$$
\left.\begin{aligned}
y^{\text{IV}} = &-\frac{\dfrac{d^4f}{dx^4}}{\dfrac{df}{dy}}+\frac{4\dfrac{d^4f}{dx^3dy}\dfrac{df}{dx}+6\dfrac{d^3f}{dx^2dy^2}\dfrac{d^2f}{dx^2}+4\dfrac{d^2f}{dxdy}\dfrac{d^3f}{dx^3}}{\left[\dfrac{df}{dy}\right]^2} \\
&-\frac{6\dfrac{d^4f}{dx^2dy^2}\left[\dfrac{df}{dx}\right]^2+12\dfrac{d^3f}{dxdy^2}\dfrac{d^2f}{dx^2}\dfrac{df}{dx}+24\dfrac{d^3f}{dx^2dy}\dfrac{d^2f}{dxdy}\dfrac{df}{dx}}{\left[\dfrac{df}{dy}\right]^3} \\
&+\frac{12\left[\dfrac{d^2f}{dxdy}\right]^2\dfrac{d^2f}{dx^2}+4\dfrac{d^3f}{dx^3}\dfrac{d^2f}{dy^2}\dfrac{df}{dx}}{\left[\dfrac{df}{dy}\right]^3} \\
&+\frac{4\dfrac{d^4f}{dx^2dy^3}\left[\dfrac{df}{dx}\right]^3+16\dfrac{d^3f}{dx^2dy}\left[\dfrac{df}{dx}\right]^2\dfrac{d^2f}{dy^2}+24\left[\dfrac{d^2f}{dxdy}\right]^3\dfrac{df}{dx}}{\left[\dfrac{df}{dy}\right]^4} \\
&+\frac{36\dfrac{d^3f}{dxdy^2}\dfrac{d^2f}{dxdy}\left[\dfrac{df}{dx}\right]^2+24\dfrac{d^2f}{dxdy}\dfrac{d^2f}{dx^2}\dfrac{d^2f}{dy^2}\dfrac{df}{dx}+6\dfrac{d^3f}{dy^3}\dfrac{d^2f}{dx^2}\left[\dfrac{df}{dx}\right]^2}{\left[\dfrac{df}{dy}\right]^4} \\
&-\frac{\dfrac{d^4f}{dy^4}\left[\dfrac{df}{dx}\right]^4+24\dfrac{d^3f}{dxdy^2}\dfrac{d^2f}{dy^2}\left[\dfrac{df}{dx}\right]^3+16\dfrac{d^3f}{dy^3}\dfrac{d^2f}{dxdy}\left[\dfrac{df}{dx}\right]^3}{\left[\dfrac{df}{dy}\right]^5} \\
&+\frac{12\dfrac{d^3f}{dxdy^2}\left[\dfrac{df}{dx}\right]^3\dfrac{d^2f}{dy^2}+60\left[\dfrac{d^2f}{dxdy}\right]^2\left[\dfrac{df}{dx}\right]^2\dfrac{d^2f}{dy^2}}{\left[\dfrac{df}{dy}\right]^5}
\end{aligned}\right\} \tag{2}
$$

$$
(2)\left\{
\begin{aligned}
&+\frac{12\left[\dfrac{d^2f}{dy^2}\right]^2\left[\dfrac{df}{dx}\right]^2\dfrac{d^2f}{dx^2}}{\left[\dfrac{df}{dy}\right]^5}\\
&+\frac{10\dfrac{d^2f}{dy^2}\left[\dfrac{df}{dx}\right]^4\dfrac{d^3f}{dy^3}+48\left[\dfrac{d^2f}{dy^2}\right]^2\left[\dfrac{df}{dx}\right]^3\dfrac{d^2f}{dxdy}}{\left[\dfrac{df}{dy}\right]^6}\\
&-\frac{12\left[\dfrac{d^2f}{dy^2}\right]^3\left[\dfrac{df}{dx}\right]^4}{\left[\dfrac{df}{dy}\right]^7}.
\end{aligned}
\right.
$$

Do exame d'estas fórmulas se conclue que o termo geral da expressão da derivada de ordem n póde ser representado pela expressão

$$
A\left[-\frac{df}{dy}\right]^{-(m+1)}\left[\frac{d^af}{dx^udy^{a-u}}\right]^{a_1}\left[\frac{d^bf}{dx^vdy^{b-v}}\right]^{b_1}\cdots\left[\frac{d^lf}{dx^wdy^{l-w}}\right]^{l_1}
$$

onde m é o numero de termos que precedem, A um coefficiente numerico, e a, u, a_1; b, v, b_1; ... numeros inteiros e positivos que satisfazem ás relações seguintes

$$
\left\{
\begin{aligned}
&a_1+b_1+c_1+\ldots+l_1=m+1\\
&a_1u+b_1v+\ldots\ldots\ldots+l_1w=n\\
&a_1a+b_1b+c_1c+\ldots+l_1l=n+m
\end{aligned}
\right\}
$$

Para mostrar que é verdadeira a inducção que nos dá

$$
(3)\left\{
\begin{array}{c}
y^{(n)}=\sum \mathrm{A}\left[-\dfrac{df}{dy}\right]^{-(m+1)} \\
\times\left[\dfrac{d^af}{dx^udy^{a-u}}\right]^{a_1}\left[\dfrac{d^bf}{dx^vdy^{b-v}}\right]^{b_1}\cdots\left[\dfrac{d^lf}{dx^wdy^{l-w}}\right]^{l_1} \\
(3)'\left\{
\begin{array}{l}
a_1+b_1+c_1+\ldots+l_1=m+1 \\
a_1u+b_1v+\ldots\ldots\ldots+l_1w=n \\
a_1a+b_1b+c_1c+\ldots+l_1l=n+m
\end{array}
\right.
\end{array}
\right.
$$

derivemos (3). Virá, depois de feitas as devidas transformações, uma expressão

$$
\left.
\begin{array}{c}
y^{(n+1)}=\sum \mathrm{A}\left\{\left[-\dfrac{df}{dy}\right]^{-(m+1)}\right. \\
\times a_1\left[\dfrac{d^af}{dx^udy^{a-u}}\right]^{a_1-1}\dfrac{d^{a+1}f}{dx^{u+1}dy^{a-u}}\left[\dfrac{d^bf}{dx^vdy^{b-v}}\right]^{b_1}\cdots\left[\dfrac{d^lf}{dx^wdy^{l-w}}\right]^{l_1} \\
+[-1]^{m+2}\left[\dfrac{df}{dy}\right]^{-(m+2)} \\
\times\left\{a_1\left[\dfrac{d^af}{dx^udy^{a-u}}\right]^{a_1-1}\dfrac{d^{a+1}f}{dx^udy^{a-u+1}}\left[\dfrac{d^bf}{dx^vdy^{b-v}}\right]^{b_1}\cdots\left[\dfrac{d^lf}{dx^wdy^{l-w}}\right]^{l_1}\dfrac{df}{dx}\right. \\
\left.+(m+1)\dfrac{d^2f}{dxdy}\left[\dfrac{d^af}{dx^udy^{a-u}}\right]^{a_1}\left[\dfrac{d^bf}{dx^vdy^{b-v}}\right]^{b_1}\cdots\left[\dfrac{d^lf}{dx^wdy^{l-w}}\right]^{l_1}\right\} \\
+\left[-\dfrac{df}{dy}\right]^{-(m+3)}(m+1)\dfrac{d^2f}{dy^2}\dfrac{df}{dx} \\
\left.\times\left[\dfrac{d^af}{dx^udy^{a-u}}\right]^{a_1}\left[\dfrac{d^bf}{dx^vdy^{b-v}}\right]^{b_1}\cdots\left[\dfrac{d^lf}{dx^wdy^{l-w}}\right]^{l_1}+\ldots\right\}
\end{array}
\right\} (4)
$$

Ora (4) é analoga a (3), e as condições (3)' tem logar, se mudarmos n em $n+1$, e m respectivamente em m, $(m+1)$ e $(m+2)$.

Justificada a fórmula (3) resta completal-a determinando o coefficiente A; o que faremos por meio d'um caso particular.

Como no caso geral o signal é perfeitamente determinado e dado por $[-1]^{m+1}$, em tudo o que se segue, procuraremos simplesmente o valor absoluto de A.

II

Seja a equação

$$y=(x+x^2+\ldots+x^n)^p \ldots\ldots\ldots\ldots (5).$$

D'onde se tira uma segunda implicita

$$y^{-\frac{1}{p}}(x+x^2+\ldots+x^n)-1=0.$$

De (5), que se póde escrever depois de desenvolvida

$$\left\{\begin{array}{l} y=\sum \dfrac{p!}{h_1!\,h_2!\,\ldots\,h_n!}x^q \\ \left\{\begin{array}{l} p=h_1+\ h_2+\ldots+\ h_n \\ q=h_1+2h_2+\ldots+nh_n \end{array}\right. \end{array}\right.$$

se conclue que é

$$y^{(n)}=\sum \frac{p!\,q(q-1)\ldots(q-n+1)}{h_1!\,h_2!\,\ldots\,h_n!}x^{q-n}.$$

Annulando x, annulam-se todos os termos em que não é $q-n=0$.

Fica, pois, chamando

$$y_0^{(n)} = [y^{(n)}]_{x=0}$$

$$(6) \ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} y_0^{(n)} = \sum \dfrac{p!\, n!}{h_1!\, h_2! \ldots h_n!} \\ \left\{ \begin{array}{l} p = h_1 + h_2 + \ldots + h_n \\ h_1 + 2h_2 + 3h_3 + \ldots + nh_n = n \end{array} \right\} \end{array} \right\}$$

Da equação implicita

$$y^{-\frac{1}{p}}(x + x^2 + \ldots + x^n) - 1 = 0 \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

se conclue

$$\frac{d^u f}{dx^u} = y^{-\frac{1}{p}} \frac{d^u}{dx^u} \Sigma x^i = y^{-\frac{1}{p}} \Sigma i(i-1) \ldots (i-u+1) x^{i-u}$$

$$\frac{d^u f}{dx^u dy^{a-u}} = \frac{1}{p}\left(\frac{1}{p}+1\right)\left(\frac{1}{p}+2\right) \ldots \left(\frac{1}{p}+a-u-1\right) y^{-\frac{1}{p}-a+u}$$

$$\times \Sigma i(i-1) \ldots (i-u+1) x^{i-u}$$

$$= 1(1+p)(1+2p) \ldots [1+(a-u-1)p] p^{-a+u} y^{-\frac{1}{p}-a+u}$$

$$\times \Sigma i(i-1) \ldots (i-u+1) x^{i-u}$$

$$= 1^{a-u|p} p^{-(a-u)} y^{-\frac{1}{p}-(a-u)} \Sigma_u$$

representando, para abreviar,

$$\Sigma_u = \Sigma i(i-1) \ldots (i-u+1) x^{i-u},$$

*

Temos pois

$$\left[\frac{d^a f}{dx^u dy^{a-u}}\right]^{a_1} = [1^{a-u|p}]^{a_1} p^{-(a-u)a_1} y^{-\frac{a_1}{p}-(a-u)a_1} [\Sigma_u]^{a_1},$$

e do mesmo modo

$$\left[\frac{d^b f}{dx^v dy^{b-v}}\right]^{b_1} = [1^{b-v|p}]^{b_1} p^{-(b-v)b_1} y^{-\frac{b_1}{p}-(b-v)b_1} [\Sigma_v]^{b_1}.$$

D'onde se conclue facilmente que é

$$y^{(n)} = \Sigma A \left[-\frac{df}{dy}\right]^{-(m+1)} [1^{a-u|p}]^{a_1} [1^{b-v|p}]^{b_1} \dots p^{-m} y^{-\frac{m+1}{p}-m}$$
$$\times [\Sigma_u]^{a_1} [\Sigma_v]^{b_1} \dots [\Sigma_w]^{l_1}.$$

Mas

$$\frac{df}{dy} = -\frac{1}{p} y^{-\frac{1}{p}} (x+x^2+x^3+\dots+x^n) = -\frac{1}{py}.$$

Portanto, não attendendo aos signaes, teremos

$$y^{(n)} = \Sigma A p [1^{a-u|p}]^{a_1} [1^{b-v|p}]^{b_1} \dots y^{-\frac{m+1}{p}+1}$$
$$\times [\Sigma_u]^{a_1} [\Sigma_v]^{b_1} \dots [\Sigma_w]^{l_1}.$$

Fazendo $x=0$, o que traz comsigo $y=0$ para $p>0$, annullam-se todos os termos em que não fôr

$$\frac{m+1}{p} - 1 = 0, \quad \text{ou} \quad p = m+1,$$

valor necessariamente positivo.

Logo, representando

$$y_0^{(n)} = [y^{(n)}]_{x=0},$$

e notando que os sommatorios

$$\Sigma i(i-1)\ldots(i-u+1)x^{i-u},\ \Sigma i(i-1)\ldots(i-v+1)x^{i-v},\ \ldots$$

se transformam em

$$1.2\ldots\ldots u = u!,\ 1.2\ldots\ldots v = v!,\ \ldots,$$

será representado $y_0^{(n)}$ pelo valor

$$(7)\ldots\ldots\ y_0^{(n)} = \Sigma\, A(m+1)\,[1^{a-u|m+1}]^{a_1}\,[1^{b-v|m+1}]^{b_1}\ldots$$
$$\times (u!)^{a_1}\,(v!)^{b_1}\ \ldots\ (w!)^{l_1}.$$

Egualando (7) a (6) e notando que da comparação das condições (6) com as condições (3)', e de ser $p = m+1$, se vê serem

$$h_1 = u,\ h_2 = v,\ \ldots\ldots\ h_n = w,$$

resulta para A o seguinte valor

$$A = \frac{n!\ m!}{a_1!\,b_1!\ldots l_1!\,(u!)^{a_1}\,(v!)^{b_1}\ldots(w!)^{l_1}\,[1^{a-u|m+1}]^{a_1}\,[1^{b-v|m+1}]^{b_1}\ldots}$$

e portanto para o valor de $y^{(n)}$ procurado

$$y^{(n)} = \sum \frac{m!\ n!}{a_1!\,b_1!\ldots l_1!\,(u!)^{a_1}\,(v!)^{b_1}\ldots(w!)^{l_1}\,F_{a-u}\,F_{b-v}\ldots F_{l-w}}\left[-\frac{df}{dy}\right]^{-(m+1)}$$
$$\times\left[\frac{d^af}{dx^udy^{a-u}}\right]^{a_1}\left[\frac{d^bf}{dx^vdy^{b-v}}\right]^{b_1}\ldots\left[\frac{d^lf}{dx^wdy^{l-w}}\right]^{l_1}$$

onde m é o numero de termos que precedem, e

$$\left\{\begin{array}{l} F_{a-u} = [1^{a-u|p}]^{a_1},\ F_{b-v} = [1^{b-v|p}]^{b_1}\ \ldots,\ (p = m+1) \\ \left\{\begin{array}{l} a_1 \ + b_1 \ + c_1 \ + \ \ldots \ + l_1 \ = m+1 \\ a_1 a + b_1 b + c_1 c + \ \ldots \ + l_1 l = m+n \\ a_1 u + b_1 v + \ \ldots\ldots \ + l_1 w = n \end{array}\right\} \end{array}\right\}$$

BIBLIOGRAPHIA

H. F. Barros.— Elementos de Trigonometria Rectilinea.— Lisboa, 1882.

Este livro, escripto para uso dos Institutos de instrucção secundaria, contem todas as doutrinas exigidas pelo programma respectivo, expostas com muita clareza e ordem, e por isso o recommendamos aos professores de mathematica elementar. É dividido em duas partes, na primeira das quaes se tracta da *Theoria das relações trigonometricas*, e na segunda da *Trigonometria rectilinea propriamente dicta.*

Temos notado que os alumnos têm sempre alguma difficuldade em comprehender a razão pela qual se substitue no calculo os angulos pelas linhas trigonometricas. O sr. Barros expõe com muita clareza a doutrina relativa a esta substituição logo nas primeiras paginas do seu excellente livro.

Passa em seguida á demonstração das fórmulas que dão os valores das relações trigonometricas da somma e differença de dois arcos, e suas principaes consequencias.

Depois tracta da construcção e uso das táboas trigonometricas, e assim termina a primeira parte.

Na segunda parte tracta da resolução dos triangulos, e ahi estabelece as fórmulas applicaveis nos diversos casos partindo das equações:

$$A+B+C=180$$

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A}=\frac{b}{\operatorname{sen} B}=\frac{c}{\operatorname{sen} C}.$$

F. A. de Brito Limpo. — *Algumas palavras sobre a necessidade da determinação directa da longitude geographica de um dos nossos Observatorios pelos processos electricos.* — *Lisboa, 1882.*

N'este opusculo o sr. Brito Limpo, auctor bem conhecido de muitos trabalhos importantes sobre geodesia, mostra que a longitude dos observatorios portuguezes relativamente aos observatorios mais importantes da Europa não é conhecida ainda com o rigor que a moderna sciencia exige; apresenta as tentativas feitas para resolver este importante problema; e insta para que os nossos astronomos o resolvam, procurando a differença de longitude entre o observatorio da Tapada d'Ajuda e o de Madrid pelos processos electricos.

