niques (Σ) *et* (Σ') *ont toujours un* double contact *avec ses coniques.*

66. Si nous remplaçons le couple de cercles directeurs (E) et (I) par d'autres couples de cercles directeurs de la suite de cercles ayant même axe radical que ce couple de cercles, nous reconnaîtrons immédiatement qu'il faut un couple différent de ces nouveaux cercles directeurs pour chaque suite de cercles générateurs des coniques (Σ) et (Σ'); d'où il résulte que les deux suites de couples de cercles focaux répondant à ces deux suites de couples de cercles directeurs seront distinctes entre ces coniques, et, par conséquent, *elles ne seront cyclomofocales que par rapport aux cercles focaux* (E'') *et* (I'), *répondant aux cercles directeurs donnés.*

Ces cercles focaux seront vraiment deux *cercles doubles* de deux suites de cercles focaux des coniques (Σ) et (Σ'), par rapport à leur axe de symétrie CC_0.

En prenant la suite de cercles directeurs ayant même axe radical que le second couple de cercles directeurs (I_1) et (E_1) de ces deux coniques, on retrouvera évidemment ces mêmes suites de cercles focaux.

67. Lorsqu'au lieu de couples de cercles directeurs quelconques, pour engendrer chaque conique (Σ) et (Σ') (fig. 3), nous prenons des couples de cercles directeurs correspondants (fig. 5), il est évident que à ceux-ci répondront des couples de cercles focaux égaux. Si, dans la série de couples de cercles directeurs correspondants, il y a des *cercles tangentiels*, par rapport à l'une ou l'autre série de cercles générateurs (n.° 51), les cercles du couple de cercles focaux de la conique respective, relatifs à ce couple de cercles directeurs, auront, comme on sait (n.° 48), des *dimensions infinitement petites,* c'est-à-dire des *rayons nuls,* ou deviendront les *points focaux* de cette conique, et l'axe de symétrie CC_0 de celle-ci représentera en direction son *axe focal* ou *principal.*

Dans les cas où les cercles directeurs tangentiels sont imaginaires (fig. 5 *b*), et, par suite, il en est de même des cercles focaux de rayons nuls, ou des points focaux sur CC_0, il y aura alors des *cercles focaux minima de rayons finis,* comme on le verra.

D'ailleurs, au *cercle directeur correspondant double* (réel ou imaginaire) *d'une conique* (Ω) (n.° 58) *répondra un cercle focal égale-*

ment double (réel ou imaginaire) *concentrique* ou *homocentrique à cette conique.*

Ainsi nous voyons qu' *une conique quelconque* (Ω), *par rapport à la ligne des centres* CC_0 *de ses cercles directeurs a une série de cercles focaux symétriquement égaux deux à deux, contenant deux cercles coïncidents,* ou *vraiment un* cercle double (réel ou imaginaire) *concentrique à cette conique, laquelle aura un* double contact *avec tous ces cercles.*

68. *Détermination directe des axes.*—Considérons une conique quelconque (Ω) (fig. 5, 5 *a*, 5 *b* et 5 *c*), et, prenons deux (E) et (I_n) de ses cercles directeurs, dont la sécante commune est $\theta\theta_0$, ainsi qu'un (ω) de ses cercles générateurs.

Cela étant, déterminons le centre radical φ_1 de ces trois cercles, et le pôle φ_ω de la sécante $\theta\theta_0$, par rapport au cercle générateur (ω); alors la perpendiculaire $\omega p_\omega \sigma_0$ abaissée de son centre ω sur la droite $\varphi_1 p_\omega \varphi_\omega$, unissant ces deux points, coupera la ligne CC_0, des centres de la série de cercles directeurs, au point σ_0, lequel, comme on sait (n.° 58), sera en même temps le centre du cercle directeur correspondant double (réel ou imaginaire), et de la conique engendrée (Ω), qui aura, donc, pour *axe* (réel ou idéal) le diamètre du cercle focal respectif perpendiculaire à la droite CC_0, ou le diamètre suivant lequel il y a lieu le double contact entre ces courbes.

Dans le cas où la droite $\varphi_1\varphi_\omega$ coupe le cercle générateur (ω), étant ε_σ et ε'_σ les points d'intersection (fig. 5 et 5 *b*), les droites $\sigma_0\varepsilon_\sigma$ et $\sigma_0\varepsilon'_\sigma$ seront deux rayons du cercle directeur correspondant double ($\sigma_0\varepsilon_\sigma$); et le cercle focal double respectif ($\sigma_0 m_\sigma$), étant l'enveloppe des rayons $\omega\varepsilon_\sigma$ et $\omega\varepsilon'$ du cercle générateur, les perpendiculaires $\sigma_0 m_\sigma$ et $\sigma_0 m'_\sigma$ abaissées de σ_0 sur ces rayons, seront deux rayons de ce cercle focal, dont le diamètre $\sigma\sigma_1$ perpendiculaire à CC_0 sera un *axe* de la conique (Ω).

Maintenant passons à déterminer l'autre axe situé sur la droite CC_0.

Étant $C_0M_{n_0}$ la droite unissant le centre du cercle directeur (I_n) au sommet M_{n_0} du rectangle auxiliaire $M_nM_{n_0}M'_{n_0}M'_n$ (n.° **17** et **32**), et étant $\varpi_{n_0}\omega$ la perpendiculaire à son point milieu ϖ_{n_0}, déterminant sur la corde ba_3 du cercle directeur (E) le point ω de la conique considérée (Ω), ou le centre du cercle générateur (ω), quand cette corde tourne autour de C, ou roule sur le cercle focal (E″) la droite $C_0M_{n_0}$ tournera autour de C_0, et le point d'intersection ω de la perpendiculaire $\overline{\omega}_{n_0}\omega$ et de cette corde décrira la conique.

Ainsi, l'intersection de cette conique avec la droite CC_0, ou la détermination des *points sommets* de son second axe sera ramenée à obtenir les positions du vecteur tangentiel ou roulant $m_2\omega$ et de la perpendiculaire $\overline{\omega}_{n_0}\omega$ dans le cas où ces droites s'entrecoupent sur CC_0, ou bien quand ces trois droites sont dites *congruentes* (n.° 57).

Mais si, au contraire, nous supposons fixe la corde ba'_1, ou le vecteur tangentiel $m_2\omega$, et faisons tourner la droite CC_0 autour de C, la droite $C_nM_{n_0}$ tournant alors autour du point M_{n_0}, censé également fixe, nous pouvons aussi obtenir la *congruence* des trois droites considérées, sans altérer leurs positions relatives, en ramenant ensuite les points de concours dans leur véritable position.

Or, le point générateur ω de la conique (Ω), se trouvant toujours équidistant du point fixe M_{n_0} et du point C_n, qui décrira une circonférence (CC_n), *les points de concours demandés situés sur la corde* ba'_1, *ou sur le vecteur* $m_2\omega$, *seront les centres de circonférences* (réelles ou imaginaires) *passant par ce point fixe, et touchant cette circonférence-là.*

D'après cela, cette question est donc ramenée à la solution très-simple du problème suivant:

Trouver les cercles tangentes à un cercle donné (CC_n), *qui passent par un point donné* M_{n_0}, *et dont les centres soient situés sur une droite également donnée* $m_2\omega$.

Solution. — Soit, par le point M_{n_0}, mené un cercle quelconque (ωM_{n_0}) avec le centre ω sur $m_2\omega$, et qui coupe la circonférence (CC_n) en deux points $\overset{1}{\iota}, \overset{1}{\iota'}$; et par le point η où la sécante $\iota\iota'$ commune à ces cercles coupe la perpendiculaire $M_{n_0}M_1M_n$, abaissée de M_{n_0} sur $m_2\omega$, on mènera à la circonférence (CC_n) les tangentes: les points de contact seront les points où les circonférences cherchées touchent cette circonférence.

Pour en trouver les centres on tracera les rayons qui vont aux points de contact, dont les intersections avec le rayon vecteur $m_2\omega$ seront les centres demandés, lesquels on rapportera ensuite sur la droite CC_0 ou CC_n en véritable position par les respectifs arcs de circonférences décrites de C comme centre.

Considérons, donc, le cas où nous pouvons du point η tirer les tangentes ηt_n et $\eta t'_n$ à la circonférence (CC_n) (fig. 5 et 5 *a*), dont les rayons Ct_n et Ct'_n, qui vont aux points de contact t_n et t'_n, coupent le rayon vecteur tangentiel $m_2\omega$ aux points ω et ω'. Ces points d'intersection ramenés sur CC_0 par les arcs de cercle $\widehat{\omega v_1}$ et $\widehat{\omega v'_1}$ décrits du point C comme centre avec $C\omega$ et $C\tilde{\omega}$ pour rayon (en sorte que les points de contact t_n et t'_n viennent se confondre avec le point C_n) donneront les *points sommets* demandés, qui déterminent *l'axe* $v_1 v'_1$ situé sur CC_0.

69. *Discussion.*—Considérons (fig. 5 et 5 *b*) le *triangle autopolaire* $\varphi_1\varphi_2\varphi_\omega$, ou *conjugué*, par rapport au cercle générateur (ω) (n.° 58), et dont les sommets φ_1 et φ_ω sont respectivement, comme nous savons, le *centre radical* de ce cercle et des cercles directeurs, et le *pôle* de la sécante $\theta\theta_0$ commune à ces cercles directeurs, sur laquelle se trouve continuellement le côté $\varphi_1\varphi_2$ de ce triangle.

Ainsi, toutes les fois que le sommet φ_2 sera extérieur au cercle (ω), l'un quelconque des deux autres sommets φ_1 ou φ_ω sera intérieur à ce cercle, lequel coupera alors le côté $\varphi_1\varphi_\omega$, opposé au sommet φ_2, et, par suite, le cercle directeur double sera *réel.*

D'après cela, *le cercle focal double d'une conique quelconque* (Ω) *sera* réel, *et, par conséquent, il en sera de même de son axe perpendiculaire à la ligne des centres des cercles directeurs:*

1.° Dans tous les cas où le cercle générateur (ω) *de cette conique aura pour sécante idéale la sécante* (réelle ou idéale) $\theta\theta_0$ *commune à ses cercles directeurs* (fig. 5).

2.° Quand le centre radical φ_1 *de ces trois cercles sera intérieur à ceux-ci,* c'est-à-dire, *toutes les fois que les cercles directeurs se coupant en deux points réels* λ_0, λ, *l'un seul de ceux-ci sera intérieur au cercle générateur* (fig. 5 *b*).

Dans le cas particulier où le cercle générateur touche la corde commune $\lambda_0\lambda$ de ces cercles directeurs (fig. 5 *b*), les sommets φ_1 et φ_ω coïncideront avec le point de contact φ_{ω_2} (fig. 5 *c*), et, par conséquent, le triangle autopolaire, ayant un côté *nul,* se réduira au *segment double* $\varphi_1\varphi_{\omega_2}$, ou correspondant à deux *côtés coïncidents.* Alors la perpendiculaire $\omega\varphi_{\omega_2}$ abaissée de ω sur $\varphi_1\varphi_{\omega_2}$ étant parallèle à CC_0, le centre du cercle directeur correspondant double, ou le centre de la conique engendrée se trouvera à l'infini; d'où il résulte que *ce cercle directeur double sera l'ensemble de la sécante commune aux cercles directeurs et de la droite parallèle* *à celle-ci située à l'infini, et le cercle focal double se trouvera tout à fait à l'infini.*

D'ailleurs *ce cercle directeur de rayon infiniment grand* ou *cercle directeur aperantique sera en même temps tangentiel* (n.° 51).

Si le sommet φ_2 du triangle autopolaire $\varphi_1 \varphi_2 \varphi_\omega$ est intérieur au cercle (ω) (fig. 5 *a* et 5 *d*), les sommets φ_1 et φ_ω étant extérieurs, le côté $\varphi_1 \varphi_\omega$ sera une sécante idéale de ce cercle, d'où il résulte que le cercle directeur correspondant double sera *imaginaire.*

Donc, *le cercle focal double d'une conique quelconque deviendra* imaginaire, et, par suite, *son axe perpendiculaire à la ligne des centres des cercles directeurs* sera idéal:

Quand la corde commune à ces cercles directeurs, étant idéale, est toujours coupée réellement par le cercle générateur (fig. 5 *a*); *et, étant réelle, elle est coupée soit intérieurement soit extérieurement par ce cercle générateur,* c'est-à-dire, *entre ses extrémités,* ou *sur ses prolongements* (fig. 5 *d*).

Considérons maintenant l'axe coïncidant en direction avec la droite CC_0.

Le cercle $\underset{1}{\omega} M_{n_0}$ passant par le sommet M_{n_0} du rectangle auxiliaire $M_{n_0} M_n M'_n M'_{n_0}$ passe de même par le sommet M_n, de sorte que le côté $M_{n_0} M_n$ déterminant la conique considérée (Ω), sera aussi une corde de ce cercle.

Cela étant, si la corde $M_{n_0} M_n$ du cercle $(\underset{1}{\omega} M_{n_0})$ est coupée en deux points intérieurement ou extérieurement par le cercle auxiliaire (CC_n), ou bien n'est pas coupée par ce cercle, c'est-à-dire, si ses extrémités sont toutes deux extérieures, ou toutes deux intérieures à ce même cercle, le point d'intersection η de cette corde avec la corde $\iota \iota'$ commune à ces cercles se trouvera extérieur à ceux-ci, ou sur les prolongements de ces mêmes cordes; d'où il suit que les tangentes menées par ce point seront réelles, et, par suite, il en sera de même des points sommets situés sur CC_0.

Quand la corde $M_{n_0} M_n$ du cercle $(\underset{1}{\omega} M_{n_0})$ est coupée en un seul point extérieurement ou intérieurement par le cercle auxiliaire (CC_n), ou l'une seule de ses extrémités est intérieure ou extérieure à ce cercle, le point d'intersection η de cette corde et de la corde $\iota \iota'$ commune à ces cercles sera intérieure à ceux-ci, et, il en résulte que les tangentes tirées par ce point seront *imaginaires;* donc, etc.

Dans le cas particulier où le cercle auxiliaire touche la corde $M_{n_0}M_n$, ou quand cette corde est elle-même l'une des tangentes menée par η à ce cercle, le rayon de contact coïncidera en direction avec le rayon Cm_1 du cercle enveloppe (E') relatif au cercle directeur (E), et alors son point de rencontre avec le rayon vecteur roulant $m_2\omega$ se trouvera à *l'infini*, et il en sera de même d'un des sommets cherchés.

Il résulte de ce qui précède:

1.° Que *l'axe de la conique engendrée, situé sur la ligne* CC_0 *des centres de ses cercles directeurs, est* réel *toutes les fois que dans le rectangle auxiliaire* $M_{n_0}M_nM'_nM'_{n_0}$ *le côté* $M_{n_0}M_n$ *déterminant cette conique sera coupé en deux points extérieurement ou intérieurement par le cercle auxiliaire* (CC_n), ou *ne sera pas coupé par ce cercle.*

Observation.—Si le côté générateur $M_{n_0}M_n$, ou *son prolongement est touché par le cercle auxiliaire* (CC_n), *l'axe demandé deviendra* infini.

2.° Que *l'axe situé sur* CC_0 *sera* idéal *quand le cercle auxiliaire* (CC_n) *coupera en un seul point intérieurement ou extérieurement le côté* $M_{n_0}M_n$ *du rectangle auxiliaire,* ou *enveloppera seulement l'un des sommets* M_{n_0} *ou* M_n.

Observation.—Comme nous savons, dans ce mode de génération des coniques, que nous étudions, il y a des cas tous particuliers où ces coniques deviennent *évanouissantes*, comme il arrive quand les tangentes, que nous venons de considérer, sont coïncidentes, quand le cercle générateur (ω) touche la corde $\lambda\lambda_0$ des cercles directeur dans l'une ou l'autre de ses extrémités; etc., etc.; mais nous n'entrons pas ici en tels détails, puisque nous avons cru que ce serait prolonger inutilement cette discussion et la rendre trop fatigante.

70. En considérant encore dans le rectangle auxiliaire $M_{n_0}M_nM'_nM'_{n_0}$ le côté $M_{n_0}M_n$, déterminant la conique (Ω) (fig. 5, 5 *a*, 5 *b* et 5 *c*), si nous supposons que ce côté ou *segment auxiliaire* tourne dans le même sens autour du points C_n, il pourra ou non, pendant ce mouvement, passer par ce point.

Or, dans le cas où ce segment $M_{n_0}M_n$ ou son prolongement passe par ce point C_n, il se confond, en direction, avec le vecteur auxiliaire $C_nM_{n_0}$, et alors la perpendiculaire $\overline{\omega}_{n_0}\omega$ élevée sur le milieu ϖ_{n_0} de ce vecteur deviendra parallèle au rayon vecteur roulant $m_2\omega$, et, par suite, le point générateur ω de la conique considérée (Ω) sera *rejeté à l'infini*, ou bien le rayon de son cercle générateur (ω) deviendra *infini*.

Ainsi les *directions reélles* ou *imaginaires* du segment considéré $M_{n_0}M_n$ passant par le point C_n seront données par les *tangentes reélles* ou *imaginaires* menées par ce point au *cercle auxiliaire* CM), enveloppe de ce segment.

Donc, *la conique* (Ω) *aura à l'infini deux points imaginaires,* (*deux points réels distincts,* ou *coïncidents,* c'est-à-dire, *elle aura, dans la série de ses cercles générateurs, deux cercles de rayons infinis imaginaires, deux cercles de rayons infinis réels distincts* ou *coïncidents, suivant que la circonférence enveloppe auxiliaire* (CM) *aura le point* C_n *situé intérieurement, extérieurement* ou *sur ellemême.*

Autrement.—Si au lieu de faire tourner le rectangle auxiliaire ou le segment $M_{n_0}M_n$ autour de C_n nous le regardons fixe, et faisons tourner la droite CC_n autour de C (ce qui n'altère pas les positions relatives des points et des lignes, que nous considérons) le vecteur auxiliaire $C_nM_{n_0}$, tournant alors autour de M_{n_0}, seulement se confondra, en direction, avec ce segment, quand le cercle auxiliaire (CC_n) coupera ou touchera ce même segment prolongé indéfiniment. Ainsi la perpendiculaire $\varpi_{n_0}\omega$ sur le milieu ϖ_{n_0} de $C_nM_{n_0}$ devenant parallèle au vecteur roulant $m_2\omega$, il ne restera qu'à ramener les systèmes de points et de lignes dans leur véritable position, en faisant, pour cela, coïncider successivement avec le point C_n les points d'intersection, ou le point de tangence entre ce cercle auxiliaire et le segment considéré.

Donc, *la conique* (Ω) *aura à l'infini deux points imaginaires, deux points distincts* ou *coïncidents, selon que le cercle auxiliaire* (CC_n) *ne coupe pas, coupe* ou *touche le segment considéré.*

Si nous considérons l'autre segment $M'_{n_0}M'_n$ déterminant la conique (Ω'_n), nous arrivons pour cette conique à des résultats analogues à ceux que nous venons d'obtenir pour la première conique (Ω).

71. Ces principes posés, passons à considérer, en général, les différents cas où les coniques engendrées auront ou non des *points* et des *axes à l'infini,* ainsi que des *axes idéaux.*

Supposons d'abord que le cercle auxiliaire (CC_n) ne coupe pas le segment $M_{n_0}M_n$ déterminant la conique (Ω) (fig. 5). Dans ce cas *la conique* (Ω) *aura deux points imaginaires à l'infini, et ses axes seront tous deux réels.*

Considérons maintenant le cas où le cercle auxiliaire (CC_n) coupe le segment $M_{n_0}M_n$. Si les points d'intersection sont tous deux *intérieurs* ou *extérieurs* au segment considéré, c'est-à-dire s'ils sont tous deux sur ce segment, ou sur son prolongement (fig. 5 *d* et 5 *a*), *la conique* (Ω) *aura un axe réel et fini, sur la droite* CC_n *des centres des cercles directeurs, et l'autre axe sera idéal;* mais si l'un seul des points d'intersection est intérieur ou extérieur à ce même segment (fig. 5 *b*), *l'axe de la conique considérée, situé sur la droite* CC_n *des centres des cercles directeurs, sera au contraire, idéal et l'autre réel et fini, cette conique ayant dans tous les cas deux points réels distincts à l'infini.*

Enfin si ces points d'intersection réels situés à l'infini deviennent *coïncidents*, c'est-à-dire si le cercle auxiliaire touche soit *intérieurement* soit *extérieurement* le segment $M_{n_0}M_n$ (fig. 5 *e* et 5 *c*), *l'axe de la conique situé sur la droite* CC_n *des centres des cercles directeurs aura l'un de ses points sommets à l'infini,* ou *représenté par ces points* coïncidents, *et l'autre axe se trouvera tout à fait à l'infini.*

Si nous considérons dans le rectangle auxiliaire le côté $M'_{n_0}M'_n$ ou segment déterminant la seconde conique (Ω'_n), nous arrivons, comme nous savons, aux mêmes résultats.

Cela étant, si nous regardons la sécante commune aux cercles directeurs rejetée à l'infini, qui forme, conjointement avec leur sécante située à distance finie, un cercle directeur *évanouissant*, que nous avons nommé *aperantique* (n.º 69), il résulte pour les courbes du second ordre engendrées une classification, qui se présente d'elle-même, et qui consiste à les distinguer suivant qu'elles sont coupées par cette sécante rejetée à l'infini, ou sont coupées à l'infini par ce cercle directeur *aperantique* en deux points *imaginaires*, en deux points *réels* ou en deux points *coïncidents.*

À ce point de vue il y a lieu à distinguer les trois *genres* de coniques:

1.º Les *ellipses,* qui sont des courbes coupées à l'infini par le cercle directeur aperantique, ou par la sécante commune de l'infini, en deux points imaginaires; et, par suite, elles auront tous leurs points *propres* ou à distance *finie.*

2.º Les *hyperboles,* qui sont des courbes coupées à l'infini par ce cercle directeur ou par cette sécante, en deux points réels, c'est-à-dire en deux points *impropres*.

3.° Les *paraboles*, qui sont des courbes touchées à l'infini par ce même cercle, c'est-à-dire ayant deux points *impropres coïncidents*.

En considérant ces courbes par rapport à leurs axes, nous avons de même à distinguer les trois genres de coniques:

1.° Les courbes ayant les deux axes réels ou limitées dans tous les sens, *ellipse*.

2.° Les courbes ayant l'une axe réel et l'autre idéal, ou composées de quatre parties indéfinies, *hyperbole*.

3.° Les courbes ayant un axe infini et l'autre tout à fait à l'infini, ou composées de deux parties indéfinies, *parabole*.

72. Comme nous savons, les deux séries de cercles générateurs (ω'_n), (ω'_{n^3}), ..., et (ω), (ω_3), ..., des coniques (Ω'_n) et (Ω) (fig. 5, 5 *a*, 5 *b* et 5 *c*) ont pour centres radicaux respectivement les centres d'homothésie ou de similitude *directe* et *inverse* E'_n et E des cercles enveloppes (E') et (I'_n) relatifs aux cercles directeurs (E) et (I_n).

D'après cela, nous appellerons *conique directe* et *conique inverse* respectivement aux coniques *cyclomofocales* (Ω'_n) et (Ω), et, par suite, la première série de cercles générateurs sera dite *directe* et la seconde *inverse*.

De plus, en attendant à la génération simultanée de ces deux coniques au moyens des mêmes données, elles pourront aussi être nommées *coniques syzygocycliques*.

Le segment EE'_n déterminé par les centres radicaux direct et inverse E'_n et E pourra être appelé *segment auxiliaire interradical*, et le segment CC_n, déterminé par les centres de ces cercles enveloppes, étant rayon du cercle auxiliaire (CC_n), et conjugué harmonique de ce segment-là, sera dit le *segment auxiliaire intercentral* ou *radial*, que nous pouvons remplacer par ce cercle auxiliaire.

Ce segment radial CC_n et les segments auxiliaires directe et inverse $M'_{n_0}M'_n$ et $M_{n_0}M_n$, formant tous les éléments pour la classification des deux coniques syzygocycliques (Ω) et (Ω_n'), pourront être appelés les *segments diatactiques* ou *discriminants*, et l'ensemble de ces segments sera donc nommé le *terne diatactique* ou *discriminant* de ces coniques.

Observation. — Nous avons vu (n.° 61) que au couple de cercles directeurs (E), (I) (fig. 3) de deux coniques cyclomofocales (Σ), (Σ') répond toujours un autre couple de cercles directeurs (E_1), (I_1), d'où il résulte que ces deux coniques ont aussi une *double génération*, et, par suite, il en sera de même des coniques (Ω), (Ω'_n) (fig. 5, 5 *a*, 5 *b* et 5 *c*).

D'après cela, ce que nous venons de dire par rapport au *premier système* de cercles directeurs, de cercles générateurs, de segments auxiliaires, etc., etc., relatif aux coniques (Ω), (Ω'_n), est tout à fait applicable analoguement au *seconde système* de cercles directeurs, de cercles générateurs, de segments auxiliaires, etc., etc., relatif à ces mêmes coniques.

73. Comme tout *cercle générateur de rayon infini* ou *aperantique* est l'ensemble d'une tangente, commune aux cercles enveloppes, avec la droite parallèle rejetée à l'infini, on voit, donc, que chaque série de cercles générateurs présentera autant de cercles aperantiques qu'il y aura de *tangentes extérieures* ou *intérieures,* communes aux cercles enveloppes, selon que la série considérée sera *directe* ou *inverse.*

Observation.—Nous adopterons à la suite la dénomination de *tangente directe* et *inverse* de préférence à celle de tangente extérieure et intérieure, pour être en harmonie avec la dénomination que nous avons donnée aux deux points de concours de ces couples de tangentes communes, lesquels représentent, comme nous savons, deux des *omblics* ou *points omblicaux* des cercles enveloppes (E'), (I'_n).

74. Supposons (fig. 5 *a* et 5 *b*) que les cercles enveloppes (E') et (I'_n) sont extérieures l'un à l'autre, et soient $m_a E n_a$ et $m'_a E n'_a$ leurs tangentes communes inverses, ou passant par le centre radical inverse E, et dont les points de contact avec ces cercles sont respectivement les couples de points m_a, n_a et m'_a, n'_a.

D'après cela, l'ensemble de ces tangentes avec leurs droites parallèles à l'infini détermineront les deux *cercles générateurs aperantiques* $(E\,\infty)$ et $(E\,\infty')$, qui coupent aux points S_a et S'_a la sécante $\theta\theta_0$, commune aux cercles directeurs (E) et (I_n), ou le cercle directeur aperantique de la conique considérée (Ω). Or ces tangentes se confondant en même temps avec les sécantes communes aux cercles directeurs (E) et (I_n), et à ces cercles générateurs aperantiques, *les perpendiculaires* $S_a\,\infty$ *et* $S'_a\,\infty'$ *à ces sécantes, aux points* S_a *et* S'_a, *où elles coupent* $\theta\theta_0$, *étant des rayons de ces mêmes cercles, seront, par suite, deux tangentes à la conique* (Ω), *dont les points de contact se trouvent à l'infini,* ou *les asymptotes de cette conique.*

En faisant varier le cercle générateur (ω) de (Ω) jusqu' à ce qu'il vienne se confondre avec le cercle générateur aperantique $(E\,\infty)$, les cordes $b\beta$ et $\beta_{n_0}\beta'_n$, communes à ce cercle-là et aux cercles (E) et (I_n), se confondront avec la secante $m_a S_a n_a$, et alors leur point d'intersection φ_1 tombera sur le point S_a.

D'ailleurs le pôle φ_ω de la sécante $\theta\theta_0$, commune aux cercles directeurs, relatif au cercle (ω) se trouvant rejeté à l'infini, il en résulte que l'intersection σ_0 de la droite indéfinie $S_a\sigma_0\infty$, ou rayon du cercle aperantique $(E\,\infty)$ avec la droite CC_n, coïncidera avec le centre de la conique (Ω) (n.° 58); et, par suite, en supposant que le cercle (ω) vienne aussi se confondre avec le cercle aperantique $(E\,\infty')$, le rayon $S'_a\sigma_0\infty'$ de ce cercle passera de même par le centre de cette conique.

Donc, *les asymptotes d'une conique* (Ω) *s'entrecoupent à son centre, et, par conséquent, chacune de celles-ci est un diamètre conjugué à lui-même.*

En considérant dans les cercles enveloppes leurs tangentes communes directes, ou passant par le centre radical direct E'_n, nous obtiendrons de même très facilement les asymptotes de l'autre conique (Ω'_n), et, par suite, son centre.

Ainsi lorsque les cercles enveloppes sont extérieurs l'un à l'autre il y aura pour chacune des coniques syzygocycliques deux cercles générateurs aperantiques, et alors elles auront à l'infini deux points réels distincts: ce cas répondant parfaitement à celui où le cercle auxiliaire (CC_n) coupe les segments diatactiques ou discriminants $M_{n_0}M_n$ et $M'_{n_0}M'_n$ de ces coniques.

Lorsque les cercles enveloppes (E') et (I'_n), (fig. 5 *e* et 5 *c*) sont tangentes, leurs points de contact deviendront un centre radical direct E'_n (fig. 5 *e*) ou inverse E (fig. 5 *c*), suivant que ces cercles seront intérieurs ou extérieurs l'un à l'autre; et ainsi ils auront respectivement deux tangentes communes directes ou inverses *coïncidents,* ou bien l'une tangente commune directe $E'_n\infty$, ou inverse $E\infty$ *double* dont l'intersection avec la sécante commune aux cercles directeurs (E) et (I_n) se trouve à l'infini; d'où il résulte que les asymptotes de la conique respective seront rejetées à l'infini et parallèles à la droite CC_n des centres de ces cercles directeurs.

L'ensemble de chacune de ces tangentes avec sa droite parallèle à l'infini seront donc vraiment deux *cercles générateurs aperantiques doubles* ($E'_n\infty$) (fig. 5 *e*) et ($E\infty$) (fig. 5 *c*) coupant à l'infini le *cercle directeur aperantique double* (n.° 69); et, par suite, la conique relative au centre radical qui représente les points de contact des cercles enveloppes aura à l'infini un sommet de son axe situé sur la droite CC_n, lequel représentera deux points réels coïncidents: ce qui répond tout à fait au cas où le cercle auxiliaire (CC_n), touche le segment diatactique ou discriminant direct $M'_{n_0}M'_n$ ou inverse $M_{n_0}M_n$ de la conique respective.

Si les cercles enveloppes sont tout à fait intérieurs l'un à l'autre (fig. 5), leurs tangentes communes étant imaginaires, il en sera de même des cercles générateurs aperantiques des coniques engendrées (Ω'_n) et (Ω), qui, par suite, auront à *l'infini deux points imaginaires*. Ce cas revient donc à celui où le cercle auxiliaire (CC_n) ne coupe pas les segments auxiliaires diatactiques $M'_{n_0}M'_n$ et $M_{n_0}M_n$, des coniques respectives.

D'après cela nous pouvons aussi par la position des cercles enveloppes reconnaître le *genre* des coniques engendrées, et, par suite, ces cercles pourront être nommés *cercles diatactiques* ou *discriminants*, et leur ensemble sera le *couple diatactique* ou *discriminant*.

75. En considérant maintenant soit les ternes soit les couples diatactiques ou discriminants, voyons les différents cas qui auront lieu par rapport à la disposition de leurs éléments.

Nous avons, donc, à regarder d'une manière générale les cinq cas suivants:

1.° *L'extremité libre du segment radial, ou le cercle auxiliaire décrit par ce segment ne rencontre pas les autres deux segments diatactiques direct et inverse; ou bien les cercles diatactiques sont interieurs l'un à l'autre, et, par conséquent, seront imaginaires les cercles générateurs aperantiques.*

2.° *Ce cercle auxiliaire touche le segment direct et ne coupe pas le segment inverse, ou ce qui revient au même les cercles diatactiques sont tangents et intérieurs l'un à l'autre; et ainsi il y aura un cercle générateur aperantique double, et deux imaginaires.*

3.° *Le cercle auxiliaire coupe le segment direct et ne coupe pas le segment inverse, ou bien les cercles diatactiques sont sécants; et on aura deux cercles générateurs aperantiques réels et deux imaginaires.*

4.° *Le cercle auxiliaire coupe le segment direct et touche le se-*

gment inverse, ou bien les cercles diatactiques sont tangents, et extérieurs l'un à l'autre, et tous les cercles générateurs aperantiques seront réels, étant deux distincts et l'un double.

5.° *Le cercle auxiliaire rencontre les segments direct et inverse, ou ce qui revient au même les cercles diatactiques sont complétement extérieurs l'un à l'autre; et de là résulte qu'il y aura deux couples de cercles générateur aperantiques réels distincts.*

D'après cela nous avons ce théorème:

Théorème XXVIII. — *Quand deux coniques sont syzygocycliques, elles seront en general:*

1.° *Deux ellipses.* 2.° *Une parabole et une ellipse.* 3.° *Une hyperbole et une ellipse.* 4.° *Une hyperbole et une parabole.* 5.° *Deux hyperboles.*

76. Considérons le cas où deux cercles directeurs (E) et (I) des coniques syzygocycliques (Ω) et (Ω') s'entrecoupent réellement aux points λ et λ_0 (fig. 5), étant alors la corde commune $\lambda\lambda_0$ à ces cercles une corde principale réelle commune à ces coniques (n.° 62).

Si nous prenons un cercle générateur (ω) de la conique (Ω), la polaire $\varphi_2\varphi_\omega$E du centre radical φ_1 des cercles (E), (I) et (ω), passant par le centre radical E des cercles générateurs de la série considérée (n.° 63, théor. XIV), coupe orthogonalement en p_ω la tangente $\varphi_1\omega$ au point ω de cette conique (n.° 47 et 58).

Or, quand ce cercle générateur se réduira au point λ, les points ω et p_ω se confondront, et alors la tangente à la conique (Ω) en ce point λ sera perpendiculaire au segment Eλ, qui, par suite, sera la *normale* en ce même point, d'où il résulte que *le cercle directeur* (Eλ) *de la suite de cercles directeurs de cette conique, ayant la droite $\lambda\lambda_0$ pour sécante commune, aura un double contact avec cette même conique,* c'est-à-dire, *tout point de cette droite aura même polaire dans ces deux courbes, et ainsi ce cercle directeur sera en même temps cercle focal; le cercle enveloppe ou diatactique respectif se réduisant par suite au centre* E *de ce cercle.*

D'après cela cette propriété aura aussi lieu dans le cas où sera idéale la corde principale commune aux coniques syzygocycliques (Ω) e (Ω'), suivant laquelle ce cercle *directeur-focal* touchera *idéalement* la conique (Ω) (n.° 64).

D'ailleurs le cercle (Eλ) étant aussi un *cercle directeur double* de la suite des couples de *cercles directeurs isogoniques*, par rapport à la suite de cercles générateurs (ω), (ω_3), etc., de la conique (Ω), pourra être réel ou imaginaire (n.° 51 et 64).

Si nous regardons l'autre conique (Ω') (fig. 5) nous reconnaîtrons analoguement que le cercle directeur ($E'\lambda$) de la même suite de cercles directeurs sera également un cercle focal de cette conique, ayant, par suite, un double contact suivant la sécante $\lambda\lambda_0$, lequel sera idéale quand cette sécante deviendra *idéale*.

Puisque cette propriété est indépendente de la nature du couple de cercles directeurs donnés (E), (I), ou de la nature des coniques syzygocycliques, tout ce que nous venons de dire sera également applicable au cas des figures 3, 9, 10 et 11 relatives aux coniques (Σ) et (Σ').

Quand nous prenons la série de cercles directeurs ayant même axe radical que le second couple de cercles directeurs (I_1), (E_1) de ces coniques (Σ) et (Σ') (fig. 3, 9, 10 et 11), nous arrivons à des résultats tout à fait analogues.

(à suivre).

ÉTUDE DE GÉOMÉTRIE SEGMENTAIRE

PAR

M. MAURICE D'OCAGNE

Ingénieur des ponts et chaussées, à Paris

1. Soit Γ le cercle circonscrit au triangle ABC. Prenons sur ce cercle deux points M et N tels que la corde MN soit tout entière extérieure au triangle ABC. A chacun des côtés du triangle ABC on peut mener par les points M et N deux cercles tangents ayant l'un son point de contact entre les sommets correspondants, l'autre son point de contact en-dehors de ces sommets. On détermine donc ainsi trois points de contact sur les côtés du triangle et trois points de contact sur leurs prolongements; nous appellerons les premiers *points de contact intérieurs*, les seconds *points de contact extérieurs*. Cela posé, nous énoncerons les propriétés suivantes:

1.° *Les points de contact extérieurs sont en ligne droite* (*).

2.° *Les droites qui joignent les trois points de contact intérieurs aux sommets opposés sont concourantes.*

3.° *Un point de contact extérieur et les points de contact intérieurs situés sur les autres côtés sont en ligne droite.*

4.° *La droite qui joint un point de contact intérieur au sommet opposé et les droites qui joignent les points de contact extérieurs situés sur les deux autres côtés aux sommets opposés sont concourantes.*

2. La première propriété seule a besoin d'être démontrée; les trois autres en sont des conséquences immédiates. En effet, soient respectivement

$a, b, c,$ les points où la droite MN coupe les droites BC, CA, AB,

$\alpha, \beta, \gamma,$ les points de contact intérieurs situés sur BC, CA, AB,

$\alpha', \beta', \gamma',$ les points de contact extérieurs correspondants.

(*) Nous avons déjà remarqué cette première propriété dans une note publiée dans le *Journal de Mathématiques élémentaires et spéciales* (t. IV, 1880, p. 536), mais nous ne l'avons pas, à cet endroit, formulée d'une façon suffisamment précise.

On a $$\overline{a\alpha'}^2 = \overline{a\alpha}^2 = a\mathrm{M} \,.\, a\mathrm{N} = a\mathrm{B} \,.\, a\mathrm{C},$$

ce qui montre que les points α et α' sont conjugués harmoniques par rapport aux points B et C; de même β et β' sont conjugués harmoniques par rapport à C et A; γ et γ' par rapport à A et B.

Donc, si les points α', β', γ' sont en ligne droite, il en est de même de α, β, γ', et de α, β', γ, et de α', β, γ; de plus, les droites $\mathrm{A}\alpha$, $\mathrm{B}\beta$, $\mathrm{C}\gamma$ sont concourantes, ainsi que $\mathrm{A}\alpha'$, $\mathrm{B}\beta'$, $\mathrm{C}\gamma$, et que $\mathrm{A}\alpha$, $\mathrm{B}\beta'$, $\mathrm{C}\gamma'$, et que $\mathrm{A}\alpha'$, $\mathrm{B}\beta$, $\mathrm{C}\gamma'$. Tout cela résulte de théorèmes bien connus, et d'ailleurs presque intuitifs.

3. Tout revient donc à établir cette proposition: les points α', β', γ' sont en ligne droite. Voici comment on peut le faire:

L'égalité $\overline{\alpha' a}^2 = a\mathrm{B} \,.\, a\mathrm{C}$ peut s'écrire

$$\frac{\alpha' a}{a\mathrm{C}} = \frac{a\mathrm{B}}{\alpha' a};$$

de même

$$\frac{\beta' b}{b\mathrm{A}} = \frac{b\mathrm{C}}{\beta' b}, \qquad \frac{\gamma' c}{c\mathrm{B}} = \frac{c\mathrm{A}}{\gamma' c}.$$

Multiplions ces trois égalités membre à membre; il vient

$$(1) \qquad \frac{\alpha' a \,.\, \beta' b \,.\, \gamma' c}{a\mathrm{C} \,.\, b\mathrm{A} \,.\, c\mathrm{B}} = \frac{a\mathrm{B} \,.\, b\mathrm{C} \,.\, c\mathrm{A}}{\alpha' a \,.\, \beta' b \,.\, \gamma' c}.$$

Mais l'égalité $\overline{\alpha' a}^2 = a\mathrm{B} \,.\, a\mathrm{C}$ peut aussi s'écrire

$$(\alpha'\mathrm{B} - a\mathrm{B})^2 = a\mathrm{B}\,(a\mathrm{B} - \alpha'\mathrm{B} + \alpha'\mathrm{C});$$

effectuant et réduisant, on a

$$\alpha'\mathrm{B}\,(\alpha'\mathrm{B} - a\mathrm{B}) = a\mathrm{B} \,.\, \alpha'\mathrm{C},$$

ou $$\alpha'\mathrm{B} \,.\, \alpha' a = a\mathrm{B} \,.\, \alpha'\mathrm{C},$$

ou encore $$\frac{a\mathrm{B}}{\alpha' a} = \frac{\alpha'\mathrm{B}}{\alpha'\mathrm{C}};$$

de même, par permutation circulaire,

$$\frac{b\mathrm{C}}{\beta' b} = \frac{\beta'\mathrm{C}}{\beta'\mathrm{A}}, \qquad \frac{c\mathrm{A}}{\gamma' c} = \frac{\gamma'\mathrm{A}}{\gamma'\mathrm{B}}.$$

Multipliant les trois dernières égalités membre à membre, nous avons

$$(2)\qquad \frac{aB \cdot bC \cdot cA}{\alpha'a \cdot \beta'b \cdot \gamma'c} = \frac{\alpha'B \cdot \beta'C \cdot \gamma'A}{\alpha'C \cdot \beta'A \cdot \gamma'B}.$$

Le premier membre de (2) est le même que le second membre de (1). On a donc, en égalant le premier membre de (1) au second membre de (2),

$$(3)\qquad \frac{\alpha'a \cdot \beta'b \cdot \gamma'c}{aC \cdot bA \cdot cB} = \frac{\alpha'B \cdot \beta'C \cdot \gamma'A}{\alpha'C \cdot \beta'A \cdot \gamma'B}.$$

Multiplions (2) et (3) membre à membre; il vient

$$\frac{aB \cdot bC \cdot cA}{aC \cdot bA \cdot cB} = \left(\frac{\alpha'B \cdot \beta'C \cdot \gamma'A}{\alpha'C \cdot \beta'A \cdot \gamma'B}\right)^2.$$

Or, les trois points a, b, c appartenant à la droite MN, le premier membre de cette égalité est, en vertu du théorème des transversales, égal à l'unité; on a donc

$$\left(\frac{\alpha'B \cdot \beta'C \cdot \gamma'A}{\alpha'C \cdot \beta'A \cdot \gamma'B}\right)^2 = 1;$$

de plus, les points α', β', γ' étant par hypothèse, extérieurs aux côtés correspondants, les rapports $\frac{\alpha'B}{\alpha'C}$, $\frac{\beta'C}{\beta'A}$, $\frac{\gamma'A}{\gamma'B}$ sont positifs, leur produit est donc positif, et l'on a

$$\frac{\alpha'B \cdot \beta'C \cdot \gamma'A}{\alpha'C \cdot \beta'A \cdot \gamma'B} = 1,$$

ce qui prouve que les trois points α', β', γ' sont en ligne droite; le théorème est donc démontré dans son intégralité.

4. On peut interprêter ce théorème de diverses manières; ainsi on peut remarquer que les six points α, α', β, β', γ, γ' forment les six sommets d'un quadrilatère complet dont les diagonales sont $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$ et $\gamma\gamma'$. Remarquant que les points a, b, c sont les milieux respectifs de $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma$, on retombe sur cette propriété bien connue à savoir que les milieux des diagonales d'un quadrilatère complet sont en ligne droite.

Appliquant au système des points α, α', β, ... les propriétés connues du quadrilatère complet on obtient diverses conséquences assez remarquables. Nous en donnerons un exemple. On sait que les cercles décrits sur les trois diagonales d'un quadrilatère complet comme diamètres ont même axe radical. Ce théorème appliqué à la figure actuelle peut s'énoncer ainsi: *Une droite tout entière extérieure à un triangle coupe en trois points les prolongements des côtés de ces triangles. Si de chacun de ces points comme centre avec un rayon égal à la moyenne géométrique des segments déterminés sur le côté correspondant, on décrit des cercles, ces trois cercles ont même axe radical.*

5. Une déduction intéressante de notre théorème est celle que l'on obtient en le transformant par polaires réciproques, le cercle Γ étant pris pour cercle directeur. Voici ce à quoi l'on arrive:

Soit Γ le cercle inscrit dans le triangle ABC; en deux points M et N du cercle Γ, tels que la corde MN soit tout entière extérieure au triangle ABC, menons les tangentes μ et ν à ce cercle. Par chaque sommet du triangle ABC, on peut mener deux coniques tangentes aux droites μ et ν et ayant un foyer au centre O du cercle Γ; de plus en ce sommet, la tangente à l'une des coniques est intérieure au triangle, la tangente à l'autre conique lui est extérieure; ces deux tangentes sont d'ailleurs conjuguées harmoniques par rapport aux deux côtés correspondants. On a donc en tout, trois tangentes intérieures au triangle et trois tangentes extérieures. Cela posé, on a les propositions suivantes:

1.° *Les trois tangentes intérieures sont concourantes.*

2.° *Les tangentes extérieures coupent les côtés opposés en trois points qui sont en ligne droite.*

3.° *Une tangente intérieure et les tangentes extérieures issues des deux autres sommets sont concourantes.*

4.° *Une tangente extérieure et les tangentes intérieures issues des deux autres sommets coupent les côtés opposés en trois points qui sont en ligne droite.*

INTRODUCÇÃO A' THEORIA DAS FUNCÇÕES

POR

F. GOMES TEIXEIRA

(continuação)

CAPITULO II

PRINCIPIOS GERAES DA THEORIA DAS FUNCÇÕES. FUNCÇÕES ALGEBRICAS, LOGARITHMICAS, ETC.

I

Principios geraes

22.—Se uma variavel, real ou imaginaria, $u=X+iY$ está ligada a outra variavel, real ou imaginaria, $z=x+iy$ de tal modo que a cada valor determinado de z correspondam um ou mais valores determinados de u, diz-se que u é *funcção* de z. Quando isto se dá, representa-se u pelas notações

$$u=f(z),\ u=F(z),\ u=\varphi(z), \text{ etc.}$$

Do mesmo modo se u depende de muitas quantidades z_1, z_2, etc., diz-se que u é funcção d'estas quantidades, e representa-se pelas notações:

$$u=f(z_1,\ z_2,\ \ldots),\ u=F(z_1,\ z_2,\ \ldots), \text{ etc.}$$

A funcção $f(x)$ da variavel real x diz-se *continua* em

$x = a$, quando $f(a+h)$ tende para o limite $f(a)$ á medida que h tende para o limite zero, ou, em termos mais positivos, quando a cada valor de δ, por mais pequeno que seja, corresponde um valor h_1 de h, tal que a desigualdade

$$f(a+h) - f(a) < \delta$$

seja satisfeita por todos os valores de h, positivos ou negativos, inferiores em valor absoluto a h_1.

Mais geralmente, a funcção de uma variavel real ou imaginaria $z = x + iy$ diz-se continua em $x = a + ib$, quando a cada valor de δ, por mais pequeno que seja, corresponde um valor $h_1 + ik_1$ de $h + ik$, tal que a desigualdade

$$\text{mod}\,\{f[a + h + i(b+k)] - f(a+ib)\} < \delta$$

seja satisfeita por todos os valores de h e k inferiores em valor absoluto a h_1 e k_1.

A funcção $f(x+iy)$ é continua n'uma área dada quando é continua relativamente a todos os valores de x e y que representam coordenadas de pontos d'esta área.

A funcção $f(x+iy)$ é continua n'uma linha dada quando é continua relativamente a todos os valores de x e y que representam coordenadas de pontos d'esta linha.

A funcção $f(x+iy)$ póde ser *discontinua* no ponto (x, y) de tres modos: *ou passando n'este ponto de um valor a outro differindo do primeiro de uma quantidade finita, ou tomando n'este ponto um valor infinito, ou tornando-se n'este ponto indeterminada.*

Se no ponto $z = c$ a funcção $f(z)$ tem um valor infinito, mas a funcção $\frac{1}{f(z)}$ é continua na visinhança de zero, a discontinuidade toma o nome de *discontinuidade de primeira especie* e o ponto toma o nome de *pólo*.

Se porém no ponto $z = c$ as funcções $f(z)$ e $\frac{1}{f(z)}$ são ao mesmo tempo discontinuas, a discontinuidade toma o nome de *discontinuidade da segunda especie.*

Por exemplo, a funcção $\frac{1}{z-c}$ tem no ponto c um pólo.

Pelo contrario a funcção e^t, onde $t = \frac{1}{z-c}$ e $e > 1$, tem no ponto c uma discontinuidade da segunda especie, pois que, quando $z - c$ tende para zero passando por valores positivos, esta funcção tende para o infinito, e a funcção inversa tende para zero. Pelo contrario, se $z - c$ tende para zero passando por valores negativos, a funcção tende para zero, e a sua inversa tende para o infinito.

Ha funcções que são discontinuas ao longo de uma linha. Estas linhas, encontradas pela primeira vez por Reemann, tem o nome de *linhas de discontinuidade*. Está n'este caso a funcção y que representa o limite para que tende a fracção

$$\frac{1 + z^n}{1 - z^n}$$

quando n augmenta indefinidamente. Temos, com effeito, $y=1$ quando o módulo de z é menor do que a unidade, e $y = -1$ quando o módulo de z é maior do que a unidade. A circumferencia do raio igual á unidade é portanto uma linha de discontinuidade d'esta funcção.

Ha tambem funcções que são discontinuas em todos os pontos de uma área plana determinada. Por exemplo, a funcção y definida como limite correspondente a $n = \infty$ da expressão

$$1 + \frac{1}{z^m},$$

que dá $y = \infty$ quando o módulo de z é menor do que a unidade, e $y = 1$ quando o módulo de z é maior do que a unidade, de modo que a funcção é discontinua no interior do circulo do raio igual á unidade.

Da definição de continuidade decorrem immediatamente as seguintes proposições:

1.ª — *A somma de funcções continuas no ponto* **z** *é uma funcção continua no mesmo ponto.*

Com effeito, sendo $\varphi(z)$ e $\psi(z)$ estas funcções e $f(z)$ a sua somma, e chamando h o augmento real ou imaginario de z, teremos

$$f(z+h) - f(z) = \varphi(z+h) - \varphi(z) + \psi(z+h) - \psi(z).$$

Mas, por serem $\varphi(z)$ e $\psi(z)$ funcções continuas no ponto z, ha sempre um valor h_1 tal que a desigualdade

$$\text{mod}\,\{\varphi(z+h) - \varphi(z)\} < \tfrac{1}{2}\delta$$

é satisfeita por todos os valores de h inferiores a h_1, e ha sempre um valor h_2 tal que a desigualdade

$$\text{mod}\,\{\psi(z+h)-\psi(z)\}<\tfrac{1}{2}\delta$$

é satisfeita por todos os valores de h inferiores a h_2.

Logo a desigualdade (n.º 9 — 1.º)

$$\text{mod}\,\{f(z+h)-f(z)\}<\delta$$

será satisfeita por todos os valores de h inferiores a h_1 e h_2, e a funcção $f(z)$ será portanto continua.

2.ª — *O producto de funcções continuas no ponto* **z** *é uma funcção continua no mesmo ponto.*

Com effeito, suppondo

$$f(z)=\varphi(z)\,.\,\psi(z),$$

e portanto

$$f(z+h)=\varphi(z+h)\,.\,\psi(z+h),$$

temos a identidade

$$\begin{aligned}f(z+h)-f(z)&=\psi(z+h)\,[\varphi(z+h)-\varphi(z)]\\&\quad+\varphi(z)\,[\psi(z+h)-\psi(z)].\end{aligned}$$

Mas por ser a funcção $\varphi(z)$ continua no ponto z, ha sempre um valor h_1 tal que a desigualdade

$$\text{mod}\,\{\varphi(z+h)-\varphi(z)\}<\delta'$$

é satisfeita por todos os valores de h inferiores a h_1, por mais pequeno que seja δ'.

Chamando pois M o maior valor do módulo de $\psi(z+h)$ no intervallo de $+h_1$ a $-h_1$ vem

$$M.\,\text{mod}\,[\varphi(z+h)-\varphi(z)]<M\,\delta',$$

e *à fortiori*

$$\text{mod}\,\{\psi(z+h)\,[\varphi(z+h)-\varphi(z)]\}<M\,\delta'=\tfrac{1}{2}\delta.$$

Esta desigualdade é pois satisfeita por todos os valores de h inferiores a h_1, por mais pequeno que seja o valor que se dê a δ.

Do mesmo modo se acha que a desigualdade

$$\operatorname{mod} \left| \varphi(z) \left[\psi(z+h) - \psi(z) \right] \right| < \tfrac{1}{2} \delta$$

é satisfeita por todos os valores de h inferiores a h_2, por mais pequeno que seja δ.

Logo a desigualdade (n.º 9 — 1.º)

$$\operatorname{mod} \left| f(z+h) - f(z) \right| < \delta$$

é satisfeita por todos os valores de h inferiores a h_1 e h_2, e portanto a funcção $f(z)$ é continua no ponto z.

3.ª — *O quociente de duas funcções continuas no ponto* **z** *é uma funcção continua no mesmo ponto, excepto se* **z** *é uma raiz do denominador da fracção considerada.*

Com effeito, suppondo

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

e portanto

$$f(z+h) = \frac{\varphi(z+h)}{\psi(z+h)},$$

a identidade

$$f(z+h) - f(z) = \frac{1}{\psi(z+h)} \left[\varphi(z+h) - \varphi(z) \right]$$
$$- \frac{\varphi(z)}{\psi(z)\,\psi(z+h)} \left[(\psi(z+h) - \psi(z) \right]$$

mostra, como no caso anterior, que ha sempre um valor h_1 tal que as desigualdades

$$\operatorname{mod} \left| \frac{1}{\psi(z+h)} \Big(\varphi(z+h) - \varphi(z) \Big) \right| < \tfrac{1}{2} \delta$$
$$\operatorname{mod} \left| \frac{\varphi(z)}{\psi(z)\,\psi(z+h)} \Big(\psi(z+h) - \psi(z) \Big) \right| < \tfrac{1}{2} \delta,$$

e portanto a desigualdade

$$\text{mod}\,\{ f(z+h) - f(z) \} < \delta$$

são satisfeitas por todos os valores de h inferiores a h_1, no caso de $\psi(z)$ não se tornar nulla.

Nos pontos que satisfazem a equação $\psi(z) = 0$, a funcção $f(z)$ torna-se indeterminada ou infinita, segundo o valor que tiver $\varphi(z)$ n'estes mesmos pontos.

4.ª — *A raiz de qualquer grão de uma funcção continua é tambem continua.*

Com effeito, supponde

$$f(z) = \sqrt[m]{\varphi(z)}$$

e m inteiro positivo, temos

$$\varphi(z) = [f(z)]^m$$

$$\varphi(z+h) = [f(z) + f(z+h) - f(z)]^m$$

$$= [f(z)]^m + m\,[f(z+h) - f(z)]\,[f(z)]^{m-1}\,(1+P),$$

chamando P a somma

$$P = \frac{m-1}{2}\,[f(z+h) - f(z)]\,[f(z)]^{-1} + \dots$$

Vem portanto a igualdade

$$f(z+h) - f(z) = \frac{\varphi(z+h) - \varphi(z)}{m\,[f(z)]^{m-1}\,(1+P)}$$

donde se conclue, como nos casos anteriores, que a funcção $f(z)$ é continua quando $\varphi(z)$ o é.

***23.** — O imaginario $f(x+iy) = X + iY$ póde ser representado pelo ponto cujas coordenadas são X e Y, do mesmo modo que $x + iy$ póde ser representado pelo ponto cujas coordenadas são x e y. Se a x e a y dermos valores que satisfaçam á equação $F(x, y) = 0$, isto é, que representem as coordenadas dos pontos da curva que tem esta equação, os valores de X e Y correspondentes representarão as coordenadas de pontos de outra curva. A esta segunda curva chama Gauss *imagem* da primeira. O estudo da correspondencia entre as duas curvas é muito importante para o estudo das funcções porque conduz a propriedades caracteristicas d'estas funcções, como vamos vêr. (*)

Consideremos, por exemplo, a funcção

$$u = f(z) = (z-a)(z-b)\ldots(z-l)(z-a')(z-b')\ldots(z-l').$$

Marquemos n'um plano os pontos $a, b, c, \ldots l, a', b', c', \ldots l'$; o ponto z descreva uma curva fechada, tendo dentro os pontos $a, b, c, \ldots$, e fóra os outros $a', b', \ldots l'$.

Chamando ρ, ρ', ρ'' etc. os módulos das differenças $z-a$, $z-b, \ldots z-l, z-a', z-b'$, etc. e $\theta, \theta', \ldots$ os seus argumentos, vem

$$z - a = \rho\,(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$$

$$z - b = \rho'\,(\cos\theta' + i \operatorname{sen}\theta')$$

....

e portanto

$$u = \rho\rho'\rho'' \ldots [\cos(\theta + \theta' + \ldots) + i \operatorname{sen}(\theta + \theta' + \ldots)].$$

Notemos agora que, sendo A e M os pontos que representam os imaginarios a e z, o angulo θ é representado (fig. 6.ª) por MAx'. Com effeito, pondo $z = x + iy$, e $a = \alpha + i\beta$. teremos

$$z - a = x - \alpha + i\,(y - \beta) = AP + iMP,$$

e portanto (9)

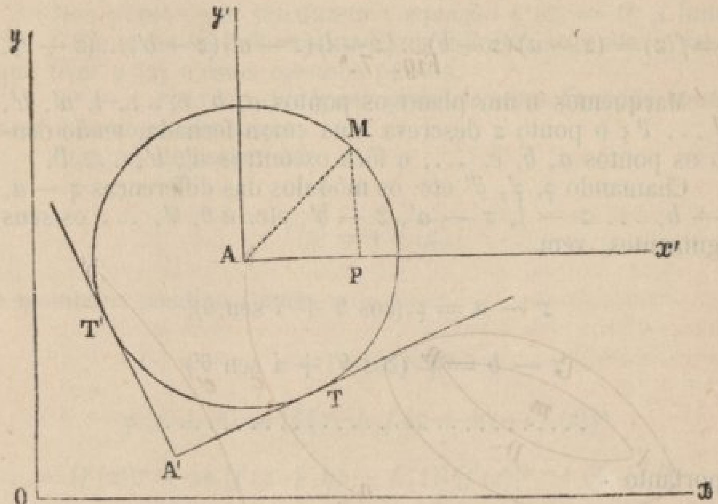
$$\operatorname{tang}\theta = \frac{MP}{AP} = \operatorname{tang} MAx'.$$

Logo, quando M descreve a curva, a linha AM gyra á roda do ponto A descrevendo um angulo igual a 2π, e portanto o angulo θ augmenta de 2π. O mesmo se diz a respeito

(*) M. Hermite—*Cours d'Analyse*—pag. 25.

dos outros pontos correspondentes a b, c, etc., que estão dentro da curva.

Fig. 6.ª



Pelo contrario a linha $A'M$ correspondente ao ponto A' exterior á curva e que representa o imaginario a', descreve, quando z descreve a curva, um angulo que augmenta desde $TA'x'$ até $T'A'x'$ e depois diminue outra vez até tomar o valor $TA'x'$. Logo o argumento de $z - a'$ retoma o primeiro valor quando z volta á primitiva posição. O mesmo acontece com os outros pontos exteriores á curva.

Conclue-se de tudo isto que o argumento de u, que é igual a $\theta + \theta' + \ldots$, augmenta de tantas vezes 2π quantas são as raizes de $f(z) = 0$ que se representam por pontos collocados dentro da curva. Veremos adiante uma applicação importante d'este principio.

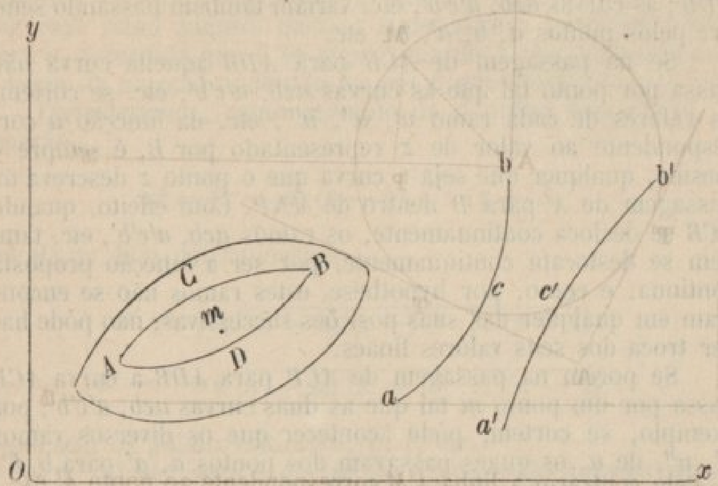
***24.** — Passando á doutrina geral, vejamos qual a influencia do caminho seguido pela variavel z sobre o valor de funcção d'esta variavel.

Seja

$$u = f(z) = X + iY$$

uma funcção continua dentro da área cujo contôrno é MNP (fig. 7.ª). Notemos primeiro que, se n'esta funcção a cada valor de z corresponderem muitos valores de u, podemos considerar esta funcção como equivalente a outras tantas funcções continuas u', u'', u''', etc., cada uma das quaes tem um unico valor correspondente a cada valor de z.

Fig. 7.ª



Com effeito, seja n o numero de valores de u que correspondem, em geral, a cada valor de z, podendo haver valores particulares de z, mas em numero determinado, a que correspondam menos do que n valores de u.

Se a z se dá o valor z_0 representado por A, os valores correspondentes de u, que são em numero de n, serão representados na figura pelos pontos a, a', etc. Se a z se dá o valor z_1 os valores correspondentes de u serão representados por n pontos que, por ser a funcção u continua, podem ser collocados tão proximos quanto se queira dos pontos a, a', etc., para o que basta dar a z_1 um valor tão proximo de z_0 quanto se queira. Continuando do mesmo modo, de maneira que z descreve a curva ACB, obtém-se n series de pontos formando os n ramos de curva acb, $a'c'b'$, etc. Os valores de u correspondentes a cada um d'estes ramos de curva formam pois uma funcção continua que tem um unico valor correspondente a cada valor de z, e a que se chama *ramo* da funcção considerada.

Os valores particulares de z a que correspondem menos do que n valores de u, dão pontos em que os ramos das curvas precedentes se cortam, visto que na visinhança d'estes pontos a funcção adquire outra vez n valores. Os valores correspondentes dos ramos da funcção são iguaes.

Posto isto, supponhamos que a curva ACB, descripta por z, varia, passando sempre por A e por B, até tomar a posição ADB; as curvas acb, $a'c'b'$, etc. variam tambem passando sempre pelos pontos a, b, a', b', etc.

Se na passagem de ACB para ADB aquella curva não passa por ponto tal que as curvas acb, $a'c'b'$, etc. se cortem, os valores de cada ramo u', u'', u''', etc. da funcção u correspondente ao valor de z representado por B, é sempre o mesmo, qualquer que seja a curva que o ponto z descreva na passagem de A para B dentro de MNP. Com effeito, quando ACB se desloca continuamente, os ramos acb, $a'c'b'$, etc. tambem se deslocam continuamente, por ser a funcção proposta continua, e como, por hypothese, estes ramos não se encontram em qualquer das suas posições successivas, não póde haver troca dos seus valores finaes.

Se porém na passagem de ACB para ADB a curva ACB passa por um ponto m tal que as duas curvas acb, $a'c'b'$, por exemplo, se cortem, póde acontecer que os diversos ramos u', u'', de u, os quaes passavam dos pontos a, a' para b, b', quando z descrevia a curva ACB, passem agora dos pontos a, a', para b', b quando z descreve a curva ADB; isto é, póde acontecer que o ramo de u que no primeiro caso deu o valor b dê agora o valor b', e vice-versa. Com effeito, de a póde ir-se tanto para b como para b', seguindo curvas continuas, quando se passa pela intersecção das curvas acb e $a'c'b'$.

O ponto m chama-se *ponto critico*, ou *ponto de ramificação*. As funcções que dentro do contôrno MNP não tem pontos criticos, têem o nome de funcções *uniformes* na área dada. As outras têem o nome de *funcções multiformes*. As funcções que têem um valor unico, qualquer que seja z, são uniformes em todo o plano.

Vê-se pois que entre as funcções uniformes e multiformes ha uma differença importante. No primeiro caso o caminho seguido pela variavel z na passagem de A para B não tem influencia sobre o valor de cada ramo da funcção. No segundo caso, o valor de cada ramo da funcção póde variar com o caminho seguido pela variavel.

Do que temos dito conclue-se ainda que, se z descreve a curva fechada $ACBD$, e na área limitada por este contôrno não existe ponto critico, um ramo qualquer da funcção u toma o valor u_0 com que partiu cada vez que volta á primeira posição A. No caso porém de dentro do contôrno haver ponto critico, este ramo póde tomar o valor u'_0 correspondente ao valor inicial de outro ramo da funcção.

Com effeito, no primeiro caso, o ramo da funcção que principia por u_0 tem no ponto C o mesmo valor u_1, quer z descreva a linha $ADBC$, quer descreva a linha AC; e o valor que este ramo adquire quando z descreve a linha AC tende para u_0 á medida que C se approxima de A. No segundo caso o ramo da funcção póde não ter em C um unico valor.

Consideremos, como exemplo da doutrina precedente, a funcção

$$u^2 = (z-a)(z-b)\ldots(z-l),$$

que dá as duas determinações

$$u' = +\sqrt{(z-a)(z-b)\ldots(z-l)}$$

$$u'' = -\sqrt{(z-a)(z-b)\ldots(z-l)},$$

e que tem os pontos criticos a, b, c, etc.

Um calculo semilhante ao do exemplo do numero anterior dá

$$u' = +\sqrt{\rho\rho'\ldots}\,[\cos\tfrac{1}{2}(\theta+\theta'+\ldots)+i\,\mathrm{sen}\,\tfrac{1}{2}(\theta+\theta'\ldots)]$$

$$u'' = -\sqrt{\rho\rho'\ldots}\,[\cos\tfrac{1}{2}(\theta+\theta'+\ldots)+i\,\mathrm{sen}\,\tfrac{1}{2}(\theta+\theta'+\ldots)].$$

Quando z descreve a curva fechada $ADBC$, u descreve uma curva com dous ramos que se cortam nos pontos a, b, c, etc.

Suppondo que o ponto a está fóra do contôrno, vê-se, como no exemplo citado, que depois de z dar uma volta $ADBCA$, θ toma o mesmo valor com que partiu. E como o mesmo se diz de θ', θ'', etc., se os pontos b, c, etc. estão tambem fóra do contôrno, segue-se que u' volta ao valor u'_0 com que partiu. Se porém dentro do contôrno está o ponto a, θ augmenta de 2π, logo o argumento de u' augmenta de π e o signal de u' muda. Portanto, a determinação de u que principiou por u'_0 acaba por $- u'_0$. que é o valor inicial de outra determinação u''.

Se dentro do contôrno houver dous pontos criticos a e b, θ e θ' variam cada um de 2π, logo o argumento de u' varia de 2π, e portanto conserva o mesmo valor e o mesmo signal, que tinha no principio.

Em geral, se dentro do contôrno houver k pontos criticos, o argumeuto de u' varia de $k\pi$, e cada ramo de u conservará no fim de uma volta de z o mesmo valor que á partida, ou o mesmo valor com signal contrario, segundo fôr k par ou impar.

Postos estes principios geraes, passemos ao estudo das funcções mais usadas.

II

Funcções algebricas

25. — Diz-se que u é funcção algebrica de z quando estas variaveis estão ligadas pela equação

$$\Sigma A z^g u^l = 0,$$

onde o primeiro membro representa um polynomio inteiro relativamente a u e z que supporemos do grão m relativamente a u.

26. — Vamos principiar o estudo das funcções algebricas pela *funcção inteira*, isto é, pela funcção

$$u = f(z) = A_0 z^n + A_1 z^{n-1} + \ldots + A_n,$$

onde n é um numero inteiro positivo, e A_0, A_1, etc. são constantes reaes ou imaginarias.

I — A cada valor de z corresponde um unico valor de u, logo a funcção inteira é uniforme em todo o plano.

II — Mudando z em $z + h$, temos

$$f(z+h) = A_0 (z+h)^n + A_1 (z+h)^{n-1} + \ldots$$
$$+ A_k (z+h)^{n-k} + \ldots + A_{n-1} (z+h) + A_n,$$

ou desenvolvendo as potencias inteiras do binomio $z + h$ e ordenando o resultado segundo as potencias de h,

$$f(z+h) = A_0 z^n + A_1 z^{n-1} + \ldots + A_{n-1} z + A_n$$
$$+ h(n A_0 z^{n-1} + (n-1) A_1 z^{n-2} + \ldots + A_{n-1})$$
$$+ \frac{h^2}{2} (n(n-1) A_0 z^{n-2} + (n-1)(n-2) A_1 z^{n-3} + \ldots + A_{n-2})$$

$$+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$+ \frac{h^k}{1 \,.\, 2 \dots k} \left((n_k) A_0 z^{n-k} + (n-1)_k A_1 z^{n-k-1} + \dots \right)$$

$$+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$+ A_0 h^n,$$

pondo

$$(n)_k = n\,(n-1) \dots (n-k+1), \text{ etc.}$$

Representando os coefficientes de h, $\frac{1}{2} h^2$, $\frac{1}{2.3} h^3$, etc. por $f'(z,)$ $f''(z)$, $f'''(z)$, etc., vem a formula

$$f(z+h) = f(z) + h\,f'(z) + \frac{h^2}{2} f''(z) + \dots$$

$$+ \frac{h^k}{1 \,.\, 2 \dots k} f^{(k)}(z) + \dots + \frac{h^n}{1 \,.\, 2 \dots n} f^{(n)}(z),$$

que tem o nome de *formula de Taylor*.

As funcções $f'(z)$, $f''(z)$, etc. são respectivamente do grão $n-1$, $n-2$, etc., e a sua lei de formação é dada pela formula seguinte:

$$f^{(k)}(z) = (n)_k A_0 z^{n-k} + (n-1)_k A_1 z^{n-k-1} + \dots + A_{n-k}$$

A estas funcções dá-se respectivamente os nomes de *derivada de primeira ordem*, de *derivada de segunda ordem*, etc. da funcção $f(z)$.

Da comparação das expressões $f'(z)$, $f''(z)$, etc., ou antes da comparação da formula precedente com a correspondente a $k+1$:

$$f^{(k+1)}(z) = (n)_{k+1} A_0 z^{n-k-1} + (n-1)_{k+1} A_1 z^{n-k-2} + \dots$$

$$= (n)_k\,(n-k)\,A_0 z^{n-k-1} + (n-1)_k\,(n-k-1)\,A_1 z^{n-k-2} + \dots$$

conclue-se a seguinte regra para formar as derivadas successivas de $f(z)$:

Multiplique-se em cada termo o expoente de **z** *pelo coefficiente e diminua-se o expoente de uma unidade.*

Por exemplo, no caso de

$$f(z) = z^5 - 3z^4 + 4z^2 - 7$$

vem

$$f'(z) = 5z^4 - 12z^3 + 8z$$

$$f''(z) = 20z^3 - 36z^2 + 8$$

etc.

III — A funcção inteira é composta de sommas, productos e potencias de funcções continuas, logo (n.° 22 — 1.ª, 2.ª, 3.ª) *é continua em todo o plano.*

IV — Toda a funcção inteira é um producto de n factores do primeiro grão:

$$f(z) = A_0 (z-a)^\alpha (z-b)^\beta \ldots (z-l)^\gamma,$$

onde a, b, ... l são as raizes da equação $f(z) = 0$. Este theorema é bem conhecido da theoria das equações, e em breve o demonstraremos.

27. — Em seguida ás funcções inteiras vem naturalmente as *funcções raccionaes fraccionarias*, isto é, as funcções da fórma:

$$u = f(z) = \frac{\alpha_0 z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \ldots + \alpha_n}{a_0 z^p + a_1 z^{p-1} + \ldots + a_p}.$$

I — Suppondo $n > p$, póde effectuar-se a divisão do numerador pelo denominador e reduzir d'este modo u á fórma

$$u = F(z) + \frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

onde $F(z)$, $\varphi(z)$ e $\psi(z)$ são funcções inteiras, sendo o grão de $\varphi(z)$ menor de que o grão de $\psi(z)$.

Decompondo $\psi(z)$ em factores, o que dá

$$\psi(z) = (z-a)^\alpha (z-b)^\beta \ldots (z-l)^\gamma,$$

a fracção $\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ é susceptivel da decomposição seguinte:

$$\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{A_1}{z-a} + \frac{A_2}{(z-a)^2} + \ldots + \frac{A_\alpha}{(z-a)^\alpha}$$

$$+ \frac{B_1}{z-b} + \frac{B_2}{(z-b)^2} + \ldots + \frac{B_\beta}{(z-b)^\beta}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{L_1}{(z-l)} + \frac{L_2}{(z-l)^2} + \ldots + \frac{L_\gamma}{(z-l)^\gamma},$$

onde $A_1, B_1, \ldots A_2, B_2, \ldots$ são quantidades constantes.

Demonstra-se esta proposição importante do modo seguinte:

Podemos escrever a igualdade

$$(a) \ldots \quad \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{A_\alpha}{(z-a)^\alpha} + \frac{\varphi_1(z)}{(z-a)^{\alpha-1}\psi_1(z)},$$

onde é

$$\psi_1(z) = (z-b)^\beta \ldots (z-l)^\gamma,$$

e onde $\varphi_1(z)$ é uma funcção inteira de grão inferior ao de $\varphi(z)$.

Com effeito, reduzindo-a ao mesmo denominador e igualando os numeradores, vem

$$\varphi(z) = A_\alpha \psi_1(z) + (z-a)\varphi_1(z),$$

o que dá

$$\varphi_1(z) = \frac{\varphi(z) - A_\alpha \psi_1(z)}{z-a}.$$

Temos assim uma equação para determinar $\varphi_1(z)$ de modo que a igualdade considerada (a) tenha logar; mas como $\varphi(z)$ deve ser inteiro, é necessario que se determine A_α de modo que seja nullo o resto da divisão de $\varphi(z) - A_\alpha \psi_1(z)$ por $z - a$. Para isso, chamando Q o quociente d'esta divisão e R o resto, teremos

$$\varphi(z) - A_\alpha \psi_1(z) = Q(z-a) + R,$$

o que dá

$$\varphi(a) - A_\alpha \psi_1(a) = R = 0,$$

e portanto

$$A_\alpha = \frac{\varphi(a)}{\psi_1(a)}.$$

Fica assim demonstrada a igualdade (a), determinada a quantidade A_α, e determinada a funcção $\varphi_1(z)$, cujo grão é pois inferior ao de $\varphi(z)$.

Do mesmo modo obtemos

$$\frac{\varphi_1(z)}{(z-a)^{\alpha-1}\psi_1(z)} = \frac{A_{\alpha-1}}{(z-a)^{\alpha-1}} + \frac{\varphi_2(z)}{(z-a)^{\alpha-2}\psi_1(z)}.$$

Continuando acha-se finalmente a igualdade

$$\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{A_\alpha}{(z-a)^\alpha} + \frac{A_{\alpha-1}}{(z-a)^{\alpha-1}} + \dots + \frac{A_1}{z-a} + \frac{\varphi_\alpha(z)}{\psi_1(z)}.$$

Depois applica-se a $\frac{\varphi_\alpha(z)}{\psi_1(z)}$ o mesmo processo que se applicou a $\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, e continua-se do mesmo modo até chegar á decomposição annunciada.

Pelo processo anterior determina-se as constantes A_{α}, $A_{\alpha-1}, \ldots A_1, B_{\beta}, B_{\beta-1}, \ldots$, mas, attendendo á importancia da questão, vamos expôr um processo mais simples para esta determinação.

Pondo na igualdade precedente $z = a + h$, vem

$$\frac{\varphi(a+h)}{h^{\alpha}\psi_1(a+h)} = \frac{A_{\alpha}}{h^{\alpha}} + \frac{A_{\alpha-1}}{h^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_1}{h} + \frac{\varphi_{\alpha}(a+h)}{\psi_1(a+h)},$$

ou

$$\frac{\varphi(a+h)}{\psi_1(a+h)} = A_{\alpha} + A_{\alpha-1}h + \ldots + A_1 h^{\alpha-1} + \frac{h^{\alpha}\varphi_{\alpha}(a+h)}{\psi_1(a+h)}.$$

Este resultado mostra que para achar $A_{\alpha}, A_{\alpha-1}, \ldots A_1$ basta dividir $\varphi(a+h)$ por $\psi_1(a+h)$, tendo o cuidado de ordenar primeiro estes polynomios segundo as potencias de h. Os coefficientes das primeiras α potencias de h no quociente são as constantes pedidas.

Devemos observar que na formação de $\frac{\varphi(a+h)}{\psi_1(a+h)}$ é escusado escrever os termos que contêem potencias de h superiores a $\alpha - 1$, pois que estes termos não influem no quociente.

Do mesmo modo se determina as outras constantes B_1, $B_2 \ldots$ dividindo $\varphi(b+h)$ por $\frac{\psi(b+h)}{h^{\beta}}$, etc.

Exemplo.— Decomponhamos por este processo a fracção:

$$\frac{x^2 - 3x + 5}{(x-1)^4(x-2)x}.$$

Pondo n'esta fracção $x = a + h = 1 + h$, vem

$$\frac{\varphi(1+h)}{\psi_1(1+h)} = \frac{3 - h + h^2}{-1 + h^2} = -3 + h - 4h^2 + h^3 + \frac{4h^4 - h^5}{h^2 - 1};$$

logo teremos

$$A_4 = -3,\ A_3 = 1,\ A_2 = -4,\ A_1 = 1.$$

Do mesmo modo, pondo $x = 2 + h$, vem

$$\frac{\varphi(2+h)}{\psi_1(2+h)} = \frac{(2+h)^2 - 3(2+h) + 5}{(1+h)^4(2+h)},$$

que, approveitando só a parte independente de h no numerador e no denominador, visto que $x - 2$ entra na fracção proposta no primeiro gráo, dá $\frac{3}{2}$. Logo temos

$$B_1 = \tfrac{3}{2}.$$

Do mesmo modo se acha $C_1 = -\frac{5}{2}$.

Temos pois

$$\frac{x^2 - 3x + 5}{(x-1)^4(x-2)x} = \frac{1}{x-1} - \frac{4}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^3} - \frac{3}{(x-1)^4}$$
$$+ \frac{\frac{3}{2}}{x-2} - \frac{\frac{5}{2}}{x}.$$

Ha muitos outros methodos para fazer a decomposição das fracções raccionaes, e ha mesmo formulas que dão directamente a expressão analytica das constantes A_α, $A_{\alpha-1}$, etc. Póde vêr-se alguns methodos e formulas na nossa memoria intitulada—*Sur la décomposition des fractions rationnelles*. (*)

II — Vejamos agora se a funcção considerada é ou não continua.

A primeira parte $F(z)$ é continua por ser uma funcção inteira. A outra parte $\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ é a somma de fracções da fórma $\frac{A}{(z-a)^k}$, onde k é inteiro; logo é continua (n.° 22 — 3.ª) em todos os pontos, excepto nos pontos $z = a, b, c, \ldots l$.

Concluiremos pois que a *funcção raccional fraccionaria é uniforme e continua em todo o plano, excepto nos pontos correspondentes ás raizes do denominador. Estes pontos são pólos da funcção.*

(*) *Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas* — tomos I e II (Coimbra).

28. — O estudo geral das funcções algebricas, que tem sido objecto de trabalhos importantes de muitos geómetras eminentes, não póde ser aqui feito de uma maneira completa; limitar-nos-hemos pois a mostrar que estas funcções são multiformes, a procurar o numero dos seus ramos, e a vêr a natureza de seus pontos singulares. O estudo do valor que toma qualquer ramo da funcção em vista do caminho seguido pela variavel não será aqui feito senão em alguns casos particulares.

I — *Theorema 1.º — Toda a funcção algebrica* u *de* z, *dada por uma equação* f (u, z) = 0 *do grão* n *relativamente a* u, *tem* n *valores.*

Tem-se dado muitas demonstrações d'esta proposição fundamental. A que vamos apresentar é devida ao sr. Lipschitz, professor na Universidade de Bonn. (*)

A equação $f(u, z) = 0$ póde ser escripta da maneira seguinte:

$$f(u) = u^n + a_1 u^{n-1} + a_2 u^{n-2} + \ldots + a_n = 0,$$

e vamos mostrar que se o theorema é verdadeiro quando o seu grão é $n-1$, tambem o é quando o seu grão é n.

Supponhamos pois que a funcção algebrica dada por uma equação do grão $n-1$, tem $n-1$ valores; terá $n-1$ valores a funcção u determinado pela equação $f'(u) = 0$, por ser $f'(u)$ do grão $n-1$ (26 — II). Sejam estes valores a_1, a_2, ... a_{n-1}, e designemos por a_1 aquelle que dá a $f(a_1)$ um módulo inferior ou quando muito igual ao menor dos módulos de $f(a_2)$, ... $f(a_{n-1})$.

Pondo $u_1 = a_1 + \alpha$, virá (26 — II)

$$f(a_1+\alpha) = f(a_1) + \alpha f'(a_1) + \frac{\alpha^2}{1 \cdot 2} f''(a_1) + \ldots + \frac{\alpha^n}{1.2\ldots n} f^{(n)}(a_1).$$

O termo que contém $f'(a_1)$ é nullo por hypothese, e podem ser nullos alguns dos seguintes. Supponde pois que o termo que contém $f^{(p)}(a_1)$ é o primeiro que não se annulla, teremos

$$f(a_1 + \alpha) = f(a_1) + \frac{\alpha^p}{1.2\ldots p} f^{(p)}(a_1) + \ldots + \frac{\alpha^n}{1.2\ldots n} f^{(n)}(a_1).$$

(*) *Lipschitz*—Lehrbuch der Analysis, tomo I.

Designemos por h uma quantidade real comprehendida entre zero e a unidade, e façamos

$$\alpha = \beta \sqrt[p]{h}, \; \beta = \sqrt[p]{-1 \,.\, 2 \ldots p \, \frac{f(a_1)}{f^{(p)}(a_1)}},$$

onde daremos o valor real ao radical que entra na expressão de α, e um qualquer dos seus valores ao radical que entra na expressão de β. Teremos pois

$$f(a_1 + \alpha) = f(a_1)(1 - h) + \lambda + i\eta,$$

pondo

$$\lambda + i\eta = \frac{\beta^{p+1} h^{\frac{p+1}{p}}}{1 \,.\, 2 \ldots (p+1)} f^{(p+1)}(a_1) + \ldots \frac{\beta^n h^{\frac{n}{p}}}{1.2\ldots n} f^{(n)}(a_1).$$

Representando por P uma quantidade real superior a qualquer dos módulos dos coefficientes de h na somma precedente, e representando o módulo de $\lambda + i\eta$ por $|\lambda + i\eta|$, teremos (n.º 9 — 1.º)

$$|\lambda + i\eta| < P\left(h^{\frac{p+1}{p}} + h^{\frac{p+2}{p}} + \ldots + h^{\frac{n}{p}}\right),$$

ou *à fortiori*

$$|\lambda + i\eta| < (n-p)\, P h^{\frac{p+1}{p}}.$$

Teremos pois

$$|f(a_1 + \alpha)| < |f(a_1)|(1 - h) + (n-p)\, P h^{1 + \frac{1}{p}},$$

ou

$$|f(a_1 + \alpha)| < |f(a_1)| - h\left[|f(a_1)| - (n-p)\, P h^{\frac{1}{p}}\right].$$

Se obrigarmos agora h, que já está sujeito a estar comprehendido entre zero e a unidade, a satisfazer á desigualdade

$$|f(a_1)| - (n-p) Ph^{\frac{1}{p}} > 0,$$

dando-lhe para isso um valor assaz pequeno, a desigualdade precedente dará

$$|f(a_1+\alpha)| < |f(a_1)|,$$

e póde portanto achar-se um valor u_1 tal que o módulo de $f(u_1)$ seja menor do que o módulo de $f(a_1)$, pondo

$$u_1 = a_1 + \beta \sqrt[p]{h}.$$

Partindo depois de u_1 demonstra-se do mesmo modo que se póde achar um valor u_2 tal que o módulo de $f(u_2)$ seja menor do que o módulo de $f(u_1)$. N'este caso a funcção $f'(u_1)$ não será nulla, porque, segundo o modo como se escolheu a_1, quando u varia de modo que o módulo de $f(u)$ decresce, $f'(u)$ não póde passar por zero.

Se fizermos pois

$$u_2 = u_1 + \alpha_1,\ \alpha_1 = \beta_1 h_1,\ \beta_1 = -\frac{f(u_1)}{f'(u_1)},$$

representando por h_1 uma quantidade real comprehendida entre zero e a unidade e que satisfaça á desigualdade

$$|f(u_1)| - (n-1) P_1 h_1 > 0,$$

e por P_1 uma quantidade real qualquer superior ou igual ao maior dos módulos das quantidades

$$\frac{\beta_1^2}{1.2} f''(u_1), \dots, \frac{\beta_1^n}{1.2\dots n} f^{(n)}(u_1),$$

teremos, do mesmo modo que no caso anterior,

$$|f(u_2)| < |f(u_1)| - h_1 \{ |f(u_1)| - (n-1) P_1 h_1 \},$$

que dá

$$| f(u_2) | < | f(u_1) | .$$

Continuando do mesmo modo obtem-se as desigualdades

$$\left.\begin{array}{l} | f(u_2) | < | f(u_1) | - h_1 [| f(u_1) | - (n-1) P_1 h_1] \\ | f(u_3) | < | f(u_2) | - h_2 [| f(u_2) | - (n-1) P_2 h_2] \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} (a)$$

onde u_2, u_3, etc. são dados pelas igualdades

$$u_2 = u_1 + \beta_1 \sqrt{h_1},\ u_3 = u_2 + \beta_2 \sqrt{h_2},\ u_4 = u_3 + \beta_3 \sqrt{h_3}, \text{ etc.};$$

onde h_1, h_2, h_3, etc. são quantidades menores do que a unidade que satisfazem ás desigualdades:

$$\left.\begin{array}{l} | f(u_1) | - (n-1) P_1 h_1 > 0 \\ | f(u_2) | - (n-1) P_2 h_2 > 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} (b);$$

e onde β_1, β_2, etc. são dados pelas formulas:

$$\beta_1 = -\frac{f(u_1)}{f'(u_1)},\ \beta_2 = -\frac{f(u_2)}{f'(u_2)},\ \beta_3 = -\frac{f(u_3)}{f'(u_3)}, \text{ etc.}$$

Das desigualdades (a) deduz-se

$$f(u_m) < f(u_{m-1}) < \dots < f(u_2) < f(u_1).$$

As quantidades P_1, P_2, etc. sendo todos inferiores a um numero positivo Q, como veremos em seguida, as desigualdades (b) serão satisfeitas pelos valores de h_1, h_2, h_3, etc. dados pelas equações:

$$h_1 = \frac{| f(u_1) |}{2(n-1)Q},\ h_2 = \frac{| f(u_2) |}{2(n-1)Q}, \text{ etc.}$$

Em virtude d'estas igualdades, as desigualdades (a) dão

$$|f(u_2)| < |f(u_1)| \left[1 - \frac{|f(u_1)|}{4(n-1)Q}\right]$$

$$|f(u_3)| < |f(u_2)| \left[1 - \frac{|f(u_2)|}{4(n-1)Q}\right]$$

....

$$|f(u_m)| < |f(u_{m-1})| \left[1 - \frac{|f(u_{m-1})|}{4(n-1)Q}\right],$$

d'onde

$$|f(u_m)| < |f(u_1)| \left[1 - \frac{|f(u_1)|}{4(n-1)Q}\right]$$

$$\times \left[1 - \frac{|f(u_2)|}{4(n-1)Q}\right] \cdots \left[1 - \frac{|f(u_{m-1})|}{4(n-1)Q}\right].$$

D'aqui vamos concluir que se póde tomar m tão grande que seja $|f(u_m)| < \delta$, por mais pequeno que seja δ. Com effeito, se fosse sempre $|f(u_m)| > \delta$, seria tambem $|f(u_1)| > |f(u_2)| > \ldots > |f(u_{m-1})| > \delta$, e a ultima desigualdade daria

$$|f(u_m)| < |f(u_1)| \left[1 - \frac{\delta}{4(n-1)Q}\right]^{m-1}.$$

O segundo membro d'esta desigualdade podendo tornar-se tão pequeno quanto se queira augmentando convenientemente m, teriamos pois $|f(u_m)| < \delta$.

Vê-se pois que, quando a u_1, u_2, u_3, etc. se dá os valores precedentes, a funcção $f(u_t)$ diminue, e póde tornar-se menor do que qualquer grandeza assignavel dando a t um valor m sufficientemente grande.

Por outra parte, da relação

$$\frac{f(u)}{u^n} = 1 + \frac{a_1}{u} + \frac{a_2}{u^2} + \ldots + \frac{a_n}{u^n}$$

$$= 1 + \frac{|a_1|}{|u|}(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) + \frac{|a_2|}{|u|^2}(\cos\theta' + i \operatorname{sen}\theta') + \ldots,$$

onde θ, θ', etc. representam os argumentos de $\frac{a_1}{u}$, $\frac{a_2}{u^2}$, etc., deduz-se (n.° 9)

$$\frac{|f(u)|}{|u|^n} = \left(1 + \frac{|a_0|}{|u|}\cos\theta + \ldots\right)^2$$
$$+ \left(\frac{|a_0|}{|u|}\operatorname{sen}\theta + \ldots\right)^2;$$

e esta igualdade prova que, quando $|f(u)|$ diminue indefinidamente, $|u|$ não póde augmentar indefinidamente, pois que o seu segundo membro póde approximar-se da unidade tanto quanto se queira dando a $|u|$ um valor sufficientemente grande.

De tudo o que precede podemos pois concluir que o módulo de $f(u_t)$ se póde tornar menor do que qualquer grandeza assignavel dando a t um valor sufficientemente grande, e que o valor de u_t não póde augmentar indefinidamente com t. Logo o minimo valor da quantidade positiva $|f(u_t)|$ será zero, porque, se este minimo fosse a quantidade δ, poderia dar-se a t um valor tal que fosse $|f(u_t)| < \delta$. Ha portanto um valor u_t que é raiz da equação $f(u_t) = 0$.

Resta mostrar que P_1, P_2, P_3, etc. são menores do que um numero determinado Q. Por hypothese, P_t é maior do que o maior dos módulos das quantidades

$$\frac{\beta_t^2}{1 \cdot 2} f''(u_t), \ldots \frac{\beta_t^n}{1 \cdot 2 \ldots n} f^{(n)}(u_t).$$

Sendo porém $f''(u_t)$, $f'''(u_t)$, ... $f^{(n)}(u_t)$ polynomios inteiros relativamente a u, e não podendo u_t augmentar indefinidamente, tambem elles não podem augmentar indefinidamente; e a fracção

$$\beta_t = -\frac{f(u_{t-1})}{f'(u_{t-1})}$$

não póde tambem augmentar indefinidamente, porque a funcção $f(u_{t-1})$ não póde augmentar indefinidamente, e a funcção $f'(u_{t-1})$ não póde diminuir indefinidamente, visto que u_{t-1} não póde ser raiz de $f'(u)$ (com effeito, o módulo de $f(u_{t-1})$ é menor do que o módulo de $f(a_1)$ e este é, por hypothese, menor do que os módulos de $f(a_2)$, $f(a_3)$, etc. correspondentes ás outras raizes de $f'(u) = 0$). Logo os módulos das quantidades consideradas não podem augmentar indefinidamente, e portanto são menores do que uma quantidade finita Q.

Está pois completamente demonstrado que a cada valor de z corresponde pelo menos um valor u' de u que satisfaz á equação $f(z, u) = 0$.

E' facil de demonstrar agora que o numero de valores de u que satisfazem a esta equação é igual a n.

Com effeito, dividindo o polynomio $f(z, u)$ do grão n relativamente a u por $u - u'$ vem um quociente q do grão $n - 1$ e um resto r independente de u, e teremos

$$f(z, u) = q(u - u') + r,$$

o que dá, pondo $u = u'$

$$f(z, u') = r = 0,$$

e portanto

$$f(z, u) = q(u - u').$$

Mas suppondo o theorema verdadeiro no caso dos polynomios de grão $n - 1$, vem

$$q = (u - u'')(u - u''') \ldots (u - u^{(n)}),$$

logo será

$$f(z, u) = (u - u')(u - u'') \ldots (u - u^{(n)})$$

e o theorema será pois verdadeiro no caso dos polynomios do grão n.

De tudo o que vem de ser dito podemos concluir o theorema 1.º, porque vem de demonstrar-se que se este theorema é verdadeiro no caso de ser a equação proposta do grão $n - 1$, tambem é verdadeiro quando esta equação é de grão n, e sabe-se que elle é verdadeiro quando a equação é do primeiro grão.

Esta demonstração do sr. Lipschitz, cujo principio é devido a Argand, tem a importancia propria de levar a um methodo de approximação para o calculo das raizes incommensuraveis, que coincide com o methodo de Newton. D'este ponto, que pertence á theoria das equações numericas, não podemos porém aqui tratar.

II — A substituição da equação implicita $f(z, u) = 0$ por uma equação explicita $u = F(z)$ equivalente, onde entrem só funcções algebricas em numero finito, e que dê directamente os n ramos de u, é uma questão pertencente á theoria das equações, de que aqui não trataremos. Limitar-nos-hemos a recordar que esta substituição é possivel no caso das equações dos quatro primeiros grãos relativamente a u; que Abel demonstrou a impossibilidade d'esta substituição no caso das equações geraes de grão superior ao quarto; finalmente que no caso das equações de grão superior ao quarto, ella é ainda possivel para certos *grupos* particulares de equações que foram estudados por aquelle eminente geometra e por seus successores. (*)

III — *Theorema 2.º — Toda a funcção algebrica* u *dada pela equação*

$$f(u, z) = a_0 u^n + a_1 u^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

onde a_0 *é uma funcção de* z *do grão* m, *é continua em todo o plano, excepto em* m *pontos que são pólos.*

Esta proposição importante é devida a Cauchy, bem como a demonstração que vamos dar d'ella. (**)

Suppondo que u tem n valores iguaes a b quando a z se dá o valor a, vamos mostrar que quando z varia a partir de a segundo a lei da continuidade, u adquire ω valores distinctos variando a partir de b segundo a lei da continuidade.

Pondo na equação proposta $z = a + h$ e $u = b + k$, e ordenando o resultado segundo as potencias de k, vem (26 — II) um resultado da fórma:

$$f(a + h, b + k) = Z_0 + Z_1 k + \ldots + Z_\omega k^\omega$$

$$+ Z_{\omega+1} k^{\omega+1} + \ldots + Z_n k^n$$

(*) *Abel* — Oeuvres complètes, 1881.
M. Serret — Cours d'Algèbre supérieure, tomo II — Paris, 1881.
(**) *Cauchy* — Nouveaux Exercices de Mathématiques, tomo II.

onde Z_0, Z_1, etc. são funcções inteiras de z; ou

$$f(a+h,\ b+k)=Z_\omega k^\omega$$

$$\times\left\{\frac{Z_0}{Z_\omega}\frac{1}{k^\omega}+\frac{Z_1}{Z_\omega}\cdot\frac{1}{k^{\omega-1}}+\ldots+1+\frac{Z_{\omega+1}}{Z_\omega}k+\ldots+\frac{Z_n}{Z_\omega}k^{n-\omega}\right\}$$

$$=Z_\omega k^\omega(1+P+Q),$$

onde é

$$P=\frac{Z_{\omega+1}}{Z_\omega}k+\ldots+\frac{Z_n}{Z_\omega}k^{n-\omega},$$

$$Q=\frac{Z_0}{Z_\omega}\cdot\frac{1}{k^\omega}+\ldots+\frac{Z_{\omega-1}}{Z_\omega}\cdot\frac{1}{k}.$$

Notemos agora que as funcções de z: Z_0, Z_1, ... $Z_{\omega-1}$ são nullas quando é $z=a$, pois que então u deve ter, por hypothese, ω valores iguaes a b, e porisso k deve ter ω valores iguaes a zero; e que, nas mesmas circumstancias, Z_ω não póde ser nulla pois que, se o fosse, k teria $\omega+1$ valores iguaes a b.

Descreva z uma circumferencia de centro a e raio ρ tal que o circulo que ella fecha não contenha raiz alguma de $Z_\omega=0$, e seja B o menor dos valores do módulo de Z_ω, e A o maior dos valores dos módulos de $Z_{\omega+1}$, $Z_{\omega+2}$, ... Z_n.

Se fizermos ao mesmo tempo descrever a u uma circumferencia de raio $r<1$ e de centro b, será r o módulo de $u-b$, isto é, de k.

Então teremos (n.º 9 — 1.º):

$$|P|<\frac{A}{B}\left(r+r^2+\ldots+r^{n-\omega}\right)=\frac{A}{B}\cdot\frac{r(1-r^{n-\omega})}{1-r},$$

ou *à fortiori*

$$|P| < \frac{A}{B} \cdot \frac{r}{1-r}.$$

Como r (que já tem de ser menor do que a unidade) é ainda em parte arbitrario, podemos dar-lhe um valor tal que seja $|P| < \frac{1}{2}$, para o que basta fazer

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{r}{1-r} \overline{\overline{<}} \tfrac{1}{2},$$

ou

$$r \overline{\overline{<}} \frac{B}{B+2A}.$$

Por outra parte as funcções de z: Z_0, Z_1, ... $Z_{\omega-1}$ annullam-se no ponto a e são continuas, logo podemos tomar para raio da circumferencia descripta por z um valor ρ' menor do que ρ, tal que o valor maximo C dos módulos d'estas quantidades seja tão pequeno como quizermos; de modo que podemos fazer

$$\frac{C}{B}\left(\frac{1}{r^\omega} + \frac{1}{r^{\omega-1}} + \ldots + \frac{1}{r}\right) < \tfrac{1}{2};$$

mas é evidentemente

$$|Q| < \frac{C}{B}\left(\frac{1}{r^\omega} + \frac{1}{r^{\omega-1}} + \ldots + \frac{1}{r}\right),$$

logo virá

$$|Q| < \tfrac{1}{2}.$$

Portanto é sempre possivel dar aos módulos de z e k valores taes que seja

$$|P+Q| < 1.$$

Voltemos á funcção

$$f(a+h,\ b+k)=Z_\omega\, k^\omega (1+P+Q).$$

Quando u volta á primitiva posição depois de descrever a circumferencia do raio r em roda do ponto b, o argumento θ de $k=u-b=r\ (\cos\theta+i\ \text{sen}\ \theta)$ augmenta (n.° 23) de 2π, logo o argumento de $k^\omega = r^\omega\ (\cos\omega\theta+i\ \text{sen}\ \omega\theta)$ augmenta de $2\omega\pi$. Z_ω é só funcção de z e porisso não varia. Finalmente $1+P+Q$ volta ao valor primitivo; com effeito, temos

$$1+P+Q=1+M\ (\cos\iota+i\ \text{sen}\ \iota),$$

chamando M o módulo e ι o argumento de $P+Q$, e portanto o argumento α de $1+P+Q$ é dado pela formula

$$\text{tang}\ \alpha=\frac{M\ \text{sen}\ \iota}{M\cos\iota+1};$$

esta expressão mostra que α não póde passar além de $\frac{\pi}{2}$ e $-\frac{\pi}{2}$, visto que tang α não póde ser infinito por M ser menor do que a unidade.

A funcção $f\ (a+h,\ b+k)$ augmentará pois de $2\omega\pi$ quando u der uma volta em roda de b, e portanto (n.° 23) ha ω valores de k contidos n'um circulo do raio r, descripto de b como centro, que satisfazem á equação $f\ (a+h,\ b+k)=0$, e como o raio d'este circulo se póde tornar tão pequeno quanto se quizer, conclue-se que são continuos na visinhança a os ω ramos de u que ahi se encontram.

Se dermos a z valores taes que seja $a_0=0$, ha valores de u correspondentes que são infinitos. Por outra parte os valores correspondentes de $u'=\frac{1}{u}$ são nullos, e como os valores de u' são dados pela equação algebrica:

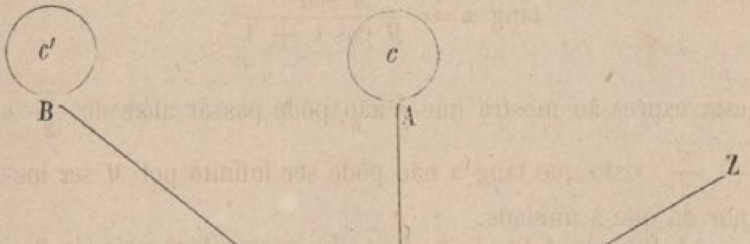
$$a_n\, u'^n+a_{n-1}\, u'^{n-1}+\ldots+a_0=0,$$

aquelles valores são continuos a partir de zero. Logo os valores de z que satisfazem á equação $a_0 = 0$ são *pólos*.

De tudo o que temos dito se conclue que as funcções algebricas não tem outros pontos singulares além dos *pólos* e dos *pontos criticos*.

IV — Vimos já que o caminho seguido pela variavel z tem influencia sobre o valor de cada ramo da funcção algebrica u (24). Vimos tambem que uma porção qualquer do caminho seguido por z póde ser substituida por outro quando na área comprehendida entre os dous caminhos não existe ponto singular, sem que por esta substituição se altere este valor. E' facil de vêr que qualquer que seja o caminho que z tenha a seguir para ir de z_0 a Z, póde elle sempre ser substituido pelo que resulta de seguir a recta z_0A, dar (fig. 8.ª) um numero determinado n de voltas á roda do ponto sin-

Fig. 8.ª



gular c, e voltar pelo mesmo caminho a z_0; seguir depois z_0B dar um numero determinado n' de voltas á roda do ponto singular c' e voltar pelo mesmo caminho Bz_0 a z_0; ir do mesmo modo dar um numero determinado de voltas á roda dos outros pontos criticos voltando sempre a z_0; finalmente seguir de z_0 a Z. Estamos pois reduzidos a estudar a influencia d'este caminho sobre o valor de u, o que vamos fazer em dous casos particulares.

Exemplo 1.° — A funcção $u^2 = (z - c)(z - c')$

ou

$$u = \pm\sqrt{(z - c)(z - c')},$$

que tem os pontos criticos c e c', dá

$$u = \pm\sqrt{\rho\rho'}\,[\cos\tfrac{1}{2}(\theta + \theta') + i\,\mathrm{sen}\,\tfrac{1}{2}(\theta + \theta')],$$

chamando ρ e ρ' os módulos e θ e θ' os argumentos $z - c$ e $z - c'$.

Se o ponto z parte de z_0, onde os argumentos são θ_0 e θ'_0 e volta a z_0 depois de ter dado n voltas em roda de c, o angulo θ_0 augmenta de $2n\pi$. Do mesmo modo, se o ponto dá n' voltas em roda de c', o angulo θ'_0 augmenta de $2n'\pi$. Teremos pois

$$u = \pm\sqrt{\rho\rho'}\,[\cos\tfrac{1}{2}(\theta_0 + \theta'_0 + 2n\pi + 2n'\pi)$$
$$+ i\,\mathrm{sen}\,\tfrac{1}{2}(\theta_0 + \theta'_0 + 2n\pi + 2n'\pi)].$$

Em seguida z_0 dirige-se para Z e então θ_0 e θ'_0 variam e tornam-se em θ e θ', o que dá

$$u = \pm\sqrt{\rho\rho'}\left[\cos\left((n + n')\pi + \frac{\theta + \theta'}{2}\right) + i\,\mathrm{sen}\left((n+n')\pi + \frac{\theta+\theta'}{2}\right)\right]$$

ou

$$u = \pm(-1)^{n+n'}\sqrt{\rho\rho'}\left[\cos\frac{\theta + \theta'}{2} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta + \theta'}{2}\right].$$

Este resultado resolve a questão, isto é, dá os valores de u correspondentes a cada caminho seguido por z.

Exemplo 2.° — A funcção

$$u = \sqrt[3]{(z - c)(z - c')(z - c'')}$$

tem tres ramos. Chamando pois ρ, ρ' e ρ'' os módulos e θ, θ' e θ'' os argumentos de $z - c$, $z - c'$ e $z - c''$, vem (n.º 9 — 4.º)

$$u = \sqrt{\rho\rho'\rho''}\,[\tfrac{1}{3}(\theta + \theta' + \theta'' + 2k\pi) + i \operatorname{sen} \tfrac{1}{3}(\theta + \theta' + \theta'' + 2k\pi)].$$

O primeiro ramo da funcção proposta corresponde a $k = 0$ o segundo a $k = 1$ e o terceiro a $k = 2$.

Raciocinando como no caso precedente, vê-se que o valor de qualquer dos ramos da funcção u correspondente a um valor determinado Z de z e a um caminho determinado seguido por z na passagem de z_0 para Z, é dado pela formula seguinte:

$$u = \sqrt[3]{\rho\rho'\rho''}\,[\cos \tfrac{1}{3}(\theta_1 + \theta'_1 + \theta''_1 + 2k\pi + 2n\pi + 2n'\pi + 2n''\pi)$$
$$+ i \operatorname{sen} \tfrac{1}{3}(\theta_1 + \theta'_1 + \theta''_1 + 2k\pi + 2n\pi + 2n'\pi + 2n''\pi)],$$

representando por θ_1, θ'_1 e θ''_1 os argumentos que teriam $Z - c$, $Z - c'$ e $Z - c''$ se z fosse directamente de z_0 para Z pela linha recta z_0Z.

Nada mais accrescentaremos a respeito das funcções algebricas. Para um estudo mais profundo d'estas funcções podem cousultar-se os trabalhos notaveis de Puiseux, Riemann, Klein, etc.

III

Funcções exponenciaes, logarithmicas, e circulares

29. — As *funcções exponenciaes* e *logarithmicas* são conhecidas desde os Elementos de Algebra; as *funcções circulares* são conhecidas desde a Trigonometria. São as unicas transcendentes estudadas nos Elementos, e o seu estudo é muito importante por causa da frequencia com que ellas apparecem nas questões a que se applica a Mathematica, e porque serve de preparação para o estudo das trancendentes mais geraes de que se occupa a Analyse.

30. — Sabe-se que, no caso das variaveis reaes, a propriedade fundamental da exponencial é expressa pela igualdade:

$$a^x \,.\, a^{x'} = a^{x+x'},$$

que tem logar qualquer que seja a *base* real ou imaginaria a.

A base que se emprega quasi sempre nas formulas d'Analyse é o numero e definido no n.º 19.

A definição de exponencial e^z, no caso das variaveis imaginarias $z = x + iy$, deve ser tal que se recaia na exponencial de expoente real quando é $y = 0$, e que tenha logar o principio fundamental precedente. A estas condições satisfaz e^{x+iy} quando se define pela igualdade, devida a Euler,

$$(1) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y).$$

Com effeito, temos, pondo $z = x + iy$, $z' = x' + iy'$,

$$e^z \,.\, e^{z'} = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y) \,.\, e^{x'} (\cos y' + i \operatorname{sen} y')$$

$$= e^{x+x'} [\cos (y + y') + i \operatorname{sen} (y + y')].$$

e portanto

$$e^z \cdot e^{z'} = e^{z+z'}.$$

I — Da equação de definição decorre logo uma propriedade importante da exponencial do expoente imaginario, a saber: a sua *periodicidade*. Com effeito, por ser

$$e^{z+2ki\pi} = e^x [\cos(y + 2k\pi) + i \operatorname{sen}(y + 2k\pi)]$$
$$= e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y) = e^z,$$

conclue-se que a exponencial toma o mesmo valor cada vez que z augmenta de $2i\pi$.

Do mesmo modo se vê que a exponencial toma o mesmo valor com signal contrario cada vez que z augmenta de $i\pi$.

II. — Do que precede resulta tambem que todo o imaginario se póde exprimir debaixo da fórma de exponencial. Com effeito, temos

$$x + iy = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) = \rho\, e^{i\theta}.$$

Temos assim tres fórmas que se póde dar ao imaginario, cada uma das quaes póde ser preferivel em sua questão.

III — Por ser

$$e^{x+h} - e^x = e^x (e^h - 1),$$

e por e^h se approximar indefinidamente da unidade á medida que h se approxima de zero, conclue-se que a funcção e^x é continua, qualquer que seja o valor da variavel real x.

Por outra parte as funcções sen y e cos y são continuas, como se conclue immediatamente das suas representações geometricas.

Logo a funcção

$$e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y)$$

é continua (n.° 22, 1.° e 2.°) qualquer que seja x e y.

Temos pois a proposição importante:

A funcção exponencial é uniforme e continua qualquer que seja z.

IV — O estudo da funcção $y = a^x$, onde a é uma constante real ou imaginaria, reduz-se ao estudo da funcção precedente. Com effeito, chamando la o logarithmo de a na base e, que se chama tambem *logarithmo neperiano* de a, teremos $a = e^{la}$. Vamos vêr que la tem um numero infinito de valores, mas basta tomar um d'elles visto que o primeiro membro da relação precedente tem um valor unico.

31. — Consideremos agora a funcção inversa da exponencial, isto é a funcção u ligada com a exponencial z pela equação

$$z = e^u.$$

Como se sabe u é o logarithmo de z na base e.

Suppondo

$$z = x + iy = \rho\,(\cos\omega + i \operatorname{sen}\omega),\ u = \alpha + i\beta$$

temos a equação

$$\rho\,(\cos\omega + i \operatorname{sen}\omega) = e^{\alpha + i\beta} = e^{\alpha}(\cos\beta + i \operatorname{sen}\beta),$$

que dá

$$\rho\cos\omega = e^{\alpha}\cos\beta,\ \rho\operatorname{sen}\omega = e^{\alpha}\operatorname{sen}\beta,$$

d'onde se tira, por serem α e β reaes,

$$e^{2\alpha} = \rho^2,\ \cos\omega = \cos\beta,\ \operatorname{sen}\omega = \operatorname{sen}\beta,$$

ou

$$\alpha = \log\rho,\ \beta = \omega + 2k\pi,$$

onde é $\omega < 2\pi$, e k um inteiro positivo ou negativo qualquer.

Temos pois

$$(a) \ldots\ldots\quad u = \log((z)) = \log\rho + i\,(\omega + 2k\pi),$$

empregando, como Cauchy, o signal $\log((N))$ para designar todos os logarithmos de N e o signal $\log N$ para designar o logarithmo real.

I — Se fôr $\omega = 0$, z é real, e vê-se pela formula precedente que o logarithmo de z tem um valor real correspondente a $k = 0$, e um numero infinito d'elles imaginarios correspondentes aos outros valores de k. Em todos os outros casos o logarithmo de z tem um numero infinito de valores imaginarios, e não tem valor real. Em resumo a *funcção logarithmica é uma funcção multiforme de numero infinito de ramos.*

II — Por ser ρ uma quantidade positiva, a igualdade

$$\log(\rho + h) - \log\rho = \log\left(1 + \frac{h}{\rho}\right)$$

mostra que quando h tende para zero, $\log\left(1 + \frac{h}{\rho}\right)$ tende tambem para zero, visto que o logarithmo real decresce com o numero e o logarithmo da unidade é zero. Logo o logarithmo real de ρ é uma funcção continua de ρ, excepto quando é $\rho = 0$, pois que $\log 0 = \infty$.

Em virtude d'isto, e do principio 1.° do n.° 22 a formula (a) mostra que o *logarithmo de z é uma funcção continua de z, excepto no ponto $z = 0$.*

***III** — Dando a k diversos valores em (a) formam-se outros tantos ramos da funcção logarithmica de z, que podem ser representados geometricamente por outras tantas porções de curva. Não ha valor algum de z para o qual dous ramos sejam iguaes, pois que viria

$$\log\rho + i(\omega + 2k\pi) = \log\rho + i(\omega + 2k'\pi),$$

ou $k = k'$. Vê-se pois que a *funcção logarithmica não tem pontos criticos.*

Em resumo a *funcção logarithmica é multiforme, continua e tem um unico ponto singular que é $z = 0$.*

***IV** — D'este theorema segue-se que um ramo qualquer da funcção logarithmica que parte de z_0 com o valor

$$\log z_0 = \log\rho_0 + i(\omega_0 + 2k\pi)$$

toma no ponto z_1 sempre o mesmo valor

$$\log z_1 = \log\rho_1 + i(\omega_1 + 2k\pi)$$

qualquer que seja o caminho seguido pela variavel z na passagem de z_0 para z_1 com tanto que todos estes caminhos estejam dentro de um contôrno fechado que não contenha o ponto $z = 0$.

V — Se porém quizermos o valor que toma o mesmo ramo da funcção logarithmica quando z, partindo de z_0, descreve um caminho qualquer para chegar a z_1, é facil de vêr, como no n.º 28, que estes caminhos podem ser sempre substituidos pelo caminho que resulta de seguir a recta $z_0 A$ até um ponto A tão proximo quanto se queira do ponto correspondente a $z = 0$; dar n voltas circulares em roda d'este ponto no sentido directo, e m voltas no sentido retrogado; e seguir depois uma linha recta de z_0 a Z. Cada vez que z dá uma volta em roda do ponto correspondente a $z = 0$, isto é, em roda da origem das coordenadas, o angulo ω augmenta do dobro de π, logo, chamando ω_1 o valor que tomaria ω no ponto z_1 se z seguisse sómente o caminho rectelineo para ir de z_0 a z_1, teremos

$$\log z_1 = \log \rho_1 + i(\omega_1 + 2n\pi - 2m\pi + 2k\pi).$$

Esta formula resolve a questão considerada, isto é, dá o valor que toma o ramo da funcção logarithmica, correspondente a um valor determinado de k, no ponto z_1, em funcção do caminho seguido por z na passagem de z_0 para z_1.

Se o ponto z_1 estiver sobre o prolongamento da linha recta que une o ponto z_0 ao ponto correspondente a $z = 0$, a parte rectilinea $z_0 z_1$ deve ser substituida por duas porções d'esta recta e por meia circumferencia descripta em roda do ponto correspondente a $z = 0$.

VI — Se a base dos logarithmos é a, teremos

$$z = a^u = e^{ula},$$

e portanto passa-se dos logarithmos neperianos para os logarithmos de base a dividindo os primeiros por um dos valores do logarithmo neperiano de a.

31. — As funcções circulares foram estudadas na Trigonometria, onde apparecem como auxiliares para a resolução dos triangulos.

I — As suas propriedades fundamentaes são, no caso dos arcos reaes, as seguintes:

1.ª Sendo a e b dois arcos reaes, temos

$$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b.$$

E' o *theorema de addicção*.

2.ª As funcções circulares são *periodicas*, isto é, tomam o mesmo valor cada vez que o arco augmenta de 2π, e o mesmo valor com signal contrario cada vez que o arco augmenta de π.

II — As formulas do n.º 25:

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$$

$$e^{-ix} = \cos x - i \operatorname{sen} x$$

dão as funcções circulares expressas por meio de funcções exponenciaes:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \operatorname{sen} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

III — Estas relações permittem definir os *senos* e *cosenos* de arcos imaginarios. Representa-se, com effeito, por $\operatorname{sen}(x + iy)$ e $\cos(x + iy)$ as funcções que resultam de substituir nas formulas precedentes x por $x + iy$, a saber:

$$\cos z = \cos(x + iy) = \frac{e^{iz} + e^{i-z}}{2} = \frac{e^{-y+ix} + e^{y-ix}}{2}$$

$$\operatorname{sen} z = \operatorname{sen}(x + iy) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{-y+ix} - e^{y-ix}}{2i}.$$

A primeira d'estas formulas dá

$$\cos(z + z') = \frac{e^{i(z+z')} + e^{-i(z+z')}}{2} = \frac{e^{iz}\, e^{iz'} + e^{-iz} . e^{-iz'}}{2}$$

$$= \frac{(e^{iz} + e^{-iz})(e^{iz'} + e^{-iz'}) + (e^{iz} - e^{-iz})(e^{iz'} - e^{-iz'})}{4}$$

ou

$$\cos(z + z') = \cos z \cos z' - \operatorname{sen} z \operatorname{sen} z'.$$

Do mesmo modo a segunda dá

$$\operatorname{sen}(z + z') = \operatorname{sen} z \cos z' + \cos z \operatorname{sen} z'.$$

Vê-se pois que os *senos* e os *cosenos* de arcos imaginarios gozam da propriedade expressa pelo *theorema de addicção.*

IV — Pondo nas formulas precedentes $x = 0$, vem

$$\cos(iy) = \frac{e^{-y} + e^{y}}{2}, \quad \text{sen}(iy) = \frac{e^{-y} - e^{y}}{2i}.$$

Estas funcções sen (iy) e cos (iy) têem o nome de *seno hyperbolico* e de *coseno hyperbolico* de y. Temos aqui a origem da theoria das *funcções hyperbolicas*, devida a Riccati, que é objecto de tractados especiaes.

V — Por ser a exponencial uma funcção uniforme e continua qualquer que seja z, e por serem sen z e cos z sommas d'exponenciaes podemos enunciar o theorema seguinte:

As funcções sen z e cos z são uniformes e continuas qualquer que seja z.

VI — A tangente de z, quer z seja real, quer seja imaginaria, é definida pela relação

$$\text{tang}\, z = \frac{\text{sen}\, z}{\cos z}.$$

Esta funcção é uniforme e é continua (n.º 22 — 3.º) qualquer que seja z, excepto nos pontos que satisfazem á equação

$$\cos z = e^{iz} + e^{-iz} = 0,$$

ou

$$e^{-y}(\cos x + i\,\text{sen}\, x) + e^{y}(\cos x - i\,\text{sen}\, x) = 0,$$

ou

$$\cos x\,(e^{-y} + e^{y}) + i\,\text{sen}\, x\,(e^{-y} - e^{y}) = 0.$$

Esta equação, por ser a expressão $e^{-y} + e^{y}$ sempre positivo, dá $\cos x = 0$, $e^{-y} = e^{y}$, e portanto

$$y = 0,\ x = \tfrac{1}{2}\pi,\ \tfrac{3}{2}\pi,\ \tfrac{5}{2}\pi, \ldots$$

Logo *a tangente é uma funcção uniforme, e é continua qualquer que seja z, excepto nos pontos* $(0, \frac{1}{2}\pi)$ $(0, \frac{3}{2}\pi), \ldots$

SUR TROIS RELATIONS DIFFÉRENTIELLES DONNÉES PAR MR. LIPSCHITZ DANS LA THÉORIE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES

PAR

J. A. MARTINS DA SILVA

Le cahier de 25 décembre 1833 des *Comptes rendus des séances de l'Académie de Sciences de Paris* contient à la page 1411 une Note de Mr. Lipschitz, où l'on trouve trois relations différentielles intéressantes pour la théorie des fonctions elliptiques.

En refléchissant sur la formule des *Fundamenta nova*, qui est la source de la détermination des représentations d'un nombre quelconque par une somme de quatre carrés, l'illustre analyste remarque que cette formule, par une légère modification conduit à une équation différentielle qui se rapporte aux trois fonctions (*):

$$\theta(o)=1+2\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n q^{n^2};\quad \theta_2(o)=2\sum_{n=1}^{n=\infty} q^{\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2};$$

$$\theta_3(o)=1+2\sum_{n=1}^{n=\infty} q^{n^2}.$$

Il remarque aussi que, dans la formule de Jacobi:

$$\theta^4_3(o)=1+8\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{m.q^m}{1+(-1)^m.q^m},$$

(*) J'emploierai dans ce qui suit les notations de MM. Briot et Bouquet.

11

on peut réunir toutes les fonctions du second membre, qui contiennent les puissances de q, dont les exposants sont les produits de la multiplication d'un nombre impar par une puissance du nombre 2; en employant ensuite les valeurs de $\theta(o)$ et $\theta_2(o)$ exprimées dans le produit des facteurs binomes $(1-q^m)$, et l'équation $\theta_0^4(0)+\theta^4_2(0)-\theta^4_3(0)=0$, Mr. Lipschitz obtient les trois relations différentielles sous la forme:

$$\left.\begin{aligned}
\theta^4_0(0) &= 4\frac{d}{d\lg. q}\lg.\frac{\theta_2(0)}{\theta_3(0)}=\frac{d\lg. K^2}{d\lg. q}\ldots \text{ (I)}\\
\theta^4_2(0) &= 4\frac{d}{d\lg. q}\lg.\frac{\theta_3(0)}{\theta(0)}=\frac{d\lg.\frac{1}{K'^2}}{d\lg. q}\ldots \text{ (II)}\\
\theta^4_3(0) &= -4\frac{d}{d\lg. q}\lg.\frac{\theta(0)}{\theta_2(0)}=\frac{d\lg.\frac{K^2}{K'^2}}{d\lg. q}\ldots \text{ (III)}
\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(a)$$

Mr. Hermite a fait voir que ces équations remarquables résultent encore de la formule fondamentale de Jacobi

$$G(z)=\frac{1}{K^2}\left[Hz-\frac{d}{dz}\lg.\theta(z)\right],\quad H=\frac{\theta''(0)}{\theta(0)};\ldots\ldots(b)$$

ce grand géomètre donne en effet les formules

$$\left.\begin{aligned}
0 &=\frac{J}{K}+\frac{4}{\theta^4_3(0)}\cdot\frac{d}{d\lg. q}\lg.\theta\,(0);\\
K^2 &=\frac{J}{K}+\frac{4}{\theta^4_3(0)}\cdot\frac{d}{d\lg. q}\lg.\theta_3(0);\\
1 &=\frac{J}{K}+\frac{4}{\theta^4_3(0)}\cdot\frac{d}{d\lg. q}\lg.\theta_2(0).
\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots(c)$$

pour trouver les relations cherchées.

Je me propose de montrer comment une relation différentielle très-simples conduit rapidement aux formules de Mr. Lipschitz, sans avoir besoin des considérations de cet auteur, pas même des formules (c).

Considérons les intégrales définies

$$\Omega = \int \frac{dx}{\Delta x}; \quad \Omega_1 = \int \frac{x^2\,dx}{\Delta x}; \quad \Delta x = \sqrt{(1-x^2)(1-\mathrm{K}^2 x^2)};$$

relatives à un même cycle partant de l'origine et y revenant; ces valeurs sont deux périodes correspondantes quelconques des intégrales elliptiques de première et de seconde espèces; en dérivant ces intégrales, on trouve

$$\frac{d}{d\mathrm{K}}\Omega = \mathrm{K}\int \frac{x^2\,dx}{(1-\mathrm{K}^2x^2)\,\Delta x}; \quad \frac{d}{d\mathrm{K}}\Omega_1 = \mathrm{K}\int \frac{x^4\,dx}{(1-\mathrm{K}^2x^2)\,\Delta x}.$$

D'après l'égalité

$$\frac{d}{dx}\,\frac{x(1-x^2)}{\Delta x} = \frac{1-x^2}{\Delta x} - \frac{\mathrm{K}'^2 x^2}{(1-\mathrm{K}^2x^2)\,\Delta x}$$

on a par l'intégration

$$\frac{d}{d\mathrm{K}}\Omega = \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{K}'^2}(\Omega - \Omega_1) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (d)$$

On obtient aussi

$$\frac{d}{d\mathrm{K}}\Omega - \mathrm{K}^2\frac{d}{d\mathrm{K}}\Omega_1 = \mathrm{K}\Omega_1$$

alors

$$\frac{d}{d\mathrm{K}}\Omega_1 = \frac{1}{\mathrm{KK}'^2}[\Omega - (2-\mathrm{K}^2)\Omega_1] \ldots\ldots\ldots \quad (e)$$

*

Il en résulte les équations différentielles du second ordre

$$\frac{d}{dK}\left(KK'^2\frac{d}{dK}\Omega\right)=K\Omega;\quad \frac{d}{dK}\left(K^3K'^2\frac{d}{dK}\Omega_1\right)=3K^3\Omega_1 \ldots (f)$$

auxquelles satisfont séparément les périodes Ω et Ω_1.

Considérons maintenant les cycles qui se rapportent à un couple de périodes elliptiques 2ω, ω' de l'intégrale de première espèce. Alors

$$\frac{d}{dK}\omega=\frac{K}{K'^2}(\omega-\omega_1);\quad \frac{d}{dK}\omega'=\frac{K}{K'^2}(\omega'-\omega'_1);\ \ldots\ldots (g)$$

il résulte d'ailleurs que les premières périodes 2ω, 2ω, et les sécondes périodes ω', ω', satisfont aux équations différentielles (d), (e) et (f).

Cela étant, les équations (g) donnent, en vertu des accroissements constants

$$\left.\begin{aligned}\omega_1&=\frac{1}{K^2}H\omega\\ \omega'_1&=\frac{1}{K^2}\left[H+\frac{2\pi i}{\omega.\omega'}\right]\omega'\end{aligned}\right\}$$

que le second membre de la formule (b) éprouve, quand z augmente de ω ou de ω', les deux équations différentielles du premier ordre

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{dK}\omega&=\frac{1}{KK'^2}[K^2-H]\omega\\ \frac{d}{dK}\omega'&=\frac{1}{KK'^2}\left[K^2-H-\frac{2\pi i}{\omega\omega'}\right]\omega'\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots (h)$$

aux quelles satisfont ω, ω'.

Des formules (h) on tire

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dK}\,\mathrm{lg.}\,\omega &= \frac{1}{KK'^2}[K^2-H]; \\ \frac{d}{dK}\,\mathrm{lg.}\,q &= \pi i.\frac{d}{dK}\left(\frac{\omega'}{\omega}\right) = \frac{2\pi^2}{KK'^2.\omega^2}; \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ (i)$$

on en déduit

$$\frac{d\,\mathrm{lg.}\,\omega}{d\,\mathrm{lg.}\,q} = \frac{KK'^2}{2\pi^2}\,\omega\,\frac{d\omega}{dK} \ldots\ldots\ldots\ldots\ (j)$$

La relation différentielle (j) conduit en effet aux relations cherchées.

Remarquons que l'emploie du développement

$$\left.\begin{aligned} \omega &= K^2 \times \varphi(K) \\ \varphi(K) &= \pi\left[\frac{1}{K^2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2.K^2 + \ldots\right] \end{aligned}\right\}$$

dans l'équation (j), donne

$$\frac{d\,\mathrm{lg.}\,K^2}{d\,\mathrm{lg.}\,q} + \frac{d}{d\,\mathrm{lg.}\,q}\,\mathrm{lg.}\,\varphi(K) = \frac{K^3K'^2}{2\pi^2}\,\varphi(K)\left[2K\varphi(K) + \right.$$

$$\left. + K^2\frac{d}{dK}\varphi(K)\right]$$

ou bien

$$\frac{d\,\mathrm{lg.}\,K^2}{d\,\mathrm{lg.}\,q} + \frac{d}{d\,\mathrm{lg.}\,q}\,\mathrm{lg.}\,\varphi(K) = \frac{K^4K'^2}{\pi^2}[\varphi(K)]^2 +$$

$$+ \frac{K^5.K'^2}{2\pi^2}\,\varphi(K)\,\frac{d}{dK}\,\varphi(K).$$

Soit maintenant le multiplicateur égal à l'unité, et

$$\theta(0)=\sqrt{\frac{\omega K'}{\pi}},\quad \theta_2(0)=\sqrt{\frac{\omega K}{\pi}},\quad \theta_3(0)=\sqrt{\frac{\omega}{\pi}};$$

on tire d'abord

$$\frac{K^4.K'^2}{\pi^2}.[\varphi(K)]^2=\theta^4(0);$$

de l'autre côté, il résulte

$$\frac{d}{d\,\mathrm{lg}.\,q}\,\mathrm{lg}.\,\varphi(K)=\frac{K^5.K'^2}{2\pi^2}.[\varphi(K)]^2.\frac{d}{dK}\,\mathrm{lg}.\,\varphi(K)=$$

$$=\frac{K^5.K'^2}{2\pi^2}\varphi(K)\frac{d}{dK}\varphi(K).$$

En conséquence, la formule première (a) est donc démontrée. Si l'on pose

$$\omega=\frac{\psi(K)}{1-K^2}=\frac{1}{K'^2}\psi(K)$$

on obtient tout de même

$$\frac{d}{d\,\mathrm{lg}.\,q}\,\mathrm{lg}.\,\frac{1}{K'^2}+\frac{d}{d\,\mathrm{lg}.\,q}\,\mathrm{lg}.\,\psi(K)=\frac{K}{2\pi^2}\psi(K)\Big[\frac{2K}{K'^4}\psi(K)+$$

$$+\frac{1}{K'^2}\frac{d}{dK}\psi(K)\Big]$$

alors

$$\left.\begin{aligned}&\frac{K^2}{\pi^2K'^4}[\psi(K)]^2=\theta^4{}_2(0);\\&\frac{d}{d\,\mathrm{lg}.\,q}\,\mathrm{lg}.\,\psi(K)=\frac{K}{2\pi^2.K'^2}[\varphi(K)]^2\frac{d}{dK}\,\mathrm{lg}.\,\psi(K);\end{aligned}\right\}$$

on en conclut la formule seconde (a).

Soit encore

$$\omega = \frac{K^2}{K'^2}\chi(K);$$

on déduit

$$\frac{d}{d\,\mathrm{lg.}\,q}\,\mathrm{lg.}\,\frac{K^2}{K'^2} + \frac{d}{d\,\mathrm{lg.}\,q}\,\mathrm{lg.}\,\chi(K) = \frac{K^3}{2\pi^2}\cdot\chi(K)\times$$

$$\times\left[2\frac{K}{K'^4}\chi(K) + \frac{K^2}{K'^2}\frac{d}{dK}\chi(K)\right]$$

ou bien

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{K^4}{\pi^2 . K'^4}[\chi(K)]^2 = \theta^4{}_3(0)\\
&\frac{d}{d\,\mathrm{lg.}\,q}\,\mathrm{lg.}\,\chi(K) = \frac{K^5}{2K'^2\pi^2}[\chi(K)]^2\frac{d}{dK}\,\mathrm{lg.}\,\chi(K).
\end{aligned}\right\}$$

On obtient ainsi la formule troisième (a) par une déduction indépendante des deux autres formules (a) et de l'équation

$$\theta^4{}_3(0) = \theta^4{}_2(0) + \theta^4(0).$$

Je remarque enfin que la formule (j) donne des autres relations. Soit

$$\omega = \Phi(K)\,.\,\mathrm{lg.}\,K^2;$$

il resulte

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{K'^2[\Phi(K)]^2(\mathrm{lg.}\,K^2)^2}{\pi^2} = \theta^4(0)\\
&\frac{d\,\mathrm{lg.}\,\Phi(K)}{d\,\mathrm{lg.}\,q} = \frac{KK'^2}{2\pi^2}(\mathrm{lg.}\,K^2)^2\,.\,\Phi(K)\frac{d}{dK}\Phi(K).
\end{aligned}\right\}$$

Soit encore

$$\omega = \Psi(K)\,.\,\mathrm{lg.}\,\frac{1}{K'^2};$$

on trouve

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{K^2\,[\Psi(K)]^2\left(\lg.\dfrac{1}{K'^2}\right)^2}{\pi^2}=\theta^4{}_2(0)\\
&\frac{d\lg.\Psi(K)}{d\lg.q}=\frac{KK'^2}{2\pi^2}\left(\lg.\frac{1}{K'^2}\right)^2\Psi(K)\frac{d}{dK}\Psi(K).
\end{aligned}\right\}$$

Considérons maintenant

$$\omega=\chi(K)\,.\,\lg.\frac{K^2}{K'^2};$$

il résulte

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{[\chi(K)]^2\,.\left(\lg.\dfrac{K^2}{K'^2}\right)^2}{\pi^2}=\theta^4{}_3(0)\\
&\frac{d\lg.\chi(K)}{d\lg.q}=\frac{KK'^2}{2\pi^2}\left(\lg.\frac{K^2}{K'^2}\right)^2.\chi(K)\frac{d}{dK}\chi(K).
\end{aligned}\right\}$$

On obtient donc

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d\lg.\lg.K^2}{d\lg.q}=\frac{1}{\lg.K^2}\,.\,\theta^4(0)\,\ldots\ldots(\mathrm{IV})\\
&\frac{d\lg.\lg.\dfrac{1}{K'^2}}{d\lg.q}=\frac{1}{\lg.\dfrac{1}{K'^2}}\,.\,\theta^4{}_2(0)\,\ldots\ldots(\mathrm{V})\\
&\frac{d\lg.\lg.\dfrac{K^2}{K'^2}}{d\lg.q}=\frac{1}{\lg.\dfrac{K^2}{K'^2}}\,.\,\theta^4{}_3(0)\,\ldots\ldots(\mathrm{VI})
\end{aligned}\right\}(k)$$

PRINCIPIO FUNDAMENTAL DA THEORIA DAS EQUAÇÕES ALGEBRICAS

(Fragmento d'umas lições)

POR

L. WOODHOUSE

(Professor na Escola Polytechnica do Porto)

Seja

$$F(z) = A_n z^n + A_{n-1} z^{n-1} + \ldots + A_1 z + A_0$$

em que

$$A_j = \rho_j (\cos \omega_j + i \operatorname{sen} \omega_j)$$

e

$$z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta,$$

ou

$$z = x + iy;$$

teremos tambem

$$F(z) = \sum_{j=0}^{j=n} \rho_j r^j [\cos(\omega_j + j\theta) + i \operatorname{sen}(\omega_j + j\theta)].$$

Existirá um valor de r pelo menos e outro de θ para os quaes mod. $F(z)$ será zero.

1. Primeiramente tomemos, a partir da origem das coordenadas O, as rectas OP_0, P_0P_1, ... $P_{n-1}P_n$, cujos comprimentos e posições correspondem aos modulos ρ_0, $\rho_1 r$, ... $\rho_n r^n$ e aos argumentos ω_0, $\omega_1 + \theta$, ... $\omega_n + n\theta$, contados, segundo o modo ordinario, desde um eixo fixo Ox e sempre no mesmo sentido. D'este modo teremos construido um polygono $OP_0P_1 \ldots P_n$, em geral aberto, no qual, tirando OP_n, esta recta representará o modulo de $F(z)$, e o angulo P_nOx, contado no sentido dos precedentes, o seu argumento.

Designemos por M o ponto do plano cujas coordenadas são x e y.

2. Suppondo r constante, mas qualquer, se o ponto M, cujas coordenadas são x e y, descrever um circulo á volta de O, qualquer dos pontos P descreverá uma curva fechada; isto é, P_1 descreverá um circulo á volta de P_0, em quanto P_2 descreverá dois circulos á volta de P_1, etc., descrevendo finalmente P_n n circulos á volta de P_{n-1} e girando todas as rectas $P_j P_{j-1}$ no mesmo sentido. Cada um dos pontos P retomará a posição primitiva quando se tiver effectuado o augmento 2π do angulo θ. Designando por $Q_1, Q_2, \ldots Q_n$ cada uma das curvas, qualquer d'ellas Q_k será pois traçada por um ponto P_k, que descreve k circulos de raio $P_{k-1}P_k$ á volta de outro ponto P_{k-1}, que ao mesmo tempo percorre completamente a curva Q_{k-1}. Em quanto r fôr constante a cada valor de θ corresponde um ponto em cada uma das curvas Q, a posição das quaes será fixa; mas se a r formos attribuindo differentes valores, e para qualquer d'elles fizermos variar θ até $\theta+2\pi$, cada uma das curvas Q irá tambem occupando sobre o plano posições differentes.

Cada curva Q_k estará toda dentro de um circulo C_k cujo centro é O e o raio $\sum\limits_{j=0}^{j=k} \rho_j r^j$, porque esta somma exprime a maxima distancia a que os pontos de Q_k poderão estar de O.

3. Procuremos agora determinar r de modo que $P_{n-1}P_n$ seja maior do que o diametro do circulo C_{n-1} dentro do qual está a curva Q_{n-1}. Devemos satisfazer à desegualdade

$$\rho_n r^n - 2\sum_{j=0}^{j=n-1} \rho_j r^j > 0,$$

ou, designando R o maior dos modulos $\rho_0, \ldots \rho_n$,

$$\rho_n r^n - 2R\frac{r^n-1}{r-1} > 0.$$

Faça-se $2R = \rho_n(r'-1)$, a desegualdade precedente transforma-se em

$$\rho_n r^n - \rho_n \frac{r'-1}{r-1}(r^n-1) > 0,$$

que é evidentemente satisfeita por $r = r'$, sendo

$$r' = 2 \frac{R}{\rho^n} + 1.$$

Seja pois $r = r'$.

Descrevam-se os circulos C_{n-1} e C_n, dentro do primeiro dos quaes existirá a curva Q_{n-1} e Q_n dentro do segundo (*). Consideremos $P_{n-1}P_n$ em uma posição qualquer. O ponto P_{n-1} não poderá sahir de C_{n-1}, nem P_n entrar n'este circulo, e, emquanto P_{n-1} descreve a curva fechada Q_{n-1}, a recta $P_{n-1}P_n$ descreve n circulos, de modo que, se as tangentes DT e D'T' do circulo C_{n-1} se conservarem constantemente parallelas a $P_{n-1}P_n$, o ponto P_n não poderá sahir da figura limitada pelos arcos TT' e DD' e pelas rectas DT e D'T', a qual se moverá sempre no mesmo sentido entre os circulos C_{n-1} e C_n, voltando á posição inicial todas as vezes que $P_{n-1}P_n$ completar um numero qualquer de voltas. Dada a ultima volta, P_{n-1} e P_n vêm tomar as posições iniciaes, fechando-se assim a curva Q_n e de modo tal que encerrará completamente o circulo C_{n-1} e portanto o ponto O. Não será pois possivel seguir caminho algum desde um ponto interior a C_{n-1} até outro exterior a C_n sem cortar uma vez pelo menos a curva Q_n.

4. Sabe-se que é facil determinar um valor r'' de r sufficientemente pequeno para que a desegualdade

$$\sum_{j=1}^{j=n} \rho_j \, r^j < \rho_0$$

seja satisfeita.

(*) Com as seguintes indicações será facil construir a figura a que nos referimos. De O como centro descrevam-se dois circulos C_{n-1} e C_n, sendo este ultimo exterior. Dentro de C_{n-1} tome-se um ponto P_{n-1}. Dentro de C_n, mas fóra de C_{n-1}, tome-se outro ponto P_n. Tire-se a recta $P_{n-1}P_n$ a qual deverá ser maior que o diametro de C_{n-1}. Tirem-se em seguida duas tangentes a C_{n-1} parallelas a $P_{n-1}P_n$. Designem-se por D e D' os pontos de tangencia, e por T e T' os pontos em que estas tangentes prolongadas no sentido $P_{n-1}P_n$ vão cortar o circulo C_n.

Com effeito, sendo R o maior dos modulos $\rho_1, \ldots \rho_n$, temos

$$\sum_{j=1}^{j=n} \rho_j r^j < \mathrm{R}\,(r^n + \ldots + r)$$

ou

$$\sum_{j=1}^{j=n} \rho_j r^j < \mathrm{R}\,\frac{r^{n+1} - r}{r-1}$$

ou ainda, sendo $r < 1$,

$$\sum_{j=1}^{j=n} \rho_j r^j < \mathrm{R}\,\frac{r}{1-r}.$$

Fazendo pois

$$\rho_0 = \mathrm{R}\,\frac{r''}{1-r''}$$

será

$$r'' = \frac{\rho_0}{\rho_0 + \mathrm{R}}.$$

Ora por ser a somma $\sum_{j=1}^{j=n} \rho_j r^j$ a expressão da maxima distancia a que os pontos de Q_n poderão estar de P_0, segue-se que, se tomarmos $r \overline{\overline{<}} r''$, a curva Q_n estará completamente dentro de um circulo cujo centro é P_0 e cujo raio é inferior a ρ_0.

D'este modo o ponto O será exterior a Q_n.

5. O modulo da funcção

$$\mathrm{F}(z) = \mathrm{X} + i\mathrm{Y},$$

em que

$$\mathrm{X} = \sum_{j=0}^{j=n} \rho_j r^j \cos(\omega_j + j\theta), \qquad \mathrm{Y} = \sum_{j=0}^{j=n} \rho_j r^j \operatorname{sen}(\omega_j + j\theta),$$

e θ é qualquer, será uma funcção contínua de r, por serem X e Y funcções contínuas de r; OP_n varía pois continuamente com r qualquer que seja θ.

Se para qualquer valor dado do argumento θ, entre dois valores de r, não se annullar X nem Y, as funcções $\frac{X}{Y}$ e $\frac{Y}{X}$ que representam a tangente e a cotangente de arg. F (z) serão ambas contínuas no intervallo.

Se entre dois valores de r se annullar X ou Y para um ou mais valores de r, uma das funcções $\frac{X}{Y}$ ou $\frac{Y}{X}$ torna-se infinita no intervallo, mas a sua inversa será contínua e arg. F(z), representada pelo angulo $P_n Ox$, variará ainda no intervallo continuamente com r.

Se X e Y se annullam simultaneamente para differentes valores de r no intervallo considerado, então as funcções $\frac{X}{Y}$ e $\frac{Y}{X}$ tornam-se indeterminadas; mas n'este caso será zero o modulo de F(z) tantas vezes quantos os valores de r que tomarem X e Y simultaneamente nullos.

6. Supponhamos agora que r varía continuamente desde $r=r'$ até $r=r''$. A curva Q_n deforma-se conservando-se comtudo fechado, o que é uma consequencia derivada do seu modo de formação. Para $r=r'$ o ponto O será interior á curva Q_n, para $r=r''$ o mesmo ponto será exterior á curva.

Se quizermos admittir que no intervallo de r' para r'' as funcções X e Y se annullam simultaneamente para certos valores de r combinados com valores de θ comprehendidos entre 0 e 2π, admittiremos como consequencia que mod. F(z) se annulla tambem o que precisamente se deseja provar.

Mas se X e Y não se annullam simultaneamente quando r decresce continuamente desde $r=r'$, ou pelo menos em quanto isto não acontece, a curva fechada Q_n deforma-se continuamente, porque os modulos e argumentos de qualquer dos seus pontos serão funcções contínuas de r, e o ponto O para $r=r'$ interior á curva tende a tornar-se exterior, o que não poderá fazer sem cortar a curva uma vez pelo menos em um ponto correspondente a um certo valor de θ comprehendido entre 0 e 2π.

Teremos pois necessariamente

$$\text{mod. } F(z)=0$$

uma vez pelo menos, sendo o argumento de z comprehendido entre 0 e 2π e o seu modulo entre r' e r''.

7. Os valores de z, reaes ou imaginarios, que satisfazem a equação

$$F(z)=0,$$

isto é, as suas raizes, serão pois representados por pontos sobre a porção do plano comprehendida entre dois circulos descriptos de O como centro, e cujos raios r' e r'' determinarão assim dois limites, um superior outro inferior, dos modulos das raizes.

DÉMONSTRATION NOUVELLE DES THÉORÈMES DE PASCAL E DE BRIANCHON

PAR

M. H. LE PONT

Soient dans un plan les six sommets d'un hexagone 1, 2, 3, 4, 5, 6. Prenons pour triangle de référence le triangle de trois sommets 1, 3, 5 par exemple, le côté $x=0$ étant opposé au sommet 1, le côté $y=0$ au sommet 3, le côté $z=0$ au sommet 5. Les équations des côtés de l'hexagone sont alors, λ, μ ν, l, m, n désignant des constantes:

$$(1,2)\ y+\lambda z=0 \quad (2,3)\ z+\mu x=0 \quad (4,5)\ x+\nu y=0$$

$$(6,1)\ y+lz=0 \quad (3,4)\ z+mx=0 \quad (5,6)\ x+ny=0;$$

les coordonnées des sommets:

$$(1)\ y=z=0 \qquad (3)\ z=x=0 \qquad (5)\ x=y=0$$

$$(2)\ \lambda\mu x=y=-\lambda z \quad (4)\ -mx=m\nu y=z \quad (6)\ x=-ny=lnz;$$

les équations des diagonales (1, 4), (2, 5), (3, 6):

$$(1,4)\ z=m\nu y \quad (2,5)\ y=\lambda\mu x \quad (3,6)\ x=lnz;$$

les coordonnées des points de concours P, Q, R des côtés opposés (1, 2) et (4, 5), (2, 3) et (5, 6), (3, 4) et (6, 1):

$$(\mathrm{P})\ x=-\nu y=\lambda\nu z \quad (\mathrm{Q})\ -\mu x=\mu ny=z \quad (\mathrm{R})\ lmx=y=-lz.$$

Or, si nous désignons par x, y et z les distances des points de référence à une droite quelconque du plan, c'est-à-dire, si nous posons:

$$(\dot{1}) \equiv x \qquad (\dot{3}) \equiv y \qquad (\dot{5}) \equiv z$$

les distances des sommets 2, 4, 6 et des points P, Q, R à la même droite seront, en négligeant des facteurs numériques:

$$(\dot{2}) \equiv \lambda\mu x + y - \lambda z \quad (\dot{4}) \equiv -mx + m\nu y + z \quad (\dot{6}) \equiv x - ny + lnz$$

$$(\dot{P}) \equiv x - \nu y + \lambda\nu z \quad (\dot{Q}) \equiv -\mu x + \mu ny + z \quad (\dot{R}) \equiv lmx + y - lz$$

Si nous exprimons alors que les points 1, 2, 3, 4, 5, 6 sont sur une conique, c'est-à-dire que leurs distances d à une droite quelconque satisfont à l'identité caractéristique de Mr. P. Serret (voir, Paul Serret, *Géométrie de Direction*, p. 131):

$$\Sigma^6{}_1\, \theta_i d^2{}_i \equiv 0,$$

où les θ sont des coefficients constants, nous avons l'équation de condition:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \lambda^2\mu^2 & m^2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & m^2\nu^2 & n^2 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda^2 & 1 & l^2n^2 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & -m\nu & ln^2 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2\mu & m & -ln \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda\mu & m^2\nu & n \end{vmatrix} = 0,$$

équation qui se réduit par un calcul facile à celle-ci:

$$\begin{vmatrix} 1 & -\nu & ln \\ \lambda\mu & 1 & -l \\ -\mu & m\nu & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ou en développant:

$$1+\lambda\mu\nu lmn-l\mu\nu+lm\nu+l\mu n+\lambda\mu\nu=0\ldots\ldots\ldots(\alpha)$$

Si nous exprimons maintenant qu'entre les distances des points P, Q, R à une droite absolument quelconque, il existe une relation linéaire et homogène, nous obtenons l'équation de condition:

$$\begin{vmatrix} 1 & lm & -\mu \\ -\nu & 1 & \mu n \\ \lambda\nu & -l & 1 \end{vmatrix}=0,$$

qui s'écrira:

$$1+\lambda\mu\nu lmn-l\mu\nu+lm\nu+l\mu n+\lambda\mu\nu=0.$$

Nous retrouvons ainsi la relation (d). Donc:

Théorème. — Lors qu'il existe entre les carrés des distances de six points d'un plan à une droite quelconque de ce plan une relation linéaire et homogène, il existe aussi une relation linéaire et homogène entre les premières puissances des distances à une droite quelconque des points de concours des côtés opposés de l'hexagone formé par ces six points.

Réciproquement, lors que les distances des points de concours des côtés opposés d'un hexagone plan à une droite quelconque sont liées par une relation linéaire et homogène, les carrés des distances à une droite quelconque des sommets de ces hexagones satisfont aussi à une relation linéaire et homogène.

C'est en cela qui consiste le théorème de Pascal.

Le théorème de Brianchon se démontre de la même manière.

Désignant en effet, par x, y, z les distances d'un point quelconque du plan aux trois droites de référence, les distances de ce poiut aux côtés et aux diagonales de l'hexagone, sont, en négligeant des facteurs constants:

$$\overline{(1,2)}\equiv y+\lambda z \quad \overline{(2,3)}\equiv z+\mu x \quad \overline{(4,5)}\equiv x+\nu y$$
$$\overline{(6,1)}\equiv y+lz \quad \overline{(3,4)}\equiv z+mx \quad \overline{(5,6)}\equiv x+ny$$
$$\overline{(1,4)}\equiv z-m\nu y \quad \overline{(2,5)}\equiv y-\lambda\mu x \quad \overline{(3,6)}\equiv x-lnz$$

Exprimant que les distances D de ce point aux côtés de l'hexagone satisfont à l'identité tangentielle de Mr. P. Serret (voir, loc. cit., p. 74):

$$\Sigma^6{}_1 \Theta_i D^2{}_i = 0$$

nous obtenons l'équation de condition:

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 & l^2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu^2 & m^2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \nu^2 & n^2 \\ \lambda & l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \nu & n \end{vmatrix} = 0,$$

qui se réduit à:

$$\lambda\mu\nu lmn - 1 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\beta)$$

D'autre part, si nous exprimons qu'entre les distances d'un point absolument quelconque du plan aux trois diagonales il existe une relation linéaire et homogène, nous obtenons la condition:

$$\begin{vmatrix} 0 & -ln & 1 \\ 1 & 0 & -m\nu \\ -\lambda\mu & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

qui s'écrira:

$$\lambda\mu\nu lmn - 1 = 0$$

ce que n'est autre que la condition (β). Donc:

Théorème. — Lors qu'il existe entre les carrés des distances d'un point quelconque du plan aux six côtés d'un hexagone une relation linéaire et homogène, il existe aussi une relation linéaire et homogène entre les premières puissances des distances d'un point quelconque du plan aux trois droites qui joignent les sommets opposés de cet hexagone. Réciproquement, lors que les distances d'un point quelconque du plan aux trois droites qui joignent les sommets opposés d'un hexagone sont liées par une relation linéaire et homogène, les carrés des distances d'un point quelconque du plan aux six côtés de cet hexagone satisfont aussi à une relation linéaire et homogène.

C'est là précisément ce qui constitue le théorème de Brianchon.

NOTE DE GÉOMÉTRIE

PAR

M. H. Le Pont

1. Les identités caractéristiques données par Mr. P. Serret pour six points d'une conique ou six couples de points conjugués par rapport à cette conique, pour six tangentes à une conique ou six couples de droites conjuguées par rapport à cette courbe, se généralisent facilement dans le cas où on considère six éléments mêlés de même nature, points et couples de points conjugués, tangentes et couples de droites conjuguées. On a en appelant d la distance d'un point H de la conique à une droite quelconque du plan, m et n les distances à une droite quelconque aussi de deux points M e N formant un couple de deux points conjugués par rapport à cette conique:

$$\Sigma^i{}_1\, \theta_p\, d^2{}_h + \Sigma^6{}_{i+1}\, \Theta_k\, m_k\, n_k = 0 \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; \text{(A)}$$

où on fera $i=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$, le premier terme disparaissant pour $i=0$, le dernier pour $i=6$; et l'identité corrélative:

$$\Sigma^i{}_1\, c_p \delta^2{}_p + \Sigma^6{}_{i+1}\, C_k \mu_k \nu_k \equiv 0 \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; \text{(B)}$$

où δ désigne la distance d'un point quelconque du plan à une tangente à la conique, μ et ν les distances de ce point à deux droites conjuguées par rapport à cette courbe.

Ces identités nous permettent de remplacer immédiatement dans tous les théorèmes relatifs aux coniques un point par un couple de points conjugués, une tangente par un couple de droites conjuguées, et réciproquement, un couple de points conjugués par un point, un couple de droites conjuguées par une tangente.

Pour nous borner à un exemple, le théorème de Desargues-Sturm et son corrélatif donnent les théorèmes suivants:

Théorème. — Les coniques conjuguées à quatre mêmes groupes de deux points tels que trois quelconques ne soient pas en ligne droite, déterminent sur une droite quelconque une série de points en involution.

Théorème. — Les tangentes menées par un point quelconque à toutes les coniques conjugués à quatre couples de droites telles que trois quelconques d'entre elles ne passent pas au même point, forment un faisceau en involution.

Remarquons en outre que donner un couple de points conjugués par rapport à une conique ou un couple de droites conjuguées par rapport à cette conique équivaut à une condition simple, et que si nous désignons par p et q les nombres des coniques qui remplissent outre quatre conditions simples celle d'être conjuguée par rapport à un couple de points ou de droites, ces nombres p et q sont précisément les caractéristiques du groupe de coniques considéré.

2. Soient maintenant deux droites MI et NI, μ et ν les distances orthogonales d'un point quelconque O du plan à les deux droites, δ la distance orthogonale de leur point de concours I à une droite quelconque OD passant par le point O, nous avons:

$$\mu = \mathrm{OI} \sin(\mathrm{OI}, \mathrm{IM})$$

$$\nu = \mathrm{OI} \sin(\mathrm{OI}, \mathrm{IN})$$

$$\delta = \mathrm{OI} \sin(\mathrm{OI}, \mathrm{OD})$$

et par suite:

$$\mu\nu = \delta^2 \frac{\sin(\mathrm{OI}, \mathrm{IM}) \operatorname{Sin}(\mathrm{OI}, \mathrm{IN})}{\sin^2(\mathrm{OI}, \mathrm{OD})} \ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha)$$

Prenons deux points M et N, soient m et n leurs distances orthogonales à une droite Δ, Ω la projection orthogonale sur la droite MN d'un point ω de la droite Δ, d la longueur $\Omega\omega$, nous avons:

$$d = \Omega\mathrm{M} \sin(\mathrm{MN}, \Omega\mathrm{M}) = \Omega\mathrm{N} \sin(\mathrm{MN}, \Omega\mathrm{N})$$

$$m = \mathrm{OM} \sin(\Omega\mathrm{M}, \Delta)$$

$$n = \mathrm{ON} \sin(\Omega\mathrm{N}, \Delta)$$

d'où:

$$mn = d^2 \frac{\sin(\Omega M, \Delta) \operatorname{Sin}(\Omega N, \Delta)}{\sin(MN, \Omega M) \operatorname{Sin}(MN, \Omega N)} \ldots\ldots\ldots (\beta)$$

Ces formules (α) et (β) nous permettent de transformer les identités (A) et (B). Les identités:

$$\Sigma^6{}_1\, \Theta_i\, m_i\, n_i \equiv 0$$

$$\Sigma^6{}_1\, C_i\, \mu_i\, \nu_i \equiv 0$$

en particulier deviennent:

$$\Sigma^6{}_1\, \theta_i\, d^2{}_i \equiv 0$$

$$\Sigma^6{}_1\, c_i\, \delta^2{}_i \equiv 0.$$

Donc, si nous appelons centre d'un couples de droites conjuguées le point d'intersection de ces droites, et axe d'un couple de points conjugués la droite qui joint ces points nous avons ces deux théorèmes:

Théorème. — Les centres de six couples de droites conjuguées à une même conique sont les sommets d'un hexagone de Pascal.

Théorème. — Les axes de six couples de points conjugués à une même conique sont les côtés d'un hexagone de Brianchon.

Ces théorèmes ne sont que la transformation par les formules (A), (B), (d) et (β) de ceux de Hesse sur les systemes de triangles conjugués à une même conique.

Nous aurons du reste l'occasion de revenir sur les transformations des identités caractéristiques dans de prochains articles.

SOBRE UMA EQUAÇÃO PERIODICA

POR

José Manuel Rodrigues

Professor na escola do exercito de Lisboa

Existe na analyse uma classe muito notavel de equações que tem a propriedade das suas raizes serem funcções periodicas.

N'esta nota temos por fim apresentar uma d'estas equações.

Theorema. — *Se as funcções* $f(x)$ *e* $\varphi(x)$ *forem funcções intermediarias, as raizes da equação holomorpha*

$$f(z) + \alpha \cdot \varphi(z) = 0$$

são funcções duplamente periodicas, admittindo como periodos os mesmos periodos das funcções.

Com effeito, se fôr constantemente

$$\text{mod.}\left(\alpha \cdot \frac{\varphi(z)}{f(z)}\right) < 1,$$

as raizes da equação

$$f(z) + \alpha \cdot \varphi(z) = 0$$

exprimem-se em funcções das raizes de

$$f(z) = 0$$

por meio da fórmula

$$z = x + \sum \left\{ \frac{(-\alpha)^p}{\Gamma(p+1)} \cdot \frac{d^{p-1}\left(\frac{\varphi(x)}{f'(x)}\right)^p}{dx^{p-1}} \right\}$$

demonstrado a pag. 137 do tom. IV d'este jornal, ou

$$z-x=-\chi(x),$$

pondo

$$\chi(x)=\sum\left\{\frac{(-\alpha)^{p+1}}{\Gamma(p+1)}\cdot\frac{d^{p-1}\left(\frac{\varphi(x)}{f'(x)}\right)^p}{dx^{p-1}}\right\}\ldots\ldots\ldots(a)$$

Consideremos agora as equações

$$f(x+\omega)+\alpha\,.\,\varphi(x+\omega)=0,$$
$$f(x+\omega')+\alpha\,.\,\varphi(x+\omega')=0.$$

Sendo

$$\text{mod.}\left(\alpha\,.\,\frac{\varphi(x+\omega)}{f(x+\omega)}\right)<1$$

e

$$\text{mod.}\left(\alpha\,.\,\frac{\varphi(x+\omega')}{f(x+\omega')}\right)<1,$$

teremos do mesmo modo

$$\chi(x+\omega)=\sum\left\{\frac{(-\alpha)^{p+1}}{\Gamma(p+1)}\cdot\frac{d^{p-1}\left(\frac{\varphi(x+\omega)}{f'(x+\omega)}\right)^p}{dx^{p-1}}\right\}\ldots\ldots(b)$$

$$\chi(x+\omega')=\sum\left\{\frac{(-\alpha)^{p+1}}{\Gamma(p+1)}\cdot\frac{d^{p-1}\left(\frac{\varphi(x+\omega')}{f'(x+\omega')}\right)}{dx^{p-1}}\right\}\ldots\ldots(c)$$

Ora as funcções $f'(x)$ e $\varphi(x)$ sendo funcções periodicas intermediarias dão

$$\left.\begin{array}{l}\varphi(x+\omega)=\varphi(x)\\ f'(x+\omega)=f'(x)\end{array}\right\}$$

e

$$\left.\begin{aligned}\varphi(x+\omega') &= e^{-\frac{2i\pi}{\omega}(2x+\omega')} + \varphi(x) \\ f'(x+\omega') &= e^{-\frac{2i\pi}{\omega}(2x+\omega')} + f'(x)\end{aligned}\right\}$$

portanto

$$\frac{\varphi(x+\omega)}{f'(x+\omega)} = \frac{\varphi(x)}{f'(x)}$$

e

$$\frac{\varphi(x+\omega')}{f'(x+\omega')} = \frac{\varphi(x)}{f'(x)};$$

logo as fórmulas (b) e (c) reduzem-se á serie primitiva (a), e por consequencia

$$\chi(x+\omega) = \chi(x)$$

$$\chi(x+\omega') = \chi(x)$$

ou

$$\chi(x+\omega+\omega') = \chi(x),$$

e em geral

$$\chi(x+m\omega+n\omega') = \chi(x)$$

como se queria demonstrar.

J. A. MARTINS DA SILVA

Temos hoje a dar aos leitores d'este jornal a triste noticia do fallecimento do nosso illustre collaborador, o sr. J. A. Martins da Silva, tão novo roubado á sciencia, e quando mais esperanças dava o seu bello talento.

Tinha concluido o seu curso na escola polytechnica de Lisboa e principiava a seguir o curso de artilheria na escola do exercito quando escreveu o seu primeiro trabalho, que foi publicado no tomo II d'este jornal, e que foi logo seguido de outros, publicados nos tomos III e IV:

1.° *Sobre uma fórmula integral* (*Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas*, tom. II).

2.° *Sobre a transformação das funcções* X_n *de Legendre* (*Item*, tom. III).

3.° *Sobre a reducção directa d'uma classe de integraes definidos multiplos* (*Item*, tom. III).

4.° *Demonstração d'um theorema de Mr. Besge* (*Item*, tom. III).

5.° *Nota sobre a transformação de um integral definido* (*Item*, tom. III).

6.° *Sobre algumas fórmulas novas relativas ás raizes das equações algebricas* (*Item*, tom. IV).

Todos estes trabalhos foram escriptos durante o tempo em que seguia o curso da escola do exercito. Referem-se ainda a pontos elementares da sciencia, mas revelam já um talento dos mais promettedores.

Depois de concluido o seu curso, em 1881, entrou para o serviço na arma de artilheria, onde aproveitava todo o tempo que lhe ficava disponivel, para estudar a theoria das funcções ellipticas e abelianas, tomando principalmente para guia os excellentes livros de Briot e Bouquet.

A nova orientação dos seus estudos produziu os melhores resultados, e o joven geometra em breve viu coroados os seus esforços chegando a resultados verdadeiramente importantes, que foram publicados nos artigos seguintes:

7.° *Nota sobre a independencia dos zeros na funcção jacobiana de integraes abelianos normaes de primeira especie* (*Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas*, tom. v).

8.° *Sobre uma fórmula relativa á theoria das funcções ellipticas* (*Item*, tom. v).

9.° *Sur une question de la théorie des fonctions elliptiques* (*Bulletin de l'Académie des Sciences de Belgique*, 1885).

10.° *Sur trois relations différentielles données par Mr. Lipschitz dans la théorie des fonctions elliptiques* (*Jornal de Sciencias Mathematicas*, tom. vi).

O artigo 8.° contém uma comparação de duas fórmulas importantes de Analyse, e foi desenvolvido pelo sr. Martins da Silva em dois artigos. O primeiro (9.° da lista) foi apresentado pelo illustre geometra belga, sr. P. Mansion, á Academia das sciencias de Bruxellas, e mandado imprimir no *Bulletin* da mesma Academia (*). O segundo foi por nós apresentado á Academia das sciencias de Lisboa, que votou a impressão no seu jornal.

Estas decisões de duas importantes academias, mandando imprimir trabalhos do sr. Martins da Silva, são a confirmação, para assim dizer, official do seu talento, ás quaes se seguiu em breve a da *Sociedade Mathematica de França*, nomeando-o seu socio por proposta dos srs. Rouché e Comberousse em sessão de 7 de janeiro de 1885.

Já minado pela doença que o havia de levar á sepultura trabalhava ainda, como mostram as seguintes palavras de uma carta que nos escreveu a 21 de abril de 1885:

«Continúo a passar mal, constantemente rouco e cansado, o que me faz afrouxar mais o estudo; não obstante conclui agora um trabalho novo sobre a theoria das funcções ellipticas, onde emprego o methodo da decomposição em fracção simples do sr. Hermite: foi por este motivo que pedi a este grande geometra

(*) Foi o sr. P. Mansion tambem encarregado pela sua Academia de dar parecer sobre este trabalho. Este parecer foi publicado no *Bulletin*, mas ainda não nos foi possivel vêl-o. Mais tarde tencionamos transcrevel-o n'este jornal, assim como os artigos do sr. Martins da Silva que foram publicados fóra do paiz.

O artigo apresentado á Academia das sciencias de Lisboa ainda não foi impresso.

para dar o seu auctorisado parecer. Tive a felicidade de receber resposta favoravel, dizendo elle que as minhas demonstrações são muito elegantes, e lhe era agradavel dizer que a questão encetada já lhe tinha chamado a sua attenção. Encarregou-se tambem de mandar publicar o meu trabalho no *Bulletin* do sr. Darboux.»

Esta carta, que produziu em mim um mixto de prazer e de pezar, foi como que a sua despedida, pois passados alguns mezes, a 12 de novembro de 1885, fallecia, contando apenas 27 annos de idade, pois tinha nascido a 22 de agosto de 1858.

F. GOMES TEIXEIRA.

BIBLIOGRAPHIA

P. Arnaut de Menezes. — Cargas addicionaes nas pontes metallicas para estradas (*Revista de obras publicas,* tomo XVI).

O distincto engenheiro tracta n'este trabalho de determinar a posição em que dois carros, caminhando sobre uma ponte metallica acompanhados por uma multidão de pessoas, produzem o maximo momento de flexão, e o ponto da madre em que elle se realisa, e emfim procura qual é a carga que, distribuida uniformemente por todo o taboleiro, produz no ponto em questão egual momento de flexão.

As fórmulas correspondentes são applicadas á discussão dos regulamentos empregados em Portugal para calcular as madres das pontes metallicas para estradas.

R. B. Martins Pereira. — La rotation et le mouvement curviligne. — Lisbonne, 1885.

N'este opusculo o auctor, professor na escola de medicina de Lisboa, occupa-se da explicação da gravitação, gravidade, cohesão e affinidade por meio dos movimentos dos corpos no ether.

G. Loria. — Ricerche intorno alla Geometria della sfera (*Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino,* tom. XXXVI).

Deve-se a Plücker a idéa de attribuir ao espaço um numero qualquer de dimensões, escolhendo para isso convenientemente a entidade geometrica que se considera como seu elemento; e esta idéa tem sido a origem de trabalhos importantissimos. Têem-se empregado como elementos do espaço, para constituir assim a Geometria, o ponto e a linha recta. Continuando n'esta ordem de idéas, o sr. Loria na sua importante memoria toma para elemento do espaço a esphera. A Geometria assim constituida é a quatro dimensões, e para a estudar o auctor toma para coordenadas cinco quantidades x_1, x_2, etc., que ligadas pela equação

$$x_1 X^{(1)} + x_2 X^{(2)} + \ldots + x_5 X^{(5)} = 0$$

determinam uma esphera qualquer, as quantidades $X^{(1)}$, $X^{(2)}$, etc., determinando de qualquer modo cinco espheras fundamentaes. Para esta ultima determinação o sr. Loria emprega as coordenadas cartesianas, de modo que toma

$$X^{(i)} = (x - \alpha_i)^2 + (y - \beta_i)^2 + (z - \gamma_i)^2 - R^2_i,$$

por causa da vantagem que d'ahi vem para as relações da nova Geometria com a Geometria ordinaria.

São estes os fundamentos das indagações do sr. Loria a respeito da Geometria da esphera, que o levaram a resultados importantes, de que se não póde dar idéa em curta noticia, e de que faz applicação a uma nova classificação das *ciclides*, a cujo estudo destina todo o capitulo terceiro da sua bella memoria.

G. Loria. — *Nuovi studi sulla Geometria della sfera* (*Atti della R. Accademia di Torino*, vol. XX).

—— *Intorno alla Geometria su un complesso tetraedale* (*Item*, vol. XIX).

Dr. A. Bieler. — *Das System*

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)\left(\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} - 1\right) = 0.$$

Marburg, 1885.

E. Cesàro. — *Determinanti in Aritmetica* (*Giornale di Matematiche de Battaglini*, tomo XXIII).
—— *Intorno a taluni determinanti aritmetici* (*Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 1885*).
—— *Gli algoritmi delle funzioni aritmetiche* (*Giornale di Matematiche de Battaglini*, tom. XXIII).
—— *Sull' inversione delle identità aritmetiche* (*Item*).

H. le Pont. — *Notes de Géométrie* (*Journal de Mathématiques spéciales, 1883*).
—— *Théorèmes sur quelques courbes et surfaces remarquables.* — *Cherbourg.*

M. d'Ocagne. — *Sur les raccordements paraboliques* (Mathesis, tomo V).
—— *Sur les isométriques d'une droite par rapport à certains systèmes de courbes planes* (Bulletin *de la Société Mathématique de France*, tom. IX).

P. Mansion. — *Note sur la méthode des moindres carrés* (*Bulletin de l'Académie royale de Belgique, 1885*).
—— *Théorie de l'élimination entre deux équations algébriques.* — *Paris, 1884.*

G. T.

INDICE