ESCOLA NORMAL SUPERIOR DE COIMBRA

PRIMEIROS ELEMENTOS DE GEOMETRIA

OS ÂNGULOS E O GÓNIO

POR

JOÃO DE SOUSA HENRIQUES JÚNIOR

COIMBRA
IMPRENSA DA UNIVERSIDADE
1921

PRIMEIROS ELEMENTOS

DE

GEOMETRIA

ESCOLA NORMAL SUPERIOR DE COIMBRA

PRIMEIROS ELEMENTOS DE GEOMETRIA

OS ÂNGULOS E O GÓNIO

POR

JOÃO DE SOUSA HENRIQUES JÚNIOR

COIMBRA
IMPRENSA DA UNIVERSIDADE
1921

Dissertação para o exame de
estado na Escola Normal
Superior de Coimbra.

À MEMÓRIA DE MEU PAI

A MINHA MÃE

PREFÁCIO

Se o génio ático inventou a geometria, a forma e o espírito das suas primeiras verdades, buscou um objectivo perfeito.

A questão das origens aparece simples na sua forma primitiva: As ideias fundamentais da sciência da antiga Grécia foram lançadas pela audácia de altos espíritos, e as suas directrizes, em beleza e quási equilíbrio, sairam de um só bloco criador de unidade conceptual dos elementos, sôbre os quais construiram a sua geometria. Existia decerto uma fonte comum a ligar os princípios admitidos por homens distintos, e as suas teorias e hipóteses filosóficas diversas. — A ideia de espaço no mundo antigo era limitada pelas concepções da cosmogonia dos mundos conhecidos, e todavia os geómetras afirmavam já um conceito transcendente de espaço na sua teoria das paralelas, em antítese perfeita e subjectiva.

Por toda a Grécia perpassava êsse espírito criador do primeiro ciclo das sciências exactas, e as proposições novas corriam pela dialéctica das escolas, maravilhando os que iam tendo notícia por outros de novas descobertas; pelo desconhecimento de certos documentos e papiros matemáticos, conjectura-se que a sua transmissão era feita pela tradição oral. É possível que a prática e o conhecimento das artes empíricas do Egipto, fonte lendária da geometria do Ocidente, tenham originado o movimento de inteligência sob a forma a priori do entendimento puro: os geómetras gregos iniciam as suas construções fora do domínio da evidência sensível, postulando princípios abstractos, necessários a uma primeira actividade lógica.

Thales de Mileto, o primeiro a fundar uma escola de geometria e filosofia, volta do Egipto e enuncia as primeiras proposições isoladas, que demonstra por processos deductivos; e se não as dispõe em um encadeamento lógico, existe já uma intenção conexa que as liga implícitamente pelos axiomas que êle admite sem formular. Por meio da sua escola, Thales de Mileto realiza um florescentíssimo comércio intelectual, iniciando os seus discípulos e continuadores — Anaxagora, Demócrito, Oenípede de Chios,.. — no espírito de investigações que o distinguem.

Aparecem outros métodos que vão além da primitiva deducção: As verdades primordiais de geometria são agrupadas por definições e postulados em uma vasta doutrina proposicional, e todo o progresso incide mais sôbre o estudo das origens, pela reducção dos conceitos admitidos como primitivos ao menor número — a axiomas. Depois das imortais[1] descobertas de Pytagoras e da sua escola tão lendária, com a escola de Platão começa a sistematização da geometria em uma série de definições, postulados e noções comuns (axiomas), com o motivo de confirmar a existência dos conceitos fundamentais que explicassem toda a realização das suas figurações geométricas.

Euclides dá a forma definitiva e tão perfeita, elaborando os *Elementos de Geometria*, e se abre o seu *primeiro livro* pelas 34 definições, esta ordem formal é lógicamente precedida da ordem genética e conceptual dos postulados que admite, como axiomas de existência para os seres definidos.

---

[1] Segundo Proclus, no fragmento histórico do seu *Comentário* — citação de J. Tannery.

Os postulados são simples e sôbre êles fundamenta toda a deducção das proposições e propriedades; os postulados 1, 2 e 3 reduzem-se à definição de linha recta e ao conceito de continuidade das linhas, envolvem apenas dois axiomas.

A forma dogmática e o processo de contradição que adopta em freqùentes demonstrações resultam da influência da dialectica grega: fora dessa tendência coeva inevitável, é admirável a perfeição lógica com que afirmou os postulados e o espírito de rigor que liga intimamente as demonstrações proporcionais de todos os seus livros de geometria: Os *Elementos de Geometria* de Euclides é a mais bela obra e a eterna fonte de inspiração, originária de todas as sciências e das teorias geométricas.

Depois do período fecundo das escolas e gerações (Arquimedes, Appolonius,...) que decorre desde o VII até o século III a. C., a escola de Alexandria (de Euclides) fecha todas as questões sôbre definições, Euclides torna-se clássico[1], e a geometria dos *Elementos* é considerada tão perfeita que fica estacionária... Durante dois mil anos os seus fundamentos não progridem com a esterilidade para eliminar o 5.º postulado, que os comentadores de Euclides pretendem demonstrar, envolvendo-se numa série de círculos viciosos de raciocínio e em petições de princípio.

Aparecem alguns geómetras modernos preocupados do espírito de rigor dos Elementos de Euclides, que procuram organizar novos Elementos de geometria, inspirando-se nas ideias e no espírito dos geómetras das escolas gregas: Legendre é o mais notável, pela precisão que o sábio analista dá a sua obra; como outros, emprega notações pertencentes à aritmética e aos modernos ramos das sciências matemáticas,

---

[1] Conclusão de P. Tannery, no seu ensaio crítico sôbre a *Geometria Grega*.

introduzindo no seu tratado elementos extranhos à tecnologia da geometria pura.

Existe actualmente uma tendência acentuada, especialmente nas nações não latinas, de renovação do texto e dos métodos de Euclides, contra os trabalhos notáveis de Méray, Klein, Veronese.

Regeite-se essa corrente contemporânea de simples comentário textual do tratado euclideano. Se abrirmos ao acaso um dos seus livros, encontra-se com freqüência as expressões clássicas — «o que é impossível», é absurdo, contra o axioma, não pode não ser, etc.: Um dos seus instrumentos de prova é o princípio de contradição sob a forma de método pelo absurdo, posto por Euclides em oposição à sofística grega, o que gerou um motivo de scepticismo intelectual a uma sciência exacta, sem acrescentar valores positivos de conhecimento puro ou de análise crítica à geometria. Actualmente, êsse motivo de objecções anulou-se com a audácia de afirmação que os modernos adoptaram, admitindo novas hipóteses possíveis.

Como conseqüência da sistematização lógica da geometria euclideana, as modernas investigações, conduzidas por via elementar, definem hipóteses distintas implícitamente existentes nos príncipios da geometria grega: o próprio texto do 5.º postulado indica que Euclides lhe deu a significação de uma hipótese de valor mais complexo e geral que a sua teoria das paralelas, enunciando-o com a forma mais simples, depois de uma actividade psicológica intensa em que teria reflectido sôbre os conceitos primitivos e originários da geometria.

Os ensaios de Saccheri (1733) estabelecem, de uma forma definitiva, a existência de três hipóteses distintas no 5.º postulado, e cada uma delas conduz a um grupo de geometrias lógicamente possíveis e *anti-euclideanas*, ainda que o próprio

Saccheri as tenha interpretado sob o ponto de vista euclideano, regeitando as duas contrárias. E, se os seus resultados permaneceram de facto desconhecidos dos geómetras do último século, dirigiram subjectivamente, segundo o Sr. Veronese, a descoberta da geometria não euclideana de Lobatschewski e J. Bolyai.

Halsted afirma que a descoberta dessa geometria, aí por 1830, era inevitável...