Marcus Baker. — *Alhazen's problem.*

N'este artigo, publicado no *American Journal of Mathematics*, vol. IV, o sr. Baker expõe primeiro a lista dos trabalhos que tem sido publicados a respeito do problema seguinte:

De dois pontos collocados no plano de um circulo tirar linhas rectas que se encontrem no mesmo ponto de circumferencia e façam angulos eguaes com a tangente que passa por este ponto.

Depois extende este problema, que é o de Alhazen (mathematico arabe que viveu no seculo onze), ao caso em que o circulo está collocado n'uma esphera e por dois pontos da esphera se querem traçar arcos de circulo maximo que façam angulos eguaes com o circulo dado.

SOBRE A FÓRMULA DE LAGRANGE

POR

J. M. Rodrigues

Alferes d'artilheria

A notavel fórmula de Lagrange

$$Fy = Ft + x[F't.(\varphi t)] + \frac{x^2}{1.2}.\frac{d[F't.(\varphi t)^2]}{dt} + \ldots$$

$$+ \frac{x^n}{1.2\ldots n}.\frac{d^{n-1}[F't.(\varphi t)^n]}{dt^{n-1}} + \ldots$$

dá o desenvolvimento em serie de uma funcção da variavel y definida pela equação

$$y = t + x\varphi y.$$

A fórmula de Taylor e a de Lagrange constituem dois theoremas fundamentaes da theoria geral das funcções; a primeira exprime o desenvolvimento de uma funcção explicita segundo as potencias progressivas da variavel, e a segunda o desenvolvimento de uma funcção implicita reductivel á fórma da equação

$$y = t + x\varphi y.$$

O theorema de Lagrange tem sido objecto de importantes investigações de muitos geometras illustres. Laplace demonstrou e generalisou este theorema; Burmann deu uma fórmula notavel, comprehendendo a de Lagrange como um caso particular; e

Wronski, introduzindo as suas notaveis funcções *schins* na generalisação do theorema de Lagrange, deu a solução do seu Problema Universal.

No Jornal da Academia das Sciencias de Lisboa e no Jornal de M. Liouville, tomo VII da 3.ª serie, o sr. Dr. Gomes Teixeira deu uma notavel fórmula mais geral que a de Lagrange para o desenvolvimento em serie, ordenada segundo as potencias de x, da funcção

$$u = \mathrm{F}y$$

$$y = t + x\varphi_1(y) + x^2\varphi_2(y) + \ldots + x^n\varphi_n(y),$$

a saber:

$$\mathrm{F}y = \mathrm{F}t + x\,[\mathrm{F}'t.\varphi_1(t)] + \ldots$$

$$+ x^i \sum \frac{d^b \{\mathrm{F}'t.[\varphi_1(t)]^\alpha \ldots [\varphi_n(t)]^\lambda\}}{1.2\ldots\alpha \times 1.2\ldots\beta \times \ldots \times 1.2\ldots\lambda.dt^b} + \ldots$$

onde

$$b + 1 = \alpha + \beta + \lambda + \ldots + \lambda$$

$$i = \alpha + 2\beta + 3\gamma + \ldots + i\lambda$$

que contem a de Lagrange como caso muito particular.

Quando a funcção $\mathrm{F}y$ designa a propria variavel y, a fórmula de Lagrange dá o desenvolvimento em serie de uma raiz da equação

$$y = t + x\varphi y;$$

mas esta equação tendo, em geral, mais de uma raiz, qual d'ellas é a que dá a fórmula?

A demonstração classica de Laplace não determina a natureza da raiz dada pela fórmula; porém M. Rouché, partindo das bellas investigações de Cauchy sobre esta questão, determinou *à priori* a natureza da raiz, demonstrando elegantemente o theorema de Lagrange.

Taes são, em summa, as investigações mais notaveis sobre a fórmula de Lagrange.

O objecto d'esta memoria é generalisar a fórmula de Lagrange, procurando o desenvolvimento em serie de uma funcção Fx de uma variavel x definida pela equação

$$fx \pm \alpha . \varphi x = 0$$

e, como consequencia immediata, exprimir por integraes definidos a geração das raizes das equações algebricas ou transcendentes.

I

Seja

$$fx \pm \alpha \varphi x = 0$$

uma equação algebrica ou transcendente e a uma raiz simples da equação

$$fx = 0;$$

pondo

$$x = a + z$$

resulta a equação transformada

$$f(a+z) \pm \alpha . \varphi (a+z) = 0.$$

Se $f(a+z)$ e $\varphi(a+z)$ fazem funcções bem determinadas e continuas para um valor r do modulo da variavel imaginaria

$$z = \rho e^{\theta i},$$

esta equação gosa de propriedades notaveis que se traduzem nos theoremas seguintes.

Theorema I. Se

$$\text{mod. max.} \left[\frac{\varphi(a+z)}{f(a+z)}\right] < 1$$

para um valor r do modulo da variavel imaginaria e inferior ao raio de convergencia R, a equação

$$f(a+z) \pm \alpha . \varphi(a+z) = 0$$

tem uma raiz unica de modulo inferior a r.

Com effeito, sejam

$$z_1, z_2, z_3, \ldots z_m$$

m raizes de modulo inferior a r da equação

$$f(a+z) \pm \alpha . \varphi(a+z) = 0;$$

será

$$f(a+z) \pm \alpha . \varphi(a+z) = (z-z_1)(z-z_2) \ldots (z-z_m) \psi(a,z)$$

d'onde

$$l\left[1 \pm \alpha . \frac{\varphi(a+z)}{f(a+z)}\right] = l(z-z_1) + l(z-z_2) + \ldots + l(z-z_m)$$

$$+ l\left[\frac{\psi(a,z)}{f(a+z)}\right];$$

mas

$$f(a+z) = fa + zf'(a+\omega z)$$

ou

$$f(a+z) = zf'(a+\omega z)$$

por ser a uma raiz da equação $fx = 0$; por consequencia

$$l\left[1 \pm \alpha \frac{\varphi(a+z)}{f(a+z)}\right] = l(z-z_1) + l(z-z_2) + \ldots + l(z-z_m)$$

$$+ l\left[\frac{\psi(a,z)}{zf'(a+\omega z)}\right]$$

d'onde

$$l\left[1\pm\alpha.\frac{\varphi(a+z)}{f(a+z)}\right]-l\left[\frac{\psi(a,z)}{f'(a+\omega z)}\right]=l(z-z_1)+l(z-z_2)+\ldots$$

$$+l(z-z_m)-lz$$

e derivando vem

$$\frac{dl\left[1\pm\alpha.\frac{\varphi(a+z)}{f(a+z)}\right]}{dz}-\frac{dl\left[\frac{\psi(a,z)}{f'(a+\omega z)}\right]}{dz}$$

$$=\frac{1}{z-z_1}+\frac{1}{z-z_2}+\ldots+\frac{1}{z-z_m}-\frac{1}{z}=\frac{m-1}{z}+\frac{z_1+z_2+z_3+\ldots+z_m}{z^2}+\ldots \quad (a)$$

Ora, por hypothese,

$$\text{mod. max.}\left[\frac{\varphi(a+z)}{f(a+z)}\right]<1$$

para um valor r do modulo de z; logo

$$l\left[1\pm\alpha.\frac{\varphi(a+z)}{f(a+z)}\right]=\pm\alpha\left(\frac{\varphi(a+z)}{f(a+z)}\right)-\frac{\alpha^2}{2}.\left(\frac{\varphi(a+z)}{f(a+z)}\right)^2\mp\ldots,$$

mas

$$f(a+z)=zf'(a+\omega z),$$

por consequencia

$$l\left[1\pm\alpha.\frac{\varphi(a+z)}{f(a+z)}\right]=\pm\alpha\left(\frac{\varphi(a+z)}{zf'(a+\omega z)}\right)-\frac{\alpha^2}{2}.\left(\frac{\varphi(a+z)}{zf'(a+z)}\right)^2\pm\ldots$$

desenvolve-se n'uma serie convergente segundo as potencias positivas e negativas da variavel z, pois que φ e f são, por hypothese, funcções bem determinadas e contínuas: logo, no primeiro membro da expressão (a), o primeiro termo desenvolve-se tambem n'uma serie convergente segundo as potencias positivas e negativas da variavel z, mas n'este desenvolvimento não ha termo em $\frac{1}{z}$.

Ora as funcções ψ e f' são funcções bem determinadas e contínuas para o valor r do modulo de z; por consequencia, na expressão (a), o segundo termo do primeiro membro desenvolve-se n'uma serie convergente segundo as potencias ascendentes e positivas de z.

Logo no desenvolvimento do primeiro membro da expressão (a) não ha termo em $\frac{1}{z}$; por consequencia, egualando entre si os coefficientes das mesmas potencias de z, resulta

$$m-1=0 \quad \text{ou} \quad m=1.$$

Logo a equação

$$f(a+z) \pm \alpha . \varphi(a+z)=0$$

tem uma raiz unica de modulo inferior a r.

Theorema II. Se

$$\text{mod. max.} \left[\frac{\varphi(a+z)}{f(a+z)}\right] < 1$$

para um valor r do modulo de z e inferior a R, será

$$\mathrm{F}x = \mathrm{F}a - \frac{r}{2\pi} . \int_0^{2\pi} \left(l \left[1 \pm \alpha . \frac{\varphi(a+re^{\theta i})}{f(a+re^{\theta i})} \right] \right) . \mathrm{F}'(a+re^{\theta i})\, e^{\theta i} d\theta$$

a expressão da funcção bem determinada e contínua $\mathrm{F}x$ de uma raiz da equação

$$fx \pm \alpha . \varphi x = 0$$

em funcção de uma raiz simples da equação

$$fx = 0.$$

Com effeito, se

$$\text{mod. max.} \left[\alpha . \frac{\varphi(a_1+z)}{f(a_1+z)} \right] < 1$$

para um valor r_1 do modulo de z e inferior a R, a equação

$$f(a_1+z) \pm \alpha . \varphi(a_1+z) = 0$$

tem uma raiz unica z_1 de modulo inferior a r_1; será pois

$$f(a_1+z) \pm \alpha . \varphi(a_1+z) = (z-z_1) . \psi(a_1, z)$$

d'onde

$$1 \pm \alpha . \frac{\varphi(a_1+z)}{f(a_1+z)} = \left(1 - \frac{z_1}{z}\right) . \frac{\psi a_1, z)}{f(a_1+z)} . z$$

$$l\left[1 \pm \alpha . \frac{\varphi(a_1+z)}{f(a_1+z)}\right] = l\left(1 - \frac{z_1}{z}\right) + l\left[\frac{\psi(a_1, z)}{f(a_1+z)} . z\right].$$

Se $F(a_1+z)$ é uma funcção bem determinada e contínua para o valor r_1 do modulo da variavel, tambem $F'(a_1+z)$ o será; por consequencia, multiplicando por $zF'(a_1+z)$, resulta

$$zF'(a_1+z) . l\left[1 \pm \alpha . \frac{\varphi(a_1+z)}{f(a_1+z)}\right] = zF'(a_1+z) . l\left(1 - \frac{z_1}{z}\right)$$

$$+ zF'(a_1+z) . l\left[\frac{\psi(a_1, z)}{f'(a_1+\omega z)}\right].$$

Ora ψ e f' são funcções bem determinadas e contínuas para um determinado valor do modulo inferior ao raio de convergencia; por consequencia no segundo membro da expressão precedente o segundo termo desenvolve-a n'uma serie convergente segundo as potencias positivas de z, e n'este desenvolvimento não ha termo independente de z: será pois

$$zF'(a_1+z)\,.\,l\left[\frac{\psi(a_1,z)}{f'(a_1+\omega z)}\right]=\Sigma\,M_n\,.\,z^n$$

começando o sommatorio a partir de $n=1$, e

$$zF'(a_1+z)\,.\,l\left[1\pm\alpha\,.\,\frac{\varphi(a_1+z)}{f(a_1+z)}\right]=zF'(a_1+z)\,.\,l\left(1-\frac{z_1}{z}\right)+\Sigma M_n\,.\,z^n$$

Mas, por ser

$$\text{mod.}\,\frac{z_1}{z}<1,$$

$F'(a_1+z)$ e $l\left(1-\frac{z_1}{z}\right)$ podem desenvolver-se em series convergentes: portanto

$$F'(a_1+z)=F'a_1+z\,.\,F''a_1+\frac{z^2}{1\,.\,2}\,.\,F'''a_1+\frac{z^3}{1.2.3}\,.\,F^{\text{IV}}a_1+\ldots$$

$$-zl\left(1-\frac{z_1}{z}\right)=z_1+\frac{1}{2}\,.\,\frac{z_1^2}{z}+\frac{1}{3}\,.\,\frac{z_1^3}{z^2}+\frac{1}{4}\,.\,\frac{z_1^4}{z^3}+\ldots$$

e formando o producto de estas duas series resulta ainda uma serie convergente. N'este producto apparecem tres especies de termos, a saber: termos independentes de z, termos com potencias positivas e termos com potencias negativas de z. Podemos pois escrever

$$-zF'(a+z)\,.\,l\left(1-\frac{z_1}{z}\right)=z_1F'a_1+\frac{z_1^2}{1\,.\,2}\,.\,F''a_1+\frac{z_1^3}{1.2.3}\,.\,F'''a_1+\ldots$$

$$+\Sigma\,N_n\,.\,z^n\,.\,+\Sigma\,P_n\,.\,z^{-n},$$

Como o modulo de z_1 é inferior ao modulo de z segue-se que a serie que entra no segundo membro é convergente e a sua somma é

$$F(a_1+z_1)-Fa_1=z_1F'a_1+\frac{z_1^2}{1.2}.F''a_1+\frac{z_1^3}{1.2.3}.F'''a_1+\ldots;$$

por consequencia

$$zF'(a_1+z).l\left(1-\frac{z_1}{z}\right)=-[F(a_1+z_1)-Fa_1]-\Sigma N_n.z^n-\Sigma P_n.z^{-n}.$$

Logo

$$\left(l\left[1\pm\alpha.\frac{\varphi(a_1+z)}{f(a_1+z)}\right]\right).F'(a_1+z).z=-[F(a_1+z_1)-Fa]$$
$$+\Sigma M_n.z^n-\Sigma N_n.z^n-\Sigma P_n.z^{-n}$$

ou

$$\left(l\left[1\pm\alpha.\frac{\varphi(a_1+z)}{f(a_1+z)}\right]\right).F'(a_1+z).z=-[Fl(a_1+z_1)-Fa_1]$$
$$+\Sigma Q_n.z^n-\Sigma P_n.z^{-n}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

onde

$$Q_n=M_n-N_n.$$

Dando pois á variavel z o modulo r_1, será

$$z=r_1e^{\theta i},$$

e, substituindo e integrando entre os limites 0 e 2π, resulta

$$\int_0^{2\pi}\left(l\left[1\pm\alpha.\frac{\varphi(a_1+z_1e^{\theta i})}{f(a_1+r_1e^{\theta i})}\right]\right).F'(a_1+r_1e^{\theta i}).r_1e^{\theta i}d\theta$$
$$=-2\pi[F(a_1+z_1)-Fa_1]$$
$$+\Sigma Q_nr_1^n.\int_0^{2\pi}e^{+n\theta i}d\theta-\Sigma P_nr^{-n}.\int_0^{2\pi}e^{-n\theta i}d\theta;$$

mas

$$\int_0^{2\pi} e^{\pm n\theta i}.d\theta = 0,$$

logo

$$F(a_1+z_1) = Fa_1 - \frac{r_1}{2\pi}.\int_0^{2\pi}\left(l\left[1 \pm \alpha.\frac{\varphi(a_1+r_1e^{\theta i})}{f(a_1+r_1e^{\theta i})}\right]\right).F'(a_1+r_1e^{\theta i}).e^{\theta i}d\theta,$$

ou, supprimindo os indices,

$$F(a+z) = Fa - \frac{r}{2\pi}.\int_0^{2\pi}\left(l\left[1 \pm \alpha.\frac{\varphi(a+re^{\theta i})}{f(a+re^{\theta i})}\right)\right].F'(a+re^{\theta i}).e^{\theta i}d\theta.$$

Mas

$$x = a+z,$$

portanto o modulo de x inferior ao modulo de z e por maioria de razão inferior ao modulo r; logo

$$Fx = Fa - \frac{r}{2\pi}.\int_0^{2\pi}\left(l\left[1 \pm \alpha.\frac{\varphi(a+re^{\theta i})}{f(a+re^{\theta i})}\right]\right).F'(a+re^{\theta i}).e^{\theta i}d\theta$$

é a expressão de uma funcção contínua Fx de uma raiz de modulo inferior a r da equação

$$fx \pm \alpha.\varphi x = 0$$

em funcção de uma raiz simples da equação

$$fx = 0,$$

como se queria demonstrar.

