

JORNAL

DE

SCIENCIAS MATHematicas E ASTRONOMICAS

PUBLICADO

PELO

DR. F. GOMES TEIXEIRA

Professor na Academia Polytechnica do Porto,
Antigo Professor na Universidade de Coimbra,
Socio da Academia Real das Sciencias de Lisboa, etc.

VOLUME IX

COIMBRA

IMPRESA DA UNIVERSIDADE

1889

JORNAL

SCIENCIAS MATEMATICAS E ASTRONOMICAS

PUBLICADO

DR. P. GOMES TEIXEIRA

VOLUME IX

COPIA

IMPRESSA DA UNIVERSIDADE

1889

SOBRE A REPRESENTAÇÃO PARAMETRICA DAS CURVAS DO PRIMEIRO GENERO

POR

DUARTE LEITE

(Professor na Academia Polytechnica do Porto)

As curvas algebraicas de grau n qualquer, cujo genero é igual á unidade, são definidas como tendo singularidades equivalentes a $\frac{1}{2}n(n-3)$ pontos duplos, e d'este facto resulta que se podem transformar *unideterminativamente* n'uma cubica sem ponto duplo (*).

O problema da representação parametrica d'estas curvas reduz-se, pois, ao do da cubica geral.

No que segue temos em vista mostrar como as funcções ellipticas de Weierstrass apparecem naturalmente na resolução d'este problema, com decidida vantagem sobre as de Jacobi, já anteriormente empregadas por varios geometras para o mesmo fim (**).

1. Na sua *Enumeratio linearum tertii ordinis*, demonstrou Newton que qualquer cubica se póde deduzir projectivamente d'uma das cinco parabolae divergentes comprehendidas na equação

$$y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d;$$

e para que não haja ponto duplo, basta que as tres raizes do segundo membro sejam desiguaes (***).

(*) Clebsch, *Leçons sur la Géométrie*, tom. III, pag. 313.

(**) Clebsch, op. cit., tom. II, pag. 358 e seg.; tom. III, pag. 320.

(***) Vid. Salmon, *Higher plane curves*, a proposito da classificação das cubicas.

Suppondo que isto tem logar, se transportarmos convenientemente a origem sobre o eixo dos x , reduziremos a equação precedente a esta outra

$$y^2 = k^2 (4x^3 - g_2x - g_3).$$

O exame d'esta egualdade suggere logo o emprego da funcção pu de Weierstrass; effectivamente satisfaz-se-lhe fazendo

$$x = pu, \quad y = kp'u.$$

Se remontarmos da parabolá á cubica primitiva, invertendo a serie de operações projectivas effectuadas, teremos as novas expressões das coordenadas que seguem

$$x = \frac{a_1p'u + b_1pu + c_1}{a_3p'u + b_3pu + c_3}, \quad y = \frac{a_2p'u + b_2pu + c_2}{a_3p'u + b_3pu + c_3};$$

ou empregando as coordenadas homogeneas

$$\rho x_i = a_i p'u + b_i pu + c_i, \quad (1)$$

qualquer que seja o triangulo coordenado.

2. Sem nos demorarmos aqui em desenvolver as interessantes consequencias que para as cubicas se deduzem d'esta fórma de representação, passaremos ao caso mais geral d'uma curva do primeiro genero.

Designemos pelo symbolo F_i uma funcção algebraica homogenea; então as coordenadas d'um ponto da curva serão dadas por

$$\chi y_i = F_i(x_1, x_2, x_3),$$

visto que ella provém da cubica (1) por transformação unideterminativa.

É evidente que estas coordenadas são funcções inteiras de pu e $p'u$; e podemos por

$$\theta y_i = f_i(pu) + \varphi_i(pu) \cdot p'u. \quad (2)$$

Eis-nos, pois, chegados indirecta mas simplesmente á representação desejada; ella justifica plenamente o nome de *ellipticas* dado ás curvas de que nos occupamos.

Ainda podemos dar ás coordenadas uma fôrma mais elegante. Effectivamente toda a funcção inteira de pu e $p'u$ pôde reduzir-se ao seguinte typo (*)

$$\frac{\sigma(u - \lambda_1) \sigma(u - \lambda_2) \dots \sigma(u - \lambda_n)}{\sigma^n u}$$

$$\Sigma \lambda_i \equiv 0 \pmod{2\omega, 2\omega'}$$

Não é difficil inferir d'aqui os valores que seguem para as coordenadas

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho y_1 = \sigma(u - \lambda_1) \sigma(u - \lambda_2) \dots \sigma(u - \lambda_n) \\ \rho y_2 = \sigma(u - \mu_1) \sigma(u - \mu_2) \dots \sigma(u - \mu_n) \\ \rho y_3 = \sigma(u - \nu_1) \sigma(u - \nu_2) \dots \sigma(u - \nu_n) \\ \Sigma \lambda_i \equiv \Sigma \mu_i \equiv \Sigma \nu_i \equiv 0 \pmod{2\omega, 2\omega'} \end{array} \right. \quad (3)$$

Quanto ao numero n , vamos mostrar como se pôde egualar ao grau.

Fazendo $y_1 = 0$, concluímos para u os valores λ_i , salvos multiplos dos periodos. Parte d'elles são os argumentos dos pontos com que a recta $y_1 = 0$ corta a curva; os restantes são extranhos a esta, e devem portanto annullar simultaneamente as coordenadas, se os houver.

Incluam-se no factor de proporcionalidade; então, substituindo a u um novo parametro que diffira d'elle na media arithmetica das raizes λ_i , ou μ_i , ou ν_i , cujo indice exceder o grau, chegaremos ás equações (3), em que n tem o valor annuciado.

(*) Halphen, *Traité des fonctions elliptiques*, tom. 1.

3. Os lados do triangulo coordenado cortam a curva n'uma serie de pontos, cujos argumentos sommam zero ou multiplos dos periodos. Esta propriedade será exclusiva d'estas tres rectas?

Vamos ver que tem logar para qualquer recta, e mais ainda, para qualquer curva algebraica.

Seja, de feito,

$$f(y_1, y_2, y_3) = 0$$

a equação d'uma curva algebraica de grau m ; obtemos o argumento dos mn pontos de secção, substituindo n'ella as expressões (2) ou (3).

Resulta uma equação cujo primeiro membro é uma função de pu e $p'u$. Ora sabe-se (*) que entre os argumentos u_i que annullam nma função d'esta natureza existe a relação

$$\sum u_i \equiv 0 \pmod{(2\omega, 2\omega')}.$$

Se, portanto, applicarmos esta propriedade ao nosso, concluiremos o seguinte theorema:

Os argumentos dos pontos em que uma curva algebraica corta uma curva elliptica sommam zero, ou multiplos dos periodos.

Deve-se attribuir este theorema a Clebsch, que o demonstrou com generalidade para os argumentos das funções ellipticas de Jacobi, representando as coordenadas da curva como producto da função $H(u)$ (**).

Por meio d'esta proposição resolvem-se todos os problemas de contacto com extrema facilidade, seguindo o caminho indicado pelo illustre geometra que citámos.

Porto, setembro de 1888.

(*) Halphen, op. cit., tom. I, pag. 215.

(**) Clebsch, op. cit., tom. II, pag. 393; tom. III, pag. 322.

DEMONSTRAÇÃO DO THEOREMA DE CAUCHY

POR

JOSÉ BRUNO DE CABEDO

(Professor na Universidade de Coimbra)

Seja $f(z)$ uma função continua e bem determinada, assim como as suas derivadas successivas até á ordem n ao longo de uma linha L .

Considerando as suas extremidades z e z_1 , a noção de derivada dá lugar ás equações seguintes

$$\left. \begin{aligned} f(z) - f(z_1) &= (z - z_1) f'(z_1) + \epsilon \\ f'(z) - f'(z_1) &= (z - z_1) f''(z_1) + \epsilon_1 \\ \dots\dots\dots \\ f^{n-1}(z) - f^{n-1}(z_1) &= (z - z_1) f^n(z_1) + \epsilon_{n-1} \end{aligned} \right\}, \dots\dots (1)$$

onde $\epsilon, \epsilon_1, \dots$ são funções continuas e bem determinadas da variavel z em toda a extensão da mesma linha.

Entre estas funções ha relações simples que vamos deduzir. Para isto, derivando a primeira das equações precedentes em relação a z , vem

$$f'(z) = f'(z_1) + \epsilon'$$

d'onde se tira, attendendo á segunda,

$$\epsilon' = (z - z_1) f''(z_1) + \epsilon_1.$$

Integrando agora ambos os membros d'esta equação ao longo

de L no sentido $z_1 z$, e attendendo a que é $\varepsilon = 0$ para $z = z_1$, acha-se

$$\varepsilon = \frac{(z - z_1)^2}{1 \cdot 2} f''(z_1) + \int_L \varepsilon_1 dz.$$

Do mesmo modo as restantes equações dão

$$\varepsilon_1 = \frac{(z - z_1)^2}{1 \cdot 2} f'''(z_1) + \int_L \varepsilon_2 dz$$

.....

$$\varepsilon_{n-1} = \frac{(z - z_1)^2}{1 \cdot 2} f^n(z_1) + \int_L \varepsilon_{n-1} dz.$$

Finalmente, eliminando entre estas equações as funções $\varepsilon, \varepsilon_1, \dots$, vem a expressão

$$\varepsilon = \frac{(z - z_1)^2}{1 \cdot 2} f''(z_1) + \dots + \frac{(z - z_1)^n}{1 \cdot 2 \dots n} f^n(z_1) + \int_L \int_L \dots \int_L \varepsilon_{n-1} dz,$$

que, substituída na primeira das equações (1), dá a formula de Taylor, que nos vai servir para demonstrar a celebre proposição de Cauchy.

Seja então $f(z)$, assim como a sua derivada, uma função continua e uniforme no interior de uma area onde se acham descriptos os contornos b_1 e b_2 com as mesmas extremidades z e z_1 . Designando por $F(z)$ a sua primitiva, o seu accrescimento na passagem de z_1 para z é respectivamente em relação aos contornos considerados

$$\Delta_{b_1} = (z - z_1) f(z_1) + \frac{(z - z_1)^2}{1 \cdot 2} f'(z_1) + \int_{b_1} \varepsilon_1 dz,$$

$$\Delta_{b_2} = (z - z_1) f(z_1) + \frac{(z - z_1)^2}{1 \cdot 2} f'(z_1) + \int_{b_2} \varepsilon_1 dz,$$

d'onde resulta

$$\Delta_{b_1} - \Delta_{b_2} = \int_{b_1} \varepsilon_1 dz - \int_{b_2} \varepsilon_1 dz.$$

Posto isto, como ε_1 é um infinitamente pequeno de segunda ordem em relação a $z - z_1$, póde pôr-se

$$\varepsilon_1 = (z - z_1)^2 \varphi(z),$$

sendo $\varphi(z)$ uma função finita e bem determinada em toda a extensão da região considerada.

Teremos pois

$$\begin{aligned} \text{mod} \int_{b_1} \varepsilon_1 dz &= \text{mod} \int_{b_1} (z - z_1)^2 \varphi(z) dz \leq \int_{b_1} \text{mod} (z - z_1)^2 \text{mod} \varphi(z) ds \\ &\leq r_1^2 M_1 s_1 \leq M_1 s_1^3, \end{aligned}$$

designando por r_1 a maior distancia a que a variavel z se acha de z_1 no seu curso ao longo de b_1 , por M_1 o modulo maximo de $\varphi(z)$ sobre a mesma linha cujo perimetro é s_1 , e attendendo a que, pela propriedade da linha recta, é $r_1 < s_1$.

Analogamente o segundo integral dá

$$\text{mod} \int_{b_2} \varepsilon_1 dz \leq M_2 s_2^3,$$

d'onde se conclue

$$\text{mod} (\Delta_{b_1} - \Delta_{b_2}) \leq M_1 s_1^3 + M_2 s_2^3 \leq N_{1,2} s_{1,2}^3,$$

designando por $s_{1,2}$ o maior dos s e fazendo $M_1 + M_2 = N_{1,2}$.

Dividamos agora um contorno L_1 , tomado na mesma area, em p partes b'_1, b''_1, \dots taes que os seus perimetros tenham um mesmo valor s_1 . Deformando depois estas partes, de modo que se conservem fixas as suas extremidades e fiquem ainda com os seus perimetros de uma mesma grandeza s_2 , obtem-se um novo contorno L_2 dividido igualmente em p partes b'_2, b''_2, \dots pelos pontos communs com o primeiro.

A applicação da formula precedente dará então

$$\begin{aligned} \text{mod}(\Delta_{L_1} - \Delta_{L_2}) &= \text{mod}\left(\int_{L_1} - \int_{L_2}\right) = \text{mod}\left(\int_{b'_1} - \int_{b'_2} + \int_{b''_1} - \int_{b''_2} + \dots\right) \\ &\leq N'_{1,2} s_{1,2}^3 + N''_{1,2} s_{1,2}^3 + \dots \leq N_{1,2} S_{1,2} s_{1,2}^2, \end{aligned}$$

designando por $N_{1,2}$ o maior dos N e attendendo a que pela nossa construcção $p \cdot s_{1,2}$ é egual ao maior dos perimetros L_1 e L_2 que representamos por $S_{1,2}$.

Fazendo para maior simplicidade $N_{1,2} S_{1,2} = P_{1,2}$, teremos

$$\text{mod}(\Delta_{L_1} - \Delta_{L_2}) \leq P_{1,2} s_{1,2}^2.$$

Por p deformações infinitesimales do mesmo perimetro póde de L_2 derivar-se um outro contorno L_3 , de modo que só tenha de commum com L_1 as suas extremidades e com o primeiro $p+1$ pontos communs que o dividam em p partes cujos perimetros sejam eguaes entre si.

Sendo assim, a formula anterior dará

$$\begin{aligned} \text{mod}(\Delta_{L_1} - \Delta_{L_2}) &\leq \text{mod}\left(\int_1 - \int_2\right) + \text{mod}\left(\int_2 - \int_3\right) \\ &\leq P_{1,2} s_{2,3}^2 + P_{2,3} s_{2,3}^2 \leq Q_{1,3} s_{1,3}^2, \end{aligned}$$

fazendo $P_{1,2} + P_{2,3} = Q_{1,3}$ e designando por $s_{1,3}$ o maior dos s .

Finalmente de L_3 deriva um contorno L_5 do mesmo modo que o primeiro resultou de L_1 , e assim successivamente até se obter um contorno L_{2p+1} .

Pela comparação dos dois contornos extremos teremos então

$$\begin{aligned} \text{mod}(\Delta_{L_1} - \Delta_{L_{2p+1}}) &\leq Q_{1,3} s_{1,3}^2 + Q_{3,5} s_{3,5}^2 + \dots \\ &\leq Q_{1,2p+1} \times S_{1,2p+1} \times s_{1,2p+1}, \end{aligned}$$

designando por $Q_{1,2p+1}$ o maior dos Q , por $s_{1,2p+1}$ o maior dos s , e por $S_{1,2p+1} = p \cdot s_{1,2p+1}$ o maior dos perimetros de L_1, L_2 , etc.

A relação precedente demonstra, pois, o theorema de Cauchy, por ser $s_{1,2p+1}$ uma quantidade que se póde tornar tão pequena quanto se quer.

BIBLIOGRAPHIA

- J. Pedro Teixeira. — *Estudo sobre funcções duplamente periodicas.*
— Coimbra, 1888.

Desde que Abel e Jacobi descobriram a dupla periodicidade das funcções ellipticas, a attenção dos geometras foi chamada para a theoria geral das funcções duplamente periodicas, das quaes se tirou como consequencia a theoria das funcções ellipticas. Muitos são os trabalhos que até hoje têm sido publicados a respeito d'este bello assumpto. O sr. Pedro Teixeira no seu livro, apresentado á Faculdade de Mathematica da Universidade de Coimbra como dissertação inaugural, expõe de um modo claro e methodico o que n'elle ha de mais importante.

Principia o auctor por algumas definições e principios geraes relativos á natureza e numero de periodos das funcções monodromas, ao parallelogrammo dos periodos, etc. Demonstra em seguida alguns theoremas fundamentaes n'esta doutrina e passa á deducção das formulas que dão as expressões analyticas das funcções duplamente periodicas, com os infinitos em evidencia, considerando primeiro as funcções que têm sómente polos, e em seguida as funcções que têm polos e pontos singulares essenciaes isolados. Termina a primeira parte do livro por alguns theoremas relativos ás funcções periodicas ligadas por uma equação algebrica.

Na segunda parte do seu trabalho occupa-se o auctor das funcções duplamente periodicas de segunda especie, deduzindo as expressões analyticas d'estas funcções que tornam evidentes os seus zeros e os seus infinitos.

- L. Viglione. — *Leciones de Geometria Analitica.* — Buenos-Aires, 1888.

Contém esta obra importante as excellentes prelecções feitas

pelo auctor, na Universidade de Buenos-Aires, nos annos de 1885 e 1886.

Principia o primeiro volume por uma introduccão, onde o auctor define os systemas de coordenadas mais usados, isto é, os systemas cartesiano, polar, trilinear, superficial e tangencial.

Em seguida vem a primeira secção, destinada ao systema cartesiano, onde o auctor se occupa da representação dos logares geometricos por equações, das mudanças de coordenadas, da theoria da linha recta e da theoria das conicas. Muitos e bem escolhidos exercicios vêem espalhados por estes capitulos, para que o leitor se familiarise com o manejo das coordenadas cartesianas, e com as questões geometricas de que se vai occupando. Merece especial attenção n'esta parte da obra a parte relativa á classificação das conicas, que o auctor expõe pelo methodo empregado pelo illustre geometra italiano E. d'Ovidio.

Na segunda secção occupa-se o auctor do systema de coordenadas polares. Ensina o meio de transformar as equações referidas a coordenadas polares em equações referidas a coordenadas cartesianas, e deduz as equações polares da recta e das secções conicas.

Na secção terceira e quarta vem um estudo rapido dos systemas de coordenadas trilinear, superficial e tangencial.

Segue-se a Geometria Analytica a tres dimensões, que o auctor divide em quatro partes, nas quaes se occupa dos principios geraes d'este ramo da Geometria, e da theoria da linha recta, do plano e das quadricas. Como na Geometria plana, o auctor acompanha a exposição com bons exercicios.

D. D. Bacas e D. R. Escandón. — Teoria elemental de las determinantes. — 1888.

N'este livro, escripto principalmente debaixo do ponto de vista didactico, é exposta com toda a clareza e rigor a parte da theoria dos determinantes mais necessaria para estudar com fructo os tratados modernos de Analyse, de Geometria e de Mechanica.

Dividiram os auctores o seu tratado em dois livros. No primeiro expõem os principios fundamentaes da theoria dos determinantes e os theoremas necessarios para os calcular, desenvolver

e combinar. No segundo fazem applicação d'estes principios á Algebra e á Trigonometria, occupando-se successivamente da resolução das equações do primeiro, segundo e terceiro gráo com uma incognita, dos systemas de equações do primeiro gráo, dos systemas de duas equações do segundo e terceiro gráo, etc.

A exposição das doutrinas é acompanhada de exercicios, para que o leitor se familiarise com o emprego dos determinantes.

D. Z. G. de Galdeano. — Critica y sintesis del Algebra. — Toledo, 1888.

Lê-se com verdadeiro prazer este trabalho interessante, em que o illustre professor do Instituto de Toledo revela extensos conhecimentos de Analyse moderna e elevado criterio philosophico. Não ha questão alguma importante de Algebra de que o auctor se não occupe para lhe discutir os fundamentos, analysar os methodos e resumir a historia.

É assim que, a respeito do conceito de numero, se refere aos principios mais importantes da Arithmetica superior, mencionando os trabalhos de Fermat, Euler, Lagrange, Legendre, Gauss, Dirichlet, Kummer, etc.

Occupam-se em seguida do conceito de continuidade, mencionando differentes assumptos em que se manifesta este conceito.

A respeito do conceito de qualidade em Algebra, occupa-se o auctor da theoria das quantidades complexas, da theoria das funcções analyticas para expôr os trabalhos de Cauchy, Riemann, Weierstrass, Cantor, Bois-Reymond, etc.; e do mecanismo das leis do Calculo para expôr os trabalhos de Möbius, Bellavitis, Grassmann, Hamilton, etc.

Vem em seguida o estudo sobre o conceito de qualidade na applicação da Algebra á Geometria, referindo-se o auctor principalmente á correlação das figuras de Carnot.

Finalmente vem o estudo do conceito de combinação e ordem em Algebra, e a este respeito refere-se o auctor aos trabalhos relativos á resolução algebraica das equações, á Algebra das fórmulas, á theoria dos determinantes, etc.

Na segunda parte do livro o auctor indica quaes os doutrinas

que, no seu modo de ver, devem constituir a Algebra, e o modo de as expôr e ensinar.

M. Lerch. — *Sur une méthode pour obtenir le développement en série trigonométrique de quelques fonctions elliptiques* (*Acta Mathematica*, t. XII).

N'este trabalho importante apresenta o auctor um methodo directo para desenvolver em serie trigonometrica a funcção

$$\frac{\theta_0(x+u)}{\theta_0(u)}$$

sendo

$$\theta_0(u) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \cos 2n u \pi, \quad q = e^{-\pi i}.$$

L. Niesen. — *Sur l'aspect physique de la planète Mars* (*Bulletins de l'Académie R. de Belgique*, 1888).

N'esta noticia interessante dá o sr. Niesen, astrônomo no Observatorio de Bruxellas, noticia das observações que fez sobre o aspecto physico de Marte durante a opposição de 1888. O auctor compara as suas observações com as do sr. Perrotin, feitas durante esta opposição e a de 1886, para notar que, em quanto que o sr. Perrotin achou diferenças consideraveis no aspecto d'este planeta nas duas epochas das observações, as suas lhe apresentaram Marte com um aspecto semelhante ao observado pelo sr. Perrotin em 1886.

Em seguida o sr. Giesen chama a attenção sobre algumas precauções que é necessario tomar para tornâr comparaveis as observações d'esta natureza.

Ch. Hermite. — *Remarques sur la décomposition en éléments simples des fonctions doublement périodiques* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. II).

É bem conhecido o papel importante que representa na theo-

ria das funcções periodicas a decomposição em elementos simples da funcção $F(x)$, cujos periodos são $2k$ e $2ik$ e cujos pólos são a, b, \dots, l :

$$F(x) = C + \sum A \frac{H'(x-a)}{H(x-a)} + \sum D_x A' \frac{H'(x-a)}{H(x-a)} + \dots$$

N'esta decomposição a quantidade $\frac{H'(x)}{H(x)}$, que representa o papel de elemento simples, não é duplamente periodica, em quanto que as suas derivadas o são. Por isso n'esta bella memoria o grande geometra francez apresenta uma outra decomposição de $F(x)$ em que não entram mais do que os elementos duplamente periodicos sn^2x e sua derivada. Em seguida considera o caso particular das funcções com dois periodos $2k$ e $2ik$, que se reproduzem com mudança de signal quando se ajuncta á variavel x um dos semi-periodos $ik, k + ik', k$, a respeito das quaes faz algumas observações do maior interesse. Finalmente considera as funcções cujos periodos são $4k$ e $4ik'$ para mostrar que podem ser decompostas em elementos simples formados por meio das quantidades $snx, dn x$.

H. G. Zeuthen. — Note sur l'usage des coordonées dans l'antiquité et sur l'invention de cet instrument (Bulletin de l'Académie Danoise des Sciences, 1888).

No livro notavel que o sr. Zeuthen escreveu ha alguns annos, para expôr a theorja das conicas segundo o methodo dos antigos, fez um uso continuo das coordenadas e notou que se prestavam tanto á exposição dos methodos empregados pelos antigos, que foi levado a concluir que elles conheciam este instrumento de indagações geometricas. Tendo porém o sr. Günther attribuido a Fermat a descoberta do uso e utilidade das coordenadas, o sr. Zeuthen faz uma analyse dos trabalhos de Fermat, onde este grande sabio emprega as coordenadas, para fazer vêr que foi procurando reconstruir os dous livros perdidos de Apollonius sobre os logares geometricos planos, que Fermat foi levado ao emprego das coordenadas, e que os antigos não só sabiam fazer as mesmas applicações das coordenadas que levaram o sr. Günther a attri-

buir a Fermat a descoberta da utilidade d'este instrumento, mas ainda outras. Para o sr. Zeuthen, o grande merito do *Isagoge* de Fermat está na exposição clara do methodo das coordenadas, e o grande merito de Geometria de Descartes está na base algebrica que deu á Geometria e a todas as mathematicas.

Gino Loria. — *Notizie storiche sulla Geometria numerativa (Bibliotheca Mathematica de G. Eneström, 1888).*

Consta de oito paragraphos esta interessante noticia. No primeiro define o auctor o objecto de Geometria numerativa. No segundo dá noticia dos trabalhos que prepararam este ramo de Geometria. No terceiro refere-se á sua fundação por Chastes, á longa serie de memorias que este grande geometra escreveu sobre este assumpto, e á sua theoria das characteristics dos systemas de curvas e superficies. No quarto, quinto e sexto refere-se aos theoremas de Geometria numerativa obtidos pela ligação da theoria dos systemas de curvas ou de superficies com a das equações differenciaes, pela generalisação da theoria das characteristics, e pela theoria da correspondencia. Finalmente nos paragraphos setimo e oitavo expõe as indagações de Halphen e de Schubert a respeito d'este assumpto. Acompanha este trabalho historico uma lista de 137 memorias sobre Geometria numerativa.

E. Cesàro. — *Remarques sur la théorie des roulettes (Nouvelles Annales de Mathématiques, 3^{ème} série, t. VII).*

O auctor mostra como os principios fundamentaes da Geometria intrinseca conduzem facilmente aos principaes resultados conhecidos relativos ás curvas geradas pelo movimento de uma curva gyrando sobre outra.

S. Pincherle. — *Sulle funzioni ipergeometriche generalizzate (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, Roma, 1888)*

As funções hypergeometricas, definidas por Riemann como

integraes de certas equações differenciaes lineares de segunda ordem, foram generalisadas em duas direcções differentes por Pochhammer e Goursat. O objecto do trabalho do sr. Pincherle é mostrar que entre as duas familias de transcendentis descobertas por aquelles auctores existe uma ligação. Mostra, com effeito, que as transcendentis de Pochhammer têm a sua origem n'uma equação ás differenças finitas, e que as transcendentis de Goursat têm a sua origem n'uma equação differencial linear, e que entre estas equações existe uma ligação tal que a uma propriedade de uma corresponde uma propriedade correlativa da outra.

G. de Longchamps. — *Sur la transformation orthotangentielle dans le plan et dans l'espace (Bulletin de la Société R. des Sciences de Bohême, 1888).*

Seja XY uma recta fixa, U uma curva dada, Δ uma tangente a esta curva, e A o ponto em que esta tangente corta XY. Se pelo ponto A se tirar uma perpendicular Δ' a Δ , a envolvente de Δ' , quando Δ se move, é uma curva U', que é a transformada orthotangencial da curva U. O objecto do artigo do sr. Longchamps é o estudo analytico d'esta transformação no systema Cartesiano.

A. Gützmer. — *Ein satz über Potenzreihen (Mathematische Annalen, t. XXXII).*

E. Cesàro. — *Sur une proposition de théorie asymptotique des nombres (Annali di Matematica pura ed applicata, 2.^a serie, t. XVI).*

— *Sur une distribution des signes (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, Roma, 1888).*

Gino Loria. — *Sul concetto di volume in uno spazio lineare qualunque (Giornale de Battaglini, t. XXVI).*

Ch. Hermite. — Sur la transformation de l'intégrale elliptique de seconde espèce (*Mémoires de la Société R. des Sciences de Bohême*, 7^{ème} série, t. II).

— Démonstration nouvelle d'une formule relative aux intégrales Eulériennes de seconde espèce (*Bulletin de la Société royale des Sciences de Prague*, 1888).

G. B. Guccia. — Sur l'intersection de deux courbes algébriques en un point singulier (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 1888).

G. T.

$$\frac{(1-\sqrt{2})^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} x^{2k}}{(1-\sqrt{2})^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} x^{2k}} = \frac{1}{\cos x}$$

$$\frac{1}{1-\sqrt{2}} + \frac{1}{1-\sqrt{2}} + \frac{1}{1-\sqrt{2}} - 1 = \frac{\pi}{4}$$

Sobre qual $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} x^{2k} = \frac{1}{1-x^2}$

$$\frac{(1-\sqrt{2})^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} x^{2k}}{(1-\sqrt{2})^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} x^{2k}} = \frac{1}{\cos x}$$

$$\left[\frac{(1-\sqrt{2})^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} x^{2k}}{(1-\sqrt{2})^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} x^{2k}} \right] + 1 = \frac{1}{\cos x}$$

EXTRACTOS DAS ULTIMAS PUBLICAÇÕES

I

Sobre um desenvolvimento em serie de $\frac{1}{\cos x}$.

A serie que figura no desenvolvimento conhecido

$$\frac{1}{\cos x} = \pi \sum_{v=1}^{\infty} \frac{(-1)^v (2v-1)}{x^2 - (2v-1)^2 \frac{\pi^2}{4}}$$

não é absolutamente convergente. Para remediar este inconveniente o sr. Weyr transforma esta serie por meio da fórmula

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

que dá

$$-1 = \frac{4}{\pi} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{(-1)^v}{2v-1}$$

na serie

$$\frac{1}{\cos x} = 1 + \pi \sum_{v=1}^{\infty} \frac{(-1)^v (2v-1)}{x^2 - (2v-1)^2 \frac{\pi^2}{4}} + \frac{4}{\pi} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{(-1)^v}{2v-1}$$

que dá a formula

$$\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{4x^2}{\pi} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{(-1)^v}{(2v-1) \left[x^2 - (2v-1)^2 \frac{\pi^2}{4} \right]}$$

A serie que entra no segundo membro d'esta formula é absolutamente convergente.

[Ed. Weyr: *Extrait d'une lettre à M. Hermite* (*Bulletin des Sciences Mathématiques*, 2^o série, t. XII)].

$$\frac{\Gamma(u)}{\Gamma(u+1)} = \frac{1}{u}$$

Uma questão de maximos e minimos

Os theoremas sobre o maximum d'um producto de factores positivos cuja somma é constante e sobre o minimum da somma de termos positivos cujo producto é constante demonstra-se facilmente por meio da desigualdade

$$xyz \dots \leq \left(\frac{x+y+z+\dots}{n} \right)^n,$$

a qual mostra que, quando a somma é dada, o producto é maximum, e que, quando o producto é dado, a somma é minimum, no caso de ser $x=y=z=\dots$.

[Ch. Bioche: *Sur les minima des sommes, etc.* (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1888)].

III

Sobre uma formula de Raabe

A formula de Raabe

$$\int_0^1 \log \Gamma(x+u) dx = u \log u - u + \frac{1}{2} \log 2\pi$$

é demonstrada do modo seguinte pelo sr. Lerch:

Pondo no integral

$$\int_0^1 \log \Gamma(x+u) dx = F(u),$$

onde u é real e positivo, $x + u = z$, vem

$$F(u) = \int_u^{u+1} \log \Gamma(z) dz,$$

d'onde se tira

$$\frac{dF(u)}{du} = \log \frac{\Gamma(u+1)}{\Gamma(u)} = \log u$$

e portanto

$$F(u) = C + u \log u - u.$$

Para determinar a constante C note-se que é

$$C = \int_0^1 \log \Gamma(x) dx,$$

e que da formula

$$\Gamma(x) \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi x}$$

se tira

$$\int_0^1 \log \Gamma(x) dx = \log \pi - \int_0^1 \log \operatorname{sen} \pi x dx - \int_0^1 \log \Gamma(1-x) dx$$

ou

$$2 \int_0^1 \log \Gamma(x) dx = \log \pi - \int_0^1 \log \operatorname{sen} \pi x dx = \log 2\pi,$$

visto ser

$$\int_0^1 \log \Gamma(1-x) dx = \int_0^1 \log \Gamma(x) dx.$$

Temos pois

$$C = \frac{1}{2} \log 2\pi.$$

Substituindo na expressão de $F(u)$ vem a formula de Raabe.

[M. Lerch: *Démonstration élémentaire d'une formule de Raabe* (*Giornale de Rattaglini*, t. xxvi)].

IV

Valor do integral $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$

Póde deduzir-se o valor do integral $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ da expressão do numero π devida a Wallis, como fez vêr o sr. Méray.

Pondo, com effeito,

$$S_u = \int_0^\infty x^u e^{-x^2} dx$$

a integração por partes dá

$$S_{u+2} = \frac{u+1}{2} S_u$$

e portanto

$$S_{2m} = \frac{1.3 \dots (2m-1)}{2.2 \dots 2} S_0, \quad S_{2m-1} = \frac{2.4 \dots (2m-2)}{2.2 \dots 2} \cdot \frac{1}{2}$$

Por outra parte, a substituição

$$x = \left(\frac{u-1}{2} y \right)^{\frac{1}{2}}$$

feita no integral, dá

$$S_u = \frac{1}{2} \left(\frac{u-1}{2} \right)^{\frac{u+1}{2}} e^{-\frac{u-1}{2}} T_u$$

onde

$$T_u = \int_0^\infty (eye^{-y})^{\frac{u-1}{2}} dy.$$

Mas por ser $eye^{-y} < 1$, temos $T_{2m+1} < T_{2m} < T_{2m-1}$, d'onde

$$1 < \frac{T_{2m}}{T_{2m+1}} < \frac{T_{2m-1}}{T_{2m+1}}$$

Mas é facil de vêr que é

$$\lim_{m=\infty} \frac{T_{2m-1}}{T_{2m+1}} = \lim_{m=\infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{m}\right)^{-m}}{e} = 1;$$

logo será tambem

$$\lim_{m=\infty} \frac{T_{2m}^2}{T_{2m^2+1}} = 1$$

ou, substituindo T_{2m} e T_{2m+1} pelos seus valores

$$\begin{aligned} & \lim_{m=\infty} \frac{2 S_0^2}{e \left(1 - \frac{1}{2m}\right)^{2m} \cdot \frac{2m-1}{2m} \cdot \frac{2m+1}{2m}} \\ & \times \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \dots (2m-1)^2 (2m+1)}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \dots (2m)^2} = 1 \end{aligned}$$

ou, attendendo á fórmula de Wallis,

$$S_0 = \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}.$$

[Méray: *Valeur de l'intégrale, etc.* (Bulletin des Sciences mathématiques, 2^e série, t. XII)].

V

Definição geometrica das funções ellipticas

O sr. G. Peano apresenta a seguinte definição geometrica das funções ellipticas:

Seja $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ a equação da ellipse referida a eixos orthogonaes O_x e O_y . Seja P um ponto d'esta ellipse e M e N dous

pontos do raio vector OP taes que $PM = -\frac{l}{2}$, $PN = \frac{l}{2}$, l representando um comprimento dado.

Se P variar sobre a ellipse, os pontos M e N descrevem duas curvas e o segmento MN descreve uma área plana. Sendo U a área descripta por MN quando o angulo $POx = \alpha$ varia desde 0 até α , ou quando o angulo θ (suppondo $x = a \cos \theta$, $y = a \sin \theta$) varia desde o raio até θ , as formulas conhecidas dão

$$U = lab \int_0^\alpha \frac{d\alpha}{\sqrt{b^2 \cos^2 \alpha + a^2 \sin^2 \alpha}},$$

$$U = lab \int_0^\alpha \frac{d\theta}{\sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}}.$$

Como os dois integraes precedentes são integraes ellipticos de primeira especie, estas formulas podem servir para definir as funções ellipticas.

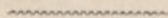
Assim, por exemplo, suppondo $a > b$ e $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$, temos

$$U = lb \int_0^\alpha \frac{d\theta}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \theta}},$$

e, pondo $\frac{U}{lb} = u$,

$$\theta = am u, \quad x = a cn u, \quad y = b sn u, \quad r = a dn u.$$

[G. Peano : *Definizione geometrica delle funzioni ellitiche* (*Giornale di Matematiche de Battaglioni*, t. xxvi)].



REMARQUES SUR DIVERS ARTICES CONCERNANT
LA THÉORIE DES SÉRIES (*)

PAR

M. E. CESÀRO

Professeur à l'Université de Palermo

1. M. Mathyas Lerch a signalé des séries qui se prêtent à des considérations intéressantes. C'est spécialement la série dont le terme générale est

$$u_n = q^{n-\nu} x^{\frac{\nu(\nu+1)}{2}}, \quad (0 < q < 1 < x),$$

que M. Lerch a fait connaître dans le *Jornal de Sciencias mathematicas e astronomicas*, vol. VII, pag. 79. On a représenté par ν

le nombre des chiffres de n . Le nombre $\frac{u_n}{u_{n-1}}$, généralement égal à q , devient x^ν lorsque $n = 10^\nu - 1$. Il en résulte que, si l'on fait parcourir à n la succession des puissances de 10, le rapport considéré finit pour surpasser toute limite. Cependant la série est convergente, car $\sqrt[\nu]{u_n}$ tend vers $q < 1$. M. Lerch dit, en outre, que x doit être inférieur à $\frac{1}{q^2}$. Curieux de savoir le pourquoi de cette condition inutile, j'ai été conduit à penser que M. Lerch, voulant se borner à faire connaître quelque exemple particulier de séries construites avec une grande généralité, a involontairement échangé entre elles les conditions relatives à deux cas particuliers

(*) Este artigo é extrahido das *Nouvelles Annales de Mathématiques* (3.^e serie, t. VII, 1888). Publicamolo aqui por se referir a alguns artigos publicados n'este jornal.

différents. Soit $f(n)$ une fonction telle que $f(n) - f(n-1)$ augmente avec n au delà de toute limite. Si $\zeta(n)$ est la totalité des nombres entiers, non supérieurs à n , qui jouissent d'une propriété Ω , appartenant à une infinité de nombres entiers, la série dont le terme générale est

$$u_n = q^n x^{f[\zeta(n)]}, \quad (0 < q < 1 < x)$$

est certainement convergente, si $\frac{f[\zeta(n)]}{n}$ tend vers zéro, bien que le rapport $\frac{u_n}{u_{n-1}}$ surpasse toute limite lorsque n parcourt la succession des nombres entiers doués de la propriété Ω . La série est encore convergente lorsque $\frac{f[\zeta(u)]}{n}$ tend vers une limite finie autre que zéro; mais, dans ce cas, x ne peut être aussi grand qu'on le veut. En particulier, la série, dont le terme générale est

$$u_n = q^n x^{[\sqrt{n}]^2}, \quad \left(0 < q < 1 < x < \frac{1}{q}\right),$$

est convergente, bien que le rapport $\frac{u_n}{u_{n-1}}$ surpasse toute limite lorsque n parcourt la succession des carrés parfaits. C'est probablement cette série que M. Lerch avait en vue, ou plutôt la série qui a pour terme générale

$$u_n = q^{n - [\sqrt{n}]} x^{\frac{1}{2}([\sqrt{n}] + [\sqrt{n}] + 1)}.$$

Quoi qu'il en soit, il est certain que, si la propriété Ω cessait d'être *infinitement rare* parmi les nombres entiers, la série perdrait sa convergence.

