^{\infty} a_{n\nu}\right| \leqq \frac{S}{2\pi}\varepsilon\psi_\nu.$$

La première partie du théorème se vérifie aisément à l'aide de l'inégalité (α). Car soit x un point intérieur de l'aire A, et observons que l'identité

$$\sum_{n=m}^{m+p} f_n(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \psi_\nu(x) \sum_{n=m}^{m+p} a_{n\nu}$$

combinée avec l'inégalité (α) donne

$$\left|\sum_{n=m}^{m+p} f_n(x)\right| < \frac{S\varepsilon}{2\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} |\varphi_\nu(x)|\, \psi_\nu;$$

or ε étant infiniment petit pour m infini, on voit que la série $\Sigma f_n(x)$ doit être convergente, ce qui prouve la première proposition. Il faut encore établir la convergence de la série $\Sigma A_\nu \varphi_\nu(x)$ et montrer qu'elle est égale à $V(x)$. Décomposons à cet effet la série A_ν comme il suit:

$$A_\nu = A_\nu' + A_\nu'', \quad A_\nu' = \sum_{n=0}^{m-1} a_{n\nu}, \quad A_\nu'' = \sum_{n=m}^{\infty} a_{n\nu},$$

il est clair que l'on a

$$\sum_{n=0}^{m-1} f_n(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu' \varphi_\nu(x), \quad |A_\nu''| \leqq \frac{S}{2\pi} \varepsilon \psi_\nu;$$

la dernière inégalité prouve que la série

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |A_\nu \varphi_\nu(x)| \leqq \frac{S}{2\pi} \varepsilon \sum_{\nu=0}^{\infty} |\psi_\nu \varphi_\nu(x)|$$

et par conséquent aussi la série $\Sigma A_\nu'' \varphi_\nu(x)$ est convergente et devient infiniment petite avec ε. Puisque

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) - \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu \varphi_\nu(x) = \sum_{n=m}^{\infty} f_n(x) - \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu'' \varphi_\nu(x)$$

et que les deux sommes deviennent infiniment petites pour m infini, il est claire que cette différence est rigoureusement zéro.

Dans le théorème démontré plus haut on n'a pas fait voir quel est le caractère de convergence de la série $\Sigma f_n(x)$ lorsque x s'approche indéfiniment du contour S. Cette question exige un moyen un peu moins élémentaire, à savoir le théorème que les valeurs de la partie réelle (imaginaire) de $f_n(x)$, pour les points intérieurs de A, sont contenues entre deux valeurs réelles (ima-

8

ginaires) de $f_n(z)$ sur le contour S. M. Jules Riemann en a conclut que la partie réelle ainsi que la partie imaginaire du corps de termes éloignés

$$\sum_{n=m}^{m+p} f_n(x) = \sum_{n=m}^{m+p} U_n + i \sum_{n=m}^{m+p} V_n$$

sera contenue entre deux limites indépendantes de x et de p, qui seront infiniment petites pour m infiniment croissant. En d'autres termes, on a cette proposition beaucoup plus précise (mais superflue pour quelques buts), que la convergence de notre série $\Sigma f_n(x)$ sera uniforme dans toute l'aire A.

EXTRAIT D'UNE LETTRE DE M. D'OCAGNE Á M. E. LEMOINE

«... Il n'est pas sans intérêt de remarquer que votre équation (2) (*Journal de M. Teixeira*, vol. XI, pag. 70), à laquelle, ainsi que vous l'avez fait voir, peut se ramener l'équation (1), et que vous traitez par une méthode si simple, est un cas particulier de l'équation

$$x^2 - Ky^2 = z^n$$

dont j'ai fait connaître la résolution en nombres entiers dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* de 1884 (T. 99, pag. 1112). En faisant $K = 2$ et $z = 1$ dans mes formules, on retombe bien sur les vôtres.