Attribuindo ao modulo da variavel

$$z = \rho.e^{\theta i}$$

um valor determinado r_1, o argumento fica indeterminado e póde receber todos os valores desde $-\infty$ a $+\infty$; por consequencia fazendo na equação (a)

$$z = r_1 e^{\theta i} \quad \text{e} \quad z = r_1 . e^{-\theta i}$$

resulta

$$\left(l\left[1 \pm \alpha . \frac{\varphi(a_1 + r_1 e^{\theta i})}{f(a_1 + r_1 e^{\theta i})}\right]\right) . \mathrm{F}'(a_1 + r_1 e^{\theta i}) . r_1 e^{\theta i} = -[\mathrm{F}(a_1 + z_1) - \mathrm{F}a_1]$$

$$+ \Sigma \mathrm{Q}_n r^n . e^{+n\theta i} - \Sigma \mathrm{P}_n r^{-n} . e^{-n\theta i}$$

$$\left(l\left[1 \pm \alpha . \frac{\varphi(a_1 + r_1 e^{-\theta i})}{f(a_1 + r_1 e^{-\theta i})}\right]\right) . \mathrm{F}'(a_1 + r_1 e^{-\theta i}) . r_1 e^{-\theta i} = -[\mathrm{F}(a_1 + z_1) - \mathrm{F}a_1]$$

$$+ \Sigma \mathrm{Q}_n r^n . e^{-n\theta i} - \Sigma \mathrm{P}_n r^{-n} . e^{+n\theta i}.$$

Pondo

$$\Theta = \left(l\left[1 \pm \alpha . \frac{\varphi(a_1 + r_1 e^{\theta i})}{f(a_1 + r_1 e^{\theta i})}\right]\right) . \mathrm{F}'(a_1 + r_1 e^{\theta i}),$$

$$\Theta' = \left(l\left[1 \pm \alpha . \frac{\varphi(a_1 + r_1 e^{-\theta i})}{f(a_1 + r_1 e^{-\theta i})}\right]\right) . \mathrm{F}'(a_1 + r_1 e^{-\theta i})$$

e, sommando, vem

$$r_1[\Theta . e^{+\theta i} + \Theta' . e^{-\theta i}] = -z[\mathrm{F}(a_1 + z_1) - \mathrm{F}a_1]$$

$$+ \Sigma \mathrm{Q}_n r^n (e^{+n\theta i} + e^{-n\theta i}) - \Sigma \mathrm{P}_n r^{-n} (e^{+n\theta i} + e^{-n\theta i})$$

ou

$$r_1[\Theta . e^{\theta i} + \Theta' . e^{-\theta i}] = -z[\mathrm{F}(a_1 + z_1) - \mathrm{F}a_1]$$

$$+ 2\Sigma \mathrm{Q}_n r^n \cos . n\theta - 2\Sigma \mathrm{P}_n r^n \cos . n\theta;$$

mas

$$\int_0^{\pi} \cos . n\theta d\theta = 0,$$

*

logo

$$F(a_1+z_1)=Fa_1-\frac{r_1}{2\pi}.\int_0^{\pi}[\Theta.e^{\theta i}+\Theta'.e^{-\theta i}].d\theta.$$

Esta fórmula é apenas uma transformação da precedente (a) e mostra que o integral definido entre 0 e 2π se decompõe em dois entre 0 e π; logo

$$\left.\begin{aligned} Fx=Fa-\frac{r}{2\pi}.\int_0^{\pi}\Theta.e^{\theta i}d\theta \\ -\frac{r}{2\pi}.\int_0^{\pi}\Theta'.e^{-\theta i}d\theta \end{aligned}\right\}$$

ou

$$\left.\begin{aligned} Fx=Fa-\frac{r}{2\pi}.\int_0^{\pi}l\left[1\pm\alpha.\frac{\varphi(a+re^{\theta i})}{f(a+re^{\theta i})}\right].F'(a+re^{\theta i}).e^{\theta i}d\theta \\ -\frac{r}{2\pi}.\int_0^{\pi}l\left[1\pm\alpha.\frac{\varphi(a+re^{-\theta i})}{f(a+re^{-\theta i})}\right].F'(a+re^{-\theta i}).e^{-\theta i}d\theta \end{aligned}\right\}$$

exprime em integraes definidos uma funcção de uma raiz de modulo inferior a r da equação

$$fx\pm\alpha.\varphi x=0.$$

Theorema III. Se

$$\text{mod. max.}\left[\alpha.\frac{\varphi(a+z)}{f(a+z)}\right]<1,$$

será

$$Fx=Fa\mp\alpha.\left[F'a.\left(\frac{\varphi a}{f'a}\right)\right]$$

$$+\frac{\alpha^2}{1.2}.\frac{d\left[F'a.\left(\frac{\varphi a}{f'a}\right)^2\right]}{da}\mp\frac{\alpha^3}{1.2.3}.\frac{d^2\left[F'a.\left(\frac{\varphi a}{f'a}\right)^3\right]}{da^2}+\ldots$$

o desenvolvimento em serie convergente de umo funcção de uma raiz da equação

$$fx \pm \alpha . \varphi x = 0$$

em funcção de uma raiz simples da equação reduzida

$$fx = 0.$$

Se

$$\text{mod. max.} \left[\alpha . \frac{\varphi(a+z)}{f(a+z)} \right] < 1$$

para um valor r do modulo de z, é

$$l \left[1 \pm \alpha . \frac{\varphi(a+z)}{f(a+z)} \right]$$

$$= \pm \alpha . \left(\frac{\varphi(a+z)}{f(a+z)} \right) - \frac{\alpha^2}{2} . \left(\frac{\varphi(a+z)}{f(a+z)} \right)^2 \pm \frac{\alpha^3}{3} . \left(\frac{\varphi(a+z)}{f(a+z)} \right)^3 - \ldots,$$

mas

$$f(a+z) = zf'(a+\omega z)$$

portanto

$$l \left[1 \pm \alpha . \frac{\varphi(a+z)}{f(a+z)} \right]$$

$$= \pm \frac{\alpha}{z} . \left(\frac{\varphi(a+z)}{f'(a+\omega z)} \right) - \frac{1}{2} . \frac{\alpha^2}{z^2} . \left(\frac{\varphi(a+z)}{f'(a+\omega z)} \right)^2 \pm \frac{1}{3} . \frac{\alpha^3}{z^3} \left(\frac{\varphi(a+z)}{f'(a+\omega z)} \right)^3 - \ldots,$$

e, multiplicando por $z\mathrm{F}'(a+z)$, resulta

$$z\mathrm{F}'(a+z).l\left[1\pm\alpha.\frac{\varphi(a+z)}{f(a+z)}\right]$$

$$=\pm\alpha\mathrm{F}'(a+z).\left(\frac{\varphi(a+z)}{f'(a+\omega z)}\right)-\frac{\alpha^2}{2}.\frac{\mathrm{F}'(a+z)}{z}.\left(\frac{\varphi(a+z)}{f'(a+\omega z)}\right)^2$$

$$\pm\frac{\alpha^3}{3}.\frac{\mathrm{F}'(a+z)}{z^2}.\left(\frac{\varphi(a+z)}{f'(a+\omega z)}\right)^3$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$-(\mp 1)^n.\frac{\alpha^n}{n}.\frac{\mathrm{F}'(a+z)}{z^{n-1}}.\left(\frac{\varphi(a+z)}{f'(a+\omega z)}\right)^n$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Dando pois ao modulo de z o valor r, teremos

$$z=re^{\theta i},$$

e o segundo membro da expressão precedente é um serie convergente para todos os valores do argumento; por consequencia, integrando entre 0 e 2π, resulta

$$\int_0^{2\pi}\left(l\left[1\pm\alpha.\frac{\varphi(a+re^{\theta i})}{f(a+re^{\theta i})}\right]\right).\mathrm{F}'(a+re^{\theta i}).re^{\theta i}.d\theta$$

$$=\pm\alpha\int_0^{2\pi}\mathrm{F}'(a+re^{\theta i}).\left(\frac{\varphi(a+re^{\theta i})}{f'(a+\omega re^{\theta i})}\right)d\theta$$

$$-\frac{\alpha^2}{2}.\frac{1}{r}\int_0^{2\pi}\mathrm{F}'(a+re^{\theta i}).\left(\frac{\varphi(a+re^{\theta i})}{f'(a+\omega re^{\theta i})}\right)^2e^{-\theta i}\,d\theta$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$-(\mp 1)^n.\frac{\alpha^n}{n}.\frac{1}{r^{n-1}}\int_0^{2\pi}\mathrm{F}'(a+re^{\theta i}).\left(\frac{\varphi(a+re^{\theta i})}{f'(a+\omega re^{\theta i})}\right)^n.e^{-(n-1)\theta i}d\theta$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Mas pelo theorema precedente

$$Fx = Fa - \frac{r}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(l\left[1 \pm \alpha.\frac{\varphi(a+re^{\theta i})}{f(a+r\omega e^{\theta i})}\right]\right).F'(a+re^{\theta i})e^{\theta i}d\theta;$$

logo

$$2\pi[Fx - Fa] = \mp\alpha.\int_0^{2\pi}F'(a+re^{\theta i}).\left(\frac{\varphi(a+re^{\theta i})}{f'(a+\omega re^{\theta i})}\right)d\theta$$

$$+\frac{\alpha^2}{2}.\frac{1}{r}\int_0^{2\pi}F'(a+re^{\theta i}).\left(\frac{\varphi(a+re^{\theta i})}{f'(a+\omega re^{\theta i})}\right)^2.e^{-\theta i}.d\theta$$

....

$$(\mp 1)^n.\frac{\alpha^n}{n}.\frac{1}{r^{n-1}}\int_0^{2\pi}F'(a+re^{\theta i}).\left(\frac{\varphi(a+re^{\theta i})}{f'(a+\omega re^{\theta i})}\right)^n.e^{-(n-1)\theta i}.d\theta$$

.... (s)

Ora pela fórmula de Maclaurin

$$F'(a+z).\left(\frac{\varphi(a+z)}{f'(a+\omega z)}\right)^n = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \ldots + A_m z^m + \ldots$$

onde

$$A_m = \frac{1}{1.2.3\ldots m}.\frac{d^m\left[F'a.\left(\frac{\varphi a}{f'a}\right)^n\right]}{da^m}$$

é o coefficiente de z_m; mas, como é sabido, o coefficiente de z^m no desenvolvimento de uma funcção fz em serie convergente é egual ao valor medio do quociente $\frac{fz}{z^m}$; logo

$$A_m = \text{val. med.}\left[z^{-m}F'(a+z).\left(\frac{\varphi(a+z)}{f'(a+\omega z)}\right)^n\right]$$

e como, por um theorema notavel de Cauchy,

$$\text{val. med.}\left[z^{-m}F'(a+z).\left(\frac{\varphi(a+z)}{f'(a+\omega z)}\right)^n\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi r^m}.\int_0^{2\pi}F'(a+re^{\theta i}).\left(\frac{\varphi(a+re^{\theta i})}{f'(a+\omega re^{\theta i})}\right)^n.e^{-m\theta i}\,d\theta,$$

resulta

$$A_m=\frac{1}{2\pi r^m}\int_0^{2\pi}F'(a+re^{\theta i}).\left(\frac{\varphi(a+re^{\theta i})}{f'(a+\omega re^{\theta i})}\right)^n.e^{-m\theta i}d\theta.$$

Esta relação tem logar para todos os valores inteiros de m; por consequencia para $m=n-1$ resulta

$$A_{n-1}=\frac{1}{2\pi r^{n-1}}.\int_0^{2\pi}F'(a+re^{\theta i}).\left(\frac{\varphi(a+re^{\theta i})}{f'(a+\omega re^{\theta i})}\right)^n.e^{-(n-1)\theta i}.d\theta;$$

logo

$$\frac{2\pi}{1.2.3\ldots(n-1)}.\frac{d^{n-1}\left[F'a.\left(\frac{\varphi a}{f'a}\right)^n\right]}{da^{n-1}}$$

$$=\frac{1}{r^{n-1}}\int_0^{2\pi}F'(a+re^{\theta i}).\left(\frac{\varphi(a+re^{\theta i})}{f'(a+\omega re^{\theta i})}\right)^n.e^{-(n-1)\theta i}.d\theta$$

é a expressão do termo geral da serie (1).

Logo

$$
(\alpha)\quad
\left.\begin{aligned}
\mathrm{F}x=\mathrm{F}a \mp \alpha.\left[\mathrm{F}'a.\left(\frac{\varphi a}{f'a}\right)\right]+\frac{\alpha^2}{1.2}.\frac{d\left[\mathrm{F}'a.\left(\frac{\varphi a}{f'a}\right)^2\right]}{da}\\
\mp\frac{\alpha^3}{1.2.3}.\frac{d^2\left[\mathrm{F}'a\left(\frac{\varphi a}{f'a}\right)^3\right]}{da^2}\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
(\mp 1)^n.\frac{\alpha^n}{1.2.3\ldots n}.\frac{d^{n-1}\left[\mathrm{F}'a.\left(\frac{\varphi a}{f'a}\right)^n\right]}{da^{n-1}}\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\}
$$

dá o desenvolvimento em serie convergente de uma raiz da equação

$$fx \pm \alpha.\varphi x = 0$$

em funcção de uma raiz simples a da equação reduzida

$$fx = 0.$$

Esta fórmula comprehende, como caso particular, a de Lagrange. Com effeito quando fôr

$$fx = x - a$$

resulta

$$x - a \pm \alpha\varphi x = 0,$$

ou

$$x = a \mp \alpha\varphi x,$$

que é a equação de Lagrange; e, por ser, n'este caso, $f'a=1$, deduz-se da fórmula (α) a fórmula de Lagrange

$$Fx = Fa \mp \alpha [F'a \,.\, \varphi a]$$

$$+ \frac{\alpha^2}{1.2} \cdot \frac{d[F'a \,.\, (\varphi a)^2]}{da} \mp \frac{\alpha^3}{1.2.3} \cdot \frac{d^2[F'a \,.\, (\varphi a)^3]}{da^2} + \ldots\ldots \quad (\beta)$$

Esta fórmula notavel dá o desenvolvimento em serie convergente de uma raiz de modulo inferior a r da equação

$$x = a \mp \alpha \,.\, \varphi x,$$

e a fórmula (α) dá o desenvolvimento em serie convergente de tantas raizes da equação

$$fx \pm \alpha \,.\, \varphi x = 0$$

quantas forem as raizes simples da equação

$$fx = 0,$$

e a sua funcção generatriz

$$Fx = Fa - \frac{r}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \left(l \left[1 \pm \alpha \,.\, \frac{\varphi(a + re^{\theta i})}{f(a + re^{\theta i})} \right] \right) . F'(a + re^{\theta i}) e^{\theta i} d\theta$$

ou

$$Fx = Fa - \frac{r}{2\pi} \cdot \int_0^{\pi} l \left[1 \pm \alpha \,.\, \frac{\varphi(a + re^{\theta i})}{f(a + re^{\theta i})} \right] . F'(a + re^{\theta i}) \,.\, e^{\theta i} d\theta \quad (\alpha')$$

$$- \frac{r}{2\pi} \cdot \int_0^{\pi} l \left[1 \pm \alpha \,.\, \frac{\varphi(a + re^{-\theta i})}{f(a + re^{-\theta i})} \right] . F'(a + re^{-\theta i}) \,.\, e^{-\theta i} d\theta$$

exprime a geração d'estas raizes por integraes definidos.

Se n'esta funcção generatriz introduzirmos a hypothese de ser

$$fx = x - a$$

teremos

$$f(a + re^{\theta i}) = re^{\theta i}$$

e, por consequencia, a funcção generatriz do theorema de Lagrange será

$$\left.\begin{aligned}
&Fx = Fa - \frac{r}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \left(l \left[1 \pm \frac{\alpha}{r} \cdot e^{-\theta i} \varphi(a + re^{\theta i}) \right] \right) . F(a + re^{\theta i}) e^{\theta i} d\theta \\
&\text{ou} \\
&Fx = Fa - \frac{r}{2\pi} \cdot \int_0^{\pi} \left(l \left[1 \pm \frac{\alpha}{r} \cdot e^{-\theta i} \varphi(a + re^{\theta i}) \right] \right) . F'(a + re^{\theta i}) e^{\theta i} d\theta \\
&\qquad - \frac{r}{2\pi} \cdot \int_0^{\pi} \left(l \left[1 \pm \frac{\alpha}{r} \cdot e^{+\theta i} \varphi(a + re^{-\theta i}) \right] \right) . F'(a + re^{-\theta i}) . e^{-\theta i} d\theta
\end{aligned}\right\} (\beta')$$

Estas fórmulas, casos particulares das precedentes, exprimem pois a geração por integraes definidos de uma funcção da raiz de modulo inferior a r da equação de Lagrange

$$x = a \mp \alpha\varphi x.$$

As funcções generatrizes (α') e (β') dos theoremas (α) e (β) gosam de uma propriedade caracteristica que se traduz no theorema seguinte.

