plus simple en faisant disparaître les différences $\frac{dF_i}{d\mu}$, $\frac{dF_n}{d\mu}$, $\frac{d^2F_i}{d\mu^2}$, etc., que renferme le second membre. Pour cela, reprenons l'équation (C), n° **16**, en substituant F_i à la place de P_i, on aura

$$\frac{d.(1-\mu^2)\frac{dF_i}{d\mu}}{d\mu}+i(i+1)F_i=0. \quad (t)$$

Il est facile de conclure de cette équation, par la différentiation, la suivante :

$$\frac{d.(1-\mu^2)^m\frac{d^mF_i}{d\mu^m}}{d\mu}+(i-m+1)(i+m)(1-\mu^2)^{m-1}\frac{d^{m-1}F_i}{d\mu^{m-1}}=0.$$

Si l'on multiplie chacun des termes de cette formule par $\frac{d^mF_n}{d\mu^m}$, qu'on intègre par parties le premier terme de l'équation résultante, et qu'on observe que la partie hors du signe $\int$ se réduit d'elle-même à zéro, lorsqu'on y suppose successivement $\mu=1$ et $\mu=-1$, on aura l'équation suivante :

$$\int(1-\mu^2)^m\frac{d^mF_i}{d\mu^m}\frac{d^mF_n}{d\mu^m}d\mu=(i-m+1)(i+m)$$
$$\times\int(1-\mu^2)^{m-1}\frac{d^{m-1}F_i}{d\mu^{m-1}}\frac{d^{m-1}F_n}{d\mu^{m-1}}d\mu.$$

En faisant tour à tour dans cette équation $m=1$, $m=2$, $m=3$, etc., par des substitutions successives, on trouvera généralement :

$$\int(1-\mu^2)^m\frac{d^mF_i}{d\mu^m}\frac{d^mF_n}{d\mu^m}d\mu=(i-m+1)(i-m+2)\ldots(i+m)\int F_iF_nd\mu. \quad (\alpha)$$

Au moyen de cette équation, la formule (s) devient

$$\left.\begin{aligned}\int\!\!\int P_i Y_n d\mu d\omega = 2\pi \{ & A_0 A'_0 + \tfrac{1}{2} i(i+1)(A_1 A'_1 + B_1 B'_1) \\ & + \tfrac{1}{2}(i-1)i(i+1)(i+2)(A_2 A'_2 + B_2 B'_2) \\ & + \text{etc.} \} \int F_i F_n d\mu.\end{aligned}\right\} \quad (v)$$

L'intégrale proposée est donc ramenée à une intégrale simple relative aux quantités F_i et F_n qui sont, comme on sait, deux fonctions entières et rationnelles de μ ou de $\cos\theta$ dont nous avons donné plus haut l'expression générale.

Cela posé, si l'on suppose d'abord i différent de n, d'après le théorème général démontré précédemment, on aura

$$\int\!\!\int P_i Y_n d\mu d\omega = 0; \quad (p)$$

on aura donc aussi, dans ce cas,

$$\int F_i F_n d\mu = 0.$$

Il est facile d'ailleurs de démontrer directement cette proposition en appliquant à l'équation (t), et à l'équation semblable qu'on obtient en y changeant l'indice i en n, l'analyse dont on s'est servi pour démontrer l'équation (p).

Supposons maintenant i égal à n, et voyons ce que devient, dans ce cas, la fonction $\int F_i F_n d\mu$. Si l'on fait $i = n$ dans l'équation (α), on aura

$$\int (1-\mu^2)^i \frac{d^i F_i}{d\mu^i} \frac{d^i F_i}{d\mu^i} d\mu = (1.2.3\ldots 2i) \int F_i F_i d\mu. \quad (a)$$

Or, d'après la valeur générale de F_i, on a

$$F_i = \left(\frac{1.3.5\ldots 2i-1}{1.2.3\ldots i}\right)\left(\mu^i - \frac{i.i-1}{2.2i-1}\mu^{i-2} + \frac{i.i-1.i-2.i-3}{2.4.2i-1.2i-3}\mu^{i-4} - \ldots\right),$$

d'où, en différentiant, on tire

$$\frac{d^i F_i}{d\mu^i} = 1.3.5\ldots 2i-1.$$

L'équation (a), en y substituant cette valeur, donne

$$\int F_i F_i d\mu = \frac{(1.3.5\ldots 2i-1)^2}{1.2.3\ldots 2i} \int (1-\mu^2)^i d\mu$$
$$= \left(\frac{1.3.5\ldots 2i-1}{2.4.6\ldots 2i}\right) \int (1-\mu^2)^i d\mu.$$

On a d'ailleurs, entre les limites $\mu = 1$ et $\mu = -1$,

$$\int (1-\mu^2)^i d\mu = \left(\frac{2.4.6\ldots 2i}{1.3.5\ldots 2i-1}\right)\frac{2}{2i+1}.$$

On aura donc simplement, quel que soit i,

$$\int F_i F_i d\mu = \frac{2}{2i+1}.$$

En faisant donc $i = n$ dans la formule (v), ce qui ne suppose pas que les fonctions P_i et Y_i sont égales, puisque les coefficients A'_0, A'_1, B'_1, etc., sont arbitraires, on aura

$$\iint P_i Y_i d\mu d\varpi = \frac{4\pi}{2i+1}\{A_0 A'_0 + \tfrac{1}{2}i(i+1)(A_1 A'_1 + B_1 B'_1)$$
$$+ \tfrac{1}{2}(i-1)i(i+1)(i+2)(A_2 A'_2 + B_2 B'_2)$$
$$+ \text{etc.}\}.$$

Substituons maintenant dans cette formule à la place de A_0, A_1, B_1, etc., les valeurs que ces lettres représentent; d'après l'expression générale de P_i n° **17**, en désignant par F'_i ce que devient F_i quand on y change μ en μ', il est aisé de s'assurer qu'on aura

$$A_0 = F'_i, \quad A_1 = \frac{2}{i(i+1)} \cos\omega' \sin\theta' \frac{dF'_i}{d\mu'},$$

$$B_1 = \frac{2}{i(i+1)} \sin\omega' \sin\theta' \frac{dF'_i}{d\mu'},$$

$$A_2 = \frac{2}{i-1.i.i+1.i+2} \cos 2\omega' \sin^2\theta' \frac{d^2F'_i}{d\mu'^2},$$

$$B_2 = \frac{2}{i-1.i.i+1.i+2} \sin 2\omega' \sin^2\theta' \frac{d^2F'_i}{d\mu'^2},$$

. . . .

$$A_n = \frac{2}{i-n+1\ldots i\ldots i+n-1.i+n} \cos n\omega' \sin^n\theta' \frac{d^nF_i}{d\mu'^n},$$

$$B_n = \frac{2}{i-n+1\ldots i\ldots i+n-1.i+n} \cos n\omega' \sin^n\theta' \frac{d^nF_i}{d\mu'^n},$$

etc.,

et, par suite,

$$\int P_i Y_i d\mu\, d\omega = \frac{4\pi}{2i+1} \left\{ A'_0 F'_i + (A'_1 \cos\omega' + B'_1 \sin\omega') \sin\theta' \frac{dF'_i}{d\mu'} \right.$$

$$+ (A'_2 \cos 2\omega' + B'_2 \sin 2\omega') \sin^2\theta' \frac{d^2F'_i}{d\mu'^2}$$

$$\left. + \text{etc.} \right\}.$$

Or, la quantité renfermée entre les parenthèses n'est autre chose que le développement de la fonction que nous avons désignée par Y_i dans laquelle on changerait simplement θ et ω en θ' et ω'; en désignant donc par Y'_i cette nouvelle fonction, on aura généralement

$$\iint P_i Y_i d\mu\, d\omega = \frac{4\pi Y'_i}{2i+1}, \quad (p')$$

les limites des intégrales étant les mêmes que précédemment.

C'est le second théorème qu'il s'agissait de démontrer; cette nouvelle propriété dont jouissent les fonctions du genre de celles que nous avons désignées par Y_i, Z_n, est comme la première, d'une grande importance pour l'usage qu'on fait de ces quantités dans la théorie des attractions des sphéroïdes, mais elle est plus restreinte que celle-ci, parce que dans la formule (p) on peut supposer aux fonctions Y_i et Z_n toute la généralité dont elles sont susceptibles, tandis qu'ici nous supposons à l'une d'elles la forme particulière des fonctions que nous avons désignées par P_i.

Si dans l'équation (p') on suppose $Y_i = P_i$, et qu'on observe que lorsqu'on change ω et θ en ω' et θ' dans la fonction $p = \cos\theta \cos\theta' + \sin\theta \sin\theta' \cos(\omega - \omega')$ qui entre dans P_i, on a $p = 1$, et, par suite, $P_i = 1$, il est clair qu'on aura $Y'_i = 1$, et l'équation (p') deviendra

$$\int\!\!\int P_i\, P_i\, d\mu . d\omega = \frac{4\pi}{2i+1}.$$

Les fonctions $F_0, F_1, \ldots, F_i$ sont comprises dans la fonction P_i comme cas particuliers; leurs valeurs doivent donc satisfaire à l'équation précédente, et en effet si l'on substitue F_i à la place de P_i et qu'on observe que cette fonction étant indépendante de ω' l'intégration relative à cette variable s'opère d'elle-même et donne, entre les limites $\omega = 0$ et $\omega = 2\pi$, l'équation $\int\!\!\int F_i F_i d\mu . d\omega = 2\pi \int F_i F_i\, d\mu$, on trouve

$$\int F_i F_i\, d\mu = \frac{2}{2i+1},$$

formule remarquable à laquelle nous sommes déjà parvenus précédemment par un calcul direct.

19. Les formules des n^os **16, 17** et **18** s'appliquent à des sphéroïdes quelconques ; nous allons considérer maintenant en particulier les sphéroïdes très-peu différents de la sphère, et déterminer les fonctions v_0, v_1, etc., v_0, v_1, etc., relativement à ces sphéroïdes. Supposons que le sphéroïde diffère très-peu de la sphère dont le rayon est a ; soit r' le rayon mené de l'origine des r à la surface du sphéroïde ; on aura $r' = a(1 + \alpha y')$, α étant un très-petit coefficient constant dont on peut négliger le carré et les puissances supérieures, et y' une fonction de sinus et cosinus de θ' et ω', qui détermine la position du rayon r' et qui dépend de la nature du sphéroïde. On a généralement pour un point extérieur

$$\mathrm{v}_i = \frac{1}{i+3} \int\int \mathrm{P}_i r'^{i+3} d\mu' d\omega'.$$

En substituant dans cette formule pour r' sa valeur précédente et négligeant les quantités de l'ordre α^2, on aura

$$\mathrm{v}_i = \frac{a^{i+3}}{i+3} \int\int \mathrm{P}_i d\mu' d\omega' + a^{i+3} \alpha \int\int \mathrm{P}_i y' d\mu' d\omega'.$$

On a d'ailleurs généralement, par ce qui a été démontré n° **18**, i étant différent de zéro,

$$\int\int \mathrm{P}_i d\mu' d\omega' = 0 ;$$

on aura donc simplement

$$\mathrm{v}_i = a^{i+3} \alpha \int\int \mathrm{P}_i y' d\mu' d\omega'$$

Lorsque $i = 0$, on a, n° **17**, $\mathrm{P}_0 = 1$, et l'intégrale relative à ω' devant être prise depuis $\omega' = 0$ jusqu'à $\omega' = 2\pi$, celle qui se rapporte à μ', depuis $\mu' = 1$ jusqu'à $\mu' = -1$, on trouve

$$v_0 = \frac{4\pi a^3}{3} + a^3 \alpha \int\int y' \, d\mu' \, d\omega',$$

d'où l'on voit que, dans l'expression de V, la quantité v_0 sera égale à $\frac{4\pi a^3}{3}$ ou au volume de la sphère dont le rayon est a, plus à une très-petite quantité de l'ordre α, et toutes les autres quantités v_1, v_2, etc., seront très-petites du même ordre.

Supposons généralement

$$\int\int P_i \, y' \, d\mu' \, d\omega' = U_i,$$

on aura

$$v_0 = \frac{4\pi a^3}{3} + a^3 \alpha U_0, \quad v^{(i)} = a^{i+3} \alpha U_i.$$

On aura donc, pour l'expression de V relative à un point extérieur,

$$V = \frac{4\pi a^3}{3r} + \frac{a^3 \alpha}{r} \cdot \left(U_0 + U_1 \cdot \frac{a}{r} + U_2 \cdot \frac{a^2}{r^2} + \ldots \right). \quad (a)$$

Considérons maintenant l'attraction du sphéroïde sur les points intérieurs. On a généralement, dans ce cas,

$$v_i = \int\int\int \frac{P_i \, dr' \, d\mu' \, d\omega'}{r'^{\,i-1}}.$$

Supposons que V représente l'attraction de la couche dont le rayon de la surface extérieure est R′, et dont la surface intérieure est celle de la sphère du rayon a, en sorte que $R' - a$ est l'épaisseur de cette couche. En intégrant dans ces limites la valeur précédente, on aura

$$v_i = -\frac{1}{i-2} \cdot \int\int \frac{P_i \, d\mu' \, d\omega'}{R'^{\,i-2}},$$

en observant que l'on a, par ce qui précède,

$$\int\int P_i \, d\mu' \, d\omega' = 0.$$

Si l'on substitue dans cette expression $a(1+\alpha y')$ à la place de R′, et qu'on rejette les termes qui s'évanouissent par l'intégration, ainsi que ceux qui sont du second ordre, par rapport à α, la valeur de v_i deviendra

$$v_i = \frac{\alpha}{a^{i-2}} \cdot \int\int \mathrm{P}_i y' d\mu' d\omega' = a^2 \alpha . \frac{1}{a^i} \mathrm{U}_i ;$$

on aura donc

$$\mathrm{V} = a^2 \alpha . \left(\mathrm{U}_0 + \mathrm{U}_1 . \frac{r}{a} + \mathrm{U}_2 . \frac{r^2}{a^2} + \ldots \right) .$$

Telle est l'expression de l'attraction de la couche dont l'épaisseur est $a\alpha y'$ sur le point attiré ; en y joignant la valeur de V relative à l'action de la sphère dont le rayon est a sur le même point, on aura l'attraction entière qu'exerce sur lui le sphéroïde. Or le point attiré est, par hypothèse, situé dans l'intérieur de la sphère et à une distance r de son centre ; on aura donc, nº 5,

$$\mathrm{V} = 2\pi a^2 - \frac{2\pi r^2}{3},$$

et en réunissant les deux parties de V, on aura généralement, relativement aux points intérieurs au sphéroïde,

$$\mathrm{V} = 2\pi a^2 - \frac{2\pi r^2}{3} + a^2 \alpha . \left(\mathrm{U}_0 + \mathrm{U}_1 . \frac{r}{a} + \mathrm{U}_2 . \frac{r^2}{a^2} + \ldots \right) . \quad (b)$$

Les formules (a) et (b) renferment toute la théorie des attractions des sphéroïdes homogènes très-peu différents de la sphère. En différentiant la première par rapport à r, on aura

$$-\frac{d\mathrm{V}}{dr} = \frac{4\pi a^3}{3r^2} + \frac{a^3 \alpha}{r^2} \cdot \left(\mathrm{U}_0 + 2\mathrm{U}_1 . \frac{a}{r} + 3\mathrm{U}_2 . \frac{a^2}{r^2} + \ldots \right) .$$

C'est l'attraction qu'exerce suivant le rayon r le sphéroïde sur un point extérieur. Le premier terme de cette valeur exprime, comme on voit, l'attraction de la sphère dont le rayon est a; les termes suivants sont de l'ordre α. Les deux autres composantes de l'attraction du sphéroïde seraient du même ordre, en sorte qu'aux quantités près de l'ordre du carré de α, l'action totale du corps sur le point attiré est représentée par $-\frac{dV}{dr}$.

Si le point attiré était à la surface même du sphéroïde, on aurait $r = a(1 + \alpha y)$, en désignant par y ce que devient y' quand on y change μ' et ω' en μ et ω. On aura donc alors, en négligeant les quantités de l'ordre α^2,

$$\left.\begin{aligned} V &= \frac{4\pi a^2}{3}\cdot(1-\alpha y) + a^2\alpha.(U_0 + U_1 + U_2 + \ldots) \\ -\left(\frac{dV}{dr}\right) &= \frac{4\pi a}{3}\cdot(1-2\alpha y) + a\alpha.(U_0 + 2U_1 + 3U_2 + \ldots). \end{aligned}\right\} (c)$$

20. Ce cas mérite une attention particulière, parce qu'il existe, pour les points placés à la surface des sphéroïdes peu différents de la sphère, une relation importante entre la fonction V et sa différentielle, qui peut souvent faciliter la recherche de leurs attractions. Pour démontrer cette propriété, reprenons l'expression générale de V :

$$V = \int \frac{r'^2 dr' d\mu' d\omega'}{\sqrt{r^2 - 2rr'.\left[\mu\mu' + \sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\mu'^2}\cos(\omega-\omega')\right] + r'^2}}.$$

Supposons que le sphéroïde soit très-peu différent de la sphère dont le rayon est a, et qui est décrite du même centre; soit $r' = a(1 + \alpha y')$ le rayon mené à la surface du sphéroïde, α étant une très-petite quantité dont on néglige le carré et les puissances supérieures. Il est clair que l'on pourra regarder la fonction V comme composée de deux parties : l'une relative à la sphère du rayon a, et qui est égale à $\frac{4\pi a^3}{3r}$; l'autre relative à l'excès du sphéroïde sur la sphère, et que nous désignerons par u. On aura donc ainsi

$$V = \frac{4\pi a^3}{3r} + u;$$

et l'action qu'exerce le sphéroïde sur le point attiré, sera

$$-\left(\frac{dV}{dr}\right) = \frac{4\pi a^3}{3r^2} - \frac{du}{dr}.$$

Si l'on multiplie par $2r$ cette seconde équation, et qu'on la retranche de la première, on aura

$$V + 2r\frac{dV}{dr} = -\frac{4\pi a^3}{3r} + u + 2r\frac{du}{dr}. \quad (d)$$

Maintenant soit dm' une des molécules de l'excès du sphéroïde sur la sphère, et f sa distance au point attiré ; on aura

$$u = \int\frac{dm'}{f} \quad \text{et} \quad \frac{du}{dr} = \int dm'.\frac{d.\frac{1}{f}}{dr};$$

on aura donc

$$u + 2r\frac{du}{dr} = \int\left(\frac{1}{f} + 2r.\frac{d.\frac{1}{f}}{dr}\right).dm'.$$

Si le point attiré est à la surface du sphéroïde, on a $r = a(1 + \alpha y)$, en désignant par y ce que devient y' lorsque μ' et ω' deviennent μ et ω; mais comme u

et $\frac{du}{dr}$ sont de l'ordre α, et que nous négligeons les quantités de l'ordre α^2, il suffira de faire $r = a$ dans l'équation précédente; on aura donc à la surface du sphéroïde

$$u + 2a.\frac{du}{dr} = \int \left(\frac{1}{f} + 2r.\frac{d.\frac{1}{f}}{dr} \right).dm'.$$

Or, on a généralement $f = \sqrt{a^2 - 2ar\gamma + r^2}$, en désignant par γ le cosinus de l'angle que forme le rayon r' avec la droite menée du centre du sphéroïde au point attiré, ou, ce qui revient au même, en faisant

$$\gamma = \mu.\mu' + \sqrt{1 - \mu^2}\sqrt{1 - \mu'^2}\cos(\omega - \omega').$$

De là on peut conclure aisément, par la différentiation,

$$\frac{1}{f} + 2r.\frac{d.\frac{1}{f}}{dr} = \frac{r^2 - a^2}{f^3}.$$

En observant donc que dm' désignant l'un des élements de l'excès du sphéroïde sur la sphère, on a $dm' = \frac{1}{3} r'^3 d\mu' d\omega' = a^3 \alpha y' d\mu' d\omega'$, on aura

$$u + 2a\frac{du}{dr} = a^3 \alpha \int\int \frac{(r^2 - a^2)\, y'\, d\mu'\, d\omega'}{f^3}. \quad (e)$$

La quantité renfermée sous le signe intégral devient nulle lorsque l'on suppose $r = a$, c'est-à-dire quand le point attiré est à la surface du sphéroïde, à moins cependant que f ne se réduise en même temps à zéro. Or f est nul lorsqu'on y suppose à la fois $\gamma = 1$ et $r = a$, l'intégrale précédente devant être prise entre les limites $\gamma = 1$ et $\gamma = -1$; il est donc nécessaire de savoir ce qu'elle devient dans le premier cas. Si les intégrations étaient effectuées, le facteur commun au numérateur et au dénominateur de la fonction $\int \frac{(r^2 - a^2)\, y'\, d\mu\, d\omega'}{f^3}$ disparaîtrait, et il serait facile ensuite d'avoir sa vraie valeur correspondante à l'hypothèse de $r = a$; mais comme la forme de la fonction y' est généralement inconnue, il faut y parvenir indépendamment de cette intégration. Voici pour cela un procédé très-simple. Supposons en général $y' = f(\mu', \omega')$; il est clair que le second membre de l'équation (e) devient nul, lorsque $r = a$, pour toutes les valeurs de μ' et de ω' qui diffèrent sensiblement de μ et de ω. Si l'on fait donc $\mu' = \mu + h$, et $\omega' = \omega + k$, et qu'on substitue ces valeurs dans l'équation (e), on pourra y regarder h et k comme des quantités infiniment petites. Cela posé, on aura généralement

$$y' = f(\mu, \omega) + \zeta,$$

en représentant par ζ une très-petite quantité du même ordre que h et k. Si l'on substitue cette valeur dans l'équation (e), et qu'on néglige la partie dépendant de ζ, qui sera toujours infiniment petite relativement à la première, en observant que $y = f(\mu, \omega)$, puisque y est ce qui devient y' lorsqu'on y change μ' et ω' en μ et ω, on aura

$$u + 2a \cdot \frac{du}{dr} = a^3 \alpha y\, (r^2 - a^2) \int\int \frac{d\mu'\, d\omega'}{f^3}.$$

Pour faciliter l'intégration, prenons pour origine de l'angle que nous avons désigné par θ, le rayon r, ce qui donne $\mu = 1$, $\sqrt{1-\mu^2} = 0$. On aura simplement alors $f^2 = a^2 - 2ar\mu' + r^2$, et en intégrant par rapport à ϖ', depuis $\varpi' = 0$ jusqu'à $\varpi' = 2\pi$,

$$\iint \frac{d\mu'\, d\varpi'}{f^3} = 2\pi \int \frac{d\mu'}{f^3}.$$

On a d'ailleurs

$$\frac{d\mu'}{f^3} = -\frac{1}{ar} \cdot \frac{df}{f^2},$$

on aura donc en intégrant

$$\int \frac{d\mu'}{f^3} = \frac{1}{ar} \cdot \frac{1}{f}.$$

Cette intégrale devant être prise depuis $\mu' = -1$ jusqu'à $\mu' = +1$, ce qui donne $f = r + a$ et $f = r - a$, on aura, pour sa valeur complète,

$$\frac{1}{ar(r+a)} - \frac{1}{ar(r-a)} = -\frac{2}{r(r^2 - a^2)},$$

par conséquent

$$u + 2a\frac{du}{dr} = -\frac{4\pi a^2 \alpha y}{r}.$$

Si l'on suppose maintenant $r = a$ dans cette équation, on trouve

$$u + 2a\frac{du}{dr} = -4\pi a^2 \alpha y. \quad (g)$$

L'équation (d), en y substituant $a(1 + \alpha y)$ à la place de r, et en observant qu'aux quantités près de l'ordre α, on a $\frac{dV}{dr} = -\frac{4\pi a}{3}$, donne

$$V + 2a \cdot \frac{dV}{dr} = -\frac{4\pi a^2}{3} + 4\pi a^2 \alpha y + u + 2a\frac{du}{dr}.$$

On aura donc, en vertu de l'équation (g), aux quantités près de l'ordre α^2,

$$V + 2a\frac{dV}{dr} = -\frac{4\pi a^2}{3}. \quad (h)$$

Cette équation, extrêmement remarquable, s'étend à tous les sphéroïdes peu différents de la sphère. Elle fait voir que dans la fonction $V + 2a\frac{dV}{dr}$ toutes les quantités de l'ordre α disparaissent, en sorte que cette fonction est la même par rapport à la sphère et au sphéroïde qui en diffère très-peu, quelle que soit d'ailleurs la position du point attiré à la surface de ces deux corps. Cette équation a d'abord été trouvée par Laplace; mais la démonstration qu'il en donne dans le second volume de la *Mécanique céleste*, et qu'il a reproduite ensuite dans le cinquième, a été l'objet d'une controverse fort vive, qui a fait même révoquer en doute par plusieurs géomètres la généralité du théorème qui en résulte. Il me semble que la démonstration qui précède est à l'abri de toute objection sérieuse (*).

21. Les expressions de V et $-\frac{dV}{dr}$ que nous avons trouvées, nº **19**, relativement aux points placés à la surface d'un sphéroïde très-peu différent de la sphère, doivent satisfaire à l'équation (h). En effet, si l'on

(*) *Voir*, sur ce sujet, Lagrange, *Journal de l'École Polytechnique*, tome VIII; M. Ivory, *Transactions philosophiques*, tome CII; M. Poisson, *Connaissance des Temps* pour 1831. a 1832.

substitue dans cette équation pour V et $\frac{dV}{dr}$ leurs valeurs (c), n° **19**, on trouvera

$$4\pi y = U_0 + 3U_1 + 5U_2 \ldots + (2i+1)U_i + \ldots.$$

La fonction y peut donc toujours se développer dans une série de cette forme,

$$y = Y_0 + Y_1 + Y_2 \ldots + Y_i + \ldots,$$

les quantités Y_0, Y_1, etc., étant des fonctions rationnelles de μ, $\sqrt{1-\mu^2}.\cos\omega$, $\sqrt{1-\mu^2}.\sin\omega$, qui satisfont à l'équation aux différences partielles (C). Cette réduction est indépendante de la forme de la fonction y, et doit être considérée comme une propriété résultante des attractions des sphéroïdes peu différents de la sphère.

Si l'on compare les deux valeurs précédentes de y, en observant qu'on a, n° **19**, $U_i = \int P_i y' \, d\mu' \, d\omega'$, on trouvera généralement

$$\int\int P_i y' \, d\mu' \, d\omega' = \frac{4\pi Y_i}{2i+1}. \quad (l)$$

On a d'ailleurs, en représentant par Y'_0, Y'_1, etc., ce que deviennent les quantités Y_0, Y_1, etc., lorsqu'on y change μ et ω en μ' et ω',

$$y' = Y'_0 + Y'_1 + Y'_2 \ldots + Y'_i + \ldots;$$

en observant donc qu'on a généralement, par le n° **18**,

$$\int\int P_i Y'_n \, d\mu' \, d\omega' = 0,$$

n étant un nombre différent de i, l'équation (l) donnera simplement, les intégrales étant prises dans les mêmes limites que précédemment,

$$\int\!\!\int P_i Y'_i\, d\mu'\, d\omega' = \frac{4\pi Y_i}{2i+1}, \;(m)$$

équation qui est toujours satisfaite, quel que soit i, en vertu du théorème généralement démontré n° **18**.

La propriété remarquable, dont jouissent les fonctions de la nature de la fonction Y_i, et qui se trouve énoncée dans l'équation (m), pourrait se déduire, comme on voit, de la condition que doit remplir la fonction V relative aux attractions des sphéroïdes peu différents de la sphère, de satisfaire à l'équation (h), n° **20**. Mais comme elle est d'une grande importance dans la théorie de la figure des corps célestes, nous avons cru devoir en donner, n° **18**, une démonstration directe, purement analytique et entièrement indépendante de toute considération relative aux propriétés attractives des sphéroïdes.

La première conséquence qui résulte de l'équation (m), c'est que la fonction y ne peut admettre qu'un seul développement de la forme $Y_0 + Y_2 + Y_i + \ldots$. En effet, supposons que y puisse s'exprimer par les deux séries suivantes :

$$y = Y_0 + Y_1 + Y_2 + \ldots,$$
$$y = Z_0 + Z_1 + Z_2 + \ldots;$$

si l'on y substitue μ' et ω' à la place de μ et ω, et qu'on multiplie par P_i ces deux séries, on aura généralement

$$\frac{2i+1}{4\pi} \int\!\!\int P_i y'\, d\mu'\, d\omega' = Y_i = Z_i;$$

d'où il suit que les deux développements précédents sont identiques.

On peut conclure généralement de l'équation (m) que lorsque le développement de y en série de cette forme $Y_0 + Y_1 + Y_2 + \ldots$, sera connu, on aura, immédiatement et sans intégration, les quantités U_0, U_1, U_2, etc., n° **19**, et les valeurs de V et de $-\frac{dV}{dr}$ deviendront, pour les points extérieurs,

$$\left.\begin{aligned} V &= \frac{4\pi a^3}{3r} + \frac{4\pi a^3\alpha}{r}\cdot\left(Y_0 + \frac{a}{3r}\cdot Y_1 + \frac{a^2}{5r^2}\cdot Y_2 \ldots + \frac{a^i}{(2i+1)r^i}\cdot Y_i + \ldots\right),\\ -\left(\frac{dV}{dr}\right) &= \frac{4\pi a^3}{3r^2} + \frac{4\pi a^3\alpha}{r^2}\cdot\left(Y_0 + \frac{2a}{3r}\cdot Y_1 + \frac{3a^2}{5r^2}\cdot Y_2 \ldots + \frac{(i+1)a^i}{(2i+1)r^i}\cdot Y_i + \ldots\right).\end{aligned}\right\} \quad (n)$$

On aura de même, pour les points intérieurs,

$$\left.\begin{aligned} V &= 2\pi a^2 - \frac{2\pi r^2}{3} + 4\pi a^2\alpha.\left(Y_0 + \frac{r}{3a}\cdot Y_1 + \frac{r^2}{5a^2}\cdot Y_2 \ldots + \frac{r^i}{(2i+1)a^i}\cdot Y_i + \ldots\right),\\ -\frac{dV}{dr} &= \frac{4\pi r}{3} - 4\pi a^2\alpha.\left(\frac{1}{3a}\cdot Y_1 + \frac{2r}{5a^2}\cdot Y_2 \ldots + \frac{ir^{i-1}}{(2i+1)a}\cdot Y_i + \ldots\right).\end{aligned}\right\} \quad (p)$$

Quand le point est situé à la surface du sphéroïde, ces deux dernières formules doivent être identiques avec les premières; et en effet, si l'on y suppose $r = a(1 + \alpha y)$, et qu'on observe que l'on a, par hypothèse,

$$y = Y_0 + Y_1 + Y_2 \ldots + Y_i + \ldots,$$

on trouvera

$$V + 2a\,\frac{dV}{dr} = -\frac{4\pi a^2}{3},$$

équation qui doit exister, comme nous l'avons démontré, pour tous les points de la surface.

Les formules (n), (p) sont dues à Laplace; elles offrent, sous une forme très-simple, les expressions les plus générales des attractions des sphéroïdes peu différents de la sphère. On peut les simplifier encore par les considérations suivantes.

Soit M la masse du sphéroïde que nous supposerons homogène; on aura

$$M = \int r'^2 dr' d\mu' d\omega' = \tfrac{1}{3}\int r'^3 d\mu' d\omega';$$

ou bien, en mettant pour r' sa valeur $a(1 + \alpha y')$,

$$M = \frac{4\pi a^3}{3} + a^3 \alpha \int y' d\mu' d\omega'.$$

Si, à la place de y', on substitue son développement $Y'_0 + Y'_1 + \ldots$, dans cette expression, en remarquant qu'on a généralement par le n° **18**, $\int Y'_i\, d\mu' d\omega' = 0$, i étant différent de zéro, et que l'on a, en vertu de la formule (m), pour le cas où $i = 0$,

$$\int Y'_0\, d\mu' d\omega' = 4\pi Y_0,$$

on trouvera

$$M = \frac{4\pi a^3}{3} + 4\pi a^3 \alpha Y_0.$$

En prenant donc, pour la valeur de a, le rayon de la sphère égale en solidité au sphéroïde, on aura $Y_0 = 0$, et le terme Y_0 disparaîtra de la valeur de y, ainsi que ceux qui en dépendent dans les formules (n) et (p).

On a généralement, en vertu de la formule (l),

$$Y_i = \frac{2i+1}{4\pi} \cdot \iint P_i y' d\mu' d\omega'.$$

Si l'on suppose $i = 1$ dans cette équation, et qu'on substitue à la place de y' son développement, on aura

$$Y_1 = \frac{3}{4\pi}.\int\int P_1 Y'_2 d\mu' d\omega'.$$

D'après la valeur générale de P_i, il est aisé de voir qu'on aura, dans le cas de $i = 1$,

$$P_1 = h\mu' + h' \sqrt{1-\mu'^2} \sin\omega' + h'' \sqrt{1-\mu'^2} \cos\omega',$$

h, h', h'' étant des constantes. On aura donc

$$Y_1 = \frac{3h}{4\pi}.\int\int y' \mu' d\mu' d\omega' + \frac{3h'}{4\pi}.\int\int y' \sqrt{1-\mu'^2}.\sin\omega' d\mu' d\omega'$$
$$+ \frac{3h''}{4\pi}.\int\int y' \sqrt{1-\mu'^2}.\cos\omega' d\mu' d\omega'.$$

Si l'on désigne par dm l'un des éléments de l'excès du sphéroïde sur la sphère, on aura

$$dm = a^3 \alpha.\int\int y' d\mu' d\omega';$$

on peut donc écrire ainsi la valeur de Y_1,

$$Y_1 = H\int a\mu'.dm + H'\int a\sqrt{1-\mu'^2}.\sin\omega'.dm + H''\int a\sqrt{1-\mu'^2}\cos\omega'.dm,$$

H, H', H'' étant trois quantités constantes.

Si l'on désigne par x', y', z' les trois coordonnées rectangulaires de la molécule dm, on aura, aux quantités près de l'ordre α,

$$x' = a\mu', \quad y' = a\sqrt{1-\mu'^2}\sin\omega', \quad z' = a\sqrt{1-\mu'^2}\cos\omega'.$$

Si, de plus, on suppose l'origine des coordonnées au centre de gravité du sphéroïde, on a

$$\int x'dm = 0, \quad \int y'dm = 0, \quad \int z'dm = 0.$$

On aura donc, dans ce cas, $Y_1 = 0$. Le terme dépendant de Y_1 disparaîtra par conséquent dans le développement de y et dans les formules (n) et (p), en prenant pour origine des coordonnées le centre de gravité du sphéroïde. Ce résultat d'ailleurs peut aisément s'étendre, comme nous le verrons, à toute espèce de sphéroïdes.

22. Concevons maintenant le point attiré situé dans l'intérieur d'une couche à très-peu près sphérique; plaçons l'origine des coordonnées au centre, et supposons que le rayon de la surface intérieure soit

$$a + a\alpha.(Y_2 + Y_3 + Y_4 + \ldots),$$

et que le rayon de la surface extérieure soit de la forme

$$a' + a'\alpha.(Y'_1 + Y'_2 + Y'_3 + \ldots).$$

Si l'on désigne par ΔV l'attraction de la couche, il est clair qu'on aura la valeur de ΔV, en retranchant la valeur de V relative au premier sphéroïde, de la valeur de V relative au second; on trouvera ainsi

$$\Delta V = 2\pi.(a'^2 - a^2) + 4\pi\alpha\left[\frac{a'r}{3}\cdot Y'_1 + \frac{r^2}{5}\cdot(Y'_2 - Y_2) + \frac{r^3}{7}\cdot\left(\frac{Y'_3}{a'} - \frac{Y_3}{a}\right) + \ldots\right].$$

Si l'on veut que le point placé dans l'intérieur de la couche soit également attiré de toutes parts, il faut que ΔV se réduise à une fonction indépendante des variables r, θ et ω, puisque les différences partielles de ΔV, prises par rapport à ces quantités, expriment les attractions de la couche sur le point attiré. Cette condition donne $Y'_1 = 0$, et généralement

$$Y'_i = \left(\frac{a'}{a}\right)^{i-2} . Y_i,$$

équation qui détermine le rayon de la surface extérieure lorsque celui de la surface intérieure est donné.

Si la surface intérieure est elliptique, on a

$$Y_3 = 0, \quad Y_4 = 0, \text{ etc.},$$

et par conséquent

$$Y'_3 = 0, \quad Y'_4 = 0;$$

les rayons des surfaces intérieure et extérieure de la couche sont donc

$$a(1 + \alpha Y_2), \quad a'(1 + \alpha Y_2);$$

d'où l'on voit que ces surfaces appartiennent à deux ellipsoïdes semblables et semblablement placés, ce qui s'accorde avec le résultat trouvé nº **8**.

Supposons le rayon de la surface intérieure de la forme $a(1 + \alpha y)$, et le rayon de la surface extérieure de la forme $a(1 + \alpha y + \alpha z)$, z étant une fonction de μ et de ω qu'on pourra développer en une série de cette forme :

$$z = Z_0 + Z_1 + Z_2 + \ldots.$$

On aura, par les formules (n) et (p), relativement aux points intérieurs et extérieurs,

$$\Delta V = \frac{4\pi a^3 \alpha}{r} \cdot \left(Z_0 + \frac{a}{3r} \cdot Z_1 + \frac{a^2}{5r^2} \cdot Z_2 + \ldots\right),$$

$$\Delta' V = 4\pi a^2 \alpha . \left(Z_0 + \frac{r}{3a} \cdot Z_1 + \frac{r^2}{5a^2} \cdot Z_2 + \ldots\right).$$

En différentiant, on aura pour les attractions qu'exerce la couche sur les points extérieurs et intérieurs, suivant le rayon r,

$$-\frac{d.\Delta V}{dr}=\frac{4\pi a^3\alpha}{r^2}\cdot\left(Z_0+\frac{2a}{3r}\cdot Z_1+\frac{3a^2}{5r^2}\cdot Z_2+\ldots\right)$$

$$-\frac{d.\Delta' V}{dr}=\frac{4\pi a^2\alpha}{r}\cdot\left(\frac{r}{3a}\cdot Z_1+\frac{2r^2}{5a^2}\cdot Z_2+\ldots\right).$$

Si l'on suppose donc le point à la surface, qu'on fasse $r=a$ dans ces formules et qu'on les compare ensuite, on aura

$$\frac{d.\Delta' V}{dr}-\frac{d.\Delta V}{dr}=4\pi a\alpha.(Z_0+Z_1+Z_2+\ldots)=4\pi a\alpha z.$$

D'où l'on voit que si deux points sont situés sur le même rayon, l'un à la surface extérieure, l'autre à la surface intérieure du sphéroïde, la différence de l'action de la couche sur les deux points sera proportionnelle à son épaisseur, et la même que si la couche était sphérique.

23. Considérons présentement un sphéroïde hétérogène peu différent de la sphère, et composé de couches homogènes dont la figure et la densité varient suivant une loi quelconque. Soit $a(1+\alpha y)$ le rayon d'une de ces couches; si l'on développe y en série $Y_0+Y_1+Y_2+$ etc., les quantités Y_0, Y_1, Y_2, etc., seront des fonctions de a variables d'une couche à une autre; et en différentiant par rapport à a la première des équations (n), on aura pour la valeur de V relative à la couche dont l'épaisseur est $da+\alpha d.ay$, et dont nous représenterons par ρ la densité,

$$\frac{4\pi}{3r}\cdot\rho da^3+\frac{4\pi\alpha}{r}\cdot\rho d.\left(a^3.Y_0+\frac{a^4}{3r}\cdot Y_1+\frac{a^5}{5r^2}\cdot Y_2+\ldots\right).$$

Si l'on regarde, dans cette différentielle, ρ comme une fonction de a, et qu'on intègre relativement à cette variable, on aura pour la valeur de V qui se rapporte au sphéroïde entier,

$$V=\frac{4\pi}{3r}\cdot\int\rho.d.a^3+\frac{4\pi\alpha}{r}\cdot\int\rho.d.\left(a^3.Y_0+\frac{a^4}{3r}\cdot Y_1+\ldots\right).$$

Les intégrales devront être étendues depuis $a=0$ jusqu'à $a=a'$, en nommant a' la valeur de a correspondante à la surface.

Pour avoir l'attraction du sphéroïde hétérogène sur un point intérieur faisant partie de la couche dont le rayon est $a(1+\alpha y)$, on emploiera la première des formules (n) depuis $a=0$ jusqu'à la valeur de a répondant à cette couche, et la première des formules (p), depuis cette valeur de a jusqu'à $a=a'$, cette dernière valeur se rapportant à la surface. Si, après avoir différentié ces équations par rapport à a, on les multiplie ensuite par ρ, et qu'on intègre leur somme, on aura

$$V=\frac{4\pi}{3r}\cdot\int\rho.da^3+\frac{4\pi\alpha}{r}\cdot\int\rho.d.\left(a^3.Y_0+\frac{a^4}{3r}\cdot Y_1+\frac{a^5}{5r^2}\cdot Y_2+\ldots\right)$$
$$+2\pi.\int\rho.da^2+4\pi\alpha.\int\rho.d.\left(a^2 Y_0+\frac{ar}{3}\cdot Y_1+\frac{r^2}{5}\cdot Y_2+\ldots\right).$$

Cette valeur représente l'attraction du sphéroïde hétérogène sur les points intérieurs. Les deux premières intégrales devront être prises depuis $a=0$ jusqu'à $a=a$, et les deux dernières depuis $a=a$ jusqu'à

$a = a'$. Il faudra en outre, après les intégrations, substituer a au lieu de r, dans les termes multipliés par α, et $\frac{1-\alpha y}{a}$ au lieu de $\frac{1}{r}$, dans les termes qui sont indépendants de α.

24. Nous avons supposé jusqu'ici l'aplatissement du sphéroïde, ou le coefficient α qui en dépend, assez petit pour qu'on pût négliger les puissances de cette quantité supérieures à la première; mais, pour donner plus de généralité aux formules précédentes, il convient de les étendre au cas où l'on a égard aux termes dépendants du carré et des puissances supérieures de l'aplatissement du sphéroïde que l'on considère et qui sera toujours supposé peu différent de la sphère.

Supposons d'abord qu'il s'agisse d'un sphéroïde homogène, dont la densité sera représentée par l'unité. On aura généralement dans ce cas, n° **16**, pour les points extérieurs,

$$V_i = \frac{1}{i+3} \int\int P_i r'^{i+3}\, d\mu'\, d\omega',$$

et pour les points situés dans l'intérieur du sphéroïde,

$$V_i = -\frac{1}{i-2} \int\int \frac{P_i\, d\mu'\, d\omega'}{r'^{i-2}}.$$

Soit, comme dans le n° **19**, $r' = a(1+\alpha y')$ le rayon mené de l'origine des coordonnées, que nous placerons au centre de gravité du sphéroïde, à un point quelconque de la surface, α étant une fraction très-petite, constante et positive, y' une fonction donnée des angles θ' et ω' qui fixent la direction du rayon r'. Si l'on substitue ces valeurs dans les formules précédentes, et qu'on développe les expressions résultantes en séries ordonnées par rapport aux puissances de α, en rejetant les termes qui s'annulent d'eux-mêmes par l'intégration en vertu des propriétés de la fonction P_i, on aura

$$v_i = a^{i+3} \int\int P_i \, d\mu' \, d\omega' \left(\alpha y' + \frac{i+2}{2} \alpha^2 y'^2 + \frac{i+2 \, . \, i+1}{2 \, . \, 3} \alpha^3 y'^3 + \ldots \right),$$

$$v_i = \frac{1}{a^{i-2}} \int\int P_i \, d\mu' \, d\omega' \left(\alpha y' - \frac{i-1}{2} \alpha^2 y'^2 + \frac{i-1 \, . \, i}{2 \, . \, 3} \alpha^3 y'^3 - \ldots \right).$$

Désignons par y ce que devient y' quand on y met θ et ω à la place de θ' et ω', c'est-à-dire la valeur de y à l'endroit où le rayon r traverse la surface du sphéroïde, nous avons vu, n° **21**, que la fonction que y représente, peut toujours se développer en série de la forme

$$y = Y_0 + Y_1 + Y_2 + \ldots.$$

Supposons les puissances successives y^2, y^3, etc., de y, développées de la même manière, en sorte qu'on ait généralement

$$y^{i+1} = Y_0^{(i)} + Y_1^{(i)} + Y_2^{(i)} + \ldots.$$

En substituant ces valeurs dans les deux expressions de v_i, et observant que, d'après les propriétés connues des fonctions P_i et Y_i, on a généralement

$$\int P_i y' \, d\mu' \, d\omega' = \frac{4\pi Y_i}{2i+1},$$

$$\int P_i y'^2 \, d\mu' \, d\omega' = \frac{4\pi Y_i^{(1)}}{2i+1},$$

on trouvera

$$\mathrm{v}_i = \frac{4\pi a^{i+3}}{2i+1}\left(\alpha Y_i + \frac{i+2}{2}\alpha^2 Y_i^{(1)} + \frac{i+2.i+1}{2.3}\alpha^3 Y_i^{(2)} + \ldots\right),$$

$$\mathrm{v}'_i = \frac{4\pi a^2}{2i+1}\left(\alpha Y_i - \frac{i-1}{2}\alpha^2 Y_i^{(1)} + \frac{i-1.i}{2.3}\alpha^3 Y_i^{(2)} + \ldots\right),$$

i étant un nombre entier quelconque différent de zéro. Pour le cas particulier de $i = 0$, on trouvera n° **19**,

$$\mathrm{v}_0 = \frac{4\pi a^3}{3} + 4\pi a^3\left(\alpha Y_0 + \alpha^2 Y_0^{(1)} + \frac{1}{3}\alpha^3 Y_0^{(2)} + \ldots\right),$$

$$\mathrm{v}'_0 = 2\pi a^2 - \frac{2\pi r^2}{3} + 4\pi a^2\left(\alpha Y_0 + \frac{1}{2}\alpha^2 Y_0^{(1)}\right).$$

En substituant ces valeurs dans l'expression de la fonction V, n° **16**, on aura donc généralement,

$$\left.\begin{aligned}
V &= \frac{4\pi a^3}{3r} + \frac{4\pi a^3}{r}\left[\alpha \sum \frac{1}{2i+1}\frac{a^i}{r^i}Y_i + \frac{\alpha^2}{2}\sum \frac{i+2}{2i+1}\frac{a^i}{r^i}Y_i^{(1)}\right. \\
&\qquad\left. + \frac{\alpha^3}{2.3}\sum \frac{i+2.i+1}{2i+1}\frac{a^i}{r^i}Y_i^{(2)} + \ldots\right], \\
V &= 2\pi a^2 - \frac{2\pi r^2}{3} + 4\pi a^2\left[\alpha \sum \frac{1}{2i+1}\frac{r^i}{a^i}Y_i - \frac{\alpha^2}{2}\sum \frac{i-1}{2i+1}\frac{r^i}{a^i}Y_i^{(1)}\right. \\
&\qquad\left. + \frac{\alpha^3}{2.3}\sum \frac{i-1.i}{2i+1}\frac{r^i}{a^i}Y_i^{(2)} + \ldots\right],
\end{aligned}\right\} (q)$$

le signe Σ, dans ces deux séries, devant être étendu à toutes les valeurs entières de i depuis $i = 0$ jusqu'à $i = \infty$; la première s'applique aux points attirés extérieurs au sphéroïde, et la seconde aux points situés dans l'intérieur.

La première des formules précédentes peut subir une importante simplification, lorsqu'on prend pour la quantité a le rayon de la sphère égale en solidité au sphéroïde, et qu'on place l'origine des coordonnées au centre de gravité; voyons ce que deviennent, dans ce cas général, les équations de condition $Y_0 = 0$ et $Y_1 = 0$, trouvées n° **21**, en n'ayant égard qu'à la première puissance de α.

En faisant $i = 0$, dans l'expression générale de V_i relative aux points extérieurs, on a

$$V_0 = \int\int\int r'^2\, dr'\, d\mu'\, d\omega'.$$

Le second membre de cette équation représente le volume entier du sphéroïde, les intégrales étant prises depuis $\theta' = 0$ et $\omega' = 0$, jusqu'à $\theta' = \pi$ et $\omega' = 2\pi$. En intégrant par rapport à r' et en substituant à la place de r'^3 sa valeur $a^3 (1 + \alpha y')^3$, on aura donc, d'après ce que représente la quantité a,

$$\frac{a^3}{3} \int\int (1 + \alpha y')^3\, d\mu'\, d\omega' = \frac{4\pi a^3}{3}.$$

Si, après avoir développé cette équation, on substitue pour y', y'^2 et y'^3 leurs valeurs en séries, qu'on intègre ensuite entre les limites précédentes en ayant égard à l'équation (m), n° **21**, on trouvera

$$Y_0 + \alpha Y_0^{(1)} + \tfrac{1}{3}\alpha^2 Y_0^{(2)} = 0. \quad (r)$$

Désignons par x', y', z' les trois coordonnées rectangulaires de la molécule dm, rapportées au centre de gravité du sphéroïde, on aura par les propriétés de ce centre,

$$\int x'\, dm = 0, \quad \int y'\, dm = 0, \quad \int z'\, dm = 0.$$

Ces équations, en substituant pour x', y', z' et dm leurs valeurs n° **4**, donnent les trois suivantes :

$$\int\int(1+\alpha y')^4 \mu' d\mu' d\omega' = 0,$$

$$\int\int(1+\alpha y')^4 \sqrt{1-\mu'^2}\cos\omega' d\mu' d\omega' = 0,$$

$$\int\int(1+\alpha y')^4 \sqrt{1-\mu'^2}\sin\omega' d\mu' d\omega' = 0.$$

Si, après avoir développé les premiers membres de ces équations, on substitue pour y', y'^2, y'^3 et y'^4 leurs valeurs en séries, en observant que les trois quantités μ', $\sqrt{1-\mu'^2}\cos\omega'$, et $\sqrt{1-\mu'^2}\sin\omega'$ peuvent être considérées comme des valeurs particulières de la fonction P_1, dont l'expression générale est, n° **21**,

$$h\mu' + h'\sqrt{1-\mu'^2}\sin\omega' + h''\sqrt{1-\mu'^2}\cos\omega',$$

h, h' et h'' étant des coefficients constants, on trouvera que tous les termes dans lesquels entrent les fonctions Y'_i, $Y'^{(1)}_i$, $Y'^{(2)}_i$, etc., avec un indice différent de 1, disparaissent en vertu de l'équation (p), n° **18**, et qu'en effectuant les intégrations relatives à μ' et ω' dans les limites ordinaires, ces trois équations, en vertu de l'équation (p'), se réduisent à la suivante :

$$Y_1 + \frac{3}{2}\alpha Y_1^{(1)} + \alpha Y_1^{(2)} + \frac{1}{4}\alpha Y_1^{(3)} = 0. \quad (s)$$

Les deux équations (r) et (s) établissent les relations qui doivent exister entre les quantités Y_0, Y_1, $Y_0^{(1)}$, $Y_1^{(1)}$, etc., de manière à satisfaire aux conditions données; on voit que dans l'hypothèse que nous considérons, les deux premiers termes Y_0 et Y_1 du développement de y, sont du premier ordre par rapport à l'aplatissement du sphéroïde, en sorte qu'on peut supposer $Y_0 = 0$ et $Y_1 = 0$ lorsqu'on prend pour a le rayon de la sphère égale en solidité au sphéroïde, pour origine des rayons r son centre de gravité, et qu'on néglige les termes de l'ordre du carré de α. Ces différents résultats s'accordent d'ailleurs avec ceux que nous avons obtenus en n'ayant égard qu'aux termes du premier ordre par rapport à α.

Supposons maintenant, comme dans le nº 23, le sphéroïde composé de couches superposées dont la figure et la densité varient suivant une loi quelconque du centre à la surface, mais en s'écartant toujours très-peu de la figure sphérique. Représentons par ρ la densité que nous supposerons constante dans l'étendue de chaque couche; si, après avoir multiplié les expressions précédentes par cette quantité, on les différentie par rapport à a, on aura la valeur de V relative à une couche très-mince dont le rayon intérieur sera $a(1+\alpha y)$ et l'épaisseur la différentielle $da + \alpha d.ay$. Si l'on intègre ensuite les expressions résultantes en regardant ρ et Y_i comme des fonctions de a, et que, pour abréger, on fasse

$$Q_i^{(n)} = \int \frac{\rho\, d.a^{i+3} Y_i^{(n)}}{da}\, da,$$

les quantités $Q_i^{(n)}$ devant être considérées comme des fonctions de même nature que Y_i, puisque la différentiation et l'intégration indiquées ne portent que sur les coefficients de ces dernières fonctions. Quant à l'intégrale d'où dépend la valeur de $Q_i^{(n)}$, elle doit être étendue depuis $a = 0$ jusqu'à $a = a'$, en représentant par a' la valeur de a qui répond à la surface. On aura ainsi, pour les points extérieurs,

$$V = \frac{4\pi}{3r}\int \rho d.a^3 + \frac{4\pi}{r}\left\{\alpha \sum \frac{1}{(2i+1)r^i} Q_i \right.$$
$$\left. + \frac{\alpha^2}{2}\sum \frac{i+2}{(2i+1)r^i} Q_i^{(1)} + \frac{\alpha^3}{2.3}\sum \frac{i+2.i+1}{(2i+1)r^i} Q_i^{(2)} + \ldots \right\},$$

l'intégrale $\int$ dans cette valeur devant s'étendre, comme dans celle de Q_i, depuis $a = 0$ jusqu'à $a = a'$, et les intégrales finies Σ devant s'étendre à toutes les valeurs entières et positives de i, y compris *zéro*.

Si le point attiré est situé à l'intérieur du corps, et que $a(1 + \alpha y)$ soit le rayon de la surface inférieure de la couche dont il fait partie, on emploiera, pour déterminer les attractions qu'il éprouve, la première des équations (q) depuis $a = 0$ jusqu'à la valeur de a qui répond à cette couche, et la seconde depuis cette valeur de a jusqu'à celle qui se rapporte à la surface extérieure. En désignant par ρ la densité de chaque couche, et en faisant, pour abréger,

$$Q_i^{(n)} = \int \frac{\rho d.a^{i+3} Y_i^{(n)}}{da} da, \quad Q_i'^{(n)} = \int \frac{\rho d.a^{2-i} Y_i^{(n)}}{da} da,$$

de manière que $Q_i^{(n)}$ et $Q_i'^{(n)}$ soient des quantités de la même nature que $Y_i^{(n)}$, on aura

$$V = \frac{4\pi}{2r}\int \rho d.a^3 + \frac{4\pi}{r}\left[\alpha \sum \frac{1}{(2i+1)r^i} Q_i \right.$$
$$\left. + \frac{\alpha^2}{2}\sum \frac{i+2}{(2i+1)r^i} Q_i^{(1)} + \ldots \right]$$
$$+ 2\pi\int \rho d.a^2 + 4\pi\left[\alpha \sum \frac{r^i}{2i+1} Q_i' - \frac{\alpha^2}{2}\sum \frac{(i-1)r^i}{2i+1} Q_i'^{(1)} + \ldots \right],$$

la première intégrale, ainsi que celle que représente $Q_i^{(n)}$, devant s'étendre depuis $a=0$ jusqu'à $a=a'$ et la seconde, ainsi que l'intégrale représentée par $Q_i'^{(n)}$, depuis $a=a$ jusqu'à $a=a'$.

Les différences partielles des valeurs précédentes de V, prises par rapport aux trois variables r, θ et ω, feront connaître les composantes de l'attraction du sphéroïde sur un point extérieur ou sur les points situés à l'intérieur de sa surface; en faisant $r=a(1+\alpha y)$ dans les formules résultantes, ces attractions seront exprimées en fonction de a et des angles ω et θ qui déterminent la position du point attiré.

25. Il nous reste à montrer comment on peut parvenir à développer la fonction $y=f(\mu,\ \omega)$ dans une série de la forme $Y_0+Y_1+Y_2+\ldots$, les quantités Y_0, Y_1, Y_2, etc., étant déterminées par la condition de satisfaire à l'équation

$$\frac{d.\left[(1-\mu^2).\frac{dY_i}{d\mu}\right]}{d\mu}+\frac{\frac{d^2Y_i}{d\omega^2}}{1-\mu^2}+i(i+1)Y_i=0.$$

Si l'on désigne par K_n le coefficient de $\cos n\omega$ dans la valeur de Y_i, on aura

$$\frac{d.\left[(1-\mu^2).\frac{dK_n}{d\mu}\right]}{d\mu}-\frac{n^2K_n}{1-\mu^2}+i(i+1)K_n=0,$$

et la valeur la plus générale de K_n qui satisfera à cette équation, sera l'expression de $(1-\mu^2)^{\frac{n}{2}}H_n$ du n° **17**, en la multipliant par une constante arbitraire, n° **18**; c'est-à-dire qu'on aura

$$K_n = A_n(1-\mu^2)^{\frac{n}{2}} \cdot \left[\mu^{i-n} - \frac{(i-n)(i-n-1)}{2(2i-1)} \cdot \mu^{i-n-2} + \ldots\right].$$

On aura donc, pour la partie de Y_i dépendante de l'angle $n\omega$,

$$(1-\mu^2)^{\frac{n}{2}} \cdot \left[\mu^{i-n} - \frac{(i-n)(i-n-1)}{2(2i-1)} \mu^{i-n-2} + \ldots\right] \cdot (A_n \cos n\omega + B_n \sin n\omega),$$

A_n et B_n étant deux constantes arbitraires.

Si l'on fait successivement $n=0$, $n=1$, $n=2 \ldots n=i$ dans cette expression, et qu'on ajoute entre elles toutes les fonctions qui en résulteront, leur somme sera l'expression de Y_i, qui renfermera, comme on voit, $2i+1$ arbitraires, B_0, A_1, B_1, etc. Si l'on suppose ensuite $i=0$, $i=1$, etc., on aura les valeurs des fonctions Y_0, Y_1, etc., et leur somme $Y_0 + Y_1 + Y_2 \ldots + Y_s$ renfermera $(s+1)^2$ constantes indéterminées.

Soit maintenant S une fonction donnée, rationnelle et entière, des trois coordonnées rectangulaires x, y, z, qu'il s'agit de développer en série de la forme $Y_0 + Y_1 + Y_2 +$ etc. Voici le moyen qu'on emploiera pour y parvenir. Si l'on transforme les variables x, y, z en trois autres r, μ, ω, déterminées comme dans le n° **4**, on aura

$$x = r\mu, \quad y = r\sqrt{1-\mu^2} . \cos\omega, \quad z = r . \sqrt{1-\mu^2} . \sin\omega,$$

en substituant ces valeurs dans S, cette quantité deviendra fonction rationnelle et entière de μ, $\sqrt{1-\mu^2}\cos\omega$ et $\sqrt{1-\mu^2}\sin\omega$, et l'on pourra la développer en fonction des sinus et des cosinus de l'angle

ω et de ses multiples. Si l'on suppose donc que S soit la fonction la plus générale de l'ordre s, $\sin n\omega$ et $\cos n\omega$, dans ce développement, seront multipliés par des fonctions de la forme

$$(1-\mu^2)^{\frac{n}{2}}.(A\mu^{s-n}+B\mu^{s-n-1}+C\mu^{s-n-2}+\ldots);$$

d'où l'on voit que la partie S dépendante de l'argument $n\omega$ renfermera $2(s-n+1)$ arbitraires. La partie de S qui dépend de l'angle ω et de ses multiples, renfermera donc $s(s+1)$ indéterminées; la partie indépendante de l'angle ω en renfermera $s+1$; la fonction S contiendra donc $(s+1)^2$ constantes indéterminées.

La fonction $Y_0+Y_1+Y_2\ldots+Y_s$ renferme pareillement $(s+1)^2$ arbitraires; il sera donc toujours possible de transformer S dans une fonction de cette forme.

Pour cela, on prendra l'expression la plus générale de Y_s, on la retranchera de S, et l'on déterminera les arbitraires de manière que les puissances et les produits de μ et de $\sqrt{1-\mu^2}$ de l'ordre s disparaissent de la différence $S-Y_s$, qui deviendra ainsi une fonction de l'ordre $s-1$, que l'on désignera par S'. On prendra l'expression la plus générale de $Y_{(s-1)}$ et on la retranchera de S'; on déterminera les arbitraires de manière que les puissances et les produits de μ et de $\sqrt{1-\mu^2}$ de l'ordre $s-1$ disparaissent de la différence $S'-Y_{(s-1)}$, et ainsi de suite. On déterminera successivement de cette manière les fonctions Y_s, $Y_{(s-1)}$, $Y_{(s-2)}$, etc., dont la somme représente S.

CHAPITRE IV.

DE LA FIGURE D'UNE MASSE FLUIDE HOMOGÈNE EN ÉQUILIBRE, ET DOUÉE D'UN MOUVEMENT DE ROTATION.

26. Après avoir développé, dans les chapitres qui précèdent, les formules générales des attractions des sphéroïdes, nous allons les faire servir à la détermination de la figure d'une masse fluide tournant autour d'un axe fixe, et sollicitée par les attractions de toutes ses parties et par la force centrifuge due au mouvement de rotation. Nous supposerons d'abord le fluide homogène : cette question est alors susceptible d'une solution rigoureuse.

Soient a, b, c le trois coordonnées d'un point quelconque de la surface du fluide, P, Q, R les forces accélératrices qui agissent sur ce point, décomposées parallèlement aux axes des coordonnées; prenons pour axe des x l'axe même de rotation; désignons par n la vitesse angulaire commune à tous les points de la masse, et par $r=\sqrt{b^2+c^2}$ la distance à l'axe de rotation du point dont les coordonnées sont a, b, c. La vitesse absolue de ce point sera rn, et rn^2 sera la force centrifuge qui l'anime : on aura donc, n° 39, livre I^{er}, pour l'équation de l'équilibre,

$$\mathrm{P}da+\mathrm{Q}db+\mathrm{R}dc-n^2rdr=0,$$

et cette équation représentera aussi celle de la surface extérieure du fluide.

Supposons maintenant que les seules forces accélératrices qui agissent sur lui, soient les attractions mutuelles de ses éléments; on aura

$$P = -\frac{dV}{da}, \quad Q = -\frac{dV}{db}, \quad R = -\frac{dV}{dc},$$

V désignant la même fonction que dans le n° 1.

L'équation de l'équilibre deviendra donc

$$\frac{dV}{da} \cdot da + \frac{dV}{db} \cdot db + \frac{dV}{dc} \cdot dc + n^2 r dr = 0. \quad (1)$$

La valeur de V dépend de la nature du fluide et de la disposition de ses éléments. On ne peut donc pas déterminer *a priori* la surface de l'équilibre au moyen de l'équation précédente; mais cette équation servira à indiquer, parmi les hypothèses arbitraires que l'on peut faire sur la figure de la masse fluide, celles qui satisfont aux conditions de l'équilibre.

Considérons d'abord une masse fluide homogène à laquelle nous supposerons la figure d'un ellipsoïde dont l'axe des x est l'axe même de rotation; plaçons l'origine des coordonnées au centre de la masse; l'équation de la surface sera alors

$$\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{h'^2} + \frac{c^2}{h''^2} = 1.$$

Dans les ellipsoïdes homogènes, on a, n° 9,

$$-\frac{dV}{da} = \alpha a, \quad -\frac{dV}{db} = 6b, \quad -\frac{dV}{dc} = \gamma c.$$

α, β, γ désignant des quantités indépendantes des trois coordonnées a, b, c. En substituant ces valeurs dans l'équation (1), et en observant que la valeur de r donne $rdr = bdb + cdc$, on aura

$$\alpha.ada + (\beta - n^2).bdb + (\gamma - n^2).cdc = 0.$$

L'équation de l'ellipsoïde, en la différentiant, donne

$$\frac{ada}{h^2} + \frac{bdb}{h'^2} + \frac{cdc}{h''^2} = 0.$$

Pour que ces deux équations coïncident, il faut qu'on ait

$$\frac{h'^2}{h^2} = \frac{\alpha}{\beta - n^2}, \quad \frac{h''^2}{h^2} = \frac{\alpha}{\gamma - n^2}; \quad (a)$$

d'où l'on tire

$$\beta h'^2 - \gamma h''^2 = n^2 (h'^2 - h''^2).$$

Le second membre de cette équation est indépendant du troisième axe h de l'ellipsoïde ; il faut donc que le premier le soit pareillement. Or, il est aisé de voir que l'on satisfait immédiatement à cette condition en supposant $h' = h''$. En effet, l'ellipsoïde est alors de révolution autour de l'axe des x ; d'après les valeurs de B et C, n° **10**, on a dans ce cas $\beta = \gamma$, et les deux équations (a) se réduisent à la suivante :

$$\frac{\alpha}{\beta - n^2} = \frac{h'^2}{h^2}. \quad (b)$$

Si h est le plus petit des trois axes, l'ellipsoïde est aplati ; dans le cas contraire, il est allongé vers les pôles. Supposons d'abord le sphéroïde aplati, et faisons, comme dans le n° 9, $\frac{k'^2-k^2}{k^2}=\lambda^2$, d'où l'on tire $\frac{k'^2}{k^2}=1+\lambda^2$; on a d'ailleurs, en désignant par M la masse de l'ellipsoïde, et nommant ρ la densité, $M=\frac{4}{3}\pi\rho kk'^2$, ou bien $M=\frac{4}{3}\pi\rho\,(1+\lambda^2)\,k^3$. Les formules du n° **10** donneront donc ainsi

$$\alpha=4\pi\rho\,.\frac{1+\lambda^2}{\lambda^3}\cdot(\lambda-\text{arc tang}\lambda),$$

$$6=2\pi\rho\,.\frac{1+\lambda^2}{\lambda^3}\cdot\left(\text{arc tang}\lambda-\frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right).$$

Si l'on substitue ces valeurs dans l'équation (b), et que, pour abréger, on fasse $\frac{n^2}{\frac{4}{3}\pi\rho}=q$, on en tire

$$\text{arc tang}\,\lambda=\frac{9\lambda+2q\lambda^3}{9+3\lambda^2}.\ (2)$$

Cette équation étant résolue par rapport à λ, donnera le rapport des deux axes de l'ellipsoïde. Si la valeur de cette quantité est réelle, il y aura toujours, pour une valeur de n donnée, une figure elliptique qui répondra à l'état d'équilibre; si elle est imaginaire, l'équilibre de la masse fluide ne pourra point exister avec une pareille figure. Enfin, s'il y a plusieurs valeurs de λ qui conviennent à l'équation (2), il y aura aussi plusieurs figures d'équilibre correspondantes à un même mouvement de rotation.

27. Il convient donc de discuter avec soin l'équation (2), et comme elle est transcendante, il faut pour cela recourir aux considérations géométriques, qui sont très-utiles dans ces sortes d'occasions. Faisons donc

$$\varphi = \frac{9\lambda + 2q\lambda^3}{9 + 3\lambda^2} - \text{arc tang}\,\lambda, \quad (3)$$

et regardons φ comme l'ordonnée d'une courbe dont λ représente l'abscisse. On voit d'abord que si l'on change le signe de λ, l'ordonnée φ conserve, au signe près, la même valeur : d'où il suit que la courbe que représente l'équation (3), est semblable du côté des abscisses positives et du côté des abscisses négatives; ses deux branches couperont donc l'axe des abscisses à des distances égales de l'origine, et donneront les mêmes figures de l'équilibre. Il suffira, par conséquent, de considérer la partie qui répond aux abscisses positives. Cela posé, si l'on fait croître λ depuis $\lambda = 0$ jusqu'à $\lambda = \infty$, l'ordonnée φ commence et finit par être positive; d'où il suit qu'entre ces deux limites la courbe coupe un nombre de fois pair l'axe des abscisses, et que par conséquent il y a toujours au moins deux valeurs de λ qui satisfont à l'équilibre.

En différentiant l'équation (3), on trouve

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{6\lambda^2.[q\lambda^4 + (10q - 6)\lambda^2 + 9q]}{(1 + \lambda^2)(9 + 3\lambda^2)^2}, \quad (4)$$

et la supposition de $d\varphi = 0$ donne

$$q\lambda^4 + (10q - 6)\lambda^2 + 9q = 0;$$

d'où l'on tire

$$\lambda^2 = \frac{3}{q} - 5 \pm \sqrt{\left(\frac{3}{q} - 5\right)^2 - 9}. \quad (5)$$

Ce sont les valeurs de λ^2 qui correspondent aux valeurs *maxima* et *minima* de l'ordonnée φ. Comme ces valeurs ne sont qu'au nombre de deux, il est clair que φ n'a qu'un *maximum* et un *minimum* du côté des abscisses positives, ce qui exige que la courbe ne coupe l'axe des abscisses qu'en trois points, en y comprenant l'origine. Il n'y a donc que deux valeurs de λ^2 qui répondent à l'équilibre.

L'équation (5) détermine aussi une limite des valeurs de q, au delà de laquelle l'équilibre n'est plus possible avec une figure elliptique. En effet, si l'on suppose

$$\frac{3}{q} - 5 = 3,$$

il est clair qu'en donnant à q une valeur plus grande que celle qui est déterminée par cette équation, la valeur de λ^2 qui en résultera sera imaginaire; les ordonnées φ ne seront donc susceptibles ni de *maximum* ni de *minimum*, et la courbe ne coupera jamais l'axe des abscisses. L'équation précédente donne

$$q = 0{,}3750, \quad \text{d'où l'on tire} \quad \lambda = 1{,}7322;$$

mais on peut assigner à ces deux quantités des limites plus approchées.

Pour cela, j'observe qu'il peut arriver que la courbe soit simplement tangente à l'axe des abscisses sans le couper; on a alors à la fois $d\varphi = 0$ et $\varphi = 0$.

La première de ces équations donne

$$q = \frac{6\lambda^2}{(1+\lambda^2)(9+\lambda^2)},$$

et cette valeur, substituée dans l'équation (3), donne

$$\text{arc.tang}\,\lambda = \frac{7\lambda^5 + 30\lambda^3 + 27\lambda}{(1+\lambda^2)(3+\lambda^2)(9+\lambda^2)} = \frac{7\lambda^3 + 9\lambda}{(1+\lambda^2)(9+\lambda^2)}.$$

Cette dernière équation, en la résolvant par approximation, donne

$$\lambda = 2{,}5292, \quad \text{d'où l'on tire} \quad q = 0{,}33701,$$

le rapport de l'axe de l'équateur à l'axe des pôles étant exprimé par la quantité $\sqrt{1+\lambda^2}$, il est, dans ce cas, égal à 2,7197.

Nous avons supposé généralement $q = \frac{n^2}{\frac{4}{3}\pi\rho}$; soit T le nombre de secondes que l'ellipsoïde emploie à faire une révolution autour de son axe, $\frac{2\pi}{T}$ sera la vitesse dont est animée la molécule située à l'unité de distance de l'axe de rotation, et la force centrifuge de cette molécule sera $\frac{4\pi^2}{T^2}$; on aura donc

$$q = \frac{\frac{4\pi^2}{T^2}}{\frac{4}{3}\pi\rho}.$$

Il suit de là que, pour les masses de même densité, les quantités q sont proportionnelles à la force centrifuge correspondante au mouvement de rotation, ou en raison inverse du carré du temps de la rotation. La valeur de q, par rapport à la Terre, est de 0,00344957, et la durée de la rotation de cette planète de $0^j{,}99727$; d'où l'on peut conclure que pour une masse fluide de même densité que la Terre, la durée de la rotation correspondante à la limite 0,33701 de q, serait de $0^j,10090$. La masse fluide ne pourra donc pas être en équilibre avec une figure elliptique de révolution, si le temps de sa rotation est moindre que $0^j,10090$; et s'il surpasse cette limite, il y aura toujours deux figures elliptiques, mais non davantage, qui satisferont aux conditions d'équilibre.

Nous avons supposé jusqu'ici l'ellipsoïde aplati aux pôles; voyons maintenant si l'équilibre pourrait exister avec une figure elliptique allongée vers les pôles. Il faut, dans ce cas, faire λ^2 négatif; soit donc $\lambda^2 = -\lambda'^2$, la quantité λ'^2 étant supposée positive et plus petite que l'unité, parce que sans cela $\sqrt{1+\lambda'^2}$ devenant imaginaire, l'ellipsoïde se changerait en un hyperboloïde. Si à la place de λ on substitue sa valeur $\pm\lambda'\sqrt{-1}$ dans l'équation (4), on trouve

$$\frac{d\varphi}{d\lambda'} = \pm\sqrt{-1}\,\frac{6\lambda'^2[(1-\lambda'^2)(9-\lambda'^2)q+6\lambda'^2]}{(1-\lambda'^2)(9-3\lambda'^2)^2},$$

et pour que l'ordonnée φ soit un *maximum*, il faudra supposer

$$(1-\lambda'^2)(9-\lambda'^2)q+6\lambda'^2 = 0.$$

Or il est évident que tous les termes de cette équation étant positifs lorsqu'on donne à λ'^2 une valeur comprise entre $\lambda'^2 = 0$ et $\lambda'^2 = 1$, cette équation est alors impossible : la courbe ne coupe donc jamais l'axe des abscisses entre ces limites; il n'y a donc pas d'équilibre possible avec une figure elliptique allongée vers les pôles.

28. Nous n'avons considéré dans ce qui précède que l'ellipsoïde de révolution, parce que ce cas est en effet le seul qui puisse convenir à la figure des corps planétaires, mais il est curieux d'examiner si l'équilibre pourrait encore subsister dans le cas général d'un ellipsoïde quelconque.

Pour cela, reprenons l'équation

$$6h'^2 - \gamma h''^2 = n^2(h'^2 - h''^2).$$

Si l'on substitue pour 6 et γ ou $\frac{B}{b}$ et $\frac{C}{c}$ leurs valeurs, n° **9**, en faisant, pour abréger,

$$H^2 = (1 + \lambda^2 x^2)(1 + \lambda'^2 x^2),$$

on trouvera

$$\frac{3M}{k^3}\left[\int \frac{h'^2 x^2 dx}{H(1 + \lambda^2 x^2)} - \int \frac{h''^2 x^2 dx}{H(1 + \lambda'^2 x^2)}\right] = n^2(h'^2 - h''^2).$$

Les deux intégrales qui entrent dans cette expression, ayant les mêmes limites, on peut les réduire en une seule, et en vertu des valeurs de λ^2 et λ'^2, n° **9**, l'équation précédente deviendra

$$(h'^2 - h''^2)\int \frac{x^2 dx(1 - x^2)}{H^3} = \frac{n^2 h^3}{3M}(h'^2 - h''^2).$$

On voit donc que l'on peut satisfaire à cette équation en faisant $h' = h''$, ce qui est le cas de l'ellipsoïde de révolution que nous venons de considérer n^{os} **26** et **27**, ou bien h' et h'' ayant des valeurs quelconques, en supposant

$$\int \frac{x^2 dx(1 - x^2)}{H^3} = \frac{n^2 h^3}{3M}.$$

Cette équation donnera le rapport qui doit exister entre les trois axes de l'ellipsoïde pour que l'équilibre soit possible avec une vitesse de rotation donnée.

Si des deux équations (a), n° **26**, on élimine n^2 en observant que l'on a

$$\frac{h'^2}{h^2} = 1 + \lambda^2, \quad \text{et} \quad \frac{h''^2}{h^2} = 1 + \lambda'^2,$$

on trouvera la suivante:

$$\alpha = (6 - \gamma) \cdot \frac{(1 + \lambda^2)(1 + \lambda'^2)}{\lambda'^2 - \lambda^2}.$$

En substituant pour α, 6 et γ leurs valeurs, on aura

$$\int \frac{x^2 dx}{H} = (1 + \lambda^2)(1 + \lambda'^2) \int \frac{x^4 dx}{H^3};$$

ou bien, en réduisant,

$$\int_0^1 \frac{x^2 dx (1 - x^2)(1 - \lambda^2 \lambda'^2 x^2)}{H^3} = 0.$$

Cette équation détermine le rapport qui doit exister entre λ et λ' pour que l'équilibre soit possible, en sorte que l'une de ces deux quantités étant donnée, on en conclura aussitôt la seconde. On voit, par cette équation, que si λ étant quelconque, on suppose $\lambda' = 0$, la valeur de l'intégrale sera positive; si l'on suppose ensuite cette valeur égale à ∞, la valeur de l'intégrale sera négative; il y aura donc toujours entre zéro et l'infini une valeur réelle de λ', qui rendra nul le premier membre de l'équation précédente, et qui, par conséquent, satisfera à l'équilibre.

Pour que l'équation précédente puisse subsister, il faut supposer $\lambda^2 \lambda'^2 > 1$, car sans cela tous les éléments de l'intégrale du premier membre, prise entre les limites zéro et l'unité, étant positifs, leur somme ne pourrait jamais devenir nulle. Or, la condition précédente peut s'écrire ainsi : $\lambda^2 > \frac{1+\lambda^2}{1+\lambda'^2}$, et les valeurs de λ^2 et λ'^2, n° **9**, donnent

$$\lambda^2 = \frac{h'^2 - h^2}{h^2}, \quad \frac{1+\lambda^2}{1+\lambda'^2} = \frac{h'^2}{h''^2};$$

il faut donc, pour l'équilibre, supposer

$$\frac{1}{h^2} > \frac{1}{h'^2} + \frac{1}{h''^2}.$$

Or cette condition établit entre les trois axes de l'ellipsoïde une disproportion beaucoup trop grande pour que le cas que nous venons de considérer puisse être d'aucune application dans la théorie des corps célestes.

Il résulte, de ce qui précède, que, bien que les conditions d'équilibre d'une masse fluide, douée d'un mouvement de rotation, puissent subsister à la rigueur avec un ellipsoïde à trois axes inégaux, on peut continuer, comme les géomètres l'ont fait jusqu'ici, à supposer, dans la question qui nous occupe, à la masse fluide une figure de révolution; le problème est alors susceptible d'une solution complète, parce que les attractions de la masse fluide s'obtiennent dans ce cas sous forme finie.

29. Considérons maintenant les variations de la pesanteur à la surface de l'ellipsoïde. La pesanteur est la résultante de toutes les forces qui agissent sur un point matériel placé à cette surface. Soit p cette résultante; en désignant comme précédemment par $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ les attractions de l'ellipsoïde, par n sa vitesse de rotation, on aura

$$p = \sqrt{a^2\alpha^2 + b^2(6 - n^2)^2 + c^2(\gamma - n^2)}.$$

Il résulte d'abord de cette équation, que la pesanteur aux différents points d'un rayon du sphéroïde est proportionnelle à leurs distances du centre; en sorte que si l'on connaît la pesanteur à la surface, on aura immédiatement celle qui s'exerce dans l'intérieur de l'ellipsoïde.

Considérons en particulier l'ellipsoïde de révolution : on a, dans ce cas,

$$p = \sqrt{a^2\alpha^2 + (b^2 + c^2)(6 - n^2)^2},$$

d'où, en vertu de l'équation (b), on tire

$$p = \alpha\sqrt{a^2 + (b^2 + c^2)\frac{h^4}{h'^4}}.$$

On a d'ailleurs, par l'équation de l'ellipsoïde,

$$\frac{b^2 + c^2}{h'^2} = 1 - \frac{a^2}{h^2},$$

par conséquent,

$$p = \frac{\alpha}{h'}\sqrt{a^2(h'^2 - h^2) + h^4}.$$

A l'équateur, on a $a = 0$, et, par suite, $p = \frac{\alpha h^2}{h'}$; aux pôles, on a $a = h$ et $p = \alpha h$; la pesanteur aux pôles est donc à la pesanteur à l'équateur, comme le diamètre de l'équateur est à l'axe des pôles.

30. Déterminons la relation qui existe en général à la surface de l'ellipsoïde entre la pesanteur et la latitude. Si l'on nomme t la normale à l'ellipsoïde prolongée jusqu'à la rencontre de l'axe de révolution, et qu'on prenne pour plan des x, y, le méridien passant par le point de l'ellipsoïde que l'on considère, on aura, en nommant a et b les coordonnées de ce point,

$$t = b\sqrt{1 + \frac{db^2}{da^2}} = \frac{h'}{h^2}\sqrt{a^2(h'^2 - h^2) + h^4}.$$

On aura donc

$$p = \frac{h^2 \alpha t}{h'^2};$$

d'où il suit que la pesanteur est proportionnelle à la normale de l'ellipsoïde prolongée jusqu'à l'axe de révolution.

Nommons ψ le complément de l'angle compris entre la normale et l'axe de révolution; ψ sera la latitude du point de l'ellipsoïde que l'on considère; on aura ainsi $b = t\cos\psi$. Si l'on substitue cette valeur dans l'équation de l'ellipse, et qu'ensuite on élimine, à l'aide de l'équation résultante, a de la valeur précédente de t, on trouvera

$$t = \frac{h'^2}{h\sqrt{1 + \frac{h'^2 - h^2}{h^2}\cdot\cos^2\psi}};$$

on aura donc

$$p = \frac{h\alpha}{\sqrt{1 + \frac{h'^2 - h^2}{h^2}\cos^2\psi}}.$$

Si, dans cette équation, on substitue pour α sa valeur, et λ^2 à la place de $\frac{h'^2 - h^2}{h^2}$, on trouvera

$$p = \frac{4\pi\rho h\,(1+\lambda^2)\,(\lambda - \text{arc tang}\,\lambda)}{\lambda^3\sqrt{1+\lambda^2\cos^2\psi}}.$$

On aura, au moyen de cette équation, la pesanteur correspondante à une latitude donnée; il ne s'agit plus, pour en faire usage, que de déterminer les constantes qu'elle renferme.

En nommant T le nombre de secondes que l'ellipsoïde emploie à faire une révolution autour de son axe, nous avons trouvé, n° **27**, $q = \frac{\frac{4\pi^2}{T^2}}{\frac{4}{3}\pi\rho}$; on tire de là

$$4\pi\rho = \frac{12\pi^2}{qT^2}.$$

Soit c la longueur d'un degré du méridien, mesuré à la latitude ψ; le rayon osculateur de ce méridien est, par la nature de l'ellipse, $\frac{(1+\lambda^2)h}{(1+\lambda^2\cos^2\psi)^{\frac{3}{2}}}$. On aura par conséquent

$$\frac{(1+\lambda^2)\,h\pi}{(1+\lambda^2\cos^2\psi)^{\frac{3}{2}}} = 180c; \quad (6)$$

et cette équation, combinée avec la précédente, donnera

$$\frac{4\pi\rho h(1+\lambda^2)}{\sqrt{1+\lambda^2\cos^2\psi}} = 180\,c\,(1+\lambda^2\cos^2\psi).\frac{12\pi}{qT^2}.$$

La valeur de p deviendra ainsi

$$p = 180c(1+\lambda^2\cos^2\psi)\frac{\lambda - \text{arc.tang}\,\lambda}{\lambda^3}\,\frac{12\pi}{qT^2};$$

équation qui ne renferme plus que q d'inconnu. Si l'on nomme l la longueur du pendule simple qui fait ses oscillations dans une seconde de temps, on aura, n° **17**, livre I$^{\text{er}}$, $p = \pi^2 l$. En substituant pour p cette valeur, l'équation précédente donnera, pour déterminer q,

$$q = \frac{2160.c.(1 + \lambda^2 \cos^2 \psi).(\lambda - \operatorname{arc\,tang} \lambda)}{\pi \lambda^3 l \mathrm{T}^2}.$$

Cette équation, combinée avec l'équation (3) du n° **27**, fera connaître la valeur de q, et celle de λ, au moyen de la longueur du pendule à secondes et de la grandeur du degré, observées l'une et l'autre à la latitude ψ.

Supposons $\psi = 45°$ et q une très-petite quantité, comme cela a lieu pour la Terre ; ces équations donneront, en les développant,

$$q = \frac{720.c}{\pi l \mathrm{T}^2} - \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{720.c}{\pi l \mathrm{T}^2}\right)^2 + \ldots,$$

$$\lambda^2 = \frac{5}{2} \cdot q + \frac{75}{14} \cdot q^2 + \ldots$$

On a trouvé, par la mesure de l'arc du méridien terrestre, et par l'observation du pendule qui bat les secondes sous le parallèle de 45°,

$$c = 111111^{\mathrm{m}}, \quad l = 0^{\mathrm{m}},993452.$$

On a de plus $\mathrm{T} = 86164''$; on conclura de là

$$q = 0,0034496 ; \quad \lambda^2 = 0,0086877.$$

Cette dernière valeur donne $\sqrt{1 + \lambda^2} = 1,0043344$;

c'est le rapport de l'axe de l'équateur à celui du pôle ;

ces deux axes sont à très-peu près entre eux comme 231,7 est à 230,7, et les pesanteurs aux pôles et à l'équateur sont, comme on l'a vu n° **29**, dans le même rapport.

La quantité $\frac{1}{2}\lambda^2$ exprime aux quantités près du second ordre l'*aplatissement* du sphéroïde, c'est-à-dire l'excès de l'axe de l'équateur sur l'axe du pôle divisé par le premier de ces axes : on a, par ce qui précède, aux quantités près du même ordre, $\frac{1}{2}\lambda^2 = \frac{5}{4}q$. Cette équation établit un rapport qui doit toujours exister, pour les sphéroïdes homogènes très-peu différents de la sphère, entre l'aplatissement du sphéroïde et la quantité q qui exprime dans cette hypothèse le rapport de la force centrifuge à la pesanteur sous l'équateur. En effet, nous avons supposé généralement $q = \frac{n^2}{\frac{4}{3}\pi\rho}$; soit h' le rayon de l'équateur, $h'n^2$ exprimera la force centrifuge d'un point situé sous l'équateur, et $\frac{4}{3}\pi\rho h'$ l'attraction que le sphéroïde exerce sur ce même point. Le rapport de ces deux forces aura donc pour expression $\frac{n^2\sqrt{1+\lambda^2}}{\frac{4}{3}\pi\rho}$, quantité qui coïncide avec la valeur supposée à q lorsqu'on néglige les quantités de l'ordre λ^2. Par conséquent, lorsqu'un fluide homogène tourne autour d'un axe fixe, son aplatissement est égal à cinq fois la force centrifuge à l'équateur divisée par quatre fois l'attraction à la surface. Nous avons vu, d'ailleurs, que dans ce cas la pesanteur au pôle est à la pesanteur à l'équateur comme l'axe de l'équateur est à l'axe du pôle : d'où l'on peut conclure que l'excès de la pesanteur au pôle sur la pesanteur à l'équateur, divisé par la première de ces quantités, est précisément égal à l'excès de l'axe de l'équateur sur l'axe du pôle divisé par le premier de ces deux axes, ou à l'*aplatissement* du sphéroïde; la somme de ces deux quantités est donc égale au double du rapport précédent, c'est-à-dire que l'on a

$$\frac{P'-P}{P'}+\frac{h'-h}{h'}=\frac{5}{2}q. \quad (o)$$

Nous verrons que cette équation subsiste encore dans le cas où l'on suppose le sphéroïde composé de couches superposées dont la densité décroît du centre à la surface; mais dans ce cas les deux termes du premier membre ne sont plus égaux entre eux comme dans le cas d'un fluide homogène; il suffit, en effet, pour que l'équation (o) soit satisfaite, que leurs valeurs varient en sens contraire, de manière que leur somme soit une quantité constante et égale à $\frac{5}{2}q$, c'est-à-dire à cinq fois la moitié du rapport de la force centrifuge à la pesanteur sous l'équateur.

On peut encore déterminer le demi-grand axe h du pôle au moyen de l'équation (6). En effet, en faisant $\psi = 45°$, on en tire

$$h=\frac{180.c.(1+\frac{1}{2}\lambda^2)^{\frac{2}{3}}}{\pi(1+\lambda^2)}=\frac{180.c}{\pi}\cdot(1-\tfrac{1}{4}\lambda^2-\ldots);$$

d'où il résulte, en réduisant cette formule en nombres,

$$h = 6352534^{\text{m}}.$$

Il est à remarquer que la limite que nous avons trouvée pour q, n° **27**, n'est pas, comme on aurait pu l'imaginer, celle où le fluide commencerait à se dissiper en vertu d'un mouvement de rotation trop rapide. En effet, on a vu, n° **29**, que la pesanteur aux pôles est à la pesanteur à l'équateur dans le même rapport que le diamètre de l'équateur est à l'axe des pôles : rapport qui, dans ce cas, est celui de 1 à 2,7197; d'où il faut conclure que si, au delà de la limite 0,33701 de q, l'équilibre ne peut subsister avec une figure elliptique, c'est qu'il est alors impossible de donner à la masse fluide une figure elliptique telle, que la résultante de ses attractions et de la force centrifuge soit perpendiculaire à sa surface.

31. Nous venons de voir, n° **27**, que, pour un mouvement de rotation donné, il sera toujours possible d'assigner deux figures elliptiques de révolution qui satisferont aux conditions d'équilibre ; mais il n'en faut pas conclure que ces deux états d'équilibre correspondent à la même force d'impulsion primitive, parce que le mouvement de rotation, que prend la masse fluide, dépend non-seulement de l'intensité de cette force, mais encore de la manière dont elle lui est appliquée.

En effet, considérons une masse fluide agitée primitivement par des forces d'impulsion quelconques, et ensuite abandonnée à elle-même et à l'attraction mutuelle de toutes ses parties. Par le centre de gravité de la masse, concevons un plan qui soit celui par rapport auquel la somme des aires tracées par chacune des molécules du fluide, multipliées par leurs masses, est un *maximum;* ce plan conservera sans cesse cette propriété, et lorsque, après diverses oscillations du fluide, son mouvement deviendra un mouvement uniforme de rotation autour d'un axe fixe, l'équateur de la masse se confondra avec le plan *maximum* des aires, et l'axe de rotation sera perpendiculaire à ce plan. Soit donc $\mathrm{H}dt$ la somme des aires décrites pendant l'instant dt, à l'époque où la masse commence à s'agiter, par les projections de chacune des molécules fluides sur ce plan, multipliées par les masses de ces molécules; cette somme restera constamment la même pendant toute la durée du mouvement. Or si l'on désigne, comme nous l'avons fait, par n, la vitesse angulaire de rotation commune à toutes les molécules de la masse, et par $\sqrt{b^2+c^2}$ la distance de la molécule dm à l'axe de rotation, l'aire décrite par cet élément, projetée sur le plan de l'équateur et multipliée par sa masse, au bout du temps dt, sera $\frac{ndt}{2}(b^2+c^2)\,dm$. On aura donc

$$\frac{n}{2}\mathrm{S}.(b^2+c^2)\,dm=\mathrm{H},$$

l'intégrale S devant s'étendre à la masse entière du fluide.

Or, $\mathrm{S}.(b^2+c^2)dm$ est le moment d'inertie de la masse relative à l'axe de révolution. Par la nature des ellipsoïdes, ce moment est égal à $\frac{8\pi\rho}{15}\cdot h^5.(1+\lambda^2)^2$. On aura donc

$$\frac{4\pi\rho}{15}\cdot h^5.(1+\lambda^2)^2.n=\mathrm{H}.$$

D'ailleurs, en désignant par M la masse du fluide, on a

$$\frac{4\pi\rho}{3}\cdot h^3.(1+\lambda^2)=\mathrm{M}.$$

Au moyen de ces deux équations, on trouve

$$\frac{n^2}{\frac{4}{3}\pi\rho}=\frac{25\,\mathrm{H}^2\left(\frac{4\pi\rho}{3}\right)^{\frac{1}{3}}(1+\lambda^2)^{-\frac{2}{3}}}{\mathrm{M}^{\frac{10}{3}}}.$$

Nous avons représenté par q cette quantité, dans le n° **26**; en faisant donc $q'=\frac{25\,\mathrm{H}^2(\frac{4}{3}\pi\rho)^{\frac{1}{3}}}{\mathrm{M}^{\frac{10}{3}}}$, on aura $q=q'(1+\lambda^2)^{-\frac{2}{3}}$, et l'équation (2) du même numéro deviendra

$$\frac{9\lambda+2q'\lambda^3(1+\lambda^2)^{-\frac{2}{3}}}{9+3\lambda^2}-\text{arc tang}\lambda=0.$$

On déterminera λ au moyen de cette équation, et en substituant sa valeur dans l'expression de M, on en déduira la valeur de h.

Nommons φ la fonction que représente le premier membre de l'équation précédente; cette fonction doit être égale à zéro, pour satisfaire aux conditions d'équilibre; elle commence par être positive si l'on suppose très-petite la valeur de λ, et elle devient négative lorsqu'on suppose λ infini. Il y a donc toujours entre ces deux limites une valeur de λ qui satisfait à l'équation $\varphi=0$. Par conséquent, quel que soit φ', il y a toujours une figure elliptique qui convient à l'équilibre de la masse fluide.

En différentiant la valeur de φ, on trouve

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{2\lambda^4 \left\{ \frac{27q'}{\lambda^2} + 18q' - [\lambda^2 q' + 18(1+\lambda^2)^{\frac{2}{3}}] \right\}}{(3\lambda^2+9)^2 (1+\lambda^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

La valeur de λ, qui correspond à $\varphi = 0$, rend négative la fonction

$$\frac{27q'}{\lambda^2} + 18q' - [\lambda^2 q' + 18(1+\lambda^2)^{\frac{2}{3}}].$$

Cette fonction conserve ensuite toujours le même signe à mesure qu'on fait croître la valeur de λ, parce que la partie positive $\frac{27q'}{\lambda^2} + 18q'$ diminue sans cesse, tandis que la partie négative $-[\lambda^2 q' + 18(1+\lambda^2)^{\frac{2}{3}}]$ augmente. La courbe dont φ représente l'ordonnée, ne peut donc couper une seconde fois l'axe des abscisses, et, par conséquent, il n'y a qu'une seule valeur de λ qui satisfasse aux conditions de l'équilibre.

Concluons donc de ce qui précède : 1° qu'*une masse fluide homogène, douée d'un mouvement de rotation autour d'un axe fixe, peut toujours être en équilibre avec deux figures elliptiques différentes ;* 2° que *pour une même force d'impulsion primitive, il n'y a qu'une seule figure elliptique qui satisfasse à l'équilibre.*

Le premier de ces résultats suppose que la durée de la rotation de la masse fluide n'est pas au-dessous de la limite que nous lui avons assignée n° 27 ; mais quand bien même cette condition ne serait pas remplie à l'origine du mouvement, il n'en faudrait pas conclure que l'équilibre sera à jamais impossible avec une figure elliptique. On conçoit, en effet, que la masse fluide, après diverses oscillations, peut s'aplatir de plus en plus sans cesser d'être continue, en vertu de la ténacité de ses parties. La durée de la rotation augmente ainsi progressivement, et elle finit par atteindre la limite qui convient à l'équilibre. La masse fluide prend alors la figure d'un ellipsoïde; et l'on voit, en effet, par le second des théorèmes précédents, qui a toute l'étendue possible, que, quelles que soient les forces primitivement imprimées à ce fluide, on peut toujours assigner une figure elliptique qui satisfasse à son équilibre. En général, cette figure est unique, et elle est déterminée par la nature des forces qui ont produit le mouvement. L'axe de rotation est celui des axes passant par le centre de gravité de la masse, par rapport auquel la somme des moments des forces primitives du système était un *maximum*.

CHAPITRE V.

DE LA FIGURE QUI CONVIENT A L'ÉQUILIBRE D'UNE MASSE FLUIDE HOMOGÈNE OU HÉTÉROGÈNE, DOUÉE D'UN MOUVEMENT DE ROTATION, ET DONT LA FIGURE PRIMITIVE EST SUPPOSÉE TRÈS-PEU DIFFÉRENTE DE LA SPHÈRE.

32. Nous venons de démontrer que l'ellipsoïde de révolution satisfait aux conditions d'équilibre d'une masse fluide homogène douée d'un mouvement de rotation autour d'un axe fixe, et nous avons développé les lois que suit la pesanteur et la diminution des degrés du méridien à la surface d'un semblable sphéroïde. Il nous reste à examiner maintenant si la surface elliptique est la seule qui remplisse les conditions précédentes, et s'il existe plusieurs figures de différentes natures qui conviennent à l'équilibre. Cette question, dans toute sa généralité, surpasse les forces de l'Analyse; mais on parvient à la résoudre en la restreignant et en supposant la figure de la masse fluide très-peu différente de la sphère. Cette hypothèse est d'ailleurs conforme à la nature, puisque tous les corps célestes ont, à très-peu près, la forme sphérique, et qu'on peut présumer que leurs molécules, en se rapprochant par la condensation, ont conservé entre elles la même disposition qu'elles avaient à l'état fluide.

Reprenons l'équation de l'équilibre d'une masse fluide homogène trouvée, nº **38**, livre Iᵉʳ, et donnons-lui cette forme

$$V + N = \text{const.}; \quad (a)$$

N représentant généralement l'intégrale de toutes les forces étrangères aux attractions du sphéroïde qui agissent sur les points de sa surface. Si l'on suppose, comme cela a lieu pour la Terre, la Lune, Jupiter et tous les corps célestes, Saturne excepté, que la seule force étrangère qui agit sur la masse fluide est la force centrifuge provenant du mouvement de rotation, on aura

$$N = \tfrac{1}{2}g(b^2 + c^2),$$

a, b et c désignant les coordonnées rectangulaires d'un point quelconque de la surface, et g la force centrifuge du point situé à l'unité de distance de l'axe de rotation. g étant d'ailleurs une très-petite quantité, parce que la supposition que la masse fluide diffère peu de la forme sphérique, exige que les forces qui l'en écartent soient elles-mêmes très-petites.

Plaçons l'origine des coordonnées au centre de gravité de la masse ; soient r le rayon vecteur mené de ce centre à la surface, θ l'angle qu'il forme avec l'axe de rotation, et ω l'angle que forme le plan qui passe par le rayon r et par l'axe de rotation, avec le plan des x, y ; on aura

$$a = r\cos\theta, \quad b = r\sin\theta\cos\omega, \quad c = r\sin\theta\sin\omega.$$

La valeur de N deviendra ainsi,

$$N = \tfrac{1}{2}gr^2\sin^2\theta = \tfrac{1}{3}gr^2 - \tfrac{1}{2}gr^2(\cos^2\theta - \tfrac{1}{3}),$$

et en la substituant dans l'equation d'équilibre, on aura

$$V + \tfrac{1}{3}gr^2 - \tfrac{1}{2}gr^2(\cos^2\theta - \tfrac{1}{3}) = \text{const.} \quad (b)$$

On verra bientôt pour quelle raison nous avons donné à N la forme précédente.

Supposons maintenant, conformément à l'hypothèse, la figure de la masse fluide peu différente de la sphère; on aura dans ce cas, n° **21**,

$$V = \frac{4\pi a^3}{3r} + \frac{4\pi\alpha a^3}{r}\left[Y_0 + \frac{a}{3r}\cdot Y_1 + \frac{a^2}{5r^2}\cdot Y_2 + \frac{a^3}{7r^3}\cdot Y_3 + \ldots\right].$$

On peut faire disparaître de cette valeur les termes en Y_0 et Y_1 en prenant pour a le rayon de la sphère égale en solidité au sphéroïde, et en plaçant l'origine des rayons r à son centre de gravité. Si l'on substitue ensuite cette valeur dans l'équation (b), on aura

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{4\pi a^3}{3r} + \dfrac{4\pi\alpha a^5}{r^3}\cdot\left[\frac{1}{5}\cdot Y_2 + \dfrac{a}{7r}\cdot Y_3 + \ldots\right] + \frac{1}{3}gr^2 - \frac{1}{2}gr^2.(\cos^2\theta - \frac{1}{3}) \\ = \text{const.},\end{array}\right\} (c)$$

et tous les termes de cette équation jouiront de la propriété de satisfaire à l'équation aux différences partielles

$$\frac{d.\sin\theta\,\dfrac{dY_i}{d\theta}}{\sin\theta\, d\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\cdot\frac{d^2Y_i}{d\omega^2} + r\,\frac{d^2.rY_i}{dr^2} = 0,$$

Y_i étant une fonction rationnelle et entière des trois quantités μ, $\sqrt{1-\mu^2}\cos\omega$, $\sqrt{1-\mu^2}\sin\omega$ ou $\cos\theta$, $\sin\theta\cos\omega$ et $\sin\theta\sin\omega$, du degré i.

Il est aisé de voir, en effet, que cette équation est satisfaite lorsqu'on y substitue chacun des deux termes $\frac{1}{3}gr^2$ et $-\frac{1}{2}gr^2(\cos^2\theta - \frac{1}{3})$ à la place de Y_i, ce qui résulte de la forme particulière que l'on a fait prendre à la fonction N.

Cela posé, on a à la surface du sphéroïde $r = a(1 + \alpha y)$; en substituant cette valeur dans l'équation (c), et en négligeant les termes du second ordre en α, ainsi que ceux qui sont multipliés par αg à cause de la petitesse des deux facteurs, on aura

$$\frac{4\pi a^2}{3}(1 - \alpha y) + 4\pi\alpha a^2[\tfrac{1}{5}Y_2 + \tfrac{1}{7}Y_3 + \ldots] + \tfrac{1}{3}ga^2 - \tfrac{1}{2}ga^2(\cos^2\theta - \tfrac{1}{3})$$
$$= \text{const.}$$

Comme la constante du second membre est arbitraire, on peut la supposer déterminée par l'équation

$$\frac{4\pi a^2}{3} + \tfrac{1}{3}ga^2 = \text{const.},$$

et l'équation précédente donnera ainsi

$$y = 3(\tfrac{1}{5}Y_2 + \tfrac{1}{7}Y_3 + \ldots) - \frac{3}{8\pi}\cdot\frac{g}{\alpha}\cdot(\cos^2\theta - \tfrac{1}{3}).$$

Or, nous avons trouvé, n° **21**, pour l'expression générale de y dans les sphéroïdes peu différents de la sphère, l'origine des coordonnées étant au centre de gravité du sphéroïde,

$$y = Y_2 + Y_3 + Y_4 + \ldots,$$

Y_2, Y_3, Y_4, etc., représentant dans cette expression les mêmes fonctions que celles qu'elles désignent dans la valeur de V.

En comparant ces deux valeurs de y, on voit qu'elles ne sauraient avoir lieu en même temps, à moins qu'on n'ait séparément,

$$Y_2 = \tfrac{3}{5}Y_2 - \frac{3}{8\pi}\cdot\frac{g}{\alpha}\cdot(\cos^2\theta - \tfrac{1}{3}),$$

$$Y_3 = 0, \quad Y_4 = 0, \quad Y_5 = 0, \text{ etc.}$$

De la première de ces équations on tire

$$Y_2 = -\tfrac{5}{4}\cdot\frac{g}{\frac{4}{3}\alpha\pi}\cdot(\cos^2\theta - \tfrac{1}{3}).$$

Substituons cette valeur dans l'expression de y et faisons pour abréger $\frac{g}{\frac{4}{3}\pi} = q$; q désignant comme précédemment, n° **30**, le rapport de la force centrifuge à la pesanteur sous l'équateur, et devant être supposé une très-petite quantité du même ordre que α, on aura

$$\alpha y = -\tfrac{5}{4}q(\cos^2\theta - \tfrac{1}{3});$$

on a d'ailleurs

$$r = a(1 + \alpha y).$$

L'expression du rayon de la surface des sphéroïdes deviendra donc

$$r = a[1 - \tfrac{5}{4}q(\cos^2\theta - \tfrac{1}{3})]. \quad (d)$$

Cette équation appartient à un ellipsoïde de révolution dont l'aplatissement est très-petit et égal à $\frac{5q}{4}$, l'origine des coordonnées étant au centre du sphéroïde.

Nous voici donc parvenu à démontrer que la figure elliptique est la seule qui convienne à l'équilibre d'une masse fluide homogène, douée d'un mouvement de rotation, en supposant la figure primitive de cette masse peu différente de celle de la sphère. Nous avons démontré, dans le n° **21**, que l'expression de y ne peut se développer que d'une seule manière, en série de la forme

$$Y_2 + Y_3 + Y_4, \ldots;$$

on peut en conclure encore, par ce qui précède, que la figure elliptique qui satisfait à l'équilibre est unique. Si l'on suppose $q=0$, dans l'équation (d), on a $r=a$; d'où il suit que la sphère est la seule figure que puisse prendre dans l'état d'équilibre une masse fluide homogène et immobile.

33. Nous n'avons eu égard, dans ce qui précède, qu'aux quantités du premier ordre par rapport à α, que nous avons supposé un très-petit coefficient de l'ordre de l'aplatissement du sphéroïde. Quoique cette approximation suffise ordinairement à la comparaison de la théorie à la figure des corps célestes, il ne sera pas inutile, pour donner une application des formules du n° **24**, de porter l'approximation jusqu'aux termes de l'ordre du carré de α.

Pour cela, il nous suffira de substituer dans l'équation (b), n° **32**, à la place de V, sa valeur exacte jusqu'aux quantités du même ordre. En supposant à la surface du sphéroïde, l'expression du rayon vecteur de cette forme $r = a(1 + \alpha y + \alpha^2 z)$, et faisant comme dans le n° **24**,

$$y = Y_0 + Y_1 + Y_2 + Y_3 + \ldots,$$
$$y^2 = Y_0^{(1)} + Y_1^{(1)} + Y_2^{(1)} + Y_3^{(1)} + \ldots,$$
$$z = Z_0 + Z_1 + Z_2 + Z_3 + \ldots$$

Z_0, Z_1, Z_2, etc., représentant des fonctions de même nature que celles que nous avons désignées par Y_0, Y_1, Y_2, etc., il est aisé de voir que pour avoir égard aux quantités qui résultent de l'introduction du terme $\alpha^2 z$ dans l'expression de r, il suffira d'augmenter respectivement chacune des quantités Y_0, Y_1, Y_2, etc., des quantités correspondantes αZ_0, αZ_1, αZ_2, etc., dans les expressions (q) de V du nº **24**; on trouvera ainsi, relativement aux points extérieurs, en négligeant les termes de l'ordre α^3,

$$V = \frac{4\pi a^3}{3r} + \frac{4\pi a^3 \alpha}{r}\Big\{ Y_0 + \alpha Y_0^{(1)} + \alpha Z_0 + \frac{a}{3r}(Y_1 + \tfrac{3}{2}\alpha Y_1^{(1)} + \alpha Z_1) + \frac{a^2}{5r^2}(Y_2 + 2\alpha Y_2^{(1)} + \alpha Z_2) + \frac{a^3}{7r^3}(Y_3 + \tfrac{5}{2}\alpha Y_3^{(1)} + \alpha Z_3) + \frac{a^4}{9r^4}(Y_4 + 3\alpha Y_4^{(1)} + \alpha Z_4) + \ldots \Big\}.$$

On fera disparaître de cette valeur les termes en Y_0, $Y_0^{(1)}$, Z_0 en prenant pour a le rayon de la sphère égale en solidité au sphéroïde, et les termes en Y_1, $Y_1^{(1)}$ et Z_1 en plaçant l'origine des rayons r à son centre de gravité. On aura ainsi les deux équations de condition suivantes :

$$\left.\begin{aligned} Y_0 + \alpha Y_0^{(1)} + \alpha Z_0 &= 0, \\ Y_1 + \tfrac{3}{2}\alpha Y_1^{(1)} + \alpha Z_1 &= 0. \end{aligned}\right\} (f)$$

La première servira à déterminer la quantité Z_0, et la seconde la quantité Z_1, les quatre autres quantités Y_0, $Y_0^{(1)}$, Y_1 et $Y_1^{(1)}$ étant supposées déterminées par la première approximation.

En substituant ensuite la valeur de V dans l'équation (b), on aura

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{4\pi a^3}{3r}+\dfrac{4\pi a^5\alpha}{5r^3}\Big\{Y_2+2\alpha Y_2^{(1)}+\alpha Z_2+\dfrac{5\alpha}{7r}(Y_3+\frac{5}{2}\alpha Y_3^{(1)}+\alpha Z_3)\\ \quad+\dfrac{5a^2}{9r^2}(Y_4+3\alpha Y_4^{(1)}+\alpha Z_4)+\ldots\Big\}\\ \quad+\frac{1}{3}gr^2-\frac{1}{2}gr^2(\cos^2\theta-\frac{1}{3})=\text{const.}\end{array}\right\}\text{(A)}$$

Si dans cette équation on substitue pour r sa valeur $a(1+\alpha y+\alpha^2 z)$, qu'on observe qu'en supposant comme précédemment $\frac{g}{\frac{4}{3}\pi}=q$, on a par la première approximation $\alpha Y_2=-\frac{5}{4}q(\cos^2\theta-\frac{1}{3})$ et $Y_3=0$, $Y_4=0$, $Y_5=0$, etc. Qu'on fasse pour abréger $e=-\frac{5}{6}q$ et qu'on néglige les termes de l'ordre α^3 et $\alpha^2 q$, on trouvera

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{4\pi a^2}{3}(1+\alpha y-\alpha^2 z+\alpha^2 y^2)+\dfrac{4\pi a^2\alpha}{5}\Big\{(1-3\alpha y)(Y_2+2\alpha Y_2^{(1)}+\alpha Z_2)\\ \quad+\frac{5}{7}\alpha(\frac{5}{2}Y_3^{(1)}+Z_3)+\frac{5}{9}\alpha(3Y_4^{(1)}+Z_4)+\ldots\Big\}\\ \quad-\frac{2}{5}.\dfrac{4\pi a^2}{3}e(1+2\alpha y)+\frac{2}{5}.\dfrac{4\pi a^2}{3}(1+2\alpha y)\alpha Y_2=\text{const.}\end{array}\right\}\text{(B)}$$

Nous pouvons supposer la constante du second membre, qui est arbitraire, déterminée par l'équation

$$\frac{4\pi a^2}{3}(1-\tfrac{2}{5}e)-\frac{4\pi a^2}{3}\alpha^2 Z_0=\text{const.}$$

En comparant ensuite les termes affectés de la première puissance de α, on aura d'abord $y=Y_2$, comme cela résulte d'ailleurs de la première approximation. La comparaison des termes multipliés par α^2 donnera de même

$$\alpha^2 z = \alpha^2 y^2 - \tfrac{9}{4}\alpha y \mathrm{Y}_2 + \tfrac{3}{5}\alpha^2(2\mathrm{Y}_2^{(1)} + \mathrm{Z}_2) + \tfrac{15}{7}\alpha^2(\tfrac{5}{3}\mathrm{Y}_3^{(1)} + \mathrm{Z}_3)$$

$$+ \tfrac{5}{3}\alpha^2(3\mathrm{Y}_4^{(1)} + \mathrm{Z}_4) + \ldots - \tfrac{4}{3}c\alpha y + \tfrac{4}{3}\alpha^2 y \mathrm{Y}_2 + \alpha^2 \mathrm{Z}_0.$$

La fonction y ne contenant que le carré de $\cos\theta$, il en résulte évidemment que les puissances successives y^2, y^3, etc., de cette quantité ne renfermeront que des puissances paires de ce même cosinus, et que, par conséquent, toutes les fonctions $\mathrm{Y}_1^{(1)}$, $\mathrm{Y}_3^{(1)}$, $\mathrm{Y}_5^{(1)}$, etc., dont l'indice est impair, disparaîtront de leurs expressions, on aura donc

$$\mathrm{Y}_1^{(1)} = 0, \quad \mathrm{Y}_3^{(1)} = 0, \quad \mathrm{Y}_5^{(1)} = 0, \ \text{etc.},$$

la seconde des équations (f) donnera ainsi $\mathrm{Z}_1 = 0$, et l'équation précédente, en y substituant pour y sa valeur Y_2, deviendra simplement

$$\alpha^2 z = \tfrac{3}{5}\alpha^2(2\mathrm{Y}_2^{(1)} + \mathrm{Z}_2) + \tfrac{15}{7}\alpha^2 \mathrm{Z}_3$$

$$+ \tfrac{5}{3}\alpha^2(3\mathrm{Y}_4^{(1)} + \mathrm{Z}_4) - \tfrac{4}{3}c\alpha \mathrm{Y}_2 + \alpha^2 \mathrm{Z}_0.$$

Cette équation, jointe à la première des équations de condition (f), suffit pour déterminer complétement l'expression de z. En effet, si l'on y substitue pour z sa valeur $\mathrm{Z}_0 + \mathrm{Z}_2 + \mathrm{Z}_4 +$ etc., et qu'on compare ensuite dans les deux membres les fonctions affectées des mêmes indices, on voit d'abord que comme les quantités $\mathrm{Y}_2^{(1)}$, $\mathrm{Y}_4^{(1)}$ ne renferment que des multiples pairs de $\cos\theta$, il faudra qu'on ait nécessairement

$$\mathrm{Z}_3 = 0, \quad \mathrm{Z}_5 = 0, \quad \mathrm{Z}_7 = 0, \ \text{etc.},$$

d'où l'on peut conclure d'abord que l'expression du rayon vecteur ne contient que des fonctions paires de la nature des fonctions Y_n, et que par conséquent le sphéroïde qui satisfait à l'équilibre de la masse fluide, est un sphéroïde symétrique des deux côtés de son équateur. Les puissances les plus élevées de $\cos\theta$ qui renferment la quantité y^2, étant du quatrième ordre, il est évident encore que la comparaison des termes semblables dans les deux membres, après qu'on aura substitué pour z sa valeur, donnera

$$Z_6 = 0, \quad Z_8 = 0, \text{ etc.}$$

L'expression de $\alpha^2 z$ se réduit donc finalement à la suivante :

$$z = \tfrac{2}{5}(2Y_2^{(1)} + Z_2) + \tfrac{3}{9}(3Y_4^{(1)} + Z_4) - \tfrac{1}{5}\tfrac{e}{\alpha}Y_2 + Z_0.$$

Les fonctions $Y_2^{(1)}$, $Y_4^{(1)}$ sont, par leur nature, indépendantes de l'angle ω comme la fonction Y_2 dont elles dérivent, la fonction z en sera donc pareillement indépendante, et, par conséquent, le sphéroïde qui satisfait à l'équilibre, est un sphéroïde de révolution. Substituons maintenant pour Y_2, $Y_2^{(1)}$ et $Y_4^{(1)}$ leurs valeurs dans l'équation précédente, en faisant, comme dans le n° **18**,

$$F_2 = \tfrac{3}{2}(\cos^2\theta - \tfrac{1}{3}),$$
$$F_4 = \tfrac{35}{8}(\cos^4\theta - \tfrac{6}{7}\cos^2\theta + \tfrac{3}{35}).$$

On trouvera aisément, par le procédé du n° **25**,

$$F_2^2 = \tfrac{18}{35}F_4 + \tfrac{2}{7}F_2 + \tfrac{1}{5};$$

et en observant que d'après la valeur de Y_2, donnée par la première approximation, on a $Y_2 = eF_2$, on aura

$$\alpha^2 Y_2^2 = \tfrac{18}{35} e^2 F_4 + \tfrac{2}{7} e^2 F_2 + \tfrac{1}{5} e^2.$$

Nous avons supposé précédemment

$$y^2 = Y_2^2 = Y_0^{(1)} + Y_2^{(1)} + Y_4^{(1)},$$

en comparant ces deux expressions, on aura donc

$$\alpha^2 Y_0^{(1)} = \tfrac{1}{5} e^2, \quad \alpha^2 Y_2^{(1)} = \tfrac{2}{7} e^2 F_2, \quad \alpha^2 Y_4^{(1)} = \tfrac{18}{35} e^2 F_4.$$

Si l'on substitue ces deux dernières valeurs ainsi que celle de z dans l'équation (g), qu'on compare ensuite les termes qui contiennent des fonctions semblables dans les deux membres, on en conclura aisément

$$\alpha^2 Z_2 = -\tfrac{8}{7} e^2 F_2, \quad \alpha^2 Z_4 = \tfrac{27}{35} e^2 F_4.$$

Les deux fonctions Z_2 et Z_4 qui entrent dans la valeur de z, se trouveront ainsi déterminées; quant à la fonction Z_0, elle est déterminée par la première des équations (f), et comme on a par la première approximation $Y_0 = 0$, on en conclut simplement :

$$\alpha^2 Z_0 = -\alpha^2 Y_0^{(1)} = -\tfrac{1}{5} e^2.$$

L'expression de $\alpha^2 z$ devient ainsi :

$$\alpha^2 z = -\tfrac{1}{5} e^2 - \tfrac{8}{7} e^2 F_2 + \tfrac{27}{35} e^2 F_4;$$

et en substituant cette valeur dans l'expression du rayon vecteur $r = a(1 + eF_2 + \alpha^2 z)$, on aura

$$\frac{r}{a} = 1 - \tfrac{1}{5} e^2 + (e - \tfrac{8}{7} e^2) F_2 + \tfrac{27}{35} e^2 F_4,$$

ou bien, en remettant pour F_2 et F_4 leurs valeurs, et substituant $-\frac{5}{6}q$ au lieu de e,

$$\frac{r}{a} = 1 - \tfrac{5}{6}q - \tfrac{25}{63}q^2 + \tfrac{5}{4}q\sin^2\theta + \tfrac{25}{672}q^2(23 - 63\cos^2\theta)\sin^2\theta,$$

équation qui est celle d'un ellipsoïde de révolution dont l'aplatissement serait égal à $\frac{5}{4}q + \frac{425}{224}q^2$. En effet, en nommant αh cet aplatissement, on aura

$$\alpha h = \tfrac{5}{4}q + \tfrac{425}{224}q^2,$$

et en introduisant cette valeur dans l'expression précédente, on aura

$$\frac{r}{a} = (1 - \tfrac{5}{6}q - \tfrac{25}{63}q^2)(1 + \alpha h\sin^2\theta - \tfrac{3}{2}\alpha^2 h^2 \sin^2\theta\cos^2\theta),$$

valeur qui s'accorde, jusque dans les termes du second ordre, avec celle du rayon vecteur d'un ellipsoïde de révolution dont l'axe des pôles serait

$$2a'(1 - \tfrac{5}{6}q - \tfrac{25}{63}q^2),$$

l'aplatissement αh, et l'équation rigoureuse

$$\frac{a^2(1 - \frac{5}{3}q - \frac{25}{252}q^2)}{r^2} = 1 - \frac{(2\alpha h + \alpha^2 h^2)\sin^2\theta}{1 + 2\alpha h + \alpha^2 h^2}.$$

Sans qu'il soit besoin de pousser plus loin ce calcul, il est aisé de voir, par l'analyse précédente, que par une suite d'approximations successives, on obtiendra, au moyen des équations (A) et (B), une valeur de r ordonnée suivant les puissances de α et de la forme

$$r = r_0 + \alpha r_1 + \alpha^2 r_2 + \alpha^3 r_3 + \ldots,$$

dont tous les coefficients r_0, r_1, r_2, etc., seront entièrement déterminés : le premier ne contenant que des quantités constantes, le second ne contenant qu'un terme de la nature des fonctions Y_n, celle qui répond à l'indice $n=2$; le troisième, deux fonctions du même genre répondant aux indices $n=2$, $n=4$, et ainsi de suite. On voit de plus, par la manière dont se forment les coefficients r_1, r_2, que les autres coefficients r_3, r_4, etc., ne contiendront également que des nombres finis des quantités Y_n répondant à des indices pairs, ce qui fait qu'ils ne renfermeront que des puissances paires de $\cos\theta$; on conçoit enfin que l'angle ω disparaîtra entièrement de ces valeurs.

On peut donc conclure généralement, que la figure qui convient à l'équilibre de la masse fluide homogène, quand on la suppose très-peu différente d'une sphère, est celle d'un sphéroïde de révolution symétrique des deux côtés de son équateur et dont l'axe de figure coïncide avec l'axe de rotation. Il ne résulte pas de là, il est vrai, que ce sphéroïde soit nécessairement un ellipsoïde, mais on a vu, n° **32**, que l'ellipsoïde très-peu aplati satisfait rigoureusement à l'équation de l'équilibre d'un fluide homogène tournant autour d'un axe fixe avec une vitesse comprise entre des limites déterminées: il s'ensuit donc que la valeur précédente de r qui, par hypothèse, satisfait à l'équation de l'équilibre, et qui ne peut se réduire que d'une seule manière à la forme que nous lui avons supposée, doit coïncider avec le rayon de l'ellipsoïde développée suivant les puissances de l'aplatissement, et c'est ce que nous venons de vérifier, en effet, pour les termes dépendants de la première et de la seconde approximation.

34. Considérons maintenant les variations de la pesanteur à la surface du sphéroïde. L'équation (a) qui détermine la figure de l'équilibre de la masse fluide, offre encore l'avantage de donner par une simple différentiation la loi de la pesanteur à la surface. En effet, le premier membre de cette équation représente généralement l'intégrale de toutes les forces qui agissent sur chacune des molécules de cette surface, multipliées respectivement par l'élément de leurs directions. En différentiant donc l'équation (a) par rapport à r, on aura, n° **1**, la résultante de toutes les forces qui animent le point de la surface que l'on considère, décomposées parallèlement au rayon r, c'est-à-dire, n° **29**, l'expression de la pesanteur en ce point.

L'équation (c), d'après ce qui précède, devient

$$\frac{4\pi a^3}{3r} + \frac{4\pi\alpha a^5}{5r^3}\cdot Y^{(2)} + \frac{4\pi q r^2}{6}\cdot \sin^2\theta = \text{const.}$$

Si l'on différentie cette équation par rapport à r, qu'on divise sa différentielle par $-dr$ et qu'on y substitue à la place de r sa valeur $a(1+\alpha y)$ après la différentiation, on trouve

$$p = \tfrac{4}{3}\pi a(1 - \tfrac{1}{5}\alpha Y^{(2)} - q\sin^2\theta); \quad (n)$$

et comme on a, n° **32**,

$$\alpha Y^{(2)} = -\tfrac{5}{4}q\cdot(\cos^2\theta - \tfrac{1}{3}),$$

cette équation devient

$$p = \tfrac{4}{3}\pi a[1 - \tfrac{2}{3}q + \tfrac{5}{4}q(\cos^2\theta - \tfrac{1}{3})]. \quad (c)$$

La quantité p que nous venons de déterminer, ne représente pas exactement la pesanteur, c'est seulement la partie de cette force dirigée vers le centre du sphéroïde. En effet, on peut regarder la pesanteur à sa surface comme décomposée en deux autres forces, l'une p dirigée suivant le rayon r, et l'autre perpendiculaire à ce rayon. Mais il est aisé de voir que cette dernière est de l'ordre α, en sorte qu'en la désignant par $\alpha p'$, la pesanteur totale sera égale à $\sqrt{p^2+\alpha^2 p'^2}$; on peut donc, quand on néglige les quantités de l'ordre α^2, regarder p comme l'expression de la pesanteur à la surface du sphéroïde.

En réunissant les équations (e) et (d), on aura tout ce qui est nécessaire pour déterminer la figure d'équilibre d'une masse fluide homogène douée d'un mouvement de rotation et les lois de la pesanteur à la surface, lorsqu'on suppose que la forme primitive de la masse est peu différente de la sphère. On aura ainsi

$$r = a\left[1 - \frac{5q}{4}(\cos^2\theta - \tfrac{1}{3})\right],$$

$$p = \tfrac{4}{3}\pi a\left[1 - \tfrac{2}{3}q + \tfrac{5}{4}q(\cos^2\theta - \tfrac{1}{3})\right].$$

Ces deux équations font voir d'abord que la diminution des rayons et les accroissements de la pesanteur, en allant de l'équateur au pôle, sont proportionnels à $\cos^2\theta$; d'où il suit que ces deux quantités varient à très-peu près comme le carré du sinus de la latitude, parce que $\cos\theta$ est, aux quantités près de l'ordre α, égal à ce sinus.

C'est par l'observation des longueurs du pendule à secondes qu'on a déterminé les variations de la pesanteur à la surface de la Terre. Cette longueur, comme on l'a vu n° 30, est proportionnelle à la pesanteur. Soit donc l la longueur du pendule à secondes sous un parallèle quelconque, L′ ce que devient l, et P′ ce que devient p sous l'équateur, ou lorsque $\theta = 90°$, on aura

$$P' = \tfrac{4}{3}\pi a\left(1 - \tfrac{13}{12}q\right);$$

par conséquent

$$p = P + \tfrac{5}{4}Pq\cos^2\theta,$$

et, par suite,

$$l = L' + \tfrac{5}{4}L'q\cos^2\theta.$$

Nommons L la longueur du pendule au pôle, on aura

$$\frac{L - L'}{L'} = \frac{5q}{4}.$$

Si l'on nomme de même R et R′ ce que devient le rayon r de la surface de l'ellipsoïde, au pôle et à l'équateur, on trouve

$$\frac{R - R'}{a} = -\frac{5q}{4};$$

on aura donc, relativement aux ellipsoïdes de révolution, entre les demi-grands axes et les longueurs du pendule qui répondent respectivement au pôle et à l'équateur, cette relation très-simple,

$$\frac{L - L'}{L'} = \frac{R' - R}{a}.$$

Il est intéressant de s'assurer que cette relation remarquable subsiste encore lorsqu'on a égard aux quantités de l'ordre du carré de l'aplatissement du sphéroïde, que nous avons négligées dans une première approximation. Pour le faire voir, désignons comme précédemment, par V l'intégrale de toutes les forces qui agissent sur chacune des molécules du sphéroïde, multipliées respectivement par l'élément de leurs directions, ou le premier membre de l'équation (e). On aura, en vertu des résultats trouvés plus haut,

$$V = \frac{4\pi a^3}{3r} + \frac{4\pi\alpha a^5}{5r^3}\left\{Y_2 + \alpha Y'_2 + 2\alpha Y_2^{(1)} + \tfrac{5}{9}\frac{a^2}{r^2}(Y'_4 + 3Y_4^{(1)})\right\}$$
$$+ \frac{4\pi q}{6} r^2 \sin^2\theta.$$

Si l'on différentie cette valeur par rapport à r, et qu'on substitue après la différentiation à la place de r sa valeur $a(1 + \alpha y + \alpha^2 z)$ en négligeant les termes de l'ordre α^3, on trouvera aisément

$$-\frac{dV}{dr} = \frac{4\pi a}{3}\left\{1 - \tfrac{1}{5}\alpha Y_2 - \alpha^2(2Z_0 + \tfrac{1}{5}Z_2 + \tfrac{1}{3}Z_4 - 3Y_0^{(1)} - \tfrac{33}{5}Y_2^{(1)}\right.$$
$$\left.- 8Y_4^{(1)} + \tfrac{36}{5}Y_2^2)\right\} + \frac{4\pi qa}{3}(1 + \alpha Y_2)\sin^2\theta.$$

En substituant pour Y_2, Y_2^2, Z_0, etc., leurs valeurs précédentes, et faisant, pour abréger, $e = -\frac{5}{6}q$, cette expression, après les réductions convenables, devient

$$-\frac{dV}{dr} = \frac{4\pi a}{3}\left\{1 + \tfrac{15}{16}e - \tfrac{283}{280}e^2 + (-\tfrac{3}{2}e + \tfrac{267}{140}e^2)\cos^2\theta - \tfrac{9}{8}e^2\cos^4\theta\right\}.$$

Cette valeur exprime l'attraction que le sphéroïde exerce sur un point de sa surface dans la direction du rayon vecteur r; pour en déduire l'expression de la pesanteur, il faut diviser la quantité précédente par le *cosinus* de l'angle que forme ce rayon avec la direction de la normale au point que l'on considère. La tangente de cet angle est égale à $\frac{dr}{rd\theta}$, on a, d'ailleurs, dans l'ellipsoïde de révolution $\frac{r}{a} = 1 + \alpha h \sin^2\theta$, en nommant αh l'aplatissement du sphéroïde et en négligeant les quantités de l'ordre α^2, d'où il est facile de conclure que le *cosinus* du même angle sera, aux quantités près du troisième ordre par rapport à α, égal à $1 - 2\alpha^2 h^2 \sin^2\theta \cos^2\theta$, ou bien $1 - \frac{9}{2} e^2 \sin^2\theta \cos^2\theta$, en remplaçant αh par sa valeur $-\frac{3}{2} e$, n° 33; en appelant p la pesanteur à la surface et désignant, pour abréger, par M la masse du sphéroïde, on aura donc

$$p = \frac{M}{a^2} \left\{ 1 + \tfrac{13}{10} e - \tfrac{283}{280} e^2 + \left(-\tfrac{3}{2} e + \tfrac{261}{140} e^2\right) \cos^2\theta - \tfrac{9}{8} e^2 \cos^4\theta \right\}$$
$$\times \left(1 + \tfrac{9}{2} e^2 \sin^2\theta \cos^2\theta\right),$$

ou bien, en réduisant,

$$p = \frac{M}{a^2} \left\{ 1 + \tfrac{13}{10} e - \tfrac{283}{280} e^2 + \left(-\tfrac{3}{2} e + \tfrac{897}{140} e^2\right) \cos^2\theta - \tfrac{45}{8} e^2 \cos^4\theta \right\}.$$

En désignant par P′ la pesanteur à l'équateur, on aura, en faisant $\theta = 90°$ dans l'expression précédente,

$$P' = \frac{M}{a^2} \left(1 + \tfrac{13}{10} e - \tfrac{283}{280} e^2\right),$$

et la valeur générale de p pourra prendre cette forme,

$$p = P' \left\{ 1 + \left(-\tfrac{3}{2} e + \tfrac{117}{14} e^2\right) \cos^2\theta - \tfrac{45}{8} e^2 \cos^4\theta \right\}.$$

Au pôle on a $\theta = 0$, et en nommant P la pesanteur en ce point, on aura

$$P = P' \left(1 - \tfrac{3}{2} e + \tfrac{153}{56} e^2\right),$$

ou bien, en substituant pour e sa valeur $-\frac{5}{6} q$,

$$P = P' \left(1 + \tfrac{5}{4} q + \tfrac{425}{224} q^2\right).$$

Or nous avons trouvé plus haut, pour l'aplatissement αh du sphéroïde,

$$\alpha h = \tfrac{5}{4} q + \tfrac{425}{224} q^2,$$

on aura donc $P = P'(1 + \alpha h)$, ou bien

$$\frac{P - P'}{P'} = \frac{R' - R}{R},$$

comme nous l'avions trouvé plus haut; c'est-à-dire que la relation qui existe entre les expressions de la pesanteur aux pôles et à l'équateur, lorsqu'on n'a égard qu'à la première puissance de α, subsiste encore lorsqu'on porte l'approximation jusqu'aux quantités du second ordre par rapport à cette quantité; ce qui est conforme, d'ailleurs, au théorème démontré n° **28**, où nous avons vu que cette relation est rigoureuse pour les sphéroïdes homogènes et de figure elliptique, ou, en d'autres termes, que pour ces sphéroïdes, *la pesanteur au pôle est à la pesanteur à l'équateur comme le diamètre de l'équateur est à l'axe du pôle.*

35. Nous ne nous sommes occupé jusqu'ici que des fluides homogènes; nous allons considérer maintenant l'état d'équilibre d'une masse fluide hétérogène douée d'un mouvement de rotation autour d'un axe fixe; mais, pour simplifier cette question, nous supposerons cette masse composée de couches semblables, et la densité décroissante suivant une loi quelconque du centre à la surface, hypothèse qui d'ailleurs paraît conforme à la nature des corps célestes. On conçoit, en effet, que si, lors de la formation de ces corps, leurs molécules ne s'étaient pas disposées de manière que les plus denses soient en même temps les plus voisines du centre, elles se seraient pénétrées comme un corps solide s'enfonce dans un fluide, et l'équilibre n'aurait pu exister dans une pareille masse. L'équation générale de l'équilibre des différentes couches sera, n° **38**, livre Ier,

$$\int \frac{dp}{\rho} = \mathrm{V} + \mathrm{N},$$

ou bien, en remplaçant V par sa valeur, n° 23,

$$\left.\begin{aligned}\int\frac{dp}{\rho}&+2\pi.\int\rho\, d.a^2+4\alpha\pi\int\rho.d.\left[a^2.Y_0+\frac{ar}{3}.Y_1+\frac{r^2}{5}.Y_2+\frac{r^3}{7a}.Y_3+\ldots\right]\\&+\frac{4\pi}{3r}.\int\rho.d.a^3+\frac{4\alpha\pi}{r}.\int\rho.d.\left[a^3.Y_0+\frac{a^4}{3r}.Y_1+\frac{a^5}{5r^2}.Y_2+\frac{a^6}{7r^3}.Y_3+\ldots\right]\\&+N.\end{aligned}\right\}\quad(f)$$

Les différentielles et les intégrales dans cette équation se rapportent à la variable a; les deux premières intégrales du second membre devant être prises depuis $a=a$, en désignant par a la valeur de a relative à la couche que l'on considère, jusqu'à la valeur de a qui correspond à la surface du fluide, et que nous supposerons égale à l'unité, les deux dernières intégrales de la même équation devant s'étendre depuis $a=0$ jusqu'à $a=a$.

A la surface de la couche, on a $r=a(1+\alpha y)$: en substituant donc cette valeur dans les termes de l'équation précédente qui sont indépendants de α, et faisant simplement $r=a$ dans les autres, on aura

$$\left.\begin{aligned}\int\frac{dp}{\rho}&=2\pi.\int\rho.da^2+4\alpha\pi.\int\rho.d.\left[a^2Y_0+\frac{ar}{3}.Y_1+\frac{r^2}{5}.Y_2+\frac{r^3}{7a}.Y_3+\ldots\right]\\&+\frac{4\pi}{3a}.(1-\alpha y).\int\rho.da^3+\frac{4\alpha\pi}{a}.\int\rho.d.\left[a^3Y_0+\frac{a^4}{3r}.Y_1+\frac{a^5}{5r^2}.Y_2+\frac{a^6}{7r^3}.Y_3+\ldots\right]\\&+N.\end{aligned}\right\}(g$$

Le second membre de cette équation doit se réduire à une constante, n° 38, livre I^{er}. Si l'on substitue donc pour y son développement $Y_0+Y_1+Y_2+\ldots$, et pour N sa valeur $\frac{1}{3}.gr^2-\frac{1}{2}.gr^2(\cos^2\theta-\frac{1}{3})$, et que l'on compare ensuite les fonctions semblables de θ et de ω, on aura

$$\begin{aligned}\int\frac{dp}{\rho}&=2\pi.\int\rho.d.a^2+4\alpha\pi.\int\rho.d.a^2Y_0+\frac{4\pi}{3a}.\int\rho.d.a^3\\&-\frac{4\alpha\pi}{3a}.Y_0.\int\rho.d.a^3+\frac{4\alpha\pi}{a}.\int\rho.d.a^3Y_0+\tfrac{1}{3}ga^2;\end{aligned}$$

les deux premières intégrales du second membre devant être prises depuis $a = a$ jusqu'à $a = 1$, et les trois dernières depuis $a = 0$ jusqu'à $a = a$. Cette équation déterminant simplement le rapport qui doit exister entre Y_0 et a, il s'ensuit qu'on peut donner à Y_0 une valeur arbitraire. On aura ensuite, i étant égal à 2,

$$\left.\begin{array}{l} \frac{4\alpha\pi a^2}{5} \cdot \int \rho . d . Y_2 - \frac{4\alpha\pi}{3a} \cdot Y_2 . \int \rho . d . a^3 \\ + \frac{4\alpha\pi}{5a^3} \cdot \int \rho . d . a^5 Y_2 - \frac{1}{2} g a^2 (\cos^2\theta - \frac{1}{3}) = 0 ; \end{array}\right\} \quad (h)$$

enfin, i étant un nombre quelconque égal ou supérieur à l'unité,

$$\frac{4\pi a^i}{2i+1} \cdot \int \rho\, d. \frac{Y^{(i)}}{a^{i-2}} - \frac{4\pi}{3a} \cdot Y_i . \int \rho . d . a^3 + \frac{4\pi}{(2i+1).a^{i+1}} \cdot \int \rho d . a^{i+3} Y_i = 0. \quad (m)$$

Cette équation donnera la valeur de Y_i, relative à chaque couche du fluide, lorsque la densité ρ sera connue, mais elle ne suffirait plus pour la déterminer si la loi des densités était inconnue, il faut alors, pour rendre cette détermination possible, ajouter aux conditions du problème une hypothèse sur la figure des couches de niveau, et c'est ce qu'on fait en les supposant semblables.

A la surface du fluide on a $\int \rho . d . \frac{Y_i}{a^{i-2}} = 0$, puisque les surfaces intérieures et extérieures de la couche se confondent : l'équation précédente devient donc, en observant que nous supposons $a = 1$ à la surface,

$$Y_i . \int \rho . a^2 da - \frac{1}{2i+1} \cdot \int \rho . d . a^{i+3} Y_i = 0.$$

Dans le cas particulier que nous considérons, les couches de niveau étant supposées semblables, il s'ensuit que la valeur de Y_i est pour chaque couche la même qu'à la surface; elle est donc indépendante de a, et l'on a

$$Y_i \cdot \int \left(1 - \frac{i+3}{2i+1} a^i\right) . \rho a^2 \, da = 0.$$

Or, i étant égal ou supérieur à 3, la fonction $1 - \frac{i+3}{2i+1} a^i$ est toujours positive; l'intégrale que renferme l'équation précédente, ne peut donc être égale à zéro; on doit donc avoir alors $Y_i = 0$. D'ailleurs, si l'on suppose $i = 1$, on pourra toujours faire disparaître le terme en Y_1 de l'équation (g) en plaçant l'origine des coordonnées au centre de gravité du sphéroïde; on aura donc généralement $Y_i = 0$, i étant un nombre entier quelconque différent de 2.

Dans le cas de $i = 2$, l'équation (h) donne

$$4\alpha\pi Y_2 . \int (1 - a^2) . \rho a^2 \, da + \tfrac{1}{2} g . (\cos^2\theta - \tfrac{1}{3}) = 0.$$

Soit, comme précédemment, q le rapport de la force centrifuge à la pesanteur à l'équateur, l'expression de la pesanteur étant, aux quantités près de l'ordre α, la même que celle qui aurait lieu à la surface de la sphère du rayon a, c'est-à-dire égale à $\frac{4}{3}\pi . \int \rho . d . a^3$, on aura $g = 4\pi q . \int \rho . a^2 \, da$; par conséquent

$$\alpha Y_2 = \frac{-\frac{q}{2}(\cos^2\theta - \frac{1}{3}) . \int \rho . a^2 \, da}{\int (1 - a^2) . \rho . a^2 \, da}.$$

Le rayon du sphéroïde à la surface sera donc

$$1 + \alpha Y_0 - \frac{\frac{q}{2} . (\cos^2\theta - \frac{1}{3}) \int \rho \; a^2 \, da}{\int (1 - a^2) . \rho . a^2 \, da}.$$

Ce rayon est celui d'un ellipsoïde de révolution : ainsi donc, dans ce cas général, comme dans celui de l'homogénéité, la surface libre du fluide, et, par conséquent, celle de chaque couche de niveau, ont la figure elliptique.

Si, pour abréger, on fait

$$\alpha h = \frac{\frac{q}{2} \cdot \int \rho a^2 da}{\int (1 - a^2) \rho a^2 da},$$

l'expression du rayon de chaque couche sera de cette forme :

$$a[1 + \alpha Y_0 - \alpha h(\cos^2\theta - \tfrac{1}{3})].$$

Y_0 étant arbitraire, si l'on fait $Y_0 = -\frac{1}{3}h$, l'expression précédente devient $a(1 - \alpha h \cos^2\theta)$ et αh représente alors l'ellipticité de la couche. A la surface du sphéroïde, on a $a = 1$, et le rayon devient $1 - \alpha h \cos^2\theta$. La diminution des rayons, en allant de l'équateur au pôle, est donc encore proportionnelle à $\cos^2\theta$, et, par conséquent, au carré du sinus de la latitude.

Le rayon osculateur du méridien dont le rayon est de la forme $1 - \alpha h \cos^2\theta$, a pour expression

$$1 - 2\alpha h(1 - \tfrac{3}{2}\cos^2\theta).$$

Désignons par c la longueur d'un degré mesuré sur le cercle dont le rayon est $1 - 2\alpha h$, l'expression du degré du méridien du sphéroïde sera

$$c + 3\alpha hc \cos^2\theta.$$

c représente donc la grandeur du degré sous l'équateur, et les degrés du méridien croissent de l'équateur au pôle, proportionnellement au carré du sinus de la latitude, tandis que les rayons menés du centre à la surface du sphéroïde diminuent suivant la même loi.

Si l'on applique à la Terre les résultats précédents, et qu'on la considère simplement comme un sphéroïde composé de couches elliptiques de densité et d'ellipticité variables, en substituant pour Y_2 sa valeur dans l'équation (g), et en observant que l'intégrale $\int \rho . dh$ est nulle à la surface, on aura

$$6\int \rho d.a^5 h + 5\left(\frac{q}{\alpha} - 2h\right).\int \rho d.a^3 = 0. \quad (k)$$

Cette équation détermine la relation qui doit exister pour l'équilibre entre la densité ρ et l'ellipticité αh de chaque couche du sphéroïde. Elle donnera, en l'intégrant, la valeur de cette ellipticité, lorsque la loi des densités sera connue.

Les densités étant supposées aller en diminuant du centre à la surface, il résulte de cette équation que l'ellipticité de la Terre est moindre que dans le cas de l'homogénéité, à moins qu'on ne suppose que les ellipticités croissent de la surface au centre dans un plus grand rapport que la raison inverse du carré des distances à ce centre. En effet, soit $h = \frac{u}{a^2}$ on aura

$$\int \rho.d.a^5 h = \int \rho.d.a^3 u = u\int \rho.d.a^3 + \int du.\int a^3.d\rho.$$

Si les accroissements des ellipticités sont entre eux dans un rapport moindre que $\frac{1}{a^2}$, u augmentera du centre à la surface; du sera par conséquent une quantité positive, et comme $d\rho$ est négatif, puisqu'on suppose que les densités diminuent du centre à la surface, $\int du \int a^3.d\rho$ sera aussi une quantité négative, et en faisant à la surface

$$\int \rho.d.a^5 h = (h - f)\int \rho.d.a^3,$$

f sera une quantité positive. L'équation (k), en y substituant cette valeur, devient

$$6(h-f)\int \rho.d.a^3 + 5\left(\frac{q}{\alpha} - 2h\right)\int \rho.d.a^3 = 0,$$

d'où l'on tire

$$h = \frac{5\frac{q}{\alpha} - 6f}{4}.$$

L'ellipticité αh du sphéroïde sera donc moindre que $\frac{5q}{4}$; elle sera plus petite par conséquent que dans le cas de l'homogénéité, où $d\rho$ étant nul, f est égal à zéro.

On peut conclure de là que l'aplatissement de la Terre, dans l'hypothèse la plus vraisemblable qu'on puisse faire sur sa constitution intérieure, est plus grand que $\frac{q}{2}$, valeur qui répond au cas où toute sa masse serait réunie à son centre, et moindre que $\frac{5q}{4}$, valeur qui répond au cas où cette masse serait homogène. En effet, il est naturel de croire que la densité des couches du sphéroïde terrestre augmente en approchant du centre, et cette supposition est même indispensable à l'égard de tous les corps célestes s'ils ont été originairement fluides; il est probable aussi que les ellipticités diminuent dans un rapport moindre que $\frac{1}{a^2}$, puisque cette hypothèse donnerait une ellipticité infinie aux couches infiniment voisines du centre, ce qui est absurde.

D'après les observations du pendule, le rapport de la force centrifuge à la pesanteur à l'équateur est environ $\frac{1}{289}$, c'est la valeur de la quantité q. Si la Terre était une masse fluide homogène, son aplatissement serait donc égal à la fraction $\frac{1}{231}$, et, quelle que soit sa constitution intérieure, son aplatissement doit être plus petit que cette quantité et plus grand que la fraction $\frac{1}{578}$. La valeur $\frac{1}{340}$ qui résulte des observations du pendule, est comprise entre les deux limites données par la théorie.

36. Considérons les variations de la pesanteur à la surface du sphéroïde que nous supposons composé de couches elliptiques d'une densité variable du centre à la surface.

La direction de la pesanteur de la surface au centre n'est plus alors une ligne droite, elle forme une courbe dont chaque élément est perpendiculaire à la couche de niveau qu'il traverse. L'équation (f), en remarquant que par ce qui précède, on a $Y_1 = 0$, $Y_3 = 0$, etc., donne à la surface où les couches intérieures et extérieures se confondent,

$$\int \frac{dp}{\rho} = \frac{4\pi}{3r} \cdot \int \rho . d . a^3 + \frac{4\alpha\pi}{r} \cdot \int \rho . d . \left[a^3 . Y_0 + \frac{a^5}{5r^2} \cdot Y_2 \right] \\ + \tfrac{1}{3} g r^2 - \tfrac{1}{2} g r^2 . (\cos^2\theta - \tfrac{1}{3}).$$

On aura l'expression de la pesanteur à la surface du sphéroïde, d'après ce qui a été dit n° 34, en changeant le signe de la différentielle du second membre de cette équation prise par rapport à r et divisée par dr. En nommant donc p cette force, on aura

$$p = \frac{4\pi}{3r^2} \cdot \int \rho . d . a^3 + \frac{4\alpha\pi}{r^2} \cdot \int \rho . d . \left(a^3 . Y_0 + \frac{3a^5}{5r^2} \cdot Y_2 \right) - \tfrac{2}{3} . gr + gr . (\cos^2\theta - \tfrac{1}{3}),$$

ou bien, en observant qu'à la surface on a

$$r = 1 + \alpha Y_0 + \alpha Y_2,$$

et que nous négligeons les quantités de l'ordre α^2 et αg,

$$p = \frac{4\pi}{3} \cdot \int \rho . d . a^3 - \frac{8\alpha\pi}{3} \cdot (Y_0 + Y_2) . \int \rho . d . a^3$$
$$+ 4\alpha\pi . \int \rho . d . \left(a^3 . Y_0 + \frac{3a^5}{5} \cdot Y_2 \right) - \tfrac{2}{3} . g + g(\cos^2\theta - \tfrac{1}{3}).$$

On peut faire disparaître les intégrales de cette expression, en observant que l'équation (h) donne à la surface

$$\frac{4\alpha\pi}{5} \cdot \int \rho . d . a^5 Y_2 = \frac{4\alpha\pi}{3} \cdot Y_2 . \int \rho . d . a^3 + \tfrac{1}{2} . g(\cos^2\theta - \tfrac{1}{3}).$$

En faisant, pour abréger,

$$P = \frac{4\pi}{3} . \int \rho . d . a^3 - \frac{8\alpha\pi}{3} Y_0 . \int \rho . d . a^3 + 4\alpha\pi \int \rho d . a^3 Y_0 . - \tfrac{2}{3} g,$$

et observant que $g = \frac{4\pi}{3} \cdot q \int \rho . d . a^3$, on aura

$$p = P + P . (\tfrac{5}{2} q - \alpha h) . (\cos^2\theta - \tfrac{1}{3}),$$

ou bien, en faisant

$$P' = P - \tfrac{1}{3}P.(\tfrac{5}{2}q - \alpha h),$$

et négligeant les quantités de l'ordre α^2,

$$p = P'.[1 + (\tfrac{5}{2}q - \alpha h).\cos^2\theta].$$

Si l'on suppose $\theta = 90^\circ$, on a $p = P'$; il suit donc de cette équation que P' est l'expression de la pesanteur à l'équateur, et que la pesanteur croît de l'équateur au pôle proportionnellement au carré du sinus de la latitude.

Si l'on nomme l et L' les longueurs du pendule correspondantes à p et P', on aura

$$l = L'.[1 + (\tfrac{5}{2}q - \alpha h).\cos^2\theta].$$

L' est donc la longueur du pendule à l'équateur, et ses accroissements de l'équateur au pôle sont encore proportionnels au carré du sinus de la latitude.

Si l'on désigne par $\alpha\varepsilon$ l'excès de la longueur du pendule au pôle sur sa longueur à l'équateur divisé par cette dernière longueur, quantité qui est égale à l'excès de la pesanteur au pôle sur la pesanteur à l'équateur divisée par cette dernière quantité, l'équation précédente donnera $\alpha\varepsilon + \alpha h = \frac{5}{2}q$, équation remarquable découverte par Clairaut, et qui fait connaître une relation importante entre les longueurs du pendule qui bat les secondes à la surface du sphéroïde et son ellipticité. Dans le cas de l'homogénéité on a $\alpha h = \frac{5}{4}q$, et l'équation précédente donne, par conséquent, $\alpha\varepsilon = \alpha h$, comme nous l'avons vu nº **34**; mais, *si le sphéroïde est hétérogène, l'excès de la lon-*

gueur du pendule au pôle sur sa longueur à l'équateur divisé par cette dernière longueur, et l'excès de l'axe de l'équateur sur l'axe du pôle divisé par ce dernier axe, forment deux fractions dont la somme est constante et égale au double de l'aplatissement que le sphéroïde aurait dû prendre dans le cas de l'homogénéité.

37. Les formules précédentes donnent le moyen d'exprimer, d'une manière très-simple pour les sphéroïdes dont la surface est supposée fluide et en équilibre, la fonction d'où dépendent les attractions du sphéroïde sur un point extérieur. En effet, les formules (h) et (m) donnent

$$\int \rho.d.a^5 Y_2 = 5 Y_2.\int \rho.a^2 da + \tfrac{5}{8}\frac{g}{\alpha\pi}(\cos^2\theta - \tfrac{1}{3})$$

$$\int \rho.d.a^{i+3} Y_i = (2i+1) Y_i \int \rho.a^2 da,$$

i étant un nombre quelconque différent de 2.

Si l'on substitue ces valeurs dans celle de V relative aux points extérieurs, n° 23, qu'on place l'origine des coordonnées au centre de gravité du sphéroïde, ce qui donne $Y_1 = 0$, et qu'on suppose $Y_0 = 0$, on aura

$$V = \frac{4\pi}{r}\cdot\left[1+\alpha.\left(\frac{Y_2}{r^2}+\frac{Y_3}{r^3}+\ldots\right)\right].\int \rho.a^2 da + \tfrac{1}{2}.\frac{g}{r^3}\cdot(\cos^2\theta - \tfrac{1}{3}).$$

Dans cette expression, $4\pi\int\rho a^2 da$, l'intégrale étant prise depuis $a = 0$ jusqu'à $a = 1$, représente la masse de la sphère dont le rayon est 1 et que l'équation $Y_0 = 0$ suppose égale en solidité au sphéroïde; $4\pi\int\rho a^2 da$ est donc égal à la masse du sphéroïde.

La valeur précédente de V convient à toute espèce de sphéroïdes. Si l'on considère le cas particulier où le sphéroïde est composé de couches semblables dont la densité varie suivant une loi quelconque du centre à la surface, on aura

$$Y_2 = -h(\cos^2\theta - \tfrac{1}{3}), \quad Y_3 = 0, \quad Y_4 = 0, \text{ etc.}$$

On a d'ailleurs $g = 4\pi q \int \rho a^2 da$; par conséquent

$$V = \frac{M}{r} + \frac{M}{r^3}\cdot(\tfrac{1}{2}q - \alpha h).(\cos^2\theta - \tfrac{1}{3}),$$

en désignant par M la masse du sphéroïde.

Cette expression s'applique naturellement aux planètes, et en particulier à la Terre, dont la surface est recouverte en très-grande partie d'un fluide en équilibre.

38. Nous terminerons ce chapitre en exposant quelques propriétés générales relatives à la figure des corps célestes, qui dérivent très-simplement de l'expression des rayons de leurs surfaces, et qu'il est d'autant plus utile de connaître, qu'elles sont indépendantes de toute hypothèse sur leur constitution intérieure. Nous considérerons ici le cas le plus général, celui où le sphéroïde, toujours fluide à sa surface, peut recouvrir un noyau solide peu différent de la sphère.

La première de ces propriétés dépend de la nature du centre de gravité; elle consiste en ce que la masse fluide en équilibre doit toujours se disposer de manière que la fonction Y_1 disparaisse de l'expression du rayon mené du centre du sphéroïde à la surface, en sorte que le centre de gravité de cette surface coïncide avec celui du sphéroïde.

En effet, soient dM une des molécules du sphéroïde, et x, y, z, ses trois coordonnées rectangulaires; on aura, en plaçant l'origine des coordonnées au centre de gravité,

$$\int x dM = 0, \quad \int y dM = 0, \quad \int z dM = 0.$$

Nommons R le rayon mené du centre de gravité du sphéroïde à l'élément dM, θ l'angle que forme ce rayon avec l'axe des x qui est aussi l'axe de rotation, et ω l'angle compris entre sa projection sur le plan des y, z et l'axe des y. On aura

$$x = R\cos\theta, \quad y = R\sin\theta\cos\omega, \quad z = R\sin\theta\sin\omega,$$
$$dM = \rho R^2 dR\, d\theta\, d\omega \sin\theta.$$

Les trois équations qui résultent des propriétés du centre de gravité, deviendront donc

$$\left.\begin{aligned} &\int \rho R^3 dR\, d\theta\, d\omega \sin\theta \cos\theta = 0, \\ &\int \rho R^3 dR\, d\theta\, d\omega \sin^2\theta \sin\omega = 0, \\ &\int \rho R^3 dR\, d\theta\, d\omega \sin^2\theta \cos\omega = 0. \end{aligned}\right\} (l)$$

Supposons l'intégrale $\int \rho R^3 dR$ prise relativement à R, depuis $R = 0$ jusqu'à la surface, et développée dans une suite de la forme

$$N_0 + N_1 + N_2 + \ldots,$$

dont chaque terme soit assujetti à l'équation aux différences partielles,

$$\frac{d.\sin\theta \frac{dN_i}{d\theta}}{\sin\theta\, d\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} \cdot \frac{d^2 N_i}{d\omega^2} + i(i+1)N_i = 0.$$

Les trois quantités $\cos\theta$, $\sin\theta\sin\omega$, $\sin\theta\cos\omega$, étant comprises dans la forme générale N_i, on aura généralement, par le théorème du n° **18**, i étant différent de l'unité,

$$\int N_i \sin\theta\cos\theta\, d\theta\, d\omega = 0, \quad \int N_i \sin^2\theta \sin\omega\, d\theta\, d\omega = 0,$$
$$\int N_i \sin^2\theta\cos\omega\, d\theta\, d\omega = 0.$$

Les trois équations (l) deviendront donc simplement, en vertu des précédentes,

$$\int N_1 \sin\theta\cos\theta\, d\theta\, d\omega = 0, \quad \int N_1 \sin^2\theta \sin\omega\, d\theta\, d\omega = 0,$$
$$\int N_1 \sin^2\theta\cos\omega\, d\theta\, d\omega = 0.$$

La valeur de N_1 est de la forme

$$N_1 = H\cos\theta + H'\sin\theta\sin\omega + H''\sin\theta\cos\omega.$$

Si l'on substitue cette valeur dans les équations données, par la propriété du centre de gravité, on verra que, pour y satisfaire, il faut supposer

$$H = 0, \quad H' = 0, \quad H'' = 0,$$

et par conséquent $N_1 = 0$. Or cette condition est la seule nécessaire pour que l'origine des rayons R de la surface soit au centre de gravité du sphéroïde.

En effet, supposons le sphéroïde un solide peu différent de la sphère, recouvert d'un fluide en équilibre; on aura, dans ce cas, $R = a(1 + \alpha y)$, et, par conséquent,

$$\int \rho R^3\, dR = \tfrac{1}{4}\int \rho\, d.[a^4(1 + 4\alpha y)],$$

la différentielle et l'intégrale indiquées étant relatives à la variable a dont ρ est fonction. On aura donc dans ce cas, en mettant pour y sa valeur $Y_1 - Y_1 + \ldots$,

$$N_1 = \alpha \int \rho d.a^4 Y_1.$$

L equation (m) du n° 35 donne à la surface, en observant qu'alors $a = 1$,

$$\int \rho d.a^4 Y_1 = Y_1 \int \rho d.a^3,$$

la valeur de Y_1 se rapportant à la surface. On aura donc

$$N_1 = \alpha Y_1 \int \rho d.a^3;$$

et puisque $N_1 = 0$, quand on suppose l'origine des rayons R au centre de gravité, on aura, dans ce cas, $Y_1 = 0$. Ainsi donc la fonction Y_1 disparaîtra d'elle-même de l'expression du rayon de la surface du sphéroïde, toutes les fois qu'on prendra le centre de gravité pour origine des coordonnées, mais il n'en résultera aucune condition particulière pour les fonctions Y_2, Y_3, etc.

Nous avons vu, dans le chapitre V, livre I^er^, que pour la stabilité du mouvement de rotation d'un corps, il faut que l'axe autour duquel il tourne, coïncide toujours, à très-peu près, avec l'un de ses axes principaux. Si cette condition n'était pas remplie à l'égard des corps célestes, il en résulterait dans la position de leurs axes de rotation des variations sensibles, surtout pour la Terre; et comme les observations les plus précises n'en font apercevoir aucune, il en faut conclure que les molécules de ces corps, à l'époque de leur formation, se sont disposées de manière à rendre stables leurs axes de rotation. Il en résulte une nouvelle propriété relative à leur figure, et qui consiste en une forme particulière que doit prendre dans ce cas la fonction Y_2, qui entre dans l'expression du rayon mené de l'origine des coordonnées à la surface du sphéroïde.

Pour le faire voir, désignons par x, y, z les trois coordonnées rectangulaires de l'élément dM rapportées aux trois axes principaux qui se croisent au centre de gravité du sphéroïde; on aura, par la nature de ces axes,

$$\int xy\,dM = 0, \quad \int xz\,dM = 0, \quad \int yz\,dM = 0.$$

Si l'on substitue pour x, y, z et dM leurs valeurs précédentes, ces équations deviennent

$$\int \rho R^4\,dR\,d\theta\,d\omega.\sin^2\theta\cos\theta\cos\omega = 0,$$
$$\int \rho R^4\,dR\,d\theta\,d\omega.\sin^2\theta\cos\theta\sin\omega = 0,$$
$$\int \rho R^4\,dR\,d\theta\,d\omega.\sin^3\theta\sin 2\omega = 0.$$

Supposons l'intégrale $\int \rho R^4\,dR$ prise par rapport à R, depuis l'origine des coordonnées jusqu'à la surface, et développée en suite de la forme

$$U_0 + U_1 + U_2 + \ldots;$$

la fonction U_i étant, quel que soit i, assujettie à l'équation aux différences partielles

$$\frac{d.\sin\theta\frac{dU_i}{d\theta}}{\sin\theta\,d\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\cdot\frac{d^2U_i}{d\omega^2} + i(i+1)U_i = 0.$$

En observant que les fonctions $\sin\theta\cos\theta\cos\omega$,

$\sin\theta\cos\theta\sin\omega$ et $\sin^2\theta\sin 2\omega$ sont comprises dans la forme générale U_2, on aura, par le théorème du n° **18**, i étant différent de 2,

$$\int U_i d\theta\, d\omega \sin^2\theta\cos\theta\cos\omega = 0,$$
$$\int U_i d\theta\, d\omega \sin^2\theta\cos\theta\sin\omega = 0,$$
$$\int U_i d\theta\, d\omega \sin^3\theta\sin 2\omega = 0,$$

et les trois équations, données par les propriétés des axes principaux, deviendront ainsi :

$$\int U_2 d\theta\, d\omega \sin^2\theta\cos\theta\cos\omega = 0,$$
$$\int U_2 d\theta\, d\omega \sin^2\theta\cos\theta\sin\omega = 0,$$
$$\int U_2 d\theta\, d\omega \sin^3\theta\sin 2\omega = 0.$$

La fonction U_2, est, n° **17**, de la forme

$$K(\cos^2\theta - \tfrac{1}{3}) + K'\sin\theta\cos\theta\sin\omega + K''\sin\theta\cos\theta\cos\omega + K'''\sin^2\theta\sin 2\omega + K^{\text{iv}}\sin^2\theta\cos 2\omega.$$

Si l'on substitue cette valeur dans les équations précédentes, elles donneront

$$K' = 0, \quad K'' = 0, \quad K''' = 0.$$

Ce sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que les trois axes des x, des y et des z soient des axes principaux de rotation, et il en résulte que U_2 est de la forme

$$K(\cos^2\theta - \tfrac{1}{3}) + K^{\text{iv}}\sin^2\theta\cos 2\omega.$$

Voyons ce que devient la valeur de U_2 relativement à un sphéroïde très-peu différent de la sphère et recouvert d'un fluide en équilibre. On a, dans ce cas, $R = a(1 + \alpha y)$, et, par conséquent,

$$\int \rho R^4 dR = \tfrac{1}{5}\int \rho d.a^5(1 + 5\alpha y);$$

en substituant donc pour y sa valeur

$$Y_0 + Y_1 + Y_2 + \ldots,$$

on aura

$$U_2 = \alpha . \int \rho d.a^5 Y_2.$$

On a, par l'équation (h), n° **35**, à la surface du sphéroïde, en supposant que la seule force étrangère, qui agit sur lui, est la force centrifuge due à son mouvement de rotation,

$$\frac{4\alpha\pi}{5}\int \rho d.a^5 Y_2 = \tfrac{4}{3}\alpha\pi Y_2 \int \rho d.a^3 + \frac{g}{2}\cdot(\cos^2\theta - \tfrac{1}{3}).$$

On aura donc

$$U_2 = \frac{5\alpha}{3} Y_2 \int \rho d.a^3 + \frac{5g}{8\pi}\cdot(\cos^2\theta - \tfrac{1}{3}).$$

L'expression générale de Y_2 est de la forme

$$k(\cos^2\theta - \tfrac{1}{3}) + k' \sin\theta\cos\theta\sin\omega + k'' \sin\theta\cos\theta\cos\omega \\ + k''' \sin^2\theta \sin 2\omega + k^{\text{IV}} \sin^2\theta\cos 2\omega.$$

Si l'on substitue cette valeur dans l'expression précédente, qu'on remplace de même U_2 par sa valeur $K(\cos^2\theta - \frac{1}{3}) + K^{\text{IV}} \sin^2\theta \cos 2\omega$, en comparant les fonctions semblables dans les deux membres, on aura

$$k' = 0, \quad k'' = 0, \quad k''' = 0,$$

et l'expression de Y_2 sera de la forme

$$k(\cos^2\theta - \tfrac{1}{3}) + k^{\text{iv}} \sin^2\theta \cos 2\omega.$$

Il suit donc de la supposition que le sphéroïde tourne autour d'un de ses trois axes principaux, que les trois constantes k', k'', k''', qui entrent dans la valeur de Y_2, sont nécessairement nulles ; mais il n'en résulte aucune condition relative aux constantes k et k^{iv}, qui restent indéterminées ainsi que les fonctions Y_3, Y_4, etc.

CHAPITRE VI.

COMPARAISON DE LA THÉORIE PRÉCÉDENTE AUX OBSERVATIONS.

39. Considérons d'abord le sphéroïde terrestre, et comparons, relativement à la Terre, la figure qui résulte de la théorie précédente avec celle que l'on a conclue des observations. Quatre méthodes distinctes ont été appliquées à cette détermination. La première, toute directe et pour ainsi dire mécanique, consiste à mesurer des arcs de méridiens et de parallèles sur divers points du globe et à déterminer, en réunissant ces portions de la surface terrestre, la figure la plus probable du sphéroïde auquel elles appartiennent. Toutes les investigations de ce genre qui ont été tentées jusqu'ici, conduisent à un résultat incontestable, c'est que la Terre a la forme d'un sphéroïde aplati vers les pôles et renflé à son équateur, comme l'exigent les lois de l'Hydrostatique. Les mêmes observations montrent, il est vrai, qu'en quelques-unes de ses parties la Terre s'éloigne sensiblement de la figure d'un ellipsoïde de révolution; mais lorsque l'on compare entre elles les valeurs moyennes des degrés mesurés à des latitudes très-distantes, l'influence des irrégularités de sa surface sur les résultats des opérations géodésiques est beaucoup atténuée, et l'on trouve alors

qu'elle diffère peu d'un sphéroïde elliptique dont l'aplatissement serait de $\frac{1}{334}$.

Le second procédé qu'emploient les géomètres pour déterminer la figure de la Terre, résulte des variations qu'on observe dans l'intensité de la pesanteur aux différents points de sa surface, et qu'on calcule avec beaucoup de précision par le moyen du pendule. Si la Terre a la forme d'un ellipsoïde de révolution peu différent de la sphère, d'après la théorie développée dans le chapitre précédent, les accroissements de la longueur du pendule à secondes transporté en divers lieux du globe, doivent être proportionnels au sinus du carré des latitudes; il sera donc facile, en soumettant les expériences à cette loi, de reconnaître si la Terre s'écarte ou non de la figure elliptique, et de déterminer dans ce dernier cas son aplatissement. Les résultats de ces recherches ont montré que les inégalités du sphéroïde terrestre ont beaucoup moins d'influence sur les variations des longueurs du pendule que sur celles des degrés des méridiens, comme l'indique aussi la théorie, qui prouve que les termes qui écartent l'expression des degrés terrestres de la loi elliptique, sont affectés de coefficients plus considérables que les termes correspondants dans l'expression des longueurs du pendule. Il s'ensuit que cette seconde méthode est beaucoup plus propre que la première à fournir sur la figure de la Terre des notions exactes, et l'aplatissement qu'elle donne, s'accorde d'une façon remarquable avec celui qui résulte de l'observation des mouvements de la Lune.

Cette troisième manière de déterminer la forme de notre globe, moins directe que les deux premières, est peut-être un des résultats les plus surprenants qu'ait produits l'application de l'Analyse à la grande loi de l'attraction universelle, et mérite d'obtenir une place importante dans l'histoire des progrès de l'esprit humain. Elle consiste à reconnaître, parmi les nombreuses inégalités du mouvement de la Lune, celles qui dépendent de la non-sphéricité de la Terre, et, en comparant leurs valeurs données par l'observation à celles qui résultent de la théorie, dans la supposition que la Terre est un sphéroïde elliptique qui exerce sur la Lune une action modifiée par sa figure, à déterminer la valeur exacte de son aplatissement. Laplace, qui le premier conçut cette idée ingénieuse, a trouvé, d'après les observations de Burg, que l'aplatissement de la Terre résultant de ces phénomènes était de $\frac{1}{304}$; et peut-être est-ce la donnée la plus exacte que nous ayons sur cet aplatissement, à cause des difficultés des autres observations qui le déterminent, et de l'influence qu'ont sur elles les causes particulières qui écartent trop souvent la Terre de la figure elliptique.

Enfin, les phénomènes de la nutation et de la précession des équinoxes fournissent encore des renseignements précieux sur la figure et sur la constitution du sphéroïde terrestre. Ils ne donnent pas, il est vrai, la valeur absolue de son aplatissement, mais ils font connaître deux limites entre lesquelles cette fraction est comprise, et ces limites sont $\frac{1}{279}$ et $\frac{1}{578}$.

40. Déterminons d'abord la figure de la Terre qui

résulte des mesures directes prises à sa surface. Si l'on imagine un plan passant par l'axe de la Terre et par le zénith d'un point donné de sa surface, ce plan tracera dans le ciel un grand cercle qui sera le méridien du lieu, et la courbe que ce plan intercepte sur la surface de la Terre, se nomme *le méridien terrestre*, ou, par abréviation, *la méridienne*.

Lorsqu'en partant de l'équateur, on s'avance sur cette courbe en marchant vers le nord, on voit successivement la hauteur méridienne des étoiles situées au nord augmenter, tandis que celle des étoiles situées au midi éprouve une dépression proportionnée. Cette remarque très-simple a sans doute donné aux hommes la première idée de la forme arrondie du globe. Si la Terre était sphérique, les degrés du méridien, mesurés à diverses latitudes, seraient tous égaux entre eux; mais l'observation a fait reconnaître des différences notables dans ces degrés, et elle a montré qu'ils allaient en croissant à mesure qu'on s'éloigne de l'équateur; d'où l'on a conclu que la Terre est un sphéroïde aplati vers les pôles. En effet, concevons pour fixer les idées que la Terre est un ellipsoïde de révolution : on peut supposer qu'un arc très-petit du méridien se confond sensiblement avec le cercle osculateur déterminé par l'intersection des deux normales menées à ses extrémités, et l'arc de cercle compris entre ces normales sera d'autant plus grand que son rayon sera plus considérable. Or, aux pôles ou à l'extrémité du petit axe, l'ellipse pendant un court intervalle forme, à très-peu près, une ligne droite, les deux normales qui déterminent le rayon du cercle osculateur, sont presque parallèles; ce rayon, et, par conséquent, le degré du méridien, sont alors plus grands que sur tout autre point. La courbure des arcs elliptiques augmentant ensuite de plus en plus, les rayons osculateurs vont en diminuant sans cesse du pôle à l'équateur; par conséquent, les degrés doivent aller en croissant, à mesure qu'on avance de ce second point vers le premier.

Nous ne nous proposons pas d'exposer ici les procédés géodésiques qui servent à déterminer les arcs du méridien terrestre; on trouvera sur cet objet des détails circonstanciés dans l'ouvrage de Delambre, où cet astronome décrit les opérations qu'il a lui-même exécutées avec Méchain, pour la détermination de l'arc du méridien compris entre Dunkerque et Barcelone. Nous donnerons simplement les résultats des travaux qui ont été entrepris à diverses époques pour la mesure des degrés de la méridienne, et nous indiquerons la méthode que l'on doit suivre pour en conclure quelle est la figure la plus probable que ces mesures assignent à la Terre. On conçoit, en effet, que, comme il est impossible de déterminer dans toute son étendue le méridien terrestre, il faudra commencer par faire une hypothèse quelconque sur la nature de cette courbe et sur la figure générale du globe. On déterminera ensuite les arbitraires de ces suppositions au moyen des données fournies par les opérations géodésiques, et l'on examinera enfin si la figure qui en résulte pour le sphéroïde terrestre, peut concorder avec celle que l'on conclut des autres phénomènes observés.

Supposons, en premier lieu, le sphéroïde elliptique et de révolution. C'est l'hypothèse la plus simple que l'on puisse faire sur la figure de la Terre, puisqu'on sait d'avance que l'hypothèse d'une figure sphérique ne saurait lui convenir; d'ailleurs, c'est celle qui résulte directement des lois de l'Hydrostatique, si l'on suppose que la Terre était originairement fluide et homogène, et qu'elle a conservé, en se durcissant, sa figure primitive. Proposons-nous donc de déterminer, parmi toutes les figures elliptiques qu'on peut donner au méridien terrestre, celle qui s'accorde le mieux avec les degrés mesurés.

Soient c_1, c_2, c_3, etc., les longueurs de ces degrés, L_1, L_2, L_3, etc., les latitudes correspondantes au milieu de chacun d'eux. Puisque nous supposons que la Terre est un ellipsoïde de révolution qui s'écarte peu de la figure de la sphère, la variation des degrés à sa surface sera proportionnelle au carré du sinus de la latitude; on aura donc généralement

$$c = a + b \sin^2 L, \quad (a)$$

a et b étant deux constantes dont la première représente la grandeur du degré à l'équateur et l'autre dépend de l'aplatissement du sphéroïde terrestre.

En substituant respectivement c_1, c_2, c_3, etc., L_1, L_2, L_3, etc., à la place de c et L dans l'équation précédente, on aura autant d'équations qu'il y a eu de degrés mesurés. Si la Terre était rigoureusement elliptique, et si les observations étaient parfaitement exactes, toutes ces équations, de quelque manière qu'on les combinât entre elles, donneraient à très-peu près pour a et b les mêmes valeurs ; mais cela n'a pas lieu généralement, et les degrés mesurés à diverses latitudes ont donné pour la figure des méridiens des ellipses très-différentes. Il s'agit donc de combiner le système des équations précédentes de manière à en tirer les valeurs des inconnues a et b qui, substituées dans la formule (a), représentent, avec le plus de précision possible, les mesures observées. Voici, pour y parvenir, une méthode très-simple et qui peut être utile dans une infinité de cas semblables, par exemple, lorsque, étant donné un nombre quelconque d'observations d'une comète, il s'agit de déterminer parmi toutes les courbes paraboliques, qui peuvent représenter sa marche, celle qui satisfait plus exactement que toutes les autres à leur ensemble.

Comme il est impossible, quelque valeur qu'on suppose aux constantes a et b, de satisfaire à la fois à toutes les équations qu'on peut former par la substitution des quantités c_1, c_2, etc., L_1, L_2, etc., à la place de c et L dans l'équation (a), on suppose que les différences des résultats sont dues aux erreurs dont les observations sont susceptibles. La question revient alors à trouver le système de ces erreurs, qu'on peut distribuer arbitrairement sur l'ensemble des observations, dans lequel la plus grande erreur est moindre, abstraction faite du signe, que dans tout autre système, et à déterminer a et b par cette condition. C'est à quoi on parvient très-facilement par la *méthode des moindres carrés*, imaginée par Legendre, et que Laplace a en effet reconnue comme la plus exacte et la plus simple que l'on puisse employer dans toutes les questions de ce genre. Ce procédé consiste à rendre la somme des carrés des erreurs un *minimum* par rapport à chacune des inconnues du problème. On forme, en exprimant analytiquement cette condition, autant d'équations qu'il y a d'inconnues à déterminer, et il ne reste plus pour les obtenir qu'à résoudre ces équations par les méthodes ordinaires.

Soient donc e_1, e_2, e_3, etc., les erreurs des degrés mesurés c_1, c_2, etc.; en substituant c_1+e_1, c_2+e_2, etc., à la place de c_1, c_2, etc., dans la formule (a), on formera les équations suivantes :

$$\left.\begin{array}{l} c_1 - a - b\sin^2 L_1 = e_1, \\ c_2 - a - b\sin^2 L_2 = e_2, \\ c_3 - a - b\sin^2 L_3 = e_3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_n - a - b\sin^2 L_n = e_n, \end{array}\right\} (b)$$

n étant le nombre des degrés mesurés.

Il faut exprimer maintenant que la somme des carrés des erreurs $e_1^2 + e_2^2 + \ldots$, est un *minimum* par rapport à chaque inconnue a et b, ce qui revient évidemment à multiplier tous les termes de chacune des équations précédentes par le coefficient de cette inconnue, prise avec son signe, et à égaler à zéro la somme de ces produits. Ainsi, tous les coefficients de a étant l'unité dans les équations précédentes, pour obtenir l'équation du *minimum* par rapport à a, il suffira de les ajouter entre elles; pour former la même équation relative à b, on multipliera la première par $\sin^2 L_1$, la seconde par $\sin^2 L_2$, la troisième par

$\sin^2 L_3$, etc. On ajoutera ensuite entre elles les équations résultantes, et en égalant à zéro les deux sommes précédentes, on aura les équations cherchées. On trouvera, de cette manière, les deux équations suivantes :

$$\left.\begin{array}{r} an + b\,\Sigma.\sin^2 L_1 - \Sigma.c_1 = 0, \\ a\,\Sigma.\sin^2 L_1 + b\,\Sigma.\sin^4 L_1 - \Sigma.c_1\sin^2 L_1 = 0, \end{array}\right\} (c)$$

la caractéristique Σ désignant généralement la somme de toutes les quantités semblables qu'on peut former en considérant l'ensemble des observations données.

Les deux équations (c) suffiront pour déterminer a et b, et en substituant ensuite leurs valeurs dans les équations (b), on aura les erreurs e_1, e_2, e_3, etc., qui conviennent au système où les erreurs extrêmes sont renfermées dans les plus étroites limites possibles, et l'on verra si ces erreurs sont telles, qu'on les puisse attribuer aux incorrections de l'observation. Mais si parmi elles il s'en trouvait quelqu'une trop considérable pour qu'il soit possible de l'admettre, on rejetterait les degrés mesurés qui ont donné cette erreur, comme provenant d'opérations défectueuses, et l'on déterminerait les constantes a et b au moyen des équations restantes, qui donneraient alors des résultats beaucoup plus d'accord avec les observations.

Comme les considérations qui précèdent, sont fondées sur la supposition que les degrés croissent proportionnellement au carré de la latitude, et que la même loi, dans l'hypothèse de la figure elliptique de la Terre, convient également à la variation de la longueur du pendule, il est clair que la méthode que nous venons d'exposer, peut s'appliquer identiquement aux mesures du pendule à secondes observées à diverses latitudes, et donne le moyen d'en déduire, avec le plus grand degré de probabilité possible, l'aplatissement de la Terre.

41. La méthode précédente est la plus simple que l'on puisse employer pour reconnaître si la figure du sphéroïde terrestre, conclue des mesures géodésiques prises à sa surface et de l'observation du pendule, s'accorde avec celle qui résulte des autres phénomènes; mais elle suppose que les degrés du méridien que l'on compare entre eux, ont été conclus d'arcs différents, mesurés dans des régions éloignées du globe. S'il s'agissait simplement de déduire de l'un de ces arcs, mesuré avec beaucoup de soin, comme l'a été l'arc compris entre Dunkerque et Barcelone, l'aplatissement de la Terre, voici la méthode que l'on suivrait dans ce cas.

Nous avons vu, n° 35, que si l'on suppose que la Terre, originairement fluide, a conservé en se refroidissant la figure qu'elle avait prise à l'état d'équilibre, le rayon de sa surface pouvait être exprimé par la formule suivante :

$$r = a(1 - \alpha h \cos^2 \theta),$$

a représentant le demi-axe de l'équateur, θ l'angle que forme le rayon r avec l'axe des pôles, et αh l'aplatissement de la Terre, que nous regardons comme une très-petite quantité dont on peut négliger le carré et les puissances supérieures.

Nommons s l'arc du méridien terrestre compris entre les deux rayons vecteurs a et r; on aura généralement $ds = -\sqrt{r^2 d\theta^2 + dr^2}$, l'arc s étant supposé croître de l'équateur aux pôles. La valeur précédente de r donne, en la différentiant,

$$dr = 2a\alpha h \sin\theta \cos\theta\, d\theta.$$

On aura donc, en négligeant les quantités de l'ordre α^2,

$$ds = -r d\theta = -a d\theta\,(1 - \alpha h \cos^2\theta),$$

d'où, en intégrant, on tire

$$s = \text{const.} - a\theta\,(1 - \tfrac{1}{2}\alpha h) + \tfrac{1}{4} a\alpha h \sin 2\theta.$$

Introduisons dans cette formule, au lieu de l'angle θ, la latitude L correspondante à l'extrémité de l'arc s. Quelle que soit la nature du méridien terrestre, la quantité $\frac{dr}{rd\theta}$ exprimant la tangente de l'angle que forme la normale avec le rayon r, il est aisé de voir qu'on aura

$$\text{tang}[\theta - (90^\circ - \text{L})] = \frac{dr}{rd\theta},$$

d'où l'on tire, en observant que dr est du premier ordre par rapport à α, et que nous négligeons le carré de cette quantité,

$$\text{L} = 90^\circ - \theta + \frac{dr}{rd\theta},$$

ou bien, en substituant pour r et $\frac{dr}{d\theta}$ leurs valeurs,

$$\text{L} = 90^\circ - \theta + \alpha h \sin 2\theta;$$

on aura donc, réciproquement,

$$\theta = 90^\circ - \mathrm{L} + \alpha h \sin 2\,\mathrm{L}.$$

Cette valeur, substituée dans l'expression de s, donnera, aux quantités près de l'ordre α^2,

$$s = a(1 - \tfrac{1}{2}\alpha h)\,\mathrm{L} - \tfrac{3}{4}\,a\alpha h \sin 2\,\mathrm{L}.$$

Nous n'ajoutons point de constante au second membre, parce que nous supposons l'arc s compté de l'équateur, ce qui donne $s = 0$ en même temps que $\mathrm{L} = 0$.

Désignons par S le quart du méridien terrestre; en faisant dans l'équation précédente

$$\mathrm{L} = 90^\circ = \tfrac{1}{2}\pi,$$

on aura

$$\mathrm{S} = a(1 - \tfrac{1}{2}\alpha h)\tfrac{1}{2}\pi,$$

et, par conséquent,

$$s = \frac{\mathrm{S}}{\frac{1}{2}\pi}(\mathrm{L} - \tfrac{3}{4}\alpha h \sin 2\,\mathrm{L}).$$

En désignant par L′ la latitude correspondante à l'extrémité d'un autre arc du méridien s', on aurait de même

$$s' = \frac{\mathrm{S}}{\frac{1}{2}\pi}(\mathrm{L}' - \tfrac{3}{4}\alpha h \sin 2\,\mathrm{L}').$$

L'arc compris entre les deux parallèles correspondants aux latitudes L et L′, sera donc

$$s' - s = \frac{\mathrm{S}}{\frac{1}{2}\pi}[\mathrm{L}' - \mathrm{L} - \tfrac{3}{4}\alpha h(\sin 2\,\mathrm{L}' - \sin 2\,\mathrm{L})].$$

Cette équation établit la relation qui doit exister entre la longueur d'un arc quelconque du méridien et les latitudes de ses points extrêmes. Soit s la longueur du degré moyen du méridien terrestre, ou la longueur du degré sous le parallèle de 45°, on aura $\frac{S}{\frac{1}{2}\pi} = s$, et l'équation précédente, en y substituant cette valeur, donnera immédiatement la longueur du degré, quand l'aplatissement αh du sphéroïde terrestre sera déterminé.

Maintenant, soient L_1, L_2, L_3, etc., les latitudes respectives des extrémités des arcs du méridien s_1, s_2, s_3, etc., comptés de l'équateur; en substituant successivement ces quantités à la place de L et de s dans l'équation précédente, on formera un système d'équations semblables qui serviront à déterminer l'ellipse qu'indiquent avec le plus de vraisemblance, pour le méridien terrestre, les arcs mesurés. Pour cela, on appliquera à ces équations la méthode du n° **40**, on désignera par c_1, c_2, c_3, etc., les arcs mesurés du méridien, à partir du parallèle qui correspond à la latitude L_1, en sorte qu'on aura $c_1 = s_2 - s_1$, $c_2 = s_3 - s_2$, etc.; on nommera, comme précédemment, L_1, L_2, L_3, etc., les latitudes, et l'on désignera par e_1, e_2, e_3, etc., les erreurs dont ces latitudes sont affectées, et qu'on peut attribuer, soit aux observations astronomiques d'où elles sont déduites, soit aux mesures géodésiques dont les inexactitudes influent sur les latitudes des parallèles qu'on suppose séparés par les intervalles c_1, c_2, etc. Les erreurs e_1, e_2, e_3, etc., étant de très-petites quantités, on pourra d'ailleurs négliger les termes où elles se trouveraient multipliées par α; on aura ainsi les équations suivantes :

$$\left.\begin{array}{l}
L_2 - L_1 - \frac{3}{2}\alpha h \sin(L_2 - L_1).\cos(L_2 + L_1) - \frac{c_1}{s} = e_1 - e_2, \\
L_3 - L_1 - \frac{3}{2}\alpha h \sin(L_3 - L_1).\cos(L_3 + L_1) - \frac{c_2}{s} = e_1 - e_3, \\
L_4 - L_1 - \frac{3}{2}\alpha h \sin(L_4 - L_1).\cos(L_4 + L_1) - \frac{c_3}{s} = e_1 - e_4, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
L_n - L_1 - \frac{3}{2}\alpha h \sin(L_n - L_1).\cos(L_n + L_1) - \frac{c_n}{s} = e_1 - e_n.
\end{array}\right\} (d)$$

Dans ces équations, les latitudes L et L′ sont supposées exprimées en degrés; il faudra donc exprimer de même la quantité αh, ce qui revient à multiplier par $\frac{180^\circ}{\pi}$ les coefficients dont elle est affectée.

Comme il est important de déterminer les erreurs e_1, e_2, etc., indépendamment l'une de l'autre, on pourra considérer e_1 comme une nouvelle inconnue donnée par l'équation $e_1 - e_1 = 0$; en joignant cette équation à celles qui précèdent, on aura autant d'équations qu'il y a eu d'arcs mesurés c_1, c_2, etc. On déterminera ensuite, par la méthode des moindres carrés, l'hypothèse elliptique dans laquelle la plus grande erreur est un *minimum*, et l'on reconnaîtra si elle est comprise dans les limites de celles dont les observations sont susceptibles.

Les mêmes considérations conviennent, d'après ce que nous avons dit n° **40**, aux observations de la longueur du pendule à secondes, mesurée à différentes latitudes.

42. Appliquons d'abord les méthodes précédentes aux principaux résultats qu'ont produits les grandes opérations entreprises en diverses contrées, pour obtenir la mesure exacte des degrés des méridiens terrestres. Parmi ces degrés, choisissons les cinq suivants, qui sont évalués en parties de la double toise qui a servi à mesurer l'arc compris entre Dunkerque et Barcelone et à laquelle on a donné le nom de *module*.

OBSERVATEURS.	LONGUEURS des degrés.	LATITUDES correspondantes au milieu de chaque degré.	ARC TOTAL mesuré d'où le degré a été conclu.
	mod.	° ′ ″	° ′ ″
Bouguer (au Pérou)................	28376,5	0 0 0	3 7 0
La Caille (au cap de Bonne-Espérance)	28518,5	33.18.30	1.13.17
Boscovich (Italie)..................	28489,5	43. 1. 0	2. 9. 5
Delambre et Méchain (France)......	28509,2	46.11.58	9.40.25
Clairaut, Maupertuis, etc. (Laponie)..	28702,5	66.20. 0	0.57.29

On voit, par ce tableau, que, quelle que soit la figure de la Terre, toutes les observations s'accordent à montrer que les degrés du méridien vont en augmentant de l'équateur aux pôles, ce qui indique, n° **40**, une diminution correspondante dans les rayons du sphéroïde terrestre, et, par conséquent, un aplatissement dans le sens des pôles.

Au moyen de ces valeurs, les équations (b) du n° **40** deviennent

$$\left.\begin{array}{l}
28376{,}\overset{\text{mod.}}{5} - a - b.0{,}00000 = e_1, \\
28518{,}5 - a - b.0{,}30156 = e_2, \\
28489{,}5 - a - b.0{,}46541 = e_3, \\
28509{,}2 - a - b.0{,}52093 = e_4, \\
28702{,}5 - a - b.0{,}83887 = e_5,
\end{array}\right\} (e)$$

et l'on en déduit pour les équations qui résultent de la condition que la somme des carrés des erreurs soit un *minimum*,

$$a + b.0{,}42535 - 28519^{\text{mod.}} = 0,$$
$$a + b.0{,}60308 - 28582^{\text{mod.}} = 0;$$

d'où l'on tire

$$a = 28368^{\text{mod.}}, \quad b = 354^{\text{mod.}},47.$$

On aura donc, généralement, pour l'expression du degré du méridien terrestre correspondant à la latitude L,

$$c = 28368^{\text{mod.}} + 354^{\text{mod.}},47 \sin^2 \text{L}.$$

Nous avons vu, n° **35**, que l'accroissement des degrés du méridien elliptique, de l'équateur au pôle, est à très-peu près égal à $3\,\alpha h c \sin^2 \text{L}$, αh étant l'ellipticité de l'ellipse, et c le degré de l'équateur : la formule précédente donne donc, à très-peu près, $\frac{1}{240}$ pour l'aplatissement du sphéroïde terrestre.

En adoptant pour la Terre la figure elliptique que ces résultats lui supposent, on trouve que la plus grande des erreurs qui ont dû être commises dans la mesure des degrés du méridien terrestre, et qui porte sur le degré du cap de Bonne-Espérance, mesuré par La Caille, est de $43^{\text{mod.}},6$. Cette erreur a paru d'abord trop considérable pour pouvoir être admise, et l'on a conclu que les degrés du méridien varient suivant une loi très-différente du carré du sinus de la latitude, et que par conséquent le sphéroïde terrestre s'écarte sensiblement de la figure elliptique.

Cependant comme l'ellipsoïde est, après la sphère, la figure la plus simple et la plus naturelle que l'on puisse adopter pour la Terre, et qu'elle est indiquée d'ailleurs par toutes les lois de l'Hydrostatique, on aurait dû, avant de la rejeter entièrement, attendre que le temps eût permis de vérifier les mesures des degrés qui semblaient s'en écarter davantage, d'autant que les opérations de ce genre, exigeant une extrême délicatesse, sont plus qu'aucune autre susceptibles d'inexactitudes. L'expérience a pleinement confirmé ces observations, et la mesure du degré de Laponie, exécutée de nouveau et avec beaucoup de soin par des astronomes suédois, pendant les années 1801, 1802 et 1803, a fait reconnaître qu'une erreur beaucoup plus grave que celle qu'indiquait l'analyse précédente, s'était glissée dans la mesure du même degré, exécuté en 1736 par Clairaut, Maupertuis, Lemonnier, Camus, Outhier et Celsius.

La grandeur du degré sous le cercle polaire s'est trouvée, d'après ces nouvelles opérations, de $115^{\text{mod.}}$ plus petite que celle qu'on lui avait d'abord assignée, ce qui le réduit à $28587^{\text{mod.}},5$. Cette correction est d'autant plus précieuse, que la nouvelle mesure donne, pour l'aplatissement du sphéroïde terrestre, une valeur qui s'accorde beaucoup mieux avec l'aplatissement qui résulte des observations du pendule et des autres phénomènes, que celle que la première indiquait, et qui coïncide entièrement avec la valeur de cet aplatissement qu'on a déduite de la comparaison du nouveau degré mesuré en France à celui de l'équateur mesuré par Bouguer.

En effet, si l'on introduit la correction précédente dans les équations (e), on trouvera, pour les deux équations du *minimum*,

$$a + b.0{,}42535 - 28496 = 0,$$
$$a + b.0{,}60308 - 28541 = 0,$$

d'où l'on tire

$$a = 28388^{\text{mod.}}, \quad b = 254^{\text{mod.}},36,$$

ce qui donne $\frac{1}{334{,}81}$ pour l'aplatissement de la Terre. On trouve, comme on le verra plus bas, en comparant les longueurs du pendule à différentes latitudes, $\frac{1}{342}$ pour la valeur de cet aplatissement : la mesure des degrés et l'observation des variations de l'intensité de la pesanteur, à la surface du globe, donnent ainsi à la Terre à très-peu près la même figure elliptique.

43. Il est donc presque démontré qu'une inexactitude grave s'était introduite dans la mesure du degré de Laponie; et cela est d'autant plus vraisemblable, que cette erreur de 230 toises ne porte pas entièrement sur les mesures géodésiques, ce qui paraîtrait en effet inadmissible. Il suffit, pour l'expliquer, de supposer une erreur de quelques secondes dans les latitudes des points extrêmes de l'arc mesuré par les académiciens français, et la difficulté des observations qui servent à les déterminer, rend cette supposition très-plausible. Sans doute, des erreurs du même genre ont pu se glisser dans la détermination d'autres degrés mesurés du méridien terrestre. On doit donc être extrêmement circonspect sur les conclusions qu'on en tire; et c'est par cette raison que, parmi le grand nombre de ces mesures que nous possédons, nous avons choisi celles qui, par les soins qu'on a mis à leur exécution et par la réputation des observateurs, nous ont semblé devoir inspirer le plus de confiance(*). La méthode de combinaison appliquée aux équations (e) est aussi très-propre à diminuer l'influence de ces erreurs sur les résultats; on doit observer en général que, comme les arbitraires qui entrent dans l'équation (b) ne sont qu'au nombre de deux, il suffira de deux degrés mesurés à la surface de la Terre, pour faire connaître son aplatissement et la longueur absolue du degré sous l'équateur. Si la Terre était un sphéroïde exactement elliptique, on obtiendrait donc, à très-peu près, les mêmes valeurs des constantes a et b, en comparant deux à deux tous les degrés mesurés jusqu'à présent; mais cette comparaison produit, au contraire, des différences qu'il est difficile d'attribuer aux seules erreurs des observations; on en doit conclure que la figure de la Terre

---

(*) *Voyez* Supplément aux Notes du tome II.

est très-irrégulière et beaucoup plus compliquée que nous ne l'avons supposé. On conçoit, en effet, qu'en admettant même que la figure de la Terre est celle qui résulte des lois de l'Hydrostatique, mille circonstances ont pu modifier ces lois de manière à l'écarter sensiblement de l'ellipsoïde. Les degrés mesurés à sa surface indiquent d'une manière manifeste ces écarts; ils donnent même lieu de penser que les deux hémisphères ne sont pas semblables de chaque côté de l'équateur. Ainsi la longueur du degré mesuré par La Caille au cap de Bonne-Esperance surpasse celle des degrés mesurés à une égale latitude et même à des latitudes plus grandes dans l'hémisphère boréal de la Terre. Le moyen le plus propre de diminuer l'influence de ces différences, ainsi que celle des erreurs dont les observations sont susceptibles, est donc de combiner entre elles un grand nombre d'observations, comme nous l'avons fait n° 42, ou du moins de comparer des degrés mesurés à des latitudes assez distantes pour que les résultats soient indépendants des effets qui tiennent aux irrégularités de la Terre et à des circonstances purement locales. C'est ainsi qu'en comparant au degré du Pérou le degré de France, qui a été conclu d'un arc plus grand qu'aucun de ceux qui avaient été mesurés jusqu'ici, et qui, par les soins et les lumières de ceux qui l'ont déterminé, présente peu de chances d'inexactitude, on a trouvé pour l'aplatissement de la Terre $\frac{1}{334}$, valeur qui s'accorde exactement avec celle que donne le nouveau degré de Laponie comparé aux autres degrés dont les mesures sont rapportées dans le tableau du n° 42.

Ce résultat a servi à établir la base de notre nouveau système de mesures. Le quart du méridien terrestre, conclu de l'arc mesuré entre Dunkerque et Montjoui est, d'après cet aplatissement, de $2565370^{\text{mod.}}$, et le mètre, qui en est la dix-millionième partie, est ainsi égal à $0^{\text{mod.}},2565370$ ou à $0^{\text{toise}},513074$, la toise étant celle qui a servi à la mesure du degré du Pérou. Ce simple avertissement suffirait pour qu'on pût retrouver en tout temps l'unité fondamentale de nos mesures, si son étalon venait à se perdre ou à s'altérer dans la suite, à moins cependant qu'il n'arrivât quelque grand changement dans la constitution physique du globe. C'est sans doute par cette raison qu'on a choisi la grandeur de la Terre pour la base de notre système métrique, de préférence aux autres éléments proposés pour cet objet. Ainsi, par exemple, la longueur du pendule qu'on vient récemment d'employer en Angleterre à l'établissement d'un nouveau système de mesures, n'offre point, à beaucoup près, le même caractère de fixité. En effet, l'intensité de la pesanteur, et par conséquent la longueur du pendule, est sujette, non-seulement comme les arcs mesurés du méridien, à des variations qui dépendent de la figure de la Terre et des irrégularités de sa surface, elle en éprouve encore de particulières qui tiennent à la non-homogénéité des différentes parties de cette surface; et enfin rien n'assure que l'intensité de la pesanteur est en elle-même inaltérable, et qu'elle ne subira pas dans la suite des siècles des modifications semblables à celles qu'éprouve continuellement le magnétisme à la surface du sphéroïde terrestre.

44. Choisissons maintenant, pour déterminer la figure elliptique de la Terre, des arcs de méridien mesurés à des latitudes peu différentes. Les résultats suivants provenant des opérations exécutées avec un soin extrême par Delambre et Méchain, pour la mesure de l'arc du méridien compris entre Dunkerque et Montjoui, on peut compter sur leur exactitude.

LIEUX DE L'OBSERVATION.	LATITUDES.	DISTANCES des quatre dernières stations au parallèle de Montjoui.
Montjoui	41° 21′ 44″,80	mod
Carcassonne	43.12.54,40	52749,48
Évaux	46.10.42,50	137174,03
Paris (au Panthéon)	48.50.49,75	213319.77
Dunkerque	51. 2.10,50	275792,36

En substituant ces valeurs dans les équations (d) du nº **40**, et en faisant $s = \frac{10000}{6}$ pour éviter d'opérer sur de trop grands nombres, on formera les cinq équations suivantes :

$$\left.\begin{aligned}
e_1 - e_1 &= 0,000000.6 + 0,000000.\alpha h - 0^{\circ}00000,\\
e_2 - e_1 &= 5,274948.6 + 0,262581.\alpha h - 1.85266,\\
e_3 - e_1 &= 13,717403.6 + 0,309603.\alpha h - 4.81602,\\
e_4 - e_1 &= 21,331977.6 - 0,040978.\alpha h - 7.48469,\\
e_5 - e_1 &= 27,579236.6 - 0,604414.\alpha h - 9.67379.
\end{aligned}\right\}(f)$$

En ajoutant entre elles ces équations, après avoir fait passer l'erreur e_1 dans le second membre, et en égalant à zéro leur somme, on trouve

$$5e_1 = -\ 67,903564.\beta + 0,073208.\alpha h + 23,82717.$$

Si l'on substitue la valeur de e_1, qui résulte de cette équation, dans celles qui la précèdent, conformément à ce qui a été dit n° **41**, on formera les cinq nouvelles équations suivantes :

$$\begin{aligned}
e_1 &= -\ 13,580713.\beta + 0,014642.\alpha h + 4^{\circ}76543,\\
e_2 &= -\ \ \ 8,305765.\beta + 0,277223.\alpha h + 2.91277,\\
e_3 &= \qquad 0,136690.\beta + 0,324245.\alpha h - 0.05059,\\
e_4 &= \qquad 7,751264.\beta - 0,026337.\alpha h - 2.71926,\\
e_5 &= \quad\ 13,998523.\beta - 0,589772.\alpha h - 4.90836,
\end{aligned}$$

d'où l'on tire, par la méthode des moindres carrés, pour déterminer les valeurs des arbitraires β et αh, les deux équations suivantes :

$$\begin{aligned}
0 &= -\ 178,705291 + \beta.509,48074 - \alpha h.10,91717,\\
0 &= \qquad 3,827288 - \beta.\ 10,91717 + \alpha h.\ 0,53073.
\end{aligned}$$

La résolution de ces équations donne

$$\beta = 0,3509117, \quad \alpha h = 0,0069227.$$

Nous avons supposé le 45^e degré $s = \frac{10000}{\beta}$; on aura donc ainsi

$$s = 28497,2, \quad \alpha h = \frac{1}{144,45}.$$

Telle est donc la valeur du degré moyen et de l'aplatissement du méridien terrestre qu'on déduirait de la seule considération des degrés mesurés en France.

La figure elliptique qui en résulte pour la Terre, diffère beaucoup de celle qu'on détermine par la comparaison des mêmes degrés au degré mesuré à l'équateur, par les observations du pendule et par d'autres phénomènes astronomiques. Cette figure, d'ailleurs, ne saurait se concilier avec les lois de l'Hydrostatique, ni avec celles de la précession et de la nutation, qui défendent de supposer au sphéroïde terrestre un aplatissement plus grand que dans le cas où toutes ses couches seraient d'égale densité, c'est-à-dire supérieur à $\frac{1}{230}$.

Les valeurs de αh et de $\mathfrak{6}$ sont celles qui conviennent à la figure elliptique du méridien terrestre qui donne un *minimum* pour la plus grande des erreurs commises dans les mesures qui ont servi à déterminer l'arc compris entre Dunkerque et Montjoui; si l'on substitue ces valeurs dans les équations (f), on trouve, pour ces erreurs exprimées en secondes,

$$e_1 = -0'',33, \quad e_2 = +0'',39, \quad e_3 = -1'',36,$$
$$e_4 = +2'',03, \quad e_5 = -0'',72.$$

Ainsi, la plus grande erreur ne monte pas à plus de $2''$, et leur moyenne, abstraction faite du signe, est de $0'',96$; ces erreurs sont comprises par conséquent dans les limites de celles dont les observations sont susceptibles.

Mais pour mieux se convaincre que les mesures qui résultent des opérations exécutées en France, ne permettent pas de supposer à la Terre une ellipticité de $\frac{1}{230}$, et, à plus forte raison, une ellipticité moins considérable, supposons dans les équations (f) $\alpha h = \frac{1}{230}$, on aura

$$e_1 = \quad 4,765498 - 13,580713.\beta,$$
$$e_2 = \quad 2,913979 - \quad 8,305765.\beta,$$
$$e_3 = -0,049176 + \quad 0,136690.\beta,$$
$$e_4 = -2,719375 + \quad 7,751264.\beta,$$
$$e_5 = -4,910927 + 13,998523.\beta.$$

En combinant entre elles ces équations, on trouve

$$o = -178,7527 + \beta.509,48074,$$

d'où l'on tire, pour la valeur de β qui rend la plus grande des erreurs un *minimum*, $\beta = 0,350853$, et, par suite, pour la longueur du degré moyen,

$$s = 28502^{\text{mod.}},$$

valeur qui s'accorde assez bien avec celle de 28504 qui résulte de la comparaison du degré de France à celui du Pérou. En substituant pour β sa valeur dans les équations précédentes, on trouve

$$e_1 = +2'',40, \quad e_2 = -0'',46, \quad e_3 = -4'',38,$$
$$e_4 = +0'',67, \quad e_5 = +1'',76.$$

La plus grande erreur serait, dans ce cas, de $-4'',38$. Or, l'excessive précision avec laquelle ont été faites les observations, ne permet pas de supposer dans la détermination des latitudes une erreur aussi considérable. L'aplatissement de $\frac{1}{145}$, que les observations faites en France en 1801 donnent au sphéroïde terrestre, a d'ailleurs été confirmé par les opérations exécutées depuis en Angleterre pour mesurer des arcs du méridien et des perpendiculaires à la méridienne: tout porte donc à croire que les anomalies que présentent leurs résultats, tiennent à quelque cause particulière qui, dans ces contrées, écarte sensiblement la Terre de la figure elliptique ou qui, altérant d'une manière irrégulière l'homogénéité de ses couches, fait dévier de quelques secondes, soit vers le midi, soit vers le nord, le fil à plomb de l'instrument qui sert à fixer les latitudes des arcs mesurés. On peut conclure de ces observations et de celles qui sont développées dans les numéros précédents, que la surface de la Terre étant très-irrégulière, ainsi que la densité des couches qui l'avoisinent, la mesure isolée d'un arc de méridien, quelle que soit son étendue, est peu propre à servir à la détermination exacte de la figure de la Terre; on tire, au contraire, de la comparaison de deux arcs du méridien mesurés à des latitudes très-distantes, des notions sur cette importante question, qui s'accordent très-bien avec celles qui résultent des autres phénomènes, parce qu'à ces grandes distances, les effets qui tiennent aux inégalités de la surface du globe et à la non-homogénéité de ses parties, disparaissent pour ne laisser subsister que ceux qui dépendent de sa forme générale.

45. Considérons maintenant les variations de la pesanteur aux diverses latitudes, et déterminons la figure elliptique la plus probable qui en résulte pour le sphé-

roïde terrestre. Les observations des longueurs du pendule à secondes, qui servent à reconnaître ces variations, sont plus faciles à exécuter que celles de la mesure des degrés du méridien; les anomalies qu'elles présentent sont aussi beaucoup moins considérables, parce que les irrégularités de la Terre exercent sur ces observations une influence bien moins sensible que sur les autres : on doit donc obtenir par ce procédé des notions plus certaines sur la figure du globe que par les mesures directes prises à sa surface.

Parmi les nombreuses observations qui ont été faites des longueurs du pendule, nous choisirons les cinq suivantes. Le pendule dont il est ici question est celui qui fait 86400 oscillations dans un jour moyen, et les mesures ont été réduites au niveau des mers, dans le vide et à la même température.

LIEUX des observations.	LATITUDES L.	LONGUEUR du pendule à secondes l.	NOMS DES OBSERVATEURS.
	° ′	m	
Pérou...........	0. 0	0,990564	Bouguer.
Petit-Goave.....	18.27	0,991150	Bouguer.
Paris.(Observat.).	48.51	0,993867	Biot, Mathieu.
Pétersbourg.....	58.15	0,994583	Mallet.
Laponie.........	67. 4	0,995325	Clairaut, Maupertuis, etc

On voit, par les résultats de ce tableau, que les longueurs du pendule à secondes augmentent d'une manière très-sensible en allant de l'équateur au pôle. Soumettons ces accroissements à la loi de la proportionnalité au carré du sinus de la latitude, pour reconnaître s'ils confirment l'hypothèse de la figure elliptique du sphéroïde terrestre.

En substituant, dans les équations (b), les valeurs précédentes, on trouve

$$\left.\begin{aligned} 0^{m},990564 - a - b.0,00000 &= e_1, \\ 0\ ,991150 - a - b.0,10016 &= e_2, \\ 0\ ,993867 - a - b.0,56672 &= e_3, \\ 0\ ,994589 - a - b.0,72307 &= e_4, \\ 0\ ,995325 - a - b.0,84829 &= e_5, \end{aligned}\right\} (g)$$

et en appliquant à ces équations la méthode des moindres carrés, on aura, pour déterminer les valeurs des constantes a et b, qui donnent un *minimum* pour la plus grande des erreurs dont sont affectées les mesures du pendule que nous avons adoptées,

$$0^{m},993099 - a - b.0,44765 = 0,$$
$$0\ ,994548 - a - b.0,70306 = 0,$$

d'où l'on tire

$$a = 0^{m},990555, \quad b = 0^{m},0056786.$$

On aura donc généralement, pour l'expression de la longueur du pendule correspondante à une latitude L,

$$0^{m},990555 + 0^{m},005679.\sin^2 L.$$

La valeur de a est celle du pendule équatorial, et l'on a $\frac{b}{a} = 0,0057331$. L'aplatissement du sphéroïde, d'après le n° 36, est égal à $\frac{5}{4}$ du rapport de la force centrifuge à la pesanteur sous l'équateur, moins la valeur de la fraction précédente; ce rapport pour la Terre est de $\frac{1}{289}$, n° **16**, livre I[er]; l'ellipticité du sphéroïde terrestre est par conséquent de $0,00865 - \frac{b}{a}$, ou de $\frac{1}{342}$. C'est l'aplatissement de l'ellipsoïde le plus vraisemblable qu'indiquent pour la Terre les mesures du pendule rapportées dans le tableau précédent; il s'accorde d'une manière satisfaisante avec celui que nous avons déduit, n° **42**, de la comparaison des degrés du méridien mesurés dans des lieux séparés par de grands intervalles, et avec l'aplatissement de $\frac{1}{304}$, qu'on déduit des inégalités qui résultent dans le mouvement de la Lune de la non-sphéricité de la Terre.

Si l'on substitue pour a et b leurs valeurs précédentes dans les équations (g), on aura

$$e_1 = 0^{\mathrm{m}},000009, \quad e_2 = 0^{\mathrm{m}},000026, \quad e_3 = 0^{\mathrm{m}},000094,$$
$$e_4 = -\,0^{\mathrm{m}},000072, \quad e_5 = -\,0^{\mathrm{m}},000047.$$

Ainsi donc, dans la combinaison même la plus favorable qu'on puisse faire de ces équations, on est forcé d'admettre une erreur de $0^{\mathrm{m}},000094$ dans les mesures des longueurs du pendule que nous avons employées dans les recherches précédentes, si l'on suppose que ces longueurs varient comme le carré du sinus de la latitude. Cette erreur n'excède pas au reste la limite des inexactitudes dont les observations sont susceptibles, et elle est beaucoup plus faible que les erreurs correspondantes dans la mesure des degrés du méridien ; ce qui prouve, comme nous l'avons dit n° **39**, que les causes qui écartent la Terre de la figure elliptique, ont beaucoup moins d'influence sur les variations du pendule que sur celles des degrés mesurés à sa surface.

Cependant il est à remarquer que, bien qu'elles soient moins sensibles, les mêmes irrégularités qu'on observe dans les degrés du méridien conclus d'arcs très-rapprochés entre eux, se reproduisent dans les longueurs du pendule à secondes. Ainsi, par exemple, la plus grande de ces anomalies dans les degrés mesurés en France et en Espagne, par Delambre et Méchain, se trouve dans l'arc compris entre les parallèles de Formentera et de Barcelone, et les variations de degrés subissent entre ces deux points un ralentissement considérable ; de même, les variations du pendule dans cet intervalle sont beaucoup plus faibles que celles que donnerait la loi du carré du sinus de la latitude ; c'est ce qu'on verra d'une manière évidente par le tableau suivant, où les constantes a et b ont été déterminées en comparant deux à deux les observations qu'il renferme.

LIEUX DES OBSERVATIONS.	LONGUEURS du pendule.	LATITUDES.	a	b
	m	° ′ ″	m	m
Unst	0,994942	60 45 25	0,990758	0,0054955
Leith	0,994533	55.58.37	0,990747	0,0055105
Dunkerque	0,994102	51.16.38	0,990737	0,0055278
Clermont	0,993520	45.11.46	0,991334	0,0043421
Barcelone	0,993232	41.23.15	0,991714	0,0034734
Formentera	0,993070	38.39.56		

La constante b conserve à peu près la même valeur dans les trois premiers intervalles, mais elle commence à décroître d'une manière très-prononcée depuis Clermont jusqu'à Barcelone, et ses variations sont encore beaucoup plus rapides de Barcelone à Formentera. Il faudrait, pour concilier cette valeur du coefficient du carré du sinus de la latitude avec celle qui résulte des observations faites en des lieux éloignés, supposer dans les mesures précédentes des erreurs de 8 à 9 centièmes de millimètre, ce qu'il est impossible d'admettre. La longueur a du pendule équatorial présente, dans ce tableau, des différences non moins remarquables. La longueur réelle de ce pendule, conclue des observations faites à l'équateur ou à des latitudes voisines, est de $0^{m},991006$. Les observations précédentes, faites à des latitudes supérieures à 45°, donnent, comme on voit, des longueurs beaucoup trop fortes, tandis que celles qui répondent à des latitudes inférieures en donnent de trop faibles. Ce résultat remarquable se manifeste d'une manière bien plus prononcée encore, lorsqu'on compare entre elles des observations faites sur une plus grande échelle et comprises, les premières, entre le 45e degré et le pôle, les secondes, entre le 45e degré et l'équateur. Au reste, il est évident, comme nous l'avons dit n° 43, que ces anomalies se compenseront en grande partie lorsqu'on choisira des observations faites en des lieux très-éloignés, et qu'on rendra ainsi les résultats plus indépendants de perturbations qui ont sans doute pour cause principale les irrégularités de la surface de la Terre.

46. Considérons maintenant Jupiter, la seule des planètes dont l'aplatissement ait pu être déterminé par l'observation directe. Reprenons l'équation (2) du n° **25** :

$$\text{arc tang}\,\lambda = \frac{9\lambda + 2q\lambda^3}{9 + 3\lambda^2}. \quad (h)$$

Lorsque la valeur de q sera connue, on aura, par cette équation, celle de λ, et par conséquent le rapport $\sqrt{1+\lambda^2}$ de l'axe de l'équateur à l'axe du pôle. Or, en supposant le cas de l'homogénéité, on a, n° **25**, $q = \frac{n^2}{\frac{4}{3}\pi}$. Soit D la distance du quatrième satellite de Jupiter au centre de la planète, et T le temps de sa révolution, exprimé en jours; sa force centrifuge sera à celle qui anime un élément de la masse de Jupiter placé à l'unité de distance de l'axe de rotation, comme $\frac{D}{T^2}$ est à $\frac{1}{T'^2}$, T' étant le temps de la rotation de Jupiter, exprimé en fractions du jour. La force centrifuge du satellite est d'ailleurs égale à la force qui retient cet astre dans son orbite, c'est-à-dire à la masse M de Jupiter, divisée par D^2 ; on aura donc

$$n^2 = \frac{MT^2}{D^3 T'^2}.$$

On a d'ailleurs, n° **25**, $M = \frac{4}{3}\pi h^3 (1 + \lambda^2)$; on aura donc

$$q = \frac{n^2}{\frac{4}{3}\pi} = \frac{h^3(1+\lambda^2)T^2}{D^3 T'^2}.$$

D'après les observations de Pound, rapportées par Newton, la distance du quatrième satellite de Jupiter à son centre est égale à 26,63 demi-diamètres de l'équateur de cette planète; ce qui donne

$$\frac{h\sqrt{1+\lambda^2}}{D} = \frac{1}{26,63};$$

on a de plus

$$T = 16^j,68902, \quad T' = 0^j,41377.$$

On conclura de là

$$q = \frac{0,086145}{\sqrt{1+\lambda^2}};$$

et en substituant cette valeur dans l'équation (h), elle deviendra

$$\text{arc tang}\,\lambda = \frac{9\lambda\sqrt{1+\lambda^2} + 0,172290\,\lambda^3}{9+3\lambda^2};$$

d'où l'on tire $\lambda = 0,4810$, et, par suite, le rapport de l'axe du pôle à l'axe de l'équateur, ou $\sqrt{1+\lambda^2} = 1,10967$.

Ce rapport, suivant les observations de Pound, est de 1,0771. On trouve, par la théorie des satellites de Jupiter, qui détermine ce rapport avec plus de précision encore que les observations directes, qu'il est de 1,0747. Ces résultats montrent que Jupiter est moins aplati que dans le cas de l'homogénéité, et que, par conséquent, sa densité va en augmentant, comme celle de la Terre, de la surface au centre.

Nous avons vu, n° 34, qu'en supposant les planètes originairement fluides, leur ellipticité devait être comprise entre $\frac{5}{4}q$ et $\frac{1}{2}q$, la première de ces limites répondant au cas où la masse fluide serait homogène, et la seconde à celui où toute la masse serait réunie à son centre. Or, l'ellipticité d'un ellipsoïde est l'excès de l'axe de l'équateur sur celui du pôle, divisé par le dernier de ces axes; sa valeur est donc égale à $\sqrt{1+\lambda^2}-1$; on aura donc, par ce qui précède, $\frac{5}{4}q = 0,10967$, et, par conséquent, $\frac{1}{2}q = 0,04385$. On trouve, par l'observation directe, 0,0771, et par le mouvement des nœuds des orbites des satellites de Jupiter, 0,0747 pour l'ellipticité de cette planète : ces deux valeurs sont donc comprises dans les limites que leur assigne la théorie.

Nous avons trouvé, n° **29**, dans le cas de l'homogénéité, 0,004334 pour l'ellipticité de la Terre. En supposant donc la densité de la Terre égale à celle de Jupiter, leurs ellipticités seront entre elles comme 0,10967 est à 0,004334. D'après cela, en adoptant pour l'ellipticité de Jupiter la valeur 0,0747, qui résulte de la théorie des satellites, on trouve $\frac{1}{338,72}$ pour l'aplatissement de la Terre, et $\frac{1}{328,17}$, en choisissant l'ellipticité 0,0771, qui est donnée par l'observation directe. On voit que ces résultats s'accordent suffisamment bien avec ceux que l'on tire des observations du pendule et de la mesure des arcs du méridien terrestre, et l'analogie qui existe entre la figure de Jupiter et celle de la Terre, prouve avec évidence que la même loi a présidé à la formation de tous les corps célestes.

Les autres planètes sont trop éloignées de nous, ou leur aplatissement est trop peu sensible, pour que l'observation ait pu jusqu'ici fournir les éléments nécessaires à la comparaison des phénomènes et de la théorie. Il en est de même de la Lune, qui se présente à l'observateur comme un corps à très-peu près sphérique; les conséquences qui résultent des lois de sa libration, et que nous avons développées dans le chapitre VI du livre IV, sont les seules données que nous ayons sur sa véritable figure.

47. Nous ne terminerons pas ce chapitre, spécialement consacré à la figure de la Terre, sans montrer comment les phénomènes de la précession et de la nutation confirment, comme nous l'avons annoncé, les résultats que l'on obtient par la mesure des arcs du méridien terrestre, et par les observations du pendule. Pour le faire voir, reprenons la valeur de la fonction V, donnée n° **25**, livre IV,

$$V = \frac{ML}{r} - \frac{L}{4r^3}(A + B + C)$$
$$+ \frac{3L}{4r^5}[x^2(B+C-A)+y^2(A+C-B)+z^2(A+B-C)].$$

Dans cette expression, A, B, C sont les trois moments d'inertie de la Terre, qui se rapportent respectivement aux axes principaux des x, des y et des z, M est la masse de la Terre, et x, y, z expriment les trois coordonnées de l'astre L.

On aura, en vertu du n° **37**, pour l'expression générale de la fonction V, relativement à la Terre, supposée elliptique et douée d'un mouvement de rotation autour d'un axe fixe,

$$V = \frac{ML}{r} + \frac{ML\,a^2}{r^3}\left[(\alpha h - \tfrac{1}{2}q)(\tfrac{1}{3} - \cos^2\theta) + \alpha h' \sin^2\theta \cos 2\varpi\right),$$

αh et $\alpha h'$ étant deux constantes qui dépendent de l'aplatissement de la Terre, et q le rapport de la force centrifuge à la pesanteur sous l'équateur.

Désignons par θ l'angle que forme le rayon r avec l'axe de rotation que nous avons pris, nº 15, livre IV, pour axe des z, par ω la longitude de ce rayon comptée sur le plan de l'équateur; on aura

$$x = r\sin\theta\sin\omega,\quad y = r\sin\theta\cos\omega,\quad z = r\cos\theta.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans la première des expressions de V, et qu'on compare ensuite ces deux expressions entre elles, on trouvera l'équation suivante :

$$\begin{aligned}\tfrac{3}{4}(2\,\mathrm{C}-\mathrm{A}-\mathrm{B})\left(\tfrac{1}{3}-\cos^2\theta\right)+\tfrac{3}{4}(\mathrm{A}-\mathrm{B})\sin^2\theta\cos 2\omega\\ =\mathrm{M}a^2\left[\left(\alpha h-\tfrac{1}{2}q\right)\left(\tfrac{1}{3}-\cos^2\theta\right)+\alpha h'\sin^2\theta\cos 2\omega\right];\end{aligned}$$

d'où l'on tire, en vertu de l'indépendance des angles, θ et ω,

$$\mathrm{A}-\mathrm{B}=\tfrac{4}{3}\mathrm{M}a^2\,\alpha h',$$

$$2\,\mathrm{C}-\mathrm{A}-\mathrm{B}=\tfrac{4}{3}\mathrm{M}a^2\left(\alpha h-\tfrac{1}{2}q\right).$$

Les observations du pendule nous ont montré que l'aplatissement du sphéroïde terrestre est à très-peu près le même sur les divers méridiens, ce qui exige que $\alpha h'$ soit une très-petite quantité de l'ordre α^2, que l'on peut négliger. On a alors $\mathrm{A}=\mathrm{B}$, d'où résulte ce théorème remarquable, c'est que *les phénomènes de la précession des équinoxes et de la nutation de l'axe terrestre sont les mêmes que si la Terre était un sphéroïde de révolution*,

Si l'on considère la Terre comme un ellipsoïde de révolution autour de l'axe des z, on aura, par les propriétés de ces corps,

$$C = \frac{2 M a^2}{5 \sigma},$$

σ étant un nombre qui dépend de la loi de densité des différentes couches du sphéroïde, et que l'expérience seule peut déterminer; elle a montré que, pour la Terre, ce nombre diffère peu de l'unité. On aura donc ainsi

$$\frac{2C - A - B}{C} = \frac{10\sigma}{3}(\alpha h - \tfrac{1}{2} q).$$

Nous avons trouvé, n° 39, livre IV,

$$\frac{2C - A - B}{C} = 0,0062810;$$

on aura donc

$$\alpha h - \tfrac{1}{2} q = \frac{0,0018843o}{\sigma}. \quad (k)$$

Le rapport que désigne σ est égal à l'unité dans le cas de l'homogénéité; il est plus grand que l'unité, si la densité du sphéroïde va en croissant de la surface au centre, et moindre que ce nombre dans le cas contraire. Supposons donc la Terre homogène; on aura $\sigma = 1$: on a d'ailleurs, par l'observation, $q = \frac{1}{289}$: on aura donc, dans ce cas, $\alpha h = 0,0035871$, ou $\frac{1}{279}$. La supposition de $\alpha h = \frac{1}{578}$ donnerait pour σ une valeur infinie : la valeur de αh est donc comprise entre $\frac{1}{279}$ et $\frac{1}{578}$, et ce sont par conséquent les limites que les phénomènes de la précession et de la nutation assignent à l'aplatissement du sphéroïde terrestre.

En prenant une moyenne entre les valeurs de l'aplatissement de la Terre, qui résultent de la comparaison des degrés mesurés à sa surface, et des observations du pendule, on peut supposer cet aplatissement de $\frac{1}{320}$ à peu près. Cette valeur est comprise entre les limites précédentes. Si on la substitue au lieu de αh, et qu'on remplace en même temps q par sa valeur dans l'équation (k), on en tire

$$\sigma = 1{,}32560:$$

ainsi donc la quantité σ étant plus grande que l'unité, la densité de la Terre va en croissant de la surface au centre, ce qui est conforme aux expériences de Cavendish et aux lois de l'Hydrostatique, qui exigent que si la Terre était originairement fluide, les parties les plus denses soient en même temps les plus voisines du centre.

48. Si l'on embrasse maintenant d'un même regard les résultats que nous venons de recueillir par tant de moyens différents sur la figure de la Terre, sans doute on sera surpris de leur parfait accord, et convaincu qu'ils ne peuvent être que les effets d'une même cause, qui lie entre eux tous les phénomènes qui dépendent de la nature et de la constitution du globe. La mesure des degrés des méridiens terrestres, qui paraît la méthode la plus simple que la nature nous ait indiquée pour déterminer la figure de notre planète, n'est cependant pas celle dont on doive attendre des résultats plus certains; toutefois, en combinant avec adresse des observations faites à des latitudes très-distantes, pour diminuer l'effet des irrégularités de la Terre dans quelques-unes de ses parties, on détermine, par ce moyen, la valeur très-approchée de son aplatissement. Cette valeur s'accorde d'une manière remarquable avec celle qui résulte des observations du pendule, méthode d'investigation moins directe, mais plus sûre que la précédente, et que l'homme n'a due qu'à son génie. Les phénomènes de la précession et de la nutation ne font pas connaître la valeur absolue de la fraction qui exprime l'aplatissement de la Terre; ils déterminent seulement deux limites, que cette fraction ne peut pas dépasser, et les valeurs que lui assignent la mesure des arcs du méridien et les longueurs du pendule, sont comprises entre ces limites. Les mêmes phénomènes fournissent des notions précieuses sur la constitution intérieure du sphéroïde terrestre; ils ne donnent point, il est vrai, la loi rigoureuse des densités des couches qui le composent, et l'on peut encore satisfaire par une infinité d'hypothèses à l'unique condition qu'ils imposent, mais ils indiquent un accroissement dans les densités à mesure que l'on approche du centre : résultat que confirment les phénomènes de la stabilité de l'équilibre des mers, le peu de déviation qu'éprouve le fil à plomb par l'attraction des montagnes, les mesures directes des arcs du méridien et des longueurs du pendule, qui nous ont montré que la Terre est plus aplatie que dans le cas de l'homogénéité;

résultat enfin qui est une suite nécessaire des lois de l'Hydrostatique, lorsqu'on suppose que la Terre était originairement fluide, et que ses éléments ont conservé, en se durcissant, la même disposition qu'ils avaient dans leur premier état.

L'admirable concordance de tous ces résultats n'est pas sans doute ce qu'offre de moins merveilleux la théorie de la pesanteur universelle. Si son influence se montre d'une manière moins manifeste et moins régulière dans les phénomènes qui dépendent de la figure des corps célestes et de leurs mouvements autour de leur centre de gravité, que dans ceux qui se rapportent aux mouvements de ces centres dans l'espace, c'est que cette influence, comme nous l'avons vu, est, dans ces phénomènes, modifiée sans cesse par les circonstances particulières dépendantes de la constitution de ces corps. Le géomètre, par la même raison, a éprouvé plus d'obstacles pour les soumettre au calcul; mais le succès a couronné ses efforts. Un homme de génie avait deviné la cause secrète qui met en mouvement la matière; l'analyse mathématique, en ramenant à ce principe unique tous les phénomènes de l'univers, ceux mêmes qu'il paraissait le plus difficile d'y soumettre, a démontré, par la preuve la plus irréfragable, qu'il était la véritable loi de la nature.

NOTES.

NOTE I (page 2).

Sur la détermination des orbites des comètes d'après les observations.

Lagrange a le premier tenté de ramener à des formules analytiques rigoureuses la solution de cette question, que les géomètres et les astronomes n'avaient abordée jusque-là que par des méthodes de tâtonnement ou des constructions géométriques. Laplace donna ensuite une nouvelle solution fondée sur des considérations absolument différentes, et les deux méthodes qui sont résultées de ces travaux, ont, depuis, servi de types à toutes celles que l'on a imaginées pour résoudre ce difficile problème.

Ces méthodes sont surtout remarquables en ce qu'elles portent chacune le cachet particulier qui caractérise le génie de ces deux illustres géomètres. Celle de Lagrange semble ressortir plus directement de la question, considérée comme un simple problème de théorie abstraite; elle embrasse dans sa généralité tous les cas qui peuvent se présenter, sans se préoccuper des circonstances qui peuvent en rendre souvent l'emploi insuffisant ou impossible. Celle de Laplace, au contraire, paraît dirigée, avant tout, vers un but pratique; l'auteur s'attache à chercher d'abord tout le parti qu'on peut tirer des observations pour simplifier la question, et présente finalement au calculateur des formules d'un usage aussi simple que facile pour les applications numériques.

Cette méthode, par son originalité, mérite une attention particulière, et quoique celle que nous avons présentée dans le texte, et qui n'est qu'une extension de la méthode de Lagrange, perfectionnée par l'introduction de l'équation remarquable qui donne le temps, employé à décrire un arc parabolique, au moyen de la corde qui sous-tend cet arc et des rayons menés à ses extrémités, puisse suffire à tous les cas qui peuvent se présenter, je pense qu'il ne sera pas inutile d'exposer ici cette seconde solution d'une des questions les plus difficiles du système du monde, et par une analyse plus simple peut-être que celle qu'a suivie l'auteur de la *Mécanique céleste*.

Cette méthode suppose que l'on connaît, pour une époque donnée, la longitude a et la latitude b de la comète, ainsi que leurs différentielles du premier et du second ordre, prises par rapport au temps et divisées par l'élément de cette variable, c'est-à-dire les quatre quantités $\frac{da}{dt}$, $\frac{d^2a}{dt^2}$ et $\frac{db}{dt}$, $\frac{d^2b}{dt^2}$. On peut, en effet, dans ce cas, déterminer, par des formules simples et rigoureuses, tous les éléments de l'orbite de la manière suivante.

1. Soient x, y, z les trois coordonnées de la comète, rapportées à l'écliptique et au centre du Soleil; r sa distance à cet astre ou son rayon vecteur; X, Y, les coordonnées de la Terre dans son orbite; R son rayon vecteur et A sa longitude vue du Soleil; enfin soit ρ la projection sur l'écliptique de la droite qui joint la comète à la Terre, ou ce qu'on nomme ordinairement la distance accourcie de la comète: on aura

$$x = X + l\rho, \quad y = Y + m\rho, \quad z = n\rho; \quad (1)$$

en supposant, pour abréger, $l = \cos a$, $m = \sin a$ et $n = \tang b$.

Les équations différentielles du mouvement de la comète autour du Soleil seront

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{x}{r^3} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{y}{r^3} = 0, \quad \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{z}{r^3} = 0. \quad (2)$$

On aura de même, relativement à la Terre,

$$X = R\cos A, \quad Y = R\sin A,$$

et

$$\frac{d^2X}{dt^2} + \frac{X}{R^3} = 0, \quad \frac{d^2Y}{dt^2} + \frac{Y}{R^3} = 0.$$

En substituant donc pour x, y, z, leurs valeurs dans les équations (2), on trouvera, en vertu de ces deux dernières équations,

$$\frac{d^2.l\rho}{dt^2}-\frac{X}{R^3}+\frac{X+l\rho}{r^3}=0,$$

$$\frac{d^2.m\rho}{dt^2}-\frac{Y}{R^3}+\frac{Y+m\rho}{r^3}=0,$$

$$\frac{d^2.n\rho}{dt^2}+\frac{n\rho}{r^3}=0;$$

ou, en développant et supposant, pour abréger, $\sigma=\frac{1}{r^3}-\frac{1}{R^3}$,

$$\left.\begin{aligned}
l.\frac{d^2\rho}{dt^2}+\frac{2\,dl\,d\rho}{dt^2}+\rho.\left(\frac{d^2 l}{dt^2}+\frac{l}{r^3}\right)+X\sigma=0,\\
m.\frac{d^2\rho}{dt^2}+\frac{2\,dm\,d\rho}{dt^2}+\rho.\left(\frac{d^2 m}{dt^2}+\frac{m}{r^3}\right)+Y\sigma=0,\\
n.\frac{d^2\rho}{dt^2}+\frac{2\,dn\,d\rho}{dt^2}+\rho.\left(\frac{d^2 n}{dt^2}+\frac{n}{r^3}\right)=0.
\end{aligned}\right\}(3)$$

En éliminant $\frac{d^2\rho}{dt^2}$, on trouve

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\rho}{dt}.\frac{(ndl-ldn)}{dt}+\frac{\rho}{2}.\left(\frac{nd^2 l-ld^2 n}{dt^2}\right)+\frac{1}{2}nX\sigma=0,\\
\frac{d\rho}{dt}.\frac{(ndm-mdn)}{dt}+\frac{\rho}{2}.\left(\frac{nd^2 m-md^2 n}{dt^2}\right)+\frac{1}{2}nY\sigma=0,\\
\frac{d\rho}{dt}.\frac{(ldm-mdl)}{dt}+\frac{\rho}{2}.\left(\frac{ld^2 m-md^2 l}{dt^2}\right)+\frac{1}{2}.(lY-mX)\sigma=0.
\end{aligned}\right\}(4)$$

Ces équations n'équivalent qu'à deux distinctes; et, en effet, en multipliant la première par n et en la retranchant ensuite de la seconde multipliée par m, on retrouve la troisième.

Si maintenant on élimine $\frac{d\rho}{dt}$ entre les deux premières équations (4), ou, ce qui revient au même, si après avoir multiplié ces équations, la première par dm, la seconde par $-dl$, et la troisième par dn, on les ajoute, et que, pour abréger, on fasse

$$h = \frac{X.(ndm - mdn) + Y.(ldn - ndl)}{\frac{d^2 l}{dt^2}\cdot(mdn - ndm) + \frac{d^2 m}{dt^2}\cdot(ndl - ldn) + \frac{d^2 n}{dt^2}\cdot(ldm - mdl)},$$

on aura

$$\rho = h.\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}\right). \quad (5)$$

D'ailleurs

$$r^2 = R^2 + 2R\rho\cos(A - a) + \frac{\rho^2}{\cos^2 b}. \quad (6)$$

On a donc deux équations au moyen desquelles on peut déterminer r et ρ. Si l'on éliminait ρ entre ces deux équations, on arriverait à une équation du huitième degré en r, mais qui s'abaisserait au septième, comme nous l'avons vu nº 6, livre III.

Les valeurs de r et de ρ étant connues, on aura celle de $\frac{d\rho}{dt}$ au moyen de l'une quelconque des équations (4); mais au lieu d'employer indistinctement ces équations à cette recherche, il est bon de combiner les deux premières de cette manière : on multipliera la première par l et la seconde par m, on les ajoutera ensuite, en observant que $l^2 + m^2 = 1$, ce qui donne

$$ldl + mdm = 0, \quad ld^2 l + md^2 m = -dl^2 - dm^2,$$

et l'on pourra substituer aux équations (4) les deux suivantes :

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\rho}{dt}\frac{dn}{dt} + \frac{\rho}{2}\left[\frac{d^2 n + n(dl^2 + dm^2)}{dt^2}\right] - \frac{n\sigma}{2}(lX + mY) = 0, \\ &\frac{d\rho}{dt}\left(\frac{ldm - mdl}{dt}\right) + \frac{\rho}{2}\left(\frac{ld^2 m - md^2 l}{dt^2}\right) + \frac{\sigma}{2}(lY - mX) = 0. \end{aligned}\right\} (7)$$

C'est entre ces deux équations qu'il conviendra de choisir pour déterminer la valeur de $\frac{d\rho}{dt}$, parce que la première est indépendante des différentielles secondes de m et de l, et la seconde de la différentielle de n, ce qui offre des avantages dans les applications, comme on le verra plus bas.

Si, après avoir substitué pour l, m, n leurs valeurs dans les équations (1), on les différentie, on trouve, en conservant la notation établie n° **2**, livre cité,

$$\left.\begin{aligned} x' &= X' + \frac{d\rho}{dt}\cos a - \rho\sin a\frac{da}{dt}, \\ y' &= Y' + \frac{d\rho}{dt}\sin a + \rho\cos a\frac{da}{dt}, \\ z' &= \frac{d\rho}{dt}\operatorname{tang} b + \frac{\rho}{\cos^2 b}\frac{db}{dt}. \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Ces équations ne contenant que des quantités connues, puisque les valeurs de ρ et de r sont supposées déterminées par ce qui précède, en les réunissant aux équations (1), on pourra déterminer les six quantités x, y, z, x', y', z', et l'on en conclura les éléments de l'orbite elliptique de la comète, comme on l'a fait n° **29**, livre II.

La question est donc ainsi complétement résolue; mais si l'on suppose à l'ordinaire que l'orbite est une parabole, on aura, par la nature de cette courbe,

$$\frac{2}{r} = x'^2 + y'^2 + z'^2,$$

équation qui, en y substituant pour x', y', z' leurs valeurs, prendra cette forme

$$\frac{2}{r} = M + N.\frac{d\rho}{dt} + P.\rho^2 + Q.\frac{d\rho^2}{dt^2}. \quad (9)$$

La question dans ce cas présente donc une équation de plus que d'inconnues, et l'on peut en profiter pour éviter l'emploi des données qui participeraient le plus aux erreurs des observations. Pour cela, nous remarquerons que les inexactitudes dont elles sont susceptibles, deviennent surtout sensibles sur les différences secondes $\frac{d^2 a}{dt^2}$, $\frac{d^2 b}{dt^2}$, parce qu'étant beaucoup plus petites que les premières, ces erreurs en forment une plus grande partie aliquote. Il faut donc en éviter l'emploi autant que possible, et comme on ne peut pas les rejeter toutes deux à la fois, on ne conservera que celle qu'on doit croire la plus correcte, ce qu'il sera toujours facile de reconnaître. D'après cela, on ne fera point usage, pour déterminer ρ, de l'équation (5), parce que le coefficient h dépend à la fois des différences secondes de la longitude et de la latitude; on lui substituera l'équation (9). Quant aux équations (7), qui déterminent $\frac{d\rho}{dt}$, Laplace avait proposé d'abord d'employer la première ou la seconde, selon qu'on voudra rejeter celle des différences secondes de la latitude ou de la longitude qu'on jugera la moins correcte d'après les circonstances particulières du mouvement de la comète, mais il a reconnu depuis qu'on obtenait des résultats plus exacts en faisant usage à la fois de ces deux équations combinées par la méthode des moindres carrés. En substituant dans ces équations pour l, m, n, X et Y leurs valeurs, on aura les deux suivantes :

$$\left(\frac{db}{dt}\right)\frac{d\rho}{dt} = -\frac{1}{2}\left(\frac{d^2 b}{dt^2} + \sin b \cos b \frac{da^2}{dt^2} + 2 \operatorname{tang} b \frac{db^2}{dt^2}\right)\rho$$

$$+ \frac{1}{2}\mathrm{R} \sin b \cos b \cos(\mathrm{A} - a)\,\sigma,$$

$$\left(\frac{da}{dt}\right)\frac{d\rho}{dt} = -\frac{1}{2}\frac{d^2 a}{dt^2}\rho - \frac{1}{2}\mathrm{R}\sin(a - \mathrm{A})\,\sigma.$$

En ajoutant ces deux équations, après avoir multiplié la première par $\frac{db}{dt}$ et la seconde par $\frac{da}{dt}$, on formera la suivante :

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{da^2+db^2}{dt^2}\right)\frac{d\rho}{dt} = &-\frac{1}{2}\left[\frac{da \sin(\mathrm{A}-a) - db \sin b \cos b \cos(\mathrm{A}-a)}{dt}\right]\mathrm{R}\sigma \\ &-\frac{1}{2}\left(\frac{da\, d^2 a + db\, d^2 b + 2 \operatorname{tang} b\, db^3 + \sin b \cos b\, db\, da^2}{dt^3}\right)\rho.\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Quant aux quantités X′ et Y′, qui entrent dans la formule (9) et