C'est d'ailleurs aussi, au moyen des suites récurrentes, que j'ai traité le problème ainsi généralisé, et, à ce propos, je vous demanderai encore la permission de vous faire observer que j'ai, par une marche directe, obtenu la formule générale (K') qui termine votre note et qui donne la solution de l'équation aux différences finies

$$U_n = \rho U_{n-2} + mU_{n-1}.$$

Cette formule (écrite avec d'autres notations) résulte, en effet, du simple rapprochement des formules (8) et (12) de ma *Théorie élémentaire des séries récurrentes* (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1884, pag. 69 et 71).

Dans un grand Mémoire sur les suites récurrentes achevé depuis quelque temps et qui paraîtra dans le 64^e cahier du *Journal de l'Ecole Polytechnique*, j'étends ma méthode aux équations aux différences finies analogues à la précédente, mais d'ordre quelconque...».

N. J. LOBATCHEFFSKY

Em outubro de 1893 tem logar o centenario do nascimento do eminente geometra russo Lobatcheffsky, o primeiro que demonstrou que o postulado de Euclides relativo á theoria das rectas parallelas não póde ser deduzido como corollario mathematico dos outros postulados e das definições e axiomas da Geometria elementar, e que a admissão d'este postulado equivale á admissão de certas propriedades do nosso espaço que só podem ser verificadas pela observação e pela experiencia. N'uma serie de memorias que escreveu a respeito d'este assumpto, fundou mesmo uma geometria, independente do postulado das parallelas, não applicavel ao nosso espaço.

Para celebrar o centenario d'este sabio resolveu a Sociedade physico-mathematica da Universidade de Kasan, em que elle foi professor desde 1812 até 1846 e reitor desde 1827 até 1846, abrir uma subscripção com o louvavel fim de fundar um premio em sua honra e de lhe levantar um busto no edificio da Universidade. Uma circular vem de ser dirigida aos geometras convidando-os a associar-se a esta manifestação justa. Assignam esta circular o sr. Wassilieff, presidente da Sociedade physico mathematica de Kasan, o sr. Souvoroff, vice-presidente da mesma Sociedade e os professores de mathematica na Universidade de Kasan.

DEFINIÇÃO ANALYTICA DOS NUMEROS COMPLEXOS

POR

J. Bruno de Cabedo

(Professor na Universidade de Coimbra)

---

1. Com $a, b, \ldots\ a', b', \ldots$ significamos numeros positivos ou negativos.

Posto isto, chamaremos numero complexo a todo o symbolo da fórma $a \frown b_*$ (*) sujeito ás definições seguintes:

2. Diz-se que $a \frown b_* = a' \frown b'_*$, quando fôr $a = a'$, $b = b'$.
Diz-se que $a \frown b_* = a'$, quando fôr $a = a'$, $b = 0$.
Para simplificar, com o symbolo b_* representaremos o numero complexo $0 \frown b_*$.

3. Chama-se addição dos numeros complexos $a \frown b_*$ e $a' \frown b'_*$ á operação definida pela egualdade

$$(a \frown b_*) + (a' \frown b'_*) = (a + a') \frown (b + b')_* .$$

Como $a = a \frown 0_*$ e $b_* = 0 \frown b_*$, resulta da precedente definição

$$a + b_* = (a \frown 0_*) + (0 \frown b_*) = a \frown b_* .$$

(*) Symbolos que não differem essencialmente de $a \frown b$, são usados nas mais rudimentares applicações da arithmetica, quando se pede a descripção quantitativa e qualitativa de um todo composto de elementos de duas especies differentes.

Logo todo o numero complexo $a \frown b_*$ póde pôr-se debaixo da fórma $a + b_*$

4. Chama-se multiplicação dos numeros $a + b_*$ e $a' + b'_*$ á operação definida pela egualdade

$$(a + b_*)\,(a' + b'_*) = (aa' - bb') + (ab' + ba')_*.$$

D'esta definição resulta $b.\,1_* = (b + 0_*)\,(0 + 1_*) = b_*$.

Logo todo o numero complexo póde pôr-se debaixo da fórma $a + b\,.\,1_*$.