2. J'ai donné dans le même *Jornal*, vol. VII, pag. 172, des exemples moins compliqués. Les voici :

$$\frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\beta} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\beta} + \dots \quad (1 < \alpha < \beta)$$

$$\alpha + \beta^2 + \alpha^3 + \beta^4 + \dots \quad (0 < \alpha < \beta < 1).$$

M. A. Gützmer dit que ces exemples sont *moins remarquables* que celui de M. Lerch. Cette appréciation est inexacte. Voici pourquoi. Dans la série de M. Lerch les valeurs de n , qui font croître $\frac{u_n}{u_{n-1}}$ au delà de toute limite, *deviennent de plus en plus rares*. Dans mes exemples, comme dans d'autres séries de M. Lerch, il est tout aussi probable de voir $\frac{u_n}{u_{n-1}}$ tendre vers l'infini que vers zéro. C'est justement sur cette observation que M. Gützmer s'appuie pour dire que la série de M. Lerch est la plus remarquable de toutes. Or il me semble que *la convergence d'une série est d'autant plus surprenante que les symptômes de divergence s'y manifestent plus fréquemment*. On devra plutôt s'attacher à multiplier ces symptômes d'autant que possible, en s'efforçant d'obtenir, malgré cela, une série convergente. Il est certain qu'on peut construire des séries dans lesquelles $\frac{u_n}{u_{n-1}}$ surpasse toute limite pour des valeurs de n , dont la fréquence parmi les nombres entiers est aussi considérable qu'on le veut. Il suffit de prendre la série

$$q_1 + q_2^2 + \dots + q_r^r + q_1^{r+1} + q_2^{r+2} + \dots + q_r^{2r} + q_1^{2r+1} + \dots$$

où

$$0 < q_1 < q_2 < \dots < q_r < 1.$$

Ici la convergence est manifeste. Cependant, la probabilité de voir $\frac{u_n}{u_{n-1}}$ surpasser toute limite est $1 - \frac{1}{r}$: elle est aussi voisine de l'unité qu'on le veut. Est-il possible de *construire des séries convergentes dans lesquelles les valeurs de n , qui ne font pas croître $\frac{u_n}{u_{n-1}}$ à l'infini soient infiniment rares?*

3. Dans le *Jornal de Ciencias Mathematicas*, vol. VIII, p. 33, M. Gützmer a montré que les singularités de la série de M. Lerch peuvent être *enlevées* par un groupement convenable des termes. Ce fait est vrai pour toutes les séries convergentes.

J'ai établi cela, en faisant voir par des considérations analogues à celles dont on fait usage pour démontrer le *théorème de Riemann*, comme on doit s'y prendre pour *calquer*, pour ainsi dire, une série convergente sur une progression géométrique donnée. Mais M. Weyr, dans le même *Jornal*, vol. VIII, pag. 97, vient d'arriver au même résultat par des considérations beaucoup plus simples que les miennes. Je vais les reproduire en les modifiant quelque peu. Soit

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

une série convergente à termes positifs. Le rapport $\frac{S_n}{R_n}$ croit à l'infini avec n , et, par suite, on peut toujours assigner une valeur de n à partir de laquelle on ait constamment $q S_n > R_n$, q étant positif. Cela est encore vrai, si l'on considère la série à partir de l'un quelconque de ses termes. Il en résulte qu'on peut grouper les termes de la série

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

en les laissant dans l'ordre où ils se trouvent, de manière à former une nouvelle série

$$v_1 + v_2 + v_3 + \dots$$

dont les termes satisfont à l'inégalité

$$q v_n > v_{n+1} + v_{n+2} + v_{n+3} + \dots$$

On voit que $\frac{v_n}{v_{n-1}}$ sera constamment inférieur au nombre positif q , arbitrairement petit. Plus généralement, ayant pris des nombres quelconques, positifs et finis, la remarque de M. Weyr conduit à affirmer qu'il existe une suite de nombres positifs q_1, q_2, q_3, \dots non supérieurs aux nombres donnés, et tels que l'on puisse écrire

$$v_n = \frac{S q_1 q_2 q_3 \dots q_{n-1}}{(1 + q_1)(1 + q_2) \dots (1 + q_n)}$$

Au moyen de cette égalité, nous pouvons faire en sorte que

l'allure de la série donnée se modèle, d'autant que possible, sur celle d'une autre série.

4. On a reproduit dans le même *Jornal*, vol. VIII, pag. 116, quelques-unes de mes précédentes remarques (*Nouvelles Annales*, pag. 50, 1888). À propos de l'une d'elles, je signalerai une généralisation assez intéressante. Si la fonction a^n croît sans cesse et indéfiniment, on sait, d'après Cauchy, que l'on a

$$\lim \frac{a_1 S_1 + (a_2 - a_1) S_2 + \dots + (a_n - a_{n-1}) S_n}{a_n} = S,$$

ou bien

$$\lim \left(S_n - \frac{a_1 u_2 + a_2 u_3 + \dots + a_{n-1} u_n}{a_n} \right) = S;$$

d'où

$$\lim \frac{a_1 u_2 + a_2 u_3 + \dots + a_{n-1} u_n}{a_n} = 0;$$

car $\lim u_n = 0$. Donc

$$\lim \frac{a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n}{a_n} = 0.$$

Voici une curieuse conséquence de cette égalité. Si la série

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots$$

n'est par moins *divergente* que la série harmonique, on peut substituer n au dénominateur a_n . Si l'on prend ensuite $a_n u_n = \pm 1$, on arrive à cette conclusion: *pour que la série*

$$\pm \frac{1}{a_1} \pm \frac{1}{a_2} \pm \frac{1}{a_3} \pm \dots$$

soit convergente, il faut que les signes — s'y présentent aussi fréquemment que les signes +. Cela généralise une proposition énoncée précédemment (*Nouvelles Annales*, pag. 57, 1888).

5. Il vient de paraître dans les *Nouvelles Annales*, pag. 196, 1888, un théorème de convergence que son auteur, M. J. L. W. V. Jensen, croit nouveau. On a l'habitude d'enoncer la première partie du théorème de Kummer comme il suit: Soit a_n une fonction positive de n . La série

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

à termes positifs, est convergente si

$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1}$$

tend, pour n infini, vers une limite positive. Cet énoncé a le défaut d'être plus restrictif que ne l'exige la démonstration; car, dans celle-ci, on commence par admettre l'existence d'une limite positive λ pour $a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1}$ dans le seul but d'en conclure que cette expression finit par surpasser tout nombre positif k inférieur à λ . M. Jensen a donc raison d'énoncer le théorème de Kummer comme il le fait, mais on ne saurait accorder à son article des *Nouvelles Annales* d'autre valeur que celle d'une utile remarque. Voici comme je démontre dans mon *Cours*, depuis deux ans, le théorème en question. L'inégalité

$$a_n u_n - a_{n+1} u_{n+1} > k u_{n+1},$$

qui a lieu à partir d'une valeur de n , montre d'abord que la fonction positive $a_n u_n$ finit par décroître. Donc $a_n u_n$ admet une limite finie, et, par suite, la série

$$(a_1 u_1 - a_2 u_2) + (a_2 u_2 - a_3 u_3) + (a_3 u_3 - a_4 u_4) + \dots$$

est convergente. La série donnée converge donc aussi, puisque ses termes, multipliés par la constant k , finissent par être inférieurs aux termes correspondants d'une série convergente à termes positifs. Quant à la seconde partie du théorème, j'observe que, si l'expression considérée devient négative à partir d'une certaine valeur de n , la fonction $a_n u_n$ croît au-dessus de quelque nombre

positif k . Il en résulte que la série donnée est divergente, puisque ses termes finissent par surpasser les termes correspondants de la série

$$\frac{k}{a_1} + \frac{k}{a_2} + \frac{k}{a_3} + \dots$$

qu'on suppose divergente.

NOTA SU DUE APPLICAZIONI ALGEBRICHE DELL'ELIMINAZIONE

DI

GINO LORIA

I

Sia data un' equazione algebrica ad un' incognita x

$$f(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0.$$

Il problema più generale che si può proporre relativamente alle funzioni simmetriche algebriche razionali semplici delle sue radici consiste nel determinare in funzione dei coefficienti $a_0 a_1 \dots a_n$ la somma degli n valori che prende la funzione

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \equiv \frac{b_0 x^p + b_1 x^{p-1} + \dots + b_p}{c_0 x^p + c_1 x^{p-1} + \dots + c_p}$$

quando al posto di x si mettano successivamente le n radici dell'equazione proposta. Ora questo problema si può risolvere immediatamente ricorrendo alle teoria dell'eliminazione.

Notiamo anzitutto che si può supporre $p < n$ perchè ove questa condizione non fosse verificata dalle funzioni $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ si potrebbero far scomparire le potenze di esponente eguale o superiore ad n tenendo conto dell'equazione $f(x) = 0$.

Se ora poniamo

$$y = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

ed eliminiamo x fra le due equazioni

$$f(x) = 0, \quad y\psi(x) - \varphi(x) = 0$$

ottenemo un'equazione in y le cui radici sono i valori assunti dalla funzione $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ quando x si fa eguale successivamente alle radici di $f(x) = 0$, onde la somma delle radici dell'equazione risultante sarà appunto la cercata funzione simmetrica.

Quest'equazione si scrive immediatamente sotto forma di un determinante d'ordine $n + p$ applicando il metodo dialitico e si vede senza stento che in essa:

I, il coefficiente di y^n non è che il risultante R di $f(x)$ e $\psi(x)$,

II, il coefficiente di $-y^{n-1}$ è la somma degli n determinanti che nascono da R scrivendo successivamente in ciascuna delle sue prime n orizzontali, invece dei coefficienti delle funzione $\psi(x)$, gli omologhi della $\varphi(x)$;

onde si conclude tosto l'espressione della funzione richiesta.

Così p. es. se

$$f(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2, \quad \varphi(x) = b_0x + b_1, \quad \psi(x) = c_0x + c_1,$$

il valore di quella funzione è

$$\frac{\begin{vmatrix} b_0 & b_1 & 0 \\ 0 & c_0 & c_1 \\ a_0 & a_1 & a_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 \\ a_0 & a_1 & a_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_0 & c_1 & 0 \\ 0 & c_0 & c_1 \\ a_0 & a_1 & a_2 \end{vmatrix}} = \frac{2a_0b_1c_1 - a_1(b_0c_1 + c_0b_1) + 2a_2b_0c_0}{a_0c_1^2 - 2a_1c_0c_1 + a_2c_0^2}$$

Osserviamo che se si calcolano le somme dei prodotti r ad r dell'anzidetta equazione in y si ottengono i valori di funzioni r ple delle radici di $f(x) = 0$ del tipo seguente

$$\sum_{i_1, i_2, \dots, i_r} \frac{\varphi(x_{i_1}) \dots \varphi(x_{i_r})}{\psi(x_{i_1}) \dots \psi(x_{i_r})}$$

II

Lo studio delle equazioni algebriche particolari esige che si sappia risolvere il problema: Trovare la relazione fra i coefficienti di un'equazione algebrica, necessaria e sufficiente affinchè fra due radici di essa passi una relazione algebrica prestabilita.

Or anche questa questione si può sciogliere invocando la teoria dell'eliminazione. Infatti se y e z sono due radici della data equazione $f(x) = 0$, affinchè fra esse passi una relazione

$$F(y, z) = 0$$

bisogna e basta che coesistano le tre relazioni

$$f(y) = 0, \quad f(z) = 0, \quad F(y, z) = 0;$$

quindi il risultante di queste tre equazioni col suo annullarsi annuncerà l'esistenza della prestabilita relazione fra due radici della equazione data.

Esempio I. Condizione affinchè l'equazione

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

abbia due radici eguali e di segni contrarii.

Dovranno coesistere le tre relazioni

$$a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

$$y + z = 0$$

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

o le due equivalenti

$$a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \dots + a_{n-1} y + a_n = 0$$

$$a_0 y^n - a_1 y^{n-1} + \dots + (-1)^{n-1} a_{n-1} y + (-1)^n a_n = 0.$$

Se $n = 2k$ queste due equazioni equivalgono alle altre

$$a_0 y^k + a_2 y^{k-1} + \dots + a_{2k-2} y + a_{2k} = 0$$

$$a_1 y^{k-1} + \dots + a_{2k-3} y + a_{2k-1} = 0$$

ed hanno per risultante

a_0	a_1	a_2	\dots	a_{2k-4}	a_{2k-2}	a_{2k}	0	0	0	0	0
0	a_0	a_2	\dots	a_{2k-6}	a_{2k-4}	a_{2k-2}	a_{2k}	0	0	0	0
.....											
0	0	0	\dots	a_0	a_2	a_4	a_6	\dots	a_{2k-4}	a_{2k-2}	a_{2k}
0	0	0	\dots	0	a_0	a_2	a_4	\dots	a_{2k-6}	a_{2k-4}	a_{2k-2}
a_1	a_3	a_5	\dots	a_{2k-3}	a_{2k-1}	0	0	0	0	0	0
0	a_1	a_3	\dots	a_{2k-5}	a_{2k-3}	a_{2k-1}	0	0	0	0	0
.....											
0	0	0	\dots	0	a_1	a_3	a_5	\dots	a_{2k-5}	a_{2k-3}	a_{2k-1}
0	0	0	\dots	0	0	a_1	a_3	\dots	a_{2k-7}	a_{2k-5}	a_{2k-3}

se invece $n = 2k + 1$ le dette equazioni equivalgono a

$$a_0 y^k + a_2 y^{k-1} + \dots + a_{2k-2} y + a_{2k} = 0$$

$$a_1 y^k + a_3 y^{k-1} + \dots + a_{2k-1} y + a_{2k+1} = 0$$

ed hanno per risultante

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 a_0 & a_2 & a_4 & \dots & a_{2k-4} & a_{2k-2} & a_{2k} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & a_0 & a_2 & \dots & a_{2k-6} & a_{2k-4} & a_{2k-2} & a_{2k} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & 0 & \dots & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots & a_{2k-4} & a_{2k-2} & a_{2k} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \dots & a_{2k-6} & a_{2k-4} & a_{2k-2} & a_{2k} \\
 a_1 & a_3 & a_5 & \dots & a_{2k-3} & a_{2k-1} & a_{2k+1} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & a_1 & a_3 & \dots & a_{2k-5} & a_{2k-3} & a_{2k-1} & a_{2k+1} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & 0 & \dots & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots & a_{2k-3} & a_{2k-1} & a_{2k+1} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \dots & a_{2k-5} & a_{2k-3} & a_{2k-1} & a_{2k+1}
 \end{array}$$

Il Esempio. Condizione affinchè l'equazione

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

abbia due radici reciproche.

Dovranno coesistere le tre relazioni

$$a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

$$yz = 1$$

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

equivalenti alle due

$$a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \dots + a_{n-1} y + a_n = 0$$

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0.$$

Ne viene che la condizione domandata è

$$\begin{vmatrix}
 a_0 & a_1 & 0 & a_2 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
 0 & a_0 & a_1 & 0 & \dots & a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-4} & a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & \dots & 0 & 0 & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\
 a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
 0 & a_n & a_{n-1} & \dots & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & a_n & \dots & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n & a_{n-2} & a_{n-2} & a_{n-3} & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0
 \end{vmatrix} = 0.$$

Genova 19 Aprile 1889.

ALGUNS PONTOS DA THEORIA DOS INTEGRAES DEFINIDOS

(Fragmentos de um Curso de Analyse)

POR

F. GOMES TEIXEIRA

I

Valores medios dos integraes definidos

1. THEOREMA DE TCHEBYCHEFF. — Se $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ representarem funcções, cada uma das quaes varia n'um determinado sentido, quando x varia desde $x = a$ até $x = X$, a expressão

$$(X - a) \int_a^X \varphi(x) \psi(x) dx - \int_a^X \varphi(x) dx \cdot \int_a^X \psi(x) dx$$

é positiva se as duas funcções variam no mesmo sentido e negativa se variam em sentido contrario.

Este theorema importante foi demonstrado por Franklin, n'um artigo publicado no *American Journal of Mathematics* (t. VII), do modo seguinte:

Integrando relativamente a x ambos os membros da identidade

$$[\varphi(x) - \varphi(y)] [\psi(x) - \psi(y)] = \varphi(x) \psi(x) - \varphi(x) \psi(y) - \varphi(y) \psi(x) + \varphi(y) \psi(y)$$

vem

$$\int_a^X [\varphi(x) - \varphi(y)] [\psi(x) - \psi(y)] dx = \int_a^X \varphi(x) \psi(x) dx - \psi(y) \int_a^X \varphi(x) dx - \varphi(y) \int_a^X \psi(x) dx + (X - a) \varphi(y) \psi(y).$$

Integrando de novo esta segunda identidade relativamente a y e tomando os integraes entre os limites a e X , vem

$$\int_a^X dy \int_a^X [\varphi(x) - \varphi(y)] [\psi(x) - \psi(y)] dx = (X-a) \int_a^X \varphi(x) \psi(x) dx \\ - \int_a^X \psi(y) dy \cdot \int_a^X \varphi(x) dx - \int_a^X \varphi(y) dy \cdot \int_a^X \psi(x) dx \\ + (X-a) \int_a^X \varphi(y) \psi(y) dy$$

e portanto

$$\int_a^X dy \int_a^X [\varphi(x) - \varphi(y)] [\psi(x) - \psi(y)] dx \\ = 2(X-a) \int_a^X \varphi(x) \psi(x) dx - 2 \int_a^X \varphi(x) dx \cdot \int_a^X \psi(x) dx.$$

Se as duas funcções $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ variam no mesmo sentido quando x cresce desde a até X , as duas diferenças $\varphi(x) - \varphi(y)$ e $\psi(x) - \psi(y)$ têm o mesmo signal, e o primeiro membro da identidade precedente é uma somma de termos positivos. Logo o segundo membro da mesma identidade é positivo, o que demonstra a primeira parte do theorema.

Se as funcções $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ variam em sentido contrario quando x cresce desde a até X , as diferenças $\varphi(x) - \varphi(y)$ e $\psi(x) - \psi(y)$ têm signaes contrarios, e o primeiro membro da egualdade precedente é uma somma de termos negativos. Logo o segundo membro da mesma egualdade é negativo, o que demonstra a segunda parte do theorema.

Vejamos algumas consequencias d'este theorema.

1) Por serem as funcções

$$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad 1-k^2x^2$$

uma crescente e outra decrescente, quando x varia desde 0 até 1, temos

$$X \int_0^X \frac{\sqrt{1-k^2 x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx < \int_0^X (1-k^2 x^2) dx \cdot \int_0^X \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}}$$

quando $X < 1$, ou

$$X \int_0^X \frac{\sqrt{1-k^2 x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx < \left(X - \frac{1}{3} k^2 X^3 \right) \int_0^X \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}}$$

d'onde se tira a relação seguinte entre os integraes ellipticos de primeira e segunda especie de Legendre

$$F(k, \varphi) - E(k, \varphi) > \frac{1}{3} k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi F(k, \varphi).$$

2) Se X e a forem positivos e maiores do que a maior das raizes reaes da equação do grão n

$$y = (x - \alpha)(x - \beta) \dots (x - \lambda) = 0,$$

temos a relação seguinte entre os integraes hyperellipticos de primeira e segunda especie

$$(X - a) \int_a^X \frac{x^m dx}{\sqrt{y}} < \int_a^X x^m dx \cdot \int_a^X \frac{dx}{\sqrt{y}}.$$

No fim do seu trabalho sobre o theorema de Tchebycheff apresenta o sr. Franklin uma lista de desigualdades interessantes que se obtêm por meio d'este theorema. D'esta lista vamos extrahir algumas.

- 1) $\arcsin x < \frac{4}{\pi} (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - \sqrt{1-x^2} - 1).$
- 2) $(\arcsin x)^2 < \frac{x}{2} \log \frac{1+x}{1-x}.$
- 3) $\log x > 2 \frac{x-1}{x+1}, (x > 1).$
- 4) $\log x < 2 \frac{x-1}{x+1}, (x < 1).$
- 5) $\log x < \frac{x-1}{\sqrt{x}}, (x > 1).$
- 6) $\Gamma(a+1) \Gamma(b+1) < \Gamma(a+b).$
- 7)
$$X \int_0^X \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} < \int_0^X \frac{dx}{\sqrt{(1-2x)(1-kx)}} \int_0^X \frac{dx}{\sqrt{(1+x)(1+kx)}}.$$
- 8)
$$X \int_0^X \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} > \int_0^X \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \int_0^X \frac{dx}{\sqrt{1-x^2k^2}}.$$
- 9) $E(k, \varphi) F(k, \varphi) > \varphi^2.$

2. A desigualdade de Tchebycheff dá só um limite superior ou só um limite inferior do integral $\int_a^X \varphi(x) \psi(x) dx$. A desigual-

dade seguinte, que nós publicámos no *Bulletin des Sciences Mathématiques* (2.^a serie, t. XII),

$$\int_a^X \varphi^2(x) dx \int_a^X \psi^2(x) dx > \left[\int_a^X \varphi(x) \psi(x) dx \right]^2$$

dá ao mesmo tempo um limite superior e um limite inferior do mesmo integral.

Para a demonstrar, parto da identidade

$$\begin{aligned} [\varphi(x) \psi(y) - \varphi(y) \psi(x)]^2 &= \varphi^2(x) \psi^2(y) \\ &\quad - 2 \varphi(x) \psi(x) \varphi(y) \psi(y) + \varphi^2(y) \psi^2(y), \end{aligned}$$

que, integrando ambos os membros relativamente a x entre os limites a e X , dá

$$\begin{aligned} \int_a^X [\varphi(x) \psi(y) - \varphi(y) \psi(x)]^2 dx &= \psi^2(y) \int_a^X \varphi^2(x) dx \\ &\quad - 2 \varphi(y) \psi(y) \int_a^X \varphi(x) \psi(x) dx + \varphi^2(y) \int_a^X \psi^2(x) dx. \end{aligned}$$

Integrando esta segunda identidade relativamente a y , vem a egualdade

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_a^X dy \int_a^X [\varphi(x) \psi(y) - \varphi(y) \psi(x)]^2 dx \\ = \int_a^X \varphi^2(x) dx \cdot \int_a^X \psi^2(x) dx - \left[\int_a^X \varphi(x) \psi(x) dx \right]^2, \end{aligned}$$

da qual se tira o theorema enunciado, visto que o primeiro membro é uma somma de termos positivos.

Por meio da desigualdade que vimos de deduzir acha-se um limite superior

$$+ \left[\int_a^X \varphi^2(x) dx \int_a^X \psi^2(x) dx \right]^{\frac{1}{2}}$$

e um limite inferior

$$-\left[\int_a^X \varphi^2(x) dx \cdot \int_a^X \psi^2(x) dx \right]^{\frac{1}{2}}$$

do integral $\int_a^X \varphi(x) \psi(x) dx$, em quanto que a desigualdade de Tchebycheff dá só um limite superior ou só um limite inferior d'este integral.

Por ser, em virtude do theorema de Tchebycheff,

$$\int_a^X \varphi^2(x) dx > \frac{1}{X-a} \left(\int_a^X \varphi(x) dx \right)^2$$

$$\int_a^X \psi^2(x) dx > \frac{1}{X-a} \left(\int_a^X \psi(x) dx \right)^2$$

temos

$$\left[\int_a^X \varphi^2(x) dx \cdot \int_a^X \psi^2(x) dx \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$> \frac{1}{X-a} \left| \int_a^X \varphi(x) dx \right| \left| \int_a^X \psi(x) dx \right|,$$

d'onde se conclue que a desigualdade de Tchebycheff dá um limite mais proximo de $\int_a^X \varphi(x) \psi(x) dx$ do que a nossa desigualdade, que por isso deve ser empregada conjunctamente com a de Tchebycheff para calcular aquelle dos limites que esta não dá. Assim, por exemplo, se no caso do integral elliptico

$$\int_0^X \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

onde $X < 1$, a desigualdade de Tchebycheff dá

$$\int_0^X \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} > \frac{1}{X} \int_0^X \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \int_0^X \frac{dx}{\sqrt{1-k^2x^2}}$$

e a minha desigualdade dá

$$\int_0^X \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} < \left(\int_0^X \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \int_0^X \frac{dx}{\sqrt{1-k^2x^2}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Do mesmo modo,

$$\int_0^X \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} > \frac{X^2}{3} \int_0^X \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

$$\int_0^X \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} < \sqrt{\frac{X^5}{5}} \left(\int_0^X \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

O integral

$$u = \int_1^x \frac{e^{-x} dx}{x}$$

dá

$$u < \left(\int_1^x e^{-2x} dx \cdot \int_1^x \frac{dx}{x^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

e portanto

$$u < \left(\frac{e^{2x} - e^x}{2e^2 e^{2x}} \cdot \frac{x-1}{x} \right)^{\frac{1}{2}} < \frac{1}{e\sqrt{2}}$$

Deduz-se d'aqui que u é finito e determinado quando é $x = \infty$, porque u augmenta com x e é

$$\int_1^{\infty} \frac{e^{-x} dx}{x} < \frac{1}{e\sqrt{2}}$$

II

Diferenciação dos integraes definidos

3. Se a função $f(x, y)$ e sua derivada $\frac{df(x, y)}{dy}$ são contínuas nos intervallos de $x = a$ a $x = X$ e de $y = b$ a $y = Y$, e se no primeiro intervallo a função $\varphi(x)$ é continua ou discontinua n'um numero limitado de pontos, é

$$\frac{d \int_a^X \varphi(x) f(x, y) dy}{dy} = \int_a^X \varphi(x) \frac{df(x, y)}{dy} dx,$$

mesmo quando uma ou ambas as quantidades a e X são infinitas, se os integraes

$$\int_a^X |\varphi(x)| dx, \quad \int_a^X \varphi(x) \frac{df(x, y)}{dy} dx$$

são finitos e determinados nos intervallos considerados.

Com effeito, a fórmula de Taylor com a expressão do resto de Lagrange dá

$$f(x, y + h) = f(x, y) + h \frac{df(x, y + \theta h)}{dy},$$

onde θ representa uma quantidade comprehendida entre zero e a unidade; e portanto temos

$$\int_a^X f(x, y + h) dx = \int_a^X f(x, y) dx + h \int_a^X \frac{df(x, y + \theta h)}{dy}$$

d'onde se deduz

$$\begin{aligned} \frac{d \int_a^X \varphi(x) f(x, y) dx}{dy} &= \lim_{h=0} \frac{\int_a^X \varphi(x) [f(x, y + h) - f(x, y)] dx}{h} \\ &= \lim_{h=0} \int_a^X \varphi(x) \frac{df(x, y + \theta h)}{dy} dx \\ &= \lim_{h=0} \left[\int_a^X \varphi(x) \frac{df(x, y)}{dy} dx + \int_a^X \varepsilon \varphi(x) dx \right]. \end{aligned}$$

Mas, por ser continua a funcção $\frac{df(x, y)}{dy}$, a cada valor da quantidade positiva α , por mais pequeno que seja, corresponde um valor h_1 de h tal que a desigualdade

$$\left| \frac{df(x, y + \theta h)}{dy} - \frac{df(x, y)}{dy} \right| = |\varepsilon| < \alpha$$

é satisfeita pelos valores de h inferiores em valor absoluto a h_1 , qualquer que seja o valor que se dê a x no intervallo de $x = a$ a $x = X$.

Temos pois

$$\left| \int_a^X \varepsilon \varphi(x) dx \right| < \int_a^X |\varepsilon| |\varphi(x)| dx < \alpha \int_a^X |\varphi(x)| dx,$$

e portanto

$$\lim_{h=0} \int_a^X \varepsilon \varphi(x) dx = 0.$$

Logo

$$\begin{aligned} \frac{d \int_a^X \varphi(x) f(x, y) dx}{dx} &= \int_a^X \varphi(x) \frac{df(x, y)}{dy} dx + \lim_{h=0} \int_a^X \varepsilon \varphi(x) dx \\ &= \int_a^X \varphi(x) \frac{df(x, y)}{dy} dx. \end{aligned}$$

4. A demonstração que precede baseia-se em que toda a função continua é uniformemente continua.

Empregando no desenvolvimento de que se partiu mais um termo, pôde-se tomar a demonstração independente d'este theorema, como vamos vêr,

Temos primeiramente

$$f(x, y + h) = f(x, y) + h \frac{df(x, y)}{dy} + \frac{1}{2} h^2 \frac{d^2 f(x, y + \theta h)}{dy^2},$$

suppondo que as funcções

$$f(x, y), \quad \frac{df(x, y)}{dy}, \quad \frac{d^2 f(x, y)}{dy^2}$$

são finitas e determinadas no intervallo de $x = a$ a $x = X$ e de $y = b$ a $y = Y$.

Logo

$$\begin{aligned} \int_a^X \varphi(x) f(x, y + h) dx &= \int_a^X \varphi(x) f(x, y) dx \\ &+ h \int_a^X \varphi(x) \frac{df(x, y)}{dy} dx + \frac{1}{2} h^2 \int_a^X \varphi(x) \frac{d^2 f(x, y + \theta h)}{dy^2} dx, \end{aligned}$$

d'onde se tira

$$\frac{d \int_a^X \varphi(x) f(x, y) dx}{dy} = \lim_{h=0} \frac{\int_a^X \varphi(x) [f(x, y+h) - f(x, y)] dx}{h}$$

$$= \int_a^X \varphi(x) \frac{df(x, y)}{dy} dx + \lim_{h=0} \frac{1}{2} h \int_a^X \varphi(x) \frac{d^2 f(x, y + \theta h)}{dy^2} dx.$$

Mas, chamando M o maior valor que toma $\left| \frac{d^2 f(x, y)}{dy^2} \right|$ quando x varia desde a até X e y desde b até Y, temos

$$\left| \frac{d^2 f(x, y + \theta h)}{dy^2} \right| < M$$

e portanto

$$\left| \int_a^X \varphi(x) \frac{d^2 f(x, y + \theta h)}{dy^2} dx \right| < \int_a^X |\varphi(x)| \left| \frac{d^2 f(x, y + \theta h)}{dy^2} \right| dx$$

$$< M \int_a^X |\varphi(x)| dx,$$

o que dá

$$\int_a^X \varphi(x) \frac{d^2 f(x, y + \theta h)}{dy^2} dx = M \varepsilon \int_a^X |\varphi(x)| dx,$$

onde ε representa uma quantidade comprehendida entre -1 e $+1$.

Logo

$$\frac{d \int_a^X \varphi(x) f(x, y) dx}{dy}$$

$$= \int_a^X \varphi(x) \frac{df(x, y)}{dy} dx + \frac{1}{2} \lim h M \varepsilon \int_a^X |\varphi(x)| dx.$$

4

D'esta egualdade conclue-se que, se o integral $\int_a^X |\varphi(x)| dx$ tem um valor finito e determinado, é

$$\frac{d \int_a^X \varphi(x) f(y, y) dx}{dy} = \int_a^X \varphi(x) \frac{df(x, y)}{dy} dx.$$

(Continúa).

BIBLIOGRAPHIA

F. P. Horta. — *Estudo elementar dos determinantes, seguido de uma parte complementar relativa principalmente aos determinantes functionaes.* — Lisboa, 1889.

A collecção de obras portuguezas para o ensino das mathematicas vem de ser enriquecida com mais uma, devida ao illustre professor jubilado da Escola Polytechnica de Lisboa, sr. F. da Ponte Horta. O distincto geometra, que tanto enriqueceu as collecções da Academia das Sciencias de Lisboa com trabalhos importantes, quiz tambem concorrer para o aperfeiçoamento do ensino com o presente trabalho, do qual vamos dar uma noticia rapida.

No capitulo 1.º define o auctor os determinantes, faz conhecer a notação para os representar, e demonstra algumas propriedades que decorrem immediatamente da definição.

No capitulo 2.º vêem os processos para o desenvolvimento dos determinantes em ordem aos elementos de uma dada columna ou linha; em ordem aos determinantes menores do gráo p , comprehendidos em p columnas ou em p linhas; e finalmente em ordem aos productos binarios dos elementos de uma dada columna pelos elementos de uma dada linha.

Nos capitulos 3.º, 4.º e 5.º occupa-se o sr. Horta das operações sobre determinantes, quando é possível exprimir o resultado d'estas operações por meio de determinantes, considerando no primeiro d'estes capitulos a somma e subtracção, no segundo a multiplicação, no terceiro a extracção de raiz.

Passa em seguida o auctor ás applicações da theoria dos determinantes á Algebra e á Geometria. Assim no capitulo 6.º vem a applicação dos determinantes á resolução das equações do primeiro gráo; no capitulo 7.º vem a applicação dos determinantes a algumas questões de Geometria, taes como a determinação da mais curta distancia entre duas rectas, a determinação da área do triangulo sob differentes condições, a determinação do volume do tetraedro, etc.

Termina a obra por uma parte complementar, em que o auctor se occupa da differenciação dos determinantes e das propriedades mais importantes dos determinantes funcçionaes.

Dada assim uma idéa rápida dos assumptos de que tracta o sr. Horta no seu bello livro, devemos accrescentar que, pela boa escolha d'estes assumptos e pela clareza e elegancia com que são expostos, deve este livro ser da maior utilidade para o ensino da theoria dos determinantes nos nossos estabelecimentos de instrucção.

J. C. Medeiros. — *Processo geral de Clairaut para achar o valor approximado inicial das raizes da equação do 3.º grão no caso irreductivel (Instituto de Coimbra, t. xxxvi).*

N'este artigo interessante occupa-se o auctor da deducção do valor approximado inicial de uma das raizes da equação do 3.º grão, no caso irreductivel.

Sendo

$$x^3 - px - q = 0 \quad (p > 0, q > 0)$$

a equação dada, e pondo para brevidade

$$\frac{q}{p\sqrt{p}} = m,$$

os valores iniciaes achados são

$$\frac{2\sqrt{1+3m}}{3}\sqrt{p}$$

$$\frac{2 + \sqrt{1+3m} - 3\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right)^3}{3}\sqrt{p},$$

dos quaes o primeiro é maior e o segundo menor do que x . O erro correspondente é menor do que $0,001856 \dots \times \sqrt{p}$.

M. d'Ocagne. — Sur certaines courbes qu'on peut adjoindre aux courbes planes pour l'étude de leurs propriétés infinitésimales (Jornal da Academia das Sciencias de Lisboa, t. XI).

Dada uma curva plana c e dous pontos O e P no plano da curva, se por um ponto M variavel da curva tirarmos a recta OM , e se pelo ponto P tirarmos parallelas á normal e á tangente á curva c no ponto M , estas rectas cortam a recta OM em dous pontos H e H_1 que, quando M varia, descrevem duas curvas n e t , que o sr. d'Ocagne estuda na sua importante memoria.

Principia o auctor por deduzir algumas propriedades da curva n , e em seguida determina quaes são as curvas c que correspondem ao caso de n ser uma recta e ao caso de ser um circulo.

No caso de n ser uma recta $y = mx + n$, a equação differencial das curvas c correspondentes é homogenea, e integra-se pelos methodos conhecidos, que levam n'um caso á equação

$$\frac{(y - px)^p}{(y - qx)^q} = C,$$

da qual o sr. d'Ocagne tira alguns theoremas interessantes; n'outro caso, á equação

$$y - px = ce^{\frac{px}{y - px}};$$

e ainda n'um terceiro caso á equação

$$(y + ax)^2 + b^2 x^2 = ce^{\frac{a}{b} \arctan \frac{y + ax}{bx}}.$$

Se a curva n é uma circumferencia, a equação differencial das curvas c é ainda homogenea, mas a sua integração conduz a calculos muito complicados. Por isso o auctor limita-se a considerar dous casos particulares que levam a resultados interessantes.

Depois de estudar a curva n , passa o sr. d'Ocagne ao estudo da curva t , a respeito da qual resolve os mesmos problemas que para a curva n . Acha d'este modo que á recta cuja equação é

$$y = mx + n.$$

corresponde uma familia de curvas t , cuja equação é

$$y^p = C (y - mx)^q.$$

No caso de t ser um circulo, a integração da equação differencial das curvas c leva a calculos complicados, por isso o auctor limita-se a considerar o caso importante de o circulo t ter para centro o ponto O .