Theorema IV. A funcção generatriz (α') da serie

$$Fx - Fa = \mp \alpha \left[F'a . \left(\frac{\varphi a}{f'a} \right) \right] + \frac{\alpha^2}{1.2} \cdot \frac{d \left[F'a . \left(\frac{\varphi a}{f'a} \right)^2 \right]}{da} \mp \ldots,$$

é o coefficiente de $\frac{1}{z}$ no desenvolvimento da funcção

$$-F'(a+z).l\left[1 \pm \alpha.\frac{\varphi(a+z)}{f(a+z)}\right].$$

Com effeito, esta funcção desenvolve-se n'uma serie convergente segundo as potencias positivas e negativas de z se for

$$\text{mod. max.}\left[\alpha\frac{\varphi(a+z)}{f(a+z)}\right] < 1$$

para um valor r do modulo; seja pois

$$-F'(a+z).l\left[1 \pm \alpha.\frac{\varphi(a+z)}{f(a+z)}\right] = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \dots$$

$$+ C_1.\frac{1}{z} + C_2.\frac{1}{z^2} + C_3.\frac{1}{z^3} + \dots$$

Ora, como é sabido, o coefficiente de z^m no desenvolvimento de uma funcção fz em serie convergente, segundo as potencias ascendentes positivas e negativas de z, é egual ao valor medio de $\frac{fz}{z^m}$; logo

$$\text{coeff. de } \frac{1}{z} = \text{val. med.}\left\{-zF'(a+z).l\left[1 \pm \alpha.\frac{\varphi(a+z)}{f(a+z)}\right]\right\},$$

mas pelo theorema de Cauchy

$$\text{val. med.}\left\{-zF'(a+z).l\left[1 \pm \alpha.\frac{\varphi(a+z)}{f(a+z)}\right]\right\}$$

$$= -\frac{r}{2\pi}.\int_0^{2\pi}\left(l\left[1 \pm \alpha\frac{\varphi(a+re^{\theta i})}{f(a+re^{\theta i})}\right]\right).F'(a+re^{\theta i})e^{\theta i}d\theta,$$

logo

$$\text{coeff. de } \frac{1}{z} = \text{funcção generatriz}$$

ou

$$C_1 = -\frac{r}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \left(l \left[1 \pm \alpha \frac{\varphi(a + re^{\theta i})}{f(a + re^{\theta i})} \right] \right) . F'(a + re^{\theta i}) . e^{\theta i} d\theta,$$

como se queria demonstrar.

Theorema V. Se fz for uma funcção bem determinada e contínua de uma variavel imaginaria $z = \rho e^{\theta i}$ para um valor r do modulo será

$$Fz = F(0) - \frac{r}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \left(l \left[\frac{f(re^{\theta i})}{re^{\theta i}} \right] \right) . F'(re^{\theta i}) e^{\theta i} d\theta$$

a geração de uma funcção contínua de uma raiz de modulo inferior a r da equação

$$fz = 0.$$

Seja z_1 uma raiz simples d'esta equação de modulo inferior a um determinado valor r_1 do modulo de z; será

$$fz = (z - z_1) . \psi z,$$

d'onde

$$l \left[\frac{fz}{z} \right] = l \left(1 - \frac{z_1}{z} \right) + l \psi z$$

e

$$zF'z . l \left[\frac{fz}{z} \right] = zF'zl \left(1 - \frac{z_1}{z} \right) + zF'z . l\psi z.$$

Procedendo pois como no *theorema II* será

$$zF'z\,.\,l\psi z = \Sigma M_n z^n,$$

$$zF'z\,l\left(1-\frac{z_1}{z}\right) = -[Fz_1 - F(0)] - \Sigma N_n z^n - \Sigma P_n z^{-n},$$

por consequencia

$$zF'z\,.\,l\left[\frac{fz}{z}\right] = -[Fz_1 - F(0)] + \Sigma Q_n z^n - \Sigma P_n z^{-n},$$

onde

$$Q_n = M_n - N_n.$$

Fazendo pois

$$z = r_1 e^{\theta i},$$

substituindo e integrando, vem

$$Fz_1 = F(0) - \frac{r_1}{2\pi}\cdot\int_0^{2\pi}\left(l\left[\frac{f(r_1 e^{\theta i})}{r_1 e^{\theta i}}\right]\right).F'(r_1 e^{\theta i})e^{\theta i}d\theta.$$

Logo é

$$Fz = F(0) - \frac{r}{2\pi}\cdot\int_0^{2\pi}\left(l\left[\frac{f(re^{\theta i})}{re^{\theta i}}\right]\right).F'(re^{\theta i})e^{\theta i}d\theta$$

ou

$$Fz = F(0) - \frac{r}{2\pi}\cdot\int_0^{\pi}\left(l\left[\frac{f(re^{+\theta i})}{re^{+\theta i}}\right]\right).F'(re^{+\theta i}).e^{+\theta i}d\theta$$

$$-\frac{r}{2\pi}\cdot\int_0^{\pi}\left(l\left[\frac{f(re^{-\theta i})}{re^{-\theta i}}\right]\right).F'(re^{-\theta i}).e^{-\theta i}d\theta$$

a geração por integraes definidos de uma funcção Fz de uma raiz simples de modulo inferior a r da equação

$$fz=0.$$

As fórmulas (α') e (β') são casos particulares das precedentes, como facilmente se vê, e entre a multiplicidade de fórmas que póde tomar a funcção f as mais notaveis são as que correspondem á equação de Lagrange

$$x=a+\alpha\varphi x$$

e á equação

$$fx\pm\alpha\varphi x=0.$$

II

As fórmulas

$$\left.\begin{array}{l} fx+\alpha\varphi x=0 \\[2ex] Fx=Fa+\sum\left\{(-1)^p.\dfrac{\alpha^p}{\Gamma(p+1)}.\dfrac{d^{p-1}\left[F'a.\left(\dfrac{\varphi a}{f'a}\right)^p\right]}{da^{p-1}}\right\} \\[3ex] Fx=Fa-\dfrac{r}{2\pi}.\displaystyle\int_0^{2\pi}l\left[1\pm\alpha.\dfrac{\varphi(a+re^{\theta i})}{f(a+re^{\theta i})}\right].F'(a+re^{\theta i}).e^{\theta i}d\theta \end{array}\right\}(\alpha)$$

conduzem immediatamente á deducção de muitas outras, determinando convenientemente a fórma das funcções φx e fx.

Seja

$$\alpha=1$$

e

$$\varphi x=x_1f_1x+x_2f_2x+\ldots+x_nf_nx,$$

onde

$$x_1=\varphi_1(\xi),\ x_2\varphi_2(\xi),\ \ldots\ x_n=\varphi_n(\xi)$$

são funcções de uma variavel ξ independente de x: resulta a equação

$$0 = fx + x_1 f_1 x + x_2 f_2 x + \ldots + x_n f_n x,$$

e a geração de uma funcção Fx da variavel x definida por esta equação será pois

$$Fx = Fa + \sum \left\{ \frac{(-1)^p}{\Gamma(p+1)} \cdot \frac{d^{n-1}\left[F'a \cdot \left(\frac{x_1 f_1 a + \ldots + x_n f_n a}{f'a} \right)^p \right]}{da^{p-1}} \right\}$$

ou

$$Fx = Fa + \sum \left\{ \frac{(-1)^p}{\Gamma(p+1)} \cdot \frac{d^{p-1}[F'a \cdot (x_1 \psi_1 a + \ldots + x_n \psi_n a)^p]}{da^{p-1}} \right\}$$

onde

$$\psi_1 a = \frac{f_1 a}{f'a}, \quad \psi_2 a = \frac{f_2 a}{f'a}, \quad \ldots, \quad \psi_n a = \frac{f_n a}{f'a}.$$

Ora o termo geral do desenvolvimento do polynomio

$$P = (x_1 \psi_1 a + x_2 \psi_2 a + \ldots + x_n \psi_n a)^p$$

pela lei do binomio de Newton é, como se sabe,

$$T = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p_1+1) \cdot \Gamma(p_2+1) \ldots \Gamma(p_n+1)} \cdot (x_1 \psi_1 a)^{p_1} \cdot (x_2 \psi_2 a)^{p_2} \ldots (x_n \psi_n a)^{p_n}$$

ou

$$T = \Gamma(p+1) \cdot \frac{x_1^{p_1} \cdot x_2^{p_2} \ldots x_n^{p_n}}{\Gamma(p_1+1) \cdot \Gamma(p_2+1) \ldots \Gamma(p_n+1)} \cdot (\psi_1 a)^{p_1} \cdot (\psi_2 a)^{p_2} \ldots (\psi_n a)^{p_n}$$

sendo p_1, p_2, p_3 ... p_n numeros inteiros e positivos que devem satisfazer á equação

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n;$$

por consequencia

$$P = \Gamma(p+1) \, . \sum \left[\frac{x_1^{p_1} \, . \, x_2^{p_2} \ldots x_n^{p_n}}{\Gamma(p_1+1) \, . \, \Gamma(p_2+1) \ldots \Gamma(p_n+1)} \right.$$

$$\left. \times (\psi_1 a)^{p_1} \, . \, (\psi_2 a)^{p_2} \ldots (\psi_n a)^{p_n} \right]$$

ou

$$P = \Gamma(p+1) \, . \, T_p$$

sendo

$$T_p = \sum \left[\frac{x_1^{p_1} \, . \, x_2^{p_2} \, . \, x_3^{p_3} \ldots x_n^{p_n}}{\Gamma(p_1+1) \, . \, \Gamma(p_2+1) \ldots \Gamma(p_n+1)} \right.$$

$$\left. \times (\psi_1 a)^{p_1} \, . \, (\psi_2 a)^{p_2} \, . \, (\psi_3 a)^{p_3} \ldots (\psi_n a)^{p_n} \right]; \; \ldots\ldots \; (n)$$

logo

$$Fx = Fa + \sum \left\{ \frac{(-1)^p}{\Gamma(p+1)} \, . \, \frac{d^{p-1} [F'a \times \Gamma(p+1) \, . \, T_p]}{da^{p-1}} \right\}$$

ou

$$Fx = Fa + \sum \left\{ (-1)^p \, . \, \frac{d^{p-1} [F'a \, . \, T_p]}{da^{p-1}} \right\}.$$

Como os valores de p são os numeros da serie natural a partir da unidade, resulta

$$Fx = Fa - [F'a \, . \, T_1] + \frac{d\,[F'a \, . \, T_2]}{da} - \frac{d^2 [F'a \, . \, T_3]}{da^2} + \ldots \; (m)$$

e os valores de $p_1, p_2, p_3, \ldots p_n$ correspondentes aos valores de

$$p=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots$$

são dados pelas equações

$$\begin{aligned}
1&=p_1+p_2+p_3+\ \ldots\ +p_n\\
2&=p_1+p_2+p_3+\ \ldots\ +p_n\\
3&=p_1+p_2+p_3+\ \ldots\ +p_n\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Conhecidas as soluções inteiras e positivas de cada uma d'estas equações, determinaremos os valores correspondentes de T_1, T_2, T_3, ... pela fórmula (n).

Teremos assim

$$T_1=x_1\psi_1a+x_2\psi_2a+x_3\psi_3a+x_4\psi_4a+\ldots$$

$$\begin{aligned}
T_2=&\frac{x_1^2}{1.2}(\psi_1a)^2+x_1x_2(\psi_1a).(\psi_2a)+x_1x_3(\psi_1a).(\psi_3a)+\ldots\\
&+\frac{x_2^2}{1.2}(\psi_2a)^2+x_2x_3(\psi_2a).(\psi_3a)+x_2x_4(\psi_2a).(\psi_4a)+\ldots\\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_3=&\frac{x_1^3}{1.2.3}(\psi_1a)^3+\frac{x_1^2.x_2}{1.2}(\psi_1a)^2.(\psi_2a)+\frac{x_1x_2^2}{1.2}(\psi_1a).(\psi_2a)^2+\ldots\\
&+\frac{x_2^3}{1.2.3}(\psi_2a)^3+\frac{x_2^2.x_3}{1.2}(\psi_2a)^2.(\psi_3a)+\frac{x_2x_3^2}{1.2}(\psi_2a).(\psi_3a)^2+\ldots\\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;
\end{aligned}$$

por consequencia, substituindo estas expressões na serie (m) e attendendo a que

$$\psi_n(a) = \frac{f_n(a)}{f'(a)},$$

resulta o desenvolvimento definitivo da funcção $\mathrm{F}x$, a saber:

$$\mathrm{F}x = \mathrm{F}a - x_1\left[\mathrm{F}'a.\left(\frac{f_1 a}{f'a}\right)\right] + \frac{x_1^2}{1.2}.\frac{d\left[\mathrm{F}'a.\left(\frac{f_1 a}{f'a}\right)^2\right]}{da}$$

$$-\frac{x_1^3}{1.2.3}.\frac{d^2\left[\mathrm{F}'a.\left(\frac{f_1 a}{f'a}\right)^3\right]}{da^2} + \ldots$$

$$-x_2\left[\mathrm{F}'a.\left(\frac{f_2 a}{f'a}\right)\right] + \frac{x_1 x_2}{1.1}.\frac{d\left[\mathrm{F}'a.\left(\frac{f_1 a}{f'a}\right).\left(\frac{f_2 a}{f'a}\right)\right]}{da}$$

$$-\frac{x_1^2.x_2}{1.2}.\frac{d^2\left[\mathrm{F}'a.\left(\frac{f_1 a}{f'a}\right)^2.\left(\frac{f_2 a}{f'a}\right)\right]}{da^2} + \ldots$$

$$-x_3\left[\mathrm{F}'a.\left(\frac{f_3 a}{f'a}\right)\right] + \frac{x_2^2}{1.2}.\frac{d\left[\mathrm{F}'a.\left(\frac{f_2 a}{f'a}\right)^2\right]}{da}$$

$$-\frac{x_2.x_2^2}{1.2}.\frac{d^2\left[\mathrm{F}'a.\left(\frac{f_1 a}{f'a}\right).\left(\frac{f_2 a}{f'a}\right)^2\right]}{da^2} + \ldots$$

*

$$-\text{, etc.} + \frac{x_2 x_3}{1.1} \cdot \frac{d\left[\mathrm{F}'a \cdot \left(\frac{f_2 a}{f'a}\right) \cdot \left(\frac{f_3 a}{f'a}\right)\right]}{da}$$

$$-\frac{x_2^3}{1.2.3} \cdot \frac{d^2\left[\mathrm{F}'a \cdot \left(\frac{f_2 a}{f'a}\right)^3\right]}{da^2} + \ldots$$

$$+\text{ etc. } - \frac{d^2\left[\mathrm{F}'a \cdot \left(\frac{f_2 a}{f'a}\right)^2 \cdot \left(\frac{f_3 a}{f'a}\right)\right]}{da^2} + \ldots$$

A lei de geração d'esta serie será pois

$$\mathrm{T}p = (-1)^p \cdot \frac{x_1^{p_1} \cdot x_2^{p_2} \cdot x_3^{p_3} \ldots x_n^{p_n}}{\Gamma(p_1+1) \cdot \Gamma(p_2+1) \cdot \Gamma(p_3+1) \ldots \Gamma(p_n+1)}$$

$$\times \frac{d^{p-1}\left[\mathrm{F}'a \cdot \left(\frac{f_1 a}{f'a}\right)^{p_1} \cdot \left(\frac{f_2 a}{f'a}\right)^{p_2} \cdot \left(\frac{f_3 a}{f'a}\right)^{p_3} \ldots \left(\frac{f_n a}{f'a}\right)^{p_n}\right]}{da^{p-1}},$$

onde

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n;$$

por consequencia o desenvolvimento em serie de uma funcção $\mathrm{F}x$ da variavel x definida pela equação

$$0 = fx + x_1 f_1 x + x_2 f_2 x + \ldots + x_n f_n x$$

será pois

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{F}x = \mathrm{F}a + \sum \left\{ (-1)^p \cdot \dfrac{x_1^{p_1} \cdot x_2^{p_2} \cdot x_3^{p_3} \ldots x_n^{p_n}}{\Gamma(p_1+1) \cdot \Gamma(p_2+1) \ldots \Gamma(p_n+1)} \right. \\ \left. \times \dfrac{d^{p-1}\left[\mathrm{F}'a \cdot \left(\frac{f_1 a}{f'a}\right)^{p_1} \cdot \left(\frac{f_2 a}{f'a}\right)^{p_2} \cdot \left(\frac{f_3 a}{f'a}\right)^{p_3} \ldots \left(\frac{f_n a}{f'a}\right)^{p_n}\right]}{da^{p-1}} \right\} \end{array}\right\} \quad (p)$$

onde

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n.$$

Se na fórmula

$$Fx = Fa - \frac{r}{2\pi}\int_0^{2\pi} l\left[1 + \alpha . \frac{\varphi(a + re^{\theta i})}{f(a + re^{\theta i})}\right] . F'(a + re^{\theta i}) . e^{\theta i} d\theta$$

que exprime por um integral definido a geração de uma funcção de uma raiz de modulo inferior a r da equação

$$fx + \alpha\varphi x = 0$$

introduzirmos a determinação da funcção φ

$$\varphi x = x_1 f_1 x + x_2 f_2 x + \dots + x_n f_n x$$

correspondente á equação (p), resulta a fórmula

$$Fx = Fa - \frac{r}{2\pi} . \int_0^{2\pi} l\left[1 + x_1 \frac{f_1(a + re^{\theta i})}{f(a + re^{\theta i})} + \dots\right.$$

$$\left. + x_n \frac{f_n(a + re^{\theta i})}{f(a + re^{\theta i})}\right] . F'(a + re^{\theta i}) e^{\theta i} d\theta, \quad \dots\dots\dots (p')$$

funcção generatriz da serie precedente.