Sur les fondements de la Géométrie, 1830. — Lobatschewski regeita definitivamente o postulado 5.º equivalente à paralela única, e admitindo os postulados 1, 2, 3. 4 e 6, constroi, desde 1825, a sua geometria não euclideana, e no ano seguinte o genial matemático russo faz em Kazan uma leitura pública das suas descobertas sobre os Princípios da geometria. Na «Géométrie imaginaire» — 1837, distingue sôbre o plano duas classes de rectas e dá a definição anti-euclideana de *rectas paralelas*, e daí à proposição: — por um ponto exterior pode-se dirigir duas paralelas distintas (e infinitas *não-secantes*) a uma recta. — O motivo das suas investigações era estabelecer e confirmar a impossibilidade de demonstrar o postulado 5.º de Euclides, partindo dos anteriores. Os desenvolvimentos da sua geometria não conduziram a qualquer contradição, e se as suas conseqüências não fôssem ilimitadas, resultaria a certeza de que o postulado não se pode deduzir dos anteriores, como lógicamente independente dos primeiros princípios da geometria de Euclides.

As proposições do tratado *Pangeometrie* em que Lobatschewski completa (em 1855) as suas teorias, formam um sistema lógico isento de contradições: restava ainda a possibilidade de elas se revelarem dentro do próprio sistema; novos estudos especulativos, obtidos por vias independentes, e com uma forma acentuadamente técnica dos ramos modernos da matematica, conduziram a resultados convergentes, afastando todo o incidente dessa possibilidade. O longo debate sôbre o célebre postulado 5.º de Euclides está deslocado e fora da discussão, e convencionaram dar-lhe a solução —arquive-se...», depois das construções positivas obtidas nas investigações matemáticas de Riemann, Helmholtz, Cayley, Klein, Poincaré, S. Lie, Veronese e outros geómetras.

Em conseqùência da aplicação dos métodos de coordenadas projectivas, Cayley e Klein obtem o resultado importante da proposição: —pode-se dar um sentido euclideano a todas as proposições não euclideanas —, e portanto a uma proposição não euclideana corresponde uma só no sistema euclideano: o que exclui toda a possibilidade de contradição entre os dois sistêmas e a existência de antinomias dentro do grupo de geometrias não euclideanas.

É nesse sentido que as modernas teorias matemáticas permitem a existência lógica de infinitos sistemas de geometrias; todos êsses sistêmas classificam-se em três grupos: —de Lobatschewski, de Euclides, e de Riemann — correspondentes às três hipóteses de Saccheri. A geometria *esférica* de Riemann é constituida (regeitando o postulado 6.º de Euclides) admitindo-se num sentido mais geral, que — por dois pontos passam infinitas e enumeráveis «rectas»; inclúi muitas variedades de geometrias que não teem, todavia, significação concreta no espaço. Satisfazem à mesma ordem de princípios a geometria anti-arquimediana do Sr. G. Veronése, desenvolvida depois por Hilbert, e o sistêma de geometria *eliptica* de Cayley-Klein, construida pelos métodos projectivos no sentido de poder corresponder a uma variedade particular de espaço, distinta da geometria «esférica».

A legitimidade lógica de infinitas geometrias dá orígem a uma nova questão, — a arbitrariedade dos primeiros conceitos e a escolha dos postulados fundamentais de cada sistema, e que preocupa os geómetras: Hilbert procura determinar o número exacto de axiomas necessários a cada geometria; e, postas as premissas que definem um grupo de geometrias, Sophus Lie admite como necessárias — a possibilidade do movimento e as características espaciais — e conclui de um seu teorema, que o número de geometrias dêsse grupo é limitado. Toda a actividade crítica e construtiva sôbre os princípios da geometria tende a alargar os seus domíninios, afastanto a sua última solução, pelo aparecimento de novos problemas e hipóteses mais interessantes que produzem todo o progresso das variedades superiores da matemática: assim a recente *teoria* da relatividade de Einstein, na ordem de relações do espaço sensível com os factos do movimento geométrico.

*

A actividade scientífica contemporânea distingue-se em outra ordem de investigações sôbre as obras clássicas portuguesas das sciências matemáticas, e daí resultam as novas obras: a *Astronomia dos Lusíadas*, do Sr. Dr. Luciano Pereira da Silva, — *L'Astronomie Nautique au Portugal à l'Époque des Grandes Decouverts*, do Sr. Joaquim Bensaúde; publica-se a «Histoire de la science Nautique au Portugal á l'Époque des .Grandes Decouverts — *Collection de Documents* [1], reproduções fac-simile das obras e escritos portugueses mais notáveis daquela época (séculos XV e XVI), etc.

---

[1] Publicados por ordem do ministério da Instrução Pública (D. 29 Dez. 1913): — *Regimento do Estrolábio e do Quadrante, Tractado da Spera do Mundo; Tratado del Esphera y del Arte del Marear*, por Francisco Faleiro (1535); *Almanach perpetuum celestium motuum*, de Zacuti (1473) e José Vizinho (edição latina de 1490, Leiria); e as obras de Pedro Nunes.

As referidas obras tratam de importantes pontos doutrinários que definem a situação e o valor das sciências portuguesas e peninsulares na Europa, em um período brilhante da Renascença, único em que existiu uma cultura scientífica caracterizadamente portuguesa, intimamente ligada à realização da empreza das Descobertas.

Nesses tratados e escritos clássicos há problemas de geometria e de cosmografia definidos como actualmente, e em alguns a forma permanece perfeita; e se mudaram os processos, sómente os métodos modernos é que interessam como instrumentos de técnica; de positivo isto significa que êsses documentos e produções devem ser vulgarizados de modo a renovar os centros de cultura literária e scientífica, pelo uso de elementos de terminologia da nossa linguagem que estilizem em formas simples os livros e produções comtemporâneas, dando-lhes formalmente a técnica moderna mais geral. Êsse renascimento das sciências pela vulgarização sistematizada, e ao serviço da educação geral de humanidades (sem os prejuízos de erudição), prepararia, como fundo étnico, o sentido de um possível ressurgimento das sciências em Portugal.

Os primitivos núcleos da cultura scientífica do renascimento dos séculos XIV e XV tiveram uma duração bem efémera, perderam-se sem deixar vivas reminiscências, e é em vão que se procura, com uma certa ilusão, a linha interior que os encadeie a elites e escolas posteriores — nos sulcos das caravelas e nas brilhantes constelações do Sul.

*

Na *Introdução* aos princípios de Geometria consideramos as primeiras definições e conceitos sôbre elementos e noções comuns: os axiomas são proposições existentes por si próprias e primitivas, e se tomam como fundamentais: — axi. do ponto, das ligações (espaço), do movimento, da mobilidade, da continuidade das linhas, da igualdade: estes axiomas formam uma sucessão lógica. Definida a forma e estado de uma figura, aparece uma nova ordem de factos pertencentes a um grupo de transformações possíveis — o movimento geométrico: duas figuras *idênticas podem tornar-se distintas*, em certas condições (§ 2.). O postulado da mobilidade é independente do axioma das ligações, e estabelece que os deslocamentos não implicam novas propriedades intrínsecas às figuras (invariáveis). Sómente a ideia inata à priori da invariabilidade na variação de estado (de repouso como uma forma de movimento) nos conduziria a considerar o axioma da mobilidade como conseqùência do axioma das ligações, mas isso seria uma forma sintética à posteriori do conceito de movimento, e este (variabilidade) precede lógicamente o conceito de congruência ou mobilidade.

Podemos agrupar os postulados fundamentais de um *primeiro livro* no sistema seguinte de axiomas: — das características espaciais e intrínsecas (pontos, figuras invariáveis); do movimento e congruência: 1. — da continuidade das linhas: 2. — da linha recta; 3. — das paralelas; 4. — do plano; 5. — da igualdade. Os primeiros axiomas eram admitidos implícitamente pelos geómetras gregos, sem os enumerar nem enunciar, e os modernos consideram-nos necessários e fundamentais aos princípios *elementares* da Geometria.