J. Peano. — *Arithmetices principia nova methodo exposita.* — *Augustae Taurinorum, 1889.*

N'este trabalho, do mais alto interesse, o sr. Peano reduz os principios da Arithmetica a um numero minimo de noções fundamentaes, e representa por signaes todas as idéas que occorrem n'estes principios. D'este modo, cada proposição é escripta simplesmente por meio de signaes, dos quaes uns pertencem á logica outros á arithmetica. De cada proposição, escripta com signaes, são deduzidas outras por processos comparaveis aos que se empregam em Algebra para resolver as equações.

J. Casey. — *Tratado de Geometria Analytica (traduzido do inglez para hespanhol por V. Balbin).* — *Buenos Aires, 1888.*

A originalidade, clareza e concisão com que está escripto o *Tratado de Geometria Analytica*, publicado, em lingua ingleza, em 1885 pelo sr. J. Casey, professor na Universidade de Dublin, fazem d'esta obra uma das mais recommendaveis para o ensino d'esta sciencia. O auctor, além de expôr as proposições que se acham geralmente nos tratados de geometria analytica, apresenta muitas proposições novas e tracta muitas questões por methodos completamente novos. Foi por isso escolhida pela Faculdade de sciencias physico-mathematicas da Universidade de Buenos-Ayres para servir de texto aos alumnos d'esta Faculdade, e foi para isso encarregado de a traduzir em hespanhol o distincto professor d'aquella Universidade sr. V. Balbin. Com esta traducção fez o sr.

Balbin um serviço importante ao ensino das mathematicas, concorrendo para augmentar o numero das pessoas que possam lêr a obra do sabio geometra inglez.

J. Schlotke. — Elementos de Estática graphica (traduzidos do allemão para hespanhol por V. Balbin).

É bem conhecida hoje a importancia que tem o estudo da *Estática graphica* para os que se dedicam ás profissões de engenheiro e architecto. Por isso a Universidade de Buenos-Ayres, seguindo o exemplo das principaes universidades e escolas technicas da Europa, a encorporou no plano dos seus cursos. O ensino d'ella foi confiado ao sr. V. Balbin, que adoptou para texto a importante obra de Schlotke, traduzindo-a para isso em lingua hespanhola. Esta obra contém, na verdade, uma exposição clarissima de todos os principios de *Estática graphica* indispensaveis para o engenheiro e uma serie de exemplos practicos relativos principalmente á arte das construcções.

V. Retali. — Ricerche sopra l'immaginario in Geometria (Mémoire della R. Accademia di Bologna, série IV, t. IX).

Deve-se, como é bem sabido, ao eminente geometra allemão Staudt a interpretação do imaginario em Geometria e a constituição da theoria das conicas tendo em attenção os imaginarios. Depois varios geometras se têm occupado do mesmo assumpto, sem todavia se preocuparem com a facilidade das construcções a que leva o methodo de Staudt. No seu interessante trabalho o sr. Retali considera alguns problemas do 1.º e 2.º grão em que intervêm os imaginarios, e dá meios para simplificar as construcções a que leva o methodo de Staudt quando se applica a estes problemas. Baseia-se, para conseguir este fim, em resultados obtidos nas duas importantes memorias sobre as conicas, por elle anteriormente publicadas:

Osservazioni analitico-geometriche sulla proiezione immaginaria

delle curve del second'ordine (Memorie della R. Accademia di Bologna, série IV, t. VII);

Sulle coniche conjugate (Item, t. VI).

A. Rebière. — *Mathématiques et mathématiciens.* — Paris, 1889.

Na primeira parte d'este livro interessante o auctor reune uma serie de conceitos, devidos aos mathematicos e philosophos mais eminentes, relativamente aos principios, aos methodos, á classificação, ao ensino e á historia das mathematicas.

Na segunda parte expõe o auctor algumas anedoctas relativas a mathematicos celebres, que deixam vêr o seu caracter, a sua vida intima, as suas opiniões, etc.

Na terceira parte vem alguns paradoxos e alguns resultados curiosos a que levam as mathematicas.

Finalmente na quarta parte dá noticia de alguns problemas interessantes de que se têm occupado os mathematicos.

A. Tartinville. — *Cours d'Arithmétique.* — Paris, 1889.

Vamos dar uma rapida noticia d'esta excellente obra.

N'uma introdução ao livro faz vêr primeiramente o auctor como a medida do cumprimento de uma porção de recta leva á consideração dos numeros inteiros, dos numeros fraccionarios e dos numeros incommensuraveis.

Em seguida vem o estudo dos numeros inteiros. A este respeito occupa-se o auctor das operações sobre numeros inteiros, dos caracteres de divisibilidade, da theoria dos numeros primos, etc.

A segunda parte do livro é destinada ao estudo dos numeros fraccionarios.

A terceira parte é destinada ao estudo dos numeros incommensuraveis, que o auctor expõe seguindo o methodo de Dedekind. Principia por definir de um modo claro e preciso o que se deve entender por numero incommensuravel, e em seguida expõe desenvolvimento a doutrina relativa ás operações feitas com estes numeros.

Na quarta parte vem o calculo dos radicaes, a doutrina das razões e proporções, e finalmente o calculo dos numeros approximados.

Terminando esta breve noticia devemos dizer que a riqueza das doutrinas, o rigor e clareza com que são tractadas e a boa ordem com que estão dispostas tornam este livro muito recommendavel.

Gino Loria. — *L'opera scientifica di Ettore Caporali (Giornale de Battaglini, 1889).*

O fim do sr. Loria, publicando o seu interessante artigo, é fazer conhecer o logar que occupa na historia da Geometria moderna o fallecido professor da Universidade de Napoles, E. Caporali. Refere-se o auctor aos trabalhos de Caporali sobre as curvas de 3.^a ordem, sobre as de 4.^a ordem, sobre as de ordem n , sobre as superficies de 3.^a ordem, sobre a representação das superficies sobre um plano, sobre a geometria da recta, sobre a geometria a quatro dimensões, sobre a applicação geometrica da doutrina das fórmulas algebricas, etc. Para fazer vêr a importancia dos trabalhos de Caporali sobre cada um d'estes assumptos, o sr. Loria dá noticia rapida d'aquelles que immediatamente os precederam e d'aquelles que se lhes seguiram.

F. Folie e L. Niesten. — *Nouveaux résultats relatifs à la détermination des constantes de la nutation diurne (Bulletins de l'Académie de Belgique, 3.^e série, t. xvii).*

A. Bassani. — *Sulle curve $r^m \cos m\theta = a^m$ (Giornale de Battaglini, t. xxiv).*

São muitos os trabalhos que têm sido publicados até hoje a respeito das curvas cuja equação em coordenadas polares é $r^m \cos m\theta = a^m$, a qual comprehende como caso particular muitas curvas notaveis. Na interessante memoria que o sr. Bassani de-

dica a estas curvas, reune as principaes propriedades anteriormente conhecidas e outras por elle descobertas.

A. Bassani. — *Nota di Cinematica (Giornale de Battaglini, t. XXIII).*

—— *Curve piane derivate (Item, t. XXIV).*

—— *Sopra un problema di Analisi infinitesimale delle curve piane (Item).*

—— *Una formola di Analisi (Item, t. XXV).*

S. Pincherle. — *I sistemi ricorrenti di prim'ordine e di secondo grado (Rendiconti dei Lincei, 1889).*

—— *Sur le développement d'une fonction analytique en série de polynômes (Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 1888).*

Annales de la Licence ès sciences (Session de juillet 1888), Paris, 1888.

Annales de la Licence ès sciences (Session de novembre 1888), Paris, 1889.

Gino Loria. — *Nota sur una classe di determinanti (Giornale de Battaglini, t. XXVI).*

O objecto d'esta nota é o calculo dos determinantes de ordem n formados com n potencias, de expoente inteiro, de n indeterminadas.

Gino Loria. — *Sulle curve razionali normali in uno spazio a n dimensioni (Giornale de Battaglini, t. XXVI).*

—— *Intorno alle curve razionali d'ordine n dello spazio a $n-1$ dimensioni (Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, t. II).*

G. B. Guccia. — *Sulla classe e sul numero dei flessi di una forma*

NOTE SUR UN POINT DE LA THÉORIE DES SÉRIES (1)

PAR

M. AUGUSTE GUTZMER

Dans ses *Remarques sur divers articles concernant la théorie des séries* (2), M. Cesàro s'occupe de telles séries où le quotient de deux termes consécutifs peut devenir aussi grand que l'on voudra, bien que la série soit convergente. Peut-être n'est-il pas sans intérêt de constater qu'on connaît depuis longtemps des séries jouissant de cette propriété. Ainsi M. Stern dit, dans une Note de son *Lehrbuch der algebraischen Analysis* (3): *Wenn die Glieder theils zunehmen, theils abnehmen, lassen sie sich, wie sich von selbst versteht, bei der grossen Mannigfaltigkeit der hier möglichen Fälle, eine allgemeine Regel geben.* Cette propriété remarquable prouve que M. Stern a en vue, en effet, des séries jouissant de la dite propriété; mais il ne donne aucun exemple.

De même M. Eugène Catalan a considéré ces séries et il a consacré, dans son *Traité élémentaire des séries* (4), un paragraphe à *des séries à termes croissants et décroissants*. Dans les n.ºs 40 et 41 de son Livre il dit: Jusqu'à présent, nous avons supposé que les termes de la série proposée décroissent indéfiniment, du moins à partir de l'un deux: et nous avons indiqué divers règles au moyen desquelles on peut, en tout les cas, reconnaître la convergence ou divergence. Mais il peut arriver que le terme général u_n , tout en ayant pour limite zéro, soit exprimé par une fon-

(1) Extrahimos este artigo dos *Nouvelles Annales des Mathématiques* (3.ª série, t. VIII, p. 22), que se refere a assumptos tractados n'este jornal.

(2) *Nouvelles Annales*, 3.ª série, t. VII, p. 401 à 407.— *Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas*, t. IX, p. 3 e seguintes.

(3) Leipzig, 1860, p. 91.

(4) Paris, 1860, p. 27.

ction de n tantôt croissante et tantôt décroissante. Il paraît très difficile de trouver des règles simples, relatives à ce cas singulier. Nous nous contenterons d'enoncer la proposition suivante:

THÉORÈME XV. — Si les quantités

$$u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$$

en nombre infini, peuvent former des groupes

$$g_1 = u_1 + u_2 + \dots + u_p$$

$$g_2 = u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_q$$

$$g_3 = u_{q+1} + u_{q+2} + \dots + u_r$$

.....

que diminuent indéfiniment (en valeur absolue); les séries

$$(U) \quad u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

$$(G) \quad g_1 + g_2 + \dots + g_n + \dots$$

sont en même temps convergentes, divergentes ou indéterminées. De plus, si elles sont convergentes, elles ont même somme.

M. Catalan n'a pas énoncé le théorème démontré par M. E. Weyr (1). Mais il en a donné, dans le n.º 42 de son *Traité*, trois exemples. En premier lieu, il considère la série

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{8^2} + \dots$$

dont le terme général est

$$u_n = \frac{1}{(n+1 + \cos n\pi)^2}$$

(1) *Jornal de Ciencias Mathematicas e Astronomicas*, t. VIII, p. 97.

En posant généralement

$$g_i = \frac{1}{(2i-1)^2} + \frac{1}{(2i+1)^2},$$

M. Catalan conclut que

$$g_i < \frac{1}{2(i-1)^2};$$

et par conséquent la série (G) est convergente et, d'après le théorème cité ci-dessus, de même la série (U). En second lieu, M. Catalan démontre, par un groupement analogue, la divergence de la série dont le terme général est

$$u_n = \frac{1}{n+1+\cos n\pi},$$

et, en dernier lieu, il démontre, de la même manière, la convergence de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sin \frac{n\pi}{2} - n^2 \cos \frac{n\pi}{2}}.$$

Cette remarque littéraire montre qu'on a déjà connu depuis longtemps des séries jouissant de la dite propriété; mais il restait dans la théorie de ces séries une lacune, remplie maintenant par les nouvelles recherches provoquées par les deux articles de M. Lerch (1). Quant à ces derniers, ajoutons quelques remarques tirées d'une lettre que M. Lerch m'a adressée.

Dans les *Contributions à la théorie des séries infinies*, M. Lerch a employé la notion, un peu généralisée, du dérivée d'un ensemble de points (*Punktmenge*), dans le sens de M. G. Cantor, pour les éléments de la théorie des séries. En particulier, il a considéré

(1) *Contributions à la théorie des séries infinies* (*Comptes rendus des séances de la Société royale des Sciences de Bohême*, Prague, 13 mars 1885). — *Remarque sur la théorie des séries* (*Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas*, t. VII, p. 79).

l'ensemble caractérisé par la formule $\frac{u_{v+1}}{u_v}$, où les u_v sont les termes positifs de la série infinie

$$U = u_0 + u_1 + u_2 + \dots$$

Il a reconnu alors que la convergence de la série u n'a pas pour conséquence l'existence d'une limite de $\frac{u_{v+1}}{u_v}$ (pour v infini), mais que ce quotient peut surpasser même toute quantité donnée. Il a montré cela pour quelques cas particuliers qui sont de la forme

$$(1) \quad a_0 + b_0 + a_1 + b_1 + a_2 + b_2 \dots,$$

où $\sum a_v$ et $\sum b_v$ sont des séries convergentes; les exemples *plus simples* de M. Cesàro sont du même type.

M. Lerch m'a écrit qu'il n'aurait pas publié ces séries-là s'il n'avait pas eu, pour son but, un autre exemple. Pour démontrer le théorème que la série $\sum a_v x^{v-1}$ est convergente dans la même région que la série $\sum a_v x^v$, on s'appuie sur la remarque (1) que le quotient de deux termes consécutifs, du moins à partir de l'un d'eux, *doit* être inférieur à l'unité, ce qui n'est vrai. Mais, si l'on avait pas d'autres séries que celles de la forme (1), on s'appliquerai seulement la démonstration à chaque'un des séries régulières

$$a_0 + a_1 x^2 + a_2 x^4 + \dots$$

$$b_0 x + b_1 x^3 + b_2 x^5 + \dots$$

pour conclure de la convergence de la série

$$a_0 + b_0 x + a_1 x^2 + b_1 x^3 + a_2 x^4 + b_2 x^5 + \dots$$

(1) Voir, par exemple, Harnack, *Die Elemente der Differential und Integralrechnung*, Leipzig, 1881.

celle de la dérivée. C'est pourquoi M. Lerch a construit la série

$$(2) \quad \sum_n \delta^{n - (\log n)} g^{\frac{1}{2}(\log n)[1 + (\log n)]} \quad (0 < \delta < 1 < g)$$

où $(\log n)$ désigne la partie entière du logarithme vulgaire de n ou le nombre des chiffres de n ; et c'est pourquoi celle-ci me semble être plus remarquable que celle de la forme (1).

En outre, les séries de la forme (1) et les séries analogues de la forme

$$a_0^{(1)} + a_0^{(2)} + \dots + a_0^{(r)} + a_1^{(1)} + a_1^{(2)} + \dots + a_1^{(r)} \\ + a_v^{(1)} + a_v^{(2)} + \dots + a_v^{(r)}$$

+

ont la propriété que, si le quotient de deux termes consécutifs peut devenir infiniment grand, il doit aussi devenir nécessairement infiniment petit. Cette circonstance ne s'offre pas dans la série (2) de M. Lerch.

La convergence de la série (2) n'exige pas, en effet, la condition

$$g < \frac{1}{\delta^2}.$$

Pour avoir une exemple d'une série irrégulière, il suffit de prendre

$$u_n = \delta^{n - (n)} g^{(n)^2} \quad (0 < \delta < 1 < g),$$

où (n) est le nombre des chiffres de n . Mais, si n est de la forme $10^v - 1$, on aura $\frac{u_{n+1}}{u_n} = g^{2(n)+1}$; par conséquent, le quotient peut surpasser toute quantité donnée.

~~~~~



SUR LES LIGNES SPHÉRIQUES

PAR

GEMINIANO PIRONDINI

(Professeur à l'Institut thecnique de Parme)

§. 1.

*Formules générales — Applications.* Soit L une ligne placée sur une sphère dont le rayon est  $k$ ; désignons par  $s$ ,  $\rho$ ,  $\rho_g$ ,  $r$ ,  $R$  respectivement l'arc, le rayon de courbure absolue, le rayon de courbure géodésique, le rayon de torsion et le rayon sphérique de L. On sait que les quantités que l'on vient de considérer sont liées entre elles par les relations

$$\frac{1}{\rho} = \sqrt{\frac{1}{k^2} + \frac{1}{\rho_g^2}}, \quad k^2 = \rho^2 + r^2 \left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2, \quad \rho_g = k \cdot \text{tang} \left(\frac{R}{k}\right), \quad (1)$$

d'ou il suit «une ligne sphérique est connue de forme lorsqu'on donne un de ses rayons  $\rho$ ,  $\rho_g$ ,  $r$ ,  $R$  en fonction de l'arc.»

*Exemples.* — Si L est une hélice coupant les génératrices rectilignes du cylindre sous l'angle constant  $i$ , il doit être

$$\rho_g = \frac{k \sqrt{k^2 \text{tang}^2 i - s^2}}{s}.$$

Si L est une lignes dont le rayon de torsion  $r$  est constant, on a

$$\rho_g = k \cdot \text{tang} \left(a + \frac{s}{r}\right),$$

$a$  étant une constante arbitraire.

Si l'on remarque que des relations (1) il dérive

$$R = k \cdot \text{arc} \cdot \text{tang} \frac{\rho g'}{k},$$

la dernière égalité nous donne

$$R = k \left( \frac{s}{r} + a \right).$$

Donc « toute ligne sphérique dont le rayon sphérique est une fonction linéaire de l'arc, est une ligne à torsion constante. »

## §. 2.

*Développée sphérique.* — La ligne sphérique  $L_1$  enveloppée par les grands cercles perpendiculaires à une ligne sphérique donnée  $L$ , est la développée sphérique de  $L$ . Soient  $A$  et  $B$  deux points infiniment rapprochés de  $L$  et  $A_1, B_1$  les points correspondants de  $L_1$ ; si l'on désigne par  $d\varepsilon_1$  l'angle de contingence géodésique de  $L_1$ , on a

$$ds = AB = k \sin \left( \frac{AA_1}{k} \right) d\varepsilon_1 = k \sin \left( \frac{R}{k} \right) d\varepsilon_1,$$

d'où

$$\frac{1}{d\varepsilon_1} = \frac{k \sin \frac{R}{k}}{ds}.$$

D'ailleurs  $ds_1 = A_1 B_1 = dR$ , par conséquent

$$(2) \quad \rho_{1g} = \frac{ds_1}{d\varepsilon_1} = k \sin \frac{R}{k} \cdot \frac{dR}{ds};$$

et si l'on a égard aux formules (1)

$$(2') \quad \rho_{1g} = k^3 \frac{\rho g}{(k^2 + \rho^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{d\rho g}{ds} = -k^3 \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{\sqrt{k^2 + \rho^2}} \right).$$

On peut donner une interprétation géométrique de la formule (2'); en effet les (1) nous donnent

$$\frac{1}{\sqrt{k^2 + \rho_g^2}} = \frac{1}{k} \frac{\rho}{\rho_g} = \frac{1}{k} \cos \theta,$$

$\theta$  étant l'angle sous lequel le plan osculateur de  $L$  coupe la sphère; on a donc

$$(3) \quad \rho_{1g} = -k^2 \frac{d \cos \theta}{ds}.$$

Par exemple, lorsque  $\rho_{1g} = \text{const} = a$ , il vient

$$\frac{d \cos \theta}{ds} = -\frac{a}{k^2}, \quad \text{d'où} \quad \cos \theta = b - \frac{a}{k^2} s;$$

la ligne  $L_1$  est un petit cercle de la sphère et sa développante  $L$  est une hélice sphérique.

Donc «la ligne sphérique qui jouit de la propriété que le cosinus de l'angle sous lequel le plan osculateur coupe la sphère est une fonction linéaire de l'arc, est l'hélice sphérique.»

Si l'on désigne par  $i$  l'inclinaison de  $L$  sur la droite rectifiante, les (1) nous donnent

$$\cot i = \frac{\rho}{r} = \frac{k^2 \rho_g \rho_{1g}}{(k^2 + \rho_g^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\rho_{1g}}{k};$$

par conséquent

$$\rho_{1g} = k \cot i$$

est une autre expression de  $\rho_{1g}$ .

Si l'on suppose  $i$  constant, la ligne  $L$  est une hélice et il résulte  $\rho_{1g}$  constant; donc «une hélice sphérique est toujours une développante d'un petit cercle et vice versa.»

Si l'on suppose  $\frac{\rho}{r} = as + b$ ,  $a$  et  $b$  étant des constantes, la ligne  $L$  est une géodésique d'un cône (\*), et il résulte

$$\rho_{1g} = k(as + b).$$

(\*) Studi geometrici relativi specialmente alle superficie gobbe—Journal de M. Battaglini, 1883.

Donc « si le rayon de courbure géodésique de la développée sphérique  $L_1$  d'une ligne  $L$  est une fonction linéaire de l'arc de  $L$ , cette ligne  $L$  est sur la sphère une géodésique d'un cône, et vice versé. »

Si l'on pose la condition que l'arc  $s_1$  de  $L_1$  soit proportionnel à l'arc de  $L$ , on a

$$ads = ds_1 = dR, \quad \text{d'où il suit} \quad R = as + b.$$

Donc « lorsque l'arc d'une ligne sphérique est proportionnel à l'arc de sa développée sphérique, la ligne est à torsion constante et vice versé. »

Si l'on remarque que  $ds_1 = dR = k \cdot d \operatorname{arc} \operatorname{tang} \left( \frac{\rho_g}{k} \right)$ , on obtient par intégration

$$(4) \quad s_1 + a = k \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tang} \left( \frac{\rho_g}{k} \right).$$

On peut, par le moyen des formules (2'), (4) déterminer la développée sphérique d'une ligne donnée.

*Exemple.* — Soit  $\rho_g = ms$  l'équation de la ligne  $L$ ; on a

$$s = \frac{k}{m} \operatorname{tang} \left( \frac{s_1 + a}{k} \right)$$

et la ligne  $L_1$  a pour équation

$$\rho_{1g} = mk \cdot \sin \left( \frac{s_1 + a}{k} \right) \cdot \cos^2 \left( \frac{s_1 + a}{k} \right).$$

### §. 3.

*Courbes sphériques parallèles.* — Les lignes sphériques  $L$ ,  $L_1$  sont parallèles lorsqu'entre les rayons sphériques  $R$ ,  $R_1$  de ces lignes on a la relation

$$R_1 = R + m,$$

$m$  étant une constante. Soient  $A$  et  $A_1$  deux points correspondants

des lignes  $L, L_1$  et  $a, a_1$  leurs projections sur le diamètre de la sphère qui passe au centre de courbure sphérique des lignes  $L, L_1$ .  
On a

$$Aa = k \sin \frac{R}{k}; \quad A_1 a_1 = k \sin \frac{R_1}{k} = k \sin \frac{R+m}{k};$$

$$ds_1 = \frac{A_1 a_1 ds}{Aa} = \frac{\sin \left( \frac{R+m}{k} \right)}{\sin \left( \frac{R}{k} \right)} ds,$$

et conséquemment

$$ds_1 = \left( \cos \frac{m}{k} + \sin \frac{m}{k} \cot \frac{R}{k} \right) ds,$$

d'où par intégration

$$s_1 + a = s \cdot \cos \frac{m}{k} + k \cdot \sin \frac{m}{k} \int \frac{ds}{\rho_g},$$

$a$  étant une constante. On a d'ailleurs

$$\rho_{1g} = k \operatorname{tang} \frac{R_1}{k} = \frac{k \operatorname{tang} \frac{R}{k} + k \operatorname{tang} \frac{m}{k}}{\frac{1}{k} \left( k - k \operatorname{tang} \frac{m}{k} \operatorname{tang} \frac{R}{k} \right)},$$

c'est-à-dire

$$(6) \quad \rho_{1g} = \frac{k \left( \rho_g + k \operatorname{tang} \frac{m}{k} \right)}{k - \operatorname{tang} \frac{m}{k} \cdot \rho_g}.$$

On peut, moyennant les formules (5), (6) déterminer la ligne sphérique parallèle à une ligne donnée, lorsqu'on donne la distance constante de ces lignes.

*Courbes sphériques polaires.* — Lorsque  $m = k \frac{\pi}{2}$ , les deux li-

gnes parallèles  $L, L_1$  sont polaires et les formules (5) (6) deviennent

$$(5') \quad s_1 + a = k \int \frac{ds}{\rho_g}, \quad (6') \quad \rho_{1g} = -\frac{k^2}{\rho_g},$$

*Exemples.* — Si l'on suppose  $\rho_g = ms + n$ , les (5'), (6') nous donnent

$$s = \frac{ce^{\frac{ms_1}{k}} - n}{m}, \quad \rho_{1g} = -\frac{k^2}{c} e^{-\frac{ms_1}{k}};$$

telle est l'équation de la ligne polaire de la courbe sphérique donnée.

Si la ligne donnée est à torsion constante, on a

$$\rho_g = k \operatorname{tang} \left( a + \frac{s}{r} \right), \quad \text{d'où} \quad s = r \cdot \operatorname{arc} \sin (be^{\frac{s_1}{r}}) - ar$$

et l'équation de la ligne polaire est

$$\rho_{1g} = -\frac{k}{b} \sqrt{e^{-\frac{2s_1}{r}} - b^2}.$$

#### §. 4.

Deux lignes sphériques polaires  $L, L_0$  peuvent se considérer comme les indicatrices sphériques respectivement des tangentes et des binormales d'une même courbe de l'espace. L'indicatrice sphérique  $L_1$  des normales principales de cette courbe est le lieu des extrémités des quadrants géodésiques tangents à la ligne  $L$ ; allons déterminer la ligne  $L_1$ .

Soient  $L_2$  la développée sphérique de  $L$  et considérons les points correspondants  $A, A_1, A_2$  sur les trois lignes  $L, L_1, L_2$ ; le point  $A_1$  est le pôle de l'arc  $AA_2$  et conséquemment l'arc de grand cercle  $A_1A_2$  est un quadrant perpendiculaire à  $L_2$ ; les lignes  $L_1, L_2$  sont donc polaires.

Pour la ligne  $L_2$ , développée de  $L$ , on a

$$\rho_{2g} = k^3 \frac{\rho_g \rho'_g}{(k^2 + \rho_g^2)^{\frac{3}{2}}} = -k^3 \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{\sqrt{k^2 + \rho_g^2}} \right); \quad ds_2 = \frac{k^2 \rho'_g}{k^2 + \rho_g^2} ds.$$

Pour la ligne  $L_1$ , polaire de  $L_2$ , on a

$$\rho_{1g} = -\frac{k^2}{\rho_{2g}}; \quad ds_1 = \frac{k ds_2}{\rho_{2g}},$$

et si l'on élimine, entre ces équations, les quantités  $\rho_{2g}$ ,  $ds_2$  on obtient

$$(7) \quad \rho_{1g} = -\frac{(k^2 + \rho_g^2)^{\frac{3}{2}}}{k \rho_g \rho'_g} = \frac{1}{k \frac{ds}{d} \left( \frac{1}{\sqrt{k^2 + \rho_g^2}} \right)},$$

$$(8) \quad s_1 + \text{const} = \int \frac{\sqrt{k^2 + \rho_g^2}}{\rho_g} ds.$$

Les (7), (8) servent à la détermination de la ligne sphérique  $L_1$  lieu des extrémités des quadrants géodésiques tangents à une ligne sphérique donnée  $L$ .

*Exemples.* — Lorsque  $L$  est un hélice,  $\rho_g = \frac{k}{s} \sqrt{k^2 \text{tang}^2 i - s^2}$  et conséquemment

$$\rho_{1g} = k \text{tang} i = \text{const.}$$

Donc «lorsque la ligne  $L$  est un hélice sphérique, la  $L_1$  est un petit cercle.»

Si  $\rho_g$  est constant, on a  $\rho_{1g} = \infty$ , c'est-à-dire «lorsque la ligne  $L$  est un petit cercle, la ligne  $L_1$  est un grand cercle.»

§. 5.

**THÉORÈME.** — «La forme d'une ligne sphérique est connue lorsqu'on a le rayon vecteur sphérique exprimé en fonction de l'arc de la ligne.»

Soit  $L$  une ligne sphérique quelconque,  $H$  le rayon vecteur sphé-

rique issu d'un point A de la sphère,  $L_1$  la ligne que l'on obtient par la projection de L du point A sur le plan tangent à la sphère au point B antipode de A.

Si M,  $M_1$  sont deux points correspondants des lignes L,  $L_1$ , on a

$$AM \cdot AM_1 = AB^2;$$

et puisque

$$AM = 2k \sin \frac{H}{2k}, \quad AM_1 = \sqrt{4k^2 + H_1^2},$$

$H_1$  étant le rayon vecteur  $BM_1$  de la ligne plane  $L_1$ , nous avons la relation suivante entre les rayons vecteurs H,  $H_1$

$$(9) \quad \sqrt{4k^2 + H_1^2} \cdot \sin \frac{H}{2k} = 2k.$$

D'ailleurs la ligne plane  $L_1$  est l'inverse de L par rapport au centre A et à la sphère donnée; on a donc

$$(10) \quad \frac{ds_1}{ds} = \frac{AM^2}{AB^2} = \sin^2 \frac{H}{2k},$$

$$(11) \quad \frac{ds_1}{ds} = \frac{AM_1^2}{AB^2} = \frac{4k^2 + H_1^2}{4k^2},$$

$ds$  et  $ds_1$  étant l'arc élémentaire des lignes L,  $L_1$ .

Si l'on suppose que H soit donné en fonction de s, les équations (9) (10) donnent  $H_1$  en fonction de  $s_1$ ; en effet on déduit de la (9)

$$(12) \quad H_1 = 2k \cdot \cot \frac{H}{2k}$$

et la (10) nous donne par intégration

$$(13) \quad s_1 + \text{const} = \int \frac{ds}{\sin^2 \frac{H}{2k}}.$$



Si l'on effectue l'intégration (13), il vient

$$s_1 = f(s), \quad \text{d'où} \quad s = \varphi(s_1),$$

$\varphi$  étant le symbole d'une fonction convenable; la (12) devient alors

$$H_1 = \psi(s) = \psi[\varphi(s_1)] = \theta(s_1),$$

ce qui donne  $H_1$  exprimé par  $s_1$ ; cela suffit à la détermination de la ligne plane  $L_1$  (Voir le §. VI), ce qui entraîne la détermination de  $L$ .

*Exemples.* — Déterminer la ligne sphérique  $H = as$ ,  $a$  étant une constante.

Dans ce cas

$$H_1 = 2k \cot\left(\frac{a}{2k}s\right), \quad s_1 + \text{const} = -\frac{2k}{a} \cot\left(\frac{a}{2k}s\right),$$

ce qui nous donne

$$as_1 + b = -2k \cot\left(\frac{a}{2k}s\right).$$

Donc

$$H_1 = -(as_1 + b),$$

équations d'une spirale logarithmique dont le pôle est à l'origine des rayons vecteurs  $H_1$ ; la ligne sphérique  $L$ , inverse de  $L_1$ , est donc une trajectoire isogonale des lignes méridiennes issues du point A.

Donc «l'équation  $H = as$  entre le rayon vecteur sphérique  $H$  et l'arc  $s$  d'une ligne sphérique caractérise une loxodromie.»

Si l'on calcule par la relation  $H = as$ , la longueur de  $s$  correspondante à  $H = k\pi$ , on a  $s = \frac{k\pi}{a}$ . C'est l'expression de la longueur totale de la loxodromie sphérique.

Si la ligne sphérique  $L$  est donnée par l'équation

$$H = 2k \arcsin(as + b),$$

on a

$$s_1 + \text{const} = -\frac{1}{a} \frac{1}{as + b}, \quad \text{d'où} \quad as + b = -\frac{1}{as_1 + c},$$

$c$  étant une constante. La courbe plane  $L_1$  est donc représentée par l'équation

$$H_1 = 2k \cot \frac{R}{2k} = -2k \sqrt{(as_1 + c)^2 - 1}.$$

Les formules (9), (11) servent à la détermination de la ligne sphérique  $L$  lorsqu'on connaît la courbe plane  $L_1$ ; en effet ces équations nous donnent

$$(12') \quad H = 2k \operatorname{arc} . \sin \left( \frac{2k}{\sqrt{4k^2 + H_1^2}} \right);$$

$$(13') \quad s + \text{const} = 4k^2 \int \frac{ds_1}{4k^2 + H_1^2},$$

et si l'on suppose d'avoir effectué la quadrature (13'), on a

$$s = f(s_1), \quad \text{d'où} \quad s_1 = \varphi(s),$$

$\varphi$  étant le symbole d'une fonction convenable. La (12') nous donne alors

$$H = \psi(s_1) = \psi[\varphi(s)] = \theta(s);$$

c'est l'équation de  $L$ .

*Exemple.* — La ligne  $L_1$  soit la développante de cercle  $R_1 = \sqrt{as_1}$ ; nous avons

$$s + \text{const} = \frac{4k^2}{a} \log(as_1 + 4k^2), \quad \text{d'où} \quad \sqrt{as_1 + 4k^2} = ce^{\frac{as}{8k^2}},$$

$c$  étant une constante quelconque.

La ligne sphérique  $L$ , inverse de la ligne plane considérée, est représentée par l'équation

$$H = 2k . \operatorname{arc} . \sin \left( \frac{2k}{c} . e^{-\frac{a}{8k^2} . s} \right).$$

§. 6.

Les coordonnées rectangulaires d'un point quelconque d'une ligne sphérique s'expriment en fonction de l'arc  $s$  par les équations

$$x = D \cos \int \sqrt{\frac{k^2(1-D'^2) - D^2}{k^2 - D^2}} \cdot \frac{ds}{D},$$

$$y = D \cdot \sin \int \sqrt{\frac{k^2(1-D'^2) - D^2}{k^2 - D^2}} \cdot \frac{ds}{D},$$

$$z = \sqrt{k^2 - D^2},$$

$D$  étant la distance entre les points de la ligne et l'axe de la sphère (axe coordonné des  $z$ ) et  $k$  le rayon de la sphère.

Si l'on remarque que la courbure  $\frac{1}{\rho}$  de la ligne a pour expression

$$\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2},$$

on a

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{(k^2 - D^2) \{ DD''(k^2 - D^2) - k^2(1 - D'^2) + D^2 \}^2 + D^2 \{ DD''(k^2 - D^2) + k^2 D'^2 \}^2}{D^2 (k^2 - D^2)^3} + \frac{1}{D^2} \left\{ \frac{d}{ds} \cdot D \sqrt{\frac{k^2(1 - D'^2) - D^2}{k^2 - D^2}} \right\}^2$$

et cette formule démontre le théorème «une ligne sphérique est déterminée lorsqu'on connaît la distance entre ses points et un diamètre de la sphère, exprimé en fonction de l'arc.»

Si dans la formule que l'on vient d'écrire on passe à la limite pour  $k = \infty$ , on obtient l'autre formule

$$(14) \quad \rho = \frac{D\sqrt{1 - D'^2}}{DD'' + D'^2 - 1},$$

qui donne le rayon de courbure d'une ligne plane lorsqu'on a le rayon vecteur  $D$  exprimé en fonction de l'arc.

*Application.* — Nous allons déterminer les courbes planes remarquables de la famille caractérisée par l'équation

$$D \sqrt{as^2 + 2bs + c}.$$

Dans ce cas

$$D' = \frac{as + b}{(as^2 + 2bs + c)^{\frac{3}{2}}}, \quad D'' = \frac{ac - b^2}{(as^2 + 2bs + c)^{\frac{5}{2}}},$$

et conséquemment

$$\rho = \sqrt{\frac{a}{1-a}s^2 + \frac{2b}{1-a}s + \frac{c-b^2}{(1-a)^2}}.$$

Pour que cette équation représente une courbe cycloïdale (épicycloïde, cycloïde, ipocycloïde) il faut que le coefficient de  $s^2$  soit négatif; si  $a$  est positif, cette condition est remplie lorsque  $a > 1$ ; si au contraire  $a$  est négatif, la condition précédente est toujours remplie.

I.<sup>o</sup> soit  $a > 1$ . — La courbe représentée par la dernière équation est une épicycloïde, une cycloïde, une ipocycloïde selon que la quantité  $\frac{a}{1-a}$  est  $< 1$ ,  $= 1$ ,  $> 1$ ; mais les conditions  $\frac{a}{1-a} < 1$ ,  $\frac{a}{1-a} = 1$  donnent respectivement  $a < \frac{1}{2}$ ,  $a = \frac{1}{2}$  qui sont en opposition avec l'autre  $a > 1$ ; la condition  $\frac{a}{1-a} > 1$  donne  $a > \frac{1}{2}$ , qui est contenue dans l'autre condition  $a > 1$ . Dans le cas  $a > 1$  on a donc toujours l'ipocycloïde.

II.<sup>o</sup> soit  $a < 0$ . — La quantité  $\frac{a}{1-a}$  a une valeur numérique plus petite que 1 et la courbe est une épicycloïde.

Lorsque  $a = 1$ , il résulte  $\rho = \infty$  et la ligne est une droite.

Lorsque  $a = 0$ , il résulte

$$\rho = \sqrt{2bs + (c - b^2)},$$

équation d'une développante de cercle.

La ligne est une spirale logarithmique si l'expression de  $\varphi$  se réduit à la forme  $ms + n$ ; cela a lieu lorsque  $b^2 - ac = 0$ .

Donc «entre les lignes planes représentées par l'équation

$$D = \sqrt{as^2 + 2bs + c}$$

entre le rayon vecteur  $D$  et l'arc  $s$ , on trouve:

- a) l'ipocicloïde lorsque  $a$  est positif et  $> 1$ ,
- b) l'épicicloïde lorsque  $a$  est négatif,
- c) la droite lorsque  $a = 1$ ,
- d) la développante de cercle lorsque  $a = 0$ ,
- e) la spirale logarithmique lorsque  $b^2 - ac = 0$ .

*Exemple.* — Comme exemple de la détermination d'une ligne plane moyennant une relation entre le rayon vecteur et l'arc, nous allons résoudre le problème suivant «déterminer l'hélice qui, dans une rotation autour d'un axe parallèle aux génératrices du cylindre qui la contient, forme sur la surface engendrée un système de lignes parallèles.»

Il faut exprimer que les trajectoires orthogonales des lignes génératrices sont des géodesiques.

Les coordonnées d'un point quelconque d'une ligne  $L$  de l'espace sont exprimables en fonction de l'arc  $s$  de la projection  $l$  de la ligne sur le plan coordonné  $z = 0$  de la manière suivante:

$$x = D \cos \int \frac{\sqrt{1 - D'^2}}{D} ds, \quad y = D \cdot \sin \int \frac{\sqrt{1 - D'^2}}{D} ds, \quad z = \varphi(s),$$

$D$  étant le rayon vecteur de  $l$  et  $\varphi(s)$  une fonction arbitraire de  $s$ .

Si l'on fait tourner cette ligne autour de l'axe des  $z$ , les coordonnées d'un point quelconque de la surface engendrée sont

$$X = x \cos v - y \sin v, \quad Y = x \cdot \sin v + y \cos v, \quad Z = z,$$

$v$  étant un paramètre indépendant de  $s$ . On en déduit

$$E = \sum \left( \frac{dX}{ds} \right)^2 = 1 + \varphi'^2; \quad F = \sum \frac{dX}{ds} \frac{dX}{dv} = D \sqrt{1 - D'^2};$$

$$G = \sum \left( \frac{dX}{dv} \right)^2 = D^2,$$

et les quantités E, F, G doivent être liées entre elles par la relation

$$\sqrt{\frac{EG - F^2}{E}} = \text{fonction de } v.$$

Mais dans notre cas E, F, G sont indépendants de  $v$ ; donc la fonction de  $v$  de l'égalité précédente se réduit à une constante  $a$  et la relation que l'on vient d'écrire nous donne

$$\varphi(s) = z = \int \sqrt{\frac{a^2 - D^2 D'^2}{D^2 - a^2}} ds.$$

D'ailleurs L est une hélice, et conséquemment  $z = s \cdot \cot i$ ,  $i$  étant l'inclinaison constante de la ligne sur les génératrices du cylindre; en comparant les deux expressions de  $z$ , on a

$$\sin i \frac{DD'}{\sqrt{a^2 - D^2 \cos^2 i}} = 1,$$

d'où en intégrant

$$D = \frac{1}{\sin i \cos i} \sqrt{a^2 \sin^2 i - (s \cos^2 i + b)^2},$$

$b$  étant une constante arbitraire.

Cette équation démontre que « l'hélice demandée est placée sur un cylindre dont la section droite est une épicycloïde. »

La formule (14) peut être généralisée de manière à la rendre applicable aux lignes sphériques. En effet si L,  $L_1$  sont deux lignes de l'espace inverses par rapport à l'origine des axes, les coordonnées  $x_1, y_1, z_1$  d'un point de  $L_1$  sont liées aux coordonnées  $x, y, z$  du point correspondant de L par les relations

$$x = \frac{a^2}{R_1^2} x_1, \quad y = \frac{a^2}{R_1^2} y_1, \quad z = \frac{a^2}{R_1^2} z_1,$$

$a$  étant une constante et  $R_1$  le rayon vecteur de  $L_1$ .

Si, après ces formules, on calcule le rayon de courbure  $\rho$  de L, on a

$$(15) \quad \frac{1}{\rho^2} = \left( \frac{1}{r_1^2} + \frac{4}{R_1} \frac{d^2 R_1}{ds_1^2} \right) \frac{R_1^4}{a^4}.$$

Mais si l'on a égard à la figure du §. V. et on prend la ligne sphérique pour ligne L et la ligne plane pour ligne L<sub>1</sub>, on a

$$a = 2k, \quad R_1 = \sqrt{4k^2 + H_1^2}, \quad s_1 + \text{const} = \int \frac{ds}{\sin^2\left(\frac{2k}{R}\right)},$$

$$\rho_1 = \frac{H_1 \sqrt{1 - \left(\frac{dH_1}{ds_1}\right)^2}}{H_1 \frac{d^2 H_1}{ds_1^2} + \left(\frac{dH_1}{ds_1}\right)^2 - 1}.$$

Si, après ces formules, on calcule les quantités qui paraissent dans la (15), on peut dire « dans une ligne sphérique quelconque le rayon de courbure  $\rho$  est lié au rayon vecteur sphérique H par la relation

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{\left[-2k \sin \frac{H}{2k} \cos \frac{H}{2k} \frac{d^2 H}{ds^2} + \left(\frac{dH}{ds}\right)^2 - 1\right]^2}{4k^2 \left[1 - \left(\frac{dH}{ds}\right)^2\right] \sin^2 \frac{H}{2k} \cos^2 \frac{H}{2k}} - \frac{4}{\sin \frac{H}{2k}} \frac{d^2}{ds^2} \sin \frac{H}{2k}.$$

C'est une généralisation de la formule (14).

§. 7.

*Distance entre deux cercles osculateurs consécutifs d'une ligne sphérique.*

Nous allons déterminer la différence entre l'arc infinitésimal ds d'une ligne sphérique et l'arc dσ du grand cercle ayant les mêmes extrémités. Si l'on prend pour axes coordonnés la tangente, la normale principale et la binormale d'une ligne L au point O, nous avons dans ce point

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx}{ds}\right)_0 &= 1, & \left(\frac{dy}{ds}\right)_0 &= \left(\frac{dz}{ds}\right)_0 = 0; \\ \rho_0 \left(\frac{d^2 x}{ds^2}\right)_0 &= \rho_0 \left(\frac{d^2 z}{ds^2}\right)_0 = 0, & \rho_0 \left(\frac{d^2 y}{ds^2}\right)_0 &= 1 \end{aligned}$$

et puisque

$$\frac{1}{\rho^2} = \sum \left( \frac{d^2x}{ds^2} \right)^2,$$

il résulte

$$\sum \left( \frac{dx}{ds} \right)^2 = 1, \quad \sum \frac{dx}{ds} \frac{d^2x}{ds^2} = 0, \quad \sum \frac{dx}{ds} \frac{d^3x}{ds^3} + \frac{1}{\rho^2} = 0.$$

Au point 0 nous avons donc

$$\left( \frac{d^3x}{ds^3} \right)_0 = -\frac{1}{\rho_0^2}.$$

Si l'on désigne par  $ds$  l'arc élémentaire de la ligne  $L$  issu de 0 et par  $dx, dy, dz$  les coordonnées de son extrémité, on a par le développement de Maclaurin

$$\begin{aligned} dx &= (dx)_0 + \left( \frac{dx}{ds} \right)_0 ds + \left( \frac{d^2x}{ds^2} \right)_0 \frac{ds^2}{2} + \left( \frac{d^3x}{ds^3} \right)_0 \frac{ds^3}{6} + \dots \\ &= ds + \left( \frac{d^3x}{ds^3} \right)_0 \frac{ds^3}{6} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dy &= (dy)_0 + \left( \frac{dy}{ds} \right)_0 ds + \left( \frac{d^2y}{ds^2} \right)_0 \frac{ds^2}{2} + \left( \frac{d^3y}{ds^3} \right)_0 \frac{ds^3}{6} + \dots \\ &= \left( \frac{d^2y}{ds^2} \right)_0 \frac{ds^2}{2} + \left( \frac{d^3y}{ds^3} \right)_0 \frac{ds^3}{6} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dz &= (dz)_0 + \left( \frac{dz}{ds} \right)_0 ds + \left( \frac{d^2z}{ds^2} \right)_0 \frac{ds^2}{2} + \left( \frac{d^3z}{ds^3} \right)_0 \frac{ds^3}{6} + \dots \\ &= \left( \frac{d^3z}{ds^3} \right)_0 \frac{ds^3}{6} + \dots \end{aligned}$$

Soit  $\delta$  la corde élémentaire correspondante à l'arc  $ds$ ; on a

$$\begin{aligned} \delta^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2 + \left( \frac{d^3x}{ds^3} \right)_0^2 \frac{ds^4}{3} + \left( \frac{d^2y}{ds^2} \right)_0^2 \frac{ds^4}{4} + \dots \\ &= ds^2 - \frac{1}{12\rho_0^2} \cdot ds^4, \end{aligned}$$



d'où l'on dérive

$$ds - \delta = \frac{ds^4}{12\rho^2(ds + \delta)}.$$

Mais si l'on substitue  $ds$  à  $\delta$  au deuxième membre de cette égalité, on vient à négliger des infiniment petits d'ordre supérieur; conséquemment à un point quelconque d'une courbe de l'espace on a

$$ds - \delta = \frac{1}{24\rho^2} ds^3.$$

Cette formule peut aussi s'appliquer au grand cercle qui passe par les extrémités de l'arc  $ds$  de la ligne sphérique donnée  $L$ ; on a donc

$$d\sigma - \delta = \frac{1}{24k^2} d\sigma^3,$$

$k$  étant le rayon de la sphère. On en conclut

$$ds - d\sigma = \frac{1}{24} \left( \frac{ds^3}{\rho^2} - \frac{d\sigma^3}{k^2} \right);$$

mais si l'on substitue  $ds^3$  à  $d\sigma^3$  on vient à négliger des infiniment petits d'ordre supérieur. On a donc

$$ds - d\sigma = \frac{1}{24} \left( \frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{k^2} \right) ds^3 = \frac{1}{24\rho_g^2} ds^3.$$

Cela posé, soit  $L_1$  une ligne sphérique quelconque autour de laquelle on a enroulé un fil; si l'on déroule ce fil avec la condition qu'il soit toujours dirigé suivant le grand cercle tangent à  $L_1$ , un point quelconque du fil engendre une courbe  $L$  développante géométrique de  $L_1$ .

Soient  $A, B$  deux points consécutifs de  $L$  et  $A_1, B_1$  les points correspondants de  $L_1$ ; les cercles dont les rayons sphériques sont les arcs  $A_1A, B_1B$ , sont deux cercles osculateurs consécutifs de  $L$ ; la différence  $B_1B - A_1A$  de ces rayons est rigoureusement égale à l'arc  $ds_1 = A_1B_1$  de la développée, tandis que la distance sphé-

rique entre les centres de ces cercles est l'arc  $d\sigma_1$  du grand cercle qui a les mêmes extrémités de  $ds_1$ .

Mais  $d\sigma_1 < ds_1$ , donc «deux cercles osculateurs consécutifs d'une ligne sphérique sont extérieurs l'un à l'autre.»

Nous allons déterminer la plus courte distance sphérique  $\Delta$  entre ces deux cercles; si l'on désigne par  $R$ ,  $R + dR$  les rayons sphériques de ces cercles et si l'on remarque que la distance sphérique des centres des cercles est  $d\sigma_1$ , on a

$$\Delta = dR - d\sigma_1 = ds_1 - d\sigma_1 = \frac{1}{24\rho_{1g}} ds_1^3.$$

Si l'on remarque que (§. 2):

$$ds_1 = dR, \quad \rho_{1g} = k \sin\left(\frac{R}{k}\right) \frac{dR}{ds},$$

on a

$$(17) \quad \Delta = \frac{1}{24} \frac{\frac{dR}{ds}}{k^2 \sin^2\left(\frac{R}{2k}\right)} \cdot ds^3$$

ou bien, par l'application des formules (1),

$$(17') \quad \Delta = \frac{1}{24} \frac{1}{\rho_g^2} \frac{d\rho_g}{ds} \cdot ds^3.$$

Ces formules démontrent que la plus courte distance entre deux cercles osculateurs consécutifs d'une ligne sphérique est, par rapport à l'arc élémentaire  $ds$ , un infiniment petit de troisième ordre.

*Exemple.* — Si  $\rho_g = ms$ ,  $m$  étant une constante, on a

$$\frac{\Delta}{ds^3} = \frac{1}{24m} \cdot \frac{1}{s^2},$$

c'est-à-dire «dans la courbe sphérique dont le rayon de courbure géodésique est proportionnel à l'arc, le rapport  $\frac{ds^3}{\Delta}$  est proportionnel à la deuxième puissance de l'arc.»

Si l'on désigne par  $d\varepsilon$  l'angle de contingence géodésique de L, on a  $ds = \rho_g d\varepsilon$  et la formule (17') devient

$$\Delta = \frac{1}{24} \rho_g \rho'_g \cdot d\varepsilon^3,$$

d'où

$$\frac{\Delta}{d\varepsilon^3} = \frac{1}{24} \rho_g \rho'_g.$$

Or la formule (2') nous donne

$$\rho_g \rho'_g = \frac{\rho_{1g}}{k^3} (k^2 + \rho_g^2)^{\frac{3}{2}}$$

et d'ailleurs nous avons trouvé au §. 2:

$$(k^2 + \rho_g^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{k}{\cos \theta}, \quad \rho_{1g} = -k \frac{d \cos \theta}{ds},$$

$\theta$  étant l'angle sous lequel le plan osculateur de la ligne coupe la sphère. On a donc

$$(18) \quad \frac{\Delta}{d\varepsilon^3} = -\frac{k^2}{24} \cdot \frac{1}{\cos^3 \theta} \cdot \frac{d \cos \theta}{ds}.$$

L'équation (18) donne une relation remarquable entre l'angle sous lequel le plan osculateur de la ligne coupe la sphère et le rapport  $\frac{\Delta}{d\varepsilon^3}$  de la distance infinitésimale entre deux cercles osculateurs consécutifs à la troisième puissance de l'angle de contingence géodésique.

*Exemple.* — Si  $\frac{\Delta}{d\varepsilon^3} = \text{const} = a$ , il résulte

$$\frac{1}{\cos^3 \theta} d \cdot \cos \theta = -\frac{24a}{k^2} ds,$$

d'où par intégration

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} = \frac{48a \cdot s + b}{k^2},$$

$b$  étant une constante.

Donc «dans la ligne sphérique pour laquelle le rapport  $\frac{\Delta}{ds^3}$  est une constante  $a$ , l'angle  $\theta$  sous lequel le plan osculateur coupe la sphère est défini par l'égalité

$$\cos \theta = \frac{k}{\sqrt{48a \cdot s + b}}$$

### §. 8.

*Lignes planes.* — Si l'on suppose que le rayon de la sphère augmente indéfiniment, la sphère a pour limite un plan et la ligne sphérique une ligne plane; le rayon de courbure géodésique  $\rho_g$  de la ligne sphérique a pour limite le rayon de courbure de cette ligne plane.

Donc «dans une ligne plane deux cercles osculateurs consécutifs sont extérieurs l'un à l'autre et la plus courte distance  $\Delta$  entre eux est donnée ainsi

$$(19) \quad \Delta = \frac{1}{24} \frac{1}{\rho^2} \frac{d\rho}{ds} \cdot ds^3.$$

La quantité  $\Delta_1$  relative à la développée  $L_1$  de  $L$  est

$$\Delta_1 = \frac{1}{24} \frac{1}{\rho_1^2} \frac{d\rho_1}{ds_1} ds_1^3$$

et puisque

$$ds_1 = \frac{d\rho}{ds} ds, \quad \rho_1 = \rho \frac{d\rho}{ds},$$

il vient

$$\Delta_1 = \frac{1}{24} \frac{1}{\rho^2} \frac{d}{ds} \left( \rho \frac{d\rho}{ds} \right) ds^3,$$

d'où

$$\frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\rho \frac{d}{ds} \left( \rho \frac{d\rho}{ds} \right)}{\rho \frac{d\rho}{ds}} = \frac{\rho_2}{\rho_1},$$

$\rho_1$  et  $\rho_2$  étant les rayons de courbure de la développée  $L_1$  et de la deuxième développée  $L_2$  de  $L$ .

Si l'on désigne donc par  $\Delta_2, \Delta_3, \dots, \Delta_{n-1}, \Delta_n$  les quantités analogues à  $\Delta$  relatives aux développés successives  $L_2, L_3, \dots, L_{n-1}, L_n$  de  $L$ , on a les équations

$$\frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\rho_1}{\rho_2}, \quad \frac{\Delta_1}{\Delta_2} = \frac{\rho_2}{\rho_3}, \quad \frac{\Delta_2}{\Delta_3} = \frac{\rho_3}{\rho_4}, \quad \dots \quad \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} = \frac{\rho_n}{\rho_{n+1}},$$

qui par multiplication nous donnent

$$\frac{\Delta_n}{\Delta} = \frac{\rho_1}{\rho_{n+1}}.$$

Donc «le rapport de la distance  $\Delta$  relative à une ligne  $L$  à la distance analogue  $\Delta_n$  relative à l'  $n^{\text{ème}}$  développée  $L_n$  de  $L$  est égal au rapport du rayon de courbure de la première développée de  $L$  au rayon de l'  $(n+1)^{\text{ème}}$  développée de  $L$ .»

Si l'on pose  $\frac{\Delta}{\Delta_1} = a$ ,  $a$  étant une constante, on a  $\rho_1 = a\rho_2$  c'est-à-dire

$$\rho_1 = a\rho_1 \frac{d\rho_1}{ds_1},$$

ce qui nous donne

$$\rho_1 = \frac{1}{a} s_1 + b.$$

Donc «les lignes planes pour lesquelles  $\Delta = a\Delta_1$  sont des développantes d'une spirale logarithmique.»

Si  $\frac{\Delta}{\Delta_2} = a$ ,  $a$  étant une constante, il vient  $\rho_1 = a\rho_3$ , c'est-à-dire

$$\rho_1 = a\rho_2 \frac{d\rho_2}{ds_2} = a\rho_1 \frac{d}{ds_1} \left( \rho_1 \frac{d\rho_1}{ds_1} \right),$$

ou bien

$$\frac{d}{ds_1} \left( \rho_1 \frac{d\rho_1}{ds_1} \right) = \frac{1}{a},$$

d'où par intégration

$$\rho_1 \frac{d\rho_1}{ds_1} = \frac{s_1}{a} + b.$$

La multiplication pour  $ds_1$  et une nouvelle intégration nous donnent

$$\rho_1^2 = \frac{s_1^2}{a} + 2bs_1 + c,$$

$b$  et  $c$  étant deux constantes quelconques.

Donc «les lignes planes pour lesquelles  $\Delta = a \Delta_2$  sont des développantes de la ligne définie par l'équation  $\rho_1 = \sqrt{\frac{s_1^2}{a} + 2bs_1 + c}$ »

Cette ligne est une courbe cycloïdale lorsque  $a < 0$ .

Si l'on pose la condition  $\frac{\Delta}{ds^3} = -a$ ,  $a$  étant une constante, on a

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{d\rho}{ds} = -24a, \quad \text{d'où} \quad \frac{1}{\rho} = 24a \cdot s + b,$$

c'est-à-dire «les lignes planes dans lesquelles le rapport  $\frac{\Delta}{ds^3}$  est une constante, ont pour courbure une fonction linéaire de l'arc.»

La formule (19) qui donne la plus courte distance entre deux cercles osculateurs consécutifs d'une ligne plane, est analogue à celle qui donne la plus courte distance entre deux tangentes consécutives d'une ligne à double courbure; en effet si l'on appelle  $\delta$  cette distance, on a

$$(20) \quad \delta = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{\rho r} ds^3,$$

$\rho$  étant le rayon de courbure et  $r$  celui de torsion de la ligne.

Les formules (19), (20) peuvent être appliquées à la résolution du problème suivant: «L étant une ligne plane donnée, on veut la réduire à une ligne à double courbure  $L_1$  par des rotations infinitésimales du plan de la ligne autour ses tangentes successives, avec la condition que la distance infinitésimale entre deux cercles oscula-

teurs consécutifs de la ligne plane  $L$  soit proportionnelle à la distance infinitésimale entre deux tangentes consécutifs de  $L_1$ .»

Si l'on remarque que, dans les rotations infinitésimales susdites, les quantités  $s$ ,  $\rho$  restent invariables, les formules (19), (20) donnent

$$\frac{\Delta}{\delta} = \frac{\rho'r}{2\rho} = a,$$

$a$  étant une constante. Il en dérive

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{2a}{r},$$

d'où par intégration

$$\log \rho = \log b + 2a \int \frac{ds}{r},$$

$b$  étant une constante arbitraire; cette égalité peut s'écrire

$$(21) \quad \rho = be^{2a \int \frac{ds}{r}}.$$

Telle est la relation entre le rayon de courbure  $\rho$  et celui de torsion  $r$  de la ligne à double courbure  $L_1$  que l'on dérive de la ligne plane  $L$ .

*Exemple.* — Si l'on suppose que la ligne  $L_1$  soit un hélice, on a

$$\frac{r}{\rho} = \text{tang } i,$$

$i$  étant l'inclinaison constante de la ligne sur les génératrices du cylindre, et puisque la (21) nous donne

$$\frac{r}{\rho} = \frac{2a}{\rho'},$$

il vient

$$\rho' = 2a \cdot \cot i,$$

d'où par intégration

$$\rho = 2a \cdot \cot i \cdot s + \text{const.}$$

La ligne plane est donc une spirale logarithmique coupant les rayons vecteurs issus du pôle sous l'angle  $\theta$  défini par l'équation

$$\cot \theta = 2a \cdot \cot i.$$

La ligne  $L_1$  à laquelle se réduit la spirale  $L$  est une hélice cylindro-conique.

Si la ligne  $L_1$  est une géodésique d'un cône, nous avons (V. la citation du §. 2.):

$$\frac{\rho}{r} = ms + n,$$

$m$  et  $n$  étant des constantes; on a donc dans ce cas

$$\frac{\rho}{r} = ms + n = \frac{\rho'}{2a}, \quad \text{d'où} \quad \rho' = 2ams + 2an,$$

et en intégrant

$$(22) \quad \rho = ams^2 + 2ans + p.$$

La ligne plane  $L$  est donc définie par l'égalité que l'on vient d'écrire et la géodésique  $L_1$  du cône, à laquelle se réduit  $L$ , est définie par les égalités

$$\rho = ams^2 + 2an \cdot s + p, \quad r = \frac{ams^2 + 2ans + p}{ms + n},$$

qui donnent le rayon de courbure et de torsion en fonction de l'arc.

Entre les lignes planes représentées par l'équation (22) il y a la chaînette; en effet dans la chaînette on a

$$\rho = a + \frac{s^2}{a},$$



relation qui, par le changement de l'origine des arcs  $s$  peut s'écrire

$$\rho = a + \frac{(s + b)^2}{a} = \frac{s^2}{a} + \frac{2b}{a}s + \frac{b^2}{a} + a,$$

$b$  étant une constante.

Si l'on compare cette formule à la suivante

$$\rho = ms^2 + ns + p,$$

on voit que la deuxième se réduit à la forme de la première lorsque

$$4(mp - 1) = n^2.$$

On conclut que la courbe plane  $L$  est une chaînette lorsque la constante  $a$  est liée aux constantes  $m, n, p$  par la relation

$$a^2n^2 - amp + 1 = 0.$$

L'angle de contingence  $d\varepsilon$  d'une ligne est donné par l'équation

$$d\varepsilon = \frac{ds}{\rho},$$

ce qui réduit la (19) à la suivante

$$\frac{\Delta}{d\varepsilon^3} = \frac{1}{24} \rho \frac{d\rho}{ds}.$$

Donc « la plus courte distance  $\Delta$  entre deux cercles osculateurs consécutifs d'une ligne plane  $L$  est, par rapport à l'angle de contingence  $d\varepsilon$ , un infiniment petit de troisième ordre. Le rapport  $\frac{\Delta}{d\varepsilon^3}$  est égal à la 24<sup>ème</sup> partie du rayon de courbure  $\rho_1$  de la développée  $L_1$  de la ligne donnée. »

Lorsque  $\frac{\Delta}{d\epsilon^3}$  est constant,  $\rho_1$  l'est aussi et la ligne L est une développante de cercle.

En général si l'on suppose

$$\frac{\Delta}{d\epsilon^3} = \sum_0^n a_i s^{n-1},$$

il vient

$$\rho = 4\sqrt{3} \sqrt{\sum_0^n \frac{a_i}{1+n-i} s^{1+n-i} + a_{n+1}},$$

c'est-à-dire «lorsque le rapport  $\frac{\Delta}{d\epsilon^3}$  est exprimé par une fonction de l'arc, algébrique, rationnelle, entière du degré n, le rayon de courbure de L est exprimé par la puissance du degré  $\frac{1}{2}$  d'une fonction de l'arc algébrique, rationnelle, entière du degré n + 1.»

### §. 9.

*Un théorème général sur les lignes sphériques.* — Soit  $L_0, L_1, L_2, \dots, L_{n-1}, L_n$  une suite de lignes telles, que l'une quelconque  $L_i$  d'entre elles soit une géodésique de la développable osculatrice de la ligne précédente  $L_{i-1}$ ; on dira que  $L_n$  est une géodésique de l'*n*<sup>ème</sup> développable osculatrice de  $L_0$ . Soient  $l_0, l_1, l_2, \dots, l_{n-1}, l_n$  les indicatrices des tangentes des lignes données; l'une quelconque  $l_i$  d'entre elles est une développante géodésique de la ligne précédente  $l_{i-1}$ .

Si l'on suppose que la ligne  $L_n$  soit placée sur la sphère des indicatrices, la ligne  $l_n$  est le lieu des extrémités des quadrants géodésiques tangents à  $L_n$ , et l'indicatrice des binormales de  $L_n$  est la développée géodésique  $\Delta_n$  de  $L_n$ . En effet la tangente à la ligne  $L_n$  à un point quelconque est parallèle au rayon de la sphère qui aboutit au point correspondant de  $l_n$ ; au surplus la ligne  $\Delta_n$  est évidemment la courbe polaire de  $l_n$ .

On peut donc énoncer le théorème *«lorsqu'on a une série de lignes  $L_0, L_1, L_2, \dots, L_{n-1}, L_n$  telles, que l'une quelconque  $L_i$  d'entre elles soit une géodésique de la développable osculatrice de la précédente  $L_{i-1}$ , si la ligne  $L_n$  est placée sur une sphère, sa développée géodésique  $\Delta_n$  est la ligne polaire de l'indicatrice  $l_n$  d'une géodésique de l' $n^{\text{ème}}$  développable osculatrice de  $L_0$ .»*

Nous allons appliquer ce théorème à quelques cas particuliers.

Si la ligne  $L_0$  infiniment petite s'éloigne à l'infini, sa développable osculatrice se réduit à un cylindre,  $L_1$  est un hélice de cette surface,  $L_2$  une géodésique d'un hélicoïde développable (développable dont l'arête de rebroussement est une hélice quelconque),  $L_3$  est une géodésique de la développable dont l'arête de rebroussement est une géodésique d'un hélicoïde développable, etc.

Dans ce cas considérons les deux lignes  $L_0, L_1$  et supposons que  $L_1$  soit sphérique; l'indicatrice de l'hélice  $L_1$  est un petit cercle et la ligne  $\Delta_1$  l'est aussi; la ligne  $L_1$  est donc sur la sphère une développante géodésique de ce cercle.

Donc *«les hélices sphériques sont des développantes géodésiques d'un petit cercle (théorème connu).»*

On peut dire encore *«les lignes de l'espace dont l'indicatrice des tangentes est une hélice sphérique sont des géodésiques d'un hélicoïde développable.»*

Que l'on suppose d'avoir les trois lignes  $L_0, L_1, L_2$  dont la dernière est sphérique; la ligne  $L_2$  est une géodésique d'un hélicoïde développable et son indicatrice  $l_2$  est, en force du théorème précédent, une hélice sphérique; la ligne  $\Delta_2$ , polaire de  $l_2$ , l'est aussi.

Donc *«les géodésiques des hélicoïdes développables placées sur une sphère, sont des développantes géodésiques d'une hélice sphérique.»*

On peut dire encore *«les lignes de l'espace dont l'indicatrice des tangentes est une développante géodésique d'une hélice sphérique, sont des géodésiques d'une développable dont l'arête de rebroussement est une géodésique d'un hélicoïde développable.»*

Que l'on suppose d'avoir les quatre lignes  $L_0, L_1, L_2, L_3$  dont la dernière est sphérique; la ligne  $L_3$  est alors une géodésique d'un hélicoïde développable et son indicatrice  $l_3$  est, en force du théorème précédent, une développante géodésique d'une hélice sphérique; la ligne  $\Delta_3$  est de la même nature.

Donc *«les géodésiques d'une développable dont l'arête de rebroussement est une géodésiques d'un hélicoïde développable, qui*

sont placées sur une sphère, sont des deuxièmes développantes géodésiques d'une hélice sphérique.»

On peut dire encore «les lignes de l'espace dont l'indicatrice est une deuxième développante géodésique d'une hélice sphérique, sont des géodésiques d'une développable dont l'arête de rebroussement est une géodésique d'une développable dont l'arête de rebroussement est une géodésique d'un hélicoïde développable.»

Ainsi de suite.

Parme, mai 1889.

## BIBLIOGRAPHIA

Mansfield Merriman. — *Método de los cuadrados minimos (traduzido do inglez para hespanhol por V. Balbin)*. — Buenos-Aires, 1889.

Diz o sr. Merriman no prologo do seu excellente livro:

«Os *Elementos do methodo dos menores quadrados* foram escritos tendo em vista dois objectos: 1.º, apresentar os principios fundamentaes do methodo de uma maneira tão clara, illustrando-a com exemplos tão practicos e simples, de modo a tornal-a accessivel á maior parte dos engenheiros civis que não tiverem extensos conhecimentos das mathematicas; e 2.º, dar uma exposiçào elementar da theoria, que satisfaça ás necessidades de uma grande classe de alumnos, cada dia mais numerosa.»

Por satisfazer a estes requisitos foi traduzida pelo sr. V. Balbin, do inglez para hespanhol, para servir de texto aos alumnos da Faculdade de sciencias exactas da Universidade de Buenos-Aires.

Consta a obra de dez capitulos.

Nos capitulos I a IV expõe o auctor os principios do methodo dos menores quadrados; nos capitulos V a IX faz applicaçào d'estes principios a diversas classes de observaçõe. O capitulo X contém um resumo historico, e uma serie de tâboas proprias a facilitar a applicaçào do methodo.

Cada capitulo é seguido de uma lista de problemas proprios para exercicio do alumno.

Gino Loria. — *I poligoni di Poncelet*. — Torino, 1889.

Contém este interessante opusculo um discurso, sobre os poligonos de Poncelet, pronunciado pelo sr. Gino Loria na occasiào da sua recepçào solemne como Doutor aggregado á Faculdade de Sciencias da Universidade de Genova.

Em 1817 enunciou Poncelet pela primeira vez o problema seguinte: determinar um polygono de determinado numero de lados que esteja inscripto n'uma secção conica e circumscripto a outra. Cinco annos depois mostrou este grande geometra que este problema não admite sempre solução, e que, quando admite solução, admite um numero infinito d'ellas. É da historia d'este problema notavel que o sr. Gino Loria se occupa no seu bello trabalho.

Refere-se primeiramente aos trabalhos que a este respeito escreveu Jacobi. Este grande geometra, associando este problema á theoria das funcções ellipticas, achou por meio d'esta theoria a relação que deve existir entre os raios de duas circumferencias e a distancia dos seus centros para que haja um polygono de um numero  $n$  de lados que possa ser inscripto n'uma e circumscripto á outra.

Depois de Jacobi occupou-se dos polygonos de Poncelet o seu illustre discipulo Richelot. Este geometra apresentou uma regra simples para obter os raios e a distancia dos centros de duas circumferencias taes que n'uma se possa inscrever um polygono de  $2n$  lados circumscripto á outra, quando se conhece a relação analogica para um polygono de  $n$  lados; estendeu á esphera alguns dos theoremas de Poncelet; e apresentou tres methodos para pôr a solução do problema debaixo de fôrma algebrica.

Quarenta annos depois de Jacobi se occupar do problema de Poncelet, no caso de um systema de duas circumferencias, foi o seu methodo estendido pelos srs. Rosanes e Pasch ao caso de um systema de duas secções conicas. Estes geometras apresentaram, com effeito, pela primeira vez uma solução, por meio das funcções ellipticas, do problema que consiste em determinar os coefficients de duas secções conicas, de modo que um polygono possa ser inscripto n'uma e circumscripto a outra.

Refere-se tambem o sr. Gino Loria aos trabalhos de Cayley sobre este assumpto. O illustre geometra inglez descobriu a fôrma geral do invariante simultaneo de duas secções conicas que, quando se annulla, traz como consequencia que estas secções conicas admittem polygonos de Poncelet de um numero dado de lados.

Occupa-se depois o sr. Gino Loria dos trabalhos para resolver o problema de Poncelet por meios puramente algebricos, referindo-se aos trabalhos de Mention, Puiseux e Moutard.

Refere-se ainda o auctor a muitos trabalhos, que aqui não po-

demos enumerar, tendo em vista dar outras demonstrações dos theoremas de Poncelet, applicar a theoria dos polygonos de Poncelet á theoria da transformação das funcções ellipticas, desenvolver consequencias d'aquella theoria, etc.

*F. Casorati. — Nuova definizione della curvatura delle superficie (Rendiconti del R. Istituto Lombardo, serie 2.<sup>a</sup>, t. xxii).*

A noção de curvatura de uma superficie n'um ponto dado foi definida por Gauss na sua memoria fundamental intitulada — *Disquisitiones generales circa superficies curvas* — do modo seguinte: Considera uma porção infinitesima da superficie que contenha o ponto dado e uma esphera de raio igual á unidade. Pelos pontos de contórno da porção considerada da superficie tira normaes á superficie, e pelo centro da esphera tira parallelas a estas normaes, que determinam pela sua intersecção com a esphera uma curva limitando uma porção infinitesimal da esphera. Posto isto, chama Gauss curvatura da superficie no ponto considerado o limite para que tende a razão da área da porção considerada da superficie para a área da porção correspondente da esphera quando estas áreas tendem para zero. A curvatura de superficie assim definida é igual ao producto das curvaturas das secções principaes correspondentes ao ponto considerado.

Principia o sr. Casorati a sua bella Nota fazendo vêr os inconvenientes d'esta definição, um dos quaes é levar a considerar como privadas de curvatura as superficies planificaveis, que todavia se está habituado a considerar como superficies curvas desde os primeiros passos na escola.

Em seguida apresenta um novo conceito de curvatura para substituir ao de Gauss. Para isso imagina que no ponto O da superficie, ao qual se deve referir a curvatura, se colloca a extremidade de um fio, e que se faz mover a outra extremidade sobre a superficie conservando o fio sempre tenso. É a área descripta pelo fio que o sr. Casorati toma para denominador da fracção cujo limite representa a curvatura da superficie no ponto O. Para obter o numerador da mesma fracção imagina o auctor que sobre o fio se tomam cumprimentos proporçãoaes aos angulos que a normal á superficie no ponto O faz com as normaes á superficie na outra

extremidade do fio. A nova área obtida é o numerador da fracção considerada.

Depois de expôr as razões para se adoptar esta definição da medida de curvatura da superficie, o sr. Casorati passa a traduzil-a analyticamente, o que o leva á conclusão de que a medida da curvatura assim considerada é igual á media arithmetica dos quadrados das curvaturas das secções principaes.

Termina o auctor por fazer vêr a analogia que ha entre a sua definição de curvatura da superficie e a noção conhecida de curvatura de uma linha.

*Y. Ptaszycki. — Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite (Bulletin des Sciences mathématiques, t. XII, 1888).*

N'esta carta considera o sr. Ptaszycki o integral  $\int F(x, \sqrt[m]{R}) dx$ ,

onde  $F(x, \sqrt[m]{R})$  representa uma funcção racional de  $x$  e de  $\sqrt[m]{R}$ , e onde é  $R = (x - a_1)^{n_1} \dots (x - a_\lambda)^{n_\lambda}$ , e procura qual deve ser o radical  $\sqrt[m]{R}$  para que este integral seja exprimivel debaixo de fórma finita por meio de operações algebraicas e logarithmicas, qualquer que seja a funcção  $F$ . Demonstra o auctor que, para que isto aconteça, é necessario e sufficiente que o radical  $\sqrt[m]{R}$  tenha uma das fórmãs

$$\sqrt[m]{(x - a_1)^{n_1}}, \quad \sqrt[m]{(x - a_1)^{n_1} (x - a_2)^{m - n_1}}.$$

G. T.



**SUR UNE FONCTION CONTINUE DONT LA DÉRIVÉE  
EST PARTOUT DISCONTINUE**

(Extrait d'une lettre adressée à F. Gomes Teixeira)

PAR

M. M. LERCH

Il peut avoir quelque intérêt de connaître une fonction finie et continue dont la dérivée soit aussi finie et déterminée, mais partout discontinue. Une telle fonction s'obtient à l'aide d'un principe dû à M. Weierstrass et communiqué par M. G. Cantor (Math. Annalen, t. 19). Elle é donnée par la série

$$f(x) = \sum_{v=0}^{\infty} c_v (x - a_v)^2 \sin \frac{\pi}{x - a_v} \tag{1}$$

dans laquelle les quantités  $c_0, c_1, c_2, \dots$  sont des termes d'une série absolument convergente et les quantités  $a_0, a_1, a_2, \dots$  constituent l'ensemble condensé dans toute partie d'un intervalle donné, par exemple  $(0 \dots 1)$ .

On suppose ensuite que ces quantités  $a_v$  sont différentes entre elles et qu'on remplace le produit

$$(x - a_v) \sin \frac{\pi}{x - a_v}$$

par sa limite zéro, lorsque  $x = a_v$ .

Cela étant la série considérée sera uniformément convergente et, puisqu'elle se compose de termes continus, la fonction  $f(x)$  sera elle-même continue.

Posant, pour abrégé,

$$c_v (x - a_v)^2 \sin \frac{\pi}{x - a_v} = \varphi_v (x),$$

nous aurons

$$f(x) = \sum_{v=0}^{\infty} \varphi_v (x)$$

d'où

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\varphi_v(x+h) - \varphi_v(x)}{h}$$

d'où nous allons conclure que le premier membre s'approche d'une limite finie et déterminée lorsque  $h$  tend vers zéro.

J'observe à cet effet que la fonction  $\varphi_v(x)$  a une dérivée finie et toujours déterminée. Car celle-ci est donnée par la formule

$$(1) \quad \varphi'_v(x) = 2c_v(x - a_v) \sin \frac{\pi}{x - a_v} - \pi c_v \cos \frac{\pi}{x - a_v}$$

en supposant que  $x$  diffère de  $a_v$ ; mais lorsque  $x = a_v$ , cette dérivée sera, par définition,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi_v(a_v + h) - \varphi_v(a_v)}{h} = c_v \lim_{h \rightarrow 0} h \sin \frac{\pi}{h} = 0;$$

elle sera donnée encore par la formule (1) si l'on convient de prendre  $\cos \frac{\pi}{0} = 0$ , ce que je ferai dans ce qui suit.

D'après un théorème fondamental de la théorie des fonctions d'une variable réelle, démontré sous sa forme la plus général par

M. Dini dans son œuvre sur les fonctions, chaque intervalle  $(x \dots x+h)$  contient une quantité  $x_v$  telle que

$$\frac{\varphi_v(x+h) - \varphi_v(x)}{h} = \varphi'_v(x_v),$$

ce qui donne

$$(2) \left\{ \begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \sum_{v=0}^{\infty} \varphi'_v(x_v) = \sum_{v=0}^{\infty} c_v \left[ \frac{\sin \frac{\pi(x+h-a_v)}{x_v-a_v} - \sin \frac{\pi(x-a_v)}{x_v-a_v}}{h} \right] \\ &= 2 \sum_{v=0}^{\infty} c_v (x_v - a_v) \sin \frac{\pi}{x_v - a_v} - \pi \sum_{v=0}^{\infty} c_v \cos \frac{\pi}{x_v - a_v}. \end{aligned} \right.$$

En supposant maintenant que  $x$  ne coïncide avec aucune des quantités  $a_v$ , je dis qu'on a

$$(3) \left\{ \begin{aligned} \lim_{h=0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ = 2 \sum_{v=0}^{\infty} c_v (x - a_v) \sin \frac{\pi}{x - a_v} - \pi \sum_{v=0}^{\infty} c_v \cos \frac{\pi}{x - a_v}. \end{aligned} \right.$$

En représentant par  $A$  la valeur du second membre, j'aurai en effet

$$\begin{aligned} & \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - A \\ &= 2 \sum_{v=0}^{\infty} c_v \left[ (x_v - a_v) \sin \frac{\pi}{x_v - a_v} - (x - a_v) \sin \frac{\pi}{x - a_v} \right] \\ & \quad - \pi \sum_{v=0}^{\infty} c_v \left( \cos \frac{\pi}{x_v - a_v} - \cos \frac{\pi}{x - a_v} \right). \end{aligned}$$

Etant donné une quantité positive  $\delta$  aussi petite que l'on veut on peut déterminer un nombre entier  $p$  tel que la série

$$|c_p| + |c_{p+1}| + |c_{p+2}| + \dots$$

soit inférieure à  $\delta$ , de sorte que la valeur absolue du reste

$$\begin{aligned} R_p(x) = & 2 \sum_{v=p}^{\infty} c_v \left[ (x_v - a_v) \sin \frac{\pi}{x_v - a_v} - (x - a_v) \sin \frac{\pi}{x - a_v} \right] \\ & - \pi \sum_{v=p}^{\infty} c_v \left( \cos \frac{\pi}{x_v - a_v} - \cos \frac{\pi}{x - a_v} \right) \end{aligned}$$

sera moindre que

$$4\delta + 2\pi\delta = (4 + 2\pi)\delta.$$

Mais on a

$$\begin{aligned} & \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \Lambda = \\ = & \left\{ 2 \sum_{v=0}^{p-1} c_v \left[ (x_v - a_v) \sin \frac{\pi}{x_v - a_v} - (x - a_v) \sin \frac{\pi}{x - a_v} \right] \right. \\ & \left. - \pi \sum_{v=0}^{p-1} c_v \left( \cos \frac{\pi}{x_v - a_v} - \cos \frac{\pi}{x - a_v} \right) \right\} + R_p(x) \end{aligned}$$

et on peut évidemment déterminer une quantité  $h_0$  telle que l'intervalle  $(x - h_0 \dots x + h_0)$  ne contient aucun des points  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{p-1}$ , desorte que la parenthèse  $\{ \}$  sera une fonction continue dans cet intervalle.

On pourra donc trouver une quantité  $h_1$ , moindre que  $h_0$ , telle que la dite parenthèse sera inférieure en valeur absolue à  $\delta$  pour

chaque valeur de  $h$  satisfaisant à l'inégalité  $|h| < h_1$ . On aura donc pour  $|h| < h_1$ , l'inégalité

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - A \right| < (5 + 2\pi) \delta,$$

ce qui s'exprime par la formule

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = A,$$

de sorte que l'équation (3) est démontrée.

Supposons en second lieu que  $x = a_n$ . Dans ce cas nous avons

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\varphi_n(a_n+h) - \varphi_n(a_n)}{h} + \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\varphi_{\nu}(x+h) - \varphi_{\nu}(x)}{h}$$

où la série  $\Sigma'$  ne contient pas le terme  $\nu = n$ . Puisque  $a_n$  diffère de tous les autres  $a_{\nu}$ , on voit comme précédemment que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\varphi_{\nu}(x+h) - \varphi_{\nu}(x)}{h} = A$$

et comme

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi_n(a_n+h) - \varphi_n(a_n)}{h} = 0,$$

la dérivée

$$\lim \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

sera donnée comme précédemment par la formule (3).

La fonction  $f(x)$  a, par conséquent, toujours une dérivée finie

et déterminée, qu'on peut représenter par la formule

$$(3 \text{ bis}) \quad f'(x) = 2 \sum_{v=0}^{\infty} c_v (x - a_v) \sin \frac{\pi}{x - a_v} - \pi \sum_{v=0}^{\infty} c_v \cos \frac{\pi}{x - a_v},$$

avec la convention de prendre  $\cos \frac{\pi}{0} = 0$ . Mais on voit immédiatement que cette fonction  $f'(x)$  est discontinue dans chaque point  $a_v$ , et par conséquent dans chaque partie de l'intervalle  $(0 \dots 1)$ .

**SOBRE AS FUNÇÕES DUPLAMENTE PERIODICAS  
DE SEGUNDA ESPECIE**

POR

JOSÉ PEDRO TEIXEIRA

**I**

As series

$$\frac{\pi}{2iK'} \sum_n \operatorname{cosec} \frac{\pi}{2iK'} (x - z - 2nK) =$$

$$= \frac{\pi}{K'} e^{\frac{\pi}{2K'}(x-z)} \sum_n \frac{q_1^{2n}}{q_1^{2n} e^{\frac{\pi}{K'}(x-z)} - 1},$$

$$\frac{\pi}{2K} \sum_{n'} \operatorname{cosec} \frac{\pi}{2K} (x - z - 2n'iK') =$$

$$= \frac{\pi i}{K} e^{\frac{\pi}{2K}(x-z)} \sum_{n'} \frac{q^{n'}}{e^{\frac{\pi}{K}(x-z)} - q^{2n'}}$$

$$\frac{\pi}{2K} \sum_{n'} (-1)^{n'} \operatorname{cosec} \frac{\pi}{2K} (x - z - 2n'iK') =$$

$$= \frac{\pi i}{K} e^{\frac{\pi}{2K}(x-z)} \sum_{n'} \frac{(-1)^{n'} q^{n'}}{e^{\frac{\pi}{K}(x-z)} - q^{2n'}}$$

onde  $q_1$  e  $q$  representam as exponenciaes  $e^{-\frac{\pi K}{K'}}$ ,  $e^{-\frac{\pi K'}{K}}$ , são absolutamente convergentes em ambos os sentidos, excepto para os valores de  $x$  e  $z$  que satisfazem à equação

$$(1) \dots\dots\dots x - z = 2nK + 2n'iK'$$

As funcções

$$(2) \dots \varphi(x, z) = \frac{\pi}{2iK'} \sum_n \operatorname{cosec} \frac{\pi}{2iK'} (x - z - 2nK),$$

$$(3) \dots \varphi_1(x, z) = \frac{\pi}{2K} \sum_n \operatorname{cosec} \frac{\pi}{2K} (x - z - 2niK'),$$

$$(4) \dots \varphi_2(x, z) = \frac{\pi}{2K} \sum_n (-1)^n \operatorname{cosec} \frac{\pi}{2K} (x - z - 2niK')$$

considerando  $x$  como constante e  $z$  como variavel, têm, no interior do parallelogrammo dos periodos, como mostra a equação (1), o infinito  $x$ , ao qual corresponde o residuo  $-1$ , e gosam das propriedades

$$(5) \dots\dots\dots \left\{ \begin{array}{l} \varphi(x, z + 2K) = \varphi(x, z), \\ \varphi(x, z + 2iK') = -\varphi(x, z), \end{array} \right.$$

$$(6) \dots\dots\dots \left\{ \begin{array}{l} \varphi_1(x, z + 2K) = -\varphi_1(x, z), \\ \varphi_1(x, z + 2iK') = \varphi_1(x, z), \end{array} \right.$$

$$(7) \dots\dots\dots \left\{ \begin{array}{l} \varphi_2(x, z + 2K) = -\varphi_2(x, z), \\ \varphi_2(x, z + 2iK') = -\varphi_2(x, z) \end{array} \right.$$

que lhes permitem servir de elementos simples na decomposição das funcções duplamente periodicas cujos multiplicadores são  $+1, -1; -1, +1; -1, -1$ .



Seja  $F(z)$  uma funcção uniforme, que satisfaça a (5), e tome-se o producto  $F(z) \varphi(x, z)$ . Este producto é evidentemente uma funcção duplamente periodica ordinaria, e por isso é nulla a somma dos residuos relativos aos infinitos que elle possui no interior do parallelogrammo dos periodos.

Sendo  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$  os infinitos de  $F(z)$ , dentro do parallelogrammo, aquelle producto tem alem d'estes infinitos, o infinito  $x$ , ao qual corresponde o residuo  $-F(x)$ . Os residuos correspondentes aos  $\beta$  deduzem-se de

$$A^{(j)} \varphi(x, \beta_j),$$

fazendo  $j = 1, 2, \dots, m$ .

Temos então

$$(8) \dots\dots\dots F(x) = \sum_1^m A^{(j)} \varphi(x, \beta_j)$$

Se os infinitos  $\beta$  forem multiplos, e  $p_1, p_2, \dots, p_m$  seus graus de multiplicidade, então os residuos correspondentes deduzem-se de

$$\sum_1^{p_j} \frac{A_g^{(j)}}{(g-1)!} \frac{d^{g-1} \varphi(x, \beta_0)}{d \beta_j^{g-1}},$$

fazendo tambem  $j = 1, 2, \dots, m$ , e a formula de decomposição será

$$(8') \dots\dots\dots F(x) = \sum_1^m \sum_1^{p_j} \frac{A_g^{(j)}}{(g-1)!} \frac{d^{g-1} \varphi(x, \beta_j)}{d \beta_j^{g-1}}.$$

Devemos advertir que nesta formula deve tomar-se a unidade pelo denominador nullo.

Se  $F(z)$  satisfizer a (6) ou (7), as formulas de decomposição ainda são as mesmas, mudando  $\varphi$  em  $\varphi_1$  ou em  $\varphi_2$ .

II

Apliquemos esta theoria á decomposição e desenvolvimento em serie das funcções ellipticas.

A função  $dnx$  satisfaz a (5) e tem o polo  $iK'$ , ao qual corresponde o residuo  $-\frac{i\theta\eta_1}{\theta_1\eta_1'}$ , sendo  $\theta$  e  $\eta$  as quantidades  $\Theta(0)$  e  $H(0)$ ; teremos então

$$dnx = -\frac{\pi\theta\eta_1}{2K'\theta_1\eta_1'} \sum_n \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{2iK'}(x - iK' - 2nK)},$$

ou

$$dnx = \frac{\pi\theta\eta_1}{2K'\theta_1\eta_1'} \sum_n \frac{1}{\cos \frac{\pi}{2iK'}(x - 2nK)}.$$

$snx$  satisfaz a (6) e tem tambem o infinito  $iK'$ , com o residuo  $\frac{\theta\theta_1}{\eta_1\eta_1'}$ ; por isso temos

$$snx = \frac{\pi\theta\theta_1}{2K\eta_1\eta_1'} \sum_n \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{2K}[x - (2n+1)iK']}$$

$cnx$  satisfaz a (7) e tambem tem o infinito  $iK'$ , com o residuo  $-\frac{i\theta\theta_1}{\eta_1\eta_1'}$ ; por isso temos

$$cnx = -\frac{\pi i\theta\theta_1}{2K\eta_1\eta_1'} \sum_n \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{2K}[x - (2n+1)iK']}$$

Estas formulas differem apenas pela notação d'aquellas a que chegaram Briot e Bouquet seguindo o seu methodo (\*).

Agrupando os termos dous a dous, os que correspondem a valores de  $n$  eguaes e de signaes contrarios em (9) e a valores

(\*) Théorie des fonctions elliptiques, pag. 293 e 296.

de  $2n + 1$  tambem eguaes e de signaes contrarios em (10) e (11), chegamos a

$$dnx = \frac{\pi \theta \eta_1}{2K' \theta_1 \eta_1'} \left[ \sec \frac{\pi x}{2iK'} + 4 \cos \frac{\pi x}{2iK'} \sum_1^\infty \frac{q_1^n (q + q_1^{2n})}{1 + 2q^{2n} \cos \frac{\pi x}{iK'} + q^{4n}} \right],$$

$$snx = \frac{2\pi \theta \theta_1 \sqrt{q}}{K \eta_1 \eta_1'} \sum_1^\infty \frac{q^n (1 + q^{2n+1}) \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2K}}{1 - 2q^{2n+1} \cos \frac{\pi x}{K} + q^{4n+2}}$$

$$cnx = \frac{2\pi \theta \theta_1 \sqrt{q}}{K \eta_1 \eta_1'} \sum_1^\infty \frac{q^n (1 - q^{2n+1}) \cos \frac{\pi x}{2K}}{1 - 2q^{2n+1} \cos \frac{\pi x}{K} + q^{4n+2}}$$

As egualdades

$$\frac{1 + q^n}{1 + 2q^n \cos z + q^{2n}} = 1 + \sum_1^m q^{mn} \left( 1 + \sum_1^m (-1)^\mu \cos \mu z \right),$$

$$\frac{1 - q^n}{1 - 2q^n \cos z + q^{2n}} = 1 + \sum_1^m (-1)^m q^{mn} + \sum_1^m (-1)^{m+1} q^{mn} \sum_1^m (-1)^{\mu+1} \cos \mu z,$$

que facilmente se demonstrem empregando o processo de divisão, permittem-nos dar áquellas funcções os seguintes desenvolvimentos

$$dnx = \frac{\pi \theta \eta_1}{2K' \theta_1 \eta_1'}$$

$$\left\{ \sec \frac{\pi x}{2iK'} + 4 \cos \frac{\pi x}{2iK'} \sum_1^\infty q_1^n \left[ 1 + \sum_1^m q_1^{mn} \left( 1 + \sum_1^m (-1)^\mu \cos \frac{\mu \pi x}{iK'} \right) \right] \right\}$$

$$snx = \frac{2\pi\theta\theta_1\sqrt{q}\sin\frac{\pi x}{2K}}{K\eta_1\eta'} \sum_1^\infty q^n \left[ 1 + \sum_1^\infty q^{m(2n+1)} \left( 1 + \sum_1^\infty \cos\frac{\mu\pi x}{K} \right) \right]$$

$$cnx = \frac{2\pi\theta\theta_1\sqrt{q}\cos\frac{\pi x}{2K}}{K\eta_1\eta'}$$

$$\sum_1^\infty q^n \left[ 1 + \sum_1^\infty (-1)^m q^{m(2n+1)} + \sum_1^\infty (-1)^{m+1} q^{m(2n+1)} \sum_1^m (-1)^{\mu+1} \cos\frac{\mu\pi x}{K} \right]$$

A função  $dnx$  ainda é susceptível d'outro desenvolvimento que não vem complicado com imaginários, como o desenvolvimento precedente; porque

$$dnx = -\frac{i\pi\theta\eta_1}{K'\theta\eta'} e^{\frac{\pi}{2K'}(x-iK')} \sum_n \frac{q_1^n}{q_1^{2n} e^{\frac{\pi}{K'}(x-iK')} - 1}$$

$$= \frac{\pi\theta\eta_1}{K'\theta\eta'} e^{\frac{\pi x}{2K'}} \sum_n \frac{q_1^n}{1 + q_1^{2n} e^{\frac{\pi x}{K'}}$$

e como

$$\frac{q_1^n}{1 + q_1^{2n} e^x} = \sum_1^\infty (-1)^m q_1^{(2m+1)n} e^{mx}$$

será

$$dnx = \frac{\pi\theta\eta_1}{K'\theta\eta'} \sum_n \sum_1^\infty (-1)^m q_1^{n(2m+1)} e^{\frac{(2m+1)\pi x}{2K}}$$

SUR LA TRANSFORMATION ISOGONALE DE W. ROBERTS

PAR  
M. M. D'OCAGNE

La transformation isogonale de W. Roberts consiste, comme on sait, à faire correspondre au point  $M$  dont les coordonnées polaires sont  $\rho$  et  $\omega$ , le point  $M_m$  dont les coordonnées  $\rho_m$  et  $\omega_m$  sont données par

$$\rho_m = k\rho^m, \quad \omega_m = m\omega,$$

ou, en d'autres termes, au point dont l'affixe est  $z$  celui dont l'affixe est  $kz^m$ .

Dans un petit Mémoire consacré à cette transformation (\*), j'ai démontré que si  $n$  est la normale polaire au point  $M$  (c'est-à-dire la portion de la normale à la courbe que décrit le point  $M$ , comprise entre ce point et la perpendiculaire élevée par le pôle  $O$  à  $OM$ )  $r$  le rayon de courbure correspondant,  $n_m$  et  $r_m$  les mêmes éléments pour le point  $M_m$ , on a

$$(1) \quad m \frac{n_m}{r_m} - \frac{n}{r} = m - 1.$$

Je vais ici faire connaître une interprétation géométrique de cette formule qui permet de déduire très aisément du centre de courbure en un point d'une courbe le centre de courbure au point correspondant de sa transformée.

(\*) *Journal de Sciencias Mathematicas*, 1885.

Remarquons d'abord que la formule (1) peut s'écrire

$$\frac{n-r}{r} \cdot \frac{r_m}{n_m-r_m} = m,$$

ou, en appelant C et  $C_m$  les centres de courbure répondant aux points M et  $M_m$ ,

$$\frac{CN}{CM} \cdot \frac{C_m M_m}{C_m N_m} = m.$$

Des points C et  $C_m$  abaissons sur OM et sur  $OM_m$  les perpendiculaires CD et  $C_m D_m$ . Nous avons

$$(2) \quad \frac{DO}{DM} \cdot \frac{D_m M_m}{D_m O} = m.$$

Soit H le point où la droite  $DD_m$  coupe  $MM_m$ . Le théorème des transversales, appliqué au triangle  $OMM_m$ , donne

$$\frac{DO \cdot D_m M_m \cdot HM}{DM \cdot D_m O \cdot HM_m} = 1,$$

ou en tenant compte de (2),

$$\frac{HM}{HM_m} = \frac{1}{m}.$$

Telle est la relation géométrique que nous voulions obtenir. Elle donne lieu à l'énoncé suivant :

*La droite qui joint les projections des centres de courbure C et  $C_m$  respectivement sur les vecteurs OM et  $OM_m$  divise la droite  $MM_m$  au point H, dans un rapport constant. Les distances du point H à M et à  $M_m$  sont proportionnelles à 1 et à m.*

En particulier, pour  $m = -1$ , auquel cas les courbes (M) et ( $M_m$ ) sont (à la symétrie près par rapport à  $Ox$ ) inverses l'une de l'autre, le point H est le milieu de  $MM_m$ .

NOVA DEMONSTRAÇÃO DE UMA FORMULA DE KIRCHKOFF (\*)

(Extracto de uma carta dirigida a A. Gutzmer)

M. LERCH

. . A formula de Kirchhoff que se refere á serie (\*\*)

$$R(x, y, z) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{y^{\alpha}}{1 - xz^{\alpha}}$$

da qual deu ha pouco uma demonstração, (\*\*\*) fundada na serie de Heine, pode ser deduzida da maneira seguinte:

Tomando na serie anterior os valores absolutos de  $x, y$  e  $z$  menores do que a unidade, vem evidentemente

$$R(x, y, z) = \sum x^{\alpha} y^{\alpha} z^{\alpha} \quad (\alpha, \beta = 0, 1, 2, \dots)$$

Divida-se agora os termos d'esta serie absolutamente convergente em dois grupos, o primeiro comprehendendo aquelles em que  $\alpha \geq \beta$ , e o segundo aquelles em que  $\alpha < \beta$ . No primeiro pode-se portanto pôr  $\alpha < \mu + \nu$ ,  $\beta = \mu$ , e no segundo  $\alpha = \mu$ ,  $\beta = \mu + \nu + 1$ , onde  $\mu$  e  $\nu$  representam quantidades quaesquer não negativas. Temos

$$R(x, y, z) = \sum x^{\mu} y^{\mu + \nu} z^{(\mu + \nu)\mu} + \sum x^{\mu + \nu + 1} y^{\mu} z^{\mu(\mu + \nu + 1)}$$

(\*) O artigo que segue é traduzido do volume do *Zeitschrift für Mathematik und Physik* (Dresde) correspondente a 1888. (G. T.)

(\*\*) *Sitzungsberichte der Königl. Academie d. Wissenschaften zu Berlin*, 1883, pag. 1007-1013.

(\*\*\*) *Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas* publicado pelo Dr. F. Gomes Teixeira, vol. viii, pag. 81-88.

ou

$$R(x, y, z) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{x^{\mu} y^{\mu} z^{\mu^2}}{1 - yz^{\mu}} + \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{x^{\mu+1} y^{\mu} z^{\mu(\mu+1)}}{1 - xz^{\mu}},$$

d'onde se tira finalmente a formula de Kirchhoff:

$$R(x, y, z) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1 - xyz^{2\mu}}{(1 - xz^{\mu})(1 - yz^{\mu})} x^{\mu} y^{\mu} z^{\mu^2},$$

que queriamos deduzir (\*).

Praga, 15 de maio de 1888.

(\*) O methodo empregado é tirado de uma carta do sr. Hermite ao sr. Fuchs (*Sur les valeurs asymptotiques de quelques fonctions numériques; Journal für die reine und angewandte Mathematik*, t. 99). (M. L.)



**SOBRE O INTEGRAL**  $\int_0^\pi \cot(x - \alpha) dx$

POR

F. GOMES TEIXEIRA

O integral  $\int_0^\pi \cot(x - \alpha) dx$  tem uma importancia consideravel na theoria da integração das funcções racionais de  $\sin x$  e  $\cos x$ , como fez vêr o sr. Hermite no seu *Cours d'Analyse* (pag. 342 e seguintes), onde determinou este integral por um methodo engenhoso, e em seguida n'um artigo publicado no tom. II d'este jornal, onde o determinou por um methodo mais elementar. Aqui vamos apresentar um meio tambem elementar para obter o mesmo integral, fazendo-o depender do integral

$$\int_0^\pi \frac{f'(x) dx}{1 + [f(x)]^2}$$

Seja  $\alpha = a + bi$ , o que dá

$$\begin{aligned} \int \cot(x - a - bi) &= \int \frac{\cos(x - a - bi) dx}{\sin(x - a - bi)} \\ &= \int \frac{\cos(x - a) \cos ib + \sin(x - a) \sin ib}{\sin(x - a) \cos ib - \cos(x - a) \sin ib} dx \end{aligned}$$

ou, por ser

$$\cos ib = \frac{e^{-b} + e^b}{2},$$

$$\operatorname{sen} ib = \frac{e^{-b} - e^b}{2i},$$

$$\int \cot(x-a) = \int \frac{(e^{-b} + e^b) \cos(x-a) - i(e^{-b} - e^b) \operatorname{sen}(x-a)}{(e^{-b} + e^b) \operatorname{sen}(x-a) + i(e^{-b} - e^b) \cos(x-a)} dx.$$

Multipliquemos agora o numerador e denominador da ultima fracção por

$$(e^{-b} + e^b) \operatorname{sen}(x-a) - i(e^{-b} - e^b) \cos(x-a),$$

o que dá

$$\int \cot(x-a) dx = \int \frac{2 \operatorname{sen}(x-a) dx}{e^{-2b} + e^{2b} - \cos 2(x-a)} - i \int \frac{(e^{-2b} - e^{2b}) dx}{(e^{-b} + e^b)^2 \operatorname{sen}^2(x-a) + (e^{-b} - e^b)^2 \cos^2(x-a)}$$

$$= \frac{1}{2} \log [e^{-2b} + e^{2b} - 2 \cos 2(x-a)]$$

$$- i \int \frac{(e^{-b} + e^b)(e^b - e^{-b}) \frac{dx}{\cos^2(x-a)}}{(e^{-b} - e^b)^2 + (e^{-b} + e^b)^2 \operatorname{tang}^2(x-a)}$$

$$= \frac{1}{2} \log [e^{-2b} + e^{2b} - 2 \cos 2(x-a)]$$

$$- i \int \frac{d \left[ \frac{e^{-b} + e^b}{e^{-b} - e^b} \operatorname{tang}(x-a) \right]}{1 + \left[ \frac{e^{-b} + e^b}{e^{-b} - e^b} \operatorname{tang}(x-a) \right]^2}.$$

Mas por ser

$$e^{-2b} + e^{2b} > 2,$$

a funcção

$$\log [e^{-2b} + e^{2b} - 2 \cos 2(x-a)]$$

tem um ramo real com valores iguaes no ponto  $x=0$  e  $x=\pi$ . Logo teremos

$$\int_0^\pi \cot(x-a) dx = -i \int_0^\pi \frac{d \left[ \frac{e^{-b} + e^b}{e^{-b} - e^b} \operatorname{tang}(x-a) \right]}{1 + \left[ \frac{e^{-b} + e^b}{e^{-b} - e^b} \operatorname{tang}(x-a) \right]^2}.$$

O integral que entra no segundo membro é da forma

$$\int_0^\pi \frac{f'(x) dx}{1 + [f(x)]^2}.$$

e vamos por isso applicar-lhe o theorema

$$\int_0^\pi \frac{f'(x) dx}{1 + [f(x)]^2} = \operatorname{Arc tang} f(\pi) - \operatorname{Arc tang} f(0) + (n-m)\pi,$$

onde  $n$  representa o numero de vezes em que a funcção  $f(x)$  passa pelo infinito indo do positivo para o negativo, e  $m$  o numero de vezes que  $f(x)$  passa pelo infinito indo do negativo para o positivo. Pondo

$$f(x) = \frac{e^{-b} + e^b}{e^{-b} - e^b} \operatorname{tang}(x-a),$$

e notando: 1.º que, quando  $x$  varia desde 0 até  $\pi$ ,  $\operatorname{tang}(x-a)$  passa uma só vez pelo infinito indo do positivo para o negativo; 2.º que a fracção

$$\frac{e^{-b} + e^b}{e^{-b} - e^b}$$

é positiva ou negativa segundo  $b$  é menor ou maior do que zero, conclue-se que  $f(x)$  passa uma só vez pelo infinito, indo de positiva para negativa quando  $b < 0$ , e de negativa para positiva quando é  $b > 0$ .

Temos pois

$$\int_0^{\pi} \cot(x - \alpha) dx = i\pi$$

quando  $b > 0$ , e

$$\int_0^{\pi} \cot(x - \alpha) dx = -i\pi$$

quando  $b < 0$ .

## BIBLIOGRAPHIA

*Annaes do Observatorio Astronomico do Rio de Janeiro*, t. III, 1888.

O assumpto do tomo III dos *Annaes do Observatorio Astronomico do Rio de Janeiro* é a passagem de Venus que teve lugar em 6 de dezembro de 1882. Sabe-se que entre os methodos empregados para determinar a distancia da Terra ao Sol nenhum ha que possa competir com o methodo fundado nas observações das passagens de Venus pelo disco solar. Desde que este methodo foi apresentado por Halley em 1677, quatro foram as passagens que tiveram lugar, e durante todas ellas se fizeram as observações necessarias para deduzir aquelle elemento fundamental da Astronomia.

Entre os paizes que mandaram expedições observar a passagem de 1882 occupa logar importante o Brasil, que mandou tres expedições observar este phenomeno, estabelecendo-se uma na ilha de S. Thomaz (Antilhas), outra em Puenta Arenas, no estreito de Magalhães, outra em Pernambuco.

O tomo III dos *Annaes do Observatorio* contém os relatorios d'estas missões, escriptos em lingua portugueza e franceza.

O primeiro Relatorio é da missão de S. Thomaz e foi escripto pelo sr. Barão de Teffé, chefe da expedição, director dos trabalhos hydrographicos do Brasil. Segue-se o Relatorio da commissão de Pernambuco, cujo chefe foi o sr. J. de Oliveira Lacaille, astronomico do Observatorio do Rio de Janeiro. Finalmente vem o Relatorio do sr. Cruls, o illustre director do Observatorio do Rio de Janeiro, que dirigiu a commissão de Puenta Arenas.

O methodo empregado pelos astronomicos brasileiros para determinar a parallaxe solar foi o methodo dos contactos obtidos por projecção, e o methodo fundado na medida da distancia dos centros do Sol e de Venus obtida por um processo devido ao antigo director do Observatorio sr. E. Liais. Cada Relatorio traz as observações que n'este sentido se fizeram e as observações

astronomicas e metereologicas que se fizeram para determinar outros elementos necessarios para a resolução do problema proposto, taes como determinação das coordenadas do logar, estudo da marcha dos chronometros, etc.

Além d'isso o Relatorio do sr. Barão de Teffé contém informações interessantes relativas ao paiz em que teve logar a observação, á viagem effectuada para lá chegar, etc.; e o Relatorio do sr. Cruls é acompanhado por umas interessantes *Notas de viagem* em que o sr. L. F. de Saldanha da Gama descreve as regiões visinhas do Estreito de Magalhães.

O volume publicado pelo Observatorio astronomico do Rio de Janeiro a respeito da ultima passagem de Venus dá a maior honra a este importante estabelecimento, e é de natureza a occupar um logar dos mais distinctos entre as publicações relativas a este phenomeno.

Terminaremos por dizer que a edição é primorosa e mostra quanto no Brasil está adiantada a arte typographica.

*G. de Longchamps. — Algèbre, 2.<sup>o</sup> edition. — Paris, 1889.*

*— Supplément. — Paris, 1890.*

Na pag. 109 do t. VIII d'este Jornal publicámos já uma noticia sobre a primeira edição da Algebra do sr. Longchamps. A respeito da nova edição d'este livro excellente só temos hoje a dizer que o auctor fez n'elle algumas modificações para o tornar conforme aos programmas para a admissão na Escola Polytechnica de Paris, e o aperfeiçoou em alguns pontos. Assim a nova edição contém, além das doutrinas que entravam na primeira, uma theoria da convergencia das series, noções sobre os infinitamente pequenos e sobre as differenciaes, alguns principios de calculo integral, o theorema de Maclaurin para o desenvolvimento das funcções em serie e sua applicação ás funcções  $(1+x)^m e^x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\log(1+x)$ , os primeiros principios do calculo das differenças, etc. Cada capitulo da obra é seguido por uma lista de exercicios muito bem escolhidos.

Dó *Supplemento* foi tambem já dada uma noticia rapida na pag. 111 do t. VIII d'este jornal. A nova edição contém, como a antiga, a theoria da convergencia das series, os principios da

Analyse infinitesimal, a theoria das differenças, etc. Na nova edição desenvolveu porém mais o auctor a parte relativa á Geometria infinitesimal, e introduziu tres novas lições, uma relativa ás coordenadas trilineares, outra relativa ás coordenadas tangenciaes e uma terceira relativa á intersecção das curvas do 2.º gráo.

G. de Longchamps. — *Les fonctions pseudo et hyper-Bernoulliennes etc.* (*Mémoires couronnés de l'Académie R. de Belgique*, t. LI).

Principia o auctor a sua bella memoria pelo estudo da lei de recorrencia

$$A_n \varphi(n) = A_1 A_{n-1} + A_2 A_{n-2} + \dots + A_{n-1} A_1$$

( $A_1, A_2$ , etc. representando uma serie composta de um numero infinito de numeros e  $\varphi(n)$  uma funcção dada de  $n$ ), e por fazer vêr que, por meio d'esta relação, se pôde exprimir a lei de recorrencia d'algumas series importantes, taes como as series que representam os desenvolvimentos de  $e^x$ ,  $\text{sen } x$ ,  $\text{cos } x$ , etc.

Em seguida estuda o auctor o caso em que  $\varphi(n)$  representa a funcção  $an + b$ ,  $a$  e  $b$  representando numeros constantes. N'este caso a relação anteriormente considerada representa a lei de recorrencia dos desenvolvimentos em serie de  $\text{tang } x$ ,  $\text{Th } x$ ,  $x \text{ cõt } x$ , etc., e de um integral particular da equação de Riccati:

$$y' + Ay^2 = Bx^m.$$

Este ultimo resultado é principalmente importante, porque só se conhecia até aqui o integral d'esta equação debaixo da fórma de quociente de dois integraes definidos ou de duas series.

G. Peano. — *I principii di Geometria logicamente esposti.* — Torino, 1889.

Nas primeiras linhas do prefacio do seu importante opusculo

expõe o auctor claramente qual o objecto que tem em vista. Diz com effeito, o sr. Peano:

«Quaes são as entidades geometricas que se podem definir, e quaes as que se devem aceitar sem definição? E entre as propriedades, experimentalmente verdadeiras, quaes é necessario aceitar sem demonstracção e quaes se podem deduzir como consequencia.

«A analyse d'estas questões, pertencentes ao mesmo tempo á Logica e a Geometria, são o objecto d'este livro.»

A questão de que se occupa o illustre geometra de Turim é a mais difficil de todas as questões de geometria e tem sido objecto de trabalhos importantes.

Como no opusculo de que se deu noticia na pag. 54, os termos, pertencentes á Logica e á Geometria, para o enunciado das proposições são substituidos por signaes, o que permite enunciar estas proposições de um modo rigoroso e que não dá logar a ambiguidades. No principio do livro vem uma lista d'estes signaes.

O primeiro paragrapho do opusculo contém os signaes das entidades geometricas que se não podem definir.

O paragrapho segundo contém todas as definições de que se faz uso.

Os paragraphos seguintes contém 16 axiomas e os theoremas que dependem d'estes axiomas. Cada axioma é immediatamente seguido dos theoremas que dependem d'elle e dos anteriores.

Termina o livro uma serie de notas muito interessantes contendo explicações relativas ao assumpto principal.

---

*G. W. Johnson. — Trazado de curvas dadas em coordenadas cartesianas (traduzido do inglez para hespanhol por V. Balbin). — Buenos Ayres, 1889.*

O principal objecto d'este livro é a determinação da forma das curvas quando são dadas as suas equações em coordenadas cartesianas. O auctor, para tornar o seu livro accessivel a maior numero de leitores, emprega sómente methodos algebricos. A importancia do assumpto, a clareza com que está escripto, e a boa escolha das doutrinas levaram o sr. V. Balbin a traduzil-os em



lingua hespanhola para servir de texto aos alumnos da cadeira de *Calculo graphico* na Universidade de Buenos Ayres.

---

*J. A. Serrasqueiro. — Tratado de Algebra Elementar. — Coimbra, 1890.*

Veja-se o que se disse na pag. 46 do t. VIII e na pag. 122 do t. V a respeito d'esta obra.

---

*G. Lalbaletrier. — Trigonometrie rectiligne suivie des principes de la nouvelle Géometrie du triangle. — Paris, 1889 (lithographado).*

Consta esta obra de duas partes. A primeira contém a Trigonometria rectilinea. N'esta parte expõe o auctor as doutrinas que se encontram habitualmente nos livros que se occupam d'este ramo da Geometria.

Na segunda parte vem uma exposição clara e bastante completa dos principios da nova geometria do triangulo. É a parte verdadeiramente interessante do livro de que estamos dando noticia, e que merece ser lida por aquelles que querem ter conhecimento das bellas questões pertencentes a este ramo moderno de geometria.

Termina o livro por uma collecção de exercicios relativos a todos os assumptos de que o auctor se occupa tanto na primeira como na segunda parte.

---

*B. J. Clasen. — Sur une nouvelle méthode de résolution des équations linéaires et sur l'application de cette méthode au calcul des déterminants. — Paris, 1889.*

Para fazer conhecer o methodo a que se refere o opusculo de

que queremos dar noticia, applichemol-o ao caso de tres equações a tres incognitas

$$a x + b y + c z = d$$

$$a' x + b' y + c' z = d'$$

$$a'' x + b'' y + c'' z = d''.$$

Por meio d'estas equações fórma o sr. Clasen duas novas equações taes que numa d'ellas não entre  $x$  e na outra não entre  $y$ , e taes que  $x$  e  $y$  tenham o mesmo coeſiciente.

Estas novas equações são

$$(ab' - ba')x + (cb' - bc')z + bd' - db' = 0$$

$$(ab' - ba')y + (ac' - ca')z + da' - ad' = 0.$$

Depois o auctor multiplica a primeira d'estas equações por  $-a''$ , a segunda por  $-b''$  e somma os resultados com a terceira das equações propostas para ter a equação que dá  $z$ .

Como se vê o methodo tem analogia com o methodo de redução ao mesmo coeſiciente, do qual differe todavia em alguns pontos essenciaos.

No seu interessante opusculo o sr. Clasen expõe com toda a generalidade o novo methodo e faz vêr quaes são as suas vantagens. Mostra, com effeito, que, ao contrario do que acontece com os outros methodos, o novo methodo indica e faz desaparecer os factores communs que se introduzem durante o calculo; que o numero das operações a executar é menor; finalmente que faz conhecer, logo que entram em calculo, as equações incompatives com as usadas anteriormente.

#### *Inauguration de la nouvelle Sorbonne. — Paris, 1889.*

Contém este opusculo os discursos pronunciados pelos srs. Gréard, Hermite, Chautemps e Fallières no dia 5 de agosto de 1889, pela occasião da inauguração da nova Sorbonne.

No seu magnifico discurso o sr. Hermite traça a historia bri-

lhante do ensino das mathematicas neste estabelecimento de instrucção.

Foi em 1809 que as mathematicas tomaram logar entre os assumptos ensinados na Sorbonne, e desde então até hoje foram elles ensinados por homens eminentes como Lacroix, Poisson, Biot, Francoeur, Hachette, Sturm, Poncelet, Delaunay, Le Verrier, Lamé, Liouville, Serret, Duhamel, Chasles, Cauchy, Puiseux, Briot, Bouquet e outros que actualmente ainda continuam a obra de tão grandes mestres.

O sr. Hermite refere-se a todos estes geometras mostrando o papel que cada um d'elles representou nas sciencias mathematicas e physicas, e quaes os principaes trabalhos e descobertas com que concorreram para o progresso d'estas sciencias.

*M. Lerch. — Introduction à une théorie élémentaire des intégrales elliptiques (Annales scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, 3.ª série, t. vi, 1889).*

Deve-se ao sr. Hermite o ter mostrado pela primeira vez o papel importante que representam certas linhas em que uma expressão analytica se torna descontínua (*coupures*) no estudo das funcções definidas por integraes imaginarios. Aproveitando esta doutrina, o sr. Lerch expõe os principios da theoria das funcções ellipticas sem a consideração dos integraes curvilineos. Parte para isso o auctor do integral

$$\int_0^1 \frac{x dt}{\sqrt{(1-t^2 x^2)(1-k^2 t^2 x^2)}}$$

onde  $x$  representa uma variavel real ou imaginaria, e mostra que este integral define uma funcção analytica de  $x$  com quatro pontos criticos.

Em seguida estuda o auctor a influencia do caminho seguido pela variavel  $x$  sobre o valor da funcção precedente para mostrar que a funcção é duplamente periodica.

Estudado o integral precedente, passa o sr. Lerch ao estudo

da funcção inversa da funcção definida por este integral estudando para isso, como Briot e Bouquet, a equação diferencial

$$\frac{dx}{du} = \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}.$$

Deve-se observar que em todo o seu bello trabalho o illustre geometra de Praga não emprega outras considerações que as que são relativas aos integraes das funcções imaginarias de variaveis reaes e ás series, e que o novo methodo de tractar dos fundamentos da theoria das funcções ellipticas têm uma superioridade consideravel, sob o ponto de vista da clareza, sobre o methodo fundado na consideração dos integraes curvilineos.

*M. Lerch. — Sur certains développements en séries trigonométriques.*

O principal objecto d'esta memoria é o desenvolvimento em serie trigonometrica da funcção definida pela serie

$$m = -\sum_{x=0}^{\infty} \frac{1}{[(x-m)^2 + u]^{\frac{1}{2}}},$$

que contém como caso particular uma outra serie anteriormente estudada pelo sr. Appell.

*P. Appell. — Sur les invariants de quelques équations différentielles (Journal des Mathématiques, 4<sup>e</sup> série, t. v).*

Nesta importante memoria occupa-se o eminente geometra francez do estudo dos invariantes e dos casos de integrabilidade:

1.º das equações differenciaes da fórma

$$y' = \frac{a_0 + a_1 y + \dots + a_n y^n}{b_0 + b_1 y + \dots + b_p y^p} \quad (p < n)$$

que conservam a mesma fórma quando se toma uma nova variavel dependente  $\eta$  e uma nova variavel independente  $\xi$  ligadas com  $x$  e  $y$  pelas relações

$$y = \eta u(x) + v(x), \quad \frac{d\xi}{dx} = \eta(x);$$

2.º das equações differenciaes homogeneas relativamente a  $y$  e suas derivadas que conservam a mesma fórma quando se faz

$$y = \eta u(x), \quad \frac{d\xi}{du} = \eta(x).$$

J. Ptaszycki. — *Sur la réduction de certaines intégrales abéliennes à la forme normale* (*Mathematische Annalen*, t. XXXIII).

N'esta Nota importante estende o sr. Ptaszycki aos integraes que dependem de uma raiz qualquer de um polynomio inteiro um theorema demonstrado pelo sr. Hermite para o caso dos integraes hyperellipticos, segundo o qual a redução d'estes integraes á fórma normal póde ser effectuada por meio de operações algebricas.

J. Ptaszycki. — *Sur l'intégration algébrique des différentielles algébriques* (*Acta Mathematica*, t. XI).

N'este artigo appresenta o illustre geometra russo um theorema importante que lhe permite resolver de um modo novo o

problema que consiste em exprimir o integral  $\int y dx$  ( $y$  estando ligado a  $x$  por uma equação algebraica) por meio de uma função algebraica de  $x$ , ou a mostrar que este integral não é algebraico.

---

S. Pincherle. — *Alcuni teoremi sulle frazioni continue* (*Rendiconti delle R. Accademia dei Lincei*, 1889).

O auctor apresenta alguns criterios importantes para decidir da convergencia de algumas fracções continuas.

---

Gino Loria. — *Rassegna di alcuni scritti sui poligoni di Poncelet* (*Bibliotheca Mathematica de G. Eneström*, 1889).

---

G. Eneström. — *Meddelande om Svedenborgs matematiska arbeten* (*Ofversigt af K. Vetenskaps Akademiens Förhandlingar*, 1889).

— *Bidrag till de matematiska studiernas historia i Sverige under femtonhundratalet* (*Stem*).

---

Eduard Weyr. — *O theorii forem bilinearnych.* — *Praze*, 1889.

---

*Notice sur les travaux scientifiques et littéraires de Aristide Marre.*  
— *Rome*, 1889.

---

G. B. Guccia. — *Su una proprietà delle superficie algebriche dotate di singolarità qualunque* (*Rendiconti della R. Accademia dei Lincei*, 1889).

- 
- Sulla intersezione di tre superficie algebriche in un punto singolare, etc. (Item).
- Nuovi teoremi sulle superficie algebriche dotate di singolarità qualunque. (Item).
- Sopra un recente lavoro concernente la riduzione dei sistemi lineari di curve algebriche piane (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. III).
- Sulla singolarità composte delle curve algebriche piane. (Item).
- 

P. S. Schoute. — Sur un théorème relatif à l'hessienne d'une forme binaire (Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, t. III).

---

G. Humbert. — Théorèmes concernant une classe de surfaces algébriques (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. III).

---

H. G. Zeuthen. — Note sur les huit points d'intersection de trois surfaces du seconde ordre (Acta Mathematica, t. XII).

---

E. de Longchamps. — Sur les égalités à deux degrés (Journal des Mathématiques élémentaires, 1889).

— Sur le cercle de Joachimstal (Mathesis, t. XII).

---

F. Engel. — Zur invariantentheorie der Systeme von Pfaff'schen Gleichungen (Berichten der Königl. Sächs Gesellschaft der Wissenschaften, 1889).

---

M. Lerch. — Sur un théorème fondamental dans la théorie des équations différentielles (Comptes rendus des séances de la Société royale des Sciences de Bohême, 1889).

S. Pincherle. — *Di un'estensione dell'algoritmo delle frazione continua* (*Rendiconti del R. Istituto Lombardo*, serie 2.<sup>a</sup>, vol. XXII).

C. Pelz. — *Herr Küpper und der Pohlke'sche Beweis der Satres von Pohlke*, Graz, 1889.

E. Cesàro. — *Contribution à la théorie des limites* (*Bulletin des Sciences Mathématiques*, t. XIII).

L. Burmester. — *Kinematische Untersuchung der Mechanismen mit Bandtrieb* (*Civil-ingenieur*, t. XXXV).

G. T.



DUAS FORMULAS DE ANALYSE

POR

JOSÉ BRUNO DE CABEDO

(Professor na Universidade de Coimbra)

Sejam  $F(x)$ ,  $F_1(x)$  expressões finitas e determinadas, e  $f'(z)$ ,  $f'_1(z)$  funcções que gozam da mesma propriedade no intervallo de  $x$  a  $x+h$ .

Se, além d'isto, a equação  $F_1(x) + hf'_1(z) = 0$  não tem raiz alguma dentro do intervallo considerado, ter-se-ha

$$\frac{F(x) + f(x+h) - f(x)}{F_1(x) + f_1(x+h) - f_1(x)} = \frac{F(x) + hf'(x+\theta h)}{F_1(x) + hf_1(x+\theta h)},$$

designando por  $\theta$  uma quantidade comprehendida entre zero e a unidade.

Com effeito, fazendo

$$\frac{F(x) + f(x+h) - f(x)}{F_1(x) + f_1(x+h) - f_1(x)} = A,$$

a consideração da funcção

$$\begin{aligned} \psi(z) &= F(x) + f(z+h) - f(z) - A [F_1(x) + f_1(z+h) - f_1(z)] \\ &= F(x) - AF_1(x) + f(z+h) - Af_1(z+h) - f(z) + Af_1(z) \\ &= F(x) - AF_1(x) + h [f'(z+\theta h) - Af'_1(z+\theta h)] \end{aligned}$$

dá, pondo  $z = x$  e notando que é  $\psi(x) = 0$ ,

$$A = \frac{F(x) + h f'(x + \theta h)}{F_1(x) + h f'_1(x + \theta h)}$$

A proposição correspondente no calculo integral enuncia-se da maneira seguinte:

Sejam  $F(x)$ ,  $F_1(x)$  expressões finitas e determinadas e  $f(z)$ ,  $f_1(z)$  funcções que gozam da mesma propriedade no intervalo de  $x$  a  $x+h$ .

Se, além d'isto, a equação  $F_1(x) + h f_1(z) = 0$  não tem raiz alguma dentro do intervalo considerado, ter-se-ha

$$\frac{F(x) + \int_x^{x+h} f(z) dz}{F_1(x) + \int_x^{x+h} f_1(z) dz} = \frac{F(x) + h f(x + \theta h)}{F_1(x) + h f_1(x + \theta h)}, \dots (1)$$

designando por  $\theta$  uma quantidade comprehendida entre zero e a unidade.

Para dar uma applicação da formula que acabamos de deduzir, consideremos as equações

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \dots \\ &+ \frac{(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(x_0) + \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x (x-t)^{n-1} f^n(t) dt \\ F(x) &= F(x_0) + (x - x_0) F'(x_0) + \dots \\ &+ \frac{(x - x_0)^{m-1}}{(m-1)!} F^{m-1}(x_0) + \frac{1}{(m-1)!} \int_{x_0}^x (x-t)^{m-1} F^m(t) dt \end{aligned} \right\} (2)$$

das quaes se tira

$$\frac{f(x) - f(x_0) - \dots - \frac{(x-x_0)^l}{l!} f^l(x_0)}{F(x) - F(x_0) - \dots - \frac{(x-x_0)^k}{k!} F^k(x_0)} =$$

$$\frac{\frac{(x-x_0)^{l+1}}{(l+1)!} f^{l+1}(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(x_0) + \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x (x-t)^{n-1} f^n(t) dt}{\frac{(x-x_0)^{k+1}}{(k+1)!} F^{k+1}(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^{m-1}}{(m-1)!} F^{m-1}(x_0) + \frac{1}{(m-1)!} \int_{x_0}^x (x-t)^{m-1} F^m(t) dt}$$

ou

$$\frac{f(x) - f(x_0) - \dots - \frac{(x-x_0)^l}{l!} f^l(x_0)}{F(x) - F(x_0) - \dots - \frac{(x-x_0)^k}{k!} F^k(x_0)} =$$

$$\frac{\frac{(x-x_0)^{l+1}}{(l+1)!} f^{l+1}(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(x_0) + \frac{(x-x_0)^n}{(n-1)!} (1-\theta)^{n-1} f^n[x_0 + \theta(x-x_0)]}{\frac{(x-x_0)^{k+1}}{(k+1)!} F^{k+1}(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^{m-1}}{(m-1)!} F^{m-1}(x_0) + \frac{(x-x_0)^m}{(m-1)!} (1-\theta)^{m-1} F^m[x_0 + \theta(x-x_0)]}$$

Verificadas as condições que permitem fazer uso das equações (1), (2), acha-se assim demonstrada a notavel formula descoberta pelo illustre redactor d'este jornal (\*).

(\*) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3.<sup>a</sup> serie, tomo v.

## SOBRE AS FUNÇÕES ELLIPTICAS

POR

JOSÉ PEDRO TEIXEIRA

### I

As funcções duplamente periodicas ordinarias

$$(1) \dots \left\{ \begin{aligned} \varphi(x, z) &= \frac{\pi}{K} \sum_n \operatorname{cosec} \frac{\pi}{K} (x - z - 2niK') \\ &= \frac{2\pi i}{K} e^{\frac{\pi i}{K}(x-z)} \sum_n \frac{q^{2n}}{e^{\frac{2\pi i}{K}(x-z)} - q^{4n}}, \end{aligned} \right.$$

$$(2) \dots \left\{ \begin{aligned} \psi(x, z) &= \frac{\pi}{iK'} \sum_n \operatorname{cosec} \frac{\pi}{iK'} (x - z - 2nK) \\ &= \frac{2\pi}{K'} e^{\frac{\pi}{K'}(x-z)} \sum_n \frac{q_1^{2n}}{q_1^{4n} e^{\frac{2\pi}{K'}(x-z)} - 1}, \end{aligned} \right.$$

onde  $q = e^{-\pi \frac{K'}{K}}$ ,  $q_1 = e^{-\pi \frac{K}{K'}}$ , considerando  $z$  como variavel, têm, no interior do parallelogramo dos periodos, a primeira os infinitos  $x, x + K$ , e a segunda  $x, x + iK'$ , aos quaes correspondem, n'uma e n'outra, os residuos  $-1, +1$ .

Seja  $F(z)$  uma funcção duplamente periodica, e tomem-se os productos  $F(z)\varphi(x, z)$ ,  $F(z)\psi(x, z)$  que têm evidentemente a mesma propriedade.

Suppondo que são  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$  os infinitos de  $F(x)$ , no interior do parallelogrammo acima considerado, e  $p_1, p_2, \dots, p_m$  seus graus de multiplicidade, o theorema de Liouville, applicado áquelles productos, dá immediatamente

$$(3) \dots F(x) - F(x + K) = \sum_1^m \sum_1^{p_j} \frac{A_g^{(j)}}{(g-1)!} d_{\beta_j}^{g-1} \varphi(x, \beta_j),$$

$$(4) \dots F(x) - F(x + iK') = \sum_1^m \sum_1^{p_j} \frac{A_g^{(j)}}{(g-1)!} d_{\beta_j}^{g-1} \psi(x, \beta_j).$$

As propriedades indicadas pelas equações que acabamos de achar pertencem a todas as funcções duplamente periodicas de primeira especie.

Em particular, se  $F(x)$  satisfizer a

$$(5) \dots \dots \dots F(x + K) = -F(x),$$

a equação (3) torna-se em

$$(6) \dots \dots F(x) = \frac{1}{2} \sum_1^m \sum_1^{p_j} \frac{A_g^{(j)}}{(g-1)!} d_{\beta_j}^{g-1} \varphi(x, \beta_j);$$

se satisfizer a

$$(7) \dots \dots \dots F(x + iK') = -F(x),$$

a equação (4) torna-se em

$$(8) \dots \dots F(x) = \frac{1}{2} \sum_1^m \sum_1^{p_j} \frac{A_g^{(j)}}{(g-1)!} d_{\beta_j}^{g-1} \psi(x, \beta_j);$$

e se satisfizer a

$$(9) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} F(x + K) = \pm \frac{1}{F(x)}, \\ F(x + iK') = \mp \frac{1}{F(x)}, \end{array} \right. \dots \dots (11)$$

as equações (3) e (4) dão

$$(10) \dots F(x) = \frac{1}{2} \sum_1^m \sum_1^{p_j} \frac{A_g^{(j)}}{(g-1)!} d_{\beta_j}^{g-1} [\varphi(x, \alpha_j) + \psi(x, \beta_j)].$$

Encontram-se muitas funções duplamente periódicas pertencentes às três classes caracterizadas pelas equações (5), (7) e (9), as quaes poderão, conseguintemente, ser desenvolvidas em series trigonometricas de senos e cosenos, ou em series de exponenciaes pelas formulas que apresentamos.

## II

Tomemos para exemplos as tres funções

$$\frac{dnx}{snx cnx} = F(x), \quad \frac{snx}{cnx dnx} = F_1(x), \quad \frac{cnx}{snx dnx} = F_2(x).$$

Estas funções satisfazem respectivamente às equações (5), (7) e (9). A primeira tem os infinitos  $o$ ,  $K$ , aos quaes correspondem os residuos  $\frac{k\theta_1\theta}{\eta_1\eta'}$ ,  $-\frac{k\theta_1\theta}{\eta_1\eta'}$ ; a segunda tem os infinitos  $K$ ,  $K + iK'$  e os residuos  $-\frac{\theta_1\eta_1}{k'\theta\eta'}$ ,  $\frac{\theta_1\eta_1}{k'\theta\eta'}$ ; a terceira tem os infinitos  $o$ ,  $K + iK'$  e os residuos  $\frac{\eta_1\theta}{\theta_1\eta'}$ ,  $-\frac{1\theta}{\theta_1\eta'}$  (\*). As formulas (6), (8) e (10) dão

$$F(x) = \frac{k\theta_1\theta\pi}{2\eta_1\eta'K} \left[ \sum_n \frac{1}{\text{sen } \frac{\pi}{K}(x-2niK')} - \sum_n \frac{1}{\text{sen } \frac{\pi}{K}(x-K-2niK')} \right]$$

$$(11) \dots F(x) = \frac{k\theta_1\theta\pi}{\eta_1\eta'K} \sum_n \frac{1}{\text{sen } \frac{\pi}{K}(x-2niK')};$$

(\*)  $k\theta$  é o modulo;  $k'\theta$  o modulo complementar; e  $\theta, \eta$  representam  $\Theta(o), H(o)$ .

$$F_1(x) = \frac{\theta_1 \gamma_1 \pi}{k' \theta_1 \gamma_1' K'} \left[ \frac{q_1^{2n} e^{\frac{\pi}{K'}(x-K)}}{q_1^{4n} e^{\frac{2\pi}{K'}(x-K)} - 1} + \frac{q_1^{2n} e^{\frac{\pi}{K'}(x-K-iK')}}{q_1^{4n} e^{\frac{2\pi}{K'}(x-K-iK')} - 1} \right],$$

$$(12) \dots \dots F_1(x) = \frac{2\theta_1 \gamma_1 \pi}{k' \theta_1 \gamma_1' K'} \sum_n \frac{e^{\frac{\pi}{K'} x} q_1^{2n+1}}{1 - e^{\frac{2\pi x}{K'}} q_1^{2(n+1)}};$$

$$F_2(x) = \frac{\gamma_1 \theta \pi}{2\theta_1 \gamma_1' K'} \left[ \sum_n \frac{1}{\text{sen } \frac{\pi}{K} (x - 2niK')} + \frac{1}{\text{sen } \frac{\pi}{K} [x - (2n+1)iK']} \right]$$

$$+ \frac{\gamma_1 \theta \pi}{\theta_1 \gamma_1' K'} \left[ \sum_n \frac{e^{\frac{\pi}{K'} x} q_1^{2n}}{e^{\frac{2\pi x}{K'}} q_1^{4n} - 1} + \sum_n \frac{e^{\frac{\pi}{K'} x} q_1^{2n+1}}{e^{\frac{2\pi x}{K'}} q_1^{4n+2} - 1} \right],$$

$$(13) \dots F_2(x) = \frac{\gamma_1 \theta \pi}{2\theta_1 \gamma_1' K} \sum_n \frac{1}{\text{sen } \frac{\pi}{K} (x - niK')} - \frac{\gamma_1 \theta \pi}{\theta_1 \gamma_1' K'} \sum_n \frac{e^{\frac{\pi}{K'} x} q_1^n}{1 - e^{\frac{2\pi x}{K'}} q_1^{2n}}.$$

Empregando as operações conhecidas, facilmente de (11) deduziríamos

$$F(x) = \frac{k\theta_1 \theta \pi}{\gamma_1 \gamma_1' k} \left\{ \text{cosec } \frac{\pi x}{K} + \right.$$

$$\left. + 4 \text{sen } \frac{\pi x}{K} \sum_n q^{2n} \left[ 1 + \sum_m q^{4mn} \left( 1 + \sum_u^m \cos \frac{2\mu \pi x}{K} \right) \right] \right\}.$$

As formulas (12) e (13) podem tambem escrever-se dos seguintes modos:

$$F_1(x) = \frac{2\theta_1 \gamma_1 \pi}{k' \theta' \gamma' K'} \sum_n \sum_m e^{\frac{(2m+1)\pi x}{K'}} q_1^{(2m+1)(2n+1)},$$

$$F_2(x) = \frac{\gamma_1 \theta \pi}{2\theta \gamma' K} \left\{ \operatorname{cosec} \frac{\pi x}{K} + \right.$$

$$\left. + 4 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{K} \sum_n q^n \left[ 1 + \sum_m q^{2mn} \left( 1 + \sum_{\mu}^m \cos \frac{2\mu \pi x}{K} \right) \right] \right\}$$

$$- \frac{\gamma_1 \theta \pi}{\theta_1 \gamma' K'} \sum_n \sum_m e^{\frac{(2m+1)\pi x}{K'}} q^{(2m+1)n}.$$



APPLICAÇÕES DE UMA FORMULA QUE DÁ AS DERIVADAS DE ORDEM QUALQUER DAS FUNÇÕES DE FUNÇÕES

POR

F. GOMES TEIXEIRA

Sejam dadas as funções

$$y = f(u), \quad u = \phi(x).$$

A formula que vamos applicar é a seguinte:

$$(1) \quad y^{(n)} = \sum \frac{n! \frac{d^i y}{du^i} (u')^a (u'')^b \dots (u^{(n)})^l}{a! b! \dots l! (2!)^b \dots (n!)^l}$$

onde o sommatorio se refere ás soluções inteiras positivas da equação

$$a + 2b + 3c + \dots + nl = n,$$

e onde é

$$i = a + b + \dots + l.$$

N'um artigo publicado no tom. VII (pag. 150) d'este jornal mostrámos como se podiam deduzir d'esta formula algumas formulas conhecidas de analyse, que é costume obter por processos diversos. Aqui vamos junctar a estas applicações as duas seguintes.

## I

## Formula de Waring

Seja

$$U = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_{m-1} x + A_m = 0$$

uma equação dada e sejam  $x_1, x_2, \dots, x_m$  as  $m$  raízes d'esta equação.

Por ser

$$U = A_0 (x - x_1) (x - x_2) \dots (x - x_m)$$

temos

$$\log U = \log A_0 + \sum_1^m \log (x - x_\omega),$$

e portanto, derivando esta egualdade  $n$  vezes relativamente a  $x$ ,

$$\frac{d^n \log U}{dx^n} = (-1)^{n-1} (n-1)! \sum_1^m \frac{1}{(x - x_\omega)^n},$$

o que dá

$$\sum_1^m \frac{1}{(x - x_\omega)^n} = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{d^n \log U}{dx^n}.$$

D'esta egualdade deduziu o sr. M. d'Ocagne, empregando uma das expressões conhecidas que dão a derivada de ordem  $n$  de uma funcção de funcção (\*). uma formula que dá a somma das potencias semelhantes das raízes da equação proposta em funcção dos coefficients da equação. Empregando para o mesmo fim a formula (1) obtem-se a formula de Waring, como vamos ver.

Por ser

$$U^{(m+1)} = 0, \quad U^{(m+2)} = 0, \quad \text{etc.},$$

(\*) *Jornal de ciencias mathematicas e astronomicas*, tomo VII, pag. 133.

a derivada de ordem  $n$  de  $\log U$  é dada pela formula

$$\frac{d^n \log U}{dx^n} = \sum (-1)^{i-1} \cdot \frac{n! (i-1)! U^{-i} U'^a \dots U^{(m)l}}{a! b! \dots l! (2!)^b \dots (m!)^l},$$

e portanto temos

$$\sum \frac{1}{(x-x_\omega)^n} = (-1)^n n \sum (-1)^i \cdot \frac{(i-1)! U^{-1} U'^a U''^b \dots}{a! b! \dots l! (2!)^b \dots (m!)^l},$$

e, pondo  $x=0$ ,

$$\sum \frac{1}{x_\omega^n} = n \sum (-1)^i \frac{(i-1)! U_0^{-i} U_0'^a \dots U_0^{(m)l}}{a! b! \dots l! (2!)^b \dots (m!)^l}.$$

Temos porém

$$U_0 = A_m, \quad U_0' = A_{m-1}, \quad U_0'' = 2! A_{m-2},$$

$$U_0''' = 3! A_{m-3}, \quad \dots, \quad U_0^{(m)} = m! A_0.$$

Logo

$$\sum \frac{1}{x_\omega^n} = n \sum (-1)^i \frac{(i-1)! A_{m-1}^a A_{m-2}^b \dots A_0^l}{a! b! \dots l!}.$$

Aplicando agora esta formula á equação

$$A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + \dots + A_1 x + A_0 = 0,$$

cujas raizes são reciprocas das raizes da equação primeiramente considerada, temos a *formula de Waring*

$$\sum_{\omega=1}^m x_\omega^n = n \sum (-1)^i \frac{(i-1)! A_0^{-i} A_1^a \dots A_m^l}{a! b! \dots l!}$$

onde  $a, b, \dots, l$  são as soluções inteiras positivas da equação

$$a + 2b + \dots + ml = n,$$

e onde é

$$i = a + b + \dots + l.$$

## II

Desenvolvimento de  $\sin n\varphi$  segundo as potências de  $\cos \varphi$

Consideremos a função

$$y = \arctan x.$$

Derivando-a uma vez vem

$$y' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Derivando agora  $n-1$  vezes  $y'$  por meio da formula (1), onde se deve pôr

$$y = u^{-1}, \quad u = 1 + x^2,$$

vem

$$y^{(n)} = \sum (-1)^i \cdot \frac{(n-1)! i! (2x)^a (1+x^2)^{-1-i}}{a! b!}$$

onde o sommatório se refere ás soluções inteiras e positivas da equação

$$a + 2b = n - 1,$$

e onde é

$$i = a + b;$$

e portanto

$$y^{(n)} = (-1)^{n-1} (n-1)! \sum (-1)^\beta \frac{(n-1-2\beta)!}{(n-1-2\beta)! \beta!} \\ \times (2x)^{n-1-2\beta} (1+x^2)^{\beta-n},$$

ou

$$y^{(n)} = (-1)^{n-1} (n-1)! \sum (-1)^{\beta} \binom{n-1-\beta}{\beta} \\ \times (2x)^{n-1-2\beta} (1+x^2)^{\beta-n},$$

onde o sommatorio se refere a todos os valores inteiros positivos de  $\beta$  desde zero até ao maior inteiro contido em  $\frac{n-1}{2}$ , se  $n$  é par, e até  $\frac{n-1}{2}$ , se  $n$  é impar.

Por outra parte, pondo

$$x = \cot \varphi$$

temos

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\operatorname{sen}^2 \varphi,$$

e portanto

$$y' = \frac{1}{1 + \cot^2 \varphi} = \operatorname{sen}^2 \varphi,$$

$$y'' = 2 \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi \frac{d\varphi}{dx} = -2 \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen}^2 \varphi,$$

$$y''' = -2 \operatorname{sen} \varphi (\cos^2 \varphi \operatorname{sen} \varphi + \operatorname{sen} 2\varphi \cos \varphi) \frac{d\varphi}{dx} \\ = -2 \operatorname{sen}^3 \varphi \operatorname{sen} 3\varphi.$$

Continuando as derivações acha-se, por inducção, a lei seguinte:

$$y^{(n)} = (-1)^{n-1} (n-1)! \operatorname{sen}^n \varphi \operatorname{sen} n\varphi.$$

Para a demonstrar derivemos outra vez, o que dá

$$y^{(n+1)} = (-1)^{n-1} (n-1)! n (\operatorname{sen}^{n-1} \varphi \cos \varphi \operatorname{sen} n\varphi + \operatorname{sen}^n \varphi \cos n\varphi) \frac{d\varphi}{dx} \\ = (-1)^n n! \operatorname{sen}^{n+1} \varphi \operatorname{sen} (n+1)\varphi.$$

Logo se a lei é verdadeira para a derivada de ordem  $n$ , tambem é verdadeira para a derivada de ordem  $n + 1$ . Como se viu, porém, directamente que é verdadeira para as tres primeiras derivadas, segue-se que é geral.

Comparando agora as duas expressões de  $y^{(n)}$ , que vimos de achar, temos a egualdade

$$\operatorname{sen} n\varphi = \operatorname{sen} \varphi \sum_{\beta} (-1)^{\beta} \binom{n-1-\beta}{\beta} (2 \cos \varphi)^{n-1-2\beta},$$

que pretendiamos achar.

## CONGRESSO INTERNACIONAL DE BIBLIOGRAPHIA DAS SCIENCIAS MATHEMATICAS

Nos dias 16, 17, 18 e 19 de julho de 1889 reuniu-se em Paris um Congresso internacional de Bibliographia das sciencias mathematicas, com o fim de discutir um projecto de publicação de um repertorio bibliographico d'estas sciencias. Uma commissão, presidida pelo sr. Poincaré, membro do Instituto, tinha antecipadamente preparado o projecto de classificação a seguir no repertorio bibliographico. Este projecto foi discutido no Congresso nos dias 16, 17 e 18; e no dia 19 foram tomadas as resoluções seguintes:

### Resoluções votadas pelo Congresso

O Congresso internacional de Bibliographia das sciencias mathematicas, reunido em Paris a 19 de julho de 1889, toma as resoluções seguintes:

1.<sup>a</sup> Convém publicar um repertorio bibliographico das sciencias mathematicas, destinado a poupar aos estudiosos longas e penosas indagações. Este repertorio deverá conter os titulos das memorias relativas ás mathematicas puras e applicadas, publicadas desde 1800 até 1889 inclusivamente, assim como dos trabalhos relativos á historia das mathematicas desde 1600 até 1889 inclusivamente. Estes titulos serão classificados não pelos nomes dos auctores, mas pela ordem logica das materias.

2.<sup>a</sup> Serão publicados successivamente supplementos a este repertorio; o primeiro será consagrado aos trabalhos publicados desde 1889 exclusivamente até 1899 inclusivamente, e os supplementos seguintes aos periodos de dez annos que se seguirão. Em cada supplemento, as omissões descobertas no repertorio ou nos supplementos precedentes serão reparadas.

3.<sup>a</sup> São excluidas do repertorio as obras classicas que não contiverem resultados originaes e destinadas aos alumnos dos di-

versos estabelecimentos de instrução e aos candidatos aos diversos exames. Serão igualmente excluidas as memorias publicadas nas collecções scientificas especialmente destinadas a estes candidatos. Todavia, como diversas collecções scientificas apresentam um caracter mixto e contêm, ao lado de numerosos exercicios que não podem ser uteis senão aos estudantes, alguns trabalhos originaes, estes ultimos trabalhos serão mencionados no repertorio depois de a escolha ter sido feita pela administração d'estas collecções e a comissão permanente instituida pela decima resolução ter dado parecer favoravel.

