1799. Maio 24 — Mathematica

N. 10.
Mathematica

Fr. Joaquim J. de M.ª Sant Anna —
Benedictino

Dissertatio
in qua
Veterum Geometrarum Analysis explicatur

Analyseos nomine non idem Veteres Geometræ exprimere voluerunt, quod vulgo Mathematicæ Analyseos voce exprimi solet. Cum itaque nobis injunctum sit Veterum Geometrarum Analysim explicare, illud imprimis quæramus oportet, quid apud eos Analysis dicatur, ac deinde quæ ejus natura, et usus: atque hoc prioris partis argumentum erit. Tum Veterum Analysim cum ea Recentiorum comparabimus ut illius indoles amplius manifestetur. Denique appendicis loco Analyseos Diophanteæ examen suscipiemus, collatione cum hodierna Analysi instituta, ut, qui fuerit apud Veteres algorithmi analytici, seu Algebræ usus, pateat.

Pars prima
Quid Veterum Geometrarum Analysis, et quæ ejus natura, et usus?

Veteres Geometræ, ut in præfatione lib. 7. Collectionum Mathematicarum Pappi Alexandrini legitur, duplicem agnoscebant viam, qua in rebus Geometricis procederent, aliam compositionis, aliam resolutionis; seu Synthesim et Analysim. Synthesim vocabant methodum, quæ ex notis principiis veritatibusque demonstratis proficiscitur, et iis inter se comparatis aliud atque aliud elicit, donec ad illud, quod quæritur, perveniat.

Hæc methodo pleraque Veterum Geometrarum (*) opera conscripta sunt, est enim dysciplinis tradendis accomodatior, quippe quæ lectorem ex alia veritate in aliam veluti manuducit. Vix tamen nova perquirendo idonea, nisi illius, quod quæritur, cum principiis connectis jam satis innotescat.

Analysis contrariam init viam „A quæsito tanquam concesso„ ait Pappus„ progreditur„ per ea, quæ „deinceps consequuntur ad aliquod concessum in com„positione. In Resolutione enim id quod quæritur „tanquam factum ponentes, quid ex hoc contingat „consideramus, et rursum illius antecedens, quousque „ita progredientes incidamus in aliquod jam co„gnitum, vel quod sit ex numero principiorum.

Analysis igitur incipit verum ponens quod quæritur, si de theoremate agitur; factumve quod petitur si de problemate inveniendo est quæstio; tum quid ex eis consequatur investigat consecutiones alias cum aliis confert; principia, ac theoremata antea demonstrata ad rem adducit; usque donec in aliquid incidat manifeste verum, aut falsum possibile aut impossibile; quod de natura quæsiti judicium ferre docet, simulque viam monstrat, qua componenda sit demonstratio si methodo synthetica exponere maluerimus.

In hoc itaque utraque differt methodus, quod prior e pluribus veritatibus inter se collatis

(*) Veteres Geometras eos dicimus, qui ab ortu Geometriæ usque ad extinctionem Scholæ Alexandrinæ anno 641 J.C. floruerunt.

novam quasi conflat, ideoque Synthesis, hoc est compositio vocatur: posterior autem suppositam veritatem in suas veluti partes resolvit, ut eas seorsim contempletur, tum alias cum aliis confert, ut de suppositionis natura judicet; ideoque Analysis seu Resolutio nuncupatur.

Praeclara haec methodus (Analytica scilicet) maximum illud fuit Veteribus (ne dicam Recentioribus etiam) ad nova excogitanda instrumentum, ut Pappus ipse est testis, qui eam maximopere commendat. Ejus inventio Platoni vulgo accepta refertur; rariora sunt autem apud Veteres Geometras ipsius exempla quam Syntheticae, hanc enim magis naturalem atque solam fere Geometriae tradendae accomodatam putabant; ita ut in paucis illis, quae apud eos reperiuntur, Analyseos exemplis, quae Analyticae invenerint plerumque componere doceant, ne ab Synthetica methodo recedere videantur.

Extant tamen quaedam Analytice conscripta; ut Euclidis Datorum liber singularis Porismatum tres: Appollonii varia; quaedam Aristaei atque Eratosthenis. Archimedes non raro ea utitur, ut in libro 2 de Sphaera et Cylindro videre est, qui totus fere Analyticus est: Pappus vero in resolutione problematum nunquam non ea utitur. Sed operae pretium est exemplis rem illustrare.

Ex. I. Propositum sit problema. Datam Sphæram plano secare ita ut superficies segmentorum datam rationem inter se invicem habeant. (Archim. de Sphæ. et Cylind. Lib. 2 prop. 3)

Fig. 1.a Sit sphæra ADBE secanda plano, ut vult propositio, atque jam secta ponatur ut experiamur quid inde consequatur. Ratio data sit F : C; et plano DLEM divisâ sphærâ, superficies segmenti ADE sit ad superficiem segmenti DBE, ut F : C;

Quoniam Sphæra ADE est per hypothesin secta plano DMEL dabitur punctum G. in quo diameter quidam perpendicularis AB a plano secatur: dabuntur itaque AG, GB; sed G etiam datur, ergo dantur DA, DB, quæ angulum rectum conficiunt ADB: daturque item DG. Ergo omnia dantur in triangulis rectangulis ADB, DBG, ADG. His positis sic ratiocinor.

Cum triangula ADB, DBG, ADG sint similia, erit AD : DB :: GA : GD vel quadratum AD : quadr. DB :: quadr. AG : quadr. GD. sed AG, DG, GB sunt continue proportionales, ergo AG : GB :: quadr. AG : quad. DG :: quadr. AD : quadr. DB

Atqui superficies segmenti ADE æqualis est circulo intervallo AD descripto (per prop. 36 Lib. de Sphæra et Cylindro): et superficies DBE æqualis circulo radio DB descripto, qui circuli sunt ut quadrata radiorum; ergo ratio AG : GB est eadem ac ratio superficierum ADE :: BDE nempe :: F : C. In hoc igitur solutio problematis posita est ut axis Sphæræ dividatur puncto G in ratione F : C quod facile est, jamque antea demonstratum ponitur, ideoque problema solutum est.

Nunc autem si methodo Synthetica idem problema exponere voluerimus, ordiemur unde terminabimus, et ordi—

ordinem præposterum sequemur hoc modo.

Dividatur axis Sphæræ AB in puncto G ratione F:C; et ducto per G plano DL. EM. ad axim perpendiculari Sphæra secetur. Dico superficies segmentorum fore ut F:C

Nam ductis AD. DB erit ut supra AG:GB :: $AG^2 : DG^2$ :: $AD^2 : DB$ :: circ. radio AD descriptum : circ. descri. radio DB. sed superficies segmenti ADE æqualis est circulo cujus radius AD: superficies autem BDE æqualis circulo cujus radius DB. Ergo superficies segmentorum ADE : BDE :: AG : GD :: F:C ut erat demonstrandum

In hoc exemplo videre est quomodo Analysis problematis solutionem expediat, ad eam ducens recto tramite mirabilique prorsus modo. Primo incipit factum ponens quod desideta... , tum quid ex eo consequatur perpendit; atque ex alia in aliam consecutionem pergens, in illud incidit quod datur. nempe quod ratio AG ad GB eadem sit ac ratio segmentorum Sphæræ; quod facilem constructionem suppeditat ad eam rite secandam.

E contrario Synthesis nonnisi tradendo, cujus jam veritatem perspexisset, idonea foret.

Ex II. Datis duobus Sphæræ segmentis, sive ejusdem, sive non, invenire segmentum Sphæræ, quod sit alteri datorum simile, superficiem vero habeat æqualem superficiei segmenti alterius. (Archim. de Sphæra et Cylind. lib. 2. prop. 6ª).

Fig. 2.

Dentur Sphærarum vel Sphæra ejusdem duæ sectiones ABC, DEF quarum alteri, nempe ABC quæratur simile Sphæra segmentum, habens præterea superficiem æqualem superficiei alterius portionis EDF: atque jam inventum ponatur, et esto quæsitum segmentum KLM. Imaginemur divisas Sphæras planis actis per centra ad sectiones perpendicularibus orienturque maximi circuli quorum diametri DH, EG, LN: ducantur item rectæ BC, EF, LM.

Quoniam superficies segmenti LKM æqualis est superficiei EDF, erit LM æqualis ipsi EF (prop. 36 Lib. I.) at vero segmenta LKM, BAC sunt similia; ergo anguli CBP, MLR sunt æquales (quia similes sunt angulorum in similibus circulorum segmentis inscriptorum) sicut etiam PHC, RNM; ergo triangula BHC, LNM similia; eritque BC : BH :: LM : LN. At BC, BH, LM dantur, ergo datur etiam LN facileque erit Sphæram LKN describere. Sed datur magnitudo LM ergo datur punctum M per quod ducto plano ad axim LN perpendiculari secabitur Sphæra ut vult problema.

Facile nunc erit problema componere sequenti modo.

Fiat

Fiat ut BC : EF ita BH ad quartam quandam LN qua ut diametro circulus LKNM describatur. tum per punctum L ducatur LM = EF (circulo nempe discripto cujus radius EF) atque e puncto M demittatur perpendicularis MR super LN. Demum revoluto circulo LMNK circa LN generetur Sphæra, a circulo secanda, qui ex radio RM revoluto oritur. Dico portionem RLM eam esse quæ requiritur.

Quoniam BC : LM :: BH : LN, et insuper anguli BCH, LMN æquales, quia recti, erunt triangula BCM, LMN similia (prop. 7 lib. 6 Eucl.) ideoque angulus HBC æqualis angulo MLN: sed sunt semisses angulorum in segmentis BAC, LKM inscriptorum (ut patet) ergo segmenta ipsa sunt similia. Quod 1° demonstrandum erat.

Jam vero cum LM per constructionem sit æqualis EF; erunt superficies LKM, EDF æquales, ut erat secundo probandum.

Ex III. Circuli portione data, in recta linea AB inflectere ACB in data proportione C : F (Pappus lib. 7. Collect. Mathem. prop. 155) Fig. 3.a

Cum Analytica problema quodcumque resolvere contendimus satis non est illud inventum ponere nisi hanc suppositionem cum aliquo theoremate jam invento comparare noverimus, ex quo illi lumen affulgeat, ut quæsiti cum cognitis relatis manifestetur. Pappus in hoc problemate elegantissimam init viam tangentem CD:

ducens

ducens ad punctum C per hypotesin inventum. Nam ex hac constructione triangula oriuntur similia ACD, CBD; in quibus primo per hypotesin est $AC : CB :: E : F$ deinde per triangulorum similitudinem $AC : CB :: AD : DC :: DC : BD$ sunt itaque tres AD, DC, DB continue proportionales ideoque $AD : BD :: AD^2 : DC^2$ sed ratio $AD^2 : DC^2 =: AC^2 : CB^2 = E^2 : F^2$; nempe data. Ergo facto $AD : BC :: E^2 : F^2$ vel $E^2 - F^2 : E^2 :: AB : AD$, invenietur punctum D per quod ducta contingens DC efficiat problema.

En alteram ejusdem problematis solutionem non minus elegantem.

Fig. 4a

Cum punctum D per hypoth. detur, dabitur etiam angulus ACB. Describatur itaque integer circulus ACBD dividaturque angulus ACB bifariam recta CD, quae secabit AB in puncto quodam G, ita ut (prop. 3 lib 6 Elemen.) $AG : GB :: AC : CB$, nempe in ratione data $E : F$. Sed CD arcum ADB bifariam etiam dividit in D; sunt namque arcus AD et DB bases angulorum aequalium ACD, DCB. Ergo duo facile dantur puncta D et G per quae recta DG transiens punctum quaesitum C determinabit ut vult problema.

Facile esset hoc problema componere, ideoque in eo non immorabimur.

In-

In exemplis modo adductis videre est quomodo Analysis in novis dificultatibus solvendis se gerat, et quam feliciter ab eis se expediat. Syntesis vero ad veritatem tendens, quam ubi consistat, ignorat, nescit quo cursus suos dirigat, sed quasi fortuito in eam incedit; ideoque potius tradendo quod novit, quam inveniendo, quod ignorat inservit. Analysis tutius incedit res tractat quas bene novit cum illa quam quærit cohærere; ideoque certa est se veritatem aut falsitatem illius reperturam, modo Geometra qua per est sagacitate præditus sit.

Quod etiam Analysim maximopere commendat est proprietas, qua gaudet quæstionem aliam ad aliam reducendi, mutuam earum conexionem ostendens, ita ut si dificultatem omnino tollere non valeat, saltem, in quo sit posita, et quam viam in ejus solutione sequendam, liquido demonstret.

Exemplo sit propositio 1 lib. 2 Archim. de Sphæra et Cylindro in qua Sphæram dato Cono vel Cylindro æqualem invenire contendit: hoc enim Analytice quærens in problema incidit duarum mediarum proportionalium adeo celebre apud Veteres, quippe quod cum problemate Deliaco conjunctum sit, sed vacat idem problema hîc apponere, ut Analyseos præstantiam, et usum ulterius ostendamus. // Supponatur factum quod proponitur, et offeratur Sphæra B æqualis cono seu Cylindro A. Fig. 5.a

Cum.

Cum Sphaera B per hypoth. detur, poterit ei circumscribi Cylindrus LGH. qui Sphaera erit sesquialter (per Manifest. 9 post prop. 31 lib. Nº). Fiat etiam Cylindrus CFD Cylindri A ac proinde Sphaerae B sesquialter, (super aequalem scilicet basim CD, altitudine vero sesquialtra EF). Fingatur denuum ut CD: GH sic GH: ad tertiam quandam M.

Quoniam Cylindri CFD, GLH ad Sphaeram B eandem rationem habent, nempe sesquialteram, sunt aequales: ideoque ut basis CD ad basim GH hoc est ut $CD^2 : GH^2$ sic KL : EF. Atqui trium continue proportionalium ÷ CD: GH: M, est CD: M :: $CD^2 : GH^2$; ergo quoque CD: M :: KL : EF, vel CD : GH :: M : EF; sed ratio CD : GH eadem est ac GH : M; ergo CD: GH :: GH : M :: M : EF; seu ÷ CD : GH :: M :: EF.

Solutio igitur problematis in hoc posita est, ut inter basim CD dati Cylindri, atque ipsius sesquialteram altitudinem EF, duas medias proportionales invenire liceat, quibus inventis facile Sphaera conficeretur; sicut etiam si Sphaeram dato Cylindro conficere aequalem liceat, duas medias proportionales inter duas datas lineas inserere fas esset. Sed hoc

regula

regula et circino conficere nondum liquit.
Hæc de Analysi Veterum Geometrarum in se ipsa considerata dicta sufficiant; nunc operæ pretium est eam cum Recentiorum Analysi conferamus, ut ejus indoles, ac natura amplius manifestetur.

Pars II.

Analyseos Veterum Geometrarum cum Analysi Recentiorum Comparatio.

Analysis apud Recentiores Geometras scientia illa dicitur, quæ magnitudines in abstracto contemplatur, easque ad calculum revocare docet, signis quibusdam magnitudines ipsas, imo et ratiocinationes super ipsis factas repræsentans; ita ut, et menti, et oculis perpetuo præsentes fiant.

Scilicet quantitates, quæ in diversis Matheseos partibus contemplantur, etiam si ad quoddam peculiare objectum semper referantur, numeros puta, lineas, spatia etc. easdem tamen inter se relationes habent quas nihil prohibet quin eisdem signis exprimantur. Ars itaque quantitates quascunque signis universalibus exprimendi signaque ipsa more quantitatum subducendi Analysis a Recentio-

ribus

ribus nuncupatur.

Signa quibus Analysis hodierna utitur, talia profecto sunt excogitata, ut non modo cognitas quantitates, sed et incognitas quascumque representare valeant; ideoque eorum ope utrarumque relationes, et exprimi, et calculo subduci possunt: quod miram quandam facilitatem præbet ad nova sive theoremata, sive problemata investiganda.

Duo itaque in hodierna Analysi distingui oportet, Algorithmum scilicet ipsius et hujus adplicatio solvendis problematibus.

Algorithmo analytico signa intelligimus, quibus quantitates designari placuit: etiam quæ illa quibus earum affectiones exprimi inter Mathematicos convenit, Additionem puta, subtractionem, multiplicationem, divisionem elevationem ad potestates, radicum extractionem, æqualitatem etc. facilesque hæc peragendi methodos. Hujusmodi vero Algorithmi ad solutionem problematum applicatio Analysis proprie dicta vocanda est.

In hoc duplici capite Analysim hodiernam cum Veterum methodo sigillatim comparabimus.

Sed antequam ulterius procedamus animadvertere juvat, quod ex Algorithmi ipsius praxi et usu plures oriantur veritates, quæ analytice

inventa

inventæ falso dicuntur cum potius Syntetice sint repertæ. Sic ex. gratia conventione supposita, quæ factum ex a in b exprimi convenit per ab, sequitur factum ex a+b in a+b fore $a^2+2ab+b^2$ prout in prop. 4 lib. 2. Elem. demonstratur lineis applicatum. Simili modo quicumque sit valor ipsorum a et b patet fore $(a-b)b+(\frac{1}{2}a-b)^2=(\frac{1}{2}a)^2$ (prop. 5 lib. 2.). Itemque $(a+b)^2+b^2=2(\frac{1}{4}a^2-(\frac{1}{2}a+b)^2)$ (prop. 10 ejusd. lib.).

At vero nemo contendet hujusmodi theoremata analytice demonstrata esse, cum clarissime pateat progressum ex alia in aliam veritatem fieri, absque ulla inventi suppositione, quod manifesto Synthesis est.

Ut hoc clarius adhuc pateat, esto semicirculus AMB cujus centrum C. E quovis Fig. 6ª peripheriæ puncto M demittatur perpendicularis MP in diametrum AB, ducaturque CM. Erit per prop. 47 lib. 1° Elem. quadratum ex CM æquale quadratis ex CP et ex PM. Exprimatur autem hæc proprietas more algebrico. Habebitur æquatio $CM^2=CP^2+MP^2$, ex qua, Algorithmi analytici vi sequentia ducuntur consectaria.

1°. $MP^2 = CM^2 - CP^2 = (CM + CP)(MC - CP)$; quod docet Differentiam duorum quadratorum æqualem esse rectangulo ex summa et differentia laterum ipsorum.

2°. $MP^2 = AP \cdot BP$; quod valde notabilem circuli proprietatem patefacit, simulque ostendit quomodo circuli ope conficiendum quadratum dato rectangulo æquale vel vice versa: Prop. 14 lib. 2 Elem.

3°. Æquatione $PM^2 = AP \cdot PB$ in proportionem conversa habebitur $AP : PM :: PM : PB$, quod usum circuli ostendit ad mediam proportionalem inter duas datas lineas inveniendam. Prop. 13. lib. 4 Elem.

4° Ducantur MB et MA erit item $MB^2 = PM^2 + PB^2$ vel (valore PM^2 substituto)..... $BM^2 = AP \cdot PB + PB^2 = AB \cdot PB$; unde $PB : BM :: BM : AB$ quod docet similia esse triangula AMB, BMP. (Prop. 8 lib. 4); ideoque angulum AMB rectum; ut etiam conficere liceret ex eo quod MP sit media proportionalis inter AP et PB.

5.° Quoniam $BM^2 = AB \cdot PB$, et similiter $AM^2 = AB \cdot AP$ erit $MB^2 : AM^2 :: PB : AP$

AP. Qua proprietate superius usi sumus in exemplo 4.°

Hæc igitur, quæ ex propositione quadam ad circulum applicata algorithmi auxilio deduximus, satis aperte ostendunt, non idem esse algebraice quidquam demonstrare, quam analytice demonstrare: sunt namque Synthetica methodo manifesto deducta. Etsi algebrico more et lingua.

Quod si Analyseos exempla algebrico more tractata volumus, ut utraque methodus conferatur, en exempla superius allata algebrice iterum soluta.

Ex 1. Sphæram ADBE in duo segmenta dividere, quæ datam inter se habeant rationem... f:c Analista recentior incipiet, quem admodum vetus Geometra, problema jam solutum supponens, dicet que. Fig. 1.°

Quoniam secta est Sphæra, ut vult propositio, dabitur punctum G in quo diameter perpendicularis AB a plano secatur. Vocetur itaque AG, x; AB, a; ratioque diametri ad peripheriam esto 1:c. Erit superficies ADE = cax; superficies vero DBE = c(a−x)a ideoque cax : ca(a−x) :: f : c seu x : a−x :: f : c. Quod ostendit rationem superficierum inveniendarum, eandem esse ac ratio segmentorum diametri AB: cum autem illa detur, hæc etiam dabitur, atque ita, diviso diametro AB in ratione f : c, invenietur punctum G per quod planum

perpendiculariter

perpendiculariter transiens, efficiet problema.

Ex II. Sphæram invenire in qua segmentum existere possit datam superficiem habens datoque segmento simile.

Fig. 2.a Ponatur inventum quod quæritur, et esto Sphæra LKMN, cujus segmentum LKM aequale superficie ipsi CDF, simile vero BAC.

Quoniam LN et LR per hipothesin dantur pono LN, x; LR, y; BP, b; BC, a; rationem diametri ad peripher. :: $1 : c$ superficiem datam $CDF = ce^2$. Erit 1° $cxy = ce^2$, 2° $x : y :: a : b$; ex quibus $\frac{bx^2}{a} = e^2$ seu $x = e\sqrt{\frac{a}{b}}$. Quod facile construi posset, et ad Archimedeam solutionem adduci.

Ex III. Circuli portione data AB inflectere ACB in data ratione $e:f$.

Fig. 3.a Inventum ponatur quod quæritur; ducatur contingens CD ut supra, et fiant $AB = a$, $BD = x$, $CD = y$. Erit 1° $x : y :: y : a+x$, 2° $AC : CB :: y : x :: e : f$. ex quibus fiet $x = \frac{af^2}{e^2-f^2}$ seu $e^2-f^2 : f^2 :: a : x$.

Ex IV. Sphæram invenire dato Cylindro æqualem.

Ponatur inventa Sphæra, et esto ejus diameter $= x$, Cylindri altitudo $= h$, basis vero diameter $= d$; erit $\frac{cx^3}{6} = \frac{cd^2h}{4}$ seu $x^3 = \frac{3}{2}hd^2$. Atqui data proportione ..... ÷ $m : n : p : q$, erit $m : q :: m^3 : n^3 = m^2q$, ergo pariter

d: —

$d : \frac{3}{2}h :: d^3 : x^3$, seu $\div\, d : x : y\, \frac{3}{2}h$. Ex quo patet problematis solutionem ab inventione duarum mediarum proportionalium pendere, ut supra ostendimus.

Iam vero si ad methodum attendimus qua hæc problemata sunt soluta, facile animadvertimus eandem prosus esse, ac illa Veterum nisi forte lingua aliquanto discrepet, qua sunt exposita. Ita ut mirum profecto sit, a quibusdam in dubium vocari an Veteres Geometræ Analysin possederint; quasi in verbis et non in methodo Analysis consisteret. Imo vix credi poterit Veteres Geometras, quousque pervenit Geometriam perducere potuisse, et Analyseos auxilio destitutos. Certum quidem est hodiernum Analyseos Algorithmum eis fuisse ignotum, aut si quis apud eos erat de illo ad Geometriam applicando non cogitasse: sed ut iterum dicam, idem non est aliquid algebrice, ac analytice demonstrare: nemo autem in dubium vertet Veteres Analysin quandam Geometricam tenuisse ab hodierna reapse non diversam.

Etiam si vero vetus et recentior Analysis inter se re ipsa non differant, modus tamen quo utraque operatur magnam constituit inter eas differentiam, quoad evidentiam, qua mentem afficiunt. Vetus namque methodus veritatem non modo certissime demonstrat, sed quasi oculis ostendit, ita ut et mentem et oculos lumine suo perfundat: dum Recentior assensum potius rapit, quam alicit mentemque potius convincit quam illustrat.

Nec tamen hoc dictum volumus, quasi Analyseos hodiernae laudi quidquam detractum velimus, fatendum quippe est, quod absque ejus auxilio nunquam in hodiernam amplitudinem Mathesis universa pervenisset: sed veteri methodo sua laus tribuenda imo et dolendum eam a Recentioribus adeo sperni cum saepe brevior atque elegantior evadat.

Exempli loco esto problema simplicissimum propositione 25 lib. 3. Elem. solutum scilicet: Circuli portione data integrum circulum describere: quod Euclides facillime resolvit Analysta autem hodiernus non nisi magno adparatu, ut videre est.

Fig. 7.ª Esto circuli portio ACB cujus radium inveniri oporteat, ut integer circulus describatur.

Ponatur circulum descriptum atque e quovis dati segmenti puncto C ducatur CD per centrum circuli transiens, ducanturque item AB, AC, CB, AD, DB. Fiant $AB = d$, $AC = b$. $BC = c$, $DC = 2x$

Quoniam DC per centrum transit erunt anguli DAC, DBC recti ideoque $AD = \sqrt{4x^2 - b^2}$ . . . . . .

$DB = \sqrt{4x^2 - c^2}$; sed per proprietatem circuli notissimam est $AD \cdot CB + DB \cdot AC = AB \cdot CD$; igitur linearum valoribus substitutis, $2dx = c\sqrt{4x^2 - b^2} + b\sqrt{4x^2 - c^2}$; unde eruetur $x = \frac{bcd}{\sqrt{4c^2d^2 - (d^2 + c^2 - b^2)^2}}$.

Quis autem non videt quanto apparatu ad valorem ipsius x definiendum opus fuerit, quantoque adhuc labore formula haec construenda, cum e contrario Euclidea methodo facilime radius inveniatur.

Sed et hoc idem in exemplis superius allatis videre est nam etsi facilius algebrice reperta videantur, tamen cum adhuc construenda sint, parem ne dicam majorem pariunt laborem, quam priori methodo; ne elegantiam commemorem atque evidentiam, quae sunt velut oculis exposita, quibus procul dubio longe antecellunt.

Per ea itaque quae superius dicta sunt manifestum fit, est reor, Veterum Geometrarum Analysim cum Analysi Recentiorum cohaerere quoad methodum, qua utraque novas perquirit veritates, quod vere Analysis est. Etsi vero sermone aliquanto differant, tamen difficile non esse quamdam Analogiam, ac similitudinem etiam in hac parte inter illas reperire. Qui enim difficillimas linearum relationes invenire atque exprimere noverunt, quis credat eos, quibuscumque quan-

titatibus

titatibus easdem cum lineis relationes habentibus convenire ignorasse? Quod igitur lineis exprimant, hoc in caussa non est cur generaliter expressa non habeantur, quod algorithmi analytici est, lineis enim repraesentari quantitates pari more valent ac litteris. etsi harum supplantandarum facilior sit ratio quam illarum.

Quod si ipsius algorithmi hodierni vestigia apud Veteres reperire opus est, luculentissima quidem habentur apud Diophantum in Quaestionibus Arithmeticis; qui idcirco Algebrae Inventor vulgo habetur. Sed operis ratio postulat, ut in hoc diutius immoremur.

Vestigia hodierni Algorithmi Analytici apud Diophantum.

Quisnam fuerit Algorithmi Analytici Inventor non satis liquet. Diophantus quidem Quaestionibus suis Arithmeticis quaedam praemittit definitionum, et principiorum loco, quae ut quaedam Algebrae principia, etsi valde imperfecta haberi possunt. Sed adeo breviter sunt exposita, ut videantur ab eo supponi jam ab omnibus nota et trita esse nisi forte in alio opere tractata fuerint, quod ad nos non pervenit. Quidquid autem sit de Algebrae inventore, ex ipso citato opere colligere fas est, quaenam fuerint Algebrae primordia.

Diophantus primo quantitates distinguit in cognitas et incognitas, ut nunc etiam moris est. Cognitae, quia de numeris agitur, sunt ipsi numeri

sive

sive integri, sive fracti, quos alphabeti litteris Græco more exprimit, præposita plerumque nota $\overset{o}{\mu}$, quæ voci μοναδες (unitates) abbreviatio est, exgr. $\overset{o}{\mu}\ \theta$ hoc est unitates 9; $\overset{o}{\mu}\ \kappa$ unit. 20 etc. Sed in eis subducendis jam exercitatum supponit, qui Quæstiones suas aggrediatur. Itaque de incognitis tantummodo designandis, et subducendis occupari necesse est.

Incognitæ quantitates etsi plures aliquando in quæstionem cadere possint, tamen Diophantus miro artificio reliquas præter unam semper excludit, ita ut de una tantum exprimenda regulas tradere opus sit; etiam si ad plures facile methodus extendi posset.

Numerum incognitum, Numerum (αριθμον) per excellenciam vocat, ac nota ς designat, quæ abbreviatio quædam videtur vocis αριθμος, nam casuum terminationes ei sæpe apponit hoc modo, $ς^{οι}$ pro Numerus, $ς^{ον}$ pro Numerum, $ς^{ου}$ pro Numeri, $ς^{ους}$ pro Numeros. Sæpe autem ς duplicat hoc pacto ςς

Additionis nota vel nulla est cum res patet vel particula ϗ (et)

Subductionis signum est ψ decurtatum et inversum sic ⋔; vel voce λειψει, quæ defectu interpetratur.

De Multiplicatione sequentia tradit Diophantus. 1° Potestates Incognitæ ita formare, ac exprimere docet Defin. 2ª. Numerus (Incognitus scilicet) in numerum ductus facit potentiam. (δυναμιν) ejus nota est $δ^{υ}$. Qui autem fit ex quadrato seu potentia in suum latus cubus est, cuja nota κ^{υ}. Qui ex quadrato in se ipsum multiplicato, quadrato quadratus est, ejus nota $\delta\delta^{\upsilon}$. Qui fit ex quadrato in cubum ab eodem latere profecto, quadrata cubus nominetur, nota ejus $\delta\kappa^{\upsilon}$. Qui ex cubo in se ipsum ducto nascitur cubocubus vocatur, et nota ipsius est $\kappa\kappa^{\upsilon}$.

Series Potest. ς, δ^{υ}, κ^{υ}, $\delta\delta^{\upsilon}$, $\delta\kappa^{\upsilon}$, $\kappa\kappa^{\upsilon}$, &c.

Valores. . . x, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6, &c.

Deinde incognitam fractionis forma contemplatur, in quo statu nota ς'' designat quæ $\frac{1}{x}$ equivalet. Potestates autem ipsius sequenti modo exprimere et multiplicare docet Definit. 7a

Series Potest. ς'', $\delta\varsigma''$, $\kappa\varsigma''$, $\delta\delta\varsigma''$, $\delta\kappa\varsigma''$, $\kappa\kappa\varsigma''$, &c.

Valores . . . $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^3}$, $\frac{1}{x^4}$, $\frac{1}{x^5}$, $\frac{1}{x^6}$, &c.

Paradigma Multiplicationes fractionis $\varsigma''\left(\frac{1}{x}\right)$

Græca Series.	$\varsigma''\times\varsigma''=\delta\varsigma''$	$\varsigma''.\delta\varsigma''=\kappa\varsigma''$	$\varsigma''\times\kappa\varsigma''=\delta\delta\varsigma''$	$\varsigma''\times\delta\delta\varsigma''=\delta\kappa\varsigma''$	$\varsigma''.\delta\kappa\varsigma''=\kappa\kappa\varsigma''$	&c
Valor.	$\frac{1}{x}.\frac{1}{x}=\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}.\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x^3}$	$\frac{1}{x}.\frac{1}{x^3}=\frac{1}{x^4}$	$\frac{1}{x}.\frac{1}{x^4}=\frac{1}{x^5}$	$\frac{1}{x}.\frac{1}{x^5}=\frac{1}{x^6}$	&c
Ser.		$\delta\varsigma''\times\varsigma''=\kappa\varsigma''$	$\delta\varsigma''.\delta\varsigma''=\delta\delta\varsigma''$	$\delta\varsigma''.\kappa\varsigma''=\delta.\kappa\varsigma''$	$\delta\varsigma''\times\delta\kappa\varsigma''=\kappa\kappa\varsigma''$	
Val.		$\frac{1}{x^2}.\frac{1}{x}=\frac{1}{x^3}$	$\frac{1}{x^2}.\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x^4}$	$\frac{1}{x^2}.\frac{1}{x^3}=\frac{1}{x^5}$	$\frac{1}{x^2}.\frac{1}{x^4}=\frac{1}{x^6}$	
Ser.			$\kappa\varsigma''\times\varsigma''=\delta\delta\varsigma''$	$\kappa\varsigma''.\delta\varsigma''=\delta\kappa\varsigma''$	$\kappa\varsigma''\times\kappa\varsigma''=\kappa\kappa\varsigma''$	
Val.			$\frac{1}{x^3}.\frac{1}{x}=\frac{1}{x^4}$	$\frac{1}{x^3}.\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x^5}$	$\frac{1}{x^3}.\frac{1}{x^3}=\frac{1}{x^6}$	
Series.				$\delta\delta\varsigma''.\varsigma''=\delta\kappa\varsigma''$	$\delta\delta\varsigma''.\delta\varsigma''=\kappa\kappa\varsigma''$	
Val.				$\frac{1}{x^4}.\frac{1}{x}=\frac{1}{x^5}$	$\frac{1}{x^4}.\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x^6}$	
Series					$\delta\kappa\varsigma''.\varsigma''=\kappa\kappa\varsigma''$	
Val.					$\frac{1}{x^5}.\frac{1}{x}=\frac{1}{x^6}$	

Rursus

Rursus integros numeros in fractos ducte hoc modo docet. Difinit. 8.ª

Ser. Græc.	$\varsigma''\cdot\delta^{\upsilon}=\varsigma$	$\varsigma''\cdot\kappa^{\upsilon}=\delta^{\upsilon}$	$\varsigma''\cdot\delta\delta^{\upsilon}=\kappa^{\upsilon}$	$\varsigma''\cdot\delta\kappa^{\upsilon}=\delta\delta^{\upsilon}$	$\varsigma''\cdot\kappa\kappa^{\upsilon}=\delta\kappa^{\upsilon}$
Valor.	$\frac{1}{x}\cdot x^2=x$	$\frac{1}{x}\cdot x^3=x^2$	$\frac{1}{x}\cdot x^4=x^3$	$\frac{1}{x}\cdot x^5=x^4$	$\frac{1}{x}\cdot x^6=x^5$
Ser.	$\delta\varsigma''\cdot\varsigma=\varsigma''$	$\delta\varsigma''\cdot\delta^{\upsilon}=\mu^{\circ}\alpha$	$\delta\varsigma''\cdot\kappa^{\upsilon}=\varsigma$	$\delta\varsigma''\cdot\delta\delta^{\upsilon}=\delta^{\upsilon}$	$\delta\varsigma''\cdot\delta\kappa^{\upsilon}=\kappa^{\upsilon}$
Val.	$\frac{1}{x^2}\cdot x=\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x^2}\cdot x^2=1$	$\frac{1}{x^2}\cdot x^3=x$	$\frac{1}{x^2}\cdot x^4=x^2$	$\frac{1}{x^2}\cdot x^5=x^3$
Ser.	$\kappa\varsigma''\cdot\varsigma=\delta\varsigma''$	$\kappa\varsigma''\cdot\delta^{\upsilon}=\varsigma''$	$\kappa\varsigma''\cdot\kappa^{\upsilon}=\mu^{\circ}\alpha$	$\kappa\varsigma''\cdot\delta\delta^{\upsilon}=\varsigma$	$\kappa\varsigma''\cdot\delta\kappa^{\upsilon}=\delta^{\upsilon}$
Val.	$\frac{1}{x^3}\cdot x=\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x^3}\cdot x^2=\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x^3}\cdot x^3=1$	$\frac{1}{x^3}\cdot x^4=x$	$\frac{1}{x^3}\cdot x^5=x^2$

Hæc de incognita in se ipsam ducenda in quocumque statu. At vero si in datum numerum ducenda sit, primo Incognitam deinde numerum apponit, qui, quoties sit repetenda, denotet hoc pacto $\varsigma\overline{\gamma}$ hoc est Numer. Incog. tres $=3x$; vel item $\delta^{\upsilon}\overline{\eta},\iota\varsigma\,\kappa^{\upsilon}\beta$, quasi dicas Potentias 8 et cubos 2 $=x^2\cdot 8+x^3\cdot 2=8x^2+2x^3$.

Hactenus de monomiis. Polynomia autem cum de monomiis constent, signis Plus Minusve interjectis, de signis modo meminit Diophantus. Defini: 9.ª notissimam circa ea regulam propriis verbis tradens || Minus per Minus multiplicatum producit Plus: At minus per Plus multiplicatum producit Minus.

Ex 1.º $(\varsigma\varsigma^{\grave{}}\beta \pitchfork \mu^{\circ}\delta)^2=\delta^{\upsilon}\delta,\mu^{\circ}\iota\varsigma \pitchfork \ldots$ nempe $(2x-4)^2=4x^2+16-16x$

Questio. 8 lib. 2.º Ex. 2.º $(\delta^{\upsilon}\gamma,\iota\varsigma\,\mu^{\circ}\alpha \pitchfork \varsigma\varsigma\,\varsigma)^2=\delta\delta^{\upsilon}\theta\ \delta^{\upsilon}\mu\beta\ \mu^{\circ}\alpha \pitchfork \kappa^{\upsilon}\lambda\varsigma\ \varsigma\varsigma\,\iota\beta$,

nempe $(3x^2+1-6x)^2=9x^4+42x^2+1-36x^3-12x$.

De Divisione nihil præmittit Diophantus nisi quod de Incognita fractionario statu subducenda superius apposuimus, quod huc etiam refertur. Quoties autem Divisio facienda in Quæstionibus occurrit, sequenti modo operatur.

1.º Si de numeris agitur, et divisio fieri potest

absque

absque residuo eam ad Arithmetices suæ regulas perficit, et quotientem modò exprimit. Si divisio perfici non potest, faciendam designat, Dividendum suo loco, Divisorem superius assignans, hoc modo $\kappa^{\text{ιὰ}} = \frac{20}{41}$, $\varsigma^{\text{νς}} = \frac{7}{57}$ Quæst. 34 lib. 4ª

2º Si Incognita ς divisoris loco sit, notam ipsius superius etiam assignat ita $\iota^{\text{ςῶν}} = \frac{10}{\text{Num. incog. un}} = \frac{10}{x}$; $\kappa\varepsilon^{\text{ςῶν}} = \frac{25}{\text{N. I. un}} = \frac{25}{x}$; $\mu^{\circ}\,\iota\ \mu o\rho^{\text{δυᾶ}} = 10 + \frac{250}{\text{quadr. Incog. un}} = 10 + \frac{250}{x^2}$ Quæst. 16 lib 4º

3º Cum Dividendum est Polynomium Divisor autem monomius; postremum modo terminum Divisore afficit hoc pacto $\mu^{\circ}\beta \pitchfork \varsigma^{\text{ὰ}\,\text{ςῶν}} = \frac{2 - \text{N. Incog. un}}{\text{N. Incog. un}} = \frac{2-x}{x}$ Quæst. 37 lib 4º

4º Quoties autem divisor Polynomius est nullum signum adhibet, sed voce μορίου divisionem faciendam indicat. Quæsti. 26. lib. 4º et alibi sæpe.

De fractionibus subducendis nulla etiam fit prævia mentio, sed hanc materiam minime Diophantum latuisse ex eo colligitur quod in quæstione 42 lib. 4º fractionum duarum summam capere contendens, eas in eundem Denominatorem prius adduce re disertis verbis doceat, ut nunc fit.

De resolutione æquationum tacet Diophantus sive id notum supponat, sive alio opere tradiderit. Præparationem autem earum attigit. Definit. 11ª ubi docet

primo

1° ut defectus addantur 2° ut similia a similibus auferantur (quæ ad reductionem spectant) 3° ut si utraque æquationis pars altioris gradus species contineat, omnia dividantur per infimæ speciei denominationem. Cætera autem huc spectantia Diophantum non ignorasse ex Quæstionibus patet; ex quibus aliquas subjungam ut et Algorithmi, et Analyseos apud Veteres exemplo sint.

Probl. 1. Propositum numerum in duos dividere quorum datum sit intervallum. Quæst. 1. lib. 1°.

Esto datus numerus 100 intervallum vero 40 oportet invenire numeros. Statuatur minor ς ($1x$) major erit ς α μ° μ ($x + 40$). Igitur uterque simul ς β μ° μ ($2x + 40$). Dabantur autem esse 100; ergo 100 æquales sunt ς β μ° μ ($2x + 40 = 100$). Auffero similia a similibus minimum 40 unit.; remanent ς β ($2x$) æquales 60. Ergo minor numerorum est 30 major vero 70

En Clarissimum Methodi, et Algorithmi Analytici exemplum ab hodiernis nihilo diversum.

Probl. II Duobus datis numeris invenire numerum qui in utrumque ductus hunc quidem quadratum efficiat illum vero latus ejusdem quadrati Quæst. 29 lib. 1°.

Sint dati numeri 200, et 5 ponaturque is qui quæritur ς ά ($x = x$) qui si ducatur in 200 facit ς^οἱ σ̄ ($x \cdot 200$) at si ducatur in 5 facit ς^οἱ ε̄ ($x \cdot 5$), oportet autem horum alterum quadratum esse, alterum latus ejus. Si ergo quadravero ς^οἱ ε̄ ($x \cdot 5$) fient Pot. 25 (nempe ($25x^2$)) aequales utique ς^οἱ σ̄ ($x \cdot 200 = x^2 \cdot 25$). Omnia per ς ($x$) dividantur. Igitur ς^οἱ κε aequantur unit. σ̄ (nempe $25x = 200$) ideoque ς aequalis 8. ($x = 8$)

Probl. 3.° Invenire tres numeros aequales quadrato, quorum bini juncti faciant quadratum. Quaest. 7. Lib. 3.°

Statuantur tres simul aequales quadrato.

— — — — — — δ^υ ά ςς β̄ μ^ο ά $= x^2+2x+1$

Primus cum secundo esto aequal. . . . δ^υ ά $= x^2$

Ergo tertius. . . . – – ςς β̄ μ^ο ά $= 2x+1$

Sit autem 2.^dus cum tertio aeq. – δ^υ ά μ^ο ά + ςς β̄ $= x^2+1-2x$

a latere ς^οἱ ά + μ^ο ά ($x-1$)

Quoniam tres simul sunt aequales – – – $= x^2+2x+1$

Erit prim. aequal. – ςς δ̄ . . $= 4x = x^2+2x+1-(x^2-2x+1)$

At 1.^us cum 2.^do positus est aequal. δ^υ ά $= x^2$

Erit igitur 2.^dus aequal. . . . δ^υ ά + ςς δ̄ $= x^2-4x$

Oportet itaque et 1.^um cum 3.^tio junctum nempe ςς ς̄ μ^ο ά $= 6x+1$

aequari quadrato cuilibet, puta 121 ($= 11^2$)

habebitur igitur – – – – ςς ς̄ μ^ο ά $= 121 = 6x+1$

Unde fit – – – – – – ς ά $= x = 20$

Erit igitur 1.^us numerus $= 80$; 2.^dus $= 320$; 3.^tius $= 41$

Et quidem $80+320 = 20^2$; $80+41 = 11^2$; $320+41 = 19^2$; $80+320+41 = 21^2$.

In hoc exemplo non modo operationum algebraicarum clarissima vestigia reperiuntur, sed etiam

notari.

notari debet quanta solertia problema indeterminatum satis difficile resolvat Diophantus unam modo incognitam more suo adhibens.

Conclusio.

Ex omnibus igitur quae superius dicta sunt sequitur.

1.º Analysin Veterum Geometrarum nihil aliud esse quam methodum veritatem inveniendi ex eorum contemplatione, quae ab ipsius veritatis suppositione consequuntur.

2.º Eam omnino eandem esse ac Recentiorum Analysim si ad methodum adtenditur, qua utraque in veritate invenienda utitur, etsi Algorithmo satis differant.

3.º Algorithmi vestigia reperiri etiam apud Veteres quamvis solis Arithmeticis quaestionibus non autem Geometriae applicaverint.

Manoel José Pereira da Silva

Fr. Ioachimus Iosephus de Maria Sanctissima Monachus Benedict. Filius Iosephi Ludovici de Andrade, e civitate Portuensi fecit et IX Kal. Iun. an. MDCCLVIIII in Gymnasio Academico recitavit.

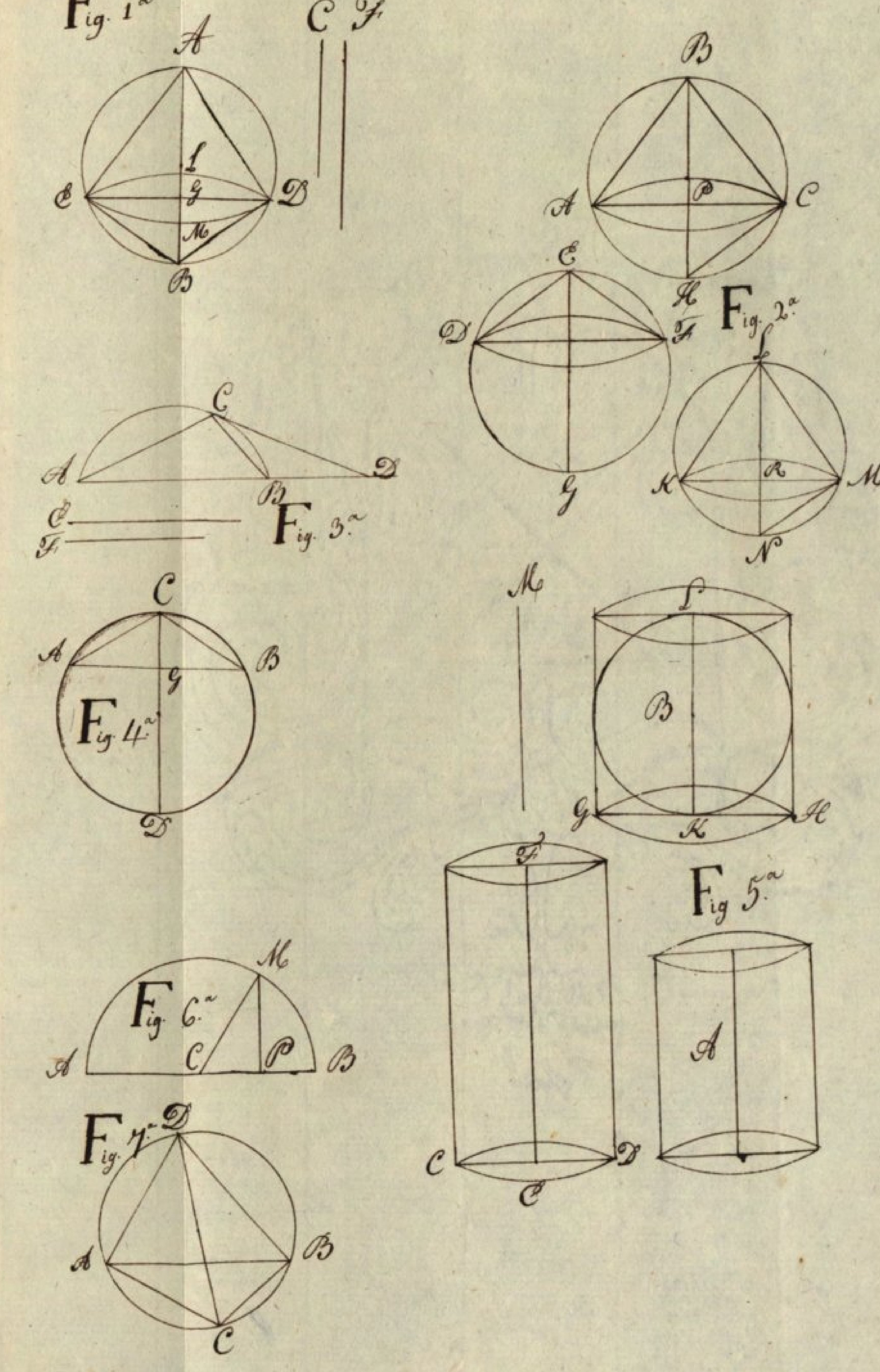
Fig. 1ª
Fig. 2ª
Fig. 3ª
Fig. 4ª
Fig 5ª
Fig. 6ª
Fig. 7ª

PHILOSOPHIA

MANUSCRIPTO