As definições construtivas e axiomas da recta, das paralelas, do plano, a nova definição de *ângulo* de duas rectas e as propriedades essenciais dos ângulos, são dirigidas nesta dissertação pelos princípios projectivos, e daí se deduz o grupo de propriedades; a demonstração de algumas proposições resulta de uma simples análise. O estudo da circunferência (e da sua nova definição construtiva) é completado por uma demonstração de ordem prática, para a qual construímos o gónio [1], aparelho descrito no § 12. Tendo motivado a sua concepção razões puramente especulativas — a definição e construção da circunferência e o estudo de novas linhas algébricas — procurei dar-lhe uma forma prática e útil a alguns serviços; e como aplicação imediata apresentamos a determinação do ponto de estação (*Nota*). As curvas descritas pelo gónio formam uma família de linhas algébricas de 4.ª ordem, e a sua equação é da forma geral: $(x^2+y^2)(x^2+y^2-4Rx-g^2)+4R^2x^2=0$; e generalizando o seu princípio de construção pode-se estudar novas linhas algébricas.

*

Sem perturbar neste trabalho o espírito de rigor da geometria e das sciências matemáticas, os seus defeitos em alguns pontos ligam-se intimamente à introdução das formas dadas aos primeiros postulados, e às modernas directrizes da geometria elementar.

A geometria projectiva estuda directamente as propriedades puramente qualitativas do espaço que são comuns à geometria métrica, aos sistemas euclideano e não euclideano, isto é, desenvolve-se no domínio da geometria pura: cada proposição simbólica da geometria superior forma uma proposição correspondente em qualquer espaço ou geometria, transforma-se segundo a significação atribuida aos símbolos das coordenadas projectivas.

No seu *Ensaio* sôbre os fundamentos da Geometria, o Sr. Russell, bem como o Sr. Federigo Enriques, considera a geometria superior como um sistema aplicável a todos os

[1] Foi construido no Laboratório de Física, de janeiro a junho do ano de 1920.

generos de espaços e a quaisquer geometrias, e define a necessidade de formular os seus axiomas num sentido lógico e formal, e por conseqüência «é necessário reconstruir todo o edifício geométrico», o que arrastará todas as outras, pelo desenvolvimento dado por Cayely, Poincaré, S. Lie, Klein, Veronese e outros geómetras à Metageometria do período actual. A geometria projectiva é considerada pelo seu valor filosófico, e, como forma matemática, os seus métodos possuem beleza que deriva da sua grande unidade: as directizes epistemológicas para renovar a geometria elementar vão necessáriamente desenvolver-se nesse sentido projectivo. É este, também, um acontecimento inevitável ao seu progresso futuro; pois, de resto esta sciência está actualmente numa mais intensa evolução sôbre muitos pontos.

Coimbra, Junho de 1921.

sistemas de espaços não arquimedianos geométricos. Quanto à necessidade de [illegible] axiomas num sentido lógico e [illegible], e que será [illegible] necessário reconstruir todo o edifício geométrico, o que [illegible] todos os outros, pelo desenvolvimento dado por [illegible], Veblen, S. Lie, Klein, Veronese e outros geometras e Metageometria da questão lógica. A geometria projectiva, considerada pelo seu valor lógico, e a sua forma [illegible] dos seus métodos, quanto talvez que [illegible] a sua grande unidade das diversas [illegible] para realizar a geometria elementar. Com [illegible] desenvolveu-se como sob o projectivo. E, também, um acontecimento [illegible] no seu progresso futuro; pois, de resto esta sciência está actualmente numa das ultimas evolução sobre muitos pontos.

Coimbra, Junho de 1917.

I.

Introdução aos Princípios de Geometria. Os Axiomas

§ 1.

Grupos. Axioma do ponto

A intuição revela-nos a existência de coisas, de objectos, de agrupamentos de objectos, como seres necessários á experiência.

Todo o agrupamento aparece pela percepção de objectos e coisas diversas, umas fora das outras, indefiníveis; e se em cada objecto abstrairmos do seu conteúdo substancial ou material, aquilo que resta é *o elemento,* e a sua concepção torna possível a diferenciação de outros elementos, discerníveis pelo conhecimento. Êsses elementos, aparecem como *formas* ou *figuras.*

Pelo facto de serem fora uns dos outros, admite-se [1] que é possível distinguir quaisquer elementos ou grupos entre si: o seu conhecimento exige que existam elementos ou formas distintas.

---

[1] M. W. Russell estabelece a existência de uma forma de exterioridade, e admite: «que le jugement et le raisonnement postulent que l'element (this) ne soit ni simple ni existant par lui-même.» (*Essai sur les Fondements de la Géométrie*, cap. IV, pág. 232).

O conceito de *elemento* é indefinível; pode-se atribuir-lhe uma significação lógica por meio das locuções seguintes:

1. — Designa-se um elemento com uma letra: A indica o elemento A. Os elementos denotam-se com letras diferentes do alfabeto: A, B, C,... L,...; ou com uma só letra a que se apõe ápices ou índices: X^I, X^{II}, X^{III},... ou X_1 X_2 X_3,... que designam os elementos: X um, X dois, X três,...

Diz-se *um grupo* de elementos A, B, C,... se cada elemento existe com os elementos assinados A B C..., e denota-se por um dos símbolos: (A B C...), (C A B...) formados com as letras dos elementos; denota-se também um grupo por uma letra minúscula: a, b, g,...

Os grupos ($A^I A^{II} A^{III} A^{IV}$), ($X_1 X_2 X_3 X_4$) indicam-se por: (A), e (X).

O elemento C *pertence* ao grupo, é *parte* do grupo (ABCD), se C existe em o grupo (A B C D).

O grupo a *pertence ao grupo* b, se cada elemento de a pertence ao grupo b (mas se algum elemento do grupo b não pertente ao primeiro, diz-se que os *grupos* a *e* b *são diferentes*).

II. Se o grupo a pertence ao grupo b, e b pertence ao grupo a, diz-se que os *grupos* a *e* b *coincidem* ou *são idênticos;* representa-se com o símbolo: $\equiv$, e indica-se escrevendo: $a \equiv b$, $b \equiv a$.

E se um e só um elemento X do grupo a é parte do grupo b, e um só elemento Ӿ do grupo b é parte de a, exprime-se êste facto dizendo: *os elementos* X *e* Ӿ *são idênticos*: X $\equiv$ Ӿ.

Os grupos a e b *tocam-se* pelos elementos X e Ӿ, teem o elemento *comum* X (ou Ӿ).

Sendo A, B, C,... E, os únicos elementos do grupo a, pertencentes ao grupo a' e A', B', C',... E', os únicos elementos de a' que fazem parte de a, os grupos (A B C.. E),

$(A'B'C'..E')$ são idênticos; $(ABC..E)$, ou $(A'B'C'..E)'$ é *a parte comum* aos grupos dados a e a'.

2. Def. — Se os grupos Xa, $\mathfrak{X}b$ teem um só elemento comum $X \equiv \mathfrak{X}$, diz-se *que os grupos* a, b (diferentes daqueles) *são distintos*, e indica-se escrevendo: $a \neq b$. Os elementos de a e b são distintos.

(a e b são *exteriores* ou *isolados*, por estarem fora um do outro).

Diz-se então que o grupo a não pertence a b, e b não pertence a a.

Se o grupo a pertence ao grupo b, e alguns elementos do grupo b não pertencem ao grupo a, diz-se que *a é parte* do grupo b. Por ex., dos grupos: (ABD), (ABDCE), o primeiro pertence e é parte de (ABDCE).

Das expressões anteriores resultam as proposições seguintes:

1) Se o grupo de elementos a pertence (ou é idêntico) ao grupo b, e se b é parte de c, o grupo a é parte do grupo c.

2) Se o grupo a é parte de b, e b é idêntico (ou é parte) de c; o grupo a é parte do grupo c.

3) Se a é idêntico a b, e b é idêntico ou coincide com o grupo c: o grupo a é idêntico ao grupo c. Os grupos a, b, c, são idênticos, $a \equiv b \equiv c$.

Entre dois elementos ou grupos de elementos só é possível um dos dois factos seguintes, cada um dos quais se exprime dizendo: I, *são idênticos* entre si: $a \equiv b$, e, $b \equiv a$; II, *são diferentes*, ou *distintos*.

3. — Um elemento constitue um grupo de outros elementos, sempre que seja possível distinguir estes como partes naquele elemento; e emquanto êsse facto fôr possível.

Def. — E se existe um elemento que é idêntico (coincide) e é parte de outro elemento, êsse elemento diz-se **ponto** geométrico, e admite-se afirmando o axioma [1] seguinte:

Axioma do ponto. — Existem pontos distintos.

Definido um ponto, admite-se a existência de outros pontos: pode-se distinguir os pontos uns dos outros.

Def. — Dá-se o nome de **figura** a qualquer grupo de pontos.

Os pontos e as figuras são elementos, e significa que têm o atributo ou qualidade de existirem, como seres fora uns dos outros, *individualizados* pela sua *forma própria*. O ponto é o elemento essencial das figuras.

4. — Em uma figura ou grupo de pontos A, B, C,.., I, cada ponto pertence (1) ou é *aferente* á figura.

Se A, B, C,.. P, são os únicos pontos da figura F que pertencem à figura F′, e A′, B′, C′.., P′, são os únicos (1, II) pontos de F′ que pertencem à figura F, as figuras dos dois grupos de pontos (A B C.. P), (A′ B′ C′.. P′), coincidem e são *a parte comum* a F e F′; as figuras F e F′ *sobrepõem-se* (ou *estão aplicadas* em *parte* — intersecção, traço) uma a outra pela parte comum.

I. Quando a parte comum ou traço é um só ponto A da figura F, e um só A′ de F′, diz-se que as figuras F, F′ *se tocam* no ponto A (ou A′): os *pontos* A *e* A′ *são idênticos* ou *coincidem* em um só ponto, $A \equiv A'$.

II. Um grupo de figuras $f, f', f'',..$ forma uma nova figura $(f f' f''...)$ que se diz *composta* das figuras $f, f', f'',...$ Se as figuras $f, f', f''...$ pertencem a F, esta figura diz-se (3) *decomposta em partes* $f, f', f''...$

---

[1] O ilustre geómetra italiano G. Veronese admite o «postulado do ponto» como *o primeiro axioma* da geometria — *Fondamenti di Geometria*, e *Elementi di Geometria*. 1919.

III. Existem *figuras distintas* ou *exteriores* (3): duas figuras são distintas, se os pontos de uma são distintos dos pontos pertencentes á outra.

5. — Sejam as figuras F e F' formados pelos seus pontos:

F	A, B, C,.., I,
F'	A', B', C',... I'.

Def. i. — Se os pontos A B C... I da figura F pertencem a F', e os pontos A' B' C'... I' de F' pertencem à figura F, as figuras F, F' dizem-se **idênticas** ou *coincidentes* (1, ii): $F \equiv F'$, $F' \equiv F$.

Cada ponto da figura F coincide com um e só um ponto de F', e cada ponto de F' coincide com um só ponto de F: se o ponto A coincide com A', e A' coincide com A, B com B' e B' com B,..., os *pontos* A e A', B e B', C e C'... dizem-se **correspondentes** sobrepostos.

Def. ii. — A um par de pontos correspondentes sobrepostos dá-se o nome de **ponto unido**, e designa-se com o símbolo: $(A \equiv A')$.

Se cada uma das figuras F' *e* F'' *é idêntica à figura* F, *as duas figuras* F' *e* F'' *são entre si idênticas;* as figuras F, F' F'' são idênticas e estão sobrepostas: $F \equiv F' \equiv F''$.

De facto, cada ponto unido $(A \equiv A')$,... de F e F' coincide com o ponto A''.. de F'', correspondente do ponto $A \equiv A''$ de F: os ponto A', A'' são (2,3°) idênticos $A' \equiv A''$, e portanto os pares de pontos A' e A'', B' e B'', C' e C'',..: são pontos unidos, $(A' \equiv A'')$, $(B' \equiv B'')$, $(C' \equiv C'')$, etc. e as figuras F' e F'' são idênticas: $F' \equiv F''$, $F'' \equiv F'$.

Logo, *duas figuras idênticas a uma terceica são entre si idênticas,* e a proposição anterior pode enunciar-se: *Se* $F' \equiv F$, *e,* $F'' \equiv F$, *é,* $F' \equiv F''$.

II. Quando várias figuras F, F', F'',... são idênticas ou coincidentes $F \equiv F' \equiv F'' \equiv \ldots$, estão sobrepostas, formando uma só figura. Recíprocamente, considera-se toda a figura como um grupo de figuras coincidentes, e pode-se conceber (1, II) *o desdobramento* de uma figura em duas ou mais figuras idênticas, como grupos idênticos ou formados dos mesmos elementos.

6. — As proposições dos n.os 3 e 4 estabelecem a significação de pontos distintos e coincidentes.

Def. I. — Chama-se **contacto** qualquer ponto ou grupo de pontos coincidentes com um ponto dado. Quando o ponto A coincide com o ponto B, A e B representam o mesmo ponto ou contacto B do ponto A; A e B são idênticos: $A \equiv B$.

Def. II. — Se dois pontos distintos P e P' formam uma figura única, individualizada pelos próprios pontos, diz-se **ligação** ou **par de pontos** e representa-se por: (P, P'). Para as ligações estabelece-se o axioma:

Axi: — **Dois pontos** P, P' **formam por si próprios a figura** (P, P'), **que se diz a ligação entre** P **e** P'.

(P, P') existe, com as propriedades que vamos definir em o n.º 9 (def. IV).

Construção: Dado o par de pontos (P, P'), qualquer ponto P'' existe em uma das ligações (P'', P), (P'', P') com a figura (P, P'), e diz-se que está *situado nas* suas ligações com (P, P'); e recíprocamente: (P, P') é situado pelas suas ligações (P, P''), (P', P'') com P'', *concorrentes* em o ponto P'' (e idênticas às dêste ponto com a primeira ligação).

E assim por deante, para quaisquer pontos distintos P''', P^{IV},...

Admitida a existência de pontos distintos (3, axi.), todos os pontos 𝔓 assinados como distintos, e *emquanto fôr possível*, formam grupos 𝔓 (P, P') de ligações entre si. E todas as ligações entre estes pontos $\mathfrak{P}$ existem em um grupo ($\mathfrak{P}$) a que se dá o nome de **espaço** geométrico, ao qual pertencem (1) todos os pontos e ligações *possíveis*.

Cor. — Qualquer ponto existe em ligação com outros pontos do espaço.

7. — Def. I — Toda a figura é individualizada pelas *ligações interiores* entre os seus próprios pontos, e chama-se **figura rígida** ou **invariável**, o grupo das suas ligações interiores.

Por conseqüência individualiza-se a figura geométrica, isolada, abstraindo das ligações (*exteriores*) dos seus pontos com os pontos de espaço (cor.), exteriores à figura.

Cada ponto de uma figura F está em contacto com um ponto do espaço; o grupo F_1 de contactos do espaço com os pontos da figura F diz-se *sítio* da figura F; diz-se que a figura F está *situada* na parte F_1 do espaço, e (5, def. I) é $F_1 \equiv F$. Assim por ex., o sítio da figura A F formada pela figura F mais um ponto $A_1 \equiv A$ em ligação com F é: $A_1 F_1$.

Def. II — Chama-se **estado** ou **posição** de uma figura, ao sítio da figura formada pela própria figura e por um ponto exterior, em ligação com a figura.

Se $A_1 F_1$ é o estado da figura F, o ponto $A \equiv A_1$ qualquer, exterior a F, e em ligação com um dos seus pontos fica pertencendo à figura, *solidariza-se* com ela para definir a sua posição no espaço geométrico.

I. *O estado de uma figura é determinado pela ligação entre um só dos seus pontos e qualquer ponto exterior à figura.*

De facto, a ligação (A, P), entre um ponto P da figura e o ponto A, é única (6, axi.).

Cor. — A posição de um ponto P é definida (6, cor.) pela ligação do próprio ponto P com um ponto A, distinto de P ($A \neq P$). O estado ou posição de um par de pontos (P, P') é determinado pela ligação entre um dos seus pontos e qualquer ponto exterior A.

II. — Sendo toda a figura rígida, individualizada pela solidarização dos seus pontos, *as figuras podem solidarizar-se* por meio de ligações, *formando uma única figura*, (4, II) de posição definida.