4.<sup>a</sup> Os trabalhos relativos ás *mathematicas applicadas* não deverão ser mencionadas no repertorio, excepto quando elles interessarem os progressos das *mathematicas puras*. Os trabalhos relativos á astronomia, já mencionados na *Bibliographia* de Houzeau e Lancaster, são excluidos do repertorio.

5.<sup>a</sup> O Congresso adopta para o repertorio a classificação proposta pela sua comissão de organização, com as modificações votadas nas sessões de 17 e 18 de julho de 1889. Os diversos titulos mencionados serão repartidos em um certo numero de classes, subdivididas em subclasses, divisões, secções e subsecções. As classes serão designadas por uma letra maiuscula: ellas poderão ser subdivididas em subclasses designadas por uma letra maiuscula affectada de um expoente. As classes ou subclasses subdividem-se em divisões designadas por um algarismo arabe, e estas em secções designadas por uma letra minuscula latina, as quaes poderão ainda ser divididas em subsecções representadas por uma letra minuscula grega. Assim, a subsecção  $\alpha$  da secção  $b$ , fazendo parte da divisão 3 da subclasse  $L^1$ , será notada assim

|                  |
|------------------|
| $L^1 3 b \alpha$ |
|------------------|

6.<sup>a</sup> Os titulos dos trabalhos escriptos n'outras linguas que não sejam a allemã, a ingleza, a italiana, a hespanhola e a latina serão seguidos da sua traducção franceza.

7.<sup>a</sup> Attendendo a que poderá acontecer que por uma razão qualquer um sabio entenda dever adoptar um modo differente de classificação, o Congresso faz votos para que este sabio empregue



uma notação que não possa ser confundida com a descripta na quinta resolução, e evite em todo o caso o emprego do rectangulo figurado acima.

8.<sup>a</sup> Attendendo a que o trabalho do repertorio levará ainda muitos annos, e que importa fornecer aos indagadores novos instrumentos no mais curto praso possivel, o Congresso faz votos para que as diversas publicações periodicas consagradas ás mathematicas publiquem uma taboa geral das materias contidas nos seus volumes, conformando-se com a classificação adoptada acima. O Congresso será muito agradecido aos administradores d'estas publicações se prestarem, quanto poderem, o seu concurso, para esta classificação, á Commissão permanente.

9.<sup>a</sup> Para facilitar o estabelecimento dos supplementos consagrados aos trabalhos posteriores a 1889, o Congresso faz votos para que cada auctor faça seguir o titulo da sua memoria da notação definida na quinta resolução; que se o auctor deixou de o fazer, os administradores das diversas publicações periodicas, ou, quando estes o não fizerem, os redactores das publicações analyticas que derem noticia d'estes trabalhos, queiram encarregar-se d'este cuidado.

10.<sup>a</sup> É instituida uma Commissão permanente para velar pela execução das resoluções precedentes. Ella é composta dos membros francezes: srs. Poincaré, Désiré André, Humbert, d'Ocagne, Charles Henry; e dos membros estrangeiros: srs. Catalan, Bierens de Haan, Glaisher, Gomes Teixeira, Holst, Valentin, Emile Weyr, Guccia, Eneström, Gram, Liguine, Stephanos. A séde da Commissão permanente é em Paris, onde deverão residir o presidente e o secretario. Se se derem vagaturas n'esta Commissão, deve ella completar-se escolhendo novos membros; ella é igualmente auctorizada a aggregar novos membros em numero qualquer. Esta Commissão resolverá a respeito das addições á classificação adoptada que os progressos da sciencia poderão tornar necessarios e a respeito das difficuldades a que der origem a interpretação das resoluções precedentes. No caso de, por uma razão qualquer, lhe parecer necessaria uma nova conferencia entre os mathematicos dos diversos paizes, a Commissão organizará um novo Congresso internacional, ou em Paris, ou n'outra qualquer cidade da Europa.

11.<sup>a</sup> O Congresso faz votos para que tanto em França como no estrangeiro os diversos jornaes mathematicos dêem a maior

publicidade ás precedentes resoluções e ás decisões futuras da  
Commissão permanente.

Um resumo das actas do Congresso, contendo as resoluções  
precedentes e a classificação das questões do dominio das sciencias  
mathematicas approvada pelo Congresso, vem de ser publi-  
cado em um opusculo.

## BIBLIOGRAPHIA

G. de Longchamps. — *Essai sur la Géométrie de la règle et de l'équerre.* — Paris, 1890.

O objecto que o auctor tem em vista n'esta obra é resolver, usando só da régoa ou da régoa e do esquadro, muitos problemas pertencentes á Geometria practica.

Comprehendo-se facilmente a vantagem que ha em estudar os methodos de resolver certos problemas de Geometria por meio de determinados instrumentos. Nas applicações d'esta sciencia tem, com effeito, de se attender aos instrumentos de que se dispõe para esta resolução, visto que, em certas circumstancias materiaes, se é obrigado a resolver os problemas geometricos que apparecem usando só dos instrumentos de que se dispõe ou que são applicaveis n'essas circumstancias.

A obra consta de duas partes. Na primeira o auctor apresenta os principios theoreticos de que tem necessidade. Na segunda tracta da applicação d'estes principios a muitos problemas de agrimensura e arte da guerra.

A primeira parte abre por uma introdução historica, em que o sr. Longchamps dá noticia dos trabalhos de Geometria, publicados anteriormente, que têm relação com o assumpto de que se occupa, referindo-se mais desenvolvidamente ás *Solutions peu connues de différents problèmes de géométrie pratique*, de Servois, livro que, como o auctor diz, mais se aproxima do seu. Em seguida vem uma série de theoremas relativos á theoria das transversaes, muitos dos quaes são objectos de generalisações e desenvolvimentos novos da parte do sr. Longchamps, e que fazem objecto dos capitulos 1.º e 2.º

Nos capitulos seguintes tracta o auctor dos problemas fundamentaes na geometria da régoa e do esquadro; tracta dos methodos para dividir uma recta em partes eguaes; tracta do traçado das conicas e das tangentes e das normaes a estas curvas; do traçado de algumas cubicas (cissoide, estrophoide, tricetriz de Ma-

claurin, folium de Descartes, serpentina, tridente de Newton, cubica de Agnesi, cubicas parabolicas e hyperbolicas, etc.); tracta das curvas do quarto gráo unicursaes, e, em particular, do folium duplo, do caracol de Pascal, da lemniscata, do trifolium recto, do folium simples, etc. (capitulos 3.º a 12.º).

Na segunda parte tracta primeiramente o sr. Longchamps dos problemas de agrimensura, occupando-se do problema que tem por fim determinar a largura d'um rio, do problema que tem por fim prolongar uma recta além d'um obstaculo, do problema que tem por fim determinar a distancia de um ponto accessivel a um ponto inaccessible, do problema que tem por fim achar a distancia de dois pontos inaccessiveis, e de varios problemas relativos a pontos, rectas e figuras inaccessiveis.

De todos estes problemas apresenta o auctor mais do que uma solução, visto que, como elle bem diz, quando se opéra sobre o terreno, as condições materiaes que são exigidas a uma solução podem tornal-a completamente illusoria.

As applicações precedentes são tractadas nos capitulos 1.º a 8.º Os capitulos seguintes (9.º a 10.º) são destinados a problemas de artilheria, a diversos problemas relativos a um ponto inaccessible no espaço, etc.

Limitar-nos-hemos a estas rapidas indicações sobre o bello livro do sr. Longchamps, cuja leitura é das mais attrahentes e proveitosas.

*Memoria sobre a determinação das coordenadas geographicas do Observatorio do Castello de S. Jorge, em Lisboa.— Lisboa, 1890.*

O Observatorio do Castello de S. Jorge, em Lisboa, é o ponto d'onde se observou o primeiro arimuth da triangulação portugueza, e por isso tem-se procurado determinar com a maior exactidão possivel as suas coordenadas geographicas. Estas coordenadas foram determinadas primeiramente por meio de observações directas pelo dr. Ciera no fim do seculo passado, e depois pelo general Folque em 1837; e mais tarde foram determinadas indirectamente, deduzindo-as das coordenadas do Observatorio da Marinha e do Observatorio astronomico de Lisboa, com os quaes se ligou o Observatorio do Castello de S. Jorge por meio de pequenas triangulações. Tendo-se encontrado algumas discordancias

nos valores obtidos para a latitude d'este Observatorio pelos meios que vimos de mencionar, resolveram os geodesicos portuguezes determinar de novo por meio de observações directas as coordenadas d'este ponto geodesico importante. A presente *Memoria* contém os resultados d'estas observações, que foram feitas nos intervallos de 10 de maio de 1886 a 14 de junho do mesmo anno, e de maio de 1888 a maio de 1889 pelos srs. Brito Limpo, Fernando Costa e A. J. d'Avila.

Abre a *Memoria* uma noticia historica sobre as determinações anteriores das coordenadas que se pretendem achar. Vem depois a descripção e determinação das constantes do instrumento empregado nas novas observações feitas em 1886 e 1888 a 1889, que foi um theodolito de Repsold; a descripção e apreciação dos methodos empregados para determinar a latitude, que foram o methodo das distancias zenithaes e o das passagens pelo primeiro vertical; as taboas das observações, etc. Segue-se uma serie de taboas contendo o valor da latitude correspondente a cada observação e as medias correspondentes ás observações feitas no mesmo dia com a mesma estrella. Finalmente vem a discussão de todas estas observações que levou a tomar para valor da latitude pedida o numero  $30^{\circ}. 42'. 43'', 631 \pm 0'', 036$ .

O resto da *Memoria* refere-se ao azimuth do Observatorio do *Castello de S. Jorge* — *Serces*, e contém a descripção do methodo empregado para o determinar (methodo das digressões da polar) e uma serie de taboas contendo as observações que para esse fim se fizeram; refere-se á determinação da differença das longitudes entre este Observatorio e o Observatorio astronomico de Lisboa; e finalmente refere-se rapidamente á determinação da altitude do Observatorio do *Castello*.

*J. Neuberg*. — *Algunos sistemas de barras articuladas; trazado me-  
cânico de las lineas (traduzido do francez para hespanhol por  
V. Balbin)*, Buenos Aires, 1890.

Á serie dos trabalhos importantes que o sr. V. Balbin tem traduzido para hespanhol, com o intuito de ser util aos alumnos da Universidade de Buenos-Ayres, temos hoje de acrescentar aquelle cujo titulo vimos de enunciar.

Contém o presente opusculo uma conferencia feita pelo illustre professor da Universidade de Liège, sr. Neuberg, na *Associação dos alumnos das escholas especiaes*, annexas á Universidade de Liège, em que o auctor se occupa dos mais importantes systemas de barras articuladas e do traçado mecanico das curvas. Eis os pontos estudados: pantographos, inversores, apparatus de Kempe, ellipsographos, conicographos, pedal de circumferencia, pedal de parabola, pedal de conica com centro, e compasso analogmatico.

Ch. Hermite. — *Sur les polynômes de Legendre* (*Rendiconti del Circolo Matematico de Palermo*, tom. IV).

N'este artigo apresenta o grande geometra francez uma demonstração muito elegante das relações

$$\int_{-1}^{+1} X_m X_n dx = 0, \quad \int_{-1}^{+1} X_n^2 dx = \frac{2}{2n+1},$$

partindo do integral

$$\int_{-1}^{+1} \frac{x^p dx}{\sqrt{1-2ax+x^2}}.$$

Depois mostra que as relações de Laplace e Jacobi

$$X_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\varphi}{(x + \sqrt{x^2-1} \cos \varphi)^n},$$

$$X_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (x + \sqrt{x^2-1} \cos \varphi)^n d\varphi,$$

podem ser deduzidas muito facilmente da formula

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{At^2+Bt+C} = \frac{\varepsilon i \pi}{\sqrt{B^2-4AC}},$$

demonstrada no seu *Cours d'Analyse* (pag. 289 e 290).

G. Eneström. — *Programme d'un Cours Universitaire d'histoire des mathématiques (Bibliotheca mathematica, 1890).*

O auctor, depois de expôr algumas considerações relativas ás vantagens de introduzir nos cursos universitarios a historia das mathematicas, e alguns conselhos sobre a orientação a dar a estes cursos para serem proveitosos, expõe um programma de um curso da historia das mathematicas em trinta lições.

Depois vem uma lista das obras e memorias mais importantes que se devem consultar para a redacção de cada lição.

P. H. Schoute. — *Sur les quadruples équiانharmoniques ou harmoniques (Association française pour l'avancement des sciences, Paris, 1889).*

N'esta memoria importante o illustre professor da Universidade de Groningen estende alguns theoremas relativos aos quadruplos harmonicos e equianharmonicos a systemas de pontos e de curvas de ordem mais elevada do que as anteriormente consideradas. Assim, primeiramente procura a equação que determina os polos, cujos systemas polares biquadraticos relativamente a um systema de pontos dados formam um quadruplo harmonico ou equianharmonico. Depois procura a relação que liga os polos cujos systemas polares cubicos relativamente a um systema de pontos dados, combinados com o ultimo ponto polar de um outro polo relativamente a outro systema de pontos dados, formam um quadruplo harmonico ou equianharmonico. Continuando com questões analogas, combina depois dois systemas polares quadraticos relativamente a um systema de pontos com outro systema polar quadratico relativamente a outro systema de pontos; um systema polar quadratico relativamente a um systema de pontos com os dois ultimos pontos polares de dois systemas polares quadraticos relativamente a dois systemas de pontos; etc. Cada theorema demonstrado é seguido de um problema interessante de Geometria, que se resolve por meio d'elle.

*H. Bentabal y Ureta.* — *Introduccion al estudio del Cálculo infinitesimal.* — *Madrid, 1890.*

Occupa-se o auctor n'este opusculo das definições e dos principios geraes que servem de base à analyse infinitesimal, considerando nos capitulos 1.º e 3.º a noção de numero e suas diferentes especies, no capitulo 2.º a noção de limite, no capitulo 4.º a noção de funcção e a classificação das funcções, finalmente no capitulo 5.º os limites das funcções e os principios do methodo infinitesimal.

*Gaston Tarry.* — *Géométrie générale (Association pour l'avancement des sciences, Paris, 1889).*

Na Geometria analytica ha elementos visiveis correspondentes ás soluções reaes das equações, e elementos invisiveis correspondentes ás soluções imaginarias. O objecto que o sr. Tarry tem em vista na sua interessante memoria é constituir uma sciencia que permita representar por symbolos visiveis os elementos visiveis e invisiveis de uma figura, e é a esta sciencia que chama *Geometria geral*. Para isso define as principaes entidades geometricas (ponto, linha recta, etc.) de modo que tanto as equações com coefficients reaes como as equações com coefficients imaginarias tenham representação geometrica.

*G. Peano.* — *Sull' integrabilità delle equazioni differenziali di primo ordine (Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, t. XXI).*

N'este trabalho apresenta o auctor uma demonstração muito simples e elegante do theorema relativo à existencia dos integraes da equação  $y' = f(x, y)$ , collocando-se n'um ponto de vista mais geral do que os geometras que anteriormente se tinham occupado d'este theorema, pois que impõe á funcção  $f(x, y)$  unicamente a condição de ser continua.



*Geminiano Pirondini.* — *Di due superficie rigate che si presentano nello studio delle curve* (*Giornale de Battaglini*, t. XXVIII).

As superficies regradas consideradas são a superficie que é o logar geometrico das rectas que junctam os pontos de uma curva de dupla curvatura com os centros correspondentes das espheras osculadoras, e a superficie que é o logar geometrico das normaes principaes da mesma curva. O auctor apresenta uma serie de theoremas importantes, relativos principalmente á deformação das superficies e das linhas, em que figuram principalmente estas superficies.

*Emile Vigarié.* — *Esquisse historique sur la marche du développement de la Géométrie du triangle* (*Association française pour l'avancement des sciences*, 1889).

Contém este artigo um resumo muito interessante da historia do moderno ramo da Geometria, conhecido pelo nome de *Geometria do triangulo*, que tem sido objecto, nos ultimos annos, de tantos trabalhos importantes.

O auctor occupa-se primeiramente dos trabalhos anteriores a 1873, dando noticia dos principaes elementos do plano do triangulo até essa occasião considerados.

Depois considera o auctor os trabalhos posteriores a 1873, epocha a que, como elle diz, é necessario remontar para encontrar o germen de estudos seguidos e o cuidado de ajunctar e fazer concordar os resultados que se referem aos elementos notaveis do plano do triangulo.

Finalmente apresenta o sr. Vigarié um supplemento á noticia bibliographica das publicações relativas á Geometria do triangulo, publicada pelo sr. Lemoine em 1885.

*H. Burkhardt.* — *Ueber eine hyperelliptische Multiplicatorgleichung* (*Nachrichten von der Königlich Gesellschaft der Wissenschaften*, etc., 1889).

*P. H. Schoute.* — *Zum Normalen problem der Kegelschnitte (Sitzungsberichten der K. Akademie d. Wissenschaften in Wien, 1889).*

*G. Peano.* — *Sulla definizione dell' area d'una superficie (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 1890).*

—— *Integrazione per serie delle equazioni differenziali lineari (Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, t. XXII).*

—— *Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane (Mathematische Annalen, t. XXXVI).*

—— *Teoremi su massimi e minimi geometriche, e su normali a curve e superficie (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. II).*

—— *Sur les Wronskiens (Mathesis, t. IX).*

*G. Eneström.* — *Note historique sur la somme des valeurs inverses des nombres carrés (Bibliotheca mathematica, 1890).*

G. T.

EXTRACTOS DAS PUBLICAÇÕES RECENTES

I

Resto da formula de Taylor

Se uma função  $f(x)$  admite derivadas de ordem 1, 2, ...,  $n-1$ , para todos os valores de  $x$  comprehendidos entre  $x_0$  e  $x_0+h$ , e admite uma derivada de ordem  $n$  para  $x=x_0$ , temos

$$(1) \quad f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^n(x_0) + \frac{h^n}{n!} \epsilon$$

onde

$$(2) \quad \epsilon = \frac{f^{n-1}(x_0+\theta h) - f^{n-1}(x_0)}{\theta h} - f^n(x_0)$$

$$0 < \theta < 1;$$

e a quantidade  $\epsilon$  tende para zero quando  $n$  tende para o infinito.

Esta proposição, na qual não se suppõe nem a continuidade nem a existencia da derivada de ordem  $n$  da função  $f(x)$  na vizinhança do ponto  $x=x_0$ , é devida ao sr. Peano, professor na Universidade de Turin, que a achou notando que a fracção

$$\epsilon = \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - \dots - \frac{h^n}{n!} f^n(x_0)}{\frac{h^n}{n!}}$$

é a razão de duas funcções de  $h$  que se annullam, assim como as suas derivadas de ordem  $1, 2, \dots, n-2$ , para  $h=0$ ; e portanto que  $\epsilon$  é igual á razão das derivadas de ordem  $n-1$ , para um valor de  $h$  comprehendido entre  $0$  e  $h$ . Obteve assim a formula (2), a qual mostra que  $\epsilon$  tende para zero quando  $h$  tende para zero.

[G. Peano: Une nouvelle formule du reste dans la formule de Taylor (*Mathesis*, t. IX)].

## II

### Sobre o desenvolvimento das funcções em serie

Seja

$$f(x) = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + R_n$$

uma relação verdadeira para todo o valor de  $n$ . Ter-se-ha tambem

$$f(x) = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n + \dots + u_{n+p-1} + R_{n+p}$$

Supponhamos que é

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (R_{n+p} - R_n) = 0,$$

qualquer que seja o valor inteiro que se dê a  $p$ . Não resultará d'aqui necessariamente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0,$$

e portanto não se póde escrever

$$f(x) = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + \text{etc.}$$

em serie infinita.

EXEMPLO. Se é  $\varphi(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ , temos, como se sabe,

$$e^x + \varphi(x) = 1 + x + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + R_n,$$

$$R_n = \frac{x^n}{n!} e^{\theta_1 x} + \varphi(x), \quad R_{n+p} = \frac{x^{n+p}}{(n+p)!} e^{\theta_1 x} + \varphi(x),$$

$\theta$  e  $\theta_1$  representando dois numeros comprehendidos entre zero e a unidade. Deduz-se d'aqui

$$R_{n+p} - R_n = \frac{x^{n+p}}{(n+p)!} e^{\theta_1 x} - \frac{x^n}{n!} e^{\theta x}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (R_{n+p} - R_n) = 0.$$

Mas é  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \varphi(x)$ , e portanto não se póde escrever, em serie infinita,

$$e^x + \varphi(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \text{etc.}$$

A nota precedente não differe da de Cauchy relativamente á funcção  $\varphi(x)$ , mas a fórmula é talvez nova.

[J. Bruno de Cabedo: Sur le développement des fonctions en série (Mathesis, t. x)].

### III

#### Rectificação aproximada de um arco de circulo

Seja AM um arco de circulo menor do que um quadrante, cujo centro seja O; prolongue-se o raio AO de um comprimento OC igual ao diametro, de modo que seja AC = 3R, R representando o raio do circulo, e trace-se a recta CM.

Seja  $M'$  o ponto de intersecção d'esta recta com a tangente no ponto  $A$ . A recta  $AM'$  é sensivelmente igual ao arco  $AM$ .

Designa-se por  $a$  a medida do arco  $AM$  em partes do raio  $R$ ; teremos

$$AM' = \frac{3 \operatorname{sen} a}{2 + \cos a} R.$$

Represente-se por  $\varepsilon R$  a diferença  $\operatorname{arc} AM - AM'$ ; temos

$$\varepsilon = a - \frac{3 \operatorname{sen} a}{2 + \cos a},$$

e, derivando  $\varepsilon$  relativamente a  $a$ ,

$$\varepsilon' = \frac{(1 - \cos a)^2}{(2 + \cos a)^2}.$$

Como esta derivada é sempre positiva,  $\varepsilon$  augmenta quando  $a$  varia desde 0 até  $\frac{\pi}{2}$ .

$$\text{Para } a = \frac{\pi}{2}, \quad \varepsilon = \frac{\pi}{2} - 1,5 < 0,0708.$$

$$\text{Para } a = \frac{\pi}{4}, \quad \varepsilon = \frac{\pi}{4} - \frac{3}{2\sqrt{2}+1} < 0,00322 < \frac{1}{300}.$$

$$\text{Para } a = \frac{\pi}{6}, \quad \varepsilon = \frac{\pi}{6} - \frac{3}{4+\sqrt{3}} < 0,00023 < \frac{1}{4000}.$$

A diferença entre  $AM'$  e  $\operatorname{arc} AM$  poderá desprezar-se, no ponto de vista do desenho, quando  $R < 1^m$ , se  $a$  é menor do que  $\frac{\pi}{6}$ ;

se  $R < \frac{1^m}{10}$ , a differença póde desprezar-se, se  $a$  é menor do que  $\frac{\pi}{4}$ .

[J. E. Pellet: *Rectification approximative de l'arc de cercle* (*Journal de Mathématiques spéciales*, 1890).

IV

Sobre um theorema de Cauchy

Para que uma successão de valores  $a_1, a_2, a_3, \dots$  tenda para um limite finito e determinado, é necessario e sufficiente que dado o numero positivo  $\epsilon$ , arbitrariamente pequeno, se possa determinar um certo indice  $\nu$  a partir do qual se tenha

$$(1) \quad |a_{n'} - a_{n''}| < \epsilon$$

para todos os valores de  $n'$  e  $n''$  não inferiores a  $\nu$ .

Póde-se demonstrar do modo seguinte que a condição precedente é sufficiente.

Os numeros  $a_1, a_2, a_3$ , etc. podem ser representados por segmentos de uma recta. Tem-se, pois, um grupo de pontos que admittem um numero finito ou infinito de grupos derivados, cada um dos quaes póde ser constituido por um numero finito ou infinito de pontos limites. D'este modo a successão  $a_1, a_2, a_3, \dots$  é decomponivel em um numero finito ou não de successões que tendem para um limite.

Considerem-se duas quaesquer d'estas successões:

$$b_1, b_2, b_3, \dots$$

$$c_1, c_2, c_3, \dots$$

que tendem respectivamente para os limites  $b$  e  $c$ .

Em virtude de (1) ter-se-ha

$$|b_{n'} - c_{n''}| < \varepsilon; \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (b_{n'} - c_{n''}) = 0;$$

mas

$$\lim b_n = b, \quad \text{logo} \quad \lim c_n = b.$$

Logo todas as successões de numeros em que se pôde decompôr a successão  $a_1, a_2, a_3, \dots$  tendem para o mesmo limite.

[*Alberto La Maestra: Sopra un teorema di Cauchy (Giornale di Matematiche, t. XXVIII)*].



**SUR LE DÉVELOPPEMENT DE  $\sin n\varphi$  ET DE  $\cos n\varphi$   
SUIVANT LES PUISSANCES DE  $\cos \varphi$**

(Extrait d'une lettre adressée à M. F. Gomes Teixeira)

PAR

M. M. D'OCAGNE

... La seconde partie de l'intéressant article que vous venez de faire paraître dans votre Journal m'a fait penser à vous communiquer une méthode tout élémentaire dont je me suis servi pour obtenir le développement de  $\sin n\varphi$  et de  $\cos n\varphi$  suivant les puissances de  $\cos \varphi$ .

Posons

$$U_n = \alpha^n \sin n\varphi.$$

Nous avons

$$U_n + pU_{n-1} + qU_{n-2} = \alpha^{n-2} \sin n\varphi [\alpha^2 + \alpha p \cos \varphi + q \cos 2\varphi] \\ - \alpha^{n-2} \cos n\varphi [\alpha p \sin \varphi + q \sin 2\varphi].$$

Déterminons  $\alpha$  et  $\varphi$  par la double condition que

$$\alpha^2 + \alpha p \cos \varphi + q \cos 2\varphi = 0,$$

$$\alpha p \sin \varphi + q \sin 2\varphi = 0.$$

Nous en tirons

$$\cos \varphi = -\frac{p}{2q^2}, \quad \alpha = q^{\frac{1}{2}}.$$

Dès lors, si nous posons

$$u_n = \frac{2}{(4q - p^2)^{\frac{1}{2}}} U_n,$$

nous voyons que

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1,$$

$$u_n + pu_{n-1} + qu_{n-2} = 0.$$

Par suite, d'après une formule connue [voyez *Nouvelles Annales*, 1884, p. 69, formule (8)]

$$u_n = (-1)^{n-1} \sum (-1)^i C_{n-1-i}^{n-1-2i} p^{n-1-2i} q^i.$$

Et conséquemment,

$$\sin n\varphi = \frac{U_n}{\alpha_n} = \frac{1}{q^{\frac{n}{2}}} \cdot \frac{(4q - p^2)^{\frac{1}{2}}}{2} u_n$$

$$= \frac{(4q - p^2)^{\frac{1}{2}}}{2q^{\frac{n}{2}}} \sum (-1)^i C_{n-1-i}^{n-1-2i} \left( \frac{-p}{\frac{1}{q^{\frac{1}{2}}}} \right)^{n-1-2i}$$

$$= \sin \varphi \sum (-1)^i C_{n-1-i}^{n-1-2i} (2 \cos \varphi)^{n-1-2i}.$$

Le même méthode s'applique aussi heureusement pour  $\cos n\varphi$ .

## NOTE SUR L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU SECONDE ORDRE (\*)

PAR

F. GOMES TEIXEIRA

1. Je vais considérer l'équation aux dérivées partielles du second ordre

$$(1) \quad Hr + 2Ks + Lt + M + N(rt - s^2) = 0,$$

où H, K, L, M, N représentent des fonctions de  $x, y, z, p, q$ , et où l'on pose, suivant l'usage

$$p = \frac{dz}{dx}, \quad q = \frac{dz}{dy}, \quad r = \frac{d^2z}{dx^2}, \quad s = \frac{d^2z}{dx dy}, \quad t = \frac{d^2z}{dy^2}.$$

M. Imschenetsky a fait voir, dans son *Etude sur les méthodes d'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre* (pages 130 et 131 de la traduction par M. J. Hoüel), que cette équation peut être transformée dans une équation linéaire, quand on connaît une intégrale primitive particulière avec trois constantes arbitraires.

Ensuite, en se basant sur les importants recherches sur la théorie des intégrales des équations aux dérivées partielles, publiées par Ampère dans les cahiers XVII et XVIII du *Journal de l'École Polytechnique*, il fait voir que cette équation se simplifie consi-

---

(\*) Este artigo foi por nós publicado no *Bulletin de la Société mathématique de France* (tomo XVII, pagina 125).

dérablement quand cette intégrale satisfait à un ou aux deux systèmes d'équations de la *caractéristique*, auxquels Monge et Ampère ramènent le problème de l'intégration de (1).

Comme la théorie de Ampère, qui ne se prête pas aisément à une exposition succincte, ne se trouve pas dans les Traités systématiques de Calcul intégral, je crois qu'il ne sera pas inutile de voir comme on obtient les mêmes résultats par des considérations directes. C'est le but que nous nous proposons dans cette Note.

## 2. Soit

$$(2) \quad z = \omega(x, y, \alpha, \beta, \eta)$$

une inégrale particulier de (1) avec trois constantes arbitraires  $\alpha, \beta, \eta$ . Nous avons l'identité

$$(3) \quad H_1 \frac{d^2 \omega}{dx^2} + 2K_1 \frac{d^2 \omega}{dx dy} + L_1 \frac{d^2 \omega}{dy^2} + M_1 \\ + N_1 \left[ \frac{d^2 \omega}{dx^2} \frac{d^2 \omega}{dy^2} - \left( \frac{d^2 \omega}{dx dy} \right)^2 \right] = 0$$

où  $H_1, K_1, L_1, M_1, N_1$  représentent des fonctions de  $\omega, x, y, \frac{d\omega}{dx}, \frac{d\omega}{dy}$ .

M. Imschenetsky considère ensuite  $\alpha, \beta, \eta$  comme variables et introduit en (1), au lieu de la variable dépendante  $z$ , la variable  $\eta$  déterminée par (2) et, au lieu des variables indépendantes  $x$  et  $y$ , les variables  $\alpha$  et  $\beta$  déterminées par les équations

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{d\omega}{d\alpha} + \frac{d\omega}{d\eta} \frac{d\eta}{d\alpha} = 0 \\ \frac{d\omega}{d\beta} + \frac{d\omega}{d\eta} \frac{d\eta}{d\beta} = 0. \end{cases}$$

Pour obtenir l'équation dans laquelle se transforme de cette manière l'équation proposée, on tire de (2)

$$p = \frac{d\omega}{dx}, \quad q = \frac{d\omega}{dy}$$

$$r = \frac{d^2\omega}{dx^2} + \left( \frac{dp}{dx} + \frac{dp}{d\eta} \frac{d\eta}{dx} \right) \frac{dx}{dx} + \left( \frac{dp}{d\beta} + \frac{dp}{d\eta} \frac{d\eta}{d\beta} \right) \frac{d\beta}{dx}$$

$$s = \frac{d^2\omega}{dx dy} + \left( \frac{dp}{dx} + \frac{dp}{d\eta} \frac{d\eta}{dx} \right) \frac{dx}{dy} + \left( \frac{dp}{d\beta} + \frac{dp}{d\eta} \frac{d\eta}{d\beta} \right) \frac{d\beta}{dy}$$

$$t = \frac{d^2\omega}{dy^2} + \left( \frac{dq}{dx} + \frac{dq}{d\eta} \frac{d\eta}{dx} \right) \frac{dx}{dy} + \left( \frac{dq}{d\beta} + \frac{dq}{d\eta} \frac{d\eta}{d\beta} \right) \frac{d\beta}{dy};$$

ensuite on substitue dans les expressions précédentes de  $r, s, t$  les valeurs de  $\frac{dx}{dx}, \frac{d\beta}{dx}, \frac{dx}{dy}, \frac{d\beta}{dy}$  que l'on tire des équations du premier degré qui résultent de la différentiation des deux équations (4) par rapport à  $x$  et à  $y$ ; et enfin on substitue les valeurs qui résultent pour  $r, s, t$  dans l'équation (1). On trouve de cette manière, ayant égard à (3), l'équation suivante:

$$(5) \quad R \frac{d^2\eta}{dx^2} + 2S \frac{d^2\eta}{dx d\beta} + T \frac{d^2\eta}{d\beta^2} + U = 0,$$

où  $R, S, T, U$  sont des fonctions de  $\alpha, \beta, \eta, \frac{d\eta}{dx}, \frac{d\eta}{d\beta}$  données par les formules suivantes:

$$-R = (H + Nt_1) \left( \frac{dp_1}{d\beta} + \frac{dp_1}{d\eta} \frac{d\eta}{d\beta} \right)^2$$

$$+ 2(K - Ns_1) \left( \frac{dp_1}{d\beta} + \frac{dp_1}{d\eta} \frac{d\eta}{d\beta} \right) \left( \frac{dq_1}{d\beta} + \frac{dq_1}{d\eta} \frac{d\eta}{d\beta} \right)$$

$$+ (L + Nr_1) \left( \frac{dq_1}{d\beta} + \frac{dq_1}{d\eta} \frac{d\eta}{d\beta} \right)^2,$$

$$\begin{aligned}
S &= (H + N t_1) \left( \frac{dp_1}{d\alpha} + \frac{dp_1}{dn} \frac{dn}{d\alpha} \right) \left( \frac{dp_1}{d\beta} + \frac{dp_1}{dn} \frac{dn}{d\beta} \right) \\
&+ (K - N s_1) \left[ \left( \frac{dp_1}{d\alpha} + \frac{dp_1}{dn} \frac{dn}{d\alpha} \right) \left( \frac{dq_1}{d\beta} + \frac{dq_1}{dn} \frac{dn}{d\beta} \right) \right. \\
&\quad \left. + \left( \frac{dp_1}{d\beta} + \frac{dp_1}{dn} \frac{dn}{d\beta} \right) \left( \frac{dq_1}{d\alpha} + \frac{dq_1}{dn} \frac{dn}{d\alpha} \right) \right] \\
&+ (L + N r_1) \left( \frac{dq_1}{d\beta} + \frac{dq_1}{dn} \frac{dn}{d\beta} \right) \left( \frac{dq_1}{d\alpha} + \frac{dq_1}{dn} \frac{dn}{d\alpha} \right) \\
-T &= (H + N t_1) \left( \frac{dp_1}{d\alpha} + \frac{dp_1}{dn} \frac{dn}{d\alpha} \right)^2 \\
&+ 2(K - N s_1) \left( \frac{dp_1}{d\alpha} + \frac{dp_1}{dn} \frac{dn}{d\alpha} \right) \left( \frac{dq_1}{d\alpha} + \frac{dq_1}{dn} \frac{dn}{d\alpha} \right) \\
&\quad + (L + N r_1) \left( \frac{dq_1}{d\alpha} + \frac{dq_1}{dn} \frac{dn}{d\alpha} \right)^2 \\
\frac{d\omega}{dn} U &= N \left[ \left( \frac{dp_1}{d\alpha} + \frac{dp_1}{dn} \frac{dn}{d\alpha} \right) \left( \frac{dq_1}{d\beta} + \frac{dq_1}{dn} \frac{dn}{d\beta} \right) \right. \\
&\quad \left. - \left( \frac{dp_1}{d\beta} + \frac{dp_1}{dn} \frac{dn}{d\beta} \right) \left( \frac{dq_1}{d\alpha} + \frac{dq_1}{dn} \frac{dn}{d\alpha} \right) \right]^2 \\
&+ R \left[ \frac{d^2\omega}{d\alpha^2} + 2 \frac{d^2\omega}{d\alpha d\beta} \frac{dn}{d\alpha} + \left( \frac{d^2\omega}{d\alpha^2} \right)^2 \left( \frac{dn}{d\alpha} \right)^2 \right] \\
&+ 2S \left[ \frac{d^2\omega}{d\alpha d\beta} + \frac{d^2\omega}{d\alpha dn} \frac{dn}{d\beta} + \frac{d^2\omega}{dn d\beta} \frac{dn}{d\alpha} + \frac{d^2\omega}{dn^2} \frac{dn}{d\alpha} \frac{dn}{d\beta} \right] \\
&+ T \left[ \frac{d^2\omega}{d\beta^2} + 2 \frac{d^2\omega}{d\beta dn} \frac{dn}{d\beta} + \frac{d^2\omega}{dn^2} \left( \frac{dn}{d\beta} \right)^2 \right],
\end{aligned}$$

où je pose, pour abréger,

$$p_1 = \frac{d\omega}{dx}, \quad q_1 = \frac{d\omega}{dy}, \quad r_1 = \frac{d^2\omega}{dx^2}, \quad s_1 = \frac{d^2\omega}{dx dy}, \quad t_1 = \frac{d^2\omega}{dy^2}.$$

3. Cela posé, j'entre dans le sujet de cette Note, c'est-à-dire, je vais considérer le cas où l'on obtient l'intégrale (2) au moyen d'une ou de deux intégrales intermédiaires particulières de (1), avec une constante arbitraire chacune.

Soit

$$f(x, y, z, p, q) = \alpha$$

une intégrale intermédiaire de (1) avec une constante arbitraire  $\alpha$ . On sait que la fonction  $f(x, y, z, p, q)$  satisfait aux équations qui résultent de l'élimination de deux des quantités  $r, s, t$  entre (1) et les équations suivantes:

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{df}{dx} + \frac{df}{dz} p + \frac{df}{dp} r + \frac{df}{dq} s = 0 \\ \frac{df}{dy} + \frac{df}{dz} q + \frac{df}{dp} s + \frac{df}{dq} t = 0 \end{cases}$$

e que ces équations sont

$$P = H \left( \frac{df}{dy} + q \frac{df}{dz} \right) \frac{df}{dq} - H \frac{df}{dp} \left( \frac{df}{dx} + p \frac{df}{dz} \right) - 2K \left( \frac{df}{dy} + q \frac{df}{dz} \right) \frac{df}{dp} + M \left( \frac{df}{dp} \right)^2 - N \left( \frac{df}{dy} + q \frac{df}{dz} \right) = 0.$$

$$Q = H \left( \frac{df}{dq} \right)^2 - 2K \frac{df}{dp} \frac{df}{dq} + L \left( \frac{df}{dp} \right)^2 - N \left( \frac{df}{dy} + q \frac{df}{dz} \right) \frac{df}{dq} - N \left( \frac{df}{dx} + p \frac{df}{dz} \right) \frac{df}{dp} = 0.$$

Soit maintenant l'équation (2) une intégrale particulière de (6) que l'on peut obtenir, comme on sait, par la méthode de Lagrange et Charpit. La valeur qu'il donne pour  $z$  satisfait aux équations précédentes, et par conséquent satisfait aussi à l'équation suivante :

$$(8) \quad (H + Nt) \left( \frac{df}{dq} \right)^2 - 2(K - Ns) \frac{df}{dp} \frac{df}{dq} + (L + Nr) \left( \frac{df}{dp} \right)^2 = 0,$$

qui résulte de l'élimination de

$$\frac{df}{dx} + p \frac{df}{dz}, \quad \frac{df}{dy} + q \frac{df}{dz}$$

dans la seconde au moyen des équations (7).

Mais, en différenciant (6) par rapport à  $\beta$  et considérant  $z, p, q$  comme des fonctions de  $\beta$  déterminées par (2), on trouve

$$\frac{df}{d\omega} \left( \frac{d\omega}{d\beta} + \frac{d\omega}{d\eta} \frac{d\eta}{d\beta} \right) + \frac{df}{dp_1} \left( \frac{dp_1}{d\beta} + \frac{dp_1}{d\eta} \frac{d\eta}{d\beta} \right) + \frac{df}{dq_1} \left( \frac{dq_1}{d\beta} + \frac{dq_1}{d\eta} \frac{d\eta}{d\beta} \right) = 0,$$

ou, en vertu des équations (4)

$$\frac{df}{dp_1} \left( \frac{dp_1}{d\beta} + \frac{dp_1}{d\eta} \frac{d\eta}{d\beta} \right) + \frac{df}{dq_1} \left( \frac{dq_1}{d\beta} + \frac{dq_1}{d\eta} \frac{d\eta}{d\beta} \right) = 0.$$

En substituant maintenant dans l'expression de R la quantité

$$\frac{dp_1}{d\beta} + \frac{dp_1}{d\eta} \frac{d\eta}{d\beta}$$



par sa valeur donnée par cette équation, on trouve

$$-R = \frac{\left(\frac{dq_1}{dz} + \frac{dq_1}{d\eta} \frac{d\eta}{dz}\right)^2}{\left(\frac{df}{dp_1}\right)^2} \left[ (H_1 + N_1 t_1) \left(\frac{df}{dq_1}\right)^2 - 2(K - N_1 s_1) \frac{df}{dp_1} \frac{df}{dq_1} + (L_1 + N_1 r_1) \left(\frac{df}{dp_1}\right)^2 \right].$$

Donc, en vertu de la formule (8), nous avons  $R = 0$ , et l'équation (5) prend la forme simplifiée suivante:

$$2S \frac{d^2\eta}{dx dz} + T \frac{d^2\eta}{d^2\beta} + U = 0.$$

4. Soient maintenant

$$(9) \quad \begin{cases} f(x, y, z, p, q) = \alpha \\ F(x, y, z, p, q) = \beta \end{cases}$$

deux intégrales intermédiaires de (1) avec deux constantes arbitraires  $\alpha$  et  $\beta$ . Si chacune d'elles satisfait à un des deux systèmes d'équations différentielles ordinaires, aux quels la methode de Monge ramène le problème de l'intégration de l'équation (1), ou à un des deux systèmes d'équations aux dérivées partielles de premier ordre, aux quels la methode de Boole ramène le même problème, on sait que les valeurs de  $p$  et  $q$  données par les équations (9) rendent

$$dz = p dx + q dy$$

intégrable. De cette intégration résulte l'équation (2).

Dans ce cas, on voit, comme dans le cas antérieur, que  $R = 0$ . Ensuite, en éliminant dans l'expression de  $T$  la quantité

$$T = \left( \frac{dp_1}{dz} + \frac{dp_1}{d\eta} \frac{d\eta}{dz} \right)^2 + \dots$$

au moyen de l'équation

$$\frac{dF}{dp_1} \left( \frac{dp_1}{dz} + \frac{dp_1}{d\eta} \frac{d\eta}{dz} \right) + \frac{dF}{dq_1} \left( \frac{dq_1}{dz} + \frac{dq_1}{d\eta} \frac{d\eta}{dz} \right) = 0,$$

et ayant égard à l'équation qui résulte du changement dans (8) de  $f$  en  $F$ , on voit aussi que  $T = 0$ .

L'équation (5) prend donc la forme suivante:

$$2S \frac{d^2\eta}{dz d\beta} + U = 0.$$

5. Soit maintenant

$$K^2 - HL + MN = 0,$$

ce qui arrive quand les deux systèmes d'équations de la *caractéristique* coïncident, et soit encore

$$f(x, y, z, p, q) = \alpha,$$

une intégrale particulière de (1) avec une constante arbitraire  $\alpha$ .

En différentiant cette équation par rapport à  $\alpha$  et à  $\beta$ , considérant  $z, p, q$  comme des fonctions de  $\alpha$  et  $\beta$  déterminées par (2), et ayant égard à (4), on trouve

$$\frac{df}{dp_1} \left( \frac{dp_1}{d\beta} + \frac{dp_1}{d\eta} \frac{d\eta}{d\beta} \right) + \frac{df}{dq_1} \left( \frac{dq_1}{d\beta} + \frac{dq_1}{d\eta} \frac{d\eta}{d\beta} \right) = 0,$$

$$\frac{df}{dp_1} \left( \frac{dp_1}{dz} + \frac{dp_1}{d\eta} \frac{d\eta}{dz} \right) + \frac{df}{dq_1} \left( \frac{dq_1}{dz} + \frac{dq_1}{d\eta} \frac{d\eta}{dz} \right) = 1.$$

En substituant ensuite dans l'expression de  $S$  les valeurs que ces équations donnent pour

$$\frac{dp_1}{d\beta} + \frac{dp_1}{dn} \frac{dn}{d\beta},$$

$$\frac{dp_1}{d\alpha} + \frac{dp_1}{dn} \frac{dn}{d\alpha},$$

on trouve

$$S = \frac{\left(\frac{dq_1}{d\alpha} + \frac{dq_1}{dn} \frac{dn}{d\alpha}\right) \left(\frac{dq_1}{d\beta} + \frac{dq_1}{dn} \frac{dn}{d\beta}\right)}{\left(\frac{df}{dp_1}\right)^2} \times \left[ (H_1 + N_1 t_1) \left(\frac{df}{dq_1}\right)^2 - 2(K_1 - N_1 s_1) \frac{df}{dp_1} \frac{df}{dq_1} + (L_1 + N_1 r_1) \left(\frac{df}{dp_1}\right)^2 \right] + \frac{\left(\frac{dq_1}{d\beta} + \frac{dq_1}{dn} \frac{dn}{d\beta}\right)}{\left(\frac{df}{dp_1}\right)^2} \left[ - (H_1 + N_1 t_1) \frac{df}{dq_1} + (K_1 - N_1 s_1) \frac{df}{dp_1} \right],$$

et par conséquent, en vertu de (8),

$$S = \frac{\left(\frac{dq_1}{d\beta} + \frac{dq_1}{dn} \frac{dn}{d\beta}\right)}{\left(\frac{df}{dp_1}\right)^2} \left[ - (H_1 + N_1 t_1) \frac{df}{dq_1} + (K_1 - N_1 s_1) \frac{df}{dp_1} \right].$$

Mais l'équation (8) donne

$$\begin{aligned} \frac{df}{dq} &= \frac{K - Ns \pm \sqrt{(K - Ns)^2 - (H + Nt)(L + Nr)}}{H + Nt} \cdot \frac{df}{dp} \\ &= \frac{K - Ns \pm \sqrt{K^2 - HL + MN}}{H + Nt} \frac{df}{dp} \\ &= \frac{K - Ns}{H + Nt} \frac{df}{dp}. \end{aligned}$$

Donc nous avons  $S = 0$ , et l'équation (5) prend la forme

$$T \frac{d^2 \eta}{d\zeta^2} + U = 0.$$

SUR TROIS FORMULES DE LA THÉORIE  
DES FONCTIONS ÉLLIPTIQUES (\*)

PAR

J. A. MARTINS DA SILVA

Dans les *Acta Mathematica*, t. I, p. 368, M. Hermite a fait usage des formules qui donnent la décomposition en éléments simples, des trois quantités

$$\operatorname{sn} x \cdot \operatorname{sn}(x+a), \operatorname{cn} x \cdot \operatorname{cn}(x+a), \operatorname{dn} x \cdot \operatorname{dn}(x+a),$$

pour démontrer une relation remarquable dans la théorie des fonctions élliptiques.

D'une manière analogue je démontre facilement au moyen de ces formules les trois relations suivantes. Supposons les quatre quantités  $u, v, r, s$  assujetties à la condition

$$u + v + r + s = 0,$$

on aura

$$(1) \quad \begin{cases} k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \cdot \operatorname{cn} r \operatorname{cn} s - \\ - k^2 \operatorname{cn} u \operatorname{cn} v \cdot \operatorname{sn} r \operatorname{sn} s - \\ - \operatorname{dn} u \cdot \operatorname{dn} v + \operatorname{dn} r \cdot \operatorname{dn} s = 0, \end{cases}$$

(\*) Este artigo foi publicado por Martins da Silva, pouco tempo antes de morrer, no *Bulletin des sciences mathématiques* (tom. x da 2.<sup>a</sup> série, pag. 78). Veja-se *Jornal de sciencias mathematicas e astronomicas*, tom. vi, pag. 194.

$$(II) \left\{ \begin{array}{l} k'^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v - k'^2 \operatorname{sn} r \operatorname{sn} s + \\ + \operatorname{dn} u \operatorname{dn} v \cdot \operatorname{cn} r \operatorname{cn} s - \\ - \operatorname{cn} u \operatorname{cn} v \cdot \operatorname{dn} r \operatorname{dn} s = 0, \end{array} \right.$$

$$(III) \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \cdot \operatorname{dn} r \operatorname{dn} s - \\ - \operatorname{dn} u \operatorname{dn} v \cdot \operatorname{sn} r \operatorname{sn} s + \\ + \operatorname{cn} r \operatorname{cn} s - \operatorname{cn} u \operatorname{cn} v = 0. \end{array} \right.$$

Ces relations, déduites par M. Smith dans les *Proceedings of London mathematical society*, vol. x, p. 91, sont symétriques par rapport aux deux couples de quantités  $u, v, r, s$ , et aux deux arguments des mêmes couples.

Posons

$$(1) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} u = x, \\ v = -(x + a), \\ r + s = a, \end{array} \right.$$

la relation (I) devient

$$(2) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} -k^2 \operatorname{sn} x \operatorname{sn} (x + a) \operatorname{cn} r \operatorname{cn} s - \\ -k^2 \operatorname{cn} x \operatorname{cn} (x + a) \operatorname{sn} r \operatorname{sn} s - \\ - \operatorname{dn} x \operatorname{dn} (x + a) + \operatorname{dn} r \operatorname{dn} s = 0; \end{array} \right.$$

mais les formules du savant géomètre M. Hermite sont

$$(3) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sn} x \operatorname{sn} (x + a) = U, \\ \operatorname{cn} x \operatorname{cn} (x + a) = \operatorname{cn} a - \operatorname{dn} a \cdot U, \\ \operatorname{dn} x \operatorname{dn} (x + a) = \operatorname{dn} a - k^2 \operatorname{cn} a \cdot U, \end{array} \right.$$

en supposant

$$U = \frac{1}{k^2 \operatorname{sn} a} [Z(x) - Z(x+a) + Z(a)];$$

$$Z(x) = \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)};$$

appliquées dans la relation (2) donnent

$$\begin{aligned} & -k^2 \cdot U \cdot \operatorname{cn} r \operatorname{cn} s - \\ & -k^2 (\operatorname{cn} a - \operatorname{dn} a \cdot U) \operatorname{sn} r \operatorname{sn} s - \\ & -(\operatorname{dn} a - k^2 \operatorname{cn} a \cdot U) + \operatorname{dn} r \operatorname{dn} s = 0, \end{aligned}$$

ou

$$\begin{cases} k^2 \cdot U (-\operatorname{cn} r \operatorname{cn} s + \operatorname{sn} r \operatorname{sn} s \operatorname{dn} a + \operatorname{cn} a) - \\ -(k^2 \operatorname{sn} r \operatorname{sn} s \operatorname{cn} a + \operatorname{dn} a - \operatorname{dn} r \operatorname{dn} s) = 0. \end{cases}$$

Il faut alors démontrer les formules

$$(4) \dots \dots \begin{cases} -\operatorname{cn} r \operatorname{cn} s + \operatorname{sn} r \operatorname{sn} s \operatorname{dn} a + \operatorname{cn} a = 0, \\ k^2 \operatorname{sn} r \operatorname{sn} s \operatorname{cn} a + \operatorname{dn} a - \operatorname{dn} r \operatorname{dn} s = 0. \end{cases}$$

Il suffit d'introduire les conditions (1) dans les formules (3), en attendant l'égalité

$$a = -(u + v);$$

ou en obtient les formules (4), qui démontrent la relation (I).

Considérons maintenant la relation (II); il vient par un calcul semblable la relation

$$\begin{cases} -k'^2 \cdot U - k'^2 \operatorname{sn} r \operatorname{sn} s + \\ + (\operatorname{dn} a - k'^2 \operatorname{cn} a \cdot U) \operatorname{cn} r \operatorname{cn} s - \\ -(\operatorname{cn} a - \operatorname{dn} a \cdot U) \operatorname{dn} r \operatorname{dn} s = 0 \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} U(-k'^2 - k^2 \operatorname{cn} a \operatorname{cn} r \operatorname{cn} s + \operatorname{dn} a \operatorname{dn} r \operatorname{dn} s) - \\ - (k'^2 \operatorname{sn} r \operatorname{sn} s - \operatorname{dn} a \operatorname{cn} r \operatorname{cn} s + \operatorname{cn} a \operatorname{dn} r \operatorname{dn} s) = 0. \end{cases}$$

On connaît déjà les formules

$$\begin{cases} -k'^2 - k^2 \operatorname{cn} a \operatorname{cn} r \operatorname{cn} s + \operatorname{dn} a \operatorname{dn} r \operatorname{dn} s = 0, \\ k'^2 \operatorname{sn} r \operatorname{sn} s - \operatorname{dn} a \operatorname{cn} r \operatorname{cn} s + \operatorname{cn} a \operatorname{dn} r \operatorname{dn} s = 0; \end{cases}$$

ce sont les équations dont M. Hermite s'est servi pour obtenir la relation de M. Cayley (loc. cit.) et qui déterminent aussi la relation (II).

La relation (III) donne

$$\begin{cases} -U \cdot \operatorname{dn} r \operatorname{dn} s - (\operatorname{dn} a - k^2 \operatorname{cn} a \cdot U) \operatorname{sn} r \operatorname{sn} s + \\ + \operatorname{cn} r \operatorname{cn} s - (\operatorname{cn} a - \operatorname{dn} a \cdot U) = 0. \end{cases}$$

ou bien

$$\begin{cases} U(-\operatorname{dn} r \operatorname{dn} s + k^2 \operatorname{cn} a \operatorname{sn} r \operatorname{sn} s + \operatorname{dn} a) - \\ - \operatorname{dn} a \operatorname{sn} r \operatorname{sn} s - \operatorname{cn} r \operatorname{cn} s + \operatorname{cn} a = 0; \end{cases} \quad (4)$$

les parenthèses comprennent les formules (4) qui démontrent notre question.



## BIBLIOGRAPHIA

R. R. de Sousa Pinto. — *Continuação dos estudos instrumentaes.* — Coimbra, 1890.

No tomo VIII (pagina 132) d'este jornal deu-se noticia de um opusculo em que o sr. Sousa Pinto se occupa do estudo do circulo meridiano de Repsold que possui o Observatorio astronomico de Coimbra. No presente opusculo continúa o auctor este estudo, occupando-se do erro de collimação, da redução de passagens pelos fios lateraes á passagem pelo fio do meio, do uso do chronographo nas passagens observadas pelos fios do reticulo, etc.

*Coordenadas geographicas dos pontos geodesicos de primeira ordem.*  
— Lisboa, 1889.

Este opusculo, publicado pela Direcção geral dos trabalhos geodesicos, contém as coordenadas geographicas dos pontos de primeira ordem da triangulação portugueza. As longitudes são referidas ao meridiano do Observatorio do Castello de S. Jorge em Lisboa, e as altitudes são referidas ao nivel medio das aguas do Tejo, defronte de Lisboa. Depois das tabellas que contém as latitudes, longitudes e altitudes vem uma descripção rapida de cada um dos signaes geodesicos.

Gino Loria. — *Il periodo aureo della Geometria greca (Memorie della R. Accademia del Scienze di Torino, série II, t. XL, 1890).*

Já por varias vezes temos dado noticia de trabalhos importantes relativos á historia das mathematicas, devidos ao sr. Gino Loria. Na presente Memoria o sabio professor da Universidade de Ge-

nova estuda o periodo mais importante da Geometria grega, isto é, o periodo grego-alexandrino, para dar noticia dos geometras mais eminentes que n'este periodo floreceram, e dos resultados mais importantes e dos methodos mais engenhosos que lhes são devidos.

O geometra de que primeiro o auctor se occupa é Euclides. Na noticia relativa a este geometra considera em primeiro lugar os *Elementos de Geometria*, analysando as differentes partes d'esta obra celebre, e discutindo a authenticidade e originalidade de cada uma d'ellas, etc.; considera depois a obra intitulada *Dados*, em que Euclides apresenta uma serie de proposições em que se affirmã que uma ou muitas cousas de que se fala são consequencia das hypotheses feitas sem todavia as determinar completamente; considera em terceiro lugar a obra intitulada *Da divisão das figuras*, em que o grande geometra tracta de dividir figuras limitadas por linhas rectas ou circulos por meio de uma ou mais rectas em partes tendo entre si razões dadas; considera finalmente as obras que se conhecem apenas pelas referencias que a ellas fazem os escriptores antigos, *Porismas*, *Logares superficies*, *Conicas*, etc., dando noticia do que a respeito d'estas obras se sabe ou se conjectura.

Depois de se occupar de Euclides passa o sr. Gino Loria a occupar-se de Archimedes, abrindo por uma comparação d'estes dois grandes homens. Diz, com effeito, o auctor: «Quem faz um exame comparativo dos modos como os homens de sciencia contribuem para o progresso do saber, não tarda a reconhecer que taes modos são de duas especies: uns propondo-se resolver questões isoladas, que elles julgam dignas de estudo, e procurando methodos originaes applicaveis a um problema particular ou a uma classe inteira de questões; outros, compulsando os materiaes scientificos existentes sobre um determinado argumento, propõem-se distribuil-os harmonicamente e encher as lacunas existentes entre elles com o fim de compôr um todo organico. Se n'esta ultima cathegoria de homens de sciencia se deve sem duvida collocar Euclides, á primeira pertence sem contestação Archimedes.»

A respeito de Archimedes o sr. Gino Loria expõe o que se sabe a respeito da vida do grande geometra syracusano, e em seguida dá noticia das suas obras: *Equilibrio dos planos I*, *Quadratura da parabola*, *Equilibrio dos planos II*, *Esfhera e cylindro*,

*Spiraes, Conoides e Espheroides, Medida do circulo, etc.*, analysando cada uma d'ellas, apreciando os methodos empregados, comparando estes methodos com os methodos modernos, etc.

O terceiro geometra de quem o sr. Gino Loria se occupa é Eratostene, o geometra que primeiro tentou a medida da terra. Dá noticia do seu instrumento para inserir duas medias proporcionaes entre duas rectas dadas, do seu methodo para formar uma táboa de numeros primos e das conjecturas que têm sido feitas a respeito dos outros trabalhos que Pappo attribue a este geometra.

Segue-se Apollonio, o geometra celebre, de quem Leibnitz dizia: *Quem comprehende Archimedes e Apollonio, pouco se admirará das descobertas dos homens eminentes recentes.* O sr. Loria examina principalmente a obra immortal d'este grande geometra, intitulada *Tractado das secções conicas*, dando noticia dos assumptos contidos em cada um dos livros em que se divide, distinguindo as proposições que se podem attribuir a Apollonio das que eram já conhecidas pelos geometras anteriores, comparando os methodos d'este auctor com o methodo cartesiano, para fazer vêr que muitas vezes o methodo empregado por Apollonio é uma traducção geometrica do methodo cartesiano, etc.

Vêm depois noticias sobre Ipsicles, a quem se attribuem os dois capitulos XIII e XIV contidos nas antigas edições dos Elementos de Euclides, aos quaes se dá o nome de *Livros de Ipsicles de Alexandria sobre os corpos regulares*; sobre Nicomedes e Diocles, que estudaram respectivamente as curvas conhecidas pelos nomes de conchoide, cissoide; sobre Perseo, que estudou as curvas que resultam de cortar o toro por planos parallelas ao eixo de rotação; e finalmente sobre Zenodoro, auctor de um trabalho sobre os isoperimetros.

Terminaremos esta rapida noticia sobre a bella Memoria do sr. Gino Loria, aconselhando vivamente a sua leitura como das mais proveitosas e das mais interessantes. Por meio d'ella póde-se, com pequeno trabalho, tomar um conhecimento bastante extenso de uma das epochas mais brilhantes da Geometria.

*S. Pincherle.* — *Saggio di una generalizzazione delle frazioni continue algebriche (Memorie della Reale Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna, 1890).*

N'esta Memoria importante o auctor generalisa a theoria das fracções continuas algebricas. Suppondo dadas as funcções analyticas  $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{p-1}$ , de gráo 0, -1, -2, ..., -(p-1), mostra como se póde formar uma serie de funcções analyticas

$$\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_p, \sigma_{p+1}, \dots, \sigma_{p+n}, \dots$$

de gráo sempre decrescente (a differença dos grãos de duas consecutivas sendo em geral igual á unidade e podendo ser maior) que satisfaçam á relação linear recorrente

$$\sigma_n + a_{1,n} \sigma_{n+1} + a_{2,n} \sigma_{n+2} + \dots + a_{p-1,n} \sigma_{n+p-1} = \sigma_{n+p},$$

onde  $a_{1,n}, \dots, a_{p-1,n}$  são polynomios ordenados segundo as potencias de  $x$ .

As fracções continuas algebricas ordinarias correspondem ao caso de ser  $n = 2$ .

Para mostrar a importancia das novas fracções continuas mostra o sr. Pincherle que, por meio d'ellas, se póde determinar  $p$  funcções inteiras  $A_0, A_1, \dots, A_{p-1}$  taes que as funcções  $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{p-1}$  estejam ligadas pela relação linear

$$A_0 \sigma_0 + A_1 \sigma_1 + \dots + A_{p-1} \sigma_{p-1} = 0$$

com a maior approximação possivel, para um gráo dado dos  $A$ .

*B. d' Engelhardt.* — *Observations astronomiques (deuxième partie).*  
— *Dresde, 1890.*

No tomo VIII (pagina 26) d'este jornal foi por nós publicada uma noticia sobre a primeira parte d'esta publicação importante. A segunda parte é em tudo digna da primeira. N'ella continúa o sr. B. d' Engelhardt a expôr os resultados das observações por

elle feitas no seu Observatorio particular, installado em Dresde, e contém:

1.º Uma serie de observações micrometricas dos satellites de Saturno, feitas em 1887 e 1888.

2.º Muitas observações de cometas (cometa de 1882 II, cometa de 1885 V, cometas de 1886 I, II, III, V, VII, VIII, IX, cometas de 1887 IV, V, cometas de 1888 I, III, V, cometa de 1889 I).

3.º Algumas observações dos planetas Diana, Sapho e Dresda.

4.º Algumas observações para verificar o movimento proprio de duas estrellas.

5.º Uma serie de observações de 829 estrellas do catalogo de Bradley, executadas pelo auctor por proposta do sr. O. Struve, e feitas no intervallo de 1886 a 1889.

6.º Uma serie de medidas micrometricas de estrellas duplas, contidas n'uma lista fornecida pelo sr. O. Struve e feitas por pedido d'este illustre astronomo.

7.º Observações de algumas estrellas de comparação, feitas por pedido do sr. W. Schur.

8.º Uma longa lista de observações de nebulosas, feitas no intervallo de 1885 a 1888.

A obra, de que o sr. B. d'Engelhardt vem de publicar a segunda parte, parece-nos destinada a figurar distinctamente entre as publicações dos principaes observatorios. Por ella se vê, com admiração, a que altura este illustre astronomo elevou o seu observatorio particular, dando assim um exemplo brilhante de dedicação á sciencia.

*R. Marcolongo. — Sulle geodetiche tracciate sulle quadriche prive di centro (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 1890).*

N'esta Nota importante occupa-se o sr. Marcolongo das linhas geodesicas traçadas sobre os paraboloides. Integra as equações differenciaes das linhas geodesicas que partem dos pontos umbilicaes, por meio de funcções exponenciaes, e exprime as coordenadas de um ponto qualquer por meio de funcções exponenciaes dependentes de um unico parametro. Depois estende ao paraboloide alguns dos theoremas que têm logar no caso das superficies de segunda ordem com centro. Finalmente integra as equa-

ções diferenciáveis das linhas geodesicas que partem de um ponto não umbilical, por meio das funções teta de Jacobi.

*R. Marcolongo. — Teorema di Meccanica (Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, t. 11).*

O theorema demonstrado é o seguinte:

Todo o problema de Mecanica, no qual a posição geometrica do systema depende só de tres quantidades e no qual subsistem o integral das forças vivas, um dos integraes das áreas e um dos integraes do centro de gravidade relativo a um dos eixos do plano sobre o qual tem logar o theorema das áreas, é reductivel a quadraturas.

*R. Marcolongo. — Alcuni teoremi sulle funzioni cilindriche di prima specie (Rendiconti della R. Accademia de Napoli, 1889).*

N'esta Nota apresenta o auctor algumas relações importantes relativas ás funcções cylindricas de 1.<sup>a</sup> especie  $Y_n(x)$ . Taes são as relações

$$\int_0^1 \frac{Y_n(ax) Y_{n-1}(ax)}{x} dx = -\frac{a}{2n-1} Y_{n-1}(a) Y_{n+1}(a),$$

$$\int_0^1 \frac{dY_n(ax)}{dx} \cdot \frac{dY_n(bx)}{dx} dx + \int_0^1 \frac{Y_n(ax) \cdot Y_n(bx)}{x} dx = 0,$$

$$\int_0^1 x^2 Y_{n-1}(ax) Y_n(bx) dx + \int_0^1 x^2 Y_{n+1}(ax) Y_n(bx) dx = 0,$$

onde  $a$  e  $b$  representam duas raizes diferentes de  $Y_n(x) = 0$ ; e

$$\int_0^1 x \left( \frac{dY_n(ax)}{dx} \right)^2 + n^2 \int_0^1 \frac{Y_n^2(ax)}{x} dx = \frac{a^2}{2} Y_{n+1}^2(a),$$

$$\int_0^1 x^2 Y_{n-1}(ax) Y_n(ax) dx + \int_0^1 x^2 Y_{n+1}(ax) Y_n(ax) dx = \frac{n}{a} Y_{n+1}^2(a),$$

onde  $a$  representa uma raiz de  $Y_n(x) = 0$  cujo gráo de multiplicidade é igual ou superior a 2.

G. Vivanti. — *Sulle funzioni definita da un' espressione algebrico-differenziale del primo ordine (Annali di Matematica pura ed applicata, 1888).*

— *Sulle equazioni algebrico-differenziali del 1.º ordine (Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, t. iv).*

— *Sulle equazioni algebrico-differenziali del 1.º ordine (Nota II) (Item).*

A equação considerada n'estes tres bellos trabalhos é a seguinte:

$$f_0(w, z) \left(\frac{dw}{dz}\right)^m + f_1(w, z) \left(\frac{dw}{dz}\right)^{m-1} + \dots + f_m(w, z) = 0,$$

onde  $f_0, f_1, f_2$ , etc., representam funcções racionais inteiras de  $w$  e  $z$ . Resolvendo esta equação obtem-se as  $m$  raizes

$$\frac{dw}{dz} = \varphi_1(w, z), \dots, \frac{dw}{dz} = \varphi_m(w, z),$$

que, integrando, dão

$$w = F_1(z), \quad w = F_2(z), \quad \dots, \quad w = F_m(z).$$

O auctor apresenta uma serie de theoremas importantes relativos ao modo como a natureza d'estas funcções depende da fórma dos coefficients da proposta.

G. Vivanti. — *Fondamenti della teoria dei tipi ordinati (Annali di Matematica pura ed applicata, 1889).*

Um aggregado de elementos, materiaes ou não, dispostos em  $n$  sentidos differentes formam um typo ordenado. A theoria dos

typos ordenados é devida a G. Cantor, e é d'esta theoria que o sr. Vivanti se occupa na sua excellente Memoria.

Nos paragraphos I e II vêem algumas definições e principios geraes. No paragrapho III vem a theoria das operações sobre typos ordenados. No paragrapho IV vem o estudo desenvolvido do problema que tem por fim, dado o numero de elementos de um typo, achar o numero correspondente de typos. Finalmente no paragrapho V vem o estudo de alguns typos de natureza particular.

*G. Vivanti. — Sulle equazioni a derivate parziali del 1.º ordine (Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, t. II).*

O auctor demonstra o theorema seguinte:

Para que a equação

$$H\left(x_1, x_2, \dots, x_n, \frac{dz}{dx_1}, \dots, \frac{dz}{dx_n}\right) = h$$

tenha um integral da forma

$$z = f_1(x_1) + f_2(x_2) + \dots + f_n(x_n)$$

é necessario e sufficiente que H satisfaça a uma equação da forma

$$\varphi\left[\varphi_1\left(H, x_1, \frac{dz}{dx_1}\right), \varphi_2\left(H, x_2, \frac{dz}{dx_2}\right), \dots, \varphi_n\left(H, x_n, \frac{dz}{dx_n}\right)\right] = 0.$$

G. T.



EXTRACTOS DAS PUBLICAÇÕES RECENTES

I

Sobre a inversão das derivações parciais

N'uma Nota publicada no *Mathesis*, o sr. Peano enuncia e demonstra o theorema relativo á inversão das derivações do modo seguinte:

Se  $f''_{xy}(x, y)$  existe na vizinhança de  $x = x_0, y = y_0$ , e é continua para  $x = x_0$  e  $y = y_0$ , e se  $f'_y(x, y)$  existe na vizinhança de  $x = x_0$ , a derivada  $f'_{yx}(x, y)$  existe tambem, e é  $f'_{xy}(x_0, y_0) = f'_{yx}(x_0, y_0)$ .

Seja  $\epsilon$  uma quantidade positiva tão pequena quanto se queira. Ponhamos

$$f''_{xy}(x_0 + h, y_0 + k) = f''(x_0, y_0) + \alpha. \quad (1)$$

Pois que  $f''_{xy}(x, y)$  é continua para  $x = x_0$  e  $y = y_0$ , póde-se determinar uma quantidade positiva  $\rho$  tal que, se  $|h| \leq \rho, |k| \leq \rho$ , se tenha  $|\alpha| \leq \epsilon$ . Integremos (1) relativamente a  $k$ , de 0 a  $k$ ; teremos

$$f'_x(x_0 + h, y_0 + k) - f'_x(x_0 + h, y_0) = hf''_{xy}(x_0, y_0) + k\alpha' \quad (2)$$

onde  $\alpha'$ , um dos valores de  $\alpha$ , não será, em valor absoluto, superior a  $\epsilon$ , isto é,  $|\alpha'| \leq \epsilon$ .

Integremos (2) relativamente a  $h$ , de 0 a  $h$ ; teremos a fórmula bem conhecida

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) + f(x_0, y_0) \\ = hkf''_{xy}(x_0, y_0) + hk\alpha', \end{aligned}$$

e, por ser  $\alpha''$  um dos valores de  $\alpha'$ ,  $|\alpha''| \leq \varepsilon$ . Deduz-se pois

$$\frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0)}{k} - \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k} = hf''_{xy}(x_0, y_0) + h\alpha'' \quad (4)$$

Passemos ao limite, para  $h=0$ . Pois que  $f'_y(x, y_0)$  existe temos

$$\lim_{k=0} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0)}{k} = f'_y(x_0 + h, y_0)$$

$$\lim_{k=0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k} = f'_y(x_0, y_0).$$

Logo  $\alpha''$  terá também um limite  $\alpha'''$ , em valor absoluto, igual ou inferior a  $\varepsilon$ . Tem-se pois

$$f'_y(x_0 + h, y_0) - f'_y(x_0, y_0) = hf''_{xy}(x_0, y_0) + h\alpha''' \quad (5)$$

ou

$$\frac{f'_y(x_0 + h, y_0) - f'_y(x_0, y_0)}{h} = f''_{xy}(x_0, y_0) + \alpha''' \quad (6)$$

e para todos os valores de  $h$  eguaes ou inferiores a  $\rho$ , em valor absoluto,  $\alpha'''$  é, em valor absoluto, igual ou inferior a  $\varepsilon$ . Logo, pela definição dos limites, tem-se

$$\lim_{h=0} \frac{f'_y(x_0 + h, y_0) - f'_y(x_0, y_0)}{h} = f''_{xy}(x_0, y_0).$$

Está pois provado que  $f_{yx}(x_0, y_0)$  existe, e que o seu valor é igual a  $f''_{xy}(x_0, y_0)$ .

[G. Peano: *Sur l'inversion des dérivations partielles* (*Mathesis*, t. x)].

II

Sobre o caso duvidoso relativo a certos caracteres de convergencia das series

N'um artigo muito interessante, publicado nos *Nouvelles Annales*, vem de demonstrar o sr. Fouret que se a applicação do criterio de convergencia da serie

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

(onde  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ ) baseado na consideração da expressão  $\sqrt[n]{u_n}$  não leva a conclusão alguma, o mesmo acontece com o criterio fundado na consideração de  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ .

Eis a demonstração dada pelo sr. Fouret.

Como os termos da serie tendem para zero, pôde-se sempre achar um numero inteiro  $r$  tão grande que  $u_r$  e os termos seguintes sejam todos inferiores á unidade. O mesmo acontece portanto á expressão  $\sqrt[n]{u_n}$ , visto que as raizes de indice qualquer d'um numero inferior á unidade são menores do que a unidade. Logo, se a expressão  $\sqrt[n]{u_n}$  não fornece indicação alguma relativamente á convergencia ou divergencia da serie, provém isto da impossibilidade de assignar um numero menor do que a unidade, ao qual  $\sqrt[n]{u_n}$  seja inferior, para os valores sufficientemente grandes de  $n$ .

Posto isto, não se pôde demonstrar a divergencia da serie (1) pelo theorema baseado na consideração de  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ . Com effeito, não é possivel achar um inteiro  $q$  tal que, para todos os valores de  $n$  eguaes ou superiores a  $q$ ,  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  seja maior do que a unidade; visto que, quando isto tem logar, os termos  $u_q, u_{q+1}$ , etc. crescem, o que é contrario á hypothese.

Tambem se não pôde demonstrar a convergencia da serie pelo

critério baseado na consideração de  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ . Com effeito, se, para valores de  $n$  eguaes ou superiores a um certo inteiro  $p$ ,  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  fosse constantemente inferior a um certo numero  $\lambda < 1$ , de modo que se tivesse

$$\frac{u_{p+1}}{u_p} < \lambda, \quad \frac{u_{p+2}}{u_{p+1}} < \lambda, \quad \dots, \quad \frac{u_{p+k}}{u_{p+k-1}} < \lambda,$$

ter-se-hia

$$u_{p+k} < u_p \lambda^k,$$

e portanto

$$\sqrt[p+k]{u_{p+k}} < \lambda \sqrt[p]{\frac{u_p}{\lambda^p}}.$$

Dois casos ha agora a distinguir. Suppondo primeiramente  $\frac{u_p}{\lambda^p} \leq 1$ , ter-se-hia, qualquer que seja  $k$ ,

$$\sqrt[p+k]{\frac{u_p}{\lambda^p}} \leq 1,$$

e portanto

$$\sqrt[p+k]{u_{p+k}} < \lambda.$$

Suppondo pelo contrario  $\frac{u_p}{\lambda^p} > 1$  e representando por  $\mu$  um numero tomado arbitrariamente entre  $\lambda$  e 1, poder-se-hia sempre achar um numero inteiro tão grande que

$$\lambda \sqrt[p+k]{\frac{u_p}{\lambda^p}} < \mu,$$

e a *fortiori*

$$\sqrt[p+k]{u_{p+k}} < \mu,$$

para todos os valores de  $k$  eguaes ou superiores a este inteiro.

Logo n'um e n'outro caso poder-se-hia determinar, para o inteiro  $n$ , um valor tal que, para todos os valores superiores a este,

$\sqrt[n]{u_n}$  fosse inferior a um numero determinado menor do que a unidade, o que é contrario á hypothese.

[G. Fourret: *Remarque sur le cas douteux relatif à certains caractères de convergence des séries* (*Novelles Annales de Mathématiques*, 1890)].

III

Trisectriz de Maclaurin

N'um artigo publicado no tomo VI (pag. 13) d'este jornal, considerou o sr. João d'Almeida Lima uma curva que serve para dividir um angulo em tres partes eguaes. O sr. Longchamps, referindo-se no seu *Cours de Mathématiques spéciales* (*Supplément*, 1890, pag. 114) a esta curva, diz que ella coincide com a trisectriz de Maclaurin (*Traité des fluxions*, 1749, pag. 198) e expõe um modo de geração d'esta curva differente do que empregou o sr. Almeida Lima.

Eis este meio de geração.

Imaginemos sobre uma recta pontos equidistantes

$$O_1O_2 = O_2O_3 = O_3O_4 = O_4O_5 = a;$$

tracemos por O (\*) uma transversal arbitraria  $O_1M$ , depois abaixemos  $O_5M$  perpendicularmente a esta recta; seja  $O_2I$  parallela a  $O_1M$  e seja  $MI$  perpendicular a  $O_1O_5$ . O lugar geometrico de I é a trisectriz de Maclaurin.

Para mostrar que esta curva serve a dividir os angulos em tres partes eguaes, emprega o sr. Longchamps o seguinte processo:

Tirando por  $O_2$  uma perpendicular a  $O_1O_5$  e chamando A o ponto em que esta perpendicular encontra a recta  $O_1M$ , e representando respectivamente por  $\omega$  e  $\varphi$  os angulos  $IO_2O_5$ ,  $IO_4O_5$ , temos

$$\rho = O_2I = AM = O_1M - O_1A = 4a \cos \omega - \frac{a}{\cos \omega}$$

(\*) É facil de construir a figura com as indicações dadas.

e

$$\frac{O_2 I}{\operatorname{sen} \varphi} = \frac{2a}{\operatorname{sen}(\varphi - \omega)}$$

Os angulos  $\varphi$  e  $\omega$  verificam pois, para todos os pontos da curva considerada, a relação

$$2 \operatorname{sen} \varphi \cos \omega = (4 \cos^2 \omega - 1) \operatorname{sen}(\varphi - \omega).$$

Esta igualdade pôde ser escripta do modo seguinte:

$$\operatorname{sen} \varphi \cos \omega (3 - 4 \cos^2 \omega) = \operatorname{sen} \omega \cos \varphi (1 - 4 \cos^2 \omega),$$

ou ainda

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{4 \operatorname{sen}^3 \omega - 3 \operatorname{sen} \omega}{3 \cos \omega - 4 \cos^3 \omega},$$

ou finalmente

$$\operatorname{tang} \varphi = \operatorname{tang} 3 \omega.$$

Logo o angulo  $IO_2 O_3$  é a terça parte do angulo  $IO_4 O_5$ .

No seu importante livro intitulado — *Essai sur la Géométrie de la règle et de l'équerre* (Paris, 1890) torna o sr. Longchamps a occupar-se d'esta curva, que define como cubica circular, possuindo um nó onde as tangentes fazem com o eixo da curva angulos eguaes a  $60^\circ$  e  $120^\circ$ .

Entre os trabalhos relativos a esta curva pôde ainda vêr-se um do sr. Schoute, que se occupou d'ella nos *Archives Néerlandaises* (tomo xx, 1885), outro do sr. Habich, que se occupou d'ella na *Gaceta Científica* (1885), e dois do sr. Longchamps, publicados um no *Journal de mathématiques spéciales* (1885), e outro no *Annuaire de l'Association française* (1885).

# JOURNAL

## INDICE

---

- Duarte Leite: Sobre a representação parametrica das curvas do primeiro genero, pag. 3.
- José Bruno de Cabedo: Demonstração do theorema de Cauchy, pag. 7.
- M. E. Cesàro: Remarques sur divers articles concernant la théorie des séries, pag. 26.
- Geminiano Pirondini: Sur les lignes sphériques, pag. 65.
- Gino Loria: Nota su due applicazioni algebriche dell' eliminazione, pag. 33.
- ✕ F. Gomes Teixeira: Alguns pontos da theoria dos integraes definidos, pag. 39.
- M. Auguste Gutzmer: Note sur un point de la théorie des séries, pag. 61.
- ✕ M. M. Lerch: Sur une fonction continue dont la dérivée est partout discontinue, pag. 97.
- José Pedro Teixeira: Sobre as funcções duplamente periodicas de segunda especie, pag. 103.
- M. M. d'Ocagne: Sur la transformation isogonal de W. Roberts, pag. 109.
- M. Lerch: Nova demonstração de uma formula de Kirkkoff, pag. 111.
- ✕ F. Gomes Teixeira: Sobre o integral  $\int_0^\pi \cot(x-\alpha) dx$ , pag. 113.
- ✕ José Bruno de Cabedo: Duas formulas de Analyse, pag. 129.
- José Pedro Teixeira: Sobre as funcções ellipticas, pag. 132.
- F. Gomes Teixeira: Applicações de uma formula que dá as derivadas de ordem qualquer das funcções de funcções, pag. 137.
- Congresso internacional de Bibliographia das sciencias mathematicas, pag. 143.
- M. M. d'Ocagne: Sur le développement de  $\sin n\varphi$  e de  $\cos n\varphi$  suivant les puissances de  $\sin \varphi$ , pag. 161.
- ✕ F. Gomes Teixeira: Note sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre, pag. 163.
- J. A. Martins da Silva: Sur trois formules de la théorie des fonctions elliptiques, pag. 173.
- Bibliographia, pagg. 12, 51, 93, 117, 147, 177.
- Extractos das publicações recentes, pagg. 20, 155, 185.
-