Seja

$$fx = a - x;$$

as fórmulas (p) e (p') dão immediatamente

$$x = a + x_1 f_1 x + x_2 f_2 x + \dots + x_n f_n x \dots\dots\dots (q)$$

onde $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ são funcções de uma variavel ξ independente de x, e

$$Fx = Fa + \sum \left\{ (-1)^p \cdot \frac{x_1^{p_1} \cdot x_2^{p_2} \ldots x_n^{p_n}}{\Gamma(p_1+1) \cdot \Gamma(p_2+1) \ldots \Gamma(p_n+1)} \right.$$

$$\left. \times \frac{d^{p-1}[F'a \cdot (f_1a)^{p_1} \cdot (f_2a)^{p_2} \ldots (f_na)^{p_n} \cdot (-1)^{-p}]}{da^{p-1}} \right\}$$

por ser $f'a = -1$; portanto

$$Fx = Fa + \sum \left\{ \frac{x_1^{p_1} \cdot x_2^{p_2} \cdot x_3^{p_3} \ldots x_n^{p_n}}{\Gamma(p_1+1) \cdot \Gamma(p_2+1) \ldots \Gamma(p_n+1)} \right.$$

$$\left. \times \frac{d^{p-1}[F'a \cdot (f_1a)^{p_1} \cdot (f_2a)^{p_2} \ldots (f_na)^{p_n}]}{da^{p-1}} \right\} \ldots \ldots (q')$$

fórmula que dá o desenvolvimento em serie de uma funcção de uma raiz da equação (q), e a sua funcção generatriz será pois

$$Fx = Fa - \frac{r}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} l \left[1 - e^{-\theta i} \left(\frac{x_1}{r} f_1(a + re^{\theta i}) + \ldots \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{x_n}{r} f(a + re^{\theta i}) \right) \right] \cdot F'(a + re^{\theta i}) e^{\theta i} d\theta \ldots \ldots \ldots (q'')$$

As funcções $x_1, x_2, \ldots x_n$ são funcções indeterminadas de ξ; supponhamos agora o caso particular em que

$$x_n = \xi^n;$$

as fórmulas precedentes dão

$$x = a + \xi f_1 x + \xi^2 f_2 x + \ldots + \xi^n f_n x \ldots \ldots \ldots (r)$$

e

$$\mathrm{F}x=\mathrm{F}a+\sum\left\{\frac{\xi^{p_1+2p_2+\ldots+np_n}}{\Gamma(p_1+1)\cdot\Gamma(p_2+1)\,\ldots\,\Gamma(p_n+1)}\right.$$

$$\left.\times\frac{d^{p-1}\left[\mathrm{F}'a\cdot(f_1a)^{p_1}\cdot(f_2a)^{p_2}\ldots(f_na)^{p_n}\right]}{da^{p-1}}\right\}$$

ou

$$\mathrm{F}x=\mathrm{F}a+\sum\left\{\frac{\xi^{q}}{\Gamma(p_1+1)\cdot\Gamma(p_2+1)\,\ldots\,\Gamma(p_n+1)}\right.$$

$$\left.\times\frac{d^{p-1}\left[\mathrm{F}'a\cdot(f_1a)^{p_1}\cdot(f_2a)^{p_2}\ldots(f_na)^{p_n}\right]}{da^{p-1}}\right\}\ldots\ldots(r')$$

onde

$$p=p_1+p_2+p_3+\ldots+p_n$$

e

$$q=p_1+p_2+p_3+\ldots+np_n$$

que é a fórmula do sr. Dr. Gomes Teixeira.

A funcção generatriz d'esta serie será pois

$$\mathrm{F}x=\mathrm{F}a-\frac{r}{2\pi}\cdot\int_0^{2\pi} l\left[1-e^{-\theta i}\left(\frac{\xi}{r}\,f_1(a+re^{\theta i})+\ldots\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\xi}{r}\,f_n(a+re^{\theta i})\right)\right].\mathrm{F}'(a+re^{\theta i}).e^{\theta i}\,d\theta.\ \ldots\ldots(r'')$$

As fórmulas (α) e (p) podem conduzir a outros resultados interessantes, determinando convenientemente a fórma das funcções φ e f.

III

A geração por integraes definidos das raizes das equações algebricas ou transcendentes é uma consequencia immediata das fórmulas (α).

Com effeito, quando a funcção Fx designar a propria variavel x, as fórmulas (α) dão immediatamente

$$x = a - \frac{r}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} l\left[1 + \alpha \cdot \frac{\varphi(a + re^{\theta i})}{f(a + re^{\theta i})}\right] \cdot e^{\theta i}\, d\theta$$

ou

$$\left.\begin{array}{l} x = a - \dfrac{r}{2\pi} \cdot \displaystyle\int_0^{\pi} l\left[1 + \alpha \cdot \frac{\varphi(a + re^{\theta i})}{f(a + re^{\theta i})}\right] \cdot e^{\theta i}\, d\theta \\ \qquad - \dfrac{r}{2\pi} \cdot \displaystyle\int_0^{\pi} l\left[1 + \alpha \cdot \frac{\varphi(a + re^{\theta i})}{f(a + re^{\theta i})}\right] \cdot e^{\theta i}\, d\theta \end{array}\right\} \ldots (\beta)$$

e

$$x = a + \sum\left\{(-1)^p \cdot \frac{\alpha^p}{\Gamma(p+1)} \cdot \frac{d^{p-1}\left[\left(\dfrac{\varphi a}{f' a}\right)^n\right]}{da^{p-1}}\right\}$$

que exprimem por integraes definidos e por um desenvolvimento em serie a geração de uma raiz de modulo inferior a r da equação algebrica ou transcendente

$$fx + \alpha\varphi x = 0$$

em funcção de uma raiz simples a da equação

$$fx = 0.$$

A applicação d'estas fórmulas á resolução das equações conduz aos seguintes theoremas.

THEOREMA I. Se $fx=0$ tem m raizes simples, as m raizes correspondentes da equação

$$fx+\alpha\varphi x=0$$

exprimem-se por integraes definidos, quando φ e f fazem funcções bem determinadas e contínuas para as quaes

$$\text{mod. max.}\left[\alpha.\frac{\varphi(a_1+z)}{f(a_1+z)}\right]<1,\ \ldots\ \text{mod. max.}\left[\alpha.\frac{\varphi(a_m+z)}{f(a_m+z)}\right]<1$$

para certos valores

$$r_1,\ r_2,\ r_3,\ \ldots\ r_m$$

do modulo da variavel imaginaria z.

Com effeito, sejam

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ a_m$$

m raizes simples da equação

$$fz=0,$$

e

$$r_1,\ r_2,\ r_3,\ \ldots\ r_m$$

os valores correspondentes do modulo de z que verificam as condições do theorema; pondo

$$x=a_n+z,$$

cada uma das equações

$$\left.\begin{array}{l} f(a_1+z)+\alpha\varphi(a_1+z)=0,\\ f(a_2+z)+\alpha\varphi(a_2+z)=0,\\ f(a_3+z)+\alpha\varphi(a_3+z)=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ f(a_m+z)+\alpha\varphi(a_m+z)=0, \end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots(m)$$

têm, como demonstrámos, uma raiz unica de modulo inferior ao modulo correspondente de z.

Ora, a fórmula

$$x = a - \frac{r}{2\pi} . \int_0^{2\pi} l \left[1 + \alpha \frac{\varphi(a + re^{\theta i})}{f(a + re^{\theta i})} \right] . e^{\theta i} d\theta$$

exprime uma raiz da equação

$$fx + \alpha\varphi x = 0$$

em funcção de uma raiz simples a da equação

$$fx = 0;$$

por consequencia, mudando x em $a + z$, a fórmula

$$z = -\frac{r}{2\pi} . \int_0^{2\pi} l \left[1 + \alpha \frac{\varphi(a + re^{\theta i})}{f(a + re^{\theta i})} \right] . e^{\theta i} d\theta \; \ldots\ldots\ldots \; (\beta')$$

é a expressão de uma raiz da equação

$$f(a + z) + \alpha\varphi(a + z) = 0,$$

como devia ser, em virtude do *theorema II*.

Applicando pois esta fórmula (β') a cada uma das equações (m), resultam as m raizes

$$z_1 = -\frac{r}{2\pi} . \int_0^{2\pi} l \left[1 + \alpha \frac{\varphi(a_1 + r_1 e^{\theta i})}{f(a_1 + r_1 e^{\theta i})} \right] . e^{\theta i} d\theta, \; \ldots,$$

$$z_m = -\frac{r_m}{2\pi} . \int_0^{2\pi} l \left[1 + \alpha \frac{\varphi(a_m + r_m e^{\theta i})}{f(a_m + r_m e^{\theta i})} \right] . e^{\theta i} d\theta;$$

mas

$$x = a_n + z,$$

logo

$$\left.\begin{array}{l}
x_1 = a_1 - \dfrac{r_1}{2\pi}.\displaystyle\int_0^{2\pi} l\left[1+\alpha.\dfrac{\varphi(a_1+r_1e^{\theta i})}{f(a_1+r_1e^{\theta i})}\right].e^{\theta i}d\theta, \\[2ex]
x_2 = a_2 - \dfrac{r_2}{2\pi}.\displaystyle\int_0^{2\pi} l\left[1+\alpha.\dfrac{\varphi(a_2+r_2e^{\theta i})}{f(a_2+r_2e^{\theta i})}\right].e^{\theta i}d\theta, \\[2ex]
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\[2ex]
x_m = a_m - \dfrac{r_m}{2\pi}.\displaystyle\int_0^{2\pi} l\left[1+\alpha.\dfrac{\varphi(a_m+r_me^{\theta i})}{f(a_m+r_me^{\theta i})}\right].e^{\theta i}d\theta
\end{array}\right\} \dots (m')$$

exprimem a geração por integraes definidos de m raizes da equação algebrica ou transcendente

$$fx + \alpha\varphi x = 0$$

em funcção de m raizes simples da equação

$$fx = 0,$$

e as fórmulas

$$\left.\begin{array}{l}
x_1 = a_1 + \sum\left\{(-1)^p.\dfrac{\alpha^p}{\Gamma(p+1)}.\dfrac{d^{p-1}\left[\left(\dfrac{\varphi a_1}{f'a_1}\right)^p\right]}{da_1{}^{p-1}}\right\} \\[2ex]
x_2 = a_2 + \sum\left\{(-1)^p.\dfrac{\alpha^p}{\Gamma(p+1)}.\dfrac{d^{p-1}\left[\left(\dfrac{\varphi a_2}{f'a_2}\right)^p\right]}{da_2{}^{p-1}}\right\} \\[2ex]
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\[2ex]
x_m = a_m + \sum\left\{(-1)^p.\dfrac{\alpha^p}{\Gamma(p+1)}.\dfrac{d^{p-1}\left[\left(\dfrac{\varphi a_m}{f'a_m}\right)^p\right]}{da_m{}^{p-1}}\right\}
\end{array}\right\} \dots (m'')$$

dão o seu desenvolvimento em serie.

THEOREMA II. As raizes da equação algebrica

$$x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \ldots + A_1x + A_0 = 0$$

exprimem-se por integraes definidos em funcção das raizes da equação binomia

$$x^n + A_0 = 0.$$

A equação

$$x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \ldots + A_1x + A_0 = 0$$

reduz-se á fórma

$$fx + \varphi x = 0,$$

pondo

$$fx = x^n + A_0$$

e

$$\varphi x = A_{n-1}x^{n-1} + A_{n-2}x^{n-2} + \ldots + A_2x + A_1x.$$

Sejam

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_{n-1}$$

as raizes da equação binomia

$$x^n + A_0 = 0;$$

é sempre possivel determinar n quantidades

$$r_0,\ r_1,\ r_2,\ \ldots\ r_{n-1}$$

para valores do modulo de z que tornem respectivamente

$$\text{mod.}\left[\frac{\varphi(a_0+z)}{f(a_0+z)}\right]<1, \text{mod.}\left[\frac{\varphi(a_1+z)}{f(a_1+z)}\right]<1, \ldots, \text{mod.}\left[\frac{\varphi(a_{n-1}+z)}{f(a_{n-1}+z)}\right]<1$$

ou

$$\frac{R_0}{R'_0}<1, \quad \frac{R_1}{R'_1}<1, \quad \ldots, \quad \frac{R_{n-1}}{R'_{n-1}}<1.$$

Com effeito, seja a uma raiz qualquer da equação

$$fx=0;$$

será

$$\varphi(a+z)=P_0+P_1z+P_2z^2+\ldots+P_{n-1}z^{n-1}$$

e

$$f(a+z)=\quad Q_1z+Q_2z^2+\ldots+Q_{n-1}z^{n-1}.$$

Ora

$$z=\rho\ (\cos\theta\ +i\operatorname{sen}\theta\ ),$$

$$P_n=p_n(\cos\alpha_n+i\operatorname{sen}\alpha_n),$$

$$Q^n=q_n(\cos\beta_n+i\operatorname{sen}\beta_n),$$

por consequencia, designando por S_m e S'_m as sommas dos modulos

$$S_m=p_0+p_1\rho+p_2\rho^2+\ldots+p_{n-1}\rho^{n-1}$$

$$S'_m=\quad q_1\rho+q_2\rho^2+\ldots+q_{n-1}\rho^{n-1},$$

resulta

$$\text{mod. }\varphi(a+z)<S_m$$

$$\text{mod. }f(a+z)<S'_m,$$

ou

$$R<S_m \quad \text{e} \quad R'<S'_m,$$

portanto será

$$R = S_m - s \quad e \quad R' = S'_m - s'.$$

Como o modulo da variavel é uma quantidade indeterminada podemos dispôr d'elle convenientemente para que seja

$$S_m - s < S'_m - s',$$

e então será necessariamente

$$R < R'.$$

Ora $s - s'$ póde ser uma quantidade positiva ou negativa; seja pois

$$s - s' = \pm s'';$$

a deseguualdade

$$S_m - S'_m < s - s'$$

desdobra-se portanto em duas

$$S_m - S'_m < +s'',$$

$$S_m - S'_m < -s'',$$

ou

$$S_m - S'_m < s'',$$

$$S'_m - S_m > s'',$$

e como s'' é uma quantidade essencialmente positiva segue-se que estas deseguualdades serão satisfeitas quando houver um valor de ρ que satisfaça ás inequações

$$S_m - S'_m < 0$$

$$S'_m - S_m > 0,$$

as quaes se reduzem a uma só

$$S_m - S'_m < 0.$$

Substituindo pois n'esta expressão os valores de S_m e S'_m conclue-se que todo o valor de ρ, $\rho = r$ que fôr raiz da inequação

$$(p_{n-1} - q_{n-1})\rho^{n-1} + (p_{n-2} - q_{n-2})\rho^{n-2} + \ldots + (p_1 - q_1)\rho + p_0 < 0$$

ou

$$\rho^{n-1} + p'_{n-1} \cdot \rho^{n-2} + \ldots + p'_1 \cdot \rho + p'_0 < 0 \ldots\ldots (m)$$

sendo

$$p'_{n-1} = \frac{p_{n-2} - q_{n-2}}{p_{n-1} - q_{n-2}}, \ldots, p'_1 = \frac{p_1 - q_1}{p_{n-1} - q_{n-1}}, \; p'_0 = \frac{p_0}{p_{n-1} - q_{n-1}},$$

torna

$$R < R'$$

ou

$$\text{mod.} \left[\frac{\varphi(a+z)}{f(a+z)} \right] < 1.$$

Esta deseguualdade (m) é pois a inequação dos modulos, e vê-se que se a equação proposta é do gráo n, a inequação modular é do gráo $n-1$.

