
ut
videam
ANO
1926 X 1936
DA REVOLUÇÃO
NACIONAL

EQUILIBRIO ASTATICO

EQUILIBRIO ASTATICO

POR

LUCIANO ANTONIO PEREIRA DA SILVA

COIMBRA
IMPRENSA DA UNIVERSIDADE
1889

DISSERTAÇÃO DE CONCURSO

APRESENTADA Á

FACULDADE DE MATHEMATICA

DA

UNIVERSIDADE DE COIMBRA

AO

ILLUSTRISSIMO E EXCELLENTISSIMO SENHOR

CAETANO PEREIRA SANCHES DE CASTRO

DO CONSELHO DE S. M. FIDELISSIMA,
MINISTRO E SECRETARIO D'ESTADO HONORARIO,
GENERAL DE BRIGADA,
DIRECTOR GERAL DA SECRETARIA DA GUERRA,
GRAN CRUZ DO MERITO MILITAR DE HESPANHA,
COMMENDADOR DA ORDEM MILITAR DE S. BENTO D'AVIZ,
ETC., ETC., ETC.

Offerece respeitosamente

Luciano Antonio Pereira da Silva.

1. Dado um systema de forças applicadas a um corpo solido, supponhamos que, sendo fixo o corpo, as forças giram em torno dos seus pontos de applicação conservando constantes os angulos que ellas fazem entre si.

Para precisar este deslocamento das forças, imaginemos tres eixos coordenados quaesquer passando por um dos pontos do corpo e tiremos por este ponto rectas parallelas a todas as forças do systema. Conservando constantes os angulos que estas rectas formam com os eixos, dêmos a estes um movimento qualquer em torno da origem. As novas direcções das forças obter-se-hão tirando pelos seus pontos de applicação rectas respectivamente parallelas ás do feixe movel.

A este deslocamento das forças de um systema em torno dos seus pontos de applicação, considerados fixos, conservando-se constante a inclinação mutua das forças, deu Daniel Augusto da Silva o nome de *rotação systematica*. Com o mesmo auctor chamaremos *configuração* a cada uma das disposições que o systema póde tomar por meio de uma rotação systematica; e chamaremos *directrizes* ás rectas que, como os eixos que atraz considerámos, conservam a mesma inclinação relativa com as forças e pela sua posição no espaço determinam cada uma das configurações.

Quando as forças estiverem todas n'um plano e n'elle se conservarem em todas as configurações, será directriz sufficiente uma recta girando no plano das forças e fazendo com ellas angulos constantes.

2. No caso particular em que as forças do systema são todas parallelas o systema girante equivale a uma força unica, a sua resultante, movendo-se em torno do centro das forças. É a propriedade conhecida do centro de forças parallelas. Se o systema não tem resultante, equivale a um *binario girante* formado por duas forças eguaes e contrarias girando no centro dos dois grupos de forças de sentido contrario que constituem o systema. Chamaremos braço do binario á recta que une os dois centros.

Vê-se pois que n'um systema girante qualquer se podem sempre substituir as forças parallelas por uma força unica applicada no respectivo centro ou por um binario.

Podem tambem substituir-se as forças applicadas no mesmo ponto pela sua resultante, conservando esta uma inclinação constante sobre as outras forças em todas as configurações.

Não póde porém transportar-se uma força para um ponto qualquer da sua direcção porque isso equivale a introduzir um binario cujo momento é nullo na configuração em que se faz o transporte, mas que deixa de o ser n'outra qualquer configuração.

Vejamos tambem em que condições se póde substituir um binario girante por outro. Para que dois binarios sejam equivalentes é preciso que os seus eixos sejam sempre parallelos e eguaes os seus momentos. Como o braço de um binario é sempre perpendicular ao eixo, o parallelismo dos eixos em todas as configurações exige que os braços dos dois binarios sejam parallelos; para que os momentos sejam sempre eguaes basta que esta egualdade se dê em duas configurações deduzidas uma da outra por uma rotação, que não seja de 180°, effectuada no plano dos binarios. Supponhamos com effeito que os momentos são eguaes n'estas duas configurações. Sejam P, P' e a, a' as forças e os braços dos dois binarios e φ, φ' os angulos que as forças fazem com os braços respectivos. Na primeira configuração teremos

$$a\,\mathrm{P}\,\mathrm{sen}\,\varphi = a'\,\mathrm{P}'\,\mathrm{sen}\,\varphi'.$$

Sendo α o angulo de que as forças giram nos respectivos planos, teremos na segunda configuração

$$a\,\mathrm{P}\,\mathrm{sen}\,(\varphi + \alpha) = a'\,\mathrm{P}'\,\mathrm{sen}\,(\varphi' + \alpha)$$

ou, desenvolvendo, e por não ser $\alpha = 0$ nem $\alpha = 180°$,

$$a\,\mathrm{P}\cos\varphi = a'\,\mathrm{P}'\cos\varphi.$$

Quadrando as duas equações e sommando, vem

$$a\,\mathrm{P} = a'\,\mathrm{P}', \quad \varphi = \varphi'.$$

Sendo assim, é claro que, se as forças girarem de um angulo qualquer ε nos planos dos binarios, o momento d'estes terá o valor constante

$$a\,\mathrm{P}\,\mathrm{sen}\,(\varphi + \varepsilon).$$

Se as forças girarem em torno dos respectivos braços, o angulo φ conservar-se-ha constante e os momentos não variarão, e como uma rotação systematica qualquer das forças dos conjugados se póde decompor sempre em duas, uma effectuando-se nos dois planos parallelos dos binarios, isto é, em torno dos seus eixos, e a outra em volta dos braços, segue-se que os momentos dos dois binarios serão eguaes em todas as configurações.

Um binario girante poderá pois substituir-se sempre por outro, se os braços dos dois binarios forem parallelos, se as forças forem parallelas e do mesmo sentido, e eguaes os seus momentos maximos, isto é, os productos das forças pelos braços respectivos.

Se os binarios existem no mesmo plano e n'elle se conservam em todas as configuraçees, bastará para serem equivalentes que sejam

$$aP = a'P', \quad \varphi = \varphi',$$

podendo os braços deixar de ser parallelos.

3. É claro que as propriedades que se deduzirem do estudo das rotações systematicas terão logar da mesma fórma se, em vez de se considerarem fixos os pontos de applicação e moveis as forças, se conservarem estas constantes em direcção absoluta e intensidade, movendo-se o corpo ou systema rigido de qualquer fórma no espaço. Como um movimento de translação qualquer do corpo não influe na disposição das forças em relação a elle, bastará considerar as rotações do corpo em torno de um qualquer dos seus pontos.

Poderemos pois seguir qualquer dos dois caminhos, ou considerar o corpo fixo dando ás forças rotações systematicas, ou considerar o corpo girando em volta de um qualquer dos seus pontos, conservando as forças que actuam em cada ponto a mesma direcção absoluta no espaço e a mesma intensidade.

Configurações planas

4. Consideremos primeiro o caso em que as forças estão situadas todas n'um plano e n'elle se conservam em todas as configurações.

Tomemos no plano dois eixos rectangulares Ox, Oy de modo que a rotação directa se effectue de Ox para Oy. Sejam P, P',... as forças dadas e x, y, x', y',... as coordenadas dos seus pontos de applicação. Sendo α, α', α''... os angulos que as forças fazem n'uma dada configuração com o eixo dos x, a somma dos momentos em relação á origem O será

$$\Sigma P (x \operatorname{sen} \alpha - y \cos \alpha).$$

Executando as forças uma rotação systematica de 90° no sentido directo, a somma dos momentos na nova configuração será

$$\Sigma P (x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha).$$

Supponhamos que o systema tem uma resultante que designaremos por R. Sendo a, $a + 90°$ os angulos que ella faz com o eixo dos x nas duas configurações, chamemos x_1, y_1 ás coordenadas do ponto de intersecção das duas rectas que dão a direcção da resultante nas duas posições.

Teremos

$$\Sigma P (x \operatorname{sen} \alpha - y \cos \alpha) = R (x_1 \operatorname{sen} a - y_1 \cos a),$$

$$\Sigma P (x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha) = R (x_1 \cos a + y_1 \operatorname{sen} a).$$

D'estas duas equações deduz-se, eliminando successivamente y_1 e x_1,

$$\Sigma P[\ \ x\cos(\alpha-a)+y\,\mathrm{sen}(\alpha-a)]=R\,x_1,$$

$$\Sigma P[-x\,\mathrm{sen}(\alpha-a)+y\cos(\alpha-a)]=R\,y_1$$

ou

$$\left.\begin{aligned}\Sigma P(\ \ x\cos\varphi+y\,\mathrm{sen}\,\varphi)&=R\,x_1\\ \Sigma P(-x\,\mathrm{sen}\,\varphi+y\cos\varphi)&=R\,y_1\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

se designarmos por φ, φ',... os angulos que as forças fazem com a resultante, a partir d'esta no sentido directo. Como estes angulos são constantes em todas as configurações, segue-se que os primeiros membros das duas equações (1) serão os mesmos para quaesquer duas configurações de directrizes perpendiculares. Se o systema tem pois resultante, esta passará pelo ponto de coordenadas x_1, y_1 em todas as configurações. Este ponto tem o nome de *centro do systema*.