Quanto ao numero 1_*, mostra a mesma definição que é

$$1_*\,.\,1_* = (0 + 1_*)\,(0 + 1_*) = -1.$$

5. Com estes principios a exposição completa da theoria dos numeros complexos não apresenta a menor difficuldade.

BIBLIOGRAPHIA

A. Faifofer. — *Elementi di Geometria, 8.ª ed., (Venezia, 1891).*

Entre os livros que têm sido publicados para substituir nas escholas a obra immortal de Euclides, um dos melhores que conhecemos é o que, com o titulo precedente, foi publicado em Italia pelo sr. Faifofer, professor no Lyceu Marco Foscarini de Veneza. Por suas boas qualidades mereceu esta obra elogios de alguns geometras illustres, como Beltrami, Mansion, etc., e obteve um successo tal entre os professores italianos que onze edições d'ella foram até hoje publicadas. Está na verdade escripto com um cuidado tal que é um verdadeiro modelo a seguir em obras d'esta natureza.

As doutrinas que se encontram nos *Elementi* do sr. Faifofer são aquellas que ordinariamente contêm os manuaes de Geometria elementar destinados ao ensino, e estão dispostas em vinte e quatro capitulos, sendo um destinado ás noções fundamentaes, quatorze á Geometria plana e os restantes á Geometria no espaço.

Dos capitulos que pelo modo original como estão escriptos, merecem mais attenção, mencionarei em primeiro logar o capitulo primeiro, onde o auctor tracta de enumerar e fixar com o maior cuidado quaes os principios que a sciencia geometrica vae buscar á observação exterior. N'elle o sr. Faifofer subtitue muitas definições ininteligiveis, que appareciam nos anteriores manuaes de geometria elementar, por postulados claramente explicados.

Merece tambem attenção o modo simples como é tractada a theoria da equivalencia. O auctor chama equivalentes duas superficies que se possam dividir no mesmo numero de partes respectivamente eguaes. Partindo d'esta definição, mais comprehensivel do que a dada nos manuaes anteriormente pnblicados, tracta com a maior clareza da equivalencia dos polygonos. Para abranger as superficies terminadas por linhas curvas é esta definição extendida no capitulo intitulado *ciclometria*.

N'este capitulo, um dos melhores da obra, o auctor collocando-se primeiramente n'um ponto de vista geral, introduz a noção de *classe* de grandezas (grupo de grandezas que satisfazem a uma determinada condição) e de *classes contiguas* (duas classes taes que cada grandeza de uma das classes seja maior do que todas as grandezas da outra classe, e taes que se possam achar duas grandezas, uma de cada classe, cuja differença seja menor do que uma grandeza da mesma especie dada qualquer) e estuda as propriedades d'estas classes de grandezas. Em seguida, baseando-se n'estas propriedades, demonstra a proposição fundamental segundo a qual, dado um circulo, existe um segmento e um só que tem a propriedade de ser menor do que o perimetro de qualquer polygono circumscripto e maior do que o perimetro de qualquer polygono inscripto. É este segmento que por definição considera como equivalente ao circulo e cuja determinação constitue o problema da rectificação da circumferencia.

Depois de resolver este problema, passa á resolução do problema da quadratura approximada do circulo. N'este logar, fazendo a extensão da noção de equivalencia a que já nos referimos, considera como equivalentes duas superficies que estejam comprehendidas entre duas mesmas classes contiguas, e mostra que a superficie do circulo é equivalente a um triangulo de base equivalente á circumferencia e de altura egual ao raio.

A falta de espaço não nos permitte indicar mais pontos da Geometria do sr. Faifofer que merecem attenção. Terminaremos pois esta noticia dizendo que as modificações introduzidas pelo sr. Faifofer na exposição da Geometria elementar têm sido adoptadas na maior parte dos livros italianos posteriormente publicados e recommendando a sua excellente obra aos professores dos Lyceus portuguezes.

Humbert. — Traité d'Arithmétique, (Paris, Nony, 1893).

Diz o sr. Tannery, no prefacio d'este livro, referindo-se a elle: