Désignons, dans le même triangle sphérique, par δ le côté opposé à l'angle γ, nous aurons

$$\sin\delta = \frac{\sin\gamma \sin(\alpha + \psi)}{\sin\theta'},$$

d'où, en développant après avoir substitué pour θ' sa valeur, et négligeant les puissances de γ supérieures au carré, on tire

$$\delta = \frac{\gamma \sin(\alpha + \psi)}{\sin\theta} - \frac{1}{2}\frac{\cos\theta\,\gamma^2 \sin 2(\alpha+\psi)}{\sin^2\theta}.$$

Nommons ψ' la distance de l'intersection de l'équateur et de l'écliptique vraie, projetée sur l'écliptique fixe, à l'origine invariable d'où l'on compte l'angle ψ sur ce dernier plan, et considérons le triangle sphérique rectangle dont δ est l'hypoténuse et dans lequel θ est l'angle adjacent au côté $\psi - \psi'$, nous aurons

$$\text{tang}(\psi - \psi') = \cos\theta \,\text{tang}\,\delta.$$

La supposition de $\gamma = 0$ donne $\delta = 0$, et par conséquent $\psi = \psi'$. Si l'on substitue pour δ sa valeur précédente et qu'on développe l'équation résultante en négligeant toujours les quantités de l'ordre γ^3, on trouvera

$$\psi' = \psi - \cot\theta\,\gamma \sin(\alpha + \psi) + \frac{1}{2}\cot^2\theta\,\gamma^2 \sin 2(\alpha + \psi),$$

ou bien, en mettant pour $\gamma\sin(\alpha+\psi)$ et $\gamma^2 \sin 2(\alpha+\psi)$ leurs valeurs, n° **26**,

$$\left.\begin{aligned} &\psi' = \psi - \cot h\,\Sigma.\mathrm{B} \sin(ct + 6) \\ &+ \frac{1}{2}\cot^2 h[\Sigma.\mathrm{B} \sin(ct+6) \times \Sigma.\mathrm{B} \cos(ct + 6)]. \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

On remarquera que nous avons tenu compte dans les expressions précédentes de θ' et de ψ', des termes de l'ordre du carré de l'inclinaison γ de l'écliptique vraie sur l'écliptique fixe, tandis que nous avions négligé les quantités du même ordre dans les valeurs différentielles de θ et de ψ, n° **25**; c'est que dans ces expressions ces quantités étaient déjà multipliées par des coefficients de l'ordre des forces perturbatrices, ce qui les rendait à peu près insensibles : mais dans les expressions finies de θ' et de ψ', ces quantités, quoique très-petites généralement par rapport aux autres, doivent être conservées pour la précision des formules, parce qu'elles produisent par leur développement des termes du même ordre que ceux auxquels nous nous proposons d'avoir égard.

Nous avons représenté par γ l'inclinaison de l'écliptique vraie sur l'écliptique fixe; en vertu des équations (9), on a

$$\gamma^2 = [\Sigma.\mathrm{B}\sin(ct+6)]^2 + [\Sigma.\mathrm{B}\cos(ct+6)]^2.$$

Prenons pour plan fixe celui de l'écliptique au commencement du temps t, γ sera nul pour cette époque, puisqu'alors l'écliptique vraie coïncide avec l'écliptique fixe. On aura donc

$$\Sigma.\mathrm{B}\sin 6 = 0, \quad \Sigma.\mathrm{B}\cos 6 = 0.$$

Cela posé, si dans les équations (15) et (16) on remplace θ et ψ par leurs valeurs données par les formules (11) et (13), on aura pour déterminer θ' et ψ'

les deux équations suivantes :

$$\left.\begin{aligned}
\theta' &= h - \Sigma.\frac{B(l-c)}{c}[\cos(ct+6) - \cos 6] + \frac{1}{2}\cot h[\Sigma.B\sin(ct+6)]^2, \\
\psi' &= lt\left(1 - \tang h\,\Sigma.\frac{Bl}{c}\cos 6\right) \\
&\quad + \Sigma.\frac{B(l-c)}{c}\cot h\left(1 + \frac{l}{c}\tang^2 h\right)[\sin(ct+6) - \sin 6] \\
&\quad + \cot^2 h[\Sigma.B\sin(ct+6)\,\Sigma.B\cos(ct+6)],
\end{aligned}\right\} \quad (17)$$

les constantes h et l ayant ici la même signification que dans le n° **27**.

30. Ces formules sont celles que nous emploierons pour déterminer les variations séculaires de l'obliquité de l'écliptique vraie et de la précession des équinoxes relatives à ce plan. Pour les comparer à celles qu'on obtiendrait en négligeant l'effet de l'aplatissement de la Terre combiné avec le déplacement séculaire de l'écliptique, substituons dans les équations (15) et (16) pour θ et ψ leurs valeurs données par les équations (14), n° **28**, et nommons, comme précédemment, h l'obliquité de l'écliptique lorsque t est nul. En négligeant les termes de l'ordre γ^2, on aura ainsi :

$$\left.\begin{aligned}
\theta' &= h + \Sigma.B[\cos(ct+6) - \cos(lt+6)], \\
\psi' &= lt - \Sigma.B\cot h[\sin(ct+6) - \sin(lt+6)].
\end{aligned}\right\} \quad (18)$$

Ces formules s'accordent assez bien avec les précédentes, lorsque le temps t, que l'on suppose exprimer un nombre d'années tropiques, n'excède pas *cent*; elles donnent également, en effet, en les développant par rapport à t, et en négligeant les termes de l'ordre t^2, pour la variation de l'obliquité de l'écliptique,

$$\partial\theta' = t\Sigma.(l-c)\,\mathrm{B}\sin 6;$$

mais ces formules diffèrent beaucoup, lorsque le nombre t est de plusieurs mille, parce qu'il n'est plus permis alors de négliger les termes dépendants du carré du temps.

Si la Terre était sphérique, les actions des autres corps du système n'auraient aucune influence sur les mouvements de son axe de rotation, puisque leur résultante passerait exactement dans ce cas par son centre de gravité. Les trois moments d'inertie principaux du sphéroïde terrestre seraient alors égaux entre eux; on aurait par conséquent $l = 0$, ce qui donne $c = b$, et les valeurs de θ' et ψ' se réduiraient aux suivantes :

$$\theta' = h + \Sigma.\mathrm{B}[\cos(bt + 6) - \cos 6],$$

$$\psi' = -\Sigma.\mathrm{B}\cot h[\sin(bt + 6) - \sin 6].$$

Ces équations déterminent la variation de l'obliquité de l'écliptique et la précession des équinoxes qui auraient lieu par le seul effet du déplacement de l'orbe solaire, résultant de l'action mutuelle des différents corps du système. En les comparant aux formules (17), on voit que l'action du Soleil et de la Lune sur le sphéroïde terrestre, change considérablement les lois de ces deux phénomènes; mais cette différence ne devient sensible qu'après un grand nombre d'années. En effet, la valeur précédente de θ' donne pour la variation de l'obliquité de l'écliptique, en négligeant les quantités de l'ordre t^2,

$$\delta\theta = -t\Sigma.b\mathrm{B}\sin\mathcal{C}.$$

Cette valeur, en observant que l'on a $a - b = l - c$, coïncide avec celles qu'on obtient en développant la première des formules (17) et (18), et en négligeant les termes de l'ordre t^2. La variation séculaire de l'obliquité de l'écliptique est donc la même pour les temps voisins de l'époque, que la Terre soit supposée s'éloigner ou non de la figure sphérique; mais cette variation est fort différente dans les siècles suivants, parce qu'il n'est plus permis alors de négliger dans son expression les termes dépendants du carré du temps. Dans les suppositions les plus vraisemblables sur les masses des planètes, l'étendue entière de la variation de l'obliquité de l'écliptique est réduite, par l'action du Soleil et de la Lune sur le sphéroïde terrestre, à peu près au quart de la valeur qu'elle aurait sans cette action.

31. Les valeurs précédentes de θ, ψ, θ' et ψ' déterminent les *déplacements séculaires* de l'équateur terrestre, et fixent ce qu'on appelle sa *position moyenne;* considérons maintenant ses variations périodiques dont nous avons jusqu'ici fait abstraction Pour cela, il suffira de substituer dans les formules (6) à la place de $\frac{d\mathrm{F}}{d\psi}$ et de $\frac{d\mathrm{F}}{d\theta}$ leurs valeurs données n° **25**, en y conservant les termes que nous avions d'abord négligés et en omettant ceux dont nous avons déjà tenu compte. Si l'on désigne par Θ et Ψ les parties simplement périodiques des valeurs de θ et de ψ, et qu'on observe qu'en n'ayant égard qu'à la partie périodique des valeurs des deux quantités $\gamma' \sin(\alpha' + \psi)$ et $\gamma' \cos(\alpha' + \psi)$, on a, n° **26**,

$$\gamma' \sin(\alpha' + \psi) = \mathrm{B}' \sin(c't + \text{б}'),$$
$$\gamma' \cos(\alpha' + \psi) = \mathrm{B}' \cos(c't + \text{б}'),$$

d'où l'on conclut

$$\gamma'^2 \sin 2(\alpha' + \psi) = \mathrm{B}'^2 \sin 2(c't + \text{б}'),$$
$$\gamma'^2 \cos 2(\alpha' + \psi) = \mathrm{B}'^2 \cos 2(c't + \text{б}');$$

on trouvera

$$d\Theta = \frac{3m'^2 dt}{4n}\left(\frac{2\mathrm{C} - \mathrm{A} - \mathrm{B}}{\mathrm{C}}\right)\Big\{\cos\theta\lambda \mathrm{B}' \sin(c't + \text{б}')$$
$$- \sin\theta\left[\frac{1}{4}\lambda \mathrm{B}'^2 \sin 2(c't + \text{б}') + \sin 2(mt + \varepsilon + \psi)\right.$$
$$\left. + \lambda \sin 2(m't + \varepsilon' + \psi)\right]\Big\},$$

$$d\Psi = \frac{3m'^2 dt}{4n}\left(\frac{2\mathrm{C} - \mathrm{A} - \mathrm{B}}{\mathrm{C}}\right)\Big\{\frac{\cos 2\theta}{\sin\theta}\lambda \mathrm{B}' \cos(c't + \text{б}')$$
$$- \cos\theta\left[\frac{1}{4}\lambda \mathrm{B}'^2 \cos 2(c't + \text{б}') + \cos 2(mt + \varepsilon + \psi)\right.$$
$$\left. + \lambda \cos 2(m't + \varepsilon' + \psi)\right]\Big\}.$$

Il suffira, dans l'intégration de ces formules, d'y regarder θ comme constant et ψ comme égal à zéro; on pourra aussi, à cause de la petitesse des termes qui dépendent des longitudes moyennes $mt + \varepsilon$, et $m't + \varepsilon'$, remplacer ces angles par les longitudes vraies v et v' après l'intégration, en substituant l à la place de la quantité que cette lettre représente, on aura ainsi :

$$\left.\begin{aligned}
\Theta &= -\frac{\lambda B' l}{(1+\lambda)c'}\cos(c't+6') + \frac{\lambda B'^2 l \operatorname{tang} h}{4(1+\lambda)c'}\cos 2(c't+6') \\
&\quad + \frac{l \operatorname{tang} h}{2(1+\lambda)}\left(\frac{\cos 2v}{m} + \frac{\lambda \cos 2v'}{m'}\right), \\
\Psi &= \frac{\lambda B' l}{(1+\lambda)c'}\sin(c't+6') - \frac{\lambda B'^2 l}{4(1+\lambda)c'}\sin 2(c't+6') \\
&\quad - \frac{l}{2(1+\lambda)}\left(\frac{\sin 2v}{m} + \frac{\lambda \sin 2v'}{m'}\right).
\end{aligned}\right\} \quad (19)$$

Pour compléter ces valeurs, il faudrait leur ajouter deux constantes arbitraires qui les rendissent nulles en même temps que le temps t; mais on pourra s'en dispenser, pourvu qu'on détermine convenablement les angles θ et ψ à l'origine du mouvement.

Le premier terme de chacune des deux expressions précédentes en forme la partie la plus considérable, son argument dépend du mouvement des nœuds de l'orbe lunaire sur l'écliptique vraie, et sa période, égale à celle d'une révolution de ces nœuds, est d'environ *dix-huit* ans. C'est ce terme qui constitue spécialement le balancement particulier de l'axe terrestre, que Bradley a le premier découvert par l'observation, et qu'il a nommé sa *nutation*. Le coefficient de cette inégalité ne renferme que des quantités relatives aux circonstances du mouvement lunaire : ce phénomène dépend donc uniquement de l'action de la Lune sur le sphéroïde terrestre, et il est complétement indépendant de l'action du Soleil.

Le second terme des valeurs de Θ et de Ψ a un argument double de celui du premier terme, sa période est donc égale à celle d'une demi-révolution des nœuds de l'orbe lunaire ou de *neuf années* à peu près. On voit que le coefficient de cette inégalité, ainsi que celui de la précédente, augmente à mesure que le mouvement des nœuds se ralentit, en sorte que la valeur, par exemple, du coefficient de la *nutation* ne serait que moitié de sa valeur actuelle, si le mouvement des nœuds de l'orbe lunaire était deux fois plus rapide qu'il ne l'est aujourd'hui.

Enfin les deux derniers termes de ces mêmes expressions dépendent des mouvements du Soleil et de la Lune dans leurs orbites respectives, leurs périodes par conséquent sont beaucoup plus rapides que celles des deux termes précédents, l'une est de six mois, à peu près, pour le terme qui se rapporte au Soleil, l'autre d'un demi-mois lunaire environ pour celui qui est relatif à la Lune. Les coefficients de ces deux inégalités sont d'ailleurs très-peu considérables, et il a fallu toute la précision des observations modernes pour qu'il devînt nécessaire d'y avoir égard.

32. Les valeurs de Θ et de Ψ déterminent les inégalités périodiques qui affectent les mouvements de l'équateur terrestre, elles doivent être ajoutées respectivement aux valeurs de θ, θ', ψ et ψ', trouvées précédemment, pour former les valeurs complètes de ces quatre quantités. En réunissant ces différents termes, et en supposant, n° **27**,

$$l = \frac{3m^2(1+\lambda)}{4n}\left(\frac{2C-A-B}{C}\right)\cos h,$$

on aura ainsi, en vertu des actions combinées du Soleil et de la Lune :

$$\theta = h - \Sigma.\frac{Bl}{c}[\cos(ct+\beta) - \cos\beta] - \frac{B'l\lambda}{c'(1+\lambda)}\cos(c't+\beta')$$
$$+\frac{B'^2 l\lambda \tang h}{4(1+\lambda)c'}\cos 2(c't+\beta') + \frac{l \tang h}{2(1+\lambda)}\left(\frac{\cos 2v}{m} + \frac{\lambda \cos 2v'}{m'}\right),$$

$$\theta' = h - \Sigma.\frac{B(l-c)}{c}[\cos(ct+\beta) - \cos\beta] - \frac{B'l\lambda}{c'(1+\lambda)}\cos(c't+\beta')$$
$$+\frac{B'^2 l\lambda \tang h}{4(1+\lambda)c'}\cos 2(c't+\beta') + \frac{l \tang h}{2(1+\lambda)}\left(\frac{\cos 2v}{m} + \frac{\lambda \cos 2v'}{m'}\right),$$

$$\psi = lt + \Sigma.\frac{Bl}{c}\cot h\left(1 + \frac{l-c}{c}\tang^2 h\right)[\sin(ct+\beta) - \sin\beta]$$
$$+\frac{2B'l\lambda}{c'(1+\lambda)}\cot 2h \sin(c't+\beta') - \frac{B'^2 l\lambda}{4(1+\lambda)c'}\sin 2(c't+\beta')$$
$$-\frac{l}{2(1+\lambda)}\left(\frac{\sin 2v}{m} + \frac{\lambda \sin 2v'}{m'}\right),$$

$$\psi' = lt + \Sigma.\frac{B(l-c)}{c}\cot h\left(1 + \frac{l}{c}\tang^2 h\right)[\sin(ct+\beta) - \sin\beta]$$
$$+\frac{2B'l\lambda}{c'(1+\lambda)}\cot 2h \sin(c't+\beta') - \frac{B'^2 l\lambda}{4(1+\lambda)c'}\sin 2(c't+\beta')$$
$$-\frac{l}{2(1+\lambda)}\left(\frac{\sin 2v}{m} + \frac{\lambda \sin 2v'}{m'}\right).$$

Dans ces formules, h représente l'inclinaison moyenne de l'équateur à l'écliptique, ou l'obliquité apparente de l'écliptique à l'époque où l'on fait commencer le temps t, et l le moyen mouvement des équinoxes à la même époque.

La seconde de ces formules détermine l'inclinaison θ' de l'équateur sur l'écliptique vraie; la quatrième, la distance de l'équinoxe mobile à une origine fixe comptée sur le plan de l'écliptique vraie ou ce que les astronomes appellent la précession totale. On voit, en effet, d'après la signification que nous avons donnée à la quantité ψ', n° **28**, que ces deux angles ne différent entre eux que de termes de l'ordre du produit de γ^2 par des quantités de l'ordre des forces perturbatrices, produits très-petits que nous avons négligés.

L'angle ψ devant toujours être compté en sens opposé à l'angle φ, n° **1**, on voit que le mouvement des équinoxes sera rétrograde si cet angle croît avec le temps t, puisqu'en effet ses variations seront dans ce cas dirigées en sens inverse du mouvement diurne, ou de l'ordre des signes. Or le premier terme de la valeur de ψ, n° **27**, surpasse tous les autres, et C étant le plus grand des trois moments d'inertie du sphéroïde terrestre, l est nécessairement une quantité positive : le mouvement des équinoxes est donc rétrograde à la fois sur l'écliptique fixe et sur l'écliptique mobile.

Telles sont donc les valeurs de θ, ψ, θ' et ψ' qui résultent de l'action du Soleil et de la Lune sur le sphéroïde terrestre, et les formules précédentes sont celles qu'il faudra employer pour déterminer les déplacements de son équateur. La première partie de ces formules donne la variation séculaire des angles θ, ψ, θ' et ψ', et détermine par conséquent les altérations progressives que la position de ce plan subira dans la suite des siècles ; la seconde partie est périodique, et constitue un simple balancement de l'axe terrestre et une espèce d'oscillation de la ligne des équinoxes autour d'une position moyenne ; le terme dont la période est celle d'une révolution des nœuds de la Lune, qui est le plus considérable de tous les termes périodiques, constitue spécialement le phénomène de la *nutation*.

33. Examinons l'influence du mouvement des équinoxes et des déplacements de l'équateur terrestre sur la longueur de l'année tropique et sur la durée du jour moyen solaire. L'espace de temps qui s'écoule entre les retours du Soleil au même équinoxe ou au même solstice, forme l'année tropique; l'intervalle compris entre deux de ces retours aux mêmes étoiles forme l'année sidérale. Si les équinoxes étaient fixes, l'année tropique serait égale à l'année sidérale; mais comme ils ont sur l'écliptique un mouvement rétrograde ou contraire au mouvement propre du Soleil, ils s'avancent au-devant de cet astre, et resserrent l'espace qu'il avait à parcourir pour accomplir sa révolution. On aura la durée de l'année tropique en retranchant de l'année sidérale l'arc parcouru pendant ce temps par l'équinoxe sur l'écliptique vraie réduit en temps, à raison de la circonférence entière pour une année. Soit donc T l'année sidérale, la longueur de l'année tropique sera

$$T\left(1 - \frac{d\psi'}{dt.360^\circ}\right).$$

L'année sidérale est de $365^j,256384$; le moyen mouvement des équinoxes dans ce siècle est de $50'',2230$; l'année sidérale surpasse donc l'année tropique de $0^j,014155$. Mais comme le mouvement des équinoxes est variable, la longueur de l'année tropique change dans les différents siècles; elle est maintenant d'environ $9''$ plus courte qu'au temps d'Hipparque.

On distingue en Astronomie trois espèces de jours: le jour sidéral, le jour solaire et le jour moyen. Le jour sidéral est l'intervalle de temps qui s'écoule entre les retours d'une même étoile à un méridien donné. Le jour solaire se mesure par les passages successifs du Soleil par le même plan. Si l'on imagine dans le plan de l'écliptique vraie un Soleil fictif, qui se meuve d'un mouvement uniforme et passe au périgée et à l'apogée en même temps que le Soleil véritable, que l'on imagine ensuite dans le plan de l'équateur un troisième Soleil, qui passe par l'équinoxe du printemps en même temps que le second, et qui se meuve uniformément, de manière que les distances angulaires de ces deux astres fictifs au même équinoxe soient constamment égales entre elles, l'intervalle de deux retours consécutifs de ce troisième Soleil au méridien sera ce qu'on appelle le *jour moyen*. Le mouvement de rotation de la Terre autour de son axe étant uniforme, n° **20**, et le moyen mouvement du Soleil dans son orbite étant invariable, n° **61**, livre II, la durée du jour moyen serait constante, si l'obliquité de l'écliptique était toujours la même et si le mouvement des équinoxes était uniforme; les variations auxquelles elle peut être assujettie, ne dépendront donc que des variations séculaires de l'obliquité de l'écliptique et de la précession des équinoxes.

Pour les déterminer, considérons la marche du Soleil fictif que nous avons supposé en mouvement sur le plan de l'équateur. Soient v la vitesse dont cet astre est animé, s sa longitude comptée de l'intersection de l'équateur avec l'écliptique fixe. La position de cette ligne varie, et son mouvement rétrograde, projeté sur le plan de l'équateur, sera $d\psi \cos\theta$ pendant l'instant

dt, on aura donc, à la fin de cet instant,

$$ds = v\,dt + d\psi \cos\theta.$$

Nommons s' la distance du même Soleil à l'équinoxe réel, c'est-à-dire à l'intersection de l'équateur avec l'écliptique vraie; $s - s'$ sera l'arc compris sur l'équateur entre l'équinoxe réel et l'équinoxe relatif à l'écliptique fixe. Nous avons désigné par δ ce même arc, nº **28**, on aura donc à très-peu près

$$s - s' = \frac{\gamma \sin(\alpha + \psi)}{\sin\theta} - \frac{1}{2}\,\frac{\cot\theta\,\gamma^2 \sin 2(\alpha + \psi)}{\sin\theta},$$

d'où, en différentiant et mettant pour ds sa valeur, on tire

$$\frac{ds'}{dt} = v + \frac{d\psi}{dt}\cos\theta - d.\left[\frac{\gamma\sin(\alpha+\psi)}{\sin\theta'\,dt}\right] - \frac{1}{2}\,d.\left[\frac{\cot\theta\,\gamma^2\sin 2(\alpha+\psi)}{\sin\theta\,dt}\right].$$

Soit mt le mouvement angulaire du second Soleil, ou de l'astre fictif qui se meut uniformément sur le plan de l'écliptique vraie, la vitesse de ce Soleil par rapport à une ligne fixe sera m. L'équinoxe réel a, relativement à la même ligne, une vitesse rétrograde égale, aux quantités près que nous négligeons, à $\frac{d\psi'}{dt}$; la vitesse du second Soleil par rapport à cet équinoxe sera donc $m + \frac{d\psi'}{dt}$. Or, d'après la définition du temps moyen, il est clair que cette vitesse doit être égale à $\frac{ds'}{dt}$; on aura donc pour déterminer v, l'équation

$$v = m + \frac{d\psi'}{dt} - \frac{d\psi}{dt}\cos\theta + d.\frac{\gamma\sin(\alpha+\psi)}{\sin\theta'\,dt} + \frac{1}{2}\,d.\frac{\cot\theta\,\gamma^2\sin 2(\alpha+\psi)}{\sin\theta\,dt}.$$

Nous avons, par le nº **28**,

$$\frac{d\psi'}{dt} = \frac{d\psi}{dt} - \frac{d.\cot\theta\,\gamma\sin(\alpha+\psi)}{dt} + \frac{1}{2}\,\frac{d.\cot^2\theta\,\gamma^2\sin 2(\alpha+\psi)}{dt}.$$

Si l'on substitue cette valeur dans l'expression de v, et qu'après l'avoir multipliée par dt, on intègre l'expression résultante, on trouvera

$$\int v\,dt = mt + \int (1-\cos\theta)\frac{d\psi}{dt} + \gamma \sin(\alpha+\psi)\tang\frac{1}{2}\theta' + \frac{1}{2}\gamma^2 \sin 2(\alpha+\psi).$$

Nous avons désigné par n la vitesse de rotation de la Terre, et nous avons vu que cette vitesse était invariable ; il s'ensuit que $n-v$ est la vitesse relative dont un méridien quelconque de la Terre est animé par rapport au Soleil moyen qui se meut sur l'équateur ; si l'on nomme donc ζ la longitude de ce méridien, comptée de ce point, on aura

$$\zeta = \int (n-v)\,dt,$$

ou bien, en substituant pour $\int v\,dt$ sa valeur,

$$\zeta = (n-m)t - \int (1-\cos\theta)\frac{d\psi}{dt} - \gamma\sin(\alpha+\psi)\tang\frac{1}{2}\theta' + \frac{1}{2}\gamma^2\sin 2(\alpha+\psi).$$

Si dans cette expression on substitue pour $\frac{d\psi}{dt}$ sa valeur trouvée précédemment,

$-2\cot 2h\,\Sigma\,B\,l\cos(ct+6)$

$$\frac{d\psi}{dt} = l - 2(\cot 2h\,\Sigma.\mathrm{B}\,lb\sin 6)\,t,$$

qu'on observe ensuite qu'en vertu des valeurs de $\gamma\sin(\alpha+\psi)$ et $\gamma\cos(\alpha+\psi)$, n° **26**, on a

$$\frac{1}{2}\gamma^2\sin 2(\alpha+\psi) = [\Sigma.\mathrm{B}\sin(ct+6)][\Sigma.\mathrm{B}\cos(ct+6)],$$

$$\tang\frac{1}{2}\theta' = \tang\frac{1}{2}h - \frac{1}{2\cos^2\frac{1}{2}h}\,\Sigma.\frac{\mathrm{B}(l-c)}{c}\cos(ct+6),$$

en négligeant, pour plus de simplicité, les termes de l'ordre l^2 et lB^2 qui seraient insensibles, on trouvera

$$\zeta = [n - m - (1 - \cos h)\, l]\, t - \frac{2(1 - \cos h)}{\tang 2h}\, \Sigma.\frac{Bl}{c}\sin(ct + 6)$$
$$- \tang \tfrac{1}{2}h\, \Sigma.B\sin(ct+6) - \frac{1}{2\cos^2 \frac{1}{2}h}[\Sigma.B\sin(ct+6)][\Sigma.B\cos(ct+6)]$$
$$+ [\Sigma.B\sin(ct + 6)][\Sigma.B\cos(ct + 6)].$$

L'intervalle de temps pendant lequel cet angle croît de 360°, forme le jour moyen solaire; on aura donc sa variation séculaire, en retranchant la valeur de ζ, déterminée pour une époque donnée, de sa valeur à une autre époque. On verra que cette variation ne s'élèverait pas à *une seconde* dans une période de plusieurs millions d'années, et que par conséquent on peut se dispenser d'y avoir égard.

34. Réduisons en nombres les précédentes formules pour les comparer aux observations. Pour cela, considérons d'abord les quantités $\Sigma.B\sin(bt + 6)$ et $\Sigma.B\cos(bt + 6)$ qu'elles renferment et qui représentent l'inclinaison de l'écliptique vraie sur l'écliptique fixe, multipliée respectivement par le *sinus* et le *cosinus* de la longitude de son nœud. Ces quantités correspondent à celles que nous avons désignées par p et q dans le n° **69** du livre II; on aura donc

$$p = \Sigma.B\sin(bt + 6), \quad q = \Sigma.B\cos(bt + 6).$$

La détermination exacte des valeurs de p et q dépend d'un calcul très-compliqué et suppose une connaissance parfaite des masses planétaires. Il reste encore trop d'incertitudes à cet égard pour qu'on puisse employer la méthode que nous avons exposée n° 69, livre II, dans la recherche qui nous occupe. Mais comme les inégalités séculaires de ces quantités croissent avec une extrême lenteur, on peut les supposer développées suivant les puissances du temps, conformément à ce que nous avons dit dans le numéro cité, et les résultats que l'on obtiendra ainsi pourront s'étendre à mille ou douze cents ans avant ou après l'époque que l'on aura choisie, ce qui suffit aux besoins de l'Astronomie. En prenant pour plan fixe celui de l'écliptique au commencement de 1750 et fixant à cette époque l'origine du temps t, Bouvard a trouvé, d'après les données les plus exactes que nous ayons sur les masses des planètes,

$$p = \quad t.0'',066314 + t^2.0'',000018658,$$
$$q = -t.0'',456917 + t^2.0'',000005741,$$

t exprimant un nombre quelconque d'années juliennes.

Si l'on développe les valeurs que p et q représentent par rapport au temps, on aura

$$p = \Sigma.\mathrm{B}\sin 6 + t\Sigma.\mathrm{B}b\cos 6 - \frac{t^2}{2}\Sigma.\mathrm{B}b^2\sin 6,$$

$$q = \Sigma.\mathrm{B}\cos 6 - t\Sigma.\mathrm{B}b\sin 6 - \frac{t^2}{2}\Sigma.\mathrm{B}b^2\cos 6.$$

En comparant ces valeurs aux précédentes, on trouvera

$$\Sigma.\mathrm{B}\sin 6 = 0,\quad \Sigma.\mathrm{B}b\sin 6 = 0'',456917,\quad \Sigma.\mathrm{B}b^2\sin 6 = -0'',000037316,$$
$$\Sigma.\mathrm{B}\cos 6 = 0,\quad \Sigma.\mathrm{B}b\cos 6 = 0'',066314,\quad \Sigma.\mathrm{B}b^2\cos 6 = -0'',000011482.$$

Cela posé, développons les valeurs de θ, ψ, θ' et ψ' en ayant égard aux termes dépendants du carré du temps t, ce qui exige que l'on conserve, comme nous l'avons fait dans ces deux dernières expressions, les termes dépendants du carré de l'inclinaison γ. Prenons pour plan fixe celui de l'écliptique en 1750, l'origine du temps étant fixée au 1er janvier de la même année, ce qui donne $\Sigma.\mathrm{B}\sin\beta = 0$ et $\Sigma.\mathrm{B}\cos\beta = 0$; observons que d'après les suppositions précédentes on a $c = l + b$, et qu'on peut négliger les termes multipliés par l^2 qui seraient de l'ordre du carré des forces perturbatrices; on aura

$$\theta = h + \frac{t^2}{2}\Sigma.\mathrm{B}lb\cos\beta,$$

$$\theta' = h - t\Sigma.\mathrm{B}b\sin\beta - \frac{t^2}{2}[\Sigma.\mathrm{B}(l+b)b\cos\beta - \cot h(\Sigma.\mathrm{B}b\cos\beta)^2],$$

$$\psi = lt - t^2\cot 2h\,\Sigma.\mathrm{B}lb\sin\beta,$$

$$\psi' = t(l - \cot h\,\Sigma.\mathrm{B}b\cos\beta)$$

$$+ t^2\left\{\begin{matrix} \frac{1}{2}\cot h\,\Sigma.\mathrm{B}b^2\sin\beta + \frac{1}{\sin 2h}\Sigma.\mathrm{B}lb\sin\beta \\ - \cos^2 h\,[\Sigma.\mathrm{B}b\sin\beta][\Sigma.\mathrm{B}b\cos\beta] \end{matrix}\right\}.$$

Il ne reste plus qu'à substituer dans ces formules, à la place des constantes qu'elles renferment, leurs valeurs résultantes des observations; h désigne, comme nous l'avons vu, l'obliquité de l'écliptique à l'équateur au commencement de 1750, corrigée de la valeur de Θ dans laquelle on suppose $t = 0$; la constante l dépend des trois moments d'inertie du sphéroïde terrestre. La figure et la constitution du globe sont loin d'être assez bien connues pour qu'on puisse déterminer directement cette constante, mais on peut aisément la déduire de l'observation. En effet, en différentiant la valeur de ψ et supposant $t=0$ dans la différentielle, on a $\frac{d\psi}{dt}=l$: c'est l'expression de la précession moyenne des équinoxes, pendant l'unité de temps, rapportée à l'écliptique fixe à l'époque où commence le temps t. Bessel a trouvé la précession annuelle pour 1750, rapportée à l'écliptique fixe de la même époque, égale à 50",37572, et l'obliquité de l'écliptique correspondante égale à 23°28′18″ (*); en prenant donc pour unité de temps l'année julienne de 365j,25, et fixant l'origine du temps au 1er janvier 1750, on aura

$$h = 23^\circ 28' 18'', \quad l = 50'',37572.$$

Avec ces données, on trouve pour déterminer les valeurs de θ, θ', ψ et ψ', après un nombre t d'années juliennes, comptées de 1750,

$$\left.\begin{aligned}
\theta &= 23^\circ 28' 18'' + t^2.0'',0000080978,\\
\theta' &= 23^\circ 28' 18'' - t.0'',456917 - t^2.0'',0000023323,\\
\psi &= t.50'',37572 - t^2.0'',0001042679,\\
\psi' &= t.50'',22300 + t^2.0'',000108976.
\end{aligned}\right\} \quad (20)$$

Le rapport $\frac{\frac{L'}{r'^3}}{\frac{L}{r^3}}$ de l'action de la Lune à celle du Soleil, d'après les observations les plus exactes des marées, est 2,35333, on a par conséquent

$$\lambda = 2,35333.$$

(*) *Connaissance des Temps*, 1829, page 315.

Nous avons désigné par B′, n° **30**, la tangente de l'inclinaison moyenne de l'orbe lunaire sur l'écliptique vraie; cette inclinaison est de $5^\circ 8' 49''$, on a donc

$$\log B' = 8{,}9545973 :$$

c'est le moyen mouvement des nœuds de la Lune pendant l'unité de temps, c'est-à-dire pendant une année julienne; ce mouvement est rétrograde et de $19^\circ 21' 21''$ d'après les observations. En réduisant cet arc en parties du rayon, on aura

$$c' = -0{,}33782.$$

Enfin m étant le moyen mouvement du Soleil pendant l'année sidérale de $365^{j},25638$, pour le rapporter à la même unité de temps que les valeurs précédentes, on fera la proportion

$$365^{j},25638 : 360^\circ :: 365^{j},25 : m,$$

d'où l'on tire

$$m = 359^\circ 59' 37''.$$

On a encore par les observations $\frac{m}{m'} = 0{,}0748$.

En réduisant en nombres, d'après ces données, les expressions de Θ et de Ψ, n° **31**, en faisant, pour abréger, $c't + 6' = \Lambda$, on trouve

$$\left.\begin{aligned}
\Theta = {} & 9'',42627 \cos\Lambda - 0'',09217 \cos 2\Lambda \\
& + 0'',51909 \cos 2\nu + 0'',09138 \cos 2\nu', \\
\Psi = {} & - 17'',61516 \sin\Lambda + 0'',21226 \sin 2\Lambda \\
& - 1'',19560 \sin 2\nu - 0'',21046 \sin 2\nu'.
\end{aligned}\right\} \quad (21)$$

Les deux derniers termes de Θ et de Ψ dépendent du mouvement du Soleil et de la Lune dans leurs orbites. Les astronomes ne les avaient pas considérés jusqu'ici, mais la précision des observations modernes exige qu'on en tienne compte. Ils avaient pareillement négligé les inégalités de la précession et de la nutation qui dépendent du double de la longitude du nœud de la Lune; on voit qu'elles sont, en effet, très-petites par rapport aux inégalités qui dépendent de la longitude du même nœud. Bessel a le premier considéré dans la valeur de Θ l'inégalité dépendante de l'angle 2Λ; il n'y a aucun motif pour négliger l'inégalité correspondante de la précession qui a, comme on voit, un coefficient plus de deux fois plus considérable.

35. Les valeurs précédentes de Θ et de Ψ doivent être ajoutées à celles de θ, ψ, θ' et ψ' données par les formules (20) pour former les valeurs complètes de ces quatre quantités, n° **31**. On aura ainsi :

$$\begin{aligned}
\theta &= 23^\circ\,28'\,18'' + t^2.0'',0000080978 \\
&\quad + 9'',42627 \cos\Lambda - 0'',0921704 \cos 2\Lambda \\
&\quad + 0'',51909 \cos 2\nu + 0'',09138 \cos 2\nu', \\
\psi &= t.50'',37572 - t^2.0'',0001042679 \\
&\quad - 17'',615164 \sin\Lambda + 0'',212264 \sin 2\Lambda \\
&\quad - 1'',19560 \sin 2\nu - 0'',21046 \sin 2\nu', \\
\theta' &= 23^\circ\,28'\,18'' - t.0'',456917 - t^2.0'',0000023323 \\
&\quad + 9'',42627 \cos\Lambda - 0'',0921704 \cos 2\Lambda \\
&\quad + 0'',51909 \cos 2\nu + 0'',09138 \cos 2\nu', \\
\psi' &= t.50'',22300 + t^2.0'',000108976 \\
&\quad - 17'',615164 \sin\Lambda + 0'',212264 \sin 2\Lambda \\
&\quad - 1'',19560 \sin 2\nu - 0'',21046 \sin 2\nu'.
\end{aligned}$$

Ces formules serviront à déterminer l'obliquité de l'écliptique et la précession des équinoxes dans l'intervalle de mille ou douze cents ans à partir de l'époque de 1750, en ayant soin de faire t négatif pour les temps antérieurs à cette époque.

L'une des observations les plus anciennes qui nous soient parvenues, est l'observation chinoise citée dans la quatrième édition de l'*Exposition du système du Monde* et qui se rapporte à l'an 1100 avant l'ère chrétienne. Selon cette observation, l'obliquité de l'écliptique était alors de $23^{\circ}54'2''$. C'est la valeur de θ' abstraction faite de la partie périodique. Pour remonter à cette époque, il faut faire $t = -2850$ dans les formules précédentes, on trouve ainsi

$$\theta' = 23^{\circ}49'41''.$$

La différence entre la théorie et l'observation est donc de $4'19''$; elle semble indiquer dans l'obliquité de l'écliptique une diminution plus rapide que nous ne la supposons. Au reste, cette différence paraîtra bien petite, si l'on considère l'incertitude de l'époque précise de cette ancienne observation et l'inexactitude des observations du gnomon qui lui ont servi de base.

36. On peut, par les variations observées dans l'ascension droite et la déclinaison des étoiles, déterminer directement les valeurs des coefficients des différents termes des deux quantités Θ et de Ψ, n° **34**. C'est ainsi que Bradley a trouvé le coefficient de $\cos \Lambda$ ou de la nutation. Ce coefficient, selon cet astronome, serait de $8'',997$; Maskelyne, en discutant de nouveau les observations qui avaient servi à l'établir, l'a trouvé de 9″,449; suivant M. Lindeneau, il serait réduit à 8″,977 : c'est cette valeur évidemment trop faible qu'avait adoptée Bessel ; enfin, d'après des recherches plus récentes et faites avec le plus grand soin par le Dr Brinkley et M. Robinson, le même coefficient serait de 9″,25 suivant le premier de ces observateurs, et de 9″,234 suivant le second. Ces derniers nombres se rapprochent beaucoup du coefficient de la théorie. La différence est dans les limites des erreurs des observations. Il suffirait, pour la faire disparaître tout à fait, de diminuer un peu la valeur de λ, que nous avons supposée égale à 2,35333. Laplace, d'après les observations des marées, avait d'abord supposé cette valeur égale à 3; il a été obligé ensuite de la diminuer beaucoup, ce qui la rend plus concordante avec celle qui résulte de plusieurs autres phénomènes : mais elle est peut-être encore un peu trop forte.

Au reste, on peut déduire cette quantité que nous avons regardée comme une des données du problème, de la comparaison de l'expression analytique du coefficient de la *nutation* à sa valeur donnée par l'observation. En effet, si l'on nomme N le coefficient de la *nutation* en latitude, on aura, d'après la première des formules (19),

$$N = -\frac{B' l \lambda}{(1+\lambda) c'}.$$

Dans cette formule, la nutation N et la précession moyenne l peuvent être supposées données par l'observation, les quantités B', c' résultent de la théorie de la Lune; on peut donc en conclure la valeur du coefficient λ, et comme on connaît à très-peu près le rapport des distances moyennes du Soleil et de la Lune à la Terre, qui est inverse de celui de leurs parallaxes, on en déduit par un calcul très-simple la masse de la Lune ou plutôt le rapport de cette masse à celle de la Terre.

La valeur de λ que nous avons adoptée, d'après Laplace, donne ce rapport égal à $\frac{1}{75}$; en admettant pour le coefficient de la nutation le résultat des observations de M. Lindeneau, on trouve que ce même rapport se réduirait à $\frac{1}{87}$, valeur qui paraît beaucoup trop faible pour pouvoir être admise; enfin les valeurs du coefficient de la nutation en latitude déterminées par le D[r] Brinkley et M. Robinson s'accordent à donner une masse de la Lune égale à $\frac{1}{78}$ à très-peu près de celle du sphéroïde terrestre, résultat qui paraît se rapprocher beaucoup de la valeur de la masse de la Lune déduite d'autres phénomènes du système du monde (*).

37. Il est facile de déterminer, d'après les résultats précédents, les dimensions de la petite ellipse que Bradley avait imaginée pour représenter les inégalités du mouvement de l'axe terrestre. En effet, on peut regarder la précession ψ des équinoxes sur l'écliptique fixe, comme produite par le mouvement rétrograde

---

(*) *Voir* les Notes du livre VII, tome IV, page 651.

du pôle de l'équateur sur un cercle parallèle à cette écliptique. Ce mouvement est égal à $\psi \sin h$ ou à $lt \sin h + \frac{B' l \lambda}{c' (1 + \lambda)} \frac{\cos 2h}{\cos h} \sin \Lambda$, en ne considérant que la principale inégalité périodique de ψ. L'inégalité $\frac{B' l \lambda}{c' (1 + \lambda)} \cos \Lambda$ de la valeur de θ, indique d'ailleurs dans l'axe terrestre un mouvement qui se fait dans le plan du cercle de latitude qui passe par cet axe. Ce double mouvement peut être représenté de la manière suivante : « *On suppose le pôle de la Terre mû sur la circonférence d'une petite ellipse dont le centre, qu'on peut considérer comme le lieu moyen du pôle, est situé sur le cercle mené parallèlement à l'écliptique fixe, et décrit chaque année uniformément un arc de* 50″,37572 *sur sa circonférence.* » Le plan de cette ellipse est tangent à la sphère céleste, et son grand axe, toujours compris dans le plan d'un cercle de latitude, sous-tend un arc de 18″,852. Le petit axe est au grand axe comme le *cosinus* du double de l'obliquité de l'écliptique est au *cosinus* de cette obliquité, c'est-à-dire comme $\cos 2h$ est à $\cos h$; cet axe sous-tend un arc de 14″,032. Pour déterminer la position du pôle sur la circonférence elliptique, on imagine, dans le plan de l'ellipse, un cercle décrit du même centre avec son grand axe pour diamètre. On conçoit ensuite qu'un rayon de ce cercle le parcourt d'un mouvement uniforme et rétrograde pendant une période des nœuds de la Lune, de manière qu'il coïncide avec la moitié du grand axe la plus voisine de l'écliptique toutes les fois que le nœud moyen ascendant de l'orbe lunaire coïncide avec l'équinoxe du printemps. Enfin, de l'extrémité de ce rayon on abaisse une perpendiculaire sur le grand axe de l'ellipse, et le point où cette perpendiculaire rencontre la circonférence, est le vrai lieu du pôle terrestre.

38. Déterminons maintenant les variations de l'année tropique, du jour moyen et du temps exprimé en jours moyens solaires.

La valeur de ψ', n° **34**, donne, en la différentiant,

$$\frac{d\psi'}{dt} = 50'',22300 + t.0'',000217952.$$

Cet arc réduit en temps, à raison de la circonférence entière, pour une année sidérale de $365^j,2563748$, donne

$$\frac{d\psi'}{dt} = 0^j,014155 + i.0^j,0000061426,$$

i désignant un nombre quelconque de siècles dont l'origine est en 1750. La longueur de l'année tropique sera donc

$$365^j,24222 - i.0^j,0000061426.$$

Il s'ensuit que cette longueur diminue d'une demi-seconde à peu près par siècle, tandis que l'année sidérale, au contraire, est invariable, n° **62**, livre II. Si l'on fait $i = -18,78$, on aura la longueur de l'année tropique qui avait lieu au temps d'Hipparque, ou cent vingt-huit ans avant l'ère chrétienne; on trouve ainsi que cette année est aujourd'hui d'environ $9''$ plus courte qu'elle ne l'était à cette époque.

Si l'on développe la valeur de ζ du n° **32**, qu'on néglige les termes de l'ordre l^2 et qu'on arrête l'approximation au carré du temps, on trouvera

$$\zeta = \left[n - m - (1 - \cos h)\left(l + \frac{\Sigma.\mathrm{B}b\cos 6}{\sin h}\right)\right]t + \mathrm{H}t^2,$$

en faisant, pour abréger,

$$\mathrm{H} = \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2}\Sigma.\mathrm{B}b^2 \sin 6 + \Sigma.\mathrm{B}lb \sin 6\left(1 + \frac{\cos 2h}{2\cos h}\right) \\ -[\Sigma.\mathrm{B}b \sin 6][\Sigma.\mathrm{B}b \cos 6]\cot h \end{array}\right\}\tang \tfrac{1}{2}h.$$

Le jour moyen est l'intervalle de temps qui répond à une augmentation de 360° de l'angle ζ; en appelant donc u sa longueur, on aura

$$360^\circ = \left[n - m - (1 - \cos h)\left(l + \frac{\Sigma.\mathrm{B}b \sin 6}{\sin h}\right)\right]u + 2\mathrm{H}tu. \quad (22)$$

Si l'on prend pour unité de temps le jour moyen à l'époque où commence le temps t, en faisant dans l'équation précédente $u = 1$, $t = 0$, on aura, pour cet instant,

$$360^\circ = n - m - (1 - \cos h)\left(l + \frac{\Sigma.\mathrm{B}b \sin 6}{\sin h}\right).$$

Pour rapporter à la nouvelle unité de temps le dernier terme de cette équation, il faut y substituer pour l et $\Sigma.\mathrm{B}b \sin 6$ leurs valeurs précédentes, après les avoir divisées par 365,25, parce que ces valeurs sont relatives à une année julienne; ce terme devient alors inutile à considérer. La valeur de m donnée par l'observation, et rapportée à la même unité, est

$$m = 0^\circ{,}98561.$$

On aura donc

$$n = 360°,9856\,1,$$

et la longueur du jour sidéral, exprimé en jours moyens, était par conséquent $0^j,997262$ à l'époque de 1750.

Si après avoir divisé les valeurs de $\Sigma.\mathrm{B}b^2 \sin \mathcal{C}$, de $\Sigma.\mathrm{B}lb \sin \mathcal{C}$ et de $(\Sigma.\mathrm{B}b \sin \mathcal{C})(\Sigma.\mathrm{B}b \cos \mathcal{C})$, n° **33**, par le carré de 365,25, pour les rapporter à la nouvelle unité de temps, on les substitue dans l'expression de H, on trouvera

$$\mathrm{H} = \frac{0'',0000278669}{(365,25)^2}.$$

L'équation (22) donne

$$u = 1 - \frac{2\,\mathrm{H}t}{360°}.$$

Soit donc i un nombre quelconque de siècles écoulés depuis 1750, on aura pour la grandeur du jour moyen à cette époque, en faisant $t = i.36525$ dans la formule précédente,

$$u = 1 - \frac{i.0,1177398}{(100000)^2},$$

d'où l'on voit que la diminution séculaire du jour moyen sera tout à fait insensible, puisqu'elle ne s'élèverait pas à quelques *dixièmes* de secondes dans une période de plusieurs millions d'années, on pourra, par conséquent, se dispenser d'en tenir compte.

Si l'on fait $\zeta = \tau\, 360°$, la variable τ sera la mesure du temps en jours moyens solaires, et d'après les valeurs de ζ et de H on aura

$$t = \tau - \frac{\tau^2\, 0,00000025022}{(36525)^2}.$$

Le temps t n'est donc pas rigoureusement proportionnel à τ; mais comme le second terme de l'expression précédente est insensible, sa considération est inutile aux astronomes, et l'on peut continuer sans inconvénient à prendre le jour moyen solaire pour servir de mesure au temps.

En effet, c'est dans la théorie de la Lune que la différence qui résulterait de la variation du temps compté en jours moyens solaires, devrait être le plus sensible, tant à cause de la rapidité du mouvement de la Lune, que par le long intervalle que comprennent les observations qui s'y rapportent. La longitude moyenne de la Lune étant représentée par $m't + \varepsilon'$, si pour t on substitue sa valeur précédente, qu'on fasse $\tau = i(36525)$, i représentant un nombre de siècles écoulés depuis 1750, on aura

$$m'\tau + \varepsilon' - i^2 m'(0{,}000000215022).$$

Le dernier terme s'ajoutera à l'équation séculaire qu'on peut supposer comprise dans ε', et le moyen mouvement de la Lune étant à l'époque actuelle,

$$m' = 13^\circ{,}176396,$$

ce dernier terme deviendra

$$-\, i^2 . 0''{,}0101996\,;$$

et comme l'équation séculaire était de $i^2 . 10''{,}7232$ à la même époque, ce terme aurait pour effet de la diminuer de sa millième partie à peu près. Ainsi, il en résulterait par exemple une augmentation de $6''$ environ sur la longitude de la Lune en l'an 720 avant l'ère chrétienne, époque à laquelle se rapportent les observations des plus anciennes éclipses, faites par les Chaldéens, qui nous aient été transmises. L'incertitude de ces observations rend cette correction tout à fait insignifiante. La même cause produirait dans l'expression de la longitude moyenne un terme proportionnel au carré du nombre de siècles écoulés, mais comme son coefficient serait au coefficient de l'inégalité séculaire correspondante de la longitude moyenne de la Lune, dans le rapport des moyens mouvements du Soleil et de la Lune, c'est-à-dire dans le rapport de 1 à 13 à peu près, on voit que ce coefficient ne s'élèverait pas à un *millième* de secondes, et que par conséquent l'inégalité dont il s'agit demeurera toujours insensible.

Enfin, il faut encore observer que ces variations séculaires du *jour moyen*, et du temps compté en jours moyens sont, d'après l'analyse du nº **32**, des inégalités *périodiques* comme celles de la précession des équinoxes et de l'obliquité de l'écliptique; mais leur calcul dépend de données sur lesquelles les observations laissent encore beaucoup d'incertitude, et les premiers termes de leur développement suivant les puissances du temps suffiront longtemps encore, sans doute, aux besoins de l'astronomie.

39. La théorie donne (nº **36**) le moyen de déterminer les rapports qui existent entre la précession et la nutation, elle fournit aussi des données précieuses sur les lois de la densité et de l'ellipticité des couches terrestres de la surface au centre du globe. En effet, l désignant toujours la précession moyenne, pendant l'unité de temps, rapportée à l'écliptique fixe, on aura pour sa valeur complète, n° **25**,

$$l = \frac{3m^2(1+\lambda)}{4n}\left(\frac{2C-A-B}{C}\right)\cos h\left(1+\frac{3}{2}e^2+\frac{3}{2}\lambda e'^2-\frac{3}{2}\gamma^2-\frac{3}{2}\lambda\gamma'^2\right).$$

Si dans cette équation on substitue pour λ, l, h leurs valeurs, n° **34**, en observant que la valeur de m rapportée à la même unité de temps que l, donne

$$m = 359°,99371,$$

que l'on a en outre

$$\frac{m}{n} = 0,0027303,$$

et pour l'époque de 1750, origine du temps t,

$$e = 0,016814, \quad e' = 0,054865, \quad \gamma = 0,08983;$$

on trouvera

$$\frac{2C-A-B}{C} = 0,0062810,$$

et comme on a, à très-peu près, $A = B$, il en résultera

$$\frac{C-A}{C} = 0,0031405.$$

Cette équation établit un rapport important entre les trois moments d'inertie du sphéroïde terrestre; nous reviendrons sur les conséquences qui en résultent, relativement à la configuration et à la disposition des couches qui le composent, lorsque nous nous occuperons de la figure des corps célestes.

40. Nous avons jusqu'à présent regardé le sphéroïde terrestre comme entièrement solide; cette supposition n'est point parfaitement exacte, et pour que les résultats de la théorie précédente fussent rigoureusement applicables à la Terre, il faudrait avoir la certitude qu'ils ne sont pas altérés par les oscillations et les frottements du fluide qui la couvre en très-grande partie. C'est ce que Laplace est parvenu à démontrer par une savante analyse, qui l'a conduit à cet important théorème que nous nous contenterons de rappeler ici : *Les phénomènes de la précession des équinoxes et de la nutation de l'axe de la Terre sont exactement les mêmes que si la mer formait une masse solide avec elle.*

CHAPITRE V.

MOUVEMENT DE ROTATION DE LA LUNE AUTOUR DE SON CENTRE DE GRAVITÉ.

41. Un phénomène extrêmement remarquable dans le système du monde, et qui paraît avoir été connu de tout temps, c'est que la Lune, dans son mouvement de révolution autour de la Terre, nous présente toujours la même face. L'explication que les anciens astronomes avaient donnée de ce singulier phénomène était erronée. C'est à Hévélius et à Newton que l'on doit la connaissance de sa véritable cause. Ils montrèrent que, pour en rendre raison, il fallait supposer une égalité parfaite entre le mouvement de révolution et le mouvement de rotation de la Lune; d'où il résulte qu'à mesure que son centre de gravité s'avance sur l'orbite qu'il décrit autour de la Terre, l'axe du sphéroïde lunaire, qui est tourné vers nous, décrit, par un mouvement contraire, le même nombre de degrés, en sorte que ce second mouvement, ramenant sans cesse vers le centre de la Terre le même hémisphère de la Lune, toutes les autres parties de sa surface nous restent à jamais cachées. Bientôt après, Dominique Cassini, par une observation plus attentive encore des taches de la Lune, découvrit, dans son mouvement de rotation, de nouveaux phénomènes; il reconnut, 1° *que l'inclinaison de l'axe de rotation* *de la Lune à l'écliptique est invariable*; 2° *que les nœuds de son équateur coïncident constamment avec les nœuds de son orbite, c'est-à-dire que les plans de l'équateur et de l'orbite lunaire coupent toujours celui de l'écliptique suivant la même ligne droite*. Ces deux importantes découvertes, les plus belles peut-être dont nous soyons redevables à ce grand astronome, et que les observations de Tobie Mayer et de Lalande ont depuis confirmées, complètent la théorie astronomique du mouvement de rotation de la Lune, et ont permis aux géomètres de chercher, avec le secours de l'analyse, l'explication physique des singuliers phénomènes que ce mouvement nous présente.

D'Alembert tenta le premier cette entreprise. Il essaya d'appliquer à la Lune ses formules de la précession des équinoxes; mais la lenteur du mouvement de rotation de cet astre, et surtout la circonstance particulière de l'égalité de ce mouvement à celui de révolution, exigeait, pour traiter cette question, une analyse toute nouvelle, et celle qu'employa d'Alembert le conduisit à des résultats inexacts. Lagrange eut plus de succès, et son Mémoire, qui remporta le prix proposé par l'Académie des Sciences pour 1764, joint à celui qu'il publia en 1780 dans les *Mémoires de Berlin*, renferme la théorie complète du mouvement de rotation de la Lune autour de son centre de gravité.

Lagrange donne d'abord l'explication du phénomène que l'on a nommé la *libration en longitude*; il montre qu'il est dû à ce que l'égalité du mouvement moyen de révolution et de rotation de la Lune n'ayant point été rigoureusement exacte à l'origine des temps, ce qui paraîtrait en effet infiniment peu vraisemblable, il en est résulté une espèce de balancement dans l'axe du sphéroïde lunaire dirigé vers la Terre, qui le fait osciller de part et d'autre du rayon vecteur mené du centre de la Terre à celui de la Lune, comme un pendule oscille sans cesse autour de la verticale dont on l'a légèrement écarté. Après avoir développé les lois de la libration en longitude, ainsi que les petites inégalités qui résultent dans le mouvement de rotation des inégalités du mouvement de révolution, passant à la libration de la Lune en latitude, par un choix de variables extrêmement ingénieux, et qui a été utile dans un grand nombre de questions de la Mécanique céleste, il parvient à déterminer les lois du mouvement de l'équateur lunaire. Il montre que l'inclinaison de l'axe de rotation de la Lune est constante, et que le singulier phénomène de la coïncidence des nœuds de son équateur et de son orbite, en est une conséquence immédiate. Pour que cette coïncidence existe, il n'est pas nécessaire qu'elle ait eu lieu rigoureusement à l'origine du mouvement, il suffit que la différence, qui existait à cette époque entre les positions des nœuds de l'équateur et de l'orbite lunaire, ait été très-petite; l'attraction de la Terre a établi ensuite et maintiendra éternellement la coïncidence de leurs nœuds moyens.

Cette belle analyse, comme la plupart de celles que nous a laissées Lagrange, a presque épuisé la question qu'elle avait à traiter, et les géomètres qui s'en sont depuis occupés, n'ont fait que la simplifier et ajouter aux inégalités de la libration en longitude et en latitude déterminées par lui, quelques inégalités nouvelles qui sont très-petites en elles-mêmes, mais auxquelles la précision des observations modernes obligera désormais d'avoir égard. C'est ainsi que M. Poisson, en discutant avec un nouveau soin les inégalités de la libration en latitude, en a reconnu une qui dépend de la différence en longitude du nœud et du périgée lunaire, et qui peut devenir sensible; mais il s'est assuré en même temps qu'elle était la seule de cette espèce qui eût été omise dans l'analyse de Lagrange et de Laplace, en sorte que toutes les autres inégalités auxquelles ils s'étaient dispensés d'avoir égard, pouvaient en effet être négligées.

On doit donc regarder comme complète la théorie physique de la libration de la Lune; la seule chose qu'elle laisse encore à désirer, c'est un assez grand nombre d'observations pour fixer avec précision les données que l'analyse emprunte à l'Astronomie, surtout celles qui déterminent les rapports des moments d'inertie des trois axes principaux du sphéroïde lunaire, et qui fournissent par conséquent des notions exactes sur sa figure. M. Nicollet a déjà exécuté un travail de ce genre, en y employant 174 observations faites par lui ou par MM. Bouvard et Arago; espérons qu'une plus longue suite encore d'observations confirmera les résultats auxquels il est parvenu et ajoutera à leur précision.

On pourrait déterminer les inégalités du mouvement de rotation de la Lune troublé par l'action du Soleil et de la Terre, au moyen des formules contenues dans le chapitre Ier; mais il est plus simple de reprendre pour cela les équations différentielles du mouvement troublé, données nº **2**. On verra aisément d'ailleurs comment les résultats que nous allons développer se concluraient des formules générales (P), nº **7**, qui s'appliquent au mouvement de rotation de toutes les planètes.

42. Nous placerons l'origine des coordonnées au centre de la Lune, que nous supposerons immobile, et nous regarderons le Soleil et la Terre comme circulant autour d'elle. Soient donc L la masse de la Terre, x, y, z ses trois coordonnées relatives à un plan fixe mené par le centre de la Lune paralèllement au plan de l'écliptique à une époque donnée, r' son rayon vecteur compté du même point; en ne poussant les approximations que jusqu'aux termes du troisième ordre par rapport aux dimensions du sphéroïde lunaire, on aura, nº **25**,

$$V = -\frac{3L}{4r'^5}(A-B)\left\{[x'^2-(y'\cos\theta - z\sin\theta)^2]\cos 2\varphi + 2x'(y'\cos\theta - z\sin\theta)\sin 2\varphi\right\}$$
$$-\frac{3L}{4r'^5}(A+B-2C)[x'^2+(y'\cos\theta - z\sin\theta)^2].$$

Dans cette expression, A, B, C représentent les trois moments d'inertie principaux de la Lune. Nous continuerons à donner le nom d'*équateur* au plan qui renferme les deux premiers axes principaux, c'est-à-dire ceux auxquels se rapportent les moments d'inertie A et B. Ce plan n'est plus ici, comme dans le mouvement de rotation de la Terre, perpendiculaire à l'axe instantané de rotation; cet axe varie dans l'intérieur du sphéroïde lunaire, en sorte que les pôles de rotation se déplacent à la surface de la Lune, circonstance qui établit une différence essentielle entre le mouvement de rotation de ce satellite et celui du sphéroïde terrestre.

Cela posé, θ représente l'inclinaison de l'équateur lunaire sur le plan fixe parallèle à l'écliptique, φ est l'angle compris entre le premier axe principal de la Lune et le nœud descendant de son équateur; nous supposerons l'angle φ compté à partir de ce nœud dans le sens du mouvement de rotation de la Lune; enfin, nous nommerons ψ l'angle compris entre le nœud descendant de l'équateur lunaire et une droite fixe menée dans le plan de l'écliptique, et nous supposerons cet angle compté à partir de cette droite, en sens inverse de l'ordre des signes.

Si l'on différentie la fonction V par rapport aux trois variables φ, ψ, θ, en observant que l'on a, n° 25,

$$\frac{dx'}{d\psi} = -y', \quad \frac{dy'}{d\psi} = x', \quad \frac{dz'}{d\psi} = 0,$$

on aura

$$\frac{dV}{d\varphi} = \frac{3L}{2r'^5}(A - B)\left\{[x'^2 - (y'\cos\theta - z\sin\theta)^2]\sin 2\varphi - 2x'(y'\cos\theta - z\sin\theta)\cos 2\varphi\right\},$$

$$\frac{dV}{d\psi} = \frac{3L}{2r'^5}(A-B)\left\{[y'(y'\cos\theta - z\sin\theta) - x'^2\cos\theta]\sin 2\varphi + x'.[y' + (y'\cos\theta - z\sin\theta)\cos\theta]\cos 2\varphi\right\}$$

$$+ \frac{3L}{2r'^5}(A + B - 2C)[x'(y'\sin\theta + z\cos\theta)\sin\theta],$$

$$\frac{dV}{d\theta} = \frac{3L}{2r'^5}(A - B)[x'(y'\sin\theta + z\cos\theta)\sin 2\varphi - (y'\cos\theta - z\sin\theta)(y'\sin\theta + z\cos\theta)\cos 2\varphi]$$

$$+ \frac{3L}{2r'^5}(A + B - 2C)(y'\cos\theta - z\sin\theta)(y'\sin\theta + z\cos\theta),$$

et, par suite,

$$\frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{dV}{d\psi}+\cos\theta\frac{dV}{d\varphi}\right)=\frac{3L}{2r'^5}(A-B)[(y'\cos\theta-z\sin\theta)(y'\sin\theta+z\cos\theta)\sin 2\varphi$$
$$+x'(y'\sin\theta+z\cos\theta)\cos 2\varphi]$$
$$+\frac{3L}{2r'^5}(A+B-2C)[x'(y'\sin\theta+z\cos\theta)].$$

Les trois équations (C) du n° 2 deviendront ainsi

$$\left.\begin{aligned}
A\,dp+(C-B)\,qr\,dt&=\frac{3L\,dt}{r'^5}(C-B)[(y'\cos\theta-z\sin\theta)(y'\sin\theta+z\cos\theta)\cos\varphi\\
&\quad-x'(y'\sin\theta+z\cos\theta)\sin\varphi],\\
B\,dq+(A-C)\,pr\,dt&=\frac{3L\,dt}{r'^5}(A-C)[x'(y'\sin\theta+z\cos\theta)\cos\varphi\\
&\quad+(y'\cos\theta-z\sin\theta)(y'\sin\theta+z\cos\theta)\sin\varphi],\\
C\,dr+(B-A)\,pq\,dt&=\frac{3L\,dt}{2r'^5}(B-A)\{2x'(y'\cos\theta-z\sin\theta)\cos 2\varphi\\
&\quad-[x'^2-(y'\cos\theta-z\sin\theta)^2]\sin 2\varphi\}.
\end{aligned}\right\}\ (1)$$

Il est bon de remarquer qu'on peut arriver très-simplement aux mêmes équations de la manière suivante : nous avons supposé n° 5, livre II,

$$V'=\frac{L}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}},$$

x', y', z' représentant les coordonnées de l'astre L rapportées aux trois axes principaux du sphéroïde attiré, et x, y, z les coordonnées d'un élément dm de ce corps, relatives aux mêmes axes et à la même origine. En différentiant cette valeur, on trouve

$$\left.\begin{aligned}
y\frac{dV'}{dz}-z\frac{dV'}{dy}&=z'\frac{dV'}{dy'}-y'\frac{dV'}{dz'},\\
z\frac{dV'}{dx}-x\frac{dV'}{dz}&=x'\frac{dV'}{dz'}-z'\frac{dV'}{dx'},\\
x\frac{dV'}{dy'}-y\frac{dV'}{dx}&=y'\frac{dV'}{dx'}-x'\frac{dV'}{dy'}.
\end{aligned}\right\}\ (m)$$

Si l'on multiplie par dm les deux membres de ces équations, qu'on les intègre ensuite, qu'on fasse, pour abréger, $V = S.V'dm$, l'intégrale S étant relative à l'élément dm et aux quantités qui varient avec lui, en observant que les trois coordonnées x', y', z' sont les mêmes pour tous les éléments dm, en vertu des trois équations (m), on pourra supposer :

$$S.\left(y\frac{dV'}{dz} - z\frac{dV'}{dy}\right)dm = z'\frac{dV}{dy'} - y'\frac{dV}{dz'},$$

$$S.\left(z\frac{dV'}{dx} - x\frac{dV'}{dz}\right)dm = x'\frac{dV}{dz'} - z'\frac{dV}{dx'},$$

$$S.\left(x\frac{dV'}{dy} - y\frac{dV'}{dx}\right)dm = y'\frac{dV}{dx'} - x'\frac{dV}{dy'}.$$

Cela posé, en ne portant l'approximation que jusqu'aux termes du troisième ordre, nous avons trouvé, n° 25,

$$V = -\frac{3L}{2r'^5}(Ax'^2 + By'^2 + Cz'^2),$$

x', y', z' représentant, comme plus haut, les coordonnées de L, rapportées aux trois axes principaux du sphéroïde attiré.

Cette expression, en la différentiant, donne, en vertu des formules précédentes,

$$S.\left(y\frac{dV'}{dz} - z\frac{dV'}{dy}\right)dm = \frac{3L}{r'^5}(C - B)y'z',$$

$$S.\left(z\frac{dV'}{dx} - x\frac{dV'}{dz}\right)dm = \frac{3L}{r'^5}(A - C)x'z',$$

$$S.\left(x\frac{dV'}{dy} - y\frac{dV'}{dx}\right)dm = \frac{3L}{r'^5}(B - A)x'y'.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans les équations (B), n° **1**, et qu'on remplace ensuite les coordonnées x', y', z' par leurs valeurs en fonction des angles φ, ψ, θ, données n° **25**, on retrouvera identiquement les équations (1).

L'observation ayant montré que l'inclinaison de l'équateur lunaire sur l'écliptique est toujours peu considérable, θ est un fort petit angle dont nous négligerons le carré et le produit par le carré de l'inclinaison de l'orbite lunaire, qui est aussi une très-petite quantité. En observant que z est du même ordre que cette inclinaison, les trois équations (1) deviendront

$$\text{A}\,dp + (\text{C}-\text{B})\,qr\,dt = \frac{3\,\text{L}\,dt}{r'^5}(\text{C}-\text{B})[(\text{Y}'\theta+\text{Z})(\text{Y}'\cos\varphi - \text{X}'\sin\varphi)],$$

$$\text{B}\,dq + (\text{A}-\text{C})\,pr\,dt = \frac{3\,\text{L}\,dt}{r'^5}(\text{A}-\text{C})[(\text{Y}'\theta+\text{Z})(\text{X}'\cos\varphi + \text{Y}'\sin\varphi)],$$

$$\text{C}\,dr + (\text{B}-\text{A})\,pq\,dt = \frac{3\,\text{L}\,dt}{2\,r'^5}(\text{B}-\text{A})[2\,\text{X}'\text{Y}'\cos 2\varphi - (\text{X}'^2-\text{Y}'^2)\sin 2\varphi].$$

On peut encore aux coordonnées X′, Y′, Z de L, substituer d'autres variables qui rendent l'intégration plus facile. Soit v la longitude de la Terre vue de la Lune, cette longitude étant comptée du nœud ascendant de l'équateur lunaire; soit α la longitude du nœud descendant de l'orbe lunaire comptée du même point, et γ l'inclinaison de cette orbite sur l'écliptique fixe; en désignant s' la latitude de la Terre au-dessus de ce dernier plan, on aura

$$\operatorname{tang} s' = \operatorname{tang}\gamma \sin(v-\alpha).$$

La longitude de la Terre, comptée d'une droite fixe sur le plan parallèle à l'écliptique, sera $v-\psi$; en suivant donc l'analyse du n° **25**, et en observant que γ est un très-petit angle dont on peut négliger les carrés dans la recherche qui nous occupe, on trouvera

$$x' = r' \cos v, \quad y' = r' \sin v, \quad z = r' \gamma \sin(v - \alpha),$$

valeurs exactes, aux quantités près de l'ordre γ^2.

Les équations précédentes deviennent ainsi

$$\left.\begin{aligned}
&A\,dp + (C - B)\,qr\,dt = \frac{3L\,dt}{r'^3}(C - B)\,[\theta \sin v + \gamma \sin(v - \alpha)]\sin(v - \varphi),\\
&B\,dq + (A - C)\,pr\,dt = \frac{3L\,dt}{r'^3}(A - C)\,[\theta \sin v + \gamma \sin(v - \alpha)]\cos(v - \varphi),\\
&C\,dr + (B - A)\,pq\,dt = \frac{3L\,dt}{2r'^3}(B - A)\sin 2(v - \varphi).
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

43. Occupons-nous d'intégrer ces équations; considérons d'abord la troisième, d'où dépend le mouvement du sphéroïde lunaire autour de son axe de rotation.

Si la Lune était un sphéroïde de révolution, on aurait $B = A$, et par conséquent $r =$ constante. r exprime la vitesse du mouvement de rotation du sphéroïde autour de son troisième axe principal (n° **33**, livre Ier). Cette vitesse serait donc constante, et le mouvement de rotation uniforme. Ce cas n'a pas lieu dans la nature, mais on peut toujours regarder la quantité $B - A$ comme peu considérable; et comme p et q sont aussi très-petits, puisque l'observation a prouvé que l'axe de rotation de la Lune s'écarte toujours très-peu de son troisième axe principal, on pourra négliger le produit $(B - A)pq$ à cause de la petitesse de ses trois facteurs. La dernière des équations (2) deviendra donc

$$dr = \frac{3\,\mathrm{L}\,dt}{2\,r'^3}\left(\frac{\mathrm{B}-\mathrm{A}}{\mathrm{C}}\right)\sin 2(\nu - \varphi). \quad (3)$$

L'observation ayant fait voir que la Lune nous présente toujours à peu près le même hémisphère, on en a conclu que son moyen mouvement de rotation est exactement égal à son moyen mouvement de révolution ; en sorte que si ce mouvement est sujet à quelques inégalités, elles doivent être peu considérables.

Or, si l'on néglige, comme nous le supposons, les quantités de l'ordre θ^2, l'arc $\varphi - \psi$ représentera (n° 1) le mouvement de rotation de la Lune autour de son troisième axe principal, mouvement qui serait uniforme sans l'action des forces perturbatrices. Si l'on désigne donc par u les inégalités qu'elles peuvent y produire, par $mt + c$ la longitude moyenne de la Terre vue de la Lune et correspondante au temps t, longitude qui est égale à celle de la Lune vue de la Terre plus une demi-circonférence, on aura

$$\varphi - \psi = mt + c + u,$$

et l'angle u représentera la libration de la Lune, ou l'excès de son moyen mouvement de rotation sur son moyen mouvement de révolution. Il ne s'agit donc, pour déterminer la libration, que de connaître la valeur de l'angle u. Or, il est facile d'y parvenir en introduisant cette nouvelle variable à la place de r dans l'équation (3), et en intégrant ensuite l'équation résultante.

En effet, on a, n° 1, aux quantités près de l'ordre θ^2,

$$r = \frac{d\varphi - d\psi}{dt}, \quad (4)$$

et, par conséquent, en différentiant l'équation (m) en faisant varier la constante c, pour avoir égard à l'équation séculaire dont est affectée la longitude moyenne de la Lune et qui est introduite dans son expression par la variation de l'époque (n° 7, livre I), on aura

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{d^2c}{dt^2}.$$

L'angle v représentant la longitude de la Terre vue de la Lune et comptée à partir du nœud descendant de l'équateur lunaire, $v - \psi$ sera la même longitude comptée à partir d'un équinoxe fixe, l'angle ψ devant être compté, comme nous l'avons dit, en sens inverse de l'angle v. Cette longitude est égale à $mt + c$, plus à une suite de sinus et de cosinus d'angles multiples du moyen mouvement mt; on aura, par conséquent,

$$v = mt + c + \psi + \Sigma.\mathrm{H}\sin(ht + h'),$$

en représentant par $\Sigma.\mathrm{H}\sin(ht + h')$ les inégalités de v ordonnées par rapport à mt.

Cette valeur, comparée à celle de $\varphi - \psi$, donne

$$v - \varphi = -u + \Sigma.\mathrm{H}\sin(ht + h'),$$

et, par conséquent,

$$\sin 2(v - \varphi) = -\sin 2u + 2\cos 2u\,\Sigma.\mathrm{H}\sin(ht + h') - \ldots$$

L'équation (3) devient ainsi, en y substituant $\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{d^2c}{dt^2}$ pour $\frac{dr}{dt}$,

$$\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{d^2c}{dt^2}=-\frac{3\,\mathrm{L}}{2r'^3}\left(\frac{\mathrm{B}-\mathrm{A}}{\mathrm{C}}\right)\sin 2u+\frac{3\,\mathrm{L}}{r'^3}\left(\frac{\mathrm{B}-\mathrm{A}}{\mathrm{C}}\right)\Sigma.\mathrm{H}\cos 2u\sin(ht+h').$$

L'angle u étant toujours une très-petite quantité, si l'on néglige son carré et ses puissances supérieures, on pourra supposer dans cette équation $\sin 2u=2u$ et $\cos 2u=1$; de plus, comme on a, à très-peu près, $\frac{\mathrm{L}}{r'^3}=m^2$, l'équation précédente deviendra

$$\frac{d^2u}{dt^2}+3m^2\left(\frac{\mathrm{B}-\mathrm{A}}{\mathrm{C}}\right)u=-\frac{d^2c}{dt^2}+3m^2\left(\frac{\mathrm{B}-\mathrm{A}}{\mathrm{C}}\right)\Sigma.\mathrm{H}\sin(ht+h'). \quad (5)$$

Si l'on fait d'abord abstraction des termes sans u, on satisfera à cette équation en supposant

$$u=\mathrm{K}\sin(kt+k'),$$

et l'on aura, pour déterminer k,

$$k=m\sqrt{3\left(\frac{\mathrm{B}-\mathrm{A}}{\mathrm{C}}\right)},$$

K et k' étant deux constantes qui demeurent arbitraires.

Si l'on nomme m' le moyen mouvement du Soleil, et e' l'excentricité de son orbite, en ne considérant que le terme principal de l'équation séculaire de la Lune, par la théorie de cet astre (n° 94, livre VII), on aura

$$\frac{dc}{dt}=-\frac{3m'^2e'^2}{2m},$$

et, par conséquent,

$$\frac{d^2 c}{dt} = -\frac{3 m'^2 e' de'}{m dt}.$$

En substituant cette valeur dans l'équation (5) et en l'intégrant ensuite en regardant la quantité précédente comme constante, ou, ce qui revient au même, en négligeant la quantité très-petite du troisième ordre $\frac{m'^2 d^2.e' de'}{m^3 dt^3 \left(\frac{B-A}{C}\right)}$, on aura, en vertu de ce terme seul,

$$u = \frac{m'^2 e' de'}{m^3 dt \left(\frac{B-A}{C}\right)}.$$

Si l'on désigne ensuite par $L \sin(ht + h')$, le terme de la valeur de u qui doit correspondre au terme $3m^2\left(\frac{B-A}{C}\right) H \sin(ht + h')$ de l'équation (5), en y substituant cette valeur et en comparant les termes qui ont même sinus ou même cosinus, on aura

$$-Lh^2 + 3m^2\left(\frac{B-A}{C}\right)(L - H) = 0,$$

d'où l'on tire

$$L = -\frac{3m^2\left(\frac{B-A}{C}\right) H}{h^2 - 3m^2\left(\frac{B-A}{C}\right)}.$$

Ainsi, d'après la théorie des équations linéaires, la valeur complète de u sera

$$u = \frac{m'^2 e' de'}{m^3 dt \left(\frac{B-A}{C}\right)} + K \sin(kt + k') + \Sigma.L \sin(ht + h'),$$

K et k' étant les deux constantes arbitraires qui doivent entrer dans l'intégrale finie de l'équation du second ordre (5), et le signe Σ désignant une suite de termes semblables au terme $\mathrm{L}\sin(ht+h')$, et déterminés de la même manière.

44. Examinons les conséquences qui résultent de cette expression. Le premier terme de la valeur de u est insensible quoiqu'il ait pour diviseur la petite fraction $\frac{\mathrm{B}-\mathrm{A}}{\mathrm{C}}$, à cause de la lenteur avec laquelle varie l'excentricité e' de l'orbe solaire; cette variation, en effet, qui produit l'équation séculaire de la Lune, ne devient sensible que par la double intégration qu'elle subit dans l'expression de la longitude moyenne. On peut donc négliger ce terme, et il résulte, en effet, des données que l'on a sur la valeur de la fraction $\frac{\mathrm{B}-\mathrm{A}}{\mathrm{C}}$ qu'il ne s'élèverait pas à $0'',018$ en un siècle.

Tous les autres termes de l'expression de u varient avec beaucoup plus de rapidité, mais sa valeur demeurera toujours peu considérable, si les coefficients K, L, etc., sont de très-petits coefficients. Le second terme de la valeur de u dépend de l'état initial du mouvement, et elle demeure toujours peu considérable si l'arbitraire K est supposée très-petite. Jusqu'ici les observations les plus précises ne paraissent indiquer aucune trace de cette inégalité, il en faut conclure ou que la constante K était nulle à l'origine du mouvement, ou que son influence a été annulée depuis par l'effet de quelque cause étrangère, et que par conséquent la partie de la libration de la Lune qui dépend de l'état initial du mouvement sera toujours insensible. Cette remarque est analogue à celle que nous avons faite dans le n° **13**, relativement à la Terre.

On a, par ce qui précède, $k = m\sqrt{3\left(\frac{B-A}{C}\right)}$, m représentant le moyen mouvement de la Lune dans l'unité de temps; la durée de la période de l'argument dont il s'agit, sera donc d'un mois sidéral divisé par $\sqrt{3\left(\frac{B-A}{C}\right)}$. Nous verrons bientôt que ce diviseur est une très-petite quantité, et que des observations récentes sur lesquelles on peut compter donnent, à très-peu près, 0,0018 pour sa valeur. Cette durée, dans ce cas, n'excéderait pas deux années; il sera donc facile, par des observations faites à des intervalles de temps assez grands pour que la variation de l'angle kt soit sensible, de reconnaître si le coefficient K a ou non une valeur appréciable.

Au reste, il faut observer que ce premier terme de la valeur de u sert à expliquer, par la théorie, comment il se fait que la Lune nous présente toujours le même hémisphère, sans qu'il soit besoin de supposer que la vitesse primitive de rotation, imprimée à cet astre, a été exactement égale à sa vitesse de révolution autour de la Terre, ce qui paraît en effet infiniment peu vraisemblable. Pour le faire voir, remarquons qu'en faisant abstraction de l'inclinaison de l'équateur lunaire à l'écliptique, on a, par le n° **45**,

$$d\varphi - d\psi = rdt, \quad r = m + \frac{dc}{dt} + \frac{du}{dt}.$$

On aura, par conséquent,

$$\int r dt = \int m dt + c + u.$$

En comprenant dans l'intégrale $\int m dt$ l'équation séculaire qui affecte le moyen mouvement lunaire, ou plutôt la longitude moyenne, et qui est introduite par la variation de la constante c.

r représentant la vitesse de rotation de la Lune autour de son troisième axe principal (nº 43), l'intégrale $\int r dt$ exprime son mouvement de rotation autour du même axe, ou le nombre de degrés, minutes et secondes que décrit en un temps donné l'un des points de son équateur. Comme la quantité u n'est composée que de termes périodiques, l'équation précédente montre que le moyen mouvement de rotation et le moyen mouvement de révolution sont parfaitement égaux entre eux, et que l'action de la Terre sur le sphéroïde lunaire fait participer le premier de ces mouvements aux inégalités séculaires dont le second est affecté, puisque nous avons vu, en effet, que la vitesse de rotation r serait rigoureusement constante sans cette action. On en peut conclure que la parfaite égalité des deux mouvements se conservera dans tous les siècles telle qu'elle est aujourd'hui, condition nécessaire (nº 41) pour que la Lune nous présente toujours la même face. Si, au contraire, le mouvement de révolution était affecté d'une inégalité à laquelle n'aurait point part le mouvement de rotation, l'hémisphère lunaire opposé à la Terre anticiperait progressivement, par la suite des siècles, sur la partie qui est tournée vers elle, et avec quelque lenteur que croisse cette inégalité, elle suffirait pour nous faire découvrir un jour toute la partie de la surface lunaire qui semble pour jamais soustraite à nos yeux.

Pour que cette inégalité subsiste et se maintienne éternellement, il n'est pas même nécessaire que les moyens mouvements de rotation et de révolution de la Lune aient été égaux à l'origine du mouvement. En effet, en différentiant et substituant pour $\frac{du}{dt}$ sa valeur, on a

$$r = m + m\text{K}\sqrt{3\left(\frac{\text{B}-\text{A}}{\text{C}}\right)}\cos(kt+k') + \Sigma.\text{L}l\cos(lt+l').$$

En sorte que, comme K est arbitraire, la vitesse primitive de rotation de la Lune peut être supposée quelconque; et il suffit, pour que les moyens mouvements de rotation et de révolution aient dans la suite toujours coïncidé, que cette vitesse ait été comprise entre

$$m + m\text{K}\sqrt{3\left(\frac{\text{B}-\text{A}}{\text{C}}\right)} \quad \text{et} \quad m - m\text{K}\sqrt{3\left(\frac{\text{B}-\text{A}}{\text{C}}\right)}.$$

Ces limites sont très-resserrées, il est vrai, et elles s'éloignent peu de la valeur moyenne m, à cause de la petitesse de la constante K et du coefficient $\sqrt{3\left(\frac{\text{B}-\text{A}}{\text{C}}\right)}$; mais elles suffisent pour faire disparaître l'invraisemblance qu'il y aurait à supposer, à l'origine du mouvement, une parfaite égalité entre le moyen mouvement de rotation de la Lune et son moyen mouvement de révolution.

Pour que la libration en longitude demeure toujours peu considérable, comme l'observation l'indique, il faut que les coefficients L, etc., des différents termes de la valeur de u, soient supposés très-petits, ainsi que le coefficient K; mais cette condition ne suffit pas, il faut de plus que les valeurs des constantes k, h, etc., soient toutes réelles; car autrement quelques-uns des sinus ou cosinus qui entrent dans l'expression de u, se changeraient en arcs de cercle ou en exponentielles, et la valeur de u pourrait croître indéfiniment, ce qui est contre l'hypothèse. Les valeurs de h et des autres coefficients semblables sont réelles de leur nature; mais pour que celle de k le soit aussi, il faut que $\frac{B - A}{C}$ soit une quantité positive, c'est-à-dire que l'on ait $B > A$. Or, A est le moment d'inertie qui se rapporte à l'axe principal de l'équateur lunaire, qui est constamment dirigé vers la Terre; en effet, cet axe est celui qui forme l'angle φ avec l'intersection de l'équateur lunaire et de l'écliptique, tandis que la projection du rayon vecteur mené de la Lune à la Terre, forme l'angle v avec la même ligne. $v - \varphi$ est toujours, par ce qui précède, un très-petit angle; le premier axe principal de la Lune est donc toujours, à très-peu près, dirigé vers la Terre; et il est naturel par conséquent de supposer que l'équateur lunaire s'est allongé dans ce sens par l'effet de l'attraction de la Terre, en sorte que le moment d'inertie A, qui se rapporte à l'axe de l'équateur dirigé vers la Terre, doit être plus petit que le moment d'inertie B, relatif au second axe principal situé dans le même plan.

Quant aux coefficients K, L, etc., comme le premier K est arbitraire, sa valeur peut être supposée aussi petite qu'on voudra ; mais pour rendre en même temps très-petite celle de L, il faudra supposer une valeur très-petite à la quantité $\frac{B-A}{C}$. On voit, en effet, d'après l'expression de L, que ce coefficient pourrait devenir sensible si H avait une valeur assez grande, ou si la valeur de h était peu différente de $m\sqrt{3\left(\frac{B-A}{C}\right)}$, ce qui rendrait très-petit le dénominateur de cette expression.

45. Nous avons désigné par $\Sigma.H\sin(ht+h')$ la somme des termes périodiques de la longitude vraie de la Lune : le premier de ces termes, ou l'équation du centre, est celui qui a le plus grand coefficient ; en le supposant représenté par $H\sin(ht+h')$, on a, par la théorie de la Lune (tome IV, page 601), $H=22639''$, $h^2=m^2\,0{,}98317$; on aura donc, en vertu de ce terme,

$$L=-\frac{3\left(\frac{B-A}{C}\right)22639''}{0{,}98317-3\left(\frac{B-A}{C}\right)},$$

d'où l'on tire

$$\frac{B-A}{C}=\frac{0{,}32772\,L}{L-22639''}.$$

La valeur de L doit être peu considérable, puisque le terme de la valeur de u qui en dépend n'a pu être reconnu par l'observation. Il est probable, vu la précision des observations modernes, qu'elle n'excède guère un demi-degré ; si l'on suppose donc $L=\mp 32'$

ou 1920″, on aura

$$\frac{B-A}{C} = 0{,}025621, \quad \frac{B-A}{C} = -0{,}030369.$$

La valeur de B — A devant d'ailleurs être nécessairement positive, il en résulte que $\frac{B-A}{C}$ est au-dessous de 0,025621, et que L est négatif.

Parmi les termes de l'expression de u qui peuvent devenir sensibles en acquérant de très-petits diviseurs, le plus considérable est celui qui dépend de l'équation annuelle; il suffira donc d'examiner l'effet de ce terme. Si l'on suppose que $H\sin(ht+h')$ représente cette équation, $ht+h'$ étant ici l'anomalie moyenne du Soleil, on aura, par la théorie de la Lune (tome IV, page 601), $H = 669''$ et $h = m\,0{,}0748$, et par conséquent $h^2 = m^2\,0{,}005595$; on aura donc, en vertu de ce terme,

$$L = -\frac{3\left(\frac{B-A}{C}\right)669''}{0{,}005595 - 3\left(\frac{B-A}{C}\right)},$$

d'où l'on tire

$$\frac{B-A}{C} = \frac{0{,}001865\,L}{L - 669''}.$$

Puisque les observations n'ont point fait reconnaître le terme de la valeur de u proportionnel à L, ce coefficient doit être peu considérable; si l'on suppose en conséquence $L = \mp 1920''$, on aura

$$\frac{B-A}{C} = 0{,}0013831, \quad \frac{B-A}{C} = 0{,}0028624.$$

Ainsi, dans le cas de L négatif, les deux limites de $\frac{B-A}{C}$ sont zéro et 0,0013831, et, dans le cas de L positif, 0,0028624 et ∞ ou 0,0028624 et 0,025621, puisque nous venons de voir que $\frac{B-A}{C}$ ne pouvait pas dépasser cette dernière limite. Nous verrons tout à l'heure que la valeur de $\frac{B-A}{C}$ est moindre que 0,0006; elle est donc comprise entre zéro et 0,0013831, et par conséquent L est négatif.

Si l'on substitue dans la valeur précédente de L, pour $\frac{B-A}{C}$ la dernière limite que nous venons d'assigner à cette quantité, on trouvera, relativement à l'équation du centre, $L = -41''$, et relativement à l'équation annuelle, $L = -317''$. Ce sont les limites de ce coefficient, et par conséquent celles des arguments qui en dépendent dans la valeur de u. Or, le dernier arc, vu de la Terre sur la surface de la Lune, ne s'élèverait pas à $1'',5$; c'est la seule partie de la libration qu'on puisse espérer de rendre sensible par les observations; et si l'on parvenait à la déterminer, on en déduirait la valeur de $\frac{B-A}{C}$ qui n'est pas encore connue d'une manière positive; mais sa petitesse rend cette appréciation très-difficile.

MM. Bouvard et Nicollet, par la discussion de 174 observations de la libration de la Lune en longitude, ont trouvé le coefficient de l'inégalité dépendante de l'équation annuelle, de $4'45''$, d'où l'on conclut

$$\frac{B-A}{C} = 0,0005567.$$

Si l'on détermine, d'après cette valeur, le coefficient du terme de u qui dépend de l'équation du centre de la Lune et qu'on joigne ce terme à celui de l'équation annuelle déterminé par l'observation, on aura

$$u = -285'' \sin l - 39'' \sin l',$$

l étant l'argument de l'équation annuelle de la Lune et l' celui de son équation du centre.

La valeur précédente de $\frac{B-A}{C}$ s'accorde avec la limite que nous avons fixée à cette quantité, et qui a été conclue de la libration de la Lune en latitude, plus facile à observer que la libration en longitude. Cependant, il reste encore de l'incertitude sur ce résultat, et il est à désirer que de nouvelles observations ajoutent à son exactitude.

46. Occupons-nous maintenant du mouvement des nœuds et des variations de l'inclinaison de l'équateur lunaire. Pour déterminer les mouvements de ce plan, il faut connaître les angles ψ et θ d'où dépend à chaque instant sa position par rapport à l'écliptique fixe; or, l'angle ψ est donné en fonction de φ et du temps t, au moyen de l'équation (4); il ne nous reste donc à déterminer que les angles θ et φ. Pour y parvenir, il convient de leur substituer de nouvelles variables qui facilitent l'intégration des équations d'où leurs valeurs dépendent. On conçoit, en effet, que si l'on choisit ces variables de manière à ce qu'elles soient astreintes, par la nature même de la question, à demeurer constamment très-petites, on pourra, dans la première approximation, négliger les termes où elles se trouveraient multipliées entre elles ou par leurs différences, et l'on n'aura plus à considérer que des équations linéaires, les seules qui puissent, comme on sait, s'intégrer dans tous les cas, quel que soit le nombre des variables qu'elles renferment et le degré de leur différence. Ces conditions sont faciles à remplir dans la question qui nous occupe; car, comme nous avons supposé l'inclinaison θ de l'équateur lunaire à l'écliptique fixe toujours peu considérable, il suffira, pour y satisfaire, de substituer aux variables φ et θ, des variables analogues à celles que nous avons déjà employées dans un cas semblable, n° 34, livre I.

Soient donc

$$s = \operatorname{tang}\theta \sin\varphi, \quad s' = \operatorname{tang}\theta \cos\varphi.$$

En différentiant et négligeant le carré de θ, on aura

$$\frac{ds}{dt} = \sin\varphi \frac{d\theta}{dt} + \theta \cos\varphi \frac{d\varphi}{dt},$$
$$\frac{ds'}{dt} = \cos\varphi \frac{d\theta}{dt} - \theta \sin\varphi \frac{d\varphi}{dt}.$$

Les équations (a) du n° 1 donnent

$$\frac{d\theta}{dt} = -p\cos\varphi + q\sin\varphi,$$
$$\theta\frac{d\varphi}{dt} = p\sin\varphi + q\cos\varphi + r\operatorname{tang}\theta.$$

Substituons ces valeurs dans les équations précédentes; on trouve

$$\frac{ds}{dt} = rs' + q, \quad \frac{ds'}{dt} = -rs - p, \quad (6)$$

d'où, en différentiant, on tire

$$\frac{d^2 s}{dt^2} - r\frac{ds'}{dt} - s'\frac{dr}{dt} = \frac{dq}{dt},$$

$$\frac{d^2 s'}{dt^2} + r\frac{ds}{dt} + s\frac{dr}{dt} = -\frac{dp}{dt}.$$

Si l'on remplace dans ces équations $\frac{dp}{dt}$ et $\frac{dq}{dt}$ par leurs valeurs tirées des équations (2), et qu'on observe qu'on peut supposer r constant et égal à m dans les termes multipliés par les quantités très-petites s et s', et par leurs différences, et qu'on peut négliger, par la même raison, les différentielles $s\frac{dr}{dt}$, $s'\frac{dr}{dt}$, on aura

$$\frac{d^2 s}{dt^2} - m\frac{ds'}{dt} + \left(\frac{A-C}{B}\right)mp = \frac{3L}{r'^3}\left(\frac{A-C}{B}\right)[\theta\sin v + \gamma\sin(v-\alpha)]\cos(v-\varphi),$$

$$\frac{d^2 s'}{dt^2} + m\frac{ds}{dt} + \left(\frac{B-C}{A}\right)mq = \frac{3L}{r'^3}\left(\frac{B-C}{A}\right)[\theta\sin v + \gamma\sin(v-\alpha)]\sin(v-\varphi),$$

ou bien, en mettant pour p et q leurs valeurs tirées des équations (6),

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2 s}{dt^2} - \left(\frac{A+B-C}{B}\right)m\frac{ds'}{ds} - \left(\frac{A-C}{B}\right)m^2 s = \frac{3L}{r'^3}\left(\frac{A-C}{B}\right)[\theta\sin v + \gamma\sin(v-\alpha)]\cos(v-\varphi),\\
&\frac{d^2 s'}{dt^2} + \left(\frac{A+B-C}{A}\right)m\frac{ds}{dt} - \left(\frac{B-C}{A}\right)m^2 s' = \frac{3L}{r'^3}\left(\frac{B-C}{A}\right)[\theta\sin v + \gamma\sin(v-\alpha)]\sin(v-\varphi).
\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

v est la longitude de la Terre vue de la Lune, et rapportée au nœud descendant de l'équateur lunaire; $v-\alpha$ est la même longitude comptée du nœud ascendant de l'orbite lunaire, en sorte que $\gamma\sin(v-\alpha)$ est la latitude de la Terre vue de la Lune. Si l'on remplace $\frac{L}{r'^3}$ par m^2 dans ces équations et qu'on observe que

$$\begin{aligned}\operatorname{tang}\theta\sin v &= \operatorname{tang}\theta\cos\varphi\sin(v-\varphi)+\operatorname{tang}\theta\sin\varphi\cos(v-\varphi)\\ &= s'\sin(v-\varphi)+s\cos(v-\varphi),\end{aligned}$$

elles deviendront

$$\frac{d^2s}{dt^2}-\left(\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}-\mathrm{C}}{\mathrm{B}}\right)m\frac{ds'}{dt}-\left(\frac{\mathrm{A}-\mathrm{C}}{\mathrm{B}}\right)m^2s=3m^2\left(\frac{\mathrm{A}-\mathrm{C}}{\mathrm{B}}\right)$$
$$\times[s'\sin(v-\varphi)+s\cos(v-\varphi)+\gamma\sin(v-\alpha)]\cos(v-\varphi),$$
$$\frac{d^2s'}{dt^2}+\left(\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}-\mathrm{C}}{\mathrm{A}}\right)m\frac{ds}{dt}-\left(\frac{\mathrm{B}-\mathrm{C}}{\mathrm{A}}\right)m^2s'=3m^2\left(\frac{\mathrm{B}-\mathrm{C}}{\mathrm{A}}\right)$$
$$\times[s'\sin(v-\varphi)+s\cos(v-\varphi)+\gamma\sin(v-\alpha)]\sin(v-\varphi).$$

L'angle $v-\varphi$ étant toujours, par ce qui précède, peu considérable, $\sin(v-\varphi)$ est une très-petite quantité dont on peut, sans erreur sensible, dans les seconds membres de ces équations, négliger le carré multiplié par les quantités très-petites s et s'; on aura ainsi

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2s}{dt^2}-\left(\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}-\mathrm{C}}{\mathrm{B}}\right)m\frac{ds'}{dt}-4\left(\frac{\mathrm{A}-\mathrm{C}}{\mathrm{B}}\right)m^2s=3m^2\left(\frac{\mathrm{A}-\mathrm{C}}{\mathrm{B}}\right)\\ &\quad\times[s'\sin(v-\varphi)+\gamma\sin(v-\alpha)]\cos(v-\varphi),\\ &\frac{d^2s'}{dt^2}+\left(\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}-\mathrm{C}}{\mathrm{A}}\right)m\frac{ds}{dt}-\left(\frac{\mathrm{B}-\mathrm{C}}{\mathrm{A}}\right)m^2s'=3m^2\left(\frac{\mathrm{B}-\mathrm{C}}{\mathrm{A}}\right)\\ &\quad\times[s\cos(v-\varphi)+\gamma\sin(v-\alpha)]\sin(v-\varphi).\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

47. Occupons-nous d'intégrer ces équations. Si l'on fait d'abord abstraction de leurs seconds membres, elles deviennent simplement

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2s}{dt^2}-\left(\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}-\mathrm{C}}{\mathrm{B}}\right)m\frac{ds'}{dt}-4\left(\frac{\mathrm{A}-\mathrm{C}}{\mathrm{B}}\right)m^2s=0,\\ &\frac{d^2s'}{dt^2}+\left(\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}-\mathrm{C}}{\mathrm{A}}\right)m\frac{ds}{dt}-\left(\frac{\mathrm{B}-\mathrm{C}}{\mathrm{A}}\right)m^2s'=0.\end{aligned}\right\}\quad(8)$$

Pour satisfaire à ces équations, supposons

$$s = \mathrm{M}\sin(lt+k), \quad s' = \mathrm{M}'\cos(lt+k).$$

Ces valeurs, substituées dans les équations précédentes, donnent

$$\mathrm{M}l^2 - \left(\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}-\mathrm{C}}{\mathrm{B}}\right) m\mathrm{M}'l + 4\left(\frac{\mathrm{A}-\mathrm{C}}{\mathrm{B}}\right) m^2\mathrm{M} = 0,$$

$$\mathrm{M}'l^2 - \left(\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}-\mathrm{C}}{\mathrm{A}}\right) m\mathrm{M}l + \left(\frac{\mathrm{B}-\mathrm{C}}{\mathrm{A}}\right) m^2\mathrm{M}' = 0.$$

De la seconde de ces équations, on tire

$$\mathrm{M}' = \frac{\left(\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}-\mathrm{C}}{\mathrm{A}}\right) ml}{l^2 + \left(\frac{\mathrm{B}-\mathrm{C}}{\mathrm{A}}\right) m^2}\mathrm{M}. \quad (9)$$

Cette valeur, substituée dans la première, donne

$$l^2 - \frac{\frac{(\mathrm{A}+\mathrm{B}-\mathrm{C})^2}{\mathrm{AB}} m^2 l^2}{l^2 + \left(\frac{\mathrm{B}-\mathrm{C}}{\mathrm{A}}\right) m^2} + 4\left(\frac{\mathrm{A}-\mathrm{C}}{\mathrm{B}}\right) m^2 = 0. \quad (10)$$

Les équations (9), (10) serviront à déterminer les constantes M′ et l; les deux autres constantes M et k demeureront arbitraires.

Si l'on ordonne l'équation (10) par rapport à l, on aura

$$l^4 - \left[\frac{(\mathrm{A}+\mathrm{B}-\mathrm{C})^2}{\mathrm{AB}} - 4\left(\frac{\mathrm{A}-\mathrm{C}}{\mathrm{B}}\right) - \left(\frac{\mathrm{B}-\mathrm{C}}{\mathrm{A}}\right)\right] m^2 l^2 + 4\left(\frac{\mathrm{A}-\mathrm{C}}{\mathrm{B}}\right)\left(\frac{\mathrm{B}-\mathrm{C}}{\mathrm{A}}\right) m^4 = 0, \quad (11)$$

équation qu'on peut résoudre comme une équation du second degré, et qui donnera pour l deux valeurs. Désignons la première par l et la seconde par l'; on aura, par la théorie des équations linéaires,

$$s = \mathrm{M}\sin(lt + k) + \mathrm{N}\sin(l't + k'),$$
$$s' = \mathrm{M}'\cos(lt + k) + \mathrm{N}'\cos(l't + k'),$$

en supposant, pour abréger,

$$\left.\mathrm{M}' = \frac{\left(\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}-\mathrm{C}}{\mathrm{A}}\right) ml}{l^2 + \left(\frac{\mathrm{B}-\mathrm{C}}{\mathrm{A}}\right) m^2}\,\mathrm{M}, \quad \mathrm{N}' = \frac{\left(\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}-\mathrm{C}}{\mathrm{A}}\right) ml'}{l'^2 + \left(\frac{\mathrm{B}-\mathrm{C}}{\mathrm{A}}\right) m^2}\,\mathrm{N}.\right\} \quad (12)$$

Ces valeurs de s et s' renferment quatre arbitraires, M, N, k, k'; elles sont donc les intégrales complètes des équations (8).

48. Reprenons maintenant les équations (7). La quantité $\gamma\sin(v - \alpha)$ représente, comme nous l'avons dit, la latitude de la Terre vue de la Lune, latitude qui est égale et de signe contraire à celle de la Lune vue de la Terre. Sa valeur peut se développer, d'après les formules du nº **25**, liv. II, en une suite de sinus et de cosinus des multiples du moyen mouvement mt; il en est de même des trois quantités $\sin v$, $\sin(v - \varphi)$ et $\cos(v - \varphi)$; en substituant donc ces valeurs dans les équations (7), leurs seconds membres se trouveront composés d'une suite de termes semblables, et chacun d'eux produira, dans les valeurs de s et s', un terme correspondant qu'on déterminera de la manière suivante.

Soit $\mathrm{H}\sin(ht + h')$ un terme quelconque du développement de $[s'\sin(v - \varphi) + \gamma\sin(v - \alpha)]\cos(v - \varphi)$, ht désignant ici un multiple quelconque de mt, et H et h' étant des fonctions données des éléments de l'orbite lunaire; et soit $H'\cos(ht+h')$ le terme du développement de $[s\cos(v-\varphi)+\gamma\sin(v-\alpha)]\sin(v-\varphi)$ qui lui correspond, c'est-à-dire qui a même argument ht; on aura, en ne considérant que ces termes,

$$\frac{d^2s}{dt^2}-\left(\frac{A+B-C}{B}\right)m\frac{ds'}{ds}-4\left(\frac{A-C}{B}\right)m^2s=3m^2\left(\frac{A-C}{B}\right)H\sin(ht+h'),$$

$$\frac{d^2s'}{dt^2}+\left(\frac{A+B-C}{A}\right)m\frac{ds}{dt}-\left(\frac{B-C}{A}\right)m^2s'=3m^2\left(\frac{B-C}{A}\right)H'\cos(ht+h').$$

On satisfait à ces équations, en supposant

$$s=P\sin(ht+h'),\quad s'=P'\cos(ht+h').$$

Si l'on substitue ces valeurs dans les équations précédentes, on trouve, pour déterminer P et P',

$$-Ph^2+\left(\frac{A+B-C}{B}\right)mP'h-\left(\frac{A-C}{B}\right)m^2(4P+3H)=0,$$

$$-P'h^2+\left(\frac{A+B-C}{A}\right)mPh-\left(\frac{B-C}{A}\right)m^2(P'+3H')=0,$$

d'où l'on tire

$$P=\frac{3\left[h^2+\left(\frac{B-C}{A}\right)m^2\right]\left(\frac{A-C}{B}\right)m^2H+3\left(\frac{A+B-C}{B}\right)\left(\frac{B-C}{A}\right)m^3hH'}{D},$$

$$P'=\frac{3\left[h^2+4\left(\frac{A-C}{B}\right)m^2\right]\left(\frac{B-C}{A}\right)m^2H'+3\left(\frac{A+B-C}{A}\right)\left(\frac{A-C}{B}\right)m^3hH}{D},$$

en faisant, pour abréger,

$$D=\frac{(A+B-C)}{AB}m^2h^2-\left[h^2+\left(\frac{B-C}{A}\right)m^2\right]\left[h^2+4\left(\frac{A-C}{B}\right)m^2\right].$$

Chacun des termes des produits

$$[s' \sin(v - \varphi) + \gamma \sin(v - \alpha)] \cos(v - \varphi)$$

et

$$[s \cos(v - \varphi) + \gamma \sin(v - \alpha)] \sin(v - \varphi)$$

introduira dans les valeurs de s et s' des termes semblables, et l'on aura les valeurs complètes de ces quantités en prenant la somme de tous ces termes, et en y joignant les valeurs de s et s' qui ont lieu lorsqu'on suppose nuls les seconds membres des équations (7). On trouve, de cette manière,

$$s = \mathrm{M} \sin(lt + k) + \mathrm{N} \sin(l't + k') + \mathrm{P} \sin(ht + h') + \ldots,$$

$$s' = \mathrm{M}' \cos(lt + k) + \mathrm{N} \cos(l't + k') + \mathrm{P} \cos(ht + h') + \ldots,$$

M, N, k, k' étant des constantes arbitraires.

49. Ces valeurs satisfont aux équations (7) dans toute leur étendue; elles doivent donc renfermer les lois de la précession des équinoxes lunaires et de la nutation de son axe de rotation. Mais avant d'en examiner les conséquences, il est bon de faire quelques observations qui en restreindront la généralité.

Nous avons dit, n° **45**, que $\frac{\mathrm{B} - \mathrm{A}}{\mathrm{C}}$ était toujours une quantité très-petite; on verra bientôt qu'il en est de même de $\frac{\mathrm{C} - \mathrm{A}}{\mathrm{C}}$, en sorte que si l'on fait

$$\frac{\mathrm{C} - \mathrm{A}}{\mathrm{C}} = i, \quad \frac{\mathrm{C} - \mathrm{B}}{\mathrm{C}} = i',$$

ce qui donne $\mathrm{A} = \mathrm{C}(1 - i)$ et $\mathrm{B} = \mathrm{C}(1 - i')$, i et i' seront de très-petites quantités dont on pourra négliger les carrés et le produit. Si l'on substitue ces valeurs dans l'équation (11), elle devient

$$l^4 - \left(\frac{1+2i-i'}{1-i-i'}\right) m^2 l^2 + \frac{4ii'}{1-i-i'} m^4 = 0,$$

équation qui donne, en la résolvant par approximation,

$$l^2 = m^2 \left[\frac{1+2i-i' \pm (1+2i-i'-8ii')}{2(1-i-i')}\right].$$

On tire de là ces deux valeurs, $l^2 = m^2 + 3im^2$ et $l^2 = 4ii'm^2$; on aura donc, en prenant pour l et l' les deux racines positives de ces équations,

$$l = m + \tfrac{3}{2} im, \quad l' = 2m\sqrt{ii'},$$

ou bien, en remettant pour i et i' les valeurs que ces lettres représentent,

$$l = m - \frac{3}{2} m \left(\frac{A-C}{C}\right), \quad l' = 2m \frac{\sqrt{(A-C)(B-C)}}{C}.$$

Ces valeurs substituées dans les équations (12) donneront, en observant que i et i' sont de très-petites quantités,

$$M' = M, \quad N' = -2N\sqrt{\frac{A-C}{B-C}}.$$

Les valeurs de s et s' deviendront ainsi

$$s = M\sin(lt+k) + N\sin(l't+k') + P\sin(ht+h') + \ldots,$$

$$s' = M\cos(lt+k) + 2N\sqrt{\frac{A-C}{B-C}}\cos(lt+k') + P'\cos(ht+h') + \ldots.$$

Si, dans une première approximation, on néglige dans les équations différentielles (7), les produits de l'angle $v - \varphi$ par les quantités s, s' et γ, le second membre de la première de ces équations se réduira à $3m^2\left(\frac{A-C}{B}\right)\gamma\sin(v-\alpha)$ et celui de la deuxième à zéro; $H\sin(ht+h')+\ldots$ représentera donc dans ce cas la latitude de la Lune développée en fonction des sinus et des cosinus du moyen mouvement mt. Le terme le plus considérable de cette valeur est celui qui dépend de l'argument de la latitude : en ne considérant que ce seul terme et en le supposant représenté par $H\sin(ht+h')$, on aura les valeurs qui en résultent dans s et s', en faisant $H'=0$ dans les équations du n° **48**, d'où l'on conclura P et P'; les valeurs de s et s' se réduiront ainsi aux suivantes:

$$s = M\sin(lt+k) + N\sin(l't+k') + P\sin(ht+h'),$$

$$s' = M\cos(lt+k) + 2N\sqrt{\frac{A-C}{B-C}}\cos(l't+k') + P'\cos(ht+h').$$

50. Examinons maintenant ce qui résulte de ces intégrales par rapport aux déplacements de l'équateur lunaire.

On a, par le n° **46**,

$$s = \tang\theta\sin\varphi,\quad s' = \tang\theta\cos\varphi,$$

d'où l'on tire

$$\tang\varphi = \frac{s}{s'},\quad \tang\theta = \sqrt{s^2+s'^2}.$$

Si, à la place de s et s', on substitue leurs valeurs, on aura ainsi

$$\tang\varphi = \frac{M\sin(lt+k)+N\sin(l't+k')+P\sin(ht+h')}{M\cos(lt+k)+2N\sqrt{\frac{A-C}{B-C}}\cos(l't+k')+P'\cos(ht+h')},$$

et en supposant, pour abréger,

$$N\left(\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{A-C}{B-C}}\right)=L,\quad N\left(\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{A-C}{B-C}}\right)=K,$$

il est aisé de voir, n° **66**, livre II, que la valeur précédente pourra prendre cette forme,

$$\tang(\varphi-ht-h')$$
$$=\frac{M\sin[(l-h)t+k-h']+L\sin[(l'-h)t+k'-h']+K\sin[(l'+h)t+k'+h']}{P+M\cos[(l-h)t+k-h']+L\cos[(l'-h)t+k'-h']+K\cos[(l'+h)t+k'+h']}$$

Si l'on suppose d'abord nulles les deux constantes M et N, cette équation donnera

$$\varphi=ht+h'\quad\text{ou}\quad\varphi=180^\circ+ht+h',$$

selon que P sera une quantité positive ou négative. Voyons quelle est celle de ceux valeurs qui s'accorde avec les observations.

L'angle $mt+c+\psi$ est la longitude du rayon vecteur mené de la Lune à la Terre, comptée à partir du nœud descendant de l'équateur lunaire; $180^\circ+ht+h'$ est l'argument de la latitude de la Lune, et par conséquent $ht+h'$ la distance de la Terre au nœud ascendant de l'orbe lunaire; $mt+c+\psi-ht-h'$ exprime donc l'angle compris entre le nœud ascendant de l'orbite et le nœud descendant de l'équateur de la Lune. Or, on a, par ce qui précède,

$$\varphi=ht+h'\quad\text{et}\quad\varphi-\psi=mt+c+u,$$

u étant une très-petite quantité qui exprime la libration de la Lune en longitude, et qui n'est composée que de termes périodiques. Si l'on néglige ces termes, on aura

$$mt+c+\psi-ht-h'=mt+c+\psi-\varphi=0;$$

d'où il suit que le lieu moyen du nœud descendant de l'équateur de la Lune coïncidera exactement avec le lieu moyen du nœud ascendant de l'orbite, résultat qui s'accorde avec la théorie fondée sur les observations faites par Cassini et répétées ensuite par Mayer et Lalande.

Dans le second cas, on a

$$\varphi = 180^\circ + ht + h';$$

on aura donc

$$mt + c + \psi - ht - h' = 180^\circ,$$

et le nœud descendant de l'équateur lunaire coïncidera par conséquent alors avec le nœud descendant de l'orbite. Ce cas pourrait, comme on voit, avoir également lieu; il suffirait pour cela que P fût une quantité négative; mais comme le premier résultat s'accorde exactement avec les observations, il faut en conclure que la valeur de P est positive.

Considérons actuellement l'expression générale de $\tang(\varphi - ht - h')$. Il est aisé de voir que l'angle $\varphi - ht - h'$ ne pourra jamais atteindre l'angle droit en plus ou en moins, si le dénominateur de cette expression est constamment de même signe et plus grand que zéro. En sorte que φ sera dans ce cas égal à $ht + h'$ plus ou moins un angle toujours moindre que 90°, et par conséquent la valeur moyenne de φ sera encore alors $ht + h'$. Si, au contraire, ce dénominateur pouvait devenir nul, la valeur de $\tang(\varphi - ht - h')$ deviendrait infinie; l'angle $\varphi - ht - h'$ dépasserait alors 90°, il pourrait même, par la suite, devenir égal à une ou plusieurs circonférences, et il ne serait plus possible, par conséquent, d'assigner dans ce cas aucune limite à ses accroissements.

Or, les observations ayant fait voir que le nœud descendant de l'équateur de la Lune ne s'éloigne jamais que très-peu du nœud moyen ascendant de son orbite, et qu'ainsi $\varphi - ht - h'$ est toujours un angle peu considérable, il en résulte que l'expression

$$P + M\cos[(l-h)t + k - h'] + L\cos[(l'-h)t + k' - h'] + K\cos[(l'+h)t + k' + h'],$$

ne doit jamais devenir nulle, quels que soient les angles $(l - h)t + k - h'$, etc., ce qui exige que cette quantité ne change pas de signes, et que par conséquent la valeur de P soit plus grande que la somme des coefficients M, L, K, abstraction faite des signes de ces quantités. Nous avons vu que lorsque M, L, K sont nuls, P doit être une quantité positive; il faut donc, dans le cas général, que P ait une valeur positive plus grande que la somme des valeurs de M, L, K, pour que $\varphi - ht - h'$ soit un angle toujours moindre que l'angle droit; et il faut en outre que les quantités M, L, K, et par conséquent M et N, soient très-petites par rapport à P, pour que l'angle $\varphi - ht - h'$ soit toujours fort petit, comme l'observation l'indique. Or, comme M et N sont arbitraires, cette dernière condition est toujours facile à remplir, et doit être considérée comme une donnée fournie par les observations.

Si l'on fait $\varphi - ht - h' = \zeta$, en sorte que $\varphi = ht + h' + \zeta$, on aura

$$\psi = \varphi - mt - c - u = ht + h' - mt - c - u + \zeta$$

pour la longitude du nœud descendant de l'équateur lunaire. Or, $mt + c - ht - h'$ est le lieu moyen du nœud ascendant de l'orbite; on aura donc le lieu vrai du nœud descendant de l'équateur lunaire, en retranchant le lieu moyen du nœud ascendant de l'orbite de l'angle $\zeta - u$, u étant la libration réelle de la Lune en longitude, et ζ un très-petit angle déterminé par l'équation

$$\operatorname{tang}\zeta = \frac{\mathrm{M}\sin[(l-h)t+k-h'] + \mathrm{L}\sin[(l'-h)t+k'-h'] + \mathrm{K}\sin[l'+h')t+k'+h']}{\mathrm{PM}\cos[(l-h)+t+k-h'] + \mathrm{L}\cos[(l'-h)t+k'-h'] + \mathrm{K}\cos[l'+h')t+k'+h']}.$$

Considérons maintenant l'expression de l'inclinaison de l'équateur lunaire sur l'écliptique fixe. Si l'on ajoute les carrés des valeurs de s et s', en observant que

$$\mathrm{N} = \mathrm{K} + \mathrm{L} \quad \text{et} \quad 2\mathrm{N}\sqrt{\frac{\mathrm{A}-\mathrm{C}}{\mathrm{B}-\mathrm{C}}} = \mathrm{K} - \mathrm{L},$$

on aura

$$\begin{aligned}\operatorname{tang}^2\theta = {} & \mathrm{P}^2 + \mathrm{M}^2 + \mathrm{L}^2 + \mathrm{K}^2 + 2\,\mathrm{MP}\cos[(l-h)t+k-h'] \pm 2\,\mathrm{ML}\cos[(l'-l)t+k'-k] \\ & - 2\,\mathrm{MK}\cos[(l'+l)t+k'+k] + 2\,\mathrm{PL}\cos[(l'-h)t+k'-h'] \\ & - 2\,\mathrm{PK}\cos[(l'+h)t+k'+h'] - 2\,\mathrm{LK}\cos 2(l'+k').\end{aligned}$$

Nous venons de voir que pour que $\varphi - ht - h'$ soit constamment un très-petit angle, les constantes M, L et K doivent être très-petites, par rapport à P; l'inclinaison θ est donc, à très-peu près, constante et égale à P. Ainsi donc, *la coïncidence des nœuds de l'équateur et de l'orbite lunaire, et l'invariabilité de l'inclinaison du premier de ces plans à l'écliptique ne sont pas deux phénomènes isolés dans le système du monde;* ils résultent l'un de l'autre par la théorie de la pesanteur, comme ils sont donnés simultanément par l'observation.

On voit, par ce qui précède et par ce que nous avons dit n° 44, que dans la théorie de la libration de la Lune, on peut regarder comme nulles, ou du moins comme insensibles, les constantes arbitraires qui dépendent de l'état initial du mouvement. Nous avons remarqué semblablement, dans le n° 13, que les observations les plus précises n'indiquaient, dans le mouvement de l'équateur terrestre, aucune inégalité dépendante de la même cause. Ce résultat doit sans doute être étendu à toutes les planètes; et l'on conçoit en effet que l'influence de l'impulsion primitive qu'ont reçue les corps célestes, sur les perturbations de leur mouvement uniforme de rotation autour de leur centre de gravité, a dû être depuis longtemps anéantie par les frottements et les résistances qu'ils éprouvent; en sorte qu'il ne subsiste plus aujourd'hui que celles qui ont une cause permanente.

51. Nous allons maintenant reprendre en détail les différents termes des expressions générales de s et s' et en déduire, comme nous l'avons fait relativement à l'expression de la libration en longitude, les données qu'elles fournissent sur la constitution du sphéroïde lunaire. Il est évident d'abord que pour que les valeurs de s et s' demeurent constamment très-petites, comme les observations l'indiquent, il faut que les coefficients M, N, M′, N′, P et P′ soient très-petits, et que, de plus, les coefficients l, l', h, etc., soient réels. Or, les quantités h, etc., sont réelles de leur nature; mais pour que les valeurs de l et l' le soient aussi, il faut que les racines de l'équation (10) soient non-seulement réelles, mais encore positives, ce qui donne les trois équations de condition suivantes :

$$(A+B-C)^2-4(A-C)A-(B-C)B>0,$$
$$(A+B-C)^2-4(A-C)A+(A-B)B>16(A-C)(B-C)AB,$$
$$(A-C)(B-C)>0.$$

Si l'une de ces conditions n'était pas satisfaite, les valeurs de s et s' renfermeraient le temps t hors des signes sinus et cosinus, et pourraient augmenter indéfiniment, ce qui est contraire aux phénomènes observés. La dernière montre que le produit $(A-C)(B-C)$ doit toujours être positif, ce qui exige que C soit le plus grand ou le plus petit des trois moments d'inertie A, B, C. Or, C est le moment d'inertie qui se rapporte au troisième axe principal de la Lune, celui autour duquel elle tourne; il est donc naturel de supposer qu'il est plus grand que les moments d'inertie A, B, qui se rapportent aux axes principaux situés dans l'équateur, puisque la Lune a dû nécessairement s'aplatir dans le sens des pôles par l'effet du mouvement de rotation. Nous avons déjà vu, n° **44**, que $B-A$ doit être une quantité positive pour que la libration de la Lune en longitude soit toujours peu considérable; C est donc le plus grand, et A le plus petit des trois moments d'inertie du sphéroïde lunaire.

52. Reprenons les équations (5), n° **46**; en remarquant que α est un fort petit angle, on peut les écrire ainsi :

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2s}{dt^2}-\frac{(A+B-C)}{B}m\frac{ds'}{dt}-\left(\frac{A-C}{B}\right)m^2s&=\frac{3L}{r'^3}\left(\frac{A-C}{B}\right)(\theta+\gamma)\sin(v-\alpha)\cos(v-\varphi),\\ \frac{d^2s'}{dt^2}-\frac{(A+B-C)}{A}m\frac{ds}{dt}-\left(\frac{B-C}{A}\right)m^2s'&=\frac{3L}{r'^3}\left(\frac{B-C}{A}\right)(\theta+\gamma)\sin(v-\alpha)\sin(v-\varphi).\end{aligned}\right\}\quad(13)$$

Les seuls termes de ces expressions qui puissent devenir sensibles sont ceux qui dépendent de l'argument moyen de la latitude, à raison de leur grandeur, et ceux qui acquièrent par l'intégration de très-petits diviseurs, circonstance qui peut les rendre considérables, quoique très-petits par eux-mêmes. Voyons ce que deviennent dans ces deux cas les quantités que nous avons désignées généralement par P et P'. Si, dans une première approximation, on néglige les termes des seconds membres des équations précédentes qui dépendent des angles θ et $\nu - \varphi$ qui sont de très-petites quantités, le second membre de la première des équations (13) se réduit à

$$3m^2\left(\frac{A-C}{B}\right)\gamma\sin(\nu-\alpha),$$

et celui de la seconde à zéro.

On a vu, n° **48**, que $\gamma\sin(\nu-\alpha)$ représente la tangente de la latitude de la Terre vue de la Lune, et α la longitude du nœud ascendant de l'orbe lunaire comptée d'une ligne fixe. Ce point a un mouvement rétrograde sur le plan de l'écliptique fixe, et en désignant par $-amt+g$ la partie moyenne de ce mouvement qu'il nous suffira de considérer ici, et substituant pour ν la longitude moyenne $mt+c$ de la Terre vue de la Lune, on aura

$$\gamma\sin(\nu-\alpha)=\gamma\sin[(1+a)mt+6].$$

Nous avons représenté, n° **48**, par $\Sigma.\mathrm{H}\sin(ht+h')$ la somme des termes périodiques du second membre de la première des équations (7); en supposant donc que $\mathrm{H}\sin(ht+h')$ est le terme de cette suite que nous considérons, on aura

$$\mathrm{H}=\gamma,\quad h=(1+a)m,$$

a étant une très-petite quantité dont on peut négliger le carré. Si l'on substitue cette valeur de h dans D (n° 48) et qu'on néglige les termes de l'ordre a^2, on pourra lui donner cette forme,

$$\mathrm{D}=-\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}-\mathrm{C}}{\mathrm{AB}}\;2\,\mathrm{C}a+3(\mathrm{A}-\mathrm{C})]\,m^4-6\,\mathrm{A}\left(\frac{\mathrm{A}-\mathrm{C}}{\mathrm{B}}\right)am^4.$$

On peut négliger le dernier terme de cette expression, à cause de la petitesse de ses deux facteurs, et en faisant (n° 49) $\mathrm{H}'=0$ dans les valeurs de P et P′, on aura, à très-peu près,

$$\mathrm{P}=\mathrm{P}'=\frac{3(\mathrm{C}-\mathrm{A})\gamma}{2\,\mathrm{C}a-3(\mathrm{C}-\mathrm{A})}.$$

Tous les termes des valeurs de s et s' qui acquièrent de petits diviseurs par l'intégration, ont été discutés avec soin, en tenant compte des principales inégalités de la Lune du premier et du second ordre, par rapport à l'inclinaison et à l'excentricité de son orbite, et l'on a reconnu que le seul d'entre eux qui puisse devenir sensible est celui qui dépend de la longitude du périgée lunaire. L'inégalité qui en résulte a une période d'environ six années; elle dépend de la seconde approximation, c'est-à-dire qu'elle est du second ordre par rapport aux quantités θ, γ et e, en désignant par e l'excentricité de l'orbe lunaire. Pour la déterminer, reprenons les équations (13); en remarquant que α, désignant la longitude du nœud ascendant de l'orbite de la Lune, comptée du nœud descendant de son équateur, est un très-petit angle dont on peut faire abstraction, on aura

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2 s}{dt^2}-\frac{(A+B-C)}{B}m\frac{ds'}{dt}-\left(\frac{A-C}{B}\right)m^2 s&=\frac{3L}{r'^3}\left(\frac{A-C}{B}\right)(\theta+\gamma)\sin\nu\cos(\nu-\varphi),\\ \frac{d^2 s'}{dt^2}-\frac{(A+B-C)}{A}m\frac{ds}{dt}-\left(\frac{B-C}{A}\right)m^2 s&=\frac{3L}{r'^3}\left(\frac{B-C}{A}\right)(\theta+\gamma)\sin\nu\sin(\nu-\varphi).\end{aligned}\right\}\quad(14)$$

Par les formules du mouvement elliptique, on a

$$\frac{r'}{a}=1-e\cos(mt+c-\omega),$$

$$\nu=mt+c-\Pi+2e\sin(mt+c-\omega),$$

e étant l'excentricité et Π la longitude du nœud ascendant de l'orbe lunaire, $mt+c$ la longitude moyenne de la Terre vue de la Lune, et ω la longitude du périgée de l'orbite qu'elle est supposée décrire, ces trois longitudes étant comptées sur le plan de l'écliptique à partir d'une ligne fixe. De ces équations, en n'ayant égard qu'aux termes qui dépendent de la première puissance de e, on tire

$$\frac{1}{r'^3}=\frac{1}{a^3}[1+3e\cos(mt+c-\omega)],$$

$$\sin\nu=\sin(mt+c-\Pi)+2e\cos(mt+c-\omega)\sin(mt+c-\omega).$$

On peut d'ailleurs, comme $\nu-\varphi$ est un très-petit arc, négliger son carré dans les seconds membres des équations (14), ou, ce qui revient au même, le substituer à la place de son sinus, et supposer son cosinus égal à l'unité. Or, l'expression de cet arc contient, d'après le n° 43, le terme $2e\sin(mt+c-\omega)$;

on aura donc

$$\cos(v-\varphi)=1,\quad \sin(v-\varphi)=2e\sin(mt+c-\omega).$$

En vertu des valeurs précédentes, le second membre de la première des équations (14), en ne considérant que les termes de l'ordre des excentricités de l'orbe lunaire, devient

$$\frac{3L}{a^3}\left(\frac{A-C}{B}\right)(\theta+\gamma)[2e\cos(mt+c-\Pi)\sin(mt+c-\omega)+3e\sin(mt+c-\Pi)],$$

ou bien, en négligeant les termes périodiques,

$$\frac{3L}{a^3}\left(\frac{A-C}{2B}\right)(\theta+\gamma)e\sin(\omega-\Pi).$$

On verra, de la même manière, que le second membre de la deuxième de ces équations se réduit à

$$\frac{3L}{a^3}\left(\frac{B-C}{A}\right)(\theta+\gamma)[2e\sin(mt+c-\Pi)\sin(mt+c-\omega)],$$

ce qui donne, en négligeant la partie périodique, le terme

$$\frac{3L}{a^3}\left(\frac{B-C}{A}\right)(\theta+\gamma)e\cos(\omega-\Pi).$$

Il faut substituer ces valeurs dans les équations (14); mais, pour ne rien laisser à désirer sur cet article, nous observerons que $\gamma\sin(v-\alpha)$ exprime, n° 52, la latitude de la Terre vue de la Lune, qui est égale et de signe contraire à la latitude de la Lune. Or, l'expression de cette dernière latitude contient, dans la partie qui est due à la force perturbatrice, une inégalité de cette forme,

$$-\tfrac{1}{2}e\gamma K\sin(\omega-\Pi),$$

laquelle produira, dans le second membre de la première des équations (14), le terme suivant :

$$\frac{3L}{a^3}\left(\frac{A-C}{2B}\right) e\gamma K \sin(\omega - \Pi),$$

qu'il faudra joindre au terme déterminé plus haut. Les équations (14), en observant qu'on a $m^2 = \frac{L}{a^3}$, deviendront ainsi :

$$\frac{d^2 s}{dt^2} - \frac{(A+B-C)}{B} m \frac{ds'}{dt} - \left(\frac{A-C}{B}\right) m^2 s = 3m^2 \left(\frac{A-C}{2B}\right) [\theta + \gamma(1+K)] e \sin(\omega - \Pi),$$

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{(A+B-C)}{B} m \frac{ds}{dt} - \left(\frac{B-C}{A}\right) m^2 s' = 3m^2 \left(\frac{B-C}{A}\right) (\theta + \gamma) e \cos(\omega - \Pi).$$

L'action du Soleil fait varier les nœuds et le périgée de l'orbite lunaire; le mouvement du périgée est direct; désignons par $bmt + f$ sa longitude moyenne comptée à partir d'une ligne fixe; le mouvement des nœuds étant rétrograde, soit comme précédemment $-amt + g$ la longitude moyenne du nœud ascendant comptée de la même ligne; ω représentant la longitude de l'orbite de la Terre vue de la Lune, est égal à la longitude de l'orbe lunaire augmentée d'une demi-circonférence; on aura donc ainsi :

$$\omega - \Pi = (a+b)mt + f - g + 180^\circ.$$

Si l'on substitue cette valeur dans les équations différentielles précédentes et que pour y satisfaire on suppose

$$s = P \sin[(a+b)mt + f - g],$$
$$s' = P' \cos[(a+b)mt + f - g],$$

a et b étant de petites quantités dont on peut négliger les carrés et les produits par $\frac{A-C}{B}$ et $\frac{B-C}{A}$, on trouvera, à très-peu près,

$$P=\frac{3\left(\frac{C-B}{A}\right)(\theta+\gamma)e}{a+b},\quad P'=\frac{3\left(\frac{C-A}{2B}\right)[\theta+\gamma(1+K)]e}{a+b},$$

On aura donc, en vertu des deux termes que nous venons de considérer, pour les valeurs complètes de s et de s',

$$s=\frac{3(C-A)\gamma}{2Ca-3(C-A)}\sin[(1+a)mt+6]$$
$$+3\left(\frac{C-B}{A}\right)\frac{\theta+\gamma}{a+b}e\sin[(a+b)mt+f-g],$$

$$s'=\frac{3(C-A)\gamma}{2Ca-3(C-A)}\cos[(1+a)mt+6]$$
$$+3\left(\frac{C-A}{2B}\right)\frac{[\theta+\gamma(1+K)]}{a+b}e\cos[(a+b)mt+f-g].$$

53. Si l'on élève au carré ces valeurs et qu'on les substitue ensuite dans l'équation $\tang\theta=\sqrt{s^2+s'^2}$, en négligeant les produits de trois dimensions, par rapport à e, θ et γ, on aura

$$\tang\theta=\frac{3(C-A)\gamma}{2Ca-3(C-A)}+3\left(\frac{C-B}{A}\right)\left(\frac{\theta+\gamma}{a+b}\right)e\sin[(1+a)mt+6]\sin[(a+b)mt+f-g]$$
$$+3\left(\frac{C-A}{2B}\right)\left(\frac{\theta+\gamma(1+K)}{a+b}\right)e\cos[(1+a)mt+6]\cos[(a+b)mt+f-g].$$

Comparons cette valeur aux observations. En ne considérant d'abord que son premier terme, on a

$$\tang\theta=\frac{3(C-A)\gamma}{2Ca-3(C-A)}.\quad(15)$$

Mayer, par des observations faites en 1749, avait trouvé l'inclinaison de l'équateur lunaire égale à $1^\circ 29'$. MM. Bouvard et Nicollet, par des observations renouvelées dans ces derniers temps et que nous avons déjà citées, ont réduit cette inclinaison à $1^\circ 28' 45''$; résultat qui ne diffère que de $15''$ de celui de Mayer, et qui démontre avec évidence l'invariabilité de l'inclinaison moyenne. Nous supposerons donc $\theta = 1^\circ 28' 45''$; on a d'ailleurs par la théorie de la Lune (tome IV, page 592),

$$\gamma = 5^\circ 8' 49'', \quad a = 0{,}004022.$$

On aura donc, au moyen de l'équation (15),

$$3\left(\frac{C-A}{C}\right) = \frac{2a+\theta}{\theta+\gamma} = 0{,}0017972.$$

Or, d'après l'ordre de grandeur des trois quantités A, B, C, on a

$$\frac{B-A}{C} < \frac{C-A}{C}.$$

La première de ces deux quantités est donc moindre que 0,0006, comme nous l'avons supposé n° 45.

Reprenons maintenant la valeur complète de $\tang\theta$; en ne considérant que les termes dont nous avons d'abord fait abstraction, et négligeant, comme nous le faisons, le carré de θ, on en tire

$$\begin{aligned}\operatorname{tang}\theta = {} & 3\left(\frac{C-B}{A}\right)\frac{\theta+\gamma}{a+b}\, c\sin[(1+a)mt+\epsilon]\sin[(a+b)mt+f-g]\\ & +3\left(\frac{C-A}{2B}\right)\frac{\theta+\gamma(1+K)}{a+b}\, c\cos[(1+a)mt+\epsilon]\cos[(a+b)mt+f-g],\end{aligned}$$

équation dans le second membre de laquelle on substituera pour θ sa valeur donnée par l'équation (15).

Les deux inégalités que cette expression renferme ont pour limites leurs coefficients, et l'on peut en calculer approximativement les valeurs. En effet, on a, par ce qui précède,

$$\theta = 0{,}2879\,\gamma, \quad \gamma = 5^\circ 8' 49'',$$

et par la théorie de la Lune (tome IV, page 589),

$$e = 0{,}05473, \qquad a = 0{,}004022,$$
$$b = 0{,}008452, \quad K = 0{,}039106.$$

En supposant donc pour un moment,

$$\frac{C-A}{B} = \frac{C-A}{C} = 0{,}00059907,$$

on aura

$$3\left(\frac{C-A}{2B}\right)\left(\frac{\frac{\theta}{\gamma}+1+K}{a+b}\right)e\gamma = 1'37'',188.$$

Ainsi, le *maximum* de la seconde inégalité de θ ne s'élèvera pas à $1'37''$, c'est-à-dire à la cinquantième partie environ de l'inclinaison moyenne.

Le *maximum* de la première inégalité ne saurait être déterminé rigoureusement, parce que la valeur de $\frac{C-B}{A}$ est encore inconnue; mais on peut en fixer la limite en observant que l'on a

$$\frac{C-B}{A} < \frac{C-A}{B};$$

d'où il suit que la première inégalité est moindre dans son *maximum* que le double de la seconde, c'est-à-dire qu'elle est au-dessous de $\frac{1}{25}$ de l'inclinaison moyenne de l'équateur lunaire à l'écliptique.

54. Les valeurs de s et de s' produisent deux inégalités semblables aux précédentes, dans la valeur de φ, et, par suite, dans l'expression de la distance du nœud descendant de l'équateur lunaire au nœud ascendant de l'orbite. En effet, en ne considérant que le premier terme de ces valeurs, on a

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{s}{s'} = \operatorname{tang}[(1+a)mt + c - g],$$

d'où l'on tire

$$\varphi = (1+a)mt + c - g.$$

On a d'ailleurs, en faisant abstraction de la libration en longitude qui est très-petite,

$$\psi = \varphi - mt - c;$$

on aura donc

$$\psi = amt - g,$$

c'est-à-dire que le nœud de l'équateur lunaire coïncide avec le nœud de l'orbite, comme nous l'avons démontré généralement n° **50**. Considérons maintenant les termes du second ordre des valeurs de s et s'; faisons, pour abréger,

$$\zeta = -\psi + amt - g,$$

en sorte que ζ exprime l'angle compris entre le nœud de l'équateur de la Lune et le nœud de son orbite compté sur le plan parallèle à l'écliptique, et dans l'ordre des signes. On aura, en mettant pour ψ sa valeur,

$$\zeta = (1+a)mt + c - g - \varphi,$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned}\operatorname{tang}\theta \sin\zeta &= \operatorname{tang}\theta \sin[(1+a)mt + c - g - \varphi)] \\ &= s' \sin[(1+a)mt+c-g] - s\cos[(1+a)mt+c-g].\end{aligned}$$

Si l'on substitue pour s et s' leurs valeurs, qu'on divise ensuite l'équation résultante par la valeur de $\operatorname{tang}\theta$ et qu'on néglige les puissances de e supérieures à la première, ce qui permet de mettre l'arc ζ à la place de son sinus, on aura

$$\begin{aligned}\zeta = 3\left(\frac{C-B}{A}\right)\frac{(\theta+\gamma)e}{(a+b)\theta}\cos[(1+a)mt+c-g]\sin[(a+b)mt+f-g] \\ -3\left(\frac{C-A}{2B}\right)\frac{[\theta+\gamma(1+K)]e}{(a+b)\theta}\sin[(1+a)mt+c-g]\cos[(a+b)mt+f-g].\end{aligned}$$

On peut calculer le coefficient de la seconde de ces deux inégalités; en effet, si l'on suppose

$$3\left(\frac{C-A}{2B}\right) = 0{,}0008986,$$

au moyen des valeurs de e, a, b, θ, γ, K, données précédemment, on trouvera $1^\circ 2' 45''$ pour la valeur de ce coefficient, d'où l'on voit qu'en vertu de la seconde des inégalités de ζ, les nœuds de l'équateur et de l'orbite lunaires peuvent s'écarter l'un de l'autre de plus d'un degré. Le *maximum* de la première inégalité ne peut encore se déterminer, parce qu'on ignore, comme nous l'avons dit, la valeur de $\frac{C-B}{A}$, mais on est assuré qu'il ne saurait surpasser le double de la seconde, c'est-à-dire environ deux degrés. Mayer avait trouvé par ses observations $\zeta = -3^\circ 36'$; MM. Bouvard et Nicollet ont conclu des leurs $\zeta = 1^\circ 48'$. On peut attribuer la différence des deux résultats, en partie aux erreurs des observations, et en partie aux variations que subit la quantité ζ en vertu des inégalités qu'elle renferme.

55. M. Nicollet, d'après les derniers calculs qu'il a faits sur les observations de Bouvard, a trouvé l'inclinaison moyenne de l'équateur lunaire sur l'écliptique de $1^\circ 28' 42''$, valeur un peu moins grande que celle que nous avions d'abord adoptée; on en a déduit

$$\frac{3(C-A)}{B} = 0{,}000178.$$

Au moyen de cette valeur et de celle de $\frac{B-A}{C}$ rapportée nº 45, on conclut, à très-peu près,

$$\frac{3(C-B)}{A} = 0{,}00012.$$

Si à l'aide de ces valeurs et de celles que nous avons rapportées plus haut, pour les quantités a, b, θ, e, etc., on réduit en nombres les coefficients des inégalités des expressions précédentes de θ et de ζ, en faisant, pour abréger,

$$D = (1+a)mt + c - g, \quad E = (a+b)mt + f - g,$$

on trouve

$$\theta = 1^\circ 28' 42'' + 13'' \sin D \sin E + 97'' \cos D \cos E,$$
$$\zeta = 447'' \cos D \sin E - 3721'' \sin D \cos E.$$

Dans ces formules, θ représente l'inclinaison vraie de l'équateur lunaire sur l'écliptique, φ la distance du nœud descendant de l'équateur de la Lune au nœud ascendant de son orbite, D est la distance moyenne de la Lune à son nœud ascendant, et E celle de son périgée à ce même nœud.

56. Nous avons dit, n° **42**, que la position des pôles n'était pas stable à la surface de la Lune; il est aisé de déterminer maintenant les variations qu'ils éprouvent.

En effet, si, à l'aide des données précédentes, on convertit en nombres les coefficients des expressions de s et de s', n° **52**, on trouve

$$s = (1^\circ 28' 42'') \sin D + 13'' \sin E,$$

$$s' = (1^\circ 28' 42'') \cos D + 97'' \cos E,$$

d'où, en différentiant et observant que l'on a

$$\frac{dD}{mdt} = 1 + a = 1,00402, \quad \frac{dE}{mdt} = a + b = 0,01247,$$

on tire

$$\frac{ds}{mdt} = (1^\circ 28' 63'') \cos D + 0'',3 \cos E,$$

$$\frac{ds'}{mdt} = -(1^\circ 28' 63'') \sin D - 1'' \sin E.$$

Les équations (6) donnent

$$s + \frac{ds'}{mdt} = -\frac{p}{m}, \quad s' - \frac{ds}{mdt} = -\frac{q}{m};$$

on aura donc

$$\frac{p}{m} = 21'' \sin D - 12'' \sin E,$$

$$\frac{q}{m} = 21'' \cos D - 97'' \cos E.$$

Si l'on nomme δ l'angle que forme l'axe instantané de rotation de la Lune avec l'axe auquel se rapporte le plus grand moment d'inertie C, $\frac{\sqrt{p^2+q^2}}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$ exprimera généralement, n° 1, le sinus de cet angle; on aura donc, à très-peu près,

$$\delta = \frac{\sqrt{p^2+q^2}}{m}.$$

En substituant pour p et q leurs valeurs, on verra que la plus grande valeur de l'angle δ serait de $2'36''$, en sorte que les pôles de rotation de la Lune peuvent faire autour des pôles de son équateur des excursions dont l'étendue, dans son *maximum*, est de $2'36''$.

57. Nous avons rapporté jusqu'ici les mouvements de l'équateur lunaire à une écliptique fixe; il resterait, pour compléter la théorie de la libration de la Lune, à considérer les mouvements de ce plan relativement à l'écliptique mobile. Mais il est aisé de se convaincre, par une analyse très-simple, que les équations qui déterminent la position de l'équateur lunaire sont absolument de même forme, soit qu'on la rapporte à l'écliptique fixe ou à l'écliptique mobile, pourvu qu'on rapporte au même plan la position de la Lune dans son orbite; d'où l'on peut conclure que les lois des phénomènes qui dépendent des mouvements de son équateur, sont les mêmes dans les deux cas. Pour se rendre raison de ce résultat, il faut concevoir que l'attraction de la Terre sur le sphéroïde lunaire, ramenant sans cesse l'équateur et l'orbite de la Lune au même degré d'inclinaison sur l'écliptique vraie, la constance de l'inclinaison mutuelle de ces deux plans, et la coïncidence de leurs nœuds, n'éprouvent aucune altération des déplacements séculaires de l'écliptique. Enfin, nous n'avons pas tenu compte, dans la théorie précédente, de l'action du Soleil sur le sphéroïde lunaire, parce que toutes les recherches qu'on a faites à cet égard, ont prouvé que cette action n'a aucune influence sensible sur les mouvements de la Lune autour de son centre de gravité.

LIVRE CINQUIÈME.

DE LA FIGURE DES CORPS CÉLESTES.

Pour déterminer, par la théorie, la figure des corps célestes, les géomètres regardent chacun de ces corps comme une masse originairement fluide, douée d'un mouvement de rotation autour de son centre de gravité, et dont toutes les parties s'attirent réciproquement au carré de la distance; la question consiste alors à déterminer la figure que doit prendre une pareille masse lorsqu'elle parvient à l'état d'équilibre. Pour la résoudre dans toute sa généralité, il faudrait connaître *à priori* les attractions que les différentes parties du fluide exercent les unes sur les autres. Ces attractions dépendent de la densité des molécules qui le composent, et de leur arrangement mutuel, c'est-à-dire de la forme même du corps. On est donc réduit à faire une hypothèse arbitraire sur la figure primitive des corps célestes; on détermine, d'après cette hypothèse, les actions que leurs différentes parties supposées fluides exercent les unes sur les autres, et l'équation de l'équilibre, qui ne contient plus rien d'indéterminé, fait connaître ensuite la forme de ces corps, et la loi de la pesanteur à leur surface, en supposant toutefois que leurs molécules ont conservé, en se solidifiant, la même disposition qu'elles avaient à l'état fluide.

Nous nous occuperons donc d'abord, dans ce livre, des attractions des sphéroïdes, et spécialement de ceux dont la figure est supposée différer très-peu de la sphère, parce que cette hypothèse est celle qui s'applique avec le plus de vraisemblance aux différents corps du système du monde. Nous déterminerons ensuite, par les lois de l'Hydrostatique, la figure des corps célestes, et nous comparerons enfin, relativement à la Terre et à Jupiter, les résultats de la théorie et de l'observation.

La partie de la Mécanique céleste que nous allons aborder, n'a point encore atteint le haut degré de perfection auquel sont parvenues celles dont nous nous sommes occupé dans les livres précédents. C'est qu'ici le géomètre a été obligé de tout emprunter à son propre génie, l'expérience et l'observation ne lui ont prêté qu'un faible appui. Pour traiter ces questions délicates et d'une nature particulière, il lui a fallu créer une branche d'Analyse nouvelle; et si les hypothèses arbitraires sur lesquelles repose cette importante partie de la théorie analytique du système du monde, empêchent les résultats qu'elle produit de porter dans les esprits toute la conviction désirable, on peut du moins regarder ces résultats, par leur étendue et leur simplicité, comme l'une des plus belles conséquences de l'application de l'Analyse aux grands problèmes de la Physique céleste.

CHAPITRE PREMIER.

FORMULES GÉNÉRALES POUR DÉTERMINER LES ATTRACTIONS DES SPHÉROÏDES DE FIGURE QUELCONQUE.

1. Soit dm l'un quelconque des éléments du sphéroïde; nommons f sa distance au point attiré; $\frac{dm}{f^2}$ exprimera l'action qu'il exerce sur ce point, et en multipliant cette expression par les cosinus des angles que forme la droite f avec chacun des axes coordonnés, on aura les trois composantes de cette force, respectivement parallèles à ces axes. Soient x, y, z, les coordonnées de l'élément dm, rapportées à trois axes rectangulaires passant par le centre du sphéroïde, et a, b, c les coordonnées du point attiré relatives aux mêmes axes, on aura

$$f=\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2}.$$

On peut regarder l'élément dm comme un petit parallélipipède rectangulaire dont les dimensions sont dx, dy, dz; en nommant donc ρ sa densité, ρ étant une fonction des coordonnées x, y, z variable suivant une loi quelconque, on aura

$$dm=\rho\, dx\, dy\, dz.$$

Cela posé, désignons par A, B, C les attractions exercées par le sphéroïde parallèlement aux axes des x, des y et des z, et dirigées vers l'origine des coordonnées, on aura

$$\left.\begin{aligned}
A &= \iiint \frac{\rho(a-x)\,dx\,dy\,dz}{[(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2]^{\frac{3}{2}}},\\
B &= \iiint \frac{\rho(b-y)\,dx\,dy\,dz}{[(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2]^{\frac{3}{2}}},\\
C &= \iiint \frac{\rho(c-z)\,dx\,dy\,dz}{[(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2]^{\frac{3}{2}}};
\end{aligned}\right\} \text{(A)}$$

les triples intégrales se rapportant aux variables x, y, z, qui fixent la position de dm, et devant s'étendre à la masse entière du sphéroïde.

On voit, par ces formules, que si l'on désigne par V la fonction qui exprime la somme des éléments du sphéroïde, divisés respectivement par leur distance au point attiré, en sorte qu'on ait

$$V = \iiint \frac{\rho\,dx\,dy\,dz}{[(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2]^{\frac{1}{2}}},$$

les intégrales devant être étendues à la masse entière du sphéroïde, la fonction V aura cette propriété remarquable, que ses trois différences partielles, prises par rapport aux coordonnées a, b, c du point attiré, donneront immédiatement les valeurs de A, B, C. En effet, les intégrations n'étant relatives qu'aux coordonnées x, y, z, on a évidemment

$$A = -\frac{dV}{da}, \quad B = -\frac{dV}{db}, \quad C = -\frac{dV}{dc}.$$

Si la valeur de V était connue, on aurait donc, par une simple différentiation, celles de A, B, C. Généralement, pour avoir l'attraction qu'exerce le sphéroïde sur le point attiré parallèlement à une droite quelconque, il suffira de regarder V comme fonction de trois coordonnées rectangulaires dont l'une soit parallèle à cette droite; le coefficient de la différentielle de V, relative à cette coordonnée et prise avec un signe contraire, exprimera l'action qu'exerce le sphéroïde parallèlement à la droite donnée, et dirigée vers l'origine des coordonnées.

2. La fonction V jouit encore d'une propriété importante, c'est que si on la différentie une seconde fois, par rapport aux coordonnées a, b, c et qu'on ajoute les coefficients de ses trois différences partielles, cette somme sera constamment égale à zéro. En effet, en représentant, comme précédemment, par f la fonction $[(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2]^{\frac{1}{2}}$, on aura

$$V=\int\int\int\frac{\rho\,dx\,dy\,dz}{f},$$

l'intégration devant s'étendre à la masse entière du sphéroïde. Les signes $\int$ n'étant relatifs qu'aux variables x, y, z, il est évident qu'on aura

$$\frac{d^2V}{da^2}+\frac{d^2V}{db^2}+\frac{d^2V}{dc^2}=\int\int\int\rho\,dx\,dy\,dz\left(\frac{d^2\frac{1}{f}}{da^2}+\frac{d^2\frac{1}{f}}{db^2}+\frac{d^2\frac{1}{f}}{dc^2}\right).$$

Or, en différentiant deux fois la valeur de $\frac{1}{f}$, on trouve

$$\frac{d^2\frac{1}{f}}{da^2} = \frac{2(x-a)^2-(y-b)^2-(z-c)^2}{f^5},$$

$$\frac{d^2\frac{1}{f}}{db^2} = \frac{2(y-b)^2-(x-a)^2-(z-c)^2}{f^5},$$

$$\frac{d^2\frac{1}{f}}{dc^2} = \frac{2(z-c)^2-(x-a)^2-(y-b)^2}{f^5},$$

d'où l'on tire

$$\frac{d^2\frac{1}{f}}{da^2} + \frac{d^2\frac{1}{f}}{db^2} + \frac{d^2\frac{1}{f}}{dc^2} = 0;$$

on aura donc, par conséquent,

$$\frac{d^2V}{da^2} + \frac{d^2V}{db^2} + \frac{d^2V}{dc^2} = 0. \quad (1)$$

Cette équation remarquable a été découverte par Laplace, qui en a fait la base de sa belle théorie de la figure des corps célestes. Elle a lieu rigoureusement toutes les fois que le point attiré est situé au dehors du sphéroïde ou dans l'intérieur d'un sphéroïde creux; mais elle cesse de subsister lorsque le point attiré fait partie de la masse du sphéroïde, parce que, dans ce cas, la distance f devenant nulle entre les limites de l'intégrale $\int \frac{dm}{f}$, la somme des trois différences partielles de $\frac{1}{f}$ se réduit à la forme de $\frac{0}{0}$, et elle n'est plus nulle par conséquent pour toutes les valeurs de x, y, z. M. Poisson est le premier qui ait remarqué ce cas d'exception de l'équation (1).

3. Pour déterminer dans ce cas la valeur de la fonction $\frac{d^2V}{da^2}+\frac{d^2V}{db^2}+\frac{d^2V}{dc^2}$, supposons une sphère, décrite de l'origine des coordonnées et d'un rayon quelconque, qui embrasse le point attiré et soit comprise tout entière dans le sphéroïde. La fonction V se partagera alors en deux parties U et U', la première relative à la sphère, la seconde à l'excès du sphéroïde sur la sphère. Le point attiré se trouvant situé dans l'intérieur de ce sphéroïde, la fonction $\frac{d^2U'}{da^2}+\frac{d^2U'}{db^2}+\frac{d^2U'}{dc^2}$ sera nulle, d'après ce qui précède; on aura donc simplement

$$\frac{d^2V}{da^2}+\frac{d^2V}{db^2}+\frac{d^2V}{dc^2}=\frac{d^2U}{da^2}+\frac{d^2U}{db^2}+\frac{d^2U}{dc^2}.$$

Or, les trois quantités $\frac{dU}{da}$, $\frac{dU}{db}$, $\frac{dU}{dc}$, prises avec un signe contraire, représentent les attractions qu'exerce la sphère sur le point dont les coordonnées sont a, b, c, et qui est intérieur à sa surface; on trouve, dans ce cas, par l'intégration directe, n° **19**, livre I,

$$-\frac{dU}{da}=\frac{4\pi\rho a}{3},\quad -\frac{dU}{db}=\frac{4\pi\rho b}{3},\quad -\frac{dU}{dc}=\frac{4\pi\rho c}{3};$$

π désignant la demi-circonférence dont le rayon est l'unité, et ρ la densité du sphéroïde. En différentiant les valeurs précédentes, on trouve que la fonction

$\frac{d^2U}{da^2}+\frac{d^2U}{db^2}+\frac{d^2U}{dc^2}$ est égale à $-4\pi\rho$; on aura donc

$$\frac{d^2V}{da^2}+\frac{d^2V}{db^2}+\frac{d^2V}{dc^2}=-4\pi\rho. \quad (2)$$

Nous avons supposé dans ce qui précède le sphéroïde homogène; mais cette équation subsisterait encore pour les sphéroïdes hétérogènes, composés de couches très-minces superposées les unes aux autres, pourvu qu'on y substitue pour ρ la valeur de la densité qui convient à la portion du sphéroïde où se trouve le point attiré. En effet, on peut alors regarder le sphéroïde comme composé de trois parties, la couche qui comprend le point attiré, et les couches qui l'enveloppent ou qui sont au-dessous de lui. Ces deux dernières parties du sphéroïde n'influent pas sur le second membre de l'équation (2); cette équation subsiste donc, puisque la partie restante forme un sphéroïde homogène dont ρ représente la densité. Le même résultat peut aisément s'étendre à un sphéroïde dans lequel la densité varierait d'une manière continue. Concluons donc que les équations (1) et (2) ont lieu pour des sphéroïdes de forme et de densité quelconques: la première, toutes les fois que le point attiré ne fait pas partie de la masse du corps; la seconde, dans le cas contraire.

4. On peut, par une simple transformation des coordonnées a, b, c, donner à ces équations d'autres formes plus commodes dans diverses circonstances. Supposons, par exemple, que l'on désigne par r le rayon mené de l'origine des coordonnées au point attiré, par θ l'angle que forme ce rayon avec l'un des

axes coordonnés, avec l'axe des x par exemple, et par ω l'angle que forme la projection de r sur le plan des y, z avec l'axe des y; on aura

$$a = r\cos\theta, \quad b = r\sin\theta\cos\omega, \quad c = r\sin\theta\sin\omega. \quad (3)$$

Nommons r', θ', ω', ce que deviennent r, θ, ω, par rapport à l'élément dm; on aura de même

$$x = r'\cos\theta', \quad y = r'\sin\theta'\cos\omega', \quad z = r'\sin\theta'\sin\omega';$$

de là on tire

$$f = \sqrt{r^2 - 2rr'[\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\omega - \omega')] + r'^2}.$$

On peut d'ailleurs considérer dm comme un petit parallélipipède rectangulaire, dont les trois dimensions sont dr', $r'd\theta'$, $r'\sin\theta' d\omega'$, et dont la densité est ρ; l'expression de V deviendra donc ainsi :

$$V = \iiint \frac{\rho r'^2 dr' \sin\theta' d\theta' d\omega'}{\sqrt{r^2 - 2rr'[\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\omega - \omega')] + r'^2}},$$

l'intégrale relative à r' devant être prise depuis $r' = 0$ jusqu'à la valeur de r' à la surface du sphéroïde; l'intégrale relative à θ, depuis $\theta = 0$ jusqu'à $\theta = \pi$, et l'intégrale relative à ω, depuis $\omega = 0$ jusqu'à $\omega = 2\pi$; en représentant toujours par π la demi-circonférence dont le rayon est l'unité.

Si l'on désigne par A, B, C les trois composantes de l'action du sphéroïde sur le point attiré : la première dirigée suivant le rayon r; l'autre, suivant une perpendiculaire à ce rayon, menée dans le plan de θ; la troisième, suivant une perpendiculaire à ce plan; d'après ce que nous avons dit n° 1, on aura

$$A = -\frac{dV}{dr}, \quad B = -\frac{dV}{rd\theta}, \quad C = -\frac{dV}{r\sin\theta\, d\omega}.$$

Selon que chacune de ces forces sera positive ou négative, elle tendra à diminuer ou à augmenter les variables qui lui correspondent.

Ces diverses formules sont de la plus grande utilité dans la théorie des attractions des sphéroïdes, où l'on est sans cesse obligé d'employer les coordonnées polaires pour rendre les intégrations praticables.

Cela posé, des équations (3) on tire

$$r=\sqrt{a^2+b^2+c^2},\quad \cos\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\quad \operatorname{tang}\omega=\frac{c}{b}\ (4)$$

On transformera, au moyen de ces valeurs, les différences partielles $\frac{d^2V}{da^2}$, $\frac{d^2V}{db^2}$, $\frac{d^2V}{dc^2}$, en différences partielles relatives aux variables r, θ, ω, et on les substituera ensuite dans l'équation (1). Pour faciliter cette opération, observons que si l'on regarde V comme fonction des variables a, b, c, et ensuite comme fonction des variables r, θ et ω, on aura

$$\frac{dV}{da}da+\frac{dV}{db}db+\frac{dV}{dc}dc=\frac{dV}{dr}dr+\frac{dV}{d\theta}d\theta+\frac{dV}{d\omega}d\omega;$$

équation qui doit devenir identique, en y substituant pour dr, $d\theta$, $d\omega$, leurs valeurs tirées des équations (4). Si, après avoir opéré cette substitution, on compare les coefficients de da, db, dc, dans les deux membres, on trouvera

$$\frac{dV}{da}=\cos\theta\frac{dV}{dr}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{dV}{d\theta},$$

$$\frac{dV}{db}=\sin\theta\cos\omega\frac{dV}{dr}+\frac{\cos\theta\cos\omega}{r}\frac{dV}{d\theta}-\frac{\sin\omega}{r\sin\theta}\frac{dV}{d\omega},$$

$$\frac{dV}{dc}=\sin\theta\sin\omega\frac{dV}{dr}+\frac{\cos\theta\sin\omega}{r}\frac{dV}{d\theta}+\frac{\cos\omega}{r\sin\theta}\frac{dV}{d\omega}.$$

On différentiera de nouveau ces expressions par les mêmes procédés, et l'on aura ainsi les valeurs de $\frac{d^2V}{da^2}$, $\frac{d^2V}{db^2}$, $\frac{d^2V}{dc^2}$ en différences partielles de V, prises par rapport aux variables r, θ, ω; ensuite en multipliant par r^2 l'équation (1), on la transformera aisément dans la suivante :

$$\frac{d^2V}{d\theta^2}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{dV}{d\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{d^2V}{d\omega^2}+r\frac{d^2rV}{dr^2}=0 \text{ ou } =-4\pi\rho r^2, \quad (5)$$

selon que le point attiré fait ou non partie du sphéroïde attirant.

L'équation précédente résulte d'ailleurs directement de la différentiation de la valeur de V exprimée en fonction des variables r, θ, ω; elle est souvent employée dans la théorie des attractions des sphéroïdes.

5. Pour en montrer l'usage dans un cas très-simple, supposons que le corps attirant soit une sphère, ou plus généralement un sphéroïde composé de couches concentriques, d'une densité variable suivant une loi quelconque du centre à la surface, en sorte que la densité ρ dépende uniquement de la distance de l'élément dm au centre de la couche. Plaçons l'origine des coordonnées à ce centre, et soit r sa distance au point attiré, il est clair que V sera une fonction de r indépendante des angles θ et ω; l'équation (5) se réduira donc à la suivante :

$$\frac{d^2rV}{dr^2}=\frac{rd^2V}{dr^2}+\frac{2\,dV}{dr}=0 \quad \text{ou} \quad =-4\pi\rho r.$$

Considérons d'abord le cas où le point attiré ne fait pas partie du corps attirant. En multipliant par r et en intégrant l'équation précédente, on aura

$$-\frac{dV}{dr}=\frac{A}{r^2},$$

A étant une constante arbitraire.

Pour la déterminer, observons que $-\frac{dV}{dr}$ exprime, n° 1, l'attraction de la couche sphérique sur le point attiré parallèlement au rayon r, c'est-à-dire l'action totale de cette couche. Si l'on suppose le point attiré extérieur au sphéroïde et situé à une distance infinie de son centre, l'attraction de la couche sur ce point sera évidemment la même que si toute sa masse était réunie à son centre ; en nommant donc M la masse de la couche, on aura dans ce cas $A = M$, d'où l'on conclura généralement

$$-\frac{dV}{dr}=\frac{M}{r^2},$$

c'est-à-dire que la couche sphérique exerce sur les points extérieurs à sa surface la même action que si toute la masse était réunie à son centre.

Si le point attiré est situé dans l'intérieur de la couche, l'attraction doit être nulle en même temps que r, c'est-à-dire lorsque le point attiré se trouve au centre même du sphéroïde ; on a donc dans ce cas $A = 0$, et l'on en conclura généralement $-\frac{dV}{dr} = 0$, quel que soit r. D'où il suit qu'un sphéroïde composé de couches sphériques homogènes et concentriques, n'exerce aucune action sur les points intérieurs à sa surface.

Supposons maintenant le point attiré compris dans la masse de la sphère dont il subit l'action; l'équation (5) devient alors

$$\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dV}{dr} = -4\pi\rho.$$

Si l'on multiplie les deux membres par $r^2 dr$, on aura

$$d.r^2\frac{dV}{dr} = -4\pi\rho r^2 dr;$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$-r^2\frac{dV}{dr} = 4\pi\int\rho r^2 dr + \mathrm{B},$$

B étant une constante arbitraire.

Pour la déterminer, observons que s'il s'agit de connaître l'attraction d'une couche sphérique sur un point de sa masse, les intégrales doivent être prises depuis la valeur de r qui répond à la surface intérieure de la couche, jusqu'à sa valeur relative au point attiré. Or, à la première limite, l'action de la couche est nulle; on a donc généralement $\mathrm{B} = 0$, et par conséquent

$$-r^2\frac{dV}{dr} = 4\pi\int\rho r^2 dr. \quad (6)$$

Le second membre de cette équation, les intégrales étant prises dans les limites précédentes, exprime la masse de la couche sphérique qui agit sur le point attiré. En désignant donc par M′ la portion de la couche sphérique comprise entre la surface intérieure et la surface sphérique passant par le point attiré, on aura

$$-\frac{dV}{dr} = \frac{\mathrm{M}'}{r^2},$$

valeur qui s'accorde avec celle qui se rapporte aux points extérieurs, lorsqu'on suppose le point attiré situé à la surface de la couche.

Si le sphéroïde était homogène, l'équation (6) donnerait, en l'intégrant,

$$V = -\frac{2\pi}{3}r^2 + C,$$

C étant une constante arbitraire.

Supposons le point attiré placé dans l'intérieur de la sphère dont le rayon est a; il faudra, pour étendre l'intégration à toute la masse du corps attirant, prendre les intégrales précédentes depuis $r = 0$ jusqu'à $r = a$. Or, à cette dernière limite, la valeur de V est égale à la masse de la sphère divisée par la distance du point attiré à son centre, c'est-à-dire à $\frac{4\pi}{3}a^2$; on aura par conséquent alors

$$\frac{4\pi}{3}a^2 = -\frac{2\pi}{3}a^2 + C.$$

En déterminant donc, au moyen de cette équation, la valeur de C, on aura, relativement à la sphère entière et à un point placé dans son intérieur,

$$V = 2\pi a^2 - \frac{2\pi}{3}r^2.$$

Ces résultats sont conformes à ceux que nous avons trouvés par une autre voie, dans le n° **19** du livre I.

CHAPITRE II.

ATTRACTIONS DES SPHÉROÏDES TERMINÉS PAR DES SURFACES DU SECOND ORDRE.

6. Les formules que nous avons développées dans le chapitre précédent, sont générales, et s'appliquent à toute espèce de sphéroïdes, quelles que soient leur nature et leur figure. Nous allons, dans celui-ci, nous occuper en particulier de la détermination des attractions des sphéroïdes terminés par des surfaces elliptiques.

Supposons, pour simplifier, que le corps attirant soit homogène, et que sa densité soit égale à l'unité; on aura $\rho = 1$, et les formules (A), n° **1**, deviendront

$$\left.\begin{aligned} A &= \iiint \frac{(a-x)\,dx\,dy\,dz}{[(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2]^{\frac{3}{2}}}, \\ B &= \iiint \frac{(b-y)\,dx\,dy\,dz}{[(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2]^{\frac{3}{2}}}, \\ C &= \iiint \frac{(c-z)\,dx\,dy\,dz}{[(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2]^{\frac{3}{2}}}; \end{aligned}\right\} (a)$$

les intégrales $\int$ se rapportant aux trois variables x, y, z, et devant s'étendre à la masse entière du sphéroïde.

Mais l'intégration des expressions précédentes est absolument impossible sous cette forme; tout ce qu'on peut faire, c'est d'en éliminer l'une des variables, et de les ramener ainsi à des intégrales doubles. En effet, si l'on intègre la première par rapport à x, qu'on désigne par $\pm x_1$ la double valeur de x, tirée de l'équation de la surface qui termine le sphéroïde, et que, pour abréger, on fasse

$$\rho = \sqrt{(a - x_1)^2 + (b - y)^2 + (c - z)^2},$$
$$\rho' = \sqrt{(a + x_1)^2 + (b - y)^2 + (c - z)^2},$$

on aura

$$A = \int\int dy\, dz \left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho}\right). \quad (b)$$

En intégrant la seconde des formules (a) par rapport à y, et la troisième par rapport à z, on trouverait, pour B et C, des expressions semblables. Mais on tenterait en vain de pousser plus loin les intégrations, on serait arrêté par des obstacles insurmontables, même dans le cas le plus simple, celui d'un sphéroïde terminé par une surface sphérique.

7. Pour éviter cette difficulté, il faut transformer les coordonnées x, y, z en d'autres variables qui facilitent l'intégration des formules (a), ou permettent du moins de la ramener à de simples quadratures. Ce qu'on a imaginé de plus commode à cet égard, c'est de transporter au point attiré l'origine des coordonnées, et de prendre pour les variables qui déterminent la position de dm, le rayon mené du point attiré à cet élément, l'angle que fait ce rayon avec l'un des axes coordonnés, et l'angle que forme sa projection sur le plan perpendiculaire à cet axe avec l'un des deux autres axes compris dans ce plan. Soient donc r ce rayon, θ l'angle qu'il forme avec l'axe des x, et ϖ l'angle compris entre sa projection sur le plan des y, z et l'axe des y, on aura

$$x = a - r\cos\theta,\quad y = b - r\sin\theta\cos\varpi,\quad z = c - r\sin\theta\sin\varpi.$$

L'élément dm peut être considéré comme un petit parallélipipède rectangulaire, dont les trois dimensions sont dr, $rd\theta$, et $r\sin\theta\, d\omega$; on aura donc $dm = r^2\sin\theta\, drd\theta\, d\varpi$, et les trois quantités A, B, C deviendront, par cette transformation,

$$\begin{aligned} A &= \int\!\!\int\!\!\int dr\, d\theta\, d\omega \sin\theta\cos\theta, \\ B &= \int\!\!\int\!\!\int dr\, d\theta\, d\omega \sin^2\theta\cos\varpi, \\ C &= \int\!\!\int\!\!\int dr\, d\theta\, d\omega \sin^2\theta\sin\varpi. \end{aligned}$$

L'intégration de ces formules relativement à la variable r s'exécute sans peine; mais, pour étendre l'intégrale à la masse entière du corps attirant, il faut distinguer deux cas, selon que le point attiré est situé dans l'intérieur ou au dehors de ce corps. Dans le premier cas, la droite qui passe par le point attiré, et qui se termine à la surface du sphéroïde, est divisée en deux parties par ce point : en nommant donc r et r' ces parties, elles devront être prises pour limites de l'intégrale définie, qui sera égale à la somme des deux intégrales particulières qui leur correspondent. On aura donc ainsi :

$$\left.\begin{aligned} A &= \int\!\!\int (r + r')\, d\theta\, d\varpi \sin\theta\cos\theta, \\ B &= \int\!\!\int (r + r')\, d\theta\, d\varpi \sin^2\theta\cos\varpi, \\ C &= \int\!\!\int (r + r')\, d\theta\, d\varpi \sin^2\theta\sin\varpi. \end{aligned}\right\} \quad (c)$$

On remplacera dans ces expressions r et r' par leurs valeurs tirées de l'équation du sphéroïde, et l'on intégrera ensuite successivement par rapport à θ et à ω, depuis θ et ω égaux à zéro, jusqu'à θ et ϖ égaux à deux angles droits.

Dans le second cas, le rayon qui part du point attiré et qui traverse le sphéroïde rencontre sa surface en deux points. Soient r ce rayon à son entrée dans le sphéroïde, et r' ce même rayon lorsqu'il en sort, l'intégrale définie sera égale à la différence des deux intégrales particulieres correspondantes à ces limites; on aura par conséquent, dans ce cas,

$$\left.\begin{aligned} A &= \int\!\!\int (r'-r)\,d\theta\,d\varpi \sin\theta\cos\theta, \\ B &= \int\!\!\int (r'-r)\,d\theta\,d\varpi \sin^2\theta\cos\varpi, \\ C &= \int\!\!\int (r'-r)\,d\theta\,d\varpi \sin^2\theta\sin\varpi. \end{aligned}\right\} (d)$$

On substituera pour r et r' leurs valeurs en fonction de θ et ω, et l'on prendra pour limites des intégrales relatives à ces angles leurs valeurs correspondantes aux points où l'on a $r'-r=0$, c'est-à-dire où le rayon r est tangent à la surface du sphéroïde.

Supposons maintenant que h, h', h'' soient les trois demi-axes respectivement parallèles aux axes des x, des y et des z de l'ellipsoïde dont nous considérons les attractions. L'équation de sa surface, rapportée à son centre, sera

$$\frac{x^2}{h^2}+\frac{y^2}{h'^2}+\frac{z^2}{h''^2}=1, \quad (m)$$

et sa masse sera égale à $\frac{4\pi}{3}hh'h''$, en nommant π le rapport de la circonférence au diamètre.

Transportons l'origine des coordonnées au point attiré, et introduisons dans l'équation (m) les variables

r, θ, ϖ; en substituant pour x, y, z leurs valeurs données dans le numéro précédent, on aura

$$r^2\left(\frac{\cos^2\theta}{h^2}+\frac{\sin^2\theta\cos^2\varpi}{h'^2}+\frac{\sin^2\theta\sin^2\varpi}{h''^2}\right)$$
$$-2r\left(\frac{a\cos\theta}{h^2}+\frac{b\sin\theta\cos\varpi}{h'^2}+\frac{c\sin\theta\sin\omega}{h''^2}\right)=1-\frac{a^2}{h^2}-\frac{b^2}{h'^2}-\frac{c^2}{h''^2}.$$

Si l'on résout cette équation par rapport à r, les deux valeurs qui en résulteront seront celles qu'il faudra substituer pour r et r' dans les formules (c) et (d): or, si l'on fait, pour abréger,

$$K=\frac{\cos^2\theta}{h^2}+\frac{\sin^2\theta\cos^2\varpi}{h'^2}+\frac{\sin^2\theta\sin^2\varpi}{h''^2},$$
$$F=\frac{a\cos\theta}{h^2}+\frac{b\sin\theta\cos\varpi}{h'^2}+\frac{c\sin\theta\sin\varpi}{h''^2},$$
$$G=F^2+K\left(1-\frac{a^2}{h^2}-\frac{b^2}{h'^2}-\frac{c^2}{h''^2}\right),$$

on trouvera, pour les deux racines de l'équation en r,

$$r=\frac{F-\sqrt{G}}{K},\quad r'=\frac{F+\sqrt{G}}{K};$$

d'où l'on tire, par conséquent,

$$r'+r=\frac{2F}{K},\quad r'-r=\frac{2\sqrt{G}}{K}:$$

les formules relatives aux points intérieurs au sphéroïde seront donc

$$\left.\begin{aligned}A&=2\int\!\!\int\frac{d\theta\, d\varpi\sin\theta\cos\theta\, F}{K},\\ B&=2\int\!\!\int\frac{d\theta\, d\varpi\sin^2\theta\cos\varpi\, F}{K},\\ C&=2\int\!\!\int\frac{d\theta\, d\varpi\sin^2\theta\sin\varpi\, F}{K},\end{aligned}\right\}\ (e)$$

et l'on aura, relativement aux points extérieurs,

$$\left.\begin{aligned}
A &= 2\int\!\!\int \frac{d\theta\, d\varpi \sin\theta \cos\theta \sqrt{G}}{K},\\
B &= 2\int\!\!\int \frac{d\theta\, d\varpi \sin^2\theta \cos\varpi \sqrt{G}}{K},\\
C &= 2\int\!\!\int \frac{d\theta\, d\varpi \sin^2\theta \sin\varpi \sqrt{G}}{K}.
\end{aligned}\right\} (f)$$

Les premières formules sont les plus simples, et s'intègrent sans peine par rapport à la variable ϖ; les secondes, au contraire, présentent de grandes difficultés à cause du radical qu'elles renferment, et qui rend, sous cette forme, l'intégration impossible par toutes les méthodes connues. Heureusement, si l'imperfection de l'Analyse n'a pas permis jusqu'ici de vaincre cette difficulté, on est parvenu à l'éluder, et à faire dépendre les attractions des ellipsoïdes relatives aux points extérieurs, de celles qu'ils exercent sur les points intérieurs ou sur les points de leur surface. Occupons-nous donc exclusivement des formules qui se rapportent au cas où le point attiré est placé dans l'intérieur du sphéroïde: nous supposerons ensuite qu'il est situé en dehors de sa surface, et nous verrons qu'il est toujours possible de ramener ce second cas au premier.

8. Si, dans la première des formules (e), on substitue pour F sa valeur, on aura

$$A = \frac{2a}{k^2}\int\!\!\int \frac{d\theta\, d\omega \sin\theta \cos^2\theta}{K} + \frac{2b}{k'^2}\int\!\!\int \frac{d\theta\, d\omega \sin^2\theta \cos\theta \cos\omega}{K}$$
$$+ \frac{2c}{k''^2}\int\!\!\int \frac{d\theta\, d\omega \sin^2\theta \cos\theta \sin\omega}{K}.$$

Cette expression se simplifie en observant que l'intégrale relative à θ devant être prise depuis $\theta = 0$ jusqu'à $\theta = 180^\circ$, si l'on représente par P une fonction rationnelle quelconque de $\sin\theta$ et $\cos^2\theta$, on aura généralement entre ces limites $\int P\cos\theta\, d\theta = 0$, parce que les valeurs de θ devant être prises à égale distance au-dessus et au-dessous de l'angle droit, la valeur de cette intégrale sera composée d'une suite d'éléments égaux deux à deux et de signes contraires. Les deux derniers termes de l'équation précédente se réduisent donc à zéro en vertu de cette remarque, et l'expression de A, en substituant pour K sa valeur, peut prendre cette forme,

$$A = 2a \int\!\!\int \frac{d\theta\, d\omega \sin\theta \cos^2\theta}{\cos^2\theta + \frac{h^2}{h'^2}\sin^2\theta\cos^2\omega + \frac{h^2}{h''^2}\sin^2\theta\sin^2\omega},$$

On trouverait de même

$$B = 2b \int\!\!\int \frac{d\theta\, d\omega \sin^3\theta \cos^2\omega}{\sin^2\theta\cos^2\omega + \frac{h'^2}{h^2}\cos^2\theta + \frac{h'^2}{h''^2}\sin^2\theta\sin^2\omega},$$

$$C = 2c \int\!\!\int \frac{d\theta\, d\omega \sin^3\theta \sin^2\omega}{\sin^2\theta\sin^2\omega + \frac{h''^2}{h^2}\cos\theta^2 + \frac{h''^2}{h'^2}\sin^2\theta\cos^2\omega}.$$

On peut, avant même d'intégrer ces expressions, en déduire plusieurs propriétés importantes relativement aux attractions des ellipsoïdes.

Les intégrations indiquées étant indépendantes des coordonnées a, b, c du point attiré, on voit que l'attraction qu'exerce le sphéroïde parallèlement à l'axe des x, est la même pour tous les points situés dans un même plan perpendiculaire à cet axe. Il en est de même relativement aux axes des y et des z; d'où l'on peut conclure généralement que les attractions de l'ellipsoïde sur les points placés sur une même ligne droite, passant par l'origine des coordonnées, sont proportionnelles à leur éloignement de son centre.

Si l'on divise respectivement par a, b, c les trois quantités A, B, C, et qu'ensuite on les ajoute, on trouve

$$\frac{A}{a} + \frac{B}{b} + \frac{C}{c} = 2\int\int d\theta\, d\omega \sin\theta,$$

les intégrales devant être prises depuis $\theta = 0$ jusqu'à $\theta = \pi$, et depuis $\omega = 0$ jusqu'à $\omega = \pi$. On trouve entre ces limites $\int\int d\theta\, d\omega \sin\theta = 2\pi$; on aura donc

$$\frac{A}{a} + \frac{B}{b} + \frac{C}{c} = 4\pi. \quad (g)$$

On a d'ailleurs, n° **1**,

$$-\frac{dV}{da} = A, \quad -\frac{dV}{db} = B, \quad -\frac{dV}{dc} = C;$$

et d'après la forme des valeurs de A, B, C, il est évident qu'on aura

$$-\frac{d^2V}{da^2} = \frac{A}{a}, \quad -\frac{d^2V}{db^2} = \frac{B}{b}, \quad -\frac{d^2V}{dc^2} = \frac{C}{c};$$

l'équation (g) devient donc ainsi:

$$\frac{d^2V}{da^2} + \frac{d^2V}{db^2} + \frac{d^2V}{dc^2} = -4\pi,$$

équation qui vérifie pour les ellipsoïdes l'équation (2) du n° **3**, qui s'applique généralement à des sphéroïdes quelconques.

On peut observer encore que les valeurs de A, B, C ne contenant que les quantités $\frac{h}{h'}$, $\frac{h}{h''}$, ces valeurs ne varieront pas, quels que soient les trois axes du sphéroïde, pourvu qu'ils aient entre eux les mêmes rapports. Or deux ellipsoïdes sont semblables, quand leurs axes correspondants sont entre eux dans le même rapport; on peut donc en conclure que tous les ellipsoïdes semblables exercent sur les points intérieurs des attractions égales. Il suit de là que si l'on suppose le sphéroïde composé d'une suite de couches concentriques et semblables, l'action des couches supérieures au point attiré sera nulle; d'où résulte le théorème suivant, qui n'est qu'une extension de celui que nous avions trouvé n° **19**, livre Ier, relativement à la sphère : *Un point placé au dedans d'une couche elliptique, dont la surface intérieure et la surface extérieure sont semblables et semblablement placées, est également attiré de toutes parts.*

9. Occupons-nous maintenant de l'intégration de la valeur de A. Si l'on intègre d'abord par rapport à ω depuis $\omega = 0$ jusqu'à $\omega = \pi$, et qu'on suppose

$$\cos^2\theta + \frac{h^2}{h'^2}\sin^2\theta = m, \quad \cos^2\theta + \frac{h^2}{h''^2}\sin^2\theta = n,$$

on aura

$$A = 2a\int\int\frac{d\theta\, d\omega \sin\theta \cos^2\theta}{m\cos^2\omega + n\sin^2\omega} = 2a\pi\int\frac{d\theta \sin\theta \cos^2\theta}{\sqrt{mn}}.$$

En remettant donc pour m et n leurs valeurs, on aura

$$A = \frac{2a\pi h'h''}{h^2} \int \frac{d\theta \sin\theta \cos^2\theta}{\sqrt{1+\left(\frac{h'^2-h^2}{h^2}\right)\cos^2\theta}\sqrt{1+\left(\frac{h''^2-h^2}{h^2}\right)\cos^2\theta}}.$$

Cette dernière intégrale doit s'étendre depuis $\theta = 0$ jusqu'à $\theta = \pi$, ce qui revient à la prendre depuis $\theta = 0$ jusqu'à $\theta = \frac{1}{2}\pi$, et à doubler le résultat. Si l'on suppose donc $\cos\theta = x$, et qu'on nomme M la masse de l'ellipsoïde, ce qui donne $M = \frac{4\pi}{3} hh'h''$, et par conséquent $\frac{4\pi h'h''}{h^2} = \frac{3M}{h^3}$, on aura

$$A = \frac{3aM}{h^3} \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1+\left(\frac{h'^2-h^2}{h^2}\right)x^2}\sqrt{1+\left(\frac{h''^2-h^2}{h^2}\right)x^2}},$$

l'intégrale relative à x devant être prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$.

On pourrait, en intégrant les valeurs de B et C, n° **8**, les réduire de même à de simples quadratures, mais il est plus simple de déduire immédiatement leurs valeurs de l'expression précédente de A. Pour cela, il suffit de remarquer que l'on peut regarder A comme une fonction de a et des trois demi-axes h, h', h'' de l'ellipsoïde; B sera par conséquent une fonction semblable de b et des trois demi-axes h', h, h''; et il en sera de même de C, qui sera une pareille fonction de c et des trois demi-axes h'', h', h. On aura donc les expressions de B et C par une simple permutation des lettres a, h, h', h'' dans l'expression de A.

On trouve ainsi :

$$B = \frac{3bM}{h'^2} \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1+\left(\frac{h^2-h'^2}{h'^2}\right)x^2}\sqrt{1+\left(\frac{h''^2-h'^2}{h'^2}\right)x^2}},$$

$$C = \frac{3cM}{h''^2} \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1+\left(\frac{h^2-h''^2}{h''^2}\right)x^2}\sqrt{1+\left(\frac{h'^2-h''^2}{h''^2}\right)x^2}},$$

ces expressions devant être prises, comme celle de A, depuis $x = 0$, jusqu'à $x = 1$.

On peut donner aux valeurs de A, B, C, une forme particulière qu'il est bon de connaître. Faisons, pour abréger,

$$\frac{h'^2-h^2}{h^2} = \lambda^2, \quad \frac{h''^2-h^2}{h^2} = \lambda'^2,$$

et supposons ensuite dans la valeur de B,

$$x = \frac{h'y}{h\sqrt{1+\lambda^2 y^2}},$$

et dans la valeur de C,

$$x = \frac{h''z}{h\sqrt{1+\lambda'^2 z^2}},$$

les expressions trouvées pour A, B, C, deviendront

$$A = \frac{3aM}{h^3} \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1+\lambda^2 x^2}\sqrt{1+\lambda'^2 x^2}},$$

$$B = \frac{3bM}{h^3} \int \frac{y^2\,dy}{(1+\lambda^2 y^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+\lambda'^2 y^2}},$$

$$C = \frac{3cM}{h^3} \int \frac{z^2\,dz}{\sqrt{1+\lambda^2 z^2}\,(1+\lambda'^2 z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Les intégrales relatives à y et à z doivent être prises dans les mêmes limites que les intégrales relatives à x, puisqu'en effet la supposition de $x = 0$ donne à la fois $y = 0$ et $z = 0$, et que la supposition de $x = 1$ donne $y = 1$ et $z = 1$, on peut donc dans B et C changer, si l'on veut, y et z en x, d'où il suit que, si l'on fait

$$L = \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1+\lambda^2 x^2}\,\sqrt{1+\lambda'^2 x^2}},$$

on aura, pour déterminer A, B, C, ces formules très-simples :

$$A = \frac{3aM}{h^3}\,L, \quad B = \frac{3bM}{h^3}\,\frac{d.\lambda L}{d\lambda}, \quad C = \frac{3cM}{h^3}\,\frac{d.\lambda' L}{d\lambda'}.$$

Ces formules s'étendent aux points situés sur la surface du sphéroïde; car il suffit, pour y avoir égard, de supposer $r = r'$ dans les expressions de A, B, C, ce qui ne change rien à leur forme.

10. La détermination des attractions qu'exerce un ellipsoïde homogène sur les points intérieurs, et sur les points de sa surface, ne dépend donc plus que de la valeur de la fonction L; mais l'intégration qu'elle exige ne peut être obtenue sous forme finie par les méthodes connues, que dans deux cas particuliers, celui où les quantités λ et λ' sont égales entre elles, et celui où l'une de ces quantités est nulle : dans l'un et l'autre cas, deux des trois demi-axes h, h', h'', sont égaux entre eux, et l'ellipsoïde est de révolution autour du troisième.

Supposons que h soit le plus petit des trois demi-axes du sphéroïde, et faisons d'abord $\lambda = \lambda'$, ce qui donne $h' = h''$. Le corps attirant est alors un ellipsoïde aplati vers les pôles, dont h est le demi-axe de révolution; on aura dans ce cas

$$\mathrm{L} = \int \frac{x^2\,dx}{1 + \lambda^2 x^2} = \frac{1}{\lambda^3}(\lambda - \operatorname{arc\,tang}\lambda).$$

Si l'on différentie par rapport à λ la valeur de L, n° **9**, et qu'on fasse $\lambda = \lambda'$ après la différentiation, on trouve

$$\frac{d.\lambda \mathrm{L}}{d\lambda} = \int \frac{x^2\,dx}{(1 + \lambda^2 x^2)^2} = \frac{1}{2\lambda^3}\left(\operatorname{arc\,tang}\lambda - \frac{\lambda}{1 + \lambda^2}\right).$$

Les attractions de l'ellipsoïde de révolution, aplati vers les pôles, seront donc déterminées par les formules suivantes :

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{A} &= \frac{3a\mathrm{M}}{h^3\lambda^3}(\lambda - \operatorname{arc\,tang}\lambda),\\
\mathrm{B} &= \frac{3b\mathrm{M}}{2h^3\lambda^3}\left(\operatorname{arc\,tang}\lambda - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right),\\
\mathrm{C} &= \frac{3c\mathrm{M}}{2h^3\lambda^3}\left(\operatorname{arc\,tang}\lambda - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right).
\end{aligned}\right\}\quad (\mathrm{A})$$

Supposons maintenant $\lambda' = 0$, ce qui donne $h'' = h$. Dans ce cas, h' est le demi-axe de révolution du sphéroïde, et l'on a

$$\mathrm{L} = \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1+\lambda^2 x^2}} = \frac{1}{2\lambda^3}\left[\lambda\sqrt{1+\lambda^2} - \log(\lambda + \sqrt{1+\lambda^2})\right].$$

$$\frac{d.\lambda \mathrm{L}}{d\lambda} = \frac{1}{\lambda^3}\left[\log(\lambda + \sqrt{1+\lambda^2}) - \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}\right].$$

On aura donc pour les attractions de l'ellipsoïde de révolution, allongé vers les pôles,

$$\left.\begin{aligned}
A &= \frac{3aM}{2h^3\lambda^3}\left[\lambda\sqrt{1+\lambda^2} - \log\left(\lambda + \sqrt{1+\lambda^2}\right)\right],\\
B &= \frac{3bM}{h^3\lambda^3}\left[\log\left(\lambda + \sqrt{1+\lambda^2}\right) - \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}\right],\\
C &= \frac{3cM}{2h^3\lambda^3}\left[\lambda\sqrt{1+\lambda^2} - \log\left(\lambda + \sqrt{1+\lambda^2}\right)\right].
\end{aligned}\right\}\ (\mathrm{B})$$

Si les conditions précédentes ne sont pas remplies, il est impossible d'obtenir d'une manière rigoureuse les valeurs de A, B, C; mais lorsque l'ellipsoïde s'éloigne peu de la figure de la sphère, λ et λ' deviennent de très-petites quantités; on pourra réduire alors la fonction L en série convergente, dont chaque terme soit intégrable, et l'on déterminera de cette manière les attractions du sphéroïde, avec le degré de précision qu'on jugera convenable.

11. Considérons maintenant le cas où le point attiré est extérieur au sphéroïde. Nous avons vu que le radical qui entre dans les expressions différentielles (f) de ses attractions, opposait alors un obstacle invincible à leur intégration (*). Plusieurs grands géomètres avaient en vain épuisé toutes les ressources de l'Analyse pour surmonter cette difficulté, lorsque la découverte, due à M. Ivory, d'une propriété remarquable des ellipsoïdes décrits des mêmes foyers, l'a fait enfin entièrement disparaître.

Voici l'énoncé de cette propriété, qu'on peut regarder comme un beau théorème de Mécanique : *Si l'on nomme points correspondants, les points pris sur*

(*) *Voir* le supplément au livre V.

la surface de deux ellipsoïdes décrits des mêmes foyers, de manière que leurs coordonnées, respectivement parallèles aux trois axes principaux de ces corps, soient entre elles comme ces axes, les attractions qu'exerceront, parallèlement à chaque axe, ces ellipsoïdes sur les points correspondants de leurs surfaces, seront entre elles comme les produits des deux autres axes.

En effet, soient M le premier ellipsoïde, et A l'attraction qu'il exerce parallèlement à l'axe des x sur le point dont les coordonnées sont a, b, c; désignons par M′ le second sphéroïde, et par A′ l'attraction qu'il exerce dans la même direction sur le point dont les coordonnées sont a', b', c'; on aura, nº **6**,

$$A = \int\int dy\, dz \left(\frac{1}{\rho_{,}} - \frac{1}{\rho}\right),$$

$$A' = \int\int dy'\, dz' \left(\frac{1}{\rho'_{,}} - \frac{1}{\rho'}\right),$$

en supposant, pour abréger,

$$\rho = \sqrt{(a-x_{,})^2+(b-y)^2+(c-z)^2}, \quad \rho' = \sqrt{(a'-x'_{,})^2+(b'-y')^2+(c'-z')^2},$$

$$\rho_{,} = \sqrt{(a+x_{,})^2+(b-y)^2+(c-z)^2}, \quad \rho'_{,} = \sqrt{(a'+x'_{,})^2+(b'-y')^2+(c'-z')^2},$$

$+ x_{,}$ et $- x_{,}$, désignant les valeurs de la variable x, qui se rapportent à la surface de M, et $+ x'_{,}$ et $- x'_{,}$ les valeurs de la variable x' relatives à la surface de M′.

Soit, comme précédemment,

$$\frac{x^2}{k^2} + \frac{y^2}{k'^2} + \frac{z^2}{k''^2} = 1, \quad (h)$$

l'équation de la première de ces surfaces; il faudrait, pour achever l'intégration de l'expression de A, substituer dans $\rho_{,}$ et ρ les valeurs de x qui résultent de cette équation; mais cette opération ne nous conduirait à rien; on peut, au contraire, par une transformation ingénieuse des coordonnées, arriver très-simplement au théorème que nous nous proposons de démontrer. Pour cela, aux trois variables x, y, z, qui sont liées entre elles par l'équation (h), on en substituera deux autres indépendantes entre elles; on fera, par exemple,

$$x_{,} = h \sin p, \quad y = h' \cos p \sin q, \quad z = h'' \cos p \cos q;$$

et l'on voit en effet, en mettant ces valeurs à la place de x, y, z dans l'équation (h), qu'il n'en résulte aucune équation de condition entre les nouvelles variables p et q.

D'après les formules connues pour la transformation des variables dans les intégrales doubles, on a généralement

$$dy\,dz = \left(\frac{dy}{dp}\frac{dz}{dq} - \frac{dy}{dq}\frac{dz}{dp}\right) dp\,dq.$$

Les valeurs précédentes de y et z donnent

$$\frac{dy}{dp}\frac{dz}{dq} - \frac{dy}{dq}\frac{dz}{dp} = h' h'' \sin p \cos p.$$

On aura donc, en vertu de la formule générale,

$$dy\,dz = h' h'' \sin p \cos p\, dp\,dq,$$

et par conséquent

$$\mathrm{A} = h' h'' \int\int dp\,dq \sin p \cos p \left(\frac{1}{\rho_{,}} - \frac{1}{\rho}\right).$$

On étendra les intégrales à la masse entière du sphéroïde M, en prenant celle qui se rapporte à p depuis $p = 0$ jusqu'à $p = \pi$, et celle qui se rapporte à q depuis $q = 0$ jusqu'à $q = \pi$; car il est évident qu'en donnant aux angles p et q toutes les valeurs comprises entre 0 et 180°, les variables y et z prendront toutes les valeurs comprises entre $+h'$ et $-h'$ d'une part, et entre $+h''$ et $-h''$ de l'autre, c'est-à-dire tous les couples de valeurs qui correspondent aux différents points de l'ellipsoïde.

Soient maintenant k, k', k'' les trois demi-axes du second ellipsoïde M', qui se rapportent respectivement aux axes des x', des y' et des z', l'équation de sa surface sera

$$\frac{x'^2}{k^2} + \frac{y'^2}{k'^2} + \frac{z'^2}{k''^2} = 1;$$

et si l'on fait

$$x'_{,} = k \sin p, \quad y' = k' \cos p \sin q, \quad z' = k'' \cos p \cos q,$$

on aura, par l'analyse précédente,

$$A' = k' k'' \iint dp\, dq \sin p \cos p \left(\frac{1}{\rho'_{,}} - \frac{1}{\rho'}\right),$$

les intégrales devant être prises depuis $p = 0$ jusqu'à $p = \pi$, et depuis $q = 0$ jusqu'à $q = \pi$, c'est-à-dire dans les mêmes limites que celles qui se rapportent à la valeur de A.

Comparons maintenant les attractions exercées par les deux sphéroïdes M et M', ce qui se borne à comparer entre elles les valeurs de ρ et de ρ' et celles de $\rho_{,}$ et $\rho'_{,}$. Si l'on développe les deux premières quantités, et qu'on substitue pour $x_{,}$, y, z, et pour $x'_{,}$, y', z', leurs valeurs, on aura

$$\rho^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2(ah \sin p + bh' \cos p \sin q + ch'' \cos p \cos q)$$
$$+ h^2 \sin^2 p + h'^2 \cos^2 p \sin^2 q + h''^2 \cos^2 p \cos^2 q,$$
$$\rho'^2 = a'^2 + b'^2 + c'^2 - 2(a'k \sin p + b'k' \cos p \sin q + c'k'' \cos p \cos q)$$
$$+ k^2 \sin^2 p + k'^2 \cos^2 p \sin^2 q + k''^2 \cos^2 p \cos^2 q.$$

Si l'on retranche ces deux expressions l'une de l'autre, en observant que les points déterminés par les coordonnées a, b, c et a', b', c' sont des *points correspondants*, et que, d'après la définition que nous avons donnée, on a

$$\frac{a}{a'} = \frac{k}{h}, \quad \frac{b}{b'} = \frac{k'}{h'}, \quad \frac{c}{c'} = \frac{k''}{h''};$$

que l'on remarque en outre que les deux ellipsoïdes M et M′ ayant mêmes foyers, si l'on nomme e et e' leurs excentricités communes, on a

$$h'^2 = h^2 + e^2, \quad k'^2 = k^2 + e^2,$$
$$h''^2 = h^2 + e'^2, \quad k''^2 = k^2 + e'^2,$$

d'où l'on tire

$$h^2 - k^2 = h'^2 - k'^2 = h''^2 - k''^2,$$

on aura simplement

$$\rho'^2 - \rho^2 = (h^2 - k^2)\left(\frac{a'^2}{h^2} + \frac{b'^2}{h'^2} + \frac{c'^2}{h''^2} - 1\right).$$

Si l'on suppose, comme nous le faisons, que le point dont les coordonnées sont a', b', c', est situé sur l'ellipsoïde M, le second membre de cette équation sera nul, et l'on aura identiquement $\rho = \rho'$, indépendamment de toute valeur donnée aux angles p et q. On trouverait, par la même analyse, $\rho_{,} = \rho'_{,}$, et l'expression de A′ deviendra par conséquent

$$A' = k'k''\iint dp\,dq \sin p \cos p \left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho}\right).$$

En rapprochant cette expression de celle de A, on voit que, quelle que soit la valeur des intégrales indiquées, on aura

$$A = \frac{h'h''}{k'k''}A'.$$

On aurait de même, relativement aux attractions qu'exercent M et M′ suivant les axes des y et des z,

$$B = \frac{hh''}{kk''}B', \qquad C = \frac{hh'}{kk'}C',$$

et par conséquent

$$\frac{A}{A'} = \frac{h'h''}{k'k''}, \quad \frac{B}{B'} = \frac{hh''}{kk''}, \quad \frac{C}{C'} = \frac{hh'}{kk'}. \quad (k)$$

Ces équations renferment le théorème que nous avons énoncé, et dont la mécanique céleste est redevable à M. Ivory.

12. Il est important d'observer que les équations (k) subsistent quelle que soit la fonction des distances qui exprime la loi d'attraction. En effet, la valeur de A, après l'intégration relative à x, prendra toujours cette forme,

$$A = \iint R\,dy\,dz - \iint R'\,dy\,dz,$$

R étant une fonction donnée de la quantité ρ, et R′ une fonction semblable de ρ'. Or, l'analyse du numéro précédent ne s'appuie que sur la forme des quantités ρ

et ρ', et elle est indépendante de celle des fonctions R et R'. Il en serait de même des quantités B et C.

Le beau théorème énoncé, n° **11**, et qui établit les relations qui existent entre les attractions qu'exercent les ellipsoïdes homogènes sur les points situés à l'intérieur ou à l'extérieur de leurs surfaces, a donc lieu pour toutes les lois d'attraction possibles. Si l'on suppose que les deux ellipsoïdes se réduisent à des sphères concentriques, il en résulte que l'*attraction de la grande sphère sur un point placé à la surface de la petite, est à l'attraction de la petite sphère, sur un point placé à la surface de la grande, comme les carrés des rayons de ces deux sphères, ou comme la surface de la sphère extérieure est à la surface de la sphère intérieure.* Soient donc r et r' les rayons de ces deux sphères, A et A' les attractions qu'elles exercent respectivement sur les points de leurs surfaces, on aura

$$A = \frac{A' r^2}{r'^2},$$

équation qui donnera l'attraction de la sphère sur un point extérieur, lorsque l'attraction sur un point intérieur sera connue, et réciproquement, quelle que soit la loi d'attraction.

Dans le cas de l'attraction en raison inverse du carré des distances, A' exprimant l'action de la sphère dont le rayon r', sur un point extérieur, on a, n° 5,

$$A' = \frac{4}{3} \frac{\pi r'^3 \rho}{r^2};$$

on aura donc $A = \frac{4}{3} \pi r'$ pour l'action de la grande sphère sur les points intérieurs. Cette expression étant indépendante du rayon r de cette sphère, on en peut conclure que les points placés dans l'intérieur d'une couche sphérique sont également attirés de toutes parts. Réciproquement, pour que cette propriété subsiste, il faut que A soit une fonction indépendante de r; on a alors

$$A' = \frac{H}{r^2},$$

H étant une constante par rapport à r, c'est-à-dire que, dans ce cas, l'attraction de la sphère sur les points extérieurs est réciproque au carré de leurs distances à son centre, ce qui exige nécessairement que la même loi s'observe par rapport à chacun de ses éléments. *La loi de la nature est donc la seule dans laquelle une couche sphérique n'aura aucune action sur les points intérieurs, et la seule aussi dans laquelle cette couche attire les points extérieurs, comme si toute sa masse était réunie à son centre.*

13. Voyons maintenant comment on peut faire servir le théorème que nous venons de démontrer, n° **11**, à la détermination des attractions des sphéroïdes elliptiques sur les points extérieurs à leurs surfaces. Soient a, b, c les coordonnées du point attiré, que nous supposons situé en dehors de l'ellipsoïde M; imaginons un nouvel ellipsoïde M' décrit des mêmes foyers que M, et dont la surface passe par ce point : ces conditions suffiront pour déterminer le second sphéroïde, et il n'y en aura qu'un seul qui pourra y satisfaire. En effet, soient k, k', k'', les trois demi-axes de M' respectivement parallèles aux axes des x, des y et des z; cet ellipsoïde ayant les mêmes foyers que le premier, si l'on nomme e et e' les excentricités de ses sections principales, on aura

$$k'^2 = k^2 + e^2, \quad k''^2 = k^2 + e'^2, \quad (l)$$

et l'équation de la surface de M' sera

$$\frac{x^2}{k^2} + \frac{y^2}{k^2 + e^2} + \frac{z^2}{k^2 + e'^2} = 1.$$

Puisque le point attiré est situé sur cette surface, les trois coordonnées a, b, c doivent satisfaire à l'équation précédente; on a par conséquent

$$\frac{a^2}{k^2} + \frac{b^2}{k^2 + e^2} + \frac{c^2}{k^2 + e'^2} = 1. \quad (n)$$

Cette équation est du sixième degré par rapport à k; mais elle s'abaisse au troisième en faisant $k^2 = \xi$. Elle a évidemment une racine réelle comprise entre zéro et l'infini; car, en supposant $k=0$ et $k=\frac{1}{0}$, on trouve deux résultats de signes contraires; elle donnera donc toujours une valeur réelle pour k, et l'on en conclura, au moyen des équations (l), des valeurs semblables pour k' et k''. On voit d'ailleurs que le premier membre de l'équation (n) décroît continuellement à mesure que k augmente depuis $k = 0$ jusqu'à $k = \frac{1}{0}$: d'où il suit que cette équation n'a qu'une seule racine réelle.

Cela posé, considérons sur l'ellipsoïde M le point dont les coordonnées a', b', c' sont déterminées par les équations

$$a' = \frac{ah}{k}, \quad b' = \frac{bh'}{k'}, \quad c' = \frac{ch''}{k''};$$

ce point étant situé dans l'intérieur de l'ellipsoïde M′, si l'on suppose

$$\frac{k'^2 - k^2}{k^2} = \frac{e^2}{k^2} = \lambda^2, \quad \frac{k''^2 - k^2}{k^2} = \frac{e'^2}{k^2} = \lambda'^2,$$

$$\mathrm{L} = \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1+\lambda^2 x^2}\,\sqrt{1+\lambda'^2 x^2}},$$

on aura, pour déterminer les attractions qu'exerce sur lui ce sphéroïde,

$$\mathrm{A}' = \frac{3a'\mathrm{M}'}{k^3}\mathrm{L}, \quad \mathrm{B}' = \frac{3b'\mathrm{M}'}{k^3}\frac{d.\lambda\mathrm{L}}{d\lambda}, \quad \mathrm{C}' = \frac{3c'\mathrm{M}'}{k^3}\frac{d.\lambda'\mathrm{L}}{d\lambda'}.$$

Si l'on substitue pour a', b', c' leurs valeurs, et qu'on observe que M et M′ étant les masses des deux ellipsoïdes, on a

$$\mathrm{M} = \frac{4\pi}{3} hh'h'', \quad \mathrm{M}' = \frac{4\pi}{3} kk'k'',$$

ces formules donneront, en vertu des équations (k), n° **11**,

$$\mathrm{A} = \frac{3a\mathrm{M}}{k^3}\mathrm{L}, \quad \mathrm{B} = \frac{3b\mathrm{M}}{k^3}\frac{d.\lambda\mathrm{L}}{d\lambda}, \quad \mathrm{C} = \frac{3c\mathrm{M}}{k^3}\frac{d.\lambda'\mathrm{L}}{d\lambda'}. \quad (p)$$

Ce sont les expressions des attractions qu'exerce l'ellipsoïde M sur le point dont les coordonnées sont a, b, c, la quantité k qu'elles renferment étant donnée par l'équation (n) qu'on peut mettre sous cette forme,

$$k^6 - k^4(a^2+b^2+c^2-e^2-e'^2) - k^2[(a^2+b^2)e'^2 + (a^2+c^2)e^2 - e^2e'^2] - a^2e^2e'^2 = 0.$$

Les formules précédentes serviront à déterminer les attractions de l'ellipsoïde sur les points extérieurs :

on voit qu'il suffit d'y changer k en h pour les étendre aux points de la surface, et même aux points intérieurs.

Si l'ellipsoïde était de révolution autour de l'axe $2h$, on aurait $e = e'$; l'équation qui détermine k deviendrait, en la divisant par le facteur $k + e$,

$$k^4 - k^2(a^2 + b^2 + c^2 - e^2) - a^2 e^2 = 0,$$

et les formules (A) du n° **10** donneraient

$$A = \frac{3aM}{k^3\lambda^3}(\lambda - \text{arc tang}\lambda),$$

$$B = \frac{3bM}{2k^3\lambda^3}\left(\text{arc tang}\lambda - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right),$$

$$C = \frac{3cM}{2k^3\lambda^3}\left(\text{arc tang}\lambda - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right).$$

Enfin, dans le cas de l'ellipsoïde de révolution allongé vers les pôles, on aura $e' = 0$; par conséquent

$$k^4 - k^2(a^2 + b^2 + c^2 - e^2) - (a^2 + c^2)e^2 = 0;$$

et les formules (B) du même numéro donneront

$$A = \frac{3aM}{2k^3\lambda^2}\left[\lambda\sqrt{1+\lambda^2} - \log(\lambda + \sqrt{1+\lambda^2})\right],$$

$$B = \frac{3bM}{k^3\lambda^3}\left[\log(\lambda + \sqrt{1+\lambda^2}) - \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}\right],$$

$$C = \frac{3cM}{2k^3\lambda^3}\left[\lambda\sqrt{1+\lambda^2} - \log[\lambda + \sqrt{1+\lambda^2})\right].$$

14. Il résulte des formules (p), que si l'on nomme M' la masse d'un nouvel ellipsoïde ayant les mêmes excentricités et la même position des axes que l'ellipsoïde dont la masse est M, il suffira, pour déterminer les attractions A′, B′, C′ qu'exerce ce corps sur le point dont les coordonnées sont a, b, c, de changer M en M′ dans les équations (p); d'où l'on peut conclure qu'on aura

$$\frac{A}{A'}=\frac{M}{M'},\quad \frac{B}{B'}=\frac{M}{M'},\quad \frac{C}{C'}=\frac{M}{M'},$$

c'est-à-dire qu'en général les attractions de deux ellipsoïdes décrits des mêmes foyers, sur un même point extérieur, sont entre elles comme leurs masses.

Les trois équations (k), n° **11**, donnent

$$\frac{A}{a}=\frac{k'h''}{k'k''}\cdot\frac{A'}{a},\quad \frac{B}{b}=\frac{hk''}{kk''}\cdot\frac{B'}{b},\quad \frac{C}{c}=\frac{hk'}{kk'}\cdot\frac{C'}{c}.$$

Si dans les seconds membres de ces équations on substitue pour a, b, c leurs valeurs, n° **11**, et qu'on observe que le point dont les coordonnées sont a', b', c' étant intérieur au sphéroïde M′, on a

$$\frac{A'}{a'}+\frac{B'}{b'}+\frac{C'}{c'}=4\pi,$$

on trouvera

$$\frac{A}{a}+\frac{B}{b}+\frac{C}{c}=4\pi\frac{hk'h''}{kk'k''},$$

relation analogue à la précédente et qui doit exister entre les attractions qu'exerce un ellipsoïde homogène sur les points extérieurs à sa surface.

Si le corps attirant n'était pas homogène, mais seulement composé de couches elliptiques de position, d'excentricité et de densités variables, suivant une loi quelconque du centre à la surface, on déterminerait, par les formules précédentes, les attractions qu'exercent sur un point donné les deux ellipsoïdes terminés par les surfaces intérieures et extérieures de chacune de ces couches; la différence de ces deux attractions sera égale à l'attraction de la couche sur le même point, et l'on aura celle qu'exerce le corps entier en prenant la somme de ces attractions partielles.

15. On peut donc regarder, comme complète, la théorie des attractions des sphéroïdes elliptiques. La seule chose qu'elle laisse encore à désirer, c'est la valeur finie de la fonction que nous avons désignée par L; mais l'intégration dont cette valeur dépend, est non-seulement impossible, comme nous l'avons dit, dans le cas général, par toutes les méthodes connues; elle l'est encore en elle-même, c'est-à-dire que la valeur de L ne saurait être exprimée en termes finis par aucune fonction composée de quantités algébriques, logarithmiques, ou circulaires.

Dans le chapitre suivant, nous nous occuperons de la théorie des attractions des sphéroïdes peu différents de la sphère. Ce problème a d'abord été traité par d'Alembert, et, après lui, par plusieurs illustres géomètres, parmi lesquels il faut citer Legendre en première ligne. Ses beaux travaux sur les attractions des sphéroïdes quelconques, paraissent avoir ouvert à Laplace la route nouvelle qui le conduisit à la solution complète de cette difficile question. Les résultats auxquels ce grand géomètre est parvenu, par leur fécondité et par leur utilité non-seulement dans la théorie du Système du monde, mais encore dans une foule de questions physico-mathématiques, telles que la théorie des fluides, celle de la chaleur, de l'électricité et du magnétisme, doivent faire regarder, sans doute, ses travaux sur ce point important de la mécanique céleste, comme l'une des plus belles productions de son génie, mais il ne faut pas oublier que c'est à l'esprit laborieux et inventif de Legendre, qu'il dut la première idée de l'analyse aussi neuve que féconde qu'il employa dans ces recherches.

CHAPITRE III.

ATTRACTIONS DES SPHÉROÏDES QUELCONQUES.

16. Nous considérerons, dans ce chapitre, les attractions des sphéroïdes quelconques, et en particulier celles des sphéroïdes qui s'écartent peu de la figure de la sphère. Mais, au lieu de déterminer immédiatement les attractions que ces corps exercent suivant une direction donnée, nous commencerons par chercher la valeur de la fonction qui exprime la somme des éléments du sphéroïde, divisés respectivement par leur distance au point attiré, et que nous avons désignée par V, parce que cette fonction a la propriété de donner, par sa différentiation, les attractions qu'exerce le sphéroïde parallèlement à une droite donnée, et que d'ailleurs c'est sous cette forme que se présentent, dans les équations de son équilibre, les attractions mutuelles des molécules d'une masse fluide homogène, douée d'un mouvement de rotation, comme nous le verrons dans le chapitre suivant.

Reprenons donc la valeur de V, n° 4, et, pour abréger, faisons $\cos\theta = \mu$, $\cos\theta' = \mu'$, on aura

$$V = \int\!\!\int\!\!\int \frac{\rho r'^2\, dr'\, d\mu'\, d\omega'}{\sqrt{r^2 - 2rr'\left[\mu\mu' + \sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\mu'^2}\cos(\omega-\omega')\right] + r'^2}},$$

r étant le rayon mené de l'origine au point attiré, θ

l'angle compris entre ce rayon et l'un quelconque des axes coordonnés, ω l'angle que sa projection sur le plan des deux autres axes forme avec l'une de ces droites, et r', θ', ω' désignant ce que deviennent ces trois variables relativement à l'élément dm du sphéroïde.

Pour étendre l'intégration de la valeur de V à la masse entière du corps attirant, il faudra intégrer relativement à r', depuis $r' = 0$ jusqu'à $r' = R$, R étant une fonction donnée de θ' et de ω' qui exprime le rayon vecteur d'un point quelconque de la surface du sphéroïde. Quant aux intégrales relatives à ω' et μ', elles devront être prises, d'après ce que nous avons dit nº 4, depuis $\omega' = 0$ jusqu'à ω' égal à la circonférence, et depuis $\mu' = 1$ jusqu'à $\mu' = -1$.

En substituant de même μ à la place de $\cos\theta$, dans l'équation (5), même numéro, elle prend cette forme plus simple,

$$\frac{d.(1-\mu^2)\frac{dV}{d\mu}}{d\mu} + \frac{1}{1-\mu^2}\frac{d^2V}{d\omega^2} + r\frac{d^2.rV}{dr^2} = 0, \quad (A)$$

équation de condition à laquelle devra toujours satisfaire la valeur de V, lorsque le point attiré ne fera pas partie de la masse du sphéroïde.

Si cette équation était intégrable par les méthodes connues, on en conclurait immédiatement, sous forme finie, la valeur de la fonction V; mais quoique cette intégration soit impossible généralement, l'équation (A) peut être extrêmement utile pour faciliter le développement de la fonction V en une suite récurrente qui permette d'approcher d'aussi près que l'on voudra de sa véritable valeur. En effet, comme il est impossible d'intégrer l'expression de V d'une manière générale, on est obligé, pour y parvenir, de recourir aux méthodes ordinaires d'approximation. On réduit l'expression de V en série dont chaque terme est intégrable, et l'on obtient ensuite sa valeur avec le degré d'exactitude qu'on juge convenable. Pour développer l'expression de V en série convergente, il faut distinguer deux cas, celui où le point attiré est extérieur au sphéroïde, et celui où il est situé dans l'intérieur de ce corps. Dans le premier cas, on a $r > r'$, et si l'on fait

$$F = \left\{ r^2 - 2rr'\left[\mu\mu' + \sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\mu'^2}\cos(\omega-\omega')\right] + r'^2 \right\}^{-\frac{1}{2}}.$$

On réduira F en série convergente, en ordonnant son développement par rapport aux puissances descendantes de r; on aura ainsi

$$F = P_0\frac{1}{r} + P_1\frac{r'}{r^2} + P_2\frac{r'^2}{r^3}\cdots + P_i\frac{r'^i}{r^{i+1}} + \ldots, \quad (m)$$

et il est clair, d'après la valeur de F, que $P_0, P_1, \ldots, P_i$ sont des fonctions rationnelles et entières de μ et de $\sqrt{1-\mu^2}\cos(\omega-\omega')$. F satisfait, par sa nature, à l'équation

$$\frac{d.(1-\mu^2)\dfrac{dF}{d\mu}}{d\mu} + \frac{\dfrac{d^2F}{d\omega^2}}{1-\mu^2} + r\frac{d^2.rF}{dr^2} = 0. \quad (B)$$

Si l'on remplace F par sa valeur en série, et qu'on égale à zéro les coefficients des mêmes puissances de r, on aura, quel que soit i,

$$\frac{d.(1-\mu^2)\dfrac{dP_i}{d\mu}}{d\mu} + \frac{\dfrac{d^2P_i}{d\omega^2}}{1-\mu^2} + i(i+1)P_i = 0. \quad (C)$$

Si l'on substitue à la place du radical que nous avons représenté par F, sa valeur dans l'expression de V, elle prendra cette forme,

$$V = \frac{v_0}{r} + \frac{v_1}{r^2} + \frac{v_2}{r^3} + \ldots,$$

et l'on aura généralement, quel que soit i,

$$v_i = \int\int\int \rho \, P_i \, r'^{i+2} \, dr' \, d\mu' \, d\omega',$$

les intégrales devant être prises depuis r' égal à zéro jusqu'à sa valeur à la surface du sphéroïde; l'intégrale relative à μ', depuis $\mu' = 1$ jusqu'à $\mu' = -1$, et l'intégrale relative à ω', depuis $\omega' = 0$ jusqu'à $\omega' = 2\pi$.

Si le sphéroïde est homogène, l'intégration relative à r' pourra toujours s'effectuer, et en nommant R la valeur de r' à la surface, on aura

$$v_i = \frac{\rho}{i+3} \int\int P_i \, R^{i+3} \, d\mu' \, d\omega'.$$

Supposons maintenant le point attiré dans l'intérieur du sphéroïde, on aura $r < r'$ pour toutes les couches du sphéroïde qui enveloppent le point attiré; et pour avoir une série convergente, on réduira F en une suite ascendante par rapport à r; on aura ainsi

$$F = P_0 \frac{1}{r'} + P_1 \frac{r}{r'^2} + P_2 \frac{r^2}{r'^3} \cdots + P_i \frac{r^i}{r'^{i+1}} + \ldots . \quad (n)$$

Les quantités P_0, P_1, etc., étant les mêmes que ci-dessus, l'expression de V, en y substituant cette valeur, deviendra

$$V = v_0 + v_1 r + v_2 r^2 + \ldots,$$

et l'on aura, pour déterminer généralement v_i, l'équation,

$$v_i = \int\int\int \frac{\rho P_i dr' d\mu' d\omega'}{r'^{i-1}}.$$

Les intégrales relatives à r' devant être prises depuis $r' = r$, jusqu'à la valeur de r' à la surface du sphéroïde, et les intégrales relatives à μ' et à ω' dans les mêmes limites que précédemment.

Si l'on suppose, par exemple, le sphéroïde homogène, et qu'on désigne par R et R' les valeurs de r' correspondantes à la surface du sphéroïde et à la couche qui passe par le point attiré, on aura, en intégrant par rapport à r',

$$v_i = \frac{\rho}{i-2} \int\int \left(\frac{1}{R'^{i-2}} - \frac{1}{R^{i-2}} \right) P_i d\mu' d\omega'.$$

Connaissant ainsi la partie de V relative aux couches du sphéroïde qui enveloppent le point attiré, on déterminera, comme précédemment, la partie relative aux autres couches, par rapport auxquelles le point attiré est extérieur, et en les réunissant, on aura l'attraction qu'exerce sur lui le sphéroïde.

17. Toute la difficulté du développement de V en série se réduit donc à former la valeur générale de P_i. Cette quantité est, comme nous l'avons vu, une fonction finie du degré i de μ et de $\sqrt{1-\mu^2}\cos(\omega - \omega')$. On peut supposer par conséquent P_i développé en série de cosinus de l'angle $\omega - \omega'$ et de ses multiples. Soit $K_n \cos n(\omega - \omega')$ le terme de cette suite qui dépend de $\cos n(\omega - \omega')$, K_n étant une fonction de μ indépendante de ω, qu'il s'agit de déterminer. Observons d'abord que le terme qui dépend de $\cos n(\omega - \omega')$

dans P_i, ne peut résulter que des puissances n, $n+2$, $n+4$, etc., de $\cos(\omega-\omega')$; or $\cos(\omega-\omega')$ ayant pour facteur $\sqrt{1-\mu^2}$, il est clair que $\cos^n(\omega-\omega')$ aura pour facteur $(1-\mu^2)^{\frac{n}{2}}$. D'ailleurs F étant symétrique par rapport à μ et à μ', ces deux quantités doivent entrer de la même manière dans chacun des termes de son développement, d'où l'on peut conclure que K_n est de cette forme $(1-\mu^2)^{\frac{n}{2}}(1-\mu'^2)^{\frac{n}{2}}H_n$; on aura donc ainsi

$$P_i = H_0 + (1-\mu^2)^{\frac{1}{2}}(1-\mu'^2)^{\frac{1}{2}} H_1 \cos(\omega-\omega') + (1-\mu^2)^{\frac{2}{2}}(1-\mu'^2)^{\frac{2}{2}} H_2 \cos 2(\omega-\omega') + \ldots$$

En sorte que le terme général du développement de P_i sera $(1-\mu^2)^{\frac{n}{2}}(1-\mu'^2)^{\frac{n}{2}} H_n \cos n(\omega-\omega')$, H_n désignant une fonction de μ dont il faut connaître la forme. P_i devant satisfaire à l'équation aux différences partielles (C), si on lui substitue sa valeur précédente, la comparaison des cosinus qui dépendent des mêmes multiples de $\omega-\omega'$ donnera l'équation aux différences ordinaires,

$$(1-\mu^2)^{\frac{n}{2}+1}\frac{d^2H_n}{d\mu^2} - 2(n+1)\mu(1-\mu^2)^{\frac{n}{2}}\frac{dH_n}{d\mu} + (i-n)(i+n+1)(1-\mu^2)^{\frac{n}{2}}H_n = 0,$$

ou bien, en multipliant tous les termes par $(1-\mu^2)^{\frac{n}{2}}$,

$$\frac{d.\left[(1-\mu^2)^{n+1}\frac{dH_n}{d\mu}\right]}{d\mu} + (i-n)(i+n+1)(1-\mu^2)^n H_n = 0. \quad (f)$$

D'ailleurs il est facile de voir, d'après la considération du radical que nous avons représenté par F, que H_n

est de cette forme,

$$H_n = A_0\mu^{i-n} + A_1\mu^{i-n-2} + A_2\mu^{i-n-4} \ldots + A_s\mu^{i-n-2s} + \ldots.$$

En effet, si l'on suppose

$$p = \mu\mu' + \sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\mu'^2}\cos(\omega - \omega'),$$

et qu'on développe F après y avoir substitué cette valeur, on trouvera que le coefficient de $\frac{r'^i}{r^{i+1}}$, dans ce développement, est de cette forme,

$$a_0 p^i + a_1 p^{i-2} + a_2 p^{i-4} + \ldots.$$

Qu'on remplace maintenant p par sa valeur, et qu'on substitue aux puissances de $\cos(\omega - \omega')$ leurs valeurs en cosinus multiples de $\omega - \omega'$, on s'assurera sans peine que le coefficient de $(1-\mu^2)^{\frac{n}{2}}\cos n(\omega - \omega')$ a la forme que nous lui avons supposée.

Si l'on substitue la valeur de H_n dans l'équation (f), et qu'on égale à zéro les coefficients des mêmes puissances de μ, on trouvera généralement

$$A_s = -\frac{(i-n-2s+2)(i-n-2s+1)}{2s(2i-2s+1)} A_{s-1}.$$

En faisant successivement $s=1$, $s=2$, etc., on aura par cette formule les valeurs de A_1, A_2, etc., au moyen de la valeur de A_0. On trouve ainsi :

$$H_n = A_0\left[\mu^{i-n} - \frac{(i-n)(i-n-1)}{2(2i-1)}\mu^{i-n-2} + \frac{(i-n)(i-n-1)(i-n-2)(i-n-3)}{2.4.(2i-1)(2i-3)}\mu^{i-n-4}\right.$$
$$\left. - \frac{(i-n)(i-n-1)(i-n-2)(i-n-3)(i-n-4)(i-n-5)}{2.4.6.(2i-1)(2i-3)(2i-5)}\mu^{i-n-6} + \ldots\right].$$

A_0 est une fonction de μ' indépendante de μ; or μ et μ' doivent entrer de la même manière dans l'expression de P_i, comme nous l'avons vu plus haut; on aura donc

$$A_n=\beta_n\Big[\mu'^{\,i-n}-\frac{(i-n)(i-n-1)}{2.(2i-1)}\mu'^{\,i-n-2}+\frac{(i-n)(i-n-1)(i-n-2)(i-n-3)}{2.4.(2i-1)(2i-3)}\mu'^{\,i-n-4}$$
$$-\frac{(i-n)(i-n-1)(i-n-2)(i-n-3)(i-n-4)(i-n-5)}{2.4.6.(2i-1)(2i-3)(2i-5)}\mu'^{\,i-n-6}+\ldots\Big],$$

et par conséquent

$$\left.\begin{aligned}H_n=\beta_n\Big[\mu^{i-n}-\frac{(i-n)(i-n-1)}{2.(2i-1)}\mu^{i-n-2}+\ldots\Big]\\ \times\Big[\mu'^{\,i-n}-\frac{(i-n)(i-n-1)}{2.(2i-1)}\mu'^{\,i-n-2}+\ldots\Big],\end{aligned}\right\}\quad(k)$$

β_n étant une quantité indépendante de μ et de μ', et qui par conséquent ne peut être qu'un coefficient numérique. Il ne reste plus qu'à déterminer ce coefficient.

Pour y parvenir, observons que si $i-n$ est un nombre pair, la valeur de H_n contiendra un terme indépendant de μ et de μ', et en ne considérant que ce terme, on aura

$$\begin{aligned}H_n&=\frac{\beta_n.[1.2.3\ldots(i-n)]^2}{[2.4\ldots(i-n)\ldots(2i-1).(2i-3)\ldots(i+n+1)]^2}\\ &=\frac{\beta^{(n)}.1.3.5\ldots(i-n-1).1.3.5]}{[1.3.5\ldots(2i-1)]^2}.\end{aligned}$$

Si $i-n$ est un nombre impair, la valeur de H_n contiendra un terme dépendant des premières puissances de μ et μ', et en n'ayant égard qu'à ce terme, on aura

$$\begin{aligned}H_n&=\frac{\beta_n\mu\mu'[1.2.3\ldots(i-n)]^2}{[2.4\ldots(i-n-1).(2i-1).(2i-3)\ldots(i+n+2)]^2}\\ &=\frac{\beta_n\mu\mu'.[1.3.5\ldots(i-n).1.3.5\ldots(1+n)]^2}{[1.3.5\ldots(2i-1)]^2}.\end{aligned}$$

Comparons ces valeurs à celles qui résultent directement du développement du radical F. En négligeant les carrés et les puissances supérieures de μ et de μ', on a

$$F = [r^2 - 2rr' \cos(\omega - \omega') + r'^2]^{-\frac{1}{2}} + rr'\mu\mu'[r^2 - 2rr'\cos(\omega - \omega') + r'^2]^{-\frac{3}{2}}.$$

Le premier terme de cette valeur renferme toute la partie de F indépendante de μ et de μ', et le second toute la partie qui ne dépend que de la première puissance de ces variables. Développons les deux radicaux par la méthode que nous avons déjà employée nº 50, livre II. Si l'on nomme c le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité, et qu'on substitue pour $\cos(\omega - \omega')$ sa valeur en exponentielles imaginaires, le radical $[r^2 - 2rr'\cos(\omega - \omega') + r'^2]^{-\frac{1}{2}}$ pourra être mis sous cette forme,

$$\left(r - r'c^{(\omega-\omega')\sqrt{-1}}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(r - r'c^{-(\omega-\omega')\sqrt{-1}}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Si l'on développe les deux facteurs de cette expression, qu'on multiplie ensuite l'une par l'autre les séries résultantes, on trouvera aisément que le coefficient de $\frac{r'^i}{r^{i+1}}\left(\frac{c^{n(\omega-\omega')\sqrt{-1}} + c^{-n(\omega-\omega')\sqrt{-1}}}{2}\right)$, ou de $\frac{r'^i}{r^{i+1}}\cos n(\omega - \omega')$, est égal à

$$2 \cdot \frac{1.3.5\ldots(i+n-1).1.3.5\ldots(i-n-1)}{2.4.6\ldots(i+n).2.4.6\ldots(i-n)}.$$

C'est la valeur de H_n dans le cas où $i - n$ est pair, et où l'on suppose $\mu = 0$ et $\mu' = 0$; en la comparant à la valeur trouvée plus haut, on a

$$\beta_n = 2.\left[\frac{1.3.5\ldots(2i-1)}{1.2.3\ldots i}\right]^2.\frac{i(i-1)\ldots(i-n+1)}{(i+1)(i+2)\ldots(i+n)}.$$

Il ne faut prendre que la moitié de ce coefficient, dans le cas où $n = 0$; on a alors

$$\beta_0 = \left[\frac{1.3.5\ldots(2i-1)}{1.2.3\ldots i}\right]^2.$$

On trouvera de la même manière que le coefficient de $\frac{r'^i}{r^{i+1}}\mu\mu'\cos n(\omega - \omega')$ dans F, est

$$2.\frac{1.3.5\ldots(i+n).1.3.5\ldots(i-n)}{2.4.6\ldots(i+n-1).2.4.6\ldots(i-n-1)}.$$

C'est la valeur de H_n, quand $i - n$ est impair, et qu'on néglige les carrés et les puissances supérieures de μ et μ'. Si on la compare à celle que nous avons trouvée plus haut, dans le même cas, on a

$$\beta_n = 2.\left[\frac{1.3.5\ldots(2i-1)}{1.2.3\ldots i}\right]^2.\frac{i(i-1)\ldots(i-n+1)}{(i+1)(i+2)\ldots(i+n)}.$$

Ainsi l'expression de β_n est la même dans le cas de $i - n$ pair et dans le cas de $i - n$ impair. Si $n = 0$, on aura, comme précédemment,

$$\beta_0 = \left[\frac{1.3.5\ldots(2i-1)}{1.2.3\ldots i}\right]^2.$$

En substituant pour β_n sa valeur dans l'équation (k), on aura la valeur générale de H_n.

18. Avant d'aller plus loin, nous allons démontrer deux propriétés remarquables des fonctions de l'espèce de celles que nous avons désignées par P_i, et qui nous seront utiles dans les recherches suivantes. Soient Y_i et Z_n deux fonctions rationnelles et entières de μ, $\sqrt{1-\mu^2}\sin\omega$ et $\sqrt{1-\mu^2}\cos\omega$, qui satisfont à l'équation (C), on aura généralement, i étant supposé différent de n,

$$\int\int Y_i Z_n\, d\mu\, d\omega = 0,$$

les intégrales étant prises depuis $\mu = -1$ jusqu'à $\mu = 1$, et depuis $\omega = 0$ jusqu'à $\omega = 2\pi$.

En effet, par la définition même des fonctions Y_i et Z_n, on aura

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d.(1-\mu^2)\dfrac{dY_i}{d\mu}}{d\mu} + \frac{\dfrac{d^2Y_i}{d\omega^2}}{1-\mu^2} + i(i+1)Y_i = 0,\\ &\frac{d.(1-\mu^2)\dfrac{dZ_n}{d\mu}}{d\mu} + \frac{\dfrac{d^2Z_n}{d\omega^2}}{1-\mu^2} + n(n+1)Z_n = 0. \end{aligned}\right\}(o)$$

La première de ces équations, en la multipliant par $Z_n\, d\mu\, d\omega$, donnera

$$\begin{aligned} i(i+1)\int\int Y_i Z_n\, d\mu\, d\omega = &-\int\int Z_n \frac{d.(1-\mu^2)\dfrac{dY_i}{d\mu}}{d\mu}\, d\mu\, d\omega \\ &-\int\int \frac{Z_n \dfrac{d^2Y_i}{d\omega^2}}{1-\mu^2}\, d\mu\, d\omega. \end{aligned}$$

La seconde des équations (o) fournirait une équation semblable. Si l'on retranche l'une de l'autre ces deux équations, qu'on observe qu'en intégrant relativement à μ, on a

$$\int Z_n \frac{d.(1-\mu^2)\frac{dY_i}{d\mu}}{d\mu}d\mu - \int Y_i \frac{d.(1-\mu^2)\frac{dZ_n}{d\mu}}{d\mu}d\mu$$
$$= (1-\mu^2)\frac{dY_i}{d\mu}Z_n - (1-\mu^2)\frac{dZ_n}{d\mu}Y_i,$$

quantité qui se réduit à zéro lorsque les intégrales sont prises depuis $\mu = -1$ jusqu'à $\mu = 1$.

Qu'on observe de même qu'en intégrant relativement à ω, on a

$$\int Z_n \frac{d^2 Y_i}{d\omega^2}d\omega - \int Y_i \frac{d^2 Z_n}{d\omega^2}d\omega = Z_n\frac{dY_i}{d\omega} - Y_i\frac{dZ_n}{d\omega},$$

quantité qui se réduit encore à zéro lorsque les intégrales sont prises depuis $\omega = 0$ jusqu'à $\omega = 2\pi$, parce que les valeurs de Y_i, $\frac{dY_i}{d\omega}$, Z_n, $\frac{dZ_n}{d\omega}$, sont les mêmes à ces deux limites ; on trouvera

$$i(i+1)\int\int Y_i Z_n d\mu.d\omega = n(n+1)\int\int Y_i Z_n d\mu.d\omega = 0.$$

On a donc généralement, si n est différent de i,

$$\int Y_i Z_n d\mu.d\omega = 0.$$

Supposons maintenant $i = n$. La seconde propriété qu'il s'agit de démontrer consiste en ce que si l'on désigne comme plus haut par Y_n une fonction quelconque, entière et rationnelle du degré n, des trois quantités μ, $\sqrt{1-\mu^2}\sin\omega$, et $\sqrt{1-\mu^2}\cos\omega$ qui satisfasse à l'équation (C), que l'on nomme P_i une fonction de même nature du degré i, qui entre dans les séries (m) et (n), n° **16**, et qu'on donne aux intégrales

les mêmes limites que précédemment, on aura généralement

$$\int\int P_i Y_i \, d\mu \, d\omega = \frac{4\pi Y'_i}{2i+1},$$

en désignant par Y'_i ce que devient la fonction Y_i quand on y change θ et ω en θ' et ω'.

En effet, reprenons la valeur de P_i que nous avons trouvée n° **17**. Si l'on remplace les coefficients H_0, H_1, H_2, etc., par leurs valeurs, que l'on fasse, pour abréger,

$$F_i = \left[\frac{1.3.5\ldots(2i-1)}{1.2.3\ldots i}\right]\left(\mu^i - \frac{i.i-1}{2.2i-1}\mu^{i-2} + \frac{i.i-1.i-2.i-3}{2.4.2i-1.2i-3}\mu^{i-4} - \ldots\right),$$

et qu'on désigne par A_0, A_1, B_1, etc., des coefficients indépendants des variables ω et θ, on pourra lui donner cette forme,

$$\begin{aligned} P_i = A_0 F_i &+ (A_1 \cos\omega + B_1 \sin\omega)\sin\theta \frac{dF_i}{d\mu} \\ &+ (A_2 \cos 2\omega + B_2 \sin 2\omega)\sin^2\theta \frac{d^2F_i}{d\mu^2} \\ &+ (A_3 \cos 3\omega + B_3 \sin 3\omega)\sin^3\theta \frac{d^3F_i}{d\mu^3} \\ &+ \text{etc.} \end{aligned}$$

les constantes A_0, A_1, B_1, etc., représentant des quantités dont les valeurs ont été déterminées n° **17**.

En multipliant par des coefficients arbitraires chacun des termes de la valeur précédente, on aura l'expression la plus générale de la fonction entière et rationnelle des trois quantités $\cos\theta$, $\sin\theta\cos\omega$, et $\sin\theta\sin\omega$ du degré i, qui satisfait à l'équation aux différences partielles (C); en changeant l'indice i en n, on pourra donc supposer généralement

$$Y_n = A'_0 F_n + (A'_1 \cos\omega + B'_1 \sin\omega)\sin\theta \frac{dF}{d\mu}$$
$$+ (A'_2 \cos 2\omega + B'_2 \sin 2\omega)\sin^2\theta \frac{d^2F}{d\mu^2}$$
$$+ (A'_3 \cos 3\omega + B'_3 \sin 3\omega)\sin^3\theta \frac{d^3F}{d\mu^3}$$
$$+ \text{etc.},$$

A'_0, A'_1, B'_1, etc., représentant ici des constantes absolument arbitraires.

Si l'on multiplie l'une par l'autre les deux expressions précédentes, qu'on substitue pour $\sin\theta$ sa valeur $\sqrt{1-\mu^2}$, et qu'après avoir multiplié le produit par $d\mu\, d\omega$, on effectue l'intégration relative à ω entre les limites $\omega = 0$ et $\omega = 2\pi$, il est aisé de s'assurer qu'on aura entre ces limites

$$\left.\begin{aligned} \iint P_i Y_n d\mu\, d\omega = 2\pi \int d\mu \Big\{ & A_0 A'_0 F_i F_n \\ & + \tfrac{1}{2}(A_1 A'_1 + B_1 B'_1)(1-\mu^2)\frac{dF_i}{d\mu}\frac{dF_n}{d\mu} \\ & + \tfrac{1}{2}(A_2 A'_2 + B_2 B'_2)(1-\mu^2)^2\frac{d^2F_i}{d\mu^2}\frac{d^2F_n}{d\mu^2} \\ & + \text{etc.} \Big\}. \end{aligned}\right\} (s)$$

On voit qu'il n'entre dans cette expression que des quantités résultant de la combinaison des termes des séries P_i et Y_n qui dépendent des mêmes multiples de $\cos n\omega$ et $\sin n\omega$, tous les autres termes disparaissent d'eux-mêmes par l'intégration, en sorte que l'expression précédente se réduirait d'elle-même à zéro, s'il n'y avait dans les deux séries aucun terme semblable.

On peut faire prendre à la formule (s) une forme