Se as forças do systema forem parallelas, será sempre $\varphi=0$ ou $\varphi=180°$ e as equações (1) reduzem-se a

$$\Sigma\pm Px=R\,x_1,\quad \Sigma\pm Py=R\,y_1.$$

x_1, y_1 são então as coordenadas do centro de um systema de forças parallelas situadas n'um plano, como devia ser.

5. A existencia do centro de um systema plano póde estabelecer-se tambem geometricamente com muita facilidade.

Consideremos primeiro só duas forças P, P′ (fig. 1) girando systematicamente em torno dos seus pontos de applicação *a*, *b*.

A sua resultante R passará no ponto d, intersecção das duas forças P, P′ na configuração que se considera. Façamos passar uma circumferencia pelos tres pontos a, b, d e seja c o ponto em que a resultante R encontra a circumferencia.

Sejam P_1, P_1' as posições das forças n'outra qualquer configuração. O seu ponto de intersecção d_1 estará sobre a circumferencia visto que as forças conservam a mesma inclinação reciproca, e, como é constante tambem o angulo da resultante com as duas componentes, deve ser $\widehat{R_1 d_1 b} = \widehat{R d b}$ e portanto as duas direcções da resultante devem cortar-se no ponto c. Vê-se pois que, emquanto as duas forças giram systematicamente em volta dos seus pontos de applicação, a resultante gira em volta de um ponto, que é o *centro* do systema.

Unam-se os tres pontos a, b, c pelas cordas ac, ab, bc. Será

$$\widehat{cab} = \widehat{cdb}, \quad \widehat{cba} = \widehat{adc}.$$

Vêmos pois que o centro de um systema de duas forças girantes se obtem tirando por cada um dos pontos de applicação uma recta que faça com a linha que os une um angulo egual ao que a outra força faz com a resultante.

Supponhamos agora que o systema se compõe de um numero qualquer de forças P, P′, P″,... Decomponhamos estas segundo dois eixos quaesquer e sejam X, Y, X′, Y′, X″, Y″,... as suas componentes. O systema fica assim substituido por dois systemas de forças parallelas. O systema X, X′, X″... póde substituir-se pela sua resultante X_1 girando em torno do respectivo centro; o systema Y, Y′ Y″,... substituir-se-ha pela sua resultante Y_1 applicada tambem no centro respectivo. Ficamos assim reduzidos a um systema de duas forças X_1, Y_1, fazendo entre si um angulo egual ao dos eixos que adoptamos. Substituindo agora, pelo modo que já fica descripto, estas duas forças pela sua resultante applicada no centro respectivo, teremos finalmente substituido o systema de forças P, P′,... por uma força unica girando no centro do systema.

Se a resultante do systema fôsse, na configuração em que se fez a decomposição, parallela a um dos eixos coordenados, isto é, se fôsse por exemplo $X_1 = 0$, o systema reduzir-se-hia em geral á força Y_1 e a um binario girante cujas forças $X_2, -X_2$ são as resultantes dos dois grupos de forças actuando em sentido contrario que constituiriam o conjuncto das componentes parallelas ao eixo dos x, tendo as resultantes por pontos de applicação os centros dos dois grupos. Deslocando o binario no seu plano até que o ponto de applicação de uma das forças coincidisse com o ponto de applicação de Y_1 e compondo depois as duas forças, ficariamos afinal com um systema de duas forças girantes divergentes que podemos reduzir, como no caso anterior, a uma só força girante.

Se fossem ao mesmo tempo $X_1 = 0$, $Y_1 = 0$, o systema não teria resultante e reduzir-se-hia a dois binarios girantes. Transformando-os em dois binarios de braços eguaes e deslocando um d'elles até coincidirem os dois braços, poderemos compôr as forças applicadas em cada extremidade do braço commum e o systema reduzir-se-ha afinal a um binario girante.

6. Se o systema tem resultante, poderá reduzir-se, como vimos, a uma força unica movendo-se em torno do centro respectivo. Designemos por R a resultante, por C o centro do systema e por O o centro dos momentos. Chamando ω ao angulo que a resultante faz com o raio vector OC, a somma dos momentos das forças do systema em relação a O terá por valor

$$M = R r \operatorname{sen} \omega,$$

sendo $r = OC$.

Será $M = 0$ para as duas configurações $\omega = 0$, $\omega = 180°$, em que a resultante passa pelo centro dos momentos; terá os valores maximo e minimo para $\omega = 90°$ e $\omega = 270°$, configurações em que a força é perpendicular á linha que une os dois centros. O momento maximo é pois o producto da resultante pela distancia dos dois centros. Designando-o por K, podemos pôr

$$M = K \operatorname{sen} \omega.$$

Se chamarmos φ ao angulo que a directriz correspondente ao momento M faz com a directriz correspondente a K, teremos

$$M = K \cos \varphi.$$

Vê-se pois que, se tivermos $M = 0$ para duas directrizes que formem entre si um angulo differente de $180°$, será $K = 0$, isto é, o centro dos momentos coincidirá com o centro do systema.

7. Se o systema não tem resultante, reduz-se, como já vimos, a um binario girante. Designando por R cada uma das forças do binario resultante, por r o braço respectivo e por ω o angulo das forças com o braço, teremos n'este caso, qualquer que seja o centro dos momentos,

$$M = R r \operatorname{sen} \omega.$$

O momento terá os valores maximo e minimo nas duas posições inversas em que R e r são perpendiculares e será nullo nas duas configurações em que as forças estão na direcção do braço. N'estas duas posições o systema está em equilibrio.

Designando por K o momento maximo, por φ o angulo que a sua directriz faz com a directriz correspondente ao momento M, poderemos, em vez da equação precedente, pôr

$$M = K \cos \varphi.$$

Esta expressão dá tambem os momentos maximo e minimo para $\varphi = 0$ e $\varphi = 180^\circ$, e as duas configurações de equilibrio para $\varphi = 90^\circ$ e $\varphi = 270^\circ$.

Vê-se tambem que, quando é nulla a resultante de um systema de forças girantes n'um plano, este systema estará em equilibrio em todas as configurações, se houver duas não oppostas, isto é, cujas directrizes façam um angulo differente de 180°, nas quaes se dê o equilibrio ou, o que é o mesmo, em que seja $M = 0$.

Condições do equilibrio astatico. Eixos de equilibrio

8. Sabe-se que as condições de equilibrio de um systema rigido subjeito á acção de forças quaesquer são

$$\left.\begin{array}{c} \Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Z = 0, \\ \Sigma(Yz - Zy) = 0, \quad \Sigma(Zx - Xz) = 0, \\ \Sigma(Xy - Yx) = 0. \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (2)$$

Diz-se que o equilibrio de um corpo ou systema rigido é *astatico* quando, executando as forças rotações systematicas, o equilibrio subsiste em todas as configurações. Vejamos quaes são as condições em que este equilibrio tem logar.

Em vez de suppormos o corpo fixo e as forças girando systematicamente, supporemos estas constantes em direcção e grandeza e o corpo girando em torno de um ponto qualquer. Tomemos este ponto para origem e consideremos dois systemas de eixos, um fixo no espaço e o outro movel e invariavelmente ligado ao corpo. Designemos por $\xi, \eta, \zeta, \xi', \eta', \zeta', \ldots$ as coordenadas dos pontos do corpo tomadas no primeiro systema, e sejam $x, y, z, x', y', z', \ldots$ as coordenadas no systema movel. Sabe-se que é

$$x = -\zeta \operatorname{sen}\psi \operatorname{sen}\theta + \eta(-\operatorname{sen}\varphi\cos\psi + \cos\varphi \operatorname{sen}\psi\cos\theta) +$$

$$+ \xi(\cos\varphi\cos\psi + \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\psi\cos\theta),$$

$$y = -\zeta\cos\psi \operatorname{sen}\theta + \eta(\operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\theta) +$$

$$+ \xi(-\cos\varphi \operatorname{sen}\psi + \operatorname{sen}\varphi\cos\psi\cos\theta),$$

$$z = \zeta\cos\theta + \eta\cos\varphi \operatorname{sen}\theta + \xi \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta,$$

sendo ψ o angulo que a intersecção do plano dos $\xi\eta$ com o plano dos xy faz com o eixo dos x, φ o angulo que esta mesma intersecção faz com o eixo dos ξ e θ o angulo que os eixos dos z e dos ζ fazem entre si.

Substituindo estes valores nas condições (2) de equilibrio, vê-se facilmente que para que ellas tenham logar quaesquer que sejam os valores de φ, ψ e θ, devem ser

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Z = 0,$$

$$\Sigma X\xi = 0, \quad \Sigma X\eta = 0, \quad \Sigma X\zeta = 0,$$

$$\Sigma Y\xi = 0, \quad \Sigma Y\eta = 0, \quad \Sigma Y\zeta = 0,$$

$$\Sigma Z\xi = 0, \quad \Sigma Z\eta = 0, \quad \Sigma Z\zeta = 0.$$

Dado portanto um systema de forças actuando sobre um corpo solido, este estará em equilibrio astatico se n'uma qualquer configuração forem satisfeitas as condições

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Z = 0,$$

$$\Sigma Xx = 0, \quad \Sigma Xy = 0, \quad \Sigma Xz = 0,$$

$$\Sigma Yx = 0, \quad \Sigma Yy = 0, \quad \Sigma Yz = 0,$$

$$\Sigma Zx = 0, \quad \Sigma Zy = 0, \quad \Sigma Zz = 0,$$

sendo X, Y, Z as componentes da força applicada ao ponto de coordenadas x, y, z, tomadas n'um systema de eixos qualquer.

9. Supponhamos agora que o corpo, em vez de se mover de uma maneira qualquer em volta da origem, tem apenas um movimento de rotação em torno de um dos eixos, do eixo dos z por exemplo.

Estando o corpo em equilibrio na posição inicial, isto é, sendo satisfeitas as equações (2), procuremos as condições necessarias para que o equilibrio subsista depois de uma rotação qualquer em volta do eixo dos z. Girando o corpo de um angulo φ em volta d'este eixo, para termos as condições de equilibrio na nova posição devemos mudar nas equações (2)

$$x \quad \text{em} \quad x\cos\varphi - y\,\text{sen}\,\varphi$$

e

$$y \quad \text{em} \quad x\,\text{sen}\,\varphi + y\cos\varphi.$$

As tres ultimas de (2) transformam-se em

$$\Sigma Y z - \text{sen}\,\varphi\,\Sigma Z x - \cos\varphi\,\Sigma Z y = 0,$$

$$\cos\varphi\,\Sigma Z x - \text{sen}\,\varphi\,\Sigma Z y - \Sigma X z = 0,$$

$$\text{sen}\,\varphi\,\Sigma X x + \text{sen}\,\varphi\,\Sigma Y y = 0,$$

systema que é equivalente ao das tres equações

$$(1-\cos\varphi)\,\Sigma X z = 0, \qquad (1-\cos\varphi)\,\Sigma Y z = 0,$$

$$\text{sen}\,\varphi\,(\Sigma X x + \Sigma Y y) = 0;$$

e para que estas equações tenham logar, qualquer que seja φ, devem ser

$$\Sigma X z = 0, \quad \Sigma Y z = 0, \quad \Sigma X x + \Sigma Y y = 0 \ldots\ldots(3)$$

Satisfeitas as equações (2) e (3), o corpo estará em equilibrio em todas as posições, girando em torno do eixo dos z.

Quando, conservando-se constantes em direcção e grandeza as forças de um systema, o corpo gira em torno de um eixo qualquer, dá-se a este eixo o nome de *eixo de equilibrio,* se as forças do systema se equilibram em todas as configurações que resultam de este movimento de rotação. Assim quando n'um systema qualquer forem satisfeitas as equações (2) e (3), o eixo dos z será um eixo de equilibrio.

10. Procuremos agora as condições para que seja um eixo de equilibrio uma recta fazendo angulos quaesquer com os eixos coordenados.

A consideração das equações (3) fornece, como vamos ver, um meio muito simples de resolver o problema. Supponhamos que no ponto (x, y, z) de applicação da força X, Y, Z actuava uma força de componentes $-Y, X, 0$ segundo os eixos dos x, dos y e dos z, outra de componentes $-Y', X', 0$ no ponto (x', y', z') etc. As equações (3) junctamente com as duas primeiras de (2) exprimem que o corpo estaria em equilibrio se sobre elle actuassem só estas forças auxiliares.

Ora, como já dissemos, em vez de considerarmos, como no n.º 9, as forças constantes em direcção e grandeza e o corpo girando em volta do eixo dos z, podemos considerar o corpo fixo e as forças girando com a mesma velocidade angular em torno de eixos parallelos ao eixo dos z passando pelos seus pontos de applicação. A extremidade da força de componentes X, Y, Z terá no instante inicial uma velocidade representada geometricamente por um comprimento da tangente á circumferencia que este ponto descreve parallelamente ao plano dos xy, cujas projecções sobre os tres eixos são proporcionaes a

$$-Y, X, 0.$$

A esta grandeza geometrica, considerada como uma força nova, podemos chamar a derivada geometrica da força X, Y, Z. Estas derivadas geometricas são exactamente as forças auxiliares que já consideramos. As equações (3) exprimem assim que se equilibram sobre o systema as derivadas geometricas das forças.

Se considerarmos agora um eixo de posição qualquer, cuja direcção é dada pelas equações

$$\frac{x}{p}=\frac{y}{q}=\frac{z}{r},$$

a derivada geometrica da força X, Y, Z, em relação a este eixo terá componentes proporcionaes a

$$q\mathrm{Z}-r\mathrm{Y},\quad r\mathrm{X}-p\mathrm{Z},\quad p\mathrm{Y}-q\mathrm{X},$$

segundo os eixos dos x, y, z. Exprimindo que ellas se equilibram, teremos as equações correspondentes a (3)

$$\left.\begin{array}{r}-p(\Sigma \mathrm{Y}y+\Sigma \mathrm{Z}z)+q\Sigma \mathrm{X}y+r\Sigma \mathrm{X}z=0,\\ p\Sigma \mathrm{Y}x-q(\Sigma \mathrm{X}x+\Sigma \mathrm{Z}z)+r\Sigma \mathrm{Y}z=0,\\ p\Sigma \mathrm{Z}x+q\Sigma \mathrm{Z}y-r(\Sigma \mathrm{X}x+\Sigma \mathrm{Y}y)=0.\end{array}\right\}\ldots\ldots(4)$$

Estas equações, junctamente com as equações (2), exprimem as condições que devem ser satisfeitas para que uma recta qualquer, cuja direcção é dada pelas equações $\frac{x}{p}=\frac{y}{q}=\frac{z}{r}$, seja um eixo de equilibrio.

Se procurassemos agora as relações que deviam dar-se entre as forças e as coordenadas dos seus pontos de applicação para que as equações (4) tivessem logar, quaesquer que fossem os valores attribuidos a p, q, r, obteriamos de novo as condições do equilibrio astatico a que chegamos no n.º 8.

Plano central. Caso em que o systema se reduz a uma força unica. Caso em que o systema se reduz a uma força e um binario

11. Consideremos o systema de forças n'uma das suas configurações e tomemos um systema de eixos qualquer. Transportemos todas as forças á origem das coordenadas. Seja P a força de componentes X, Y, Z, cujo ponto de applicação tem as coordenadas x, y, z; P' a força de componentes X', Y', Z', cujo ponto de applicação tem as coordenadas x', y', z', etc.

Do transporte da força P á origem resultará um binario que poderemos decompôr em tres de braços x, y, z, respectivamente dirigidos segundo os eixos dos x, dos y e dos z, e cuja força é P. O binario de braço dirigido segundo o eixo dos x póde transformar-se n'outro de braço egual á unidade e de força Px e, fazendo o mesmo em relação aos outros dois binarios, teremos afinal: segundo o eixo dos x um binario de braço egual á unidade, cuja força tem por componentes segundo os tres eixos

$$Xx, \quad Yx, \quad Zx;$$

um binario de braço egual á unidade e dirigido segundo o eixo dos y, cuja força tem por componentes

$$Xy, \quad Yy, \quad Zy;$$

e um terceiro, de braço tambem egual a 1 e dirigido segundo o eixo dos z, cuja força tem por componentes

$$Xz, \quad Yz, \quad Zz.$$

Todas estas transformações são permittidas, como vimos no n.º 2.

Transportando todas as forças para a origem, vemos pois que o systema se reduz a uma força, a força principal, applicada na origem e cujas componentes são

$$X_0 = \Sigma X, \quad Y_0 = \Sigma Y, \quad Z_0 = \Sigma Z$$

e tres binarios de braços eguaes á unidade e dirigidos segundo os eixos dos x, dos y e dos z, cujas forças têem respectivamente por componentes

$$\Sigma Xx, \quad \Sigma Yx, \quad \Sigma Zx \quad \text{para o primeiro,}$$

$$\Sigma Xy, \quad \Sigma Yy, \quad \Sigma Zy \quad \text{para o segundo,}$$

$$\Sigma Xz, \quad \Sigma Yz, \quad \Sigma Zz \quad \text{para o terceiro.}$$

Assim o systema póde reduzir-se a uma força, a força principal, applicada n'um ponto qualquer, e a tres binarios cujos braços são dirigidos segundo as arestas de um triedro qualquer. Se a força principal é nulla, o systema reduzir-se-ha, em geral, a tres binarios.

Vê-se tambem que as condições do equilibrio astatico, a que chegamos no n.º 8, indicam que deve ser nulla a força principal e os momentos dos tres binarios.

12. É facil vêr, seguindo um caminho analogo ao do n.º 5 que o systema girante se póde, em geral, reduzir a uma força e a dois binarios só. Projectemos todas as forças do systema sobre rectas parallelas a uma dada direcção e passando pelos seus pontos de applicação. Sejam a, b, c os cosenos dos angulos que esta direcção faz com os eixos coordenados que suppômos rectangulares. Teremos assim um systema de forças parallelas, formado pelas componentes das forças parallelas áquella direcção, que poderemos substituir pela sua resultante, a que chamaremos R, applicada no respectivo centro. Designando por x_1, y_1, z_1 as coordenadas do centro, sabe-se que é

$$R = a X_0 + b Y_0 + c Z_0,$$

$$R x_1 = a \Sigma X x + b \Sigma Y x + c \Sigma Z x,$$

$$R y_1 = a \Sigma X y + b \Sigma Y y + c \Sigma Z y,$$

$$R z_1 = a \Sigma X z + b \Sigma Y z + c \Sigma Z z.$$

Eliminando R, a, b, c entre estas equações, vem

$$\begin{vmatrix} 1, & X_0, & Y_0, & Z_0, \\ x_1, & \Sigma X x, & \Sigma Y x, & \Sigma Z x, \\ y_1, & \Sigma X y, & \Sigma Y y, & \Sigma Z y, \\ z_1, & \Sigma X z, & \Sigma Y z, & \Sigma Z z, \end{vmatrix} = 0 \ldots\ldots\ldots (5)$$

Considerando x_1, y_1, z_1 como coordenadas correntes, esta será a equação de um plano.

Vê-se pois que, qualquer que seja a direcção segundo a qual se decomponham as forças, o centro do systema formado pelas componentes estará sempre n'um plano fixo do corpo. Este plano é designado pelo nome de *plano central*.

Se decompozermos pois todas as forças do systema segundo os tres eixos e substituirmos cada um dos systemas, formados por forças parallelas a cada um dos eixos, pela sua resultante applicada no centro respectivo, teremos reduzido o systema dado a três forças applicadas em tres pontos A, B, C do plano central.

Se applicarmos em A forças eguaes e contrarias ás que actuam em B e C, teremos reduzido o systema a uma força, a força principal, applicada em A e a dois binarios de braços dirigidos segundo AB e AC.

13. O systema poderá, em casos especiaes, reduzir-se a uma força e um só binario ou mesmo a uma força só.

Quando o systema girante equivale a uma força unica applicada n'um ponto x_0, y_0, z_0, é claro que, se introduzirmos no systema uma força egual e contraria $-R_0$, de componentes $-X_0$, $-Y_0$, $-Z_0$, applicada no mesmo ponto, o systema ficará em equilibrio astatico.

Teremos pois (n.° 8)

$$\Sigma X - X_0 = 0, \qquad \Sigma Y - Y_0 = 0, \qquad \Sigma Z - Z_0 = 0,$$

$$\Sigma Xx - X_0 x_0 = 0, \quad \Sigma Xy - X_0 y_0 = 0, \quad \Sigma Xz - X_0 z_0 = 0,$$

$$\Sigma Yx - Y_0 x_0 = 0, \quad \Sigma Yy - Y_0 y_0 = 0, \quad \Sigma Yz - Y_0 z_0 = 0,$$

$$\Sigma Zx - Z_0 x_0 = 0, \quad \Sigma Zy - Z_0 y_0 = 0, \quad \Sigma Zz - Z_0 z_0 = 0.$$

Portanto, se o systema tem resultante, isto é, se não são simultaneamente $\Sigma X = 0$, $\Sigma Y = 0$, $\Sigma Z = 0$, poderemos eliminar x_0, y_0, z_0, X_0, Y_0, Z_0, entre estas equações, o que dá

$$\left.\begin{aligned} \frac{\Sigma Xx}{\Sigma X} = \frac{\Sigma Yx}{\Sigma Y} = \frac{\Sigma Zx}{\Sigma Z}, \\ \frac{\Sigma Xy}{\Sigma X} = \frac{\Sigma Yy}{\Sigma Y} = \frac{\Sigma Zy}{\Sigma Z}, \\ \frac{\Sigma Xz}{\Sigma X} = \frac{\Sigma Yz}{\Sigma Y} = \frac{\Sigma Zz}{\Sigma Z}. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Teremos tambem

$$X_0 = \Sigma X, \quad Y_0 = \Sigma Y, \quad Z_0 = \Sigma Z,$$

$$R_0=\sqrt{(\Sigma X)^2+(\Sigma Y)^2+(\Sigma Z)^2},$$

$$x_0=\frac{\Sigma X x}{\Sigma X},\quad y_0=\frac{\Sigma Y y}{\Sigma Y},\quad z_0=\frac{\Sigma Z z}{\Sigma Z}.$$

Vê-se que, se forem satisfeitas as condições (6), o systema se reduz á força R_0 girando em torno do ponto de coordenadas x_0, y_0, z_0. A este ponto dá-se o nome de *centro* ou *ponto central* do systema das forças dadas.

No caso particular em que as forças são todas parallelas, teremos, designando por a, b, c os cosenos dos angulos que a sua direcção commum faz com os eixos coordenados,

$$\Sigma X=a\,\Sigma P,\quad \Sigma Y=b\,\Sigma P,\quad \Sigma Z=c\,\Sigma P,$$

$$\Sigma X x=a\,\Sigma P x,\quad \Sigma Y y=b\,\Sigma P y,\quad \Sigma Z z=c\,\Sigma P z,\ \text{etc.},$$

$$R_0=\Sigma P,$$

$$x_0=\frac{\Sigma P x}{\Sigma P},\quad y_0=\frac{\Sigma P y}{\Sigma P},\quad z_0=\frac{\Sigma P z}{\Sigma P}.$$

Estes valores de x_0, y_0, z_0, são, como se sabe, as coordenadas do centro d'um systema de forças parallelas.

14. Para vêr em que circumstancias o systema se reduz a uma força e um binario girante póde seguir-se um processo analogo. Seja R_0 a força isolada de componentes X_0, Y_0, Z_0 e sejam x_0, y_0, z_0 as coordenadas do seu ponto de applicação. Designemos por R_1, $-R_1$ as forças do binario, por X_1, Y_1, Z_1 as componentes de R_1 e por p_1, q_1, r_1 as projecções do braço respectivo. Exprimindo que o corpo está em equilibrio astatico depois da introducção da força $-R_0$ e do binario $-R_1$, R_1, vem

$$\Sigma X = X_0, \quad \Sigma Y = Y_0, \quad \Sigma Z = Z_0,$$

$$\Sigma X x = X_0 x_0 + X_1 p_1, \quad \Sigma X y = X_0 y_0 + X_1 q_1,$$

$$\Sigma X z = X_0 z_0 + X_1 r_1,$$

$$\Sigma Y x = Y_0 x_0 + Y_1 p_1, \quad \Sigma Y y = Y_0 y_0 + Y_1 q_1,$$

$$\Sigma Y z = Y_0 z_0 + Y_1 r_1,$$

$$\Sigma Z x = Z_0 x_0 + Z_1 p_1, \quad \Sigma Z y = Z_0 y_0 + Z_1 q_1,$$

$$\Sigma Z z = Z_0 z_0 + Z_1 r_1.$$

Eliminando X_0, Y_0, Z_0, X_1, Y_1, Z_1, vem

$$q_1 \Sigma X x - p_1 \Sigma X y - (q_1 x_0 - p_1 y_0) \Sigma X = 0,$$

$$q_1 \Sigma Y x - p_1 \Sigma Y y - (q_1 x_0 - p_1 y_0) \Sigma Y = 0,$$

$$q_1 \Sigma Z x - p_1 \Sigma Z y - (q_1 x_0 - p_1 y_0) \Sigma Z = 0,$$

$$r_1 \Sigma X x - p_1 \Sigma X z - (r_1 x_0 - p_1 z_0) \Sigma X = 0,$$

$$r_1 \Sigma Y x - p_1 \Sigma Y z - (r_1 x_0 - p_1 z_0) \Sigma Y = 0,$$

$$r_1 \Sigma Z x - p_1 \Sigma Z z - (r_1 x_0 - p_1 z_0) \Sigma Z = 0.$$

Não sendo $\Sigma X = \Sigma Y = \Sigma Z = 0$, como suppômos, podemos ainda eliminar $q_1 x_0 - p_1 y_0$, $r_1 x_0 - p_1 z_0$, o que dá

$$q_1 [\Sigma Y \Sigma X x - \Sigma X \Sigma Y x] = p_1 [\Sigma Y \Sigma X y - \Sigma X \Sigma Y y],$$

$$q_1 [\Sigma Z \Sigma X x - \Sigma X \Sigma Z x] = p_1 [\Sigma Z \Sigma X y - \Sigma X \Sigma Z y],$$

$$r_1 [\Sigma Y \Sigma X x - \Sigma X \Sigma Y x] = p_1 [\Sigma Y \Sigma X z - \Sigma X \Sigma Y z],$$

$$r_1 [\ Z \Sigma X x - \Sigma X \Sigma Z z] = p_1 [\Sigma Z \Sigma X z - \Sigma X \Sigma Z z].$$

Eliminando finalmente p_1, q_1, r_1, obtem-se as equações de condição

$$\left.\begin{aligned}
&\Sigma X (\Sigma Y x \Sigma Z y - \Sigma Z x \Sigma Y y) + \\
&+ \Sigma Y (\Sigma X y \Sigma Z x - \Sigma Z y \Sigma X x) + \\
&+ \Sigma Z (\Sigma Y y \Sigma X x - \Sigma X y \Sigma Y x) = 0, \\
\\
&\Sigma X (\Sigma Y x \Sigma Z z - \Sigma Z x \Sigma Y z) + \\
&+ \Sigma Y (\Sigma X z \Sigma Z x - \Sigma Z z \Sigma X x) + \\
&+ \Sigma Z (\Sigma Y z \Sigma X x - \Sigma X z \Sigma Y x) = 0.
\end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots (7)$$

Sendo satisfeitas estas duas condições, teremos

$$q_1 = p_1 \frac{\Sigma Y \Sigma X y - \Sigma X \Sigma Y y}{\Sigma Y \Sigma X x - \Sigma X \Sigma Y x},$$

$$r_1 = p_1 \frac{\Sigma Y \Sigma X z - \Sigma X \Sigma Y z}{\Sigma Y \Sigma X x - \Sigma X \Sigma Y x},$$

podendo tomar-se p_1 arbitrariamente.

Para determinar os valores de x_0, y_0, z_0, obtem-se depois as duas equações

$$y_0 = \frac{\Sigma Y \Sigma X y - \Sigma X \Sigma Y y}{\Sigma Y \Sigma X x - \Sigma X \Sigma Y x} x_0 + \frac{\Sigma Y y \Sigma X x - \Sigma X y \Sigma Y x}{\Sigma Y \Sigma X x - \Sigma X \Sigma Y x},$$

$$z_0 = \frac{\Sigma Y \Sigma X z - \Sigma X \Sigma Y z}{\Sigma Y \Sigma X x - \Sigma X \Sigma Y x} x_0 + \frac{\Sigma Y z \Sigma X z - \Sigma X z \Sigma Y x}{\Sigma Y \Sigma X x - \Sigma X \Sigma Y x}.$$

Póde pois tomar-se para ponto de applicação da força R_0 qualquer dos pontos da recta que estas duas equações representam quando se consideram x_0, y_0, z_0 como coordenadas correntes. Esta recta invariavel no corpo solido tem o nome de *recta central* do systema. Comparando os valores de y_0, z_0 com os de q_1, r_1, vê-se que ella é parallela ao braço do binario.

As componentes X_0, Y_0, Z_0, X_1, Y_1, Z_1, são dadas por

$$X_0 = \Sigma X, \quad Y_0 = \Sigma Y, \quad Z_0 = \Sigma Z,$$

$$X_1 = \frac{\Sigma X x - x_0 \Sigma X}{p_1},$$

$$Y_1 = \frac{\Sigma Y x - x_0 \Sigma Y}{p_1},$$

$$Z_1 = \frac{\Sigma Z x - x_0 \Sigma Z}{p_1}.$$

Vê-se pois que o systema se póde reduzir a uma força e um binario, sempre que forem satisfeitas as equações (7). O ponto de applicação da força, egual e parallela á força principal do systema, póde ser qualquer dos pontos da recta central. O braço do binario póde tomar-se sobre uma recta qualquer parallela á recta central, e a sua força depende do comprimento arbitrario attribuido ao braço e das coordenadas do ponto d'applicação da força egual e parallela á força principal.

Em vez da força R_0 e do binario $R_1, -R_1$ póde reduzir-se o systema a duas forças applicadas em dois pontos da recta central. As componentes d'estas forças e as coordenadas dos seus pontos de applicação serão

$$X_0 - X_1, \quad Y_0 - Y_1, \quad Z_0 - Z_1, \quad x_0, \; y_0, \; z_0,$$

$$X_1, \; Y_1, \; Z_1, \quad x_0 + p_1, \quad y_0 + q_1 \quad z_0 + r_1.$$

Como exemplo de um caso em que as condições (7) são satisfeitas, citaremos aquelle em que as forças do systema estão todas n'um mesmo plano, que poderemos tomar para plano dos xy e então todos os zz serão nullos.

Ellipsoide central

15. Como vimos no n.º **11**, um systema girante póde sempre reduzir-se a uma força, a força principal, actuando n'um ponto qualquer do corpo e a tres binarios de braços dirigidos segundo as arestas de um triedro qualquer. Suppondo os braços dos binarios dirigidos segundo tres eixos rectangulares, vamos vêr como variam, n'um ponto determinado, as forças dos binarios com a orientação dos braços.

Tendo transportado todas as forças para um ponto O do corpo e tendo reduzido o systema a uma força passando na origem e a tres binarios de braços dirigidos segundo os tres eixos rectangulares Ox, Oy Oz, consideremos um novo systema de eixos rectangulares Ox_1, Oy_1, Oz_1, fazendo com os primeiros angulos cujos cosenos são $a, b, c; a', b', c'; a'' \; b'' \; c'$. Para termos as forças dos binarios de braços eguaes á unidade e dirigidos segundo os eixos Ox_1, Oy_1, Oz_1, decomponhamos cada um dos tres binarios, obtidos na primeira reducção, segundo estes novos eixos.

O binario de braço egual á unidade e dirigido segundo Ox, cuja força tem por componentes $\Sigma X x$, $\Sigma Y x$, $\Sigma Z x$ dá um binada mesma força e de braço egual a a sobre Ox_1; o binario de braço dirigido segundo Oy dá sobre Ox_1 um binario, cuja força tem por componentes $\Sigma X y$, $\Sigma Y y$, $\Sigma Z y$ e cujo braço é egual a

b; e finalmente o binario de braço dirigido segundo Oz dá sobre Ox_1 um binario de braço c e cuja força tem por componentes ΣXz, ΣYz, ΣZz. Reduzindo á unidade os braços d'estes tres binarios e compondo depois as forças, teremos afinal um binario de braço egual á unidade sobre Ox_1 e cuja força tem por componentes

$$a\Sigma Xx+b\Sigma Xy+c\Sigma Xz,$$

$$a\Sigma Yx+b\Sigma Yy+c\Sigma Yz,$$

$$a\Sigma Zx+b\Sigma Zy+c\Sigma Zz,$$

segundo os eixos dos x, dos y e dos z.

Quadrando estas expressões e sommando, teremos, designando por F_{x_1} a força do binario cujo braço tem a direcção de Ox_1,

$$F_{x_1}^2=Aa^2+A'b^2+A''c^2+2Bbc+2B'ac+2B''ab, \ldots (8)$$

fazendo

$$\left.\begin{aligned}
A &= \Sigma^2 Xx+\Sigma^2 Yx+\Sigma^2 Zx,\\
A' &= \Sigma^2 Xy+\Sigma^2 Yy+\Sigma^2 Zy,\\
A'' &= \Sigma^2 Xz+\Sigma^2 Yz+\Sigma^2 Zz,\\
B &= \Sigma Xy\,\Sigma Xz+\Sigma Yy\,\Sigma Yz+\Sigma Zy\,\Sigma Zz,\\
B' &= \Sigma Xx\,\Sigma Xz+\Sigma Yx\,\Sigma Yz+\Sigma Zx\,\Sigma Zz,\\
B'' &= \Sigma Xx\,\Sigma Xy+\Sigma Yx\,\Sigma Yy+\Sigma Zx\,\Sigma Zy.
\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(9)$$

Para termos os valores de F_{y_1} e F_{z_1}, isto é, as forças dos binarios de braços dirigidos segundo Oy_1 e Oz_1, bastará mudar em (8) a, b, c, em a', b', c', e a'', b'', c''.

Consideremos a superficie representada pela equação

$$Ax_i^2 + A'y_i^2 + 2By_iz_i + 2B'x_iz_i + 2B''x_iy_i = 1 \ldots (10)$$

Comparando esta equação com a fórmula (8), vê-se immediatamente que a força de um binario de braço dirigido segundo um raio vector da superficie (10) é egual ao inverso d'este raio. A equação (10) representa em geral um ellipsoide. Este ellipsoide, a que se dá o nome de *ellipsoide central* do ponto O, tem a vantagem de representar geometricamente a variação das forças dos binarios cujos braços são dirigidos segundo os seus raios vectores.

Substituindo em (10) os valores (9), desenvolvendo, e designando por $P^{(i)}$ a força de componentes $X^{(i)}$, $Y^{(i)}$, $Z^{(i)}$ applicada no ponto $(x^{(i)}, y^{(i)}, z^{(i)})$, a equação do ellipsoide central tomará a fórma

$$\Sigma \overset{2}{P^{(i)}} (x^{(i)}x_i + y^{(i)}y_i + z^{(i)}z_i)^2 +$$

$$+ 2\Sigma P^{(i)} P^{(k)} \cos(P^{(i)}, P^{(k)}) \; (x^{(i)}x_i + y^{(i)}y_i + z^{(i)}z_i) \times$$

$$\times (x^{(k)}x_i + y^{(k)}y_i + z^{(k)}z_i) = 1.$$

Os coefficientes d'esta equação são formados pelas intensidades das forças, pelas coordenadas dos seus pontos d'applicação e pelos cosenos dos angulos que as forças fazem entre si, e como estas quantidades se conservam constantes quando as forças executam rotações systematicas, vê-se que aquella equação se conserva a mesma em todas as configurações. Se consideramos porém as forças constantes em direcção e grandeza, e movel o corpo, quer isto dizer que o ellipsoide central de cada ponto se moverá junctamente com o corpo.

16. Vejamos se póde dar-se aos eixos rectangulares Ox_1, Oy_1, Oz_1 uma posição tal que as forças dos binarios correspondentes sejam tambem rectangulares.

Já escrevemos as expressões das componentes da força F_{x_1}, d'onde se deduzem, como dissemos, as de F_{y_1} e F_{z_1}, mudando a, b, c em a', b', c' e a'', b'', c''. Com estas expressões estabelecem-se immediatamente as condições de perpendicularidade entre as tres forças. Teremos assim

$$Aaa' + A'bb' + A''cc' + B(bc' + cb') + B'(ca' + ac') +$$

$$+ B''(ab' + ba') = 0,$$

$$Aa''a + \ldots\ldots = 0,$$

$$Aa'a'' + \ldots\ldots = 0.$$

Estas equações exprimem que os eixos Ox_1, Oy_1, Oz_1 devem ter a direcção dos eixos do ellipsoide central.

Póde pois dar-se ao systema rectangular dos braços dos binarios uma posição tal que as forças respectivas sejam tambem perpendiculares entre si. Esta posição será em geral unica; haverá porém uma infinidade d'ellas, se o ellipsoide central fôr de revolução.

Tomemos pois os braços dos binarios na direcção dos eixos do ellipsoide central. As forças correspondentes constituirão então um systema de tres direcções rectangulares que poderá, por meio de uma rotação systematica, tornar-se parallelo aos eixos do ellipsoide, obtendo-se assim uma configuração em que os binarios se annulam por terem as suas forças na direcção dos braços respectivos. D'esta configuração poderão deduzir-se mais tres analogas por meio de rotações de 180°, a que daremos o nome de *inversões*, em torno dos tres braços.

Sendo pois dado um systema de forças applicadas a um corpo solido e executando o systema rotações systematicas, haverá pelo menos quatro configurações em que o systema se reduz á força principal passando n'um ponto determinado do corpo.

Vê-se tambem que se a força principal é nulla, ha sempre quatro configurações em que o systema fica em equilibrio.

Ponto central do plano central. Posição dos eixos principaes em todos os pontos do corpo

17. A equação do ellipsoide central é a mesma para todos os pontos do corpo quando é nulla a força principal do systema. Supponhamos porém que não é nulla esta força. Obtida a equação do ellipsoide central n'um ponto dado O, para termos a equação do ellipsoide para outro ponto O', de coordenadas x', y', z' transportaremos os eixos parallelamente a si mesmos para O'. As componentes da força principal ficarão as mesmas, mas variarão as forças dos binarios. As componentes da força do binario, cujo braço tem a direcção do eixo dos xx serão, para o ponto O′,

$$\Sigma X x - x' X_0, \quad \Sigma Y x - x' Y_0, \quad \Sigma Z x - x' Z_0;$$

as componentes da força do binario de braço parallelo ao eixo dos yy são

$$\Sigma X y - y' X_0, \quad \Sigma Y y - y' Y_0, \quad \Sigma Z y - y' Z_0;$$

e as da força do binario de braço parallelo aos zz

$$\Sigma X z - z' X_0, \quad \Sigma Y z - z' Y_0, \quad \Sigma Z z - z' Z_0.$$

Temos assim os dados sufficientes para escrever a equação do ellipsoide central do ponto O′, que se reduz á fórma

$$A x_{,}^2 + A' y_{,}^2 + A'' z_{,}^2 + 2 B y_{,} z_{,} + 2 B' x_{,} z_{,} + 2 B'' x_{,} y_{,} -$$

$$-2(\alpha x_{,} + \beta y_{,} + \gamma z_{,})(x' x_{,} + y' y_{,} + z' z_{,}) +$$

$$+ \left(X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2\right)(x' x_{,} + y' y_{,} + z' z_{,})^2 = 1.$$

N'esta equação A, A′ etc., têem os valores (9) e são

$$\alpha = X_0 \Sigma X x + Y_0 \Sigma Y x + Z_0 \Sigma Z x,$$

$$\beta = X_0 \Sigma X y + Y_0 \Sigma Y y + Z_0 \Sigma Z y,$$

$$\gamma = X_0 \Sigma X z + Y_0 \Sigma Y z + Z_0 \Sigma Z z.$$

Vejamos se ha algum ponto do corpo em que se annullem as quantidades que designamos por α, β, γ. Não sendo nullas estas quantidades no ponto O, transportemos os eixos para um outro ponto O′ onde ellas terão os valores

$$\alpha' = X_0 \Sigma X x + Y_0 \Sigma Y x + Z_0 \Sigma Z x - x' \left(X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2\right),$$

$$\beta' = X_0 \Sigma X y + Y_0 \Sigma Y y + Z_0 \Sigma Z y - y' \left(X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2\right),$$

$$\gamma' = X_0 \Sigma X z + Y_0 \Sigma Y z + Z_0 \Sigma Z z - z' \left(X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2\right).$$

Para que sejam $\alpha' = \beta' = \gamma' = 0$, basta que as coordenadas x', y', z' da nova origem O′ tenham os valores:

$$x_1 = \frac{X_0 \Sigma X x + Y_0 \Sigma Y x + Z_0 \Sigma Z x}{X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2},$$

$$y_1 = \frac{X_0 \Sigma X y + Y_0 \Sigma Y y + Z_0 \Sigma Z y}{X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2},$$

$$z_1 = \frac{X_0 \Sigma X z + Y_0 \Sigma Y z + Z_0 \Sigma Z z}{X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2}.$$

A estas expressões póde dar-se a fórma

$$x_1 = \frac{F_x \cos(F_x, F_0)}{F_0}, \quad y_1 = \frac{F_y \cos(F_y, F_0)}{F_0}, \quad z_1 = \frac{F_z \cos(F_z, F_0)}{F_0},$$

sendo F_0 a força principal e F_x, F_y, F_z as forças dos binarios. Os valores de x_1, y_1, z_1 dependem pois apenas da grandeza das forças e dos angulos que ellas fazem entre si, e são por isso constantes em todas as configurações. O ponto (x_1, y_1, z_1) é portanto um ponto fixo do corpo; dá-se-lhe o nome de *ponto central*.

Suppondo que o ponto O, que primitivamente tinhamos tomado para origem, é o ponto central, será

$$\alpha = \beta = \gamma = 0,$$

ou, o que é o mesmo,

$$\left.\begin{array}{l} X_0 \Sigma X x + Y_0 \Sigma Y x + Z_0 \Sigma Z x = 0, \\ X_0 \Sigma X y + Y_0 \Sigma Y y + Z_0 \Sigma Z y = 0, \\ X_0 \Sigma X z + Y_0 \Sigma Y z + Z_0 \Sigma Z x = 0, \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (11)$$

e a equação do ellipsoide central de um ponto qualquer O′ tomará a fórma mais simples

$$\left.\begin{array}{l} A x_i^2 + A' y_i^2 + A'' z_i^2 + 2 B y_i z_i + 2 B' z_i x_i + 2 B'' x_i y_i + \\ \quad + \left(X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2\right) (x' x_i + y' y_i + z' z_i)^2 = 1. \end{array}\right\} (12)$$

18. A equação (12) póde ainda simplificar-se suppondo que os eixos, a que se referiu o ellipsoide central do ponto central, coincidem com os seus eixos principaes, porque então ter-se-ha

$$B = B' = B'' = 0,$$

ou, em virtude de (9),

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma X x \Sigma X y+\Sigma Y x \Sigma Y y+\Sigma Z x \Sigma Z y=0,\\ \Sigma X x \Sigma X z+\Sigma Y x \Sigma Y z+\Sigma Z x \Sigma Z z=0,\\ \Sigma X y \Sigma X z+\Sigma Y y \Sigma Y z+\Sigma Z y \Sigma Z z=0.\end{array}\right\}\ldots.(13)$$

Estas equações exprimem que as forças dos binarios são perpendiculares duas a duas e as equações (11) exprimem que ellas são todas perpendiculares á força principal. Como esta ultima força não é nulla, para que estas duas condições se realisem simultaneamente é preciso que seja nulla uma das tres forças dos binarios principaes. É facil vêr com effeito que, para que sejam satisfeitas as equações (11) e (13), devem ser nullas todas as quantidades de um dos quatro grupos X_0 Y_0 Z_0; $\Sigma X x$, $\Sigma Y x$, $\Sigma Z x$; $\Sigma X y$, $\Sigma Y y$, $\Sigma Z y$; $\Sigma X z$, $\Sigma Y z$, $\Sigma Z z$. Como não é $X_0 = Y_0 = Z_0 = 0$, devem ser por exemplo,

$$\Sigma X z=0, \quad \Sigma Y z=0, \quad \Sigma Z z=0, \ldots\ldots\ldots(14)$$

e portanto

$$A''=0.$$

A equação do ellipsoide (12) reduzir-se-ha assim á fórma mais simples

$$A x_{\prime}^{2}+A' y_{\prime}^{2}+\left(X_0^2+Y_0^2+Z_0^2\right)\left(x' x_{\prime}+y' y_{\prime}+z' z_{\prime}\right)^2=1.$$

As equações (14) indicam que tomamos para plano dos xy o plano perpendicular ao braço do binario de força nulla.

Do que vimos de dizer conclue-se que o systema se póde sempre reduzir á força principal e a dois binarios de braços perpendiculares, cujas forças são perpendiculares entre si e á força principal.

O plano dos xy, onde existem os braços dos dois binarios, é o *plano central* que já definimos no n.º **12**.

19. Por meio de uma rotação systematica póde levar-se a força principal a ser perpendicular aos braços dos dois binarios e as forças d'estes a terem a direcção dos braços. Consideraremos a configuração assim obtida como a *configuração inicial* d'onde se deduzem todas as outras por meio de rotações convenientes.

Supponhamos que, para calcular os coefficientes da equação do ellipsoide central, escolhemos a configuração inicial.

Teremos então

$$
\begin{aligned}
X_0 &= 0, & Y_0 &= 0,\\
\Sigma X y &= 0, & \Sigma Z y &= 0,\\
\Sigma Y x &= 0, & \Sigma Z x &= 0,\\
A &= \Sigma^2 X x, & A' &= \Sigma^2 Y y,
\end{aligned}
$$

e a equação do ellipsoide central de um ponto qualquer M de coordenadas x', y', z', referida a eixos parallelos aos eixos escolhidos, será

$$A x_{\prime}^2 + A' y_{\prime}^2 + Z_0^2 (x' x_{\prime} + y' y_{\prime} + z' z_{\prime})^2 = 1 \;\ldots\ldots (15)$$

20. Com a equação do ellipsoide central, assim simplificada, póde estudar-se com facilidade a distribuição dos eixos dos ellipsoides centraes de todos os pontos do corpo. Procuremos os eixos principaes do ellipsoide representado pela equação (15). Subtrahindo do primeiro membro de (15) $k(x^2+y^2+z^2)$, derivando em ordem a $x_{,}$, $y_{,}$ e $z_{,}$ e egualando a zero as derivadas, teremos

$$\left.\begin{aligned} (\mathrm{A}-k)\,x_{,}+\mathrm{Z}_0^2\,x'\,\mathrm{P}=0,\\ (\mathrm{A}'-k)\,y_{,}+\mathrm{Z}_0^2\,y'\,\mathrm{P}=0,\\ -k\;z_{,}+\mathrm{Z}_0^2\,z'\,\mathrm{P}=0, \end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots(16)$$

fazendo

$$x'x_{,}+y'y'_{,}+z'z_{,}=\mathrm{P}.$$

O systema (16) dá os valores

$$z_{,}=\frac{\mathrm{Z}_0^2\,\mathrm{P}\,x'}{k-\mathrm{A}},\quad y_{,}=\frac{\mathrm{Z}_0^2\,\mathrm{P}\,y'}{k-\mathrm{A}'}\quad x_{,}=\frac{\mathrm{Z}_0^2\,\mathrm{P}\,z'}{k},$$

que, substituidos na ultima expressão, dão

$$\frac{\mathrm{Z}_0^2\,x'^2}{k-\mathrm{A}}+\frac{\mathrm{Z}_0^2\,y'^2}{k-\mathrm{A}'}+\frac{\mathrm{Z}_0^2\,z'^2}{k}=1.$$

A esta equação póde dar-se a fórma mais simples

$$\frac{x'^2}{\lambda-\alpha^2}+\frac{y'^2}{\lambda-\alpha'^2}+\frac{z'^2}{\lambda}-1=0, \ldots\ldots\ldots (17)$$

fazendo

$$A=Z_0^2\alpha^2, \quad A'=Z_0^2\alpha'^2, \quad k=Z_0^2\lambda.$$

A equação (17) dá tres valores para λ, que determinam os tres eixos do ellipsoide central do ponto (x', y', z').

Consideremos no plano central a curva que tem por equações

$$z=0, \quad \frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y}{\alpha'^2}+1=0.$$

Esta curva é uma ellipse imaginaria, que designaremos pelo nome de *curva central*. As superficies tendo por focal a curva central estão comprehendidas na equação

$$\frac{x^2}{\lambda-\alpha^2}+\frac{y^2}{\lambda-\alpha'^2}+\frac{z^2}{\lambda}=1, \ldots\ldots\ldots\ldots (18)$$

em que λ é um parametro arbitrario. A equação (17) determina precisamente os parametros das tres superficies homofocaes que passam no ponto (x', y', z') e as equações (16) mostram que os eixos do ellipsoide central d'este ponto coincidem com as normaes ás tres superficies homofocaes.

Chamando *binarios principaes* em cada ponto do corpo aos binarios em que os braços e as forças constituem dois systemas de direcções rectangulares e *eixos principaes* d'um ponto aos braços d'estes binarios, vê-se que os eixos principaes são as normaes á familia de superficies homofocaes tendo por focal a curva central.

As superficies homofocaes representadas pela equação (18), além da curva central, têem ainda duas conicas focaes, situadas nos planos normaes ao plano central que tomamos para planos dos yz e zx. As equações d'estas duas focaes são

$$\left.\begin{array}{ll} x=0, & \dfrac{y^2}{\alpha^2-\alpha'^2}+\dfrac{z^2}{\alpha^2}=1, \\[2ex] y=0, & \dfrac{x^2}{\alpha'^2-\alpha^2}+\dfrac{z^2}{\alpha'^2}=1, \end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots(19)$$

e estas equações são as de uma ellipse e de uma hyperbole. Os planos d'estas duas curvas, cuja intersecção é o braço do binario de força nulla, e que cortam o plano central segundo duas rectas, que são os braços dos outros dois binarios, têem o nome de *planos medios do systema*.

Theorema de Minding

21. Um systema girante póde sempre reduzir-se, como vimos, a uma força unica, egual e parallela á força principal, applicada no ponto central do plano central, e a dois binarios de braços perpendiculares, cujas forças são perpendiculares entre si e á força principal, excepto quando é nulla esta ultima força. Transportando em cada configuração a força unica para um ponto qualquer do eixo central dos momentos e compondo os dois binarios com o binario resultante d'este transporte, ficaremos com um binario perpendicular ao eixo central. Este binario é o binario principal de valor minimo na configuração que se considera. O eixo central dos momentos tem no corpo uma posição que varia para as differentes configurações e o momento do binario principal minimo é tambem variavel. Vamos ver qual deve ser a posição do eixo central para que o binario minimo seja nullo ou para que o systema de forças se reduza a uma força ou resultante unica.

Partindo da configuração inicial, em que das componentes da resultante unica e das forças dos binarios só não são nullas as componentes Z_0, $\Sigma X x$, $\Sigma Y y$, demos ás forças uma rotação systematica qualquer. Designando por a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c'' os cosenos de tres direcções rectangulares, teremos na nova configuração os valores

$$X'_0 = c Z_0, \quad Y'_0 = c' Z_0, \quad Z'_0 = c'' Z_0$$

para as componentes da força unica; os valores

$$a \Sigma X x, \quad a' \Sigma X x, \quad a'' \Sigma X x$$

para as componentes da força do binario de braço parallelo aos xx; e

$$b \Sigma Y y, \quad b' \Sigma Y y, \quad b'' \Sigma Y y$$

para as componentes do binario de braço parallelo aos yy. O binario de braço parallelo aos zz conservar-se-ha nullo.

Se transportarmos porém as forças para um ponto qualquer M (x, y, z) do espaço e junctamente o systema de eixos, as componentes da força unica ficarão as mesmas, mas as componentes das forças dos binarios, serão, como no n.º 17,

$$a\Sigma Xx - cxZ_0, \quad a'\Sigma Xx - xc'Z_0, \quad a''\Sigma x - xc''Z_0$$

para o primeiro binario;

$$b\Sigma Yy - ycZ_0, \quad b'\Sigma Yy - yc'Z_0, \quad b''\Sigma Yy - yc''Z_0$$

para o segundo; e para o binario de braço parallelo aos zz

$$-zcZ_0, \quad -zc'Z_0, \quad -zc''Z_0;$$

de fórma que, na actual posição das forças e dos eixos coordenados, as sommas dos momentos em relação aos tres eixos têem por valores

$$\left.\begin{array}{l} L_1 = \quad b''\Sigma Xy - (c''y - c'z)Z_0, \\ M_1 = -a''\Sigma Xx + (c''x - cz)Z_0, \\ N_1 = a'\Sigma Xx - b\Sigma Yy + (cy - c'x)Z_0 \end{array}\right\} \ldots\ldots (20)$$

e as projecções da força principal são

$$X_1 = cZ_0, \quad Y_1 = c'Z_0, \quad Z_1 = c''Z_0 \ldots\ldots\ldots (21)$$

Para que o ponto M, que é a nova origem, seja um ponto do eixo central dos momentos, é preciso que seja

$$\frac{L_1}{X_1}=\frac{M_1}{Y_1}=\frac{N_1}{Z_1},$$

ou

$$\frac{L_1}{c}=\frac{M_1}{c'}=\frac{N_1}{c''}=\frac{c\,L_1+c'M_1+c''N_1}{1}=a'\Sigma Y\,y-b\,\Sigma X\,x.$$

Devem pois ser, se a origem é um ponto do eixo central,

$$L_1=c\,(a'\,\Sigma Y\,y-b\,\Sigma X\,x),$$

$$M_1=c'\,(a'\,\Sigma Y\,y-b\,\Sigma X\,x),$$

$$N_1=c''(a'\,\Sigma Y\,y-b\,\Sigma X\,x),$$

expressões a que póde dar-se a fórma

$$\left.\begin{aligned}(c'\,z-c''y)\,Z_0&=-b''\Sigma Y\,y+c\,(a'\Sigma Y\,y-b\,\Sigma X\,x),\\(c''x-c\,z)\,Z_0&=a''\Sigma X\,x+c'\,(a'\Sigma Y\,y-b\,\Sigma X\,x),\\(c\,y-c'x)\,Z_0&=b\,\Sigma Y\,y-a\,\Sigma X\,x+c''\,(a'\Sigma Y\,y-b\,\Sigma X\,x).\end{aligned}\right\}(22)$$

Ora, sendo o eixo central parallelo á força principal, bastará, para que elle fique determinado, que se conheçam x, y, z e c, c', c'', que são os cosenos dos angulos que elle faz com os eixos.

Eliminando entre as ultimas equações os cosenos a, b, a', b', a'', b'', que dependem de uma só arbitraria, quando c, c', c'' são dados, ficaremos com uma unica equação entre x, y, z, c, c', c'', porque no systema (22) ha só duas equações distinctas.

Elevando ao quadrado as equações (22) e sommando-as, acha-se, attendendo ás relações mais simples entre os nove cosenos,

$$(c'z - c''y)^2 + (c''x - cz)^2 + (cy - c'x)^2 = \frac{A}{Z_0^2} c^2 + \frac{A'}{Z_0^2} c'^2, \quad (23)$$

sendo (n.° 19) $A = \Sigma^2 X x$, $A' = \Sigma^2 Y y$. Esta equação, que não contém senão os elementos que definem o eixo central, é a equação d'um complexo de segunda ordem. As rectas d'este complexo são o logar geometrico do eixo central dos momentos em todas as configurações.

Querendo agora que o systema se reduza a uma força unica, deve pôr-se

$$L_1 = 0, \quad M_1 = 0, \quad N_1 = 0,$$

para o que bastará junctar ás equações (22) a seguinte

$$a' \Sigma Y y - b \Sigma X x = 0,$$

que exprime que é nullo o binario resultante. As duas primeiras equações (22) reduzir-se-hão a

$$Z_0 (c'z - c''y) = - b'' \Sigma Y y,$$

$$Z_0 (c''x - cz) = a'' \Sigma X x,$$

d'onde se deduz

$$\frac{(cz-c''y)^2}{\varepsilon^2 Y y}+\frac{(c''x-cz)^2}{\varepsilon^2 X y}=\frac{1}{Z_0^2}(a''^2+b''^2)=\frac{1}{Z_0^2}(c^2+c'^2),$$

ou

$$A(c'z-c''y)^2+A'(c''x-cz)^2=\frac{AA'}{Z_0^2}(c^2+c'^2)\ldots.(24)$$

Esta equação, junctamente com a equação (23), definirá a congruencia das rectas, linhas de acção de uma resultante unica. Vê-se que esta congruencia é de quarta ordem e da quarta classe, o que quer dizer que por cada ponto do espaço e em cada plano ha quatro rectas que satisfazem á condição proposta.

Combinando as equações (23) e (24) de modo a fazer desapparecer o termo $(c'z-c''y)^2$, teremos

$$(A'-A)(c''x-cz)^2-A(cy-c'x)=\frac{A(A'-A)}{Z_0^2}c^2.$$

Procuremos o ponto em que uma recta qualquer da congruencia corta o plano dos yz. Fazendo para isso $x=0$ na equação precedente, acharemos

$$(A-A')z^2+Ay^2=\frac{A(A-A')}{Z_0^2},$$

ou

$$\frac{z^2}{A}+\frac{y^2}{A-A'}=\frac{1}{Z_0^2},$$

*

ou

$$\frac{z^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\alpha^2-\alpha'^2}=1,$$

se nos lembrarmos que são (n.° 20) $A=Z_0^2\,\alpha^2$ e $A'=Z_0^2\,\alpha'^2$.

Vê-se portanto que todas as rectas encontram a primeira das focaes (19), situada no plano dos yz, e demonstra-se da mesma fórma que ellas encontram tambem a segunda, situada no plano dos zx.

Vê-se pois que, em todas as configurações em que o systema se reduz a uma força unica, a direcção d'esta força encontrará sempre duas curvas fixas no corpo, uma ellipse e uma hyperbole, que são as duas focaes situadas nos planos medios do systema. É esta importante propriedade que constitue o theorema de Minding.

Corpo astatico

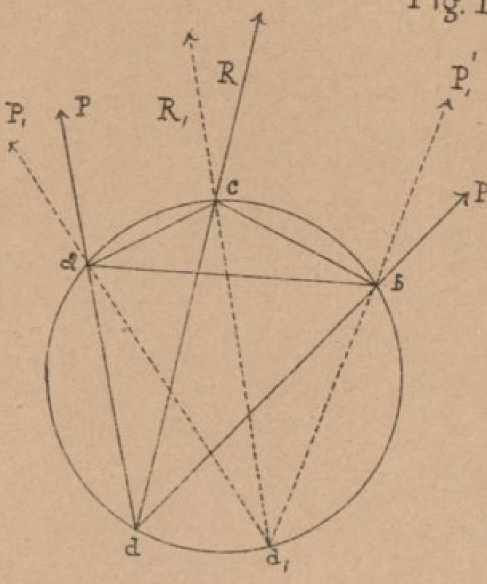
22. Diz-se que um corpo é astatico quando elle está fixado de fórma que fique em equilibrio em todas as posições que póde tomar. As condições necessarias para que um corpo, inteiramente livre e submettido á acção de forças de intensidade e direcção constantes, sempre applicadas no mesmo ponto, seja astatico, já foram estabelecidas no n.° 8. Vejamos quaes são estas condições quando o corpo está subjeito a girar em torno de um ponto ou de um eixo fixo.

Se ha no corpo um ponto fixo em volta do qual elle possa girar livremente, será preciso, para que o corpo seja astatico, que o systema tenha centro (n.° 13) e que o centro coincida com o ponto fixo do corpo.

Supponhamos agora que o corpo tem um eixo fixo em volta do qual póde girar livremente. Consideremos um plano qualquer perpendicular ao eixo fixo e decomponhamos cada uma das forças dadas em duas outras, uma parallela ao eixo e outra parallela ao plano. Projectem-se sobre este plano todos os pontos de applicação das forças e appliquem-se na projecção de cada ponto duas forças eguaes e contrarias, eguaes e parallelas á componente parallela ao plano. D'este modo teremos: um systema de forças parallelas ao eixo; um conjuncto de binarios, cujos braços são todos parallelos ao eixo fixo, e que podem portanto compor-se n'um binario unico cujo braço coincidirá com o eixo; e finalmente um systema de forças situadas n'um plano perpendicular ao eixo. O effeito de todas as forças parallelas ao eixo e de todos os binarios será destruido pela resistencia do eixo e não haverá portanto a attender senão ás forças contidas no plano perpendicular ao eixo. Se estas forças têem resultante e o seu centro (n.° 4) está sobre o eixo fixo, o corpo será astatico; se não têem resultante, o corpo será astatico se houver equilibrio em duas posições do corpo não oppostas (n.° 7).

FIM.

Fig. 1



INDICE

Pag.
Configurações planas 13
Condições do equilibrio astatico. Eixos de equilibrio 18
Plano central. Caso em que o systema se reduz a uma força unica.
Caso em que o systema se reduz a uma força e um binario........ 24
Ellipsoide central 34
Ponto central do plano central. Posição dos eixos principaes em todos
os pontos do corpo.. 38
Theorema de Minding.. 46
Corpo astatico 52

1889

LUCIANO P. DA SILVA - DISSERTAÇAO DE CONCURSO

MATHEMATICA