Logo é sempre possivel determinar n quantidades

$$r_0, r_1, r_2, \ldots r_{n-1}$$

correspondentes ás raizes

$$a_0, a_1, a_2, \ldots a_{n-1}.$$

da equação binomia

$$x^n + A_0 = 0$$

para valores do modulo de z que tornam

$$\text{mod.}\left[\frac{\varphi(a_0+z)}{f(a_0+z)}\right] < 1, \ldots, \text{mod.}\left[\frac{\varphi(a_{n-1}+z)}{f(a_{n-1}+z)}\right] < 1.$$

Por consequencia, verificando-se todas estas condições, cada uma das equações

$$\left.\begin{array}{l} f(a_0 \quad = z) + \varphi(a_0 \quad + z) = 0 \\ f(a_1 \quad + z) + \varphi(a_1 \quad + z) = 0 \\ f(a_2 \quad + z) + \varphi(a_2 \quad + z) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f(a_{n-1} + z) + \varphi(a_{n-1} + z) = 0 \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (n)$$

tem, em virtude do *theorema I*, uma raiz unica de modulo inferior ao modulo respectivo de z.

Estas equações dão pois n raizes pela applicação immediata da fórmula (β'), a saber:

$$z_0 = -\frac{r_0}{2\pi}.\int_0^{2\pi} l\left[1 + \frac{\varphi(a_0 + r_0 e^{\theta i})}{f(a_0 + r_0 e^{\theta i})}\right].e^{\theta i}d\theta, \ldots,$$

$$z_{n-1} = -\frac{r_{n-1}}{2\pi}.\int_0^{2\pi} l\left[1 + \frac{\varphi(a_{n-1} + r_{n-1} e^{\theta i})}{f(a_{n-1} + r_{n-1} e^{\theta i})}\right].e^{\theta i}d\theta;$$

mas

$$x = a_n + z,$$

logo as fórmulas

$$\left.\begin{aligned}
x_0 &= a_0 - \frac{r_0}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} l\left[1 + \frac{\varphi(a_0 + r_0 e^{\theta i})}{f(a_0 + r_0 e^{\theta i})}\right] . e^{\theta i} d\theta, \\
x_1 &= a_1 - \frac{r_1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} l\left[1 + \frac{\varphi(a_1 + r_1 e^{\theta i})}{f(a_1 + r_1 e^{\theta i})}\right] . e^{\theta i} d\theta, \\
x_2 &= a_2 - \frac{r_2}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} l\left[1 + \frac{\varphi(a_2 + r_2 e^{\theta i})}{f(a_2 + r_2 e^{\theta i})}\right] . e^{\theta i} d\theta, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_{n-1} &= a_{n-1} - \frac{r_{n-1}}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} l\left[1 + \frac{\varphi(a_{n-1} + r_{n-1} e^{\theta i})}{f(a_{n-1} + r_{n-1} e^{\theta i})}\right] . e^{\theta i} d\theta,
\end{aligned}\right\} (n')$$

exprimem a geração por integraes definidos das raizes da equação algebrica

$$x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \ldots + A_1 x + A_0 = 0$$

em funcção das raizes da equação binomia

$$x^n + A_0 = 0,$$

e cujos modulos são respectivamente inferiores ás quantidades

$$r_0, r_1, r_2, \ldots r_{n-1}$$

determinadas pela inequação modular para cada uma das raizes da sobredicta equação binomia.

As fórmulas precedentes exprimem por integraes definidos todas as raizes de uma equação algebrica de qualquer grão; por consequencia exprimem a ligação entre o problema proprio da

Algebra, a resolução das equações, e um problema de Calculo Integral, consistindo na investigação das propriedades d'uma classe de integraes definidos, comprehendidos na fórmula geral

$$Fx = Fa - \frac{r}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \left(l\left[1 \pm \alpha \cdot \frac{\varphi(a+re^{\theta i})}{f(a+re^{\theta i})} \right] \right) . F'(a+re^{\theta i}) . e^{\theta i} d\theta$$

A ligação entre estes dois problemas mostra claramente que todos os progressos ulteriores d'um concorrem para o desenvolvimento progressivo do outro.

Applicando a cada uma das equações (n) a fórmula (β) resulta o desenvolvimento em serie das raizes da proposta

$$\left.\begin{array}{l}
x_1 = a_1 + \sum \left\{ \dfrac{(-1)^p}{\Gamma(p+1)} \cdot \dfrac{d^{p-1}\left[\left(\dfrac{\varphi a_1}{f' a_1}\right)^p\right]}{da_1^{p-1}} \right\} \\[3em]
x_2 = a_2 + \sum \left\{ \dfrac{(-1)^p}{\Gamma(p+1)} \cdot \dfrac{d^{p-1}\left[\left(\dfrac{\varphi a_2}{f' a_2}\right)^p\right]}{da_2^{p-1}} \right\} \\[2em]
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\[2em]
x_n = a_n + \sum \left\{ \dfrac{(-1)^p}{\Gamma(p+1)} \cdot \dfrac{d^{p-1}\left[\left(\dfrac{\varphi a_n}{f' a_n}\right)^p\right]}{da_n^{p-1}} \right\}
\end{array}\right\} \ldots\ldots (n'')$$

Estas fórmulas constituem um methodo geral para a resolução numerica das equações de todos os gráos.

Theorema III. A fórma geral das raizes de uma equação algebrica

$$x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \ldots + A_1 x + A_0 = 0$$

é

$$x=\frac{1}{n}\left[\xi_0+\rho\omega\sqrt[n]{\xi_1}+\rho\omega^2\sqrt[n]{\xi_2}+\ldots+\rho\omega^{n-1}\sqrt[n]{\xi_{n-1}}\right],$$

onde

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3,\ \ldots,\ \xi_{n-1}$$

são as raizes d'uma equação do gráo $n-1$

$$\xi^{n-1}+R_{n-2}\xi^{n-2}+\ldots R_1\xi+R_0=0,$$

cujos coefficientes são funcções racionaes dos integraes definidos que exprimem as raizes da proposta.

A equação

$$x_n+A_{n-1}x^{n-1}+\ldots+A_1x+A_0=0$$

reduz-se á fórma da equação (p)

$$0=fx+x_1f_1x+x_2f_2x+\ldots+x_mf_mx,$$

pondo

$$fx=x^n+A_0$$

$$x_n=A_n \quad \text{e} \quad f_nx=x^n,$$

o que dá

$$fx+A_1f_1x+A_2f_2x+\ldots+A_{n-1}f_{n-1}x=0.$$

O desenvolvimento em serie das raizes d'esta equação em funcção das raizes da equação

$$fx=x^n+A_0=0$$

*

será pois dado pela fórmula (p'), a saber:

$$x = a + \sum \left\{ (-1)^p \cdot \frac{A_1^{p_1} \cdot A_2^{p_2} \ldots A_{n-1}^{p_{n-1}}}{\Gamma(p_1+1) \cdot \Gamma(p_2+1) \ldots \Gamma(p_{n-1}+1)} \right.$$

$$\left. \times \frac{d^{p-1}\left[(a)^{p_1} \cdot (a^2)^{p_2} \ldots (a^{n-1})^{p_{n-1}} \times (na^{n-1})^{-p}\right]}{da^{p-1}} \right\}$$

ou

$$x = a + \sum \left\{ P_p \cdot \frac{d^{p-1}(a^q)}{da^{p-1}} \right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (v)$$

onde

$$P_p = \left(-\frac{1}{n}\right)^p \cdot \frac{A_1^{p_1} \cdot A_2^{p_2} \cdot A_3^{p_3} \ldots A_{n-1}^{p_{n-1}}}{\Gamma(p_1+1) \cdot \Gamma(p_2+1) \cdot \Gamma(p_3+1) \ldots \Gamma(p_{n-1}+1)}$$

e

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n$$

$$q = p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + (n-1) p_{n-1} - (n-1) p$$

ou

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n$$

$$q = m - (n-1) p$$

$$m = p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \ldots + (n-1) p_{n-1}.$$

Ora a quantidade a designa uma raiz qualquer da equação

$$x^n \pm A_0 = 0,$$

onde suppomos explicito o signal do ultimo termo da equação proposta; por consequencia será

$$a = \sqrt[n]{\mp A_0} = \sqrt[n]{A_0} \cdot \sqrt[n]{\mp 1}$$

ou

$$a = \alpha\rho\omega,$$

sendo α o valor arithmetico do radical $\sqrt[n]{A_0}$ e $\rho\omega$ uma raiz da equação

$$\rho^n \pm 1 = 0.$$

As raizes da equação binomia

$$x^n \pm A_0 = 0$$

que devemos substituir a a na fórmula (v) para obter o desenvolvimento em serie de todas as raizes da proposta são pois

$$a_0 = \alpha\rho_0,\ a_1 = \alpha\rho_1,\ a_2 = \alpha\rho_2,\ \ldots,\ a_{n-1} = \alpha\rho_{n-1}.$$

Ora

$$\frac{d^{p-1}(a^q)}{da^{p-1}} = \frac{d^{p-1}(\alpha^q)}{d\alpha^{p-1}} \cdot \rho\omega^{q-p+1}$$

mas

$$q = m - (n-1)p,$$

por consequencia

$$\frac{d^{p-1}(a^q)}{da^{p-1}} = \mp \frac{d^{p-1}(\alpha^q)}{d\alpha^{p-1}} \cdot \rho\omega^{m+1},$$

pois que

$$\rho\omega^{np} = \mp 1;$$

logo a fórmula (v) transforma-se em

$$x = \alpha\rho\omega + \sum \left\{ \mp P_p \cdot \frac{d^{p-1}(\alpha^q)}{d\alpha^{p-1}} \cdot \rho\omega^{m+1} \right\}, \ \ldots\ldots \ (v')$$

onde $\rho\omega$ designa uma raiz da unidade positiva ou negativa, segundo o ultimo termo da proposta é negativo ou positivo, As raizes da unidade reproduzem-se periodicamente, e em virtude d'esta propriedade caracteristica o desenvolvimento da fórmula (v') toma uma fórma muito notavel.

Assim para todos os valores de m que satisfazem á equação

$$m+1=kn+r,$$

onde k é um inteiro positivo qualquer e r o resto da divisão de $m+1$ pelo gráo da equação, temos

$$\rho\omega^{m+1}=\rho\omega^{nk}\,.\,\rho\omega^{r},$$

mas

$$\rho\omega^{n}=\mp 1,$$

portanto

$$\rho\omega^{m+1}=\mp\rho\omega^{r};$$

logo

$$x=\alpha\rho\omega+\sum\left\{\mathrm{P}_p\,.\,\frac{d^{p-1}(\alpha^q)}{d\alpha^{p-1}}\,.\,\omega^r\right\}\,\ldots\ldots\ldots\,(v')$$

onde

$$p=p_1+p_2+p_3+\ldots+p_n$$

$$q=m-(n-1)p$$

e

$$m+1=r\ (\text{mod.}=n).$$

Pondo

$$\mathrm{T}_p=\rho\omega^r\,.\,\mathrm{F}(p)_r$$

$$\mathrm{F}(p)_r=\mathrm{P}_p\,.\,\frac{d^{p-1}(\alpha^q)}{d\alpha^{p-1}}$$

e substituindo em (v''), resulta

$$x=\alpha\rho\omega+\Sigma\mathrm{T}_p\,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,(v'')$$

Ora para um dado valor de p resultam para m um certo numero de valores que devem satisfazer á equação de congruencia

$$m+1 \equiv r \ (\text{mod.} = n);$$

mas os valores do residuo r são

$$r = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ (n-1),$$

por consequencia os valores de m, correspondentes a um dado valor de p, devem ser raizes das congruencias

$$m+1 \equiv 0 \quad (\text{mod.} = n)$$

$$m+1 \equiv 1 \quad (\text{mod.} = n)$$

$$m+1 \equiv 2 \quad (\text{mod.} = n)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$m+1 \equiv n-1 \ (\text{mod.} = n);$$

logo a expressão do termo geral Tp será

$$T_p = \Sigma \rho \omega^r \ F(p)_p$$

ou

$$T_p = F(p)_0 + \rho\omega F(p)_1 + \rho\omega^2 F(p)_2 + \ldots + \rho\omega^{n-1} F(p)_{n-1};$$

por consequencia, substituindo em (v'''), resulta

$$x = \alpha\rho\omega + \Sigma F(p)_0 + \rho\omega \Sigma F(p)_1 + \rho\omega^2 \Sigma F(p)_2 + \ldots$$

$$+ \rho\omega^{n-1} \Sigma F(p)_{n-1}.$$

A expressão geral do desenvolvimento em serie das raizes de uma equação algebrica de qualquer grão é pois

$$x = X_0 + \rho\omega X_1 + \rho\omega^2 X_2 + \ldots + \rho\omega^{n-1} X_{n-1} \ldots\ldots (w)$$

onde

$$X_0 = \sum \left\{ P_p \frac{d^{p-1}(\alpha_q)}{d\alpha^{p-1}} \right\}$$

$$X_1 = \alpha + \sum \left\{ P_p \cdot \frac{d^{p-1}(\alpha^q)}{d\alpha^{p-1}} \right\}$$

$$X_2 = \sum \left\{ P_p \cdot \frac{d^{p-1}(\alpha^q)}{d\alpha^{p-1}} \right\}$$

. . . .

$$X_{n-1} = \sum \left\{ P_p \cdot \frac{d^{p-1}(\alpha^q)}{d\alpha^{p-1}} \right\}$$

sendo

$$P_p = \left(-\frac{1}{n}\right)^p \cdot \frac{A_1^{p_1} \cdot A_2^{p_2} \cdot A_3^{p_3} \ldots A_{n-1}^{p_{n-1}}}{\Gamma(p_1+1)\cdot\Gamma(p_2+1)\cdot\Gamma(p_3+1)\ldots\Gamma(p_{n-1}+1)}$$

e

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n$$

$$q = m - (n-1)p$$

$$m = p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \ldots + (n-1)p_{n-1}.$$

Para obter o desenvolvimento das funcções

$$X_0, X_1, X_2, X_3, \ldots, X_{n-1}$$

devemos combinar respectivamente a equação

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n$$

com cada uma das equações de congruencia

$$m + 1 \equiv 0 \quad (\text{mod.} = n)$$

$$m + 1 \equiv 1 \quad (\text{mod.} = n)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$m + 1 \equiv n - 1 \quad (\text{mod,} = n):$$

logo a fórma geral das raizes de uma equação algebrica

$$x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \ldots + A_1 x \pm A_0 = 0$$

é

$$\left.\begin{aligned}
&x = X_0 + \rho\omega X_1 + \rho\omega^2 X_2 + \ldots + \rho\omega^{n-1} X_{n-1} \\
&\text{onde} \\
&X_r = \sum \left\{ \left(-\frac{1}{n}\right)^p \cdot \frac{A_1^{p_1} \cdot A_2^{p_2} \cdot A_3^{p_3} \ldots A_{n-1}^{p_{n-1}}}{\Gamma(p_1+1) \cdot \Gamma(p_2+1) \ldots \Gamma(p_{n-1}+1)} \times \frac{d^{p-1}(\alpha^q)}{d\alpha^{p-1}} \right\} \\
&p = p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_{n-1} \\
&q = m - (n-1)p \\
&1 + p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \ldots + (n-1)p_{n-1} \equiv r \ (\text{mod.} = n)
\end{aligned}\right\} \quad (w)$$

por consequencia

$$\left.\begin{array}{l} x_0 \;\;\;= X_0 + \rho_0 \;\; X_1 + \rho_0^2 \;\; X_2 + \ldots + \rho_0^{n-1} \;\; X_{n-1} \\ x_1 \;\;\;= X_0 + \rho_1 \;\; X_1 + \rho_1^2 \;\; X_2 + \ldots + \rho_1^{n-1} \;\; X_{n-1} \\ x_2 \;\;\;= X_0 + \rho_2 \;\; X_1 + \rho_2^2 \;\; X_2 + \ldots + \rho_2^{n-1} \;\; X_{n-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1} = X_0 + \rho_{n-1} X_1 + \rho_{n-1}^2 X_2 + \ldots + \rho_{n-1}^{n-1} X_{n-1} \end{array}\right\} \ldots (w')$$

são as raizes da proposta em funcção dos coefficientes e das raizes da unidade por meio das funcções X_r.

As funcções X_r definidas pela fórmula (w) em funcção dos coefficientes gosam de propriedades notaveis. Assim, multiplicando as expressões precedentes (w') por

$$\begin{array}{l} \rho_0, \quad \rho_1, \quad \rho_2, \quad \ldots, \rho^{n-1}, \\ \rho_0^2, \quad \rho_1^2, \quad \rho_2^2, \quad \ldots, \rho_2^{n-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \rho_0^{n-1}, \; 1^{n-1}, \; \rho_2^{n-1}, \; \ldots, \; \rho_{n-1}^{n-1}, \end{array}$$

e sommando vem

$$\begin{array}{l} X_{n-1} = \frac{1}{n}(x_0\rho_0 \quad + x_1\rho_1 \quad + x_2\rho_2 \quad + \ldots + x_{n-1}\rho_{n-1}) \\ X_{n-2} = \frac{1}{n}(x_0\rho_0^2 \quad + x_1\rho_1^2 \quad + x_2\rho_2^2 \quad + \ldots + x_{n-1}\rho^2_{n-1}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_1 \;\;\;= \frac{1}{n}(x_0\rho_0^{n-1} + x_1\rho_1^{n-1} + x_2\rho_2^{n-1} + \ldots + x_{n-1}\rho_{n-1}^{n-1}) \\ X_0 \;\;\;= \frac{1}{n}(x_0 \quad\quad + x_1 \quad\quad + x_2 \quad\quad + \ldots + x_{n-1}) \end{array}$$

por ser

$$\rho_0{}^m + \rho_1{}^m + \rho_2{}^m + \ldots + \rho_{n-1}{}^m = 0,$$

quando

$$m < n$$

e

$$\rho_0{}^n + \rho_1{}^n + \rho_2{}^n + \ldots + \rho_{n-1}{}^n = n.$$

Ora, sendo ρ_ω uma raiz qualquer da unidade, temos

$$\rho_\omega = \cos\left(\frac{\omega}{n}.\pi\right) + \text{sen}\left(\frac{\omega}{n}.\pi\right).\sqrt{-1}$$

ou

$$\rho_\omega = \left(\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) + \text{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right).\sqrt{-1}\right)^\omega;$$

mas

$$\rho_\omega{}^m = \left(\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) + \text{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right).\sqrt{-1}\right)^{m\omega}$$

$$= \left(\cos\left(\frac{m}{n}.\pi\right) + \text{sen}\left(\frac{m}{n}.\pi\right).\sqrt{-1}\right)^\omega$$

por consequencia

$$\rho_\omega{}^m = \rho_m{}^\omega;$$

logo a expressão geral das funcções X_r

$$X_{n-\omega} = \frac{1}{n}(x_0\rho_0{}^\omega + x_1\rho_1{}^\omega + x_2\rho_2{}^\omega + \ldots + x_{n-1}\rho_{n-1}{}^\omega)$$

transforma-se em

$$X_{n-\omega} = \frac{1}{n}(x_0 + x_1\rho_\omega + x_2\rho_\omega{}^2 + \ldots + x_{n-1}\rho_\omega{}^{n-1});$$

logo, pondo

$$t = nX_{n-\omega}$$

resulta immediatamente e *à priori* a *funcção resolvente* de Lagrange

$$t = x_0 + x_1\rho_\omega + x_2\rho_\omega^2 + \ldots + x_{n-1}\rho_\omega^{n-1}$$

ou

$$t = x_0 + \rho x_1 + \rho^2 x_2 + \ldots + \rho^{n-1} x_{n-1}$$

onde ρ designa uma raiz da unidade.

As funcções X_r acham-se pois ligadas com a funcção resolvente, e possuem portanto as mesmas propriedades.

A funcção resolvente de Lagrange gosa de propriedades muito importantes na theoria geral das equações, e principalmente na theoria das *equações abelianas;* e, como estas propriedades estão já bem estudadas e definidas, podemos deduzir muito facilmente as das funcções X_r.

Assim, a funcção resolvente toma n valores distinctos pela substituição das raizes da equação

$$\rho^n - 1 = 0,$$

por consequencia a funcção $X_{n-\omega}$ toma tambem n valores distinctos por essa substituição, como devia ser.

A funcção resolvente depende pois de uma equação do grão

$$1.2.3\ldots n,$$

a qual, como é sabido, se abaixo ao grão

$$1.2.3\ldots(n-1),$$

pondo

$$\xi = t^n;$$

por consequencia resulta

$$nX_{n-\omega} = \sqrt[n]{\xi};$$

mas, substituindo na funcção

$$\xi = (x_0 + \rho x_1 + \rho^2 x_2 + \ldots + \rho^{n-1} x_{n-1})^n$$

ρ pelas raizes da equação

$$\frac{\rho^n - 1}{\rho - 1} = 0$$

resultam para ξ os $n-1$ valores distinctos

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3,\ \ldots,\ \xi_{n-1},$$

logo

$$X_{n-\omega} = \frac{1}{n} \sqrt[n]{\xi_\omega}$$

ou

$$X_1 = \frac{1}{n} \sqrt[n]{\xi_1},\quad X_2 = \frac{1}{n} \sqrt[n]{\xi_2},\quad X_3 = \sqrt[n]{\xi_3},\quad \ldots,$$

$$X_{n-1} = \frac{1}{n} \sqrt[n]{\xi_{n-1}}.$$

Logo a fórma geral das raizes de uma equação algebrica de qualquer grão é

$$x = \frac{1}{n}\left[\xi_0 + \rho\omega \sqrt[n]{\xi_1} + \rho\omega^2 \sqrt[n]{\xi_2} + \ldots + \rho\omega^{n-1} \sqrt[n]{\xi_{n-1}}\right]$$

como immediatamente se deduz, substituindo na fórmula acima demonstrada

$$x = X_0 + \rho\omega X_1 + \rho\omega^2 X_2 + \ldots + \rho\omega^{n-1} X_{n-1},$$

as expressões precedentes das funcções X_r, e pondo

$$\xi_0 = -A_{n-1}.$$

Lagrange demonstrou que as quantidades

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3,\ \ldots,\ \xi_{n-1}$$

eram raizes de uma equação de gráo $n-1$, denominada *equação reduzida*

$$\xi^{n-1}+R_{n-1}\,\xi^{n-2}+\ldots+R_1\xi+R_0=0\ldots\ldots\ (r)$$

cujos coefficientes se exprimem em funcção dos coefficientes da proposta por meio de uma equação do gráo

$$1.2.3\ldots(n-2);$$

logo as funcções X_r são raizes do gráo n das raizes da equação reduzida

$$X_{n-\omega}=\frac{1}{n}\sqrt[n]{\xi_\omega}$$

ou

$$X_r=\frac{1}{n}\sqrt[n]{\xi_{n-r}}$$

onde

$$r=1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots\ (n-1)$$

Logo as raizes da equação reduzida exprimem-se em funcção dos coefficientes da proposta pelas fórmulas

$$\xi_{n-r}=(nX_r)^n$$

$$X_r=\sum\left\{\left(-\frac{1}{n}\right)^p\cdot\frac{A_1{}^{p_1}\,.\,A_2{}^{p_2}\ldots A_{n-1}{}^{p_{n-1}}}{\Gamma(p_1+1)\cdot\Gamma(p_2+1)\ldots\Gamma(p_{n-1}+1)}\right.$$

$$\left.\times\frac{d^{p-1}(\alpha^q)}{d\alpha^{p-1}}\right\},$$

onde

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_{n-1}$$

$$q = m - (n-1)p$$

$$1 + p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \ldots + (n-1)p_{n-1} \equiv r \ (\text{mod.} = n).$$

Conhecidas assim as raizes da rednzida podemos determinar a somma das suas potencias similhantes, e pelas fórmulas de Newton calcular depois os coefficientes da reduzida em funcção dos coefficientes da proposta.

Os coefficientes da equação reduzida podem calcular-se muito mais simplesmente.

Com effeito, as raizes da equação reduzida

$$\xi_1, \ \xi_2, \ \xi_3, \ \ldots \ \xi_{n-1}$$

exprimem-se em funcção das raizes

$$x_0, \ x_1, \ x_2, \ x_3, \ \ldots \ x_{n-1}$$

pela fórmula

$$\xi = (x_0 + \rho x_1 + \rho^2 x_2 + \ldots + \rho^{n-1} x_{n-1})^n,$$

onde ρ é dado pela equação

$$\frac{\rho^n - 1}{\rho - 1} = 0;$$

desenvolvendo pois esta expressão e attendendo á periodicidade das raizes da unidade, a fórma geral das raizes da equação reduzida em funcção das raizes da equação proposta será

$$\xi = X'_0 + \rho X'_1 + \rho^2 X'_2 + \ldots + \rho^{n-1} X'_{n1-},$$

onde X'_r são funcções racionaes e inteiras das raizes

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots\ x_{n-1};$$

mas estas raizes exprimem-se em funcção dos coefficientes da proposta por meio dos integraes definidos (n); logo, calculando as sommas das potencias similhantes das raizes

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3,\ \ldots\ \xi_{n-1},$$

determinam-se pelas fórmulas de Newton os coefficientes da equação reduzida em funcção dos coefficientes da proposta por meio de integraes definidos.

A fórma geral das raizes de uma equação algebrica de qualquer grão

$$x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \ldots + A_1 x + A_0 = 0$$

é pois

$$x = \frac{1}{n}\left[\xi_0 + \rho\sqrt{\xi_1} + \rho^2\sqrt{\xi_2} + \ldots + \rho^{n-1}\sqrt{\xi_{n-1}}\right],$$

onde

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3,\ \ldots\ \xi_{n-1}$$

são as raizes da equação reduzida

$$\xi^{n-1} + R_{n-1}\xi^{n-2} + \ldots + R_1\xi + R_0 = 0.$$

Este notavel theorema, demonstrado por Lagrange em 1771, foi a origem da theoria das equações abelianas.

SOBRE UM PROBLEMA DE ALGEBRA ELEMENTAR

POR

J. C. O'NEIL DE MEDEIROS

Deduzir o desenvolvimento de $x^m + x^{-m}$ expresso em

$$z = x^1 + x^{-1}.$$

Esta relação entre x e z dá

$$x^1 = \frac{z}{2} + \sqrt{\left(\frac{z}{2}\right)^2 - 1}$$

$$x^{-1} = \frac{z}{2} - \sqrt{\left(\frac{z}{2}\right)^2 - 1}$$

ou inversamente, isto é,

$$x^1 = \frac{z}{2} - \sqrt{\left(\frac{z}{2}\right)^2 - 1}$$

$$x^{-1} = \frac{z}{2} + \sqrt{\left(\frac{z}{2}\right)^2 - 1}$$

e, fazendo por simplicidade

$$(d) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{z}{2} = t,$$

$$x^1 = t + \sqrt{t^2 - 1}$$

$$x^{-1} = t - \sqrt{t^2 - 1}$$

ou inversamente.

Assim, pois, designando em geral por

$$\sum_a^{a+b} \{f(i)\}$$

a somma das determinações individuaes successivas de $f(i)$, correspondentes respectivamente aos valores inteiros e positivos de

$$i = a,\ a+1,\ a+2,\ \ldots\ (a+b),$$

teremos, na supposição de ser m um numero inteiro,

$$x^m = (t + \sqrt{t^2-1})^m = \sum_0^m \{(+1)^i [mCi]\, t^{m-i} (\sqrt{t^2-1})^i\}$$

$$x^{-m} = (t - \sqrt{t^2-1})^m = \sum_0^m \{(-1)^i [mCi]\, t^{m-i} (\sqrt{t^2-1})^i\}$$

ou inversamente; mas, quer se tomem os valores de x^m e x^{-m} taes como estão escriptos, quer se attribua a x^m o de x^{-m} e reciprocamente, a sua somma é sempre a mesma.

Ora, como n'estes valores são eguaes e de signaes contrarios todos os termos, que correspondem a i impar, isto é, todos os termos d'ordem par, sendo os restantes identicos, claro está que do dobro d'estes ultimos precisamente deverá constar a somma dos mesmos valores. Podemos por conseguinte representar esta somma como se segue

$$x^m + x^{-m} = 2 \times \sum_{0}^{\frac{1}{2}\left\{\begin{smallmatrix} m \\ m-1 \end{smallmatrix}\right.} \left\{ [mC2i]\, t^{m-2i}\, (t^2-1)^i \right\}$$

onde se quer exprimir pela ambiguidade do limite superior $\frac{1}{2}\left\{\begin{smallmatrix} m \\ m-1 \end{smallmatrix}\right.$ a consideração dos casos respectivos de ser m par ou impar; de maneira que deverá ser $\frac{1}{2}m$ no primeiro caso e $\frac{1}{2}(m-1)$ no segundo. E como pela notação adoptada é

$$(t^2-1)^i = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=i} \left\{ (-1)^\alpha [iC\alpha]\, t^{2i-2\alpha} \right\},$$

a expressão precedente transforma-se em

$$x^m + x^{-m} = 2 \sum_{0}^{\frac{1}{2}\left\{\begin{smallmatrix} m \\ m-1 \end{smallmatrix}\right.} \left\{ [mC2i]\, t^{m-2i} \cdot \sum_{\alpha=0}^{\alpha=i} \left\{ (-1)^\alpha [iC\alpha]\, t^{2i-2\alpha} \right\} \right\}$$

ou

$$x^m + x^{-m} = \sum_{0}^{\frac{1}{2}\left\{\begin{smallmatrix} m \\ m-1 \end{smallmatrix}\right.} \left\{ [mC2i] \cdot 2 \cdot \sum_{\alpha=0}^{\alpha=i} \left\{ (-1)^\alpha [iC\alpha]\, t^{m-2\alpha} \right\} \right\}$$

ou, finalmente, attendendo a (d)

$$(s) \ldots \quad x^m + x^{-m} = \sum_{0}^{\frac{1}{2}\left\{\begin{smallmatrix} m \\ m-1 \end{smallmatrix}\right.} \left\{ [mC2i] \cdot 2 \cdot \sum_{\alpha=0}^{\alpha=i} \left\{ (-1)^\alpha [iC\alpha]\, \frac{z^{m-2\alpha}}{2^{m-2\alpha}} \right\} \right\}$$

Tal é pois a fórmula que dá $x^m + x^{-m}$ expresso em

$$z = x^1 + x^{-1}.$$

Para se obter este desenvolvimento, ordenado segundo as potencias decrescentes de z, dar-se-hão successivamente a α os valores $0, 1, 2, 3, \ldots \frac{m}{2}$ ou $\frac{m-1}{2}$ (conforme for m par ou impar), e tomar-se-ha i respectivamente desde $i=\alpha$ até $i = \frac{1}{2}\begin{cases} m \\ m-1 \end{cases}$ (na mesma conformidade de ser m par ou impar); de maneira que, designando por

$$(q_\alpha) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \mathrm{A}_\alpha = \frac{\mathrm{K}_\alpha}{2^{m-2\alpha}}$$

o coefficiente d'um termo d'ordem qualquer $\alpha + 1$, será

$$(n_\alpha) \ldots\ldots \mathrm{K}_\alpha = (-1)^\alpha \sum_{0}^{\frac{1}{2}\begin{cases} m \\ m-1 \end{cases}} \Big\{ 2 \,.\, [i\mathrm{C}\alpha] \,.\, [m\mathrm{C}2i] \Big\}.$$

Ora a construcção d'este valor, e por conseguinte do valor de A_α é na verdade assás complicada; mas é muito de presumir que se torne mais simples fazendo-o depender do valor precedente $\mathrm{K}_{\alpha-1}$, visto ser

$$\mathrm{K}_0 = \sum_{0}^{\frac{1}{2}\begin{cases} m \\ m-1 \end{cases}} \Big\{ 2 \,.\, [m\mathrm{C}2i] \Big\} = 2^m,$$

e portanto, $[(q_\alpha)]$

$$(q_0) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \mathrm{A}_0 = 1.$$

Para o conseguir notaremos primeiro que, sendo, como se sabe,

$$2[iC\alpha]=\frac{2i}{\alpha}[(i-1)C(\alpha-1)]$$

$$[mC2i]=\frac{m}{2i}[(m-1)C(2i-1)]$$

será

$$2[iC\alpha].[mC2i]=\frac{m}{\alpha}[(i-1)C(\alpha-1)].[(m-1)C(2i-1)],$$

e portanto, $[(n_\alpha)]$

$$(n'_\alpha)\quad K_\alpha=(-1)^\alpha\frac{m}{\alpha}\sum_{\alpha}^{\frac{1}{2}\left\{\begin{matrix}m\\m-1\end{matrix}\right.}\Big\{[(i-1)C(\alpha-1)].[(m-1)C(2i-1)]\Big\}.$$

Mudando α em $\alpha-1$, tanto em (n_α) como em (n'_α), obter-se-ha

$$K_{\alpha-1}=(-1)^{\alpha-1}\sum_{0}^{\frac{1}{2}\left\{\begin{matrix}m\\m-1\end{matrix}\right.}\Big\{2[iC(\alpha-1)].[mC2i]\Big\}$$

$$K_{\alpha-1}=(-1)^{\alpha-1}\frac{m}{\alpha-1}\sum_{\alpha-1}^{\frac{1}{2}\left\{\begin{matrix}m\\m-1\end{matrix}\right.}\Big\{[(i-1)C(\alpha-2)].[(m-1)C(2i-1)]\Big\}.$$

Sendo agora, como tambem é sabido,

$$[mC2i]=\frac{m-2i+1}{2i}[mC(2i-1)]=$$

$$=\frac{m+1}{2i}[mC(2i-1]-[mC(2i-1)],$$

será

$$2\,[iC(\alpha-1)]\,.\,[mC2i] = \frac{m+1}{i}\,[iC(\alpha-1)]\,.\,[mC(2i-1)]$$

$$-2\,[iC(\alpha-1)]\,.\,[mC(2i-1)]$$

$$= \frac{m+1}{\alpha-1}\,[(i-1)C(\alpha-2)]\,.\,[mC(2i-1)] - 2\,[iC(\alpha-1)]\,.\,[mC(2i-1)]$$

que pela substituição de

$$[iC(\alpha-1)] = [(i-1)C(\alpha-1)] + [(i-1)C(\alpha-2)]$$

se transforma em

$$2\,[iC(\alpha-1)]\,.\,[mC2i] = \frac{m-2\alpha+3}{\alpha-1}\,[(i-1)C(\alpha-2)]\,.\,[mC(2i-1)]$$

$$-2\,[(i-1)C(\alpha-1)]\,.\,[mC(2i-1)]$$

ou, finalmente, mudando m em $m-1$

$$2\,[iC(\alpha-1)]\,.\,[(m-1)C2i] = \frac{m-2\alpha+2}{\alpha-1}\,[(i-1)C(\alpha-2)]$$

$$\times[(m-1)C(2i-1)] - 2\,[(i-1)C(\alpha-1)]\,.\,[(m-1)C(2i-1)].$$

Se tomarmos o sommatorio d'ambos os membros d'esta equação, desde $i=\alpha-1$ até $i=\frac{1}{2}\begin{cases} m \\ m-1 \end{cases}$, e multiplicarmos por $(-1)^{\alpha-1}=-(-1)^{\alpha}$, obteremos (attendendo a $(n_{\alpha-1})$, $(n'_{\alpha-1})$, (n'_{α}), e representando por

$$\overset{m}{(\mathrm{K}_{\alpha-1})}_{m-1}$$

aquillo em que se torna $K_{\alpha-1}$ pela mudança de m em $m-1$), obteremos, repito, o resultado seguinte

$$(\overset{m}{K}_{\alpha-1})_{m-1}=\frac{m-2\alpha+2}{m}K_{\alpha-1}+\frac{2\alpha}{m}K_{\alpha},$$

d'onde se deduz

$$K_{\alpha}=\frac{-K_{\alpha-1}(m-2\alpha+2)+m(\overset{m}{K}_{\alpha-1})_{m-1}}{2\alpha}$$

e finalmente $[(q_{\alpha})$ e $(q_{\alpha-1})]$

$$(Q_{\alpha})\ldots\ldots A_{\alpha}=\frac{-2A_{\alpha-1}(m-2\alpha+2)+m(\overset{m}{A}_{\alpha-1})_{m-1}}{\alpha}.$$

Por meio d'este symbolo geral, ficando subintendido o valor inicial (q_0), se acham successivamente

$$A_1=\frac{-2m+m}{1}=-\frac{m}{1}$$

$$A_2=\frac{+2m(m-2)-m(m-1)}{1.2}=+\frac{m(m-3)}{1.2}$$

$$A_3=\frac{-2m(m-3)(m-4)+m(m-1)(m-4)}{1.2.3}=-\frac{m(m-4)(m-5)}{1.2.3}$$

$$A_4=\frac{+2m(m-4)(m-5)(m-6)-m(m-1)(m-5)(m-6)}{1.2.3.4}$$

$$=+\frac{m(m-5)(m-6)(m-7)}{1.2.3.4}$$

e assim por deante.

Observa-se porém que cada uma d'estas determinações individuaes se obtem sem dependencia da precedente, dando a α os valores 1, 2, 3, ... $\frac{1}{2}\begin{cases} m \\ m-1 \end{cases}$, na expressão

$$A_\alpha = (-1)^\alpha \frac{m(m-\alpha-1)(m-\alpha-2)\ldots(m-2\alpha+1)}{1.2.3\ldots\alpha},$$

que ficará completamente generalisada, se se demonstrar que, sendo verdadeira para α, tambem é verdadeira para $\alpha+1$. Ora, segundo a fórmula (Q_α), temos

$$A_{\alpha+1} = \frac{-(-1)^\alpha.2m(m-\alpha-1)\ldots(m-2\alpha+1)}{1.2.3\ldots\alpha(\alpha+1)}$$

$$+\frac{(-1)^\alpha m(m-1)(m-\alpha-2)\ldots(m-2\alpha)}{1.2.3\ldots\alpha(\alpha+1)} =$$

$$=(-1)^{\alpha+1}\frac{m(m-\alpha-2)(m-\alpha-3)\ldots(m-2\alpha)(2m-2\alpha-2-m+1)}{1.2.3\ldots(\alpha+1)} =$$

$$=(-1)^{\alpha+1}\frac{m[m-(\alpha+1)-1][m-(\alpha+1)-2]\ldots[m-2(\alpha+1)+1]}{1.2.3\ldots(\alpha+1)}$$

expressão que se fórma como a precedente, pois não é mais do que esta mesma depois da mudança de α em $\alpha+1$.

D'esta observação resulta transformar-se definitivamente a fórmula (s) n'est'outra

$$x^m + x^{-m} = z^m + \sum_1^{\frac{1}{2}\begin{cases} m \\ m-1 \end{cases}} \left\{(-1)^\alpha \frac{m(m-\alpha-1)(m-\alpha-2)\ldots(m-2\alpha+1)}{1.2.3\ldots\alpha} z^{m-2\alpha}\right\}$$

que já não offerece difficuldade alguma de construcção.

BIBLIOGRAPHIA

M. da Terra Pereira Vianna. — Influencia das cargas em movimento sobre as vigas rectas. — Lisboa, 1882.

A doutrina de que se occupa o sr. Terra Vianna no seu opusculo é importante pela applicação que tem na construcção das pontes metalicas.

No primeiro capitulo vem o estudo das vibrações das vigas rectas, suppondo a sobrecarga concentrada n'um ponto, tanto para o caso da viga estar appoiada em dous pontos, como para o caso de estar encastrada. O problema, n'estas condições, foi resolvido pelo sr. Phillips. O sr. Terra Vianna emprega o methodo d'este engenheiro, sem despresar, como elle fez, a inercia de toda a carga permanente e a inercia proveniente das rotações em sentidos alternadamente oppostos das secções normaes da viga. No caso da viga encastrada as rotações das secções normaes têm uma influencia importante, pois que mostra o sr. Terra Vianna que é da ordem dos termos que o sr. Philipps conservou na solução. Os calculos do sr. Terra Vianna differem dos do sr. Phillips porque aquelle rectifica um erro d'este engenheiro, erro que não introduziu differença no resultado final, mas complicou o calculo e obrigou a despresos de termos que influiam na ordem da approximação escolhida.

No capitulo segundo do seu opusculo tracta o sr. Terra Vianna da vibração das vigas quando a sobrecarga está uniformemente distribuida, no caso de a viga estar simplesmente apoiada, no caso de estar encastrada, e no caso de estar apoiada n'uma extremidade e encastrada na outra. O primeiro caso tinha já sido tractado pelo sr. Renaudot, despresando a inercia devida ás oscillações das secções transversaes e a força da inercia centrifuga composta da sobrecarga. O sr. Terra Vianna no seu estudo não faz estes despresos, e o seu calculo é mais simples do que o do sr. Renaudot, porque este engenheiro commetteu o mesmo erro que o sr. Phillips.

Por esta rapida noticia se vê quanto interesse offerece o livro do nosso illustre engenheiro.

Accrescentaremos ainda que este livro foi escripto para o concurso a uma cadeira da eschola polytechnica do Porto, onde o auctor é actualmente professor.

Hermite (Ch.). — Cours professé à la Faculté des Sciences de Paris pendant le 2.ᵉ semestre de 1881 à 1882. Rédigé par M. Andoyer. — Librairie A. Hermann, 1882.

O sr. Andoyer fez um grande serviço á sciencia colligindo as sabias prelecções feitas pelo sr. Hermite na Faculdade das Sciencias de Paris. Aquelles que não tiveram a felicidade de ouvir este grande mathematico, poderão pela leitura d'esta obra fazer idéa da altura do ensino do illustre professor n'aquelle estabelecimento de instrucção.

Para vêr o cuidado que o sr. Hermite teve em pôr os seus ouvintes ao corrente das ultimas descobertas feitas na sciencia, vamos dar uma noticia rapida dos assumptos de que elle se occupa.

As primeiras cinco lições são destinadas á applicação do calculo integral á rectificação das curvas, á quadratura das áreas planas e á determinação das áreas e volumes dos corpos, questão de que elle já tractára no seu *Curso d'Analyse*.

Passa em seguida á doutrina das funcções de variaveis imaginarias. A lição 6.ª é destinada aos primeiros principios d'esta doutrina. Ahi tracta da representação geometrica das funcções de variaveis imaginarias e das consequencias d'esta representação.

Passa depois (lição 7.ª) á definição de integral definido, que extende primeiro ás funcções imaginarias e depois ás funcções de variaveis imaginarias. Dá alguns theoremas, devidos ao sr. Darboux, sobre os integraes definidos das funcções imaginarias, e applica esses theoremas para extender ás funcções imaginarias o theorema de Taylor.

Vem em seguida (lição 8.ª) a theoria, devida a Cauchy, dos integraes definidos quando os limites são imaginarios, que elle expõe seguindo o caminho aberto por Riemann.

Na lição 9.ª faz applicação da importante fórmula de Cauchy, que dá as funcções expressas debaixo da fórma de integraes curvilineos, á deducção da fórmula de Taylor no caso das variaveis imaginarias.

Nas lições seguintes (10.ª, 11.ª e 12.ª) expõe as admiraveis descobertas feitas n'estes ultimos tempos pelos srs. Weierstrass e Mittag-Leffler sobre a theoria difficil das funcções uniformes. Vem primeiro a decomposição em *factores primarios* das funcções *holomorphas*, decomposição devida ao sr. Weierstrass. Em seguida vem a expressão analytica de uma funcção uniforme tendo *pólos* e *pontos essenciaes* em numero qualquer, finito ou infinito.

Passa depois ao integral euleriano de segunda especie, que considera como uma funcção analytica, e ao qual applica os principios anteriormente estudados (lições 13.ª, 14.ª e 15.ª).

Na lição 15.ª mostra que a noção de *linhas de descontinuidade* (coupures), a que Riemann chegou pela consideração dos integraes tomados entre limites imaginarios, apparece naturalmente logo no principio do Calculo integral pela consideração de integraes definidos das funcções racionaes.

Na lição 16.ª applica a noção das linhas de descontinuidade á determinação de alguns integraes definidos, os quaes acha tambem pela applicação do theorema de Cauchy relativo ao integral de uma funcção uniforme tomado ao longo de um contôrno fechado.

Na lição 17.ª mostra a existencia, reconhecida pelo sr. Weierstrass, de linhas de descontinuidade nas funcções, e de espaços lacunares. N'esta mesma lição e na seguinte tracta da resolução da equação $G(z)=0$, onde o primeiro membro é uma funcção holomorpha da incognita. Apresenta a doutrina de Cauchy relativa á separação das raizes, e a expressão d'estas por meio de integraes definidos. Depois vem a serie de Lagrange demonstrada pelo caminho seguido pelo sr. Rouché, e a sua applicação ao problema de Kepler. A proposito d'este problema vêm por incidente os polynomios de Legendre.

Passa em seguida aos theoremas de Eisenstein e de Tchebitcheff, que dão condições a que devem satisfazer as series que satisfazem a uma equação algebrica, e as series que resultam de funcções compostas de funcções algebricas, logarithmicas e exponenciaes.

Segue-se o estudo das funcções multiformes, provenientes da integração das funcções uniformes e multiformes.

As ultimas lições são consagradas ao estudo das funcções ellipticas, e estas são tanto mais interessantes que o sr. Hermite tem sido um dos que tem concorrido efficazmente para a constituição d'esta doutrina importante e difficil.

H. Brocard.— Etude d'un nouveau cercle du plan du triangle.

Se n'um triangulo ABC tomarmos dous pontos O e O′ deferidos pelas igualdades

$$OBA = OCB = OAC,$$

$$O'AB = O'BC = O'CA;$$

e se tirarmos depois as linhas que os unem aos vertices do triangulo, estas rectas, cortando-se, determinam tres novos pontos. Estes tres pontos, os pontos O e O′, o centro do circulo circumscripto a ABC e o centro das medianas anti-parallelas são sete pontos do mesmo circulo.

O sr. Brocard estuda as propriedades d'este circulo n'este interessante trabalho, que foi publicado nas Actas da *Associação franceza para o progresso das sciencias* (Congresso d'Argel).

F. Frenet.— Recueil d'exercices sur le Calcul infinitésimal.— 4me édition.— Paris, 1882.

A primeira parte d'esta obra traz trezentos e trinta e seis exercicios, relativos ao Calculo differencial e suas applicações analyticas e geometricas. A segunda parte consta de seiscentos e trinta e quatro exercicios relativos ao Calculo integral. A terceira parte consta de cincoenta e um exercicios relativos a questões que pertencem indifferentemente aos dous ramos da Analyse.

A maior parte dos exercicios que o sr. Frenet escolheu são relativos a fórmulas ou theoremas que têm importancia na Analyse, de modo que quem fizer estes exercicios, ao mesmo tempo que se desenvolve nos principios do Calculo infinitesimal, que tem de applicar, fica com uma collecção preciosa de resultados importantes.

Muitos dos exercicios são relativos a questões celebres na historia das sciencias mathematicas, e n'este caso o sr. Frenet tem sempre o cuidado de dar indicações a este respeito.

Por esta circumstancia, e pela elegancia da maior parte das soluções, torna-se muito recommendavel o livro do sr. Frenet.

P. Mansion. — Introduction à la théorie des déterminants. — Gand, 1882 (2me édition).

O fim do sr. P. Mansion n'este livro, escripto para uso dos Institutos de instrucção secundaria, é preparar os alumnos para comprehenderem a theoria geral dos determinantes pelo estudo anterior de alguns casos particulares. Para isso expõe com toda a clareza a doutrina relativa aos determinantes de duas e de tres columnas. O objecto de cada capitulo é o seguinte:

Capitulo I. Definições e propriedades.
Capitulo II. Calculo dos determinantes.
Capitulo III. Applicações.

No capitulo das applicações tracta da eliminação entre equações do primeiro gráo a duas e tres incognitas, e entre algumas equações de gráo superior.

G. T.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO PROPOSTA N.º 21

Achar as soluções inteiras da equação $x^y = y^x$ *sem recorrer aos logarithmos.*

Ha primeiro um numero infinito de soluções correspondentes á egualdade $x = y$.

Para as outras, representemos por m um coefficiente arbitrario, differente da unidade, e façamos

$$x = my,$$

o que dá

$$y^{my} = m^y \cdot y^y,$$

d'onde

$$m^y = y^{(m-1)y},$$

ou, pela extracção da raiz do grau y nos dois membros

$$m = y^{m-1},$$

d'onde tambem

$$x = y^m;$$

por consequencia

$$\begin{cases} y = m^{\left(\frac{1}{m-1}\right)} \\ x = m^{\left(\frac{1}{m-1}\right)}. \end{cases}$$

Como a equação dada deve ser resolvida em numeros inteiros, achamos facilmente, pelos differentes valores que arbitramos a m, as seguintes soluções unicas que resolvem a questão proposta:

$$m=2$$
$$x=4$$
$$y=2.$$

MARTINS DA SILVA.

QUESTÕES PROPOSTAS N.os 22, 23, 24

N.º 22. Provar syntheticamente que as superficies empenadas, geradas por uma recta que se move apoiando-se sobre tres directrizes rectilineas, são de segunda ordem; e deduzir as propriedades principaes d'estas superficies, especialmente sob o ponto de vista d'este modo de geração.

A. SCHIAPPA MONTEIRO.

N.º 23. Sommar a serie

$$\sum_0^\infty \frac{2^i x}{e 2^i . x+1}.$$

G. T.

N.º 24. Provar que ha um numero infinito de modos de desenvolver uma fracção simplesmente periodica em uma serie da fórma

$$a10^{-b}+ma10^{-2b}+m^2a10^{-3b}+m^3a10^{-4b}+\ldots$$

BIRGER HANSTED.

INDICE