E é suficiente uma só ligação para cada par de figuras.

8. — Se em um grupo *s* de elementos A B C D..., o elemento B está logo depois do elemento A, B é o seguinte de A, C é o seguinte de B,... diz-se que o elemento D é *sucessivo* de A, B, C, e B, C, D.... são *elementos sucessivos* de A, de tal modo que: se D é sucessivo de B, e B é sucessivo de A, o elemento D é ainda sucessivo de A; e o mesmo se diz de outros elementos do grupo *s*.

Portanto, *se um elemento* P *é sucessivo de* L, *qualquer sucessivo de* P *é sucessivo de* L.

Def. I — Os elementos de um grupo *s* dizem-se *ordenados* **na ordem** *em que são sucessivos* se, para dois elementos L e P do grupo, P é sucessivo de L e todos os elementos sucessivos de P são distintos (2) de L. O *grupo ordenado s* diz-se também *sucessão ou série* de elementos; e toda a sucessão satisfaz a condição de ordem. Por ex., o símbolo: (A B C D) denota a sucessão dos elementos na ordem A B C D; e (A B C D), (A D C B) são duas sucessões diferentes de elementos do mesmo grupo, designam grupos idênticos (1).

Cor. — *Os elementos de uma sucessão são todos distintos* (def.).

Duas sucessões de um grupo de elementos dizem-se *opostas*, se o sucessivo P *de qualquer* elemento L em uma delas tem como sucessivo o próprio elemento L na outra sucessão. Ex., B é sucessivo de A em (A B C D), e A é sucessivo de B em (D C B A), os seus elementos estão em *ordens opostas*: A B C D, D C B A.

Quando um elemento B é sucessivo de A, e D é sucessivo de B, o elemento B *está compreendido entre* A e D, ou D e A. Se o elemento B e sucessivo de A, e os restantes sucessivos de A são sucessivos de B, diz-se que A e B são *elementos consecutivos*, e B é *consecutivo* de A. É suficiente que todos os elementos sucessivos de A, compreendidos entre A e o seu sucessivo L, sejam B e sucessivos de B, para A e B serem consecutivos.

Entre dois elementos consecutivos não há elementos da sucessão.

Def. II. — Uma *sucessão é ilimitada*, se qualquer dos seus elementos tem um sucessivo, e todo o elemento é sucessivo de outro elemento. Diz-se *sucessão limitada* a parte (1) de uma série ilimitada.

Distingue-se duas espécies de sucessões limitadas:

1.ª — *por um só elemento*: 1) Na sucessão ilimitada N O P Q S U X.. de que a sucessão limitada (O P Q S U... é parte, existe um par de elementos (N, O) tal que, um só dêstes elementos O pertence à série limitada e é sucessivo de elementos pertencentes sómente à sucessão ilimitada... N O P Q S U...: por conseqüência, há na sucessão limitada (O P Q S U...,) um único elemento O, de que todos os outros são sucessivos, e diz-se *primeiro elemento* ou *origem* da sucessão (O P S U X...; e todo o sucessivo de qualquer elemento é um elemento da sucessão limitada:

O primeiro sucessivo do primeiro elemento diz-se *segundo;* o elemento consecutivo do segundo diz-se *terceiro;* o seu consecutivo diz-se *quarto;* e assim por deante, os diversos sucessivos teem nomes distintos.

2) Em a sucessão limitada. . . N O P S U) existe um único elemento, U, que é sucessivo de todos os outros, e se diz o

último elemento (ou *extremo*) da sucessão: qualquer elemento é sucessivo de outro elemento da sucessão limitada (por um último).

2.ª — *Por dois elementos:* Na sucessão ilimitada... NOPSUX..., os dois pares de elementos (N, O) e (U, X) definem os dois elementos O e U que limitam (1, (2 a sucessão (OPQSU); o primeiro O e o último U dizem-se *extremos* de (OPQSU).

Pôsto isto, uma sucessão diz-se *limitada por um elemento:* 1) se tem um 1.º elemento, e todo o elemento tem um sucessivo; 2) se tem um último elemento, e todo o elemento da sucessão é sucessivo de outro.

Uma sucessão que tem um primeiro e um último elemento, diz-se *limitado por dois elementos*; o 1.º é a *origem*, e o último a *extremidade*.

Parte de uma sucessão limitada é ainda limitada.

Def. III. — Diz-se **elemento interior** de uma sucessão, o que está compreendido entre dois elementos quaisquer da sucessão: qualquer elemento de uma sucessão ilimitada é interior. Os elementos de uma sucessão limitada, distintos dos extremos, são interiores, e estão compreendidos entre os extremos (*fronteiras*) da sucessão.

II. — Toda a sucessão ou série de elementos é definida pela ordem dos seus elementos. Em duas sucessões opostas de objectos ou elementos quaisquer, estes elementos existem em duas *ordens* ou *sentidos opostos* (def.) em que se sucedem, respectivamente; cada uma destas *ordens ou sentidos* exprime-se de uma forma necessária, dizendo de dois elementos quaisquer P, S: se o elemento S é sucessivo de P na I.ª, S tem um sucessivo P (ou P é sucessivo de S) na sucessão oposta.

Os elementos das sucessões podem ser quaisquer objectos, figuras, pontos, etc.

§ 2.

Movimento geométrico

9. — As figuras existem no espaço em estados definidos, e as ligações entre elas (7) formam *relações* ou grupos de figuras. Como vimos anteriormente, duas figuras rígidas, ou são idênticas (coincidentes), ou distintas e exteriores uma a

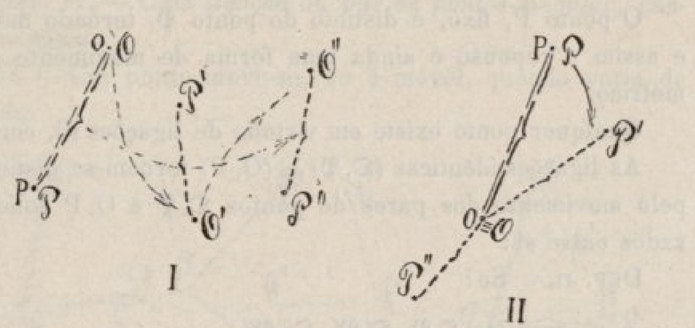


Fig. 1

outra (4, 5); e aos seus estados correspondem relações idênticas.

Admite-se o seguinte:

Axioma do movimento: — Duas figuras idênticas podem tornar-se exteriores uma a outra. *E se duas ligações coincidentes de um ponto unido* (das figuras coincidentes) *com um ponto exterior se tornam distintas,* **todos os pares de ligações** *entre cada contacto das figuras e algum ponto exterior, tornam-se distintos.*

Def. i. — Esta possibilidade e o facto geométrico decorrente chama-se **movimento,** e a sua significação exprime-se atribuindo às figuras as seguintes propriedades:

Sejam $\mathfrak{P}$ e P dois pontos coincidentes, formando o contacto $\mathfrak{P} \equiv P$; o ponto $\mathfrak{P}$ existe no sítio P, está situada em P, e diz-se *fixo* em P ou *em repouso.*

1.ª Se o ponto $\mathfrak{P}$ se torna distinto do ponto fixo P, e vai coincidir com o ponto $\mathfrak{P}'$, distinto de P, o seu estado é $\mathfrak{O}'\mathfrak{P}'$ (fig. 1) e diz-se que o ponto P se *move* ou é *móvel:* $P, P', P'', \ldots$ são os sítios sucessivos de P, que *variou* de posição no espaço, e

$$\mathfrak{P}, \mathfrak{P}', \mathfrak{P}'', \ldots$$

são as formas distintas do ponto móvel $\mathfrak{P}$.

O ponto P, fixo, é distinto do ponto $\mathfrak{P}$, tornado móvel, e assim o repouso é ainda uma forma de movimento geométrico.

Qualquer ponto existe em virtude de ligações (6, cor.)

As ligações idênticas $(\mathfrak{O}, \mathfrak{P}) \equiv (O, P)$ tornam-se distintas, pelo movimento dos pares de pontos $\mathfrak{O}, \mathfrak{P}$ e O, P solidarizados entre si:

Def. II. — Se:

$$\mathfrak{O}\mathfrak{P},\ \mathfrak{O}'\mathfrak{P}',\ \mathfrak{O}''\mathfrak{P}'', \ldots$$

são os estados (7) sucessivos do ponto movel P, diz-se que a sua posição ou estado é **variável.**

O ponto $\mathfrak{P}$, movel desta maneira, variou de sítio e de posição, e o mesmo sucede (fig. 1, I) à ligação móvel $(\mathfrak{O}, \mathfrak{P})$.

2.ª Se a ligação ou par de pontos $(\mathfrak{O}, \mathfrak{P})$ se move com o ponto $\mathfrak{O}$ em contacto em o ponto fixo O, o ponto é móvel (axi.) com $(\mathfrak{O}, \mathfrak{P})$, e

$$\mathfrak{P}\mathfrak{O},\ \mathfrak{P}'\mathfrak{O},\ \mathfrak{P}''\mathfrak{O}, \ldots\ldots\ldots (O \equiv \mathfrak{O}),$$

são os estados sucessivos (fig. 1, II) do ponto móvel $\mathfrak{O}$, de sítio invariável O.

Def. III. — Um ponto $\mathfrak{O}$, movel em contacto com um ponto fixo O no espaço, diz-se **centro** ou **ponto singular.**

3.ª Sejam (P, P_1) e $(\mathfrak{P}, \mathfrak{P}_1)$ dois pares de pontos idênticos: $(P, P_1) \equiv (\mathfrak{P}, \mathfrak{P}_1)$. As ligações coincidentes $(\mathfrak{P}, \mathfrak{O})$, (P, O) tornam-se exteriores uma a outra, e $\mathfrak{P}\,\mathfrak{P}_1\,\mathfrak{O}$, $\mathfrak{P}'\,\mathfrak{P}'_1\,\mathfrak{O}'$, ... são os estados de $(\mathfrak{P}, \mathfrak{P}_1)$: o par de pontos $(\mathfrak{P}, \mathfrak{P}_1)$ move-se (fig. 2, I), variando de sítio e de estado.

E se os pares de pontos $(\mathfrak{P}, \mathfrak{P}_1)$ e (P, P_1) estão em contacto, $(\mathfrak{P}, \mathfrak{P}_1)$ tem os seus pontos singulares $P \equiv \mathfrak{P}$, $P_1 \equiv \mathfrak{P}_1$; $P\,P_1\,O$, $\mathfrak{P}\,\mathfrak{P}_1\,\mathfrak{O}'$ $\mathfrak{P}\,\mathfrak{P}_1\,\mathfrak{O}''$, ... são os sucessivos estados (fig. 2, II) do par de pontos $(\mathfrak{P}, \mathfrak{P}_1)$, móvel (2.°) com os seus pontos singulares $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}_1$.

Def. IV. — Uma *ligação* ou *par de pontos singular*, chama-se **eixo**.

II. — Um ponto move-se, ou é móvel, quando varia de estado.

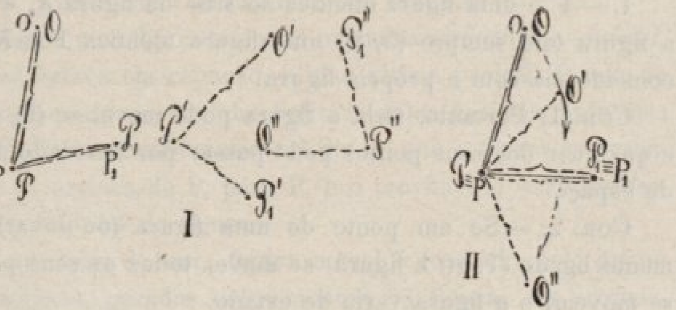


Fig. 2

Os pontos móveis da 1.ª espécie são *pontos ordinários;* a sucessão de estados do ponto, naquele movimento definido, resulta da sua variação de sítio. À locução **formas de um ponto móvel** dá-se a significação: figuras idênticas ou coincidentes com o ponto móvel; as formas de um ponto e os seus sítios, são coincidentes em cada estado do ponto móvel.

Def. V. — Diz-se **ponto variável** X uma sucessão de formas $X_1, X_2, X_3, \ldots$ do ponto móvel X, e indica-se qualquer destas formas por X.

10. — Consideremos as figuras coincidentes $F \equiv \mathfrak{F}$: se duas ligações coincidentes de um ponto unido (5) com um ponto exterior às figuras, se tornam distintas, do axioma do movimento resulta que:

1.º ou todos os pontos de $\mathfrak{F}$ se tornam distintos dos seus correspondentes em F, variando os seus contactos com (9,1.ª) os pontos do espaço;

2.º ou, sómente alguns pontos de $\mathfrak{F}$ se tornam distintos dos seus pontos correspondentes em F, e os restantes pontos de $\mathfrak{F}$ movem-se em contacto com os seus correspondentes, como pontos singulares (9,2.ª) da figura $\mathfrak{F}$.

A figura $\mathfrak{F}$ é móvel, varia de posição com os seus pontos.

I. — F é uma figura idêntica ao sítio da figura $\mathfrak{F}$, e toda a figura tem sempre (5, II) uma figura idêntica $F \equiv \mathfrak{F}$, em coincidência com a própria figura.

Cor. 1. Portanto, toda a figura pode mover-se (9, axi.), e qualquer dos seus pontos pode passar por um dado ponto do espaço.

Cor. 2. — Se um ponto de uma figura (ou invariávelmente ligado (7, II) à figura) se move, todos os seus pontos se movem, e a figura varia de estado.

Logo, *a figura móvel tem todos os seus pontos móveis.*

Estas proposições são conseqüências imediatas do axioma do movimento das figuras.

Para o estado de uma figura só é possível um dos dois factos seguintes: *a figura é fixa, tem a sua posição invariável* no espaço; a *figura é móvel* ou *varia de estado.* Com estas locuções exprime-se que toda a figura existe necessariamente em um só estado, pois que o movimento resulta da variação (9, I) do primeiro estado da figura. E qualquer ponto está em um só dos estados seguintes: 1) *fixo* ou *em repouso;* 2) *variável* ou *em movimento.*

II. — *Se uma figura tem um ponto fixo, todos os seus pontos são fixos* (7, I), *e a figura diz-se fixa ou em repouso no espaço.*

É de todo evidente que, se a figura tem um ponto A fixo, êste ponto torna-se (9, axi.) necessáriamente môvel logo que a figura se mova; e a figura move-se quando o ponto A varíe (10, II) de estado.

Toda a figura que tem um ponto fixo, é fixa no espaço.

11. — Def. I — A sucessão $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}', \mathfrak{P}'', \ldots$ de formas *correspondentes a todos os estados de um ponto ou figura móvel,* diz-se **caminho** geométrico. A *ordem* ou *sentido* do movimento define-se por uma forma e uma sucessiva, como $\mathfrak{P}\mathfrak{P}'$, ou $\mathfrak{P}\mathfrak{P}''$. As formas do caminho são distintas (8).

Quando uma figura tem uma primeira posição P_0 — *inicial,* na qual estava em repouso, e uma ultima posição P, que se diz *final,* qualquer caminho limitado pelas posições extremas P_0 e P chama-se *deslocamento;* diz-se que a figura se transporta ou desloca de P_0 para P, e o movimento *gera* ou *descreve* o caminho da figura.

O caminho de uma figura móvel é formado pelo grupo de caminhos, gerados pelos pontos da figura. As propriedades dos caminhos do ponto móvel, extendem-se portanto aos de uma figura.

O caminho de um ponto diz-se **primitivo** ou *reduzido,* porque todos os pontos do caminho são distintos (def.) Se duas formas de um ponto móvel M se interceptam em um ponto E, o ponto M passa duas ou mais vezes pelo ponto E do espaço, E diz-se ponto *especial* ou *múltiplo,* e é origem de novo caminho (primitivo).

As formas de um ponto ou figura, correspondentes a um ponto especial E, são *formas especiais.*

E todo o ponto gera; 1) uma sucessão de caminhos, ligados entre si pelos pontos especiais; 2) um só caminho primitivo, quando não tem formas especiais no seu movimento.

Por convenção, diz-se que as formas especiais, que se interceptam em cada ponto E, são distintas:

Def. 1' — Diz-se ainda **caminho** geométrico, **a sucessão de formas,** especiais e ordinárias, **correspondentes a todos os estados de um ponto ou figura móvel.**

I. — Portanto, para as duas espécies de movimento de um ponto, definidas no n.º 9, 1.ª, 2.ª; pode-se afirmar: qualquer ponto móvel 1) gera um caminho, variando de sítio; 2) ou, é singular, e existe algum ponto, invariavelmente ligado ao ponto singular, que géra um caminho.

12. — Ao enunciado 2.º do n.º 10 correspondem as espécies de movimento seguintes:

1.ª Toda a figura móvel que tem um só ponto singular $\mathfrak{O}$, *gira em redor do* ponto singular ou *centro de giração.*

2.ª *Se uma figura móvel tem uma ligação singular* (A, B) ≡ ($\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$), todos os seus pontos (e os exteriores em ligação rígida com a figura) movem-se (9), e diz-se que a *figura gira em tôrno do eixo* (A, B).

3.ª Se existe alguma figura que tenha todos os seus pontos singulares (Cf., n.º 22), diz-se que gira em torno de dois quaisquer dos seus pontos.

Por conseqüência, nas condições do enunciado 1.º do n.º 10, pode suceder:

I. — *Se existem dois pontos singulares* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, *exteriores e em ligação rígida com a figura,* esta tem o movimento da espécie 2.ª, *a figura gira em tôrno do eixo* (A, B).

II. — *Se uma figura* F *tem um só ponto singular* $\mathfrak{A}$, *e existe algum ponto* $\mathfrak{B}$ *exterior a* F, *tal que a ligação* ($\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$) *seja singular, a figura* F *move-se ainda em tôrno do eixo* (A, B): F tem o movimento da 2.ª espécie.

13. — Def. i. — Diz-se **rotação**, o movimento e o caminho de toda a figura móvel em tôrno de um ou dois pontos singulares. Estes pontos podem ser exteriores (i, ii), em ligação invariável com a figura (7, ii).

A rotação dá-se em redor de um *centro* $\mathfrak{D}$ *de giração* (1.ª), ou em tôrno (2.ª) de um *eixo de rotação* (A, B).

Todo o ponto singular (centro) $\mathfrak{D}$ considera-se sempre em ligação invariável com uma figura, e todos os seus estados participam (9, 2.ª) das variações de estado da figura, isto é, um ponto singular move-se com uma figura.

Def. ii. — Quando a figura móvel F tem, em cada um dos seus estados, alguns pontos em contacto com certos pontos A, B, C, D,... de outra figura R, diz-se que a figura F *passa* pelos pontos A, B, C, D,... que fazem parte do caminho da figura móvel F. A figura R (A B C D...) a que pertencem os pontos A, B, C, D,... (de escorregamento), diz-se **figura de resvalamento** ou **escorregamento** de F.

Nota: Há, em geral, duas formas distintas de movimento:

I. Movimento de rotação;

II. Movimento de *translação*. — Uma figura está animada dêste movimento, se todos os seus pontos e os exteriores em ligação rígida com a figura geram caminhos, isto é, se deslocam: portanto, não existe na figura móvel, nem em quaisquer figuras com ela solidarizadas, ponto algum singular.

Figuras congruentes

14. — Quando uma figura rígida se move, os contactos dos seus pontos com o espaço e o seu estado variam; e,

para as ligações interiores (7, def. I) das diversas formas da figura móvel, estabelece-se o seguinte:

Axioma da mobilidade (da congruência das figuras):

1) **Todos os pontos distintos podem tornar-se idênticos.**

2) **Duas figuras distintas, que eram idênticas, podem tornar a coincidir,** qualquer que seja o caminho por elas seguido para voltarem ao mesmo estado.

DEF. I. — As figuras que gozam desta propriedade dizem-se **congruentes:** todos os pontos são congruentes.

Por conseqüência, as ligações entre os pontos de uma figura rígida (interiores) são «invariáveis» ou congruentes em todos os estados da figura móvel, e individualizam a figura, pois que existe sempre uma figura idêntica (10, II) à figura dada, de modo que:

I. *As formas de uma figura móvel não dependem da sua posição;* duas figuras congruentes, não sobrepostas, só diferem pelas suas posições.

II. *Toda a figura pode mover-se livremente,* isto é, descrevendo quaisquer caminhos, *ficando congruente a si própria* (auto-congruente). Esta propriedade é uma conseqüência imediata do axioma e da prop. I do n.º 10.

Uma figura em repouso é necessáriamente rígida (10, II), e diz-se ainda invariável ou congruente quando se move; *é de forma invariável,* ou indeformável pelo movimento.

Por conseqüência, resulta uma propriedade importante do movimento das figuras congruentes:

COR. 1. — *Uma figura pode sempre voltar a qualquer das suas posições* ou estados do espaço.

COR. 2. — *E, duas figuras idênticas, coincidem uma vez, e coincidem sempre, em qualquer posição no espaço.*

A coincidência de duas figuras congruentes e a determinação do estado de uma figura invariável, realizam-se sempre que se verifique certas condições.

Obs. — A noção de congruencia ou rigidez das figuras (*sólidos geométricos*) não se aplica à rigidez dos corpos materiais. De facto, se tomarmos um molde (de fundição por ex.) e um modêlo que o reproduz em uma substância do diferente coeficiente de dilatação, o molde e o seu modêlo não voltam a coincidir, se a temperatura e quaisquer condições do meio teem variado. E, deslocando-os em estado de coincidência através de meios diferentes, ou fazendo variar as condições do ambiente (cor. 2), deixam de coincidir, produzindo-se deformação nesses corpos. É o que sucede no facto familiar da solidificação da água contida num vaso, dando-se a fractura produzida pela dilatação do gêlo contido, nas mais baixas temperaturas em que o fenómeno se realiza.

Def. ii. — Diz-se **figura variável** uma sucessão de figuras $f, f', f'', \ldots$ que resultam da variação das ligações (interiores) de uma figura primitiva F. Essas variações são produzidas, por ex., pelo movimento de parte, sómente (9, axi.), da figura F.

Diz-se que a figura F *varia de forma,* e portanto (7) de posição, passando pelas formas sucessivas $f, f', f'', \ldots$ (deformação).

Os corpos materiais são figuras variáveis.

15. — Se duas figuras distintas $\mathfrak{F}$ e F podem realizar a coincidência definida em o n.º 5, tornando-se idênticas pelo movimento, $\mathfrak{F}$ e F dizem-se congruentes (def.); e são ainda congruentes quando estão em coincidência (14, cor. 2).

I. Quando uma figura F se pode sobrepor a uma figura $\mathfrak{F}$, de modo que o ponto X de F coincida com um só ponto $\mathfrak{X}$ de $\mathfrak{F}$, e este ponto $\mathfrak{X}$ coincida sómente com o ponto X de F, e se esta condição se verifica para todos os pontos de $\mathfrak{F}$ e F, as figuras tornam-se idênticas: $F \equiv \mathfrak{F}$, e $\mathfrak{F} \equiv F$: Os *pontos* $(\mathfrak{X}, X)$ *correspondentes* por contacto ou pontos unidos $(\mathfrak{X} \equiv X)$

das figuras F e $\mathfrak{F}$, dizem-se ainda **correspondentes** (por congruência) quando as figuras se tornam distintas.

II. — As formas de congruência das figuras exprimem-se pelas 3 proposições ou *princípios* de *congruência:*

1) É $F \equiv F$ (princ. de identidade).

2) Se: $\mathfrak{F} \equiv F$, é: $F \equiv \mathfrak{F}$ (princ. reflexo).

3) Se: $F \equiv \mathfrak{F}$, e, $F' \equiv \mathfrak{F}$ (ou, $\mathfrak{F} \equiv F$), é: $F \equiv F'$ (princ. transitivo).

que se enunciam: 1) *Toda a figura é auto congruente* (14, II); 2) *Se a figura* $\mathfrak{F}$ *é congruente com* F, *é* F *congruente com* $\mathfrak{F}$: *as figuras* $\mathfrak{F}$ *e* F *são entre si congruentes;* 3) *Duas figuras congruentes com uma terceira, são congruentes entre si* (5).

Distância

16. — Os pares de pontos $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ e (A, B) são congruentes

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \equiv (A, B), \tag{1}$$

quando se tornam idênticos, pela coincidência dos pontos correspondentes $\mathfrak{A}$, A e $\mathfrak{B}$, B, sobrepondo-se portanto as figuras (14, 15, def.)

E esta coincidência dá-se ainda, se um ponto $\mathfrak{D}$ (9, 3.ª) ligado a $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ se move com o eixo $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ em tôrno de (A, B): a *coincidência dos pares de pontos* $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ e (A, B) sobrepostos, *mantem-se invariável no movimento de rotação* (C. Axi. da recta, n.º 23).

1.ª A coincidência pode realizar se movendo $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ em redor do ponto unido $(\mathfrak{A} \equiv A)$ até $\mathfrak{B}$ coincidir com B (10, cor. 1, 14, cor. 1), de modo que A coincide com $\mathfrak{A}$, e B com $\mathfrak{B}$.

2.ª Se o ponto singular $\mathfrak{B}$ coincidir com A, a giração do par de pontos $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ em redor de $(A \equiv \mathfrak{B})$ pode (C....) conduzir o ponto $\mathfrak{A}$ a coincidir com B e portanto, os pares de pontos (A, B) e $(\mathfrak{B}, \mathfrak{A})$ com os pontos unidos $(A \equiv \mathfrak{B})$ e $(B \equiv \mathfrak{A})$, são ainda congruentes: $(A, B) \equiv (\mathfrak{B}, \mathfrak{A})$.

I. — Logo, (1) e (15, 3), é

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \equiv (\mathfrak{B}, \mathfrak{A}), \qquad (1')$$

o par de pontos $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ é *congruente com o seu oposto* $(\mathfrak{B}, \mathfrak{A})$.

E todos os pares de pontos idênticos são congruentes das duas maneiras: (1) e (1').

Por conseqüência, as propriedades de congruência dos pares de pontos são:

1) Se, $(A, B) \equiv (C, D)$, e, $(C, D) \equiv (E, F)$, é: $(A, B) \equiv (E, F)$.

2) $(A, B) \equiv (B, A)$.

3) Dois pares de pontos são congruentes por rotação.

Def. — A figura invariável de um par de pontos (A, B) diz-se **distância** de A a B. Se (A, B) e (A', B') são congruentes, isso significa que os pares de pontos A, B e A', B' estão à mesma distância (19).

A distância denota-se também com o símbolo: $\overline{AB}$.

§ 3.

Da igualdade. Figuras iguais

17. — Obs. — O facto estabelecido nas proposições dos n.os 6, 15, I, — de duas figuras congruentes se tornarem idênticas, quando os seus pontos correspondentes de contacto se tornam unidos, é uma propriedade das figuras congruentes, que se atribue ao conceito de movimento.

Se entre os elementos de dois grupos $(ABC\ldots)$ e $(A'B'C'\ldots)$ existem relações de dois elementos (A e A'), (B e B'), (C e C'),... um de cada grupo, tais que o movimento ou outro conceito possa distinguir uma *parte ou propriedade comum* aos pares de elementos A e A', B e B', .. ou se um certo atributo ou propriedade comum a A e A', existe ainda entre os elementos B e B', C e C',... significa-se essas relações dizendo que os **elementos dos dois grupos se correspondem** segundo tal propriedade ou atributo (definido), e os elementos A e A′, B e B′,... dizem-se **correspondentes** entre si.

Dois grupos de elementos entre si correspondentes, dizem-se grupos correspondentes.

Def. I. — Se em dois grupos *s* e *s′*, a todo o elemento X do primeiro grupo corresponde um só elemento X′ do segundo, e ao elemento X′ do segundo grupo corresponde um único elemento X do primeiro, a **correspondência** entre os dois grupos diz-se **biunívoca**.

I. — *Dois grupos formados de elementos correspondentes de dois grupos* s, s′ *em correspondência biunívoca, são grupos em correspondência biunívoca,* como partes correspondentes dos grupos *s*, *s′*.

As partes correspondentes de dois grupos *s*, *s′*, são grupos em correspondência biunívoca.

Sendo os elementos de cada grupo, distintos, dois grupos em correspondência biunívoca são representados (8) por *sucessões* que se dizem *correspondentes* entre si; e duas sucessões correspondentes denotam grupos em correspondência biunívoca.

Pode-se dispor os elementos de grupos em correspondência biunívoca em qualquer ordem.

Def. II. — Se os elementos consecutivos de elementos correspondentes, são correspondentes, diz-se que a **correspondência** entre as duas sucessões é **da mesma ordem**.

Em geral se a um elemento qualquer S sucessivo de P, corresponde um só elemento S′, que é sucessivo do elemento P′ correspondente de P na outra sucessão, as duas sucessões **correspondem-se** (n.º 8, def.) **na mesma ordem**; e a correspondência entre os dois grupos que as sucessões representam, é biunívoca e da mesma ordem.

Ex. 1). Sejam as sucessões (A B C D) e (A′ B′ C′ D′) da mesma ordem: As sucessões opostos (A B C D D′ C′ B′ A′) e (A′ B′ C′ D′ D C B A) são correspondentes na mesma ordem. De facto, as sucessões opostas são correspondentes (biunívocamente), por definição (n.º 8): ao elemento B sucessivo de A, corresponde o elemento B′ sucessivo de A′ na segunda sucessão, e ao elemento A′ consecutivo de B′, corresponde o elemento A consecutivo de B, e o mesmo se dá com os outros elementos: se os consecutivos B e B′ dos elementos A e A′ são correspondentes. B e B′ terão consecutivos correspondentes (def. II), e com efeito êsses elementos B′ e B teem como consecutivos os elementos A′ e A, que se definiu como correspondentes.

2) As sucessões opostas (A B C D C′ B′ D′ A′) e (A′ D′ B′ C′ D C B A) são correspondentes na mesma ordem. Com efeito, se A e A′ são correspondentes, os elementos seus consecutivos B e D′ são correspondentes, e teem (def. II) consecutivos correspondentes; de facto A e A′ são seus consecutivos, respectivamente na segunda e primeira sucessão, e os outros, C′ e B′, consecutivos de B e D′, teem estes mesmos elementos como consecutivos na 2.ª e 1.ª sucessão, respectivamente, e B e D′ teem os consecutivos A e A′, que se definiu como correspondentes. E o mesmo se verifica para os outros elementos.

Qualquer que seja a notação, duas sucessões opostas (A B C D) e (D C B A) são correspondentes na mesma ordem, pois que a cada par de elementos consecutivos de uma, correspondem êsses mesmos elementos consecutivos (em oposição) na sucessão oposta.

Cor. I. — Por conseqüência, *duas sucessões opostas são correspondentes na mesma ordem.* As distâncias $\overline{AB}$ e $\overline{BA}$ (16) são dois pares de pontos opostos, que se correspondem na mesma ordem.

Cor. 2. — Se as sucessões (A B C D...), (A′B′C′D′...) são correspondentes na mesma ordem, as sucessões opostas (...D C B A), (.. D′C′B′A′) correspondem-se ainda na mesma ordem.

Pois que os elementos B, B′ consecutivos dos elementos correspondentes A, A′ são, por hipótese, correspondentes (def. II) nas sucessões (A B C D...), (A′B′C′D′...), e teem (8) como consecutivos êstes mesmos elementos A, A′ nas sucessões (...DCBA), (...D′C′B′A′), opostas àquelas.

I′. — Duas sucessões formadas de elementos que se correspondem (I) em duas sucessões s, s' correspondentes (na mesma ordem ou em ordens diferentes), são entre si correspondentes, como partes correspondentes de s e s'.

II. — *Duas sucessões correspondentes na mesma ordem com uma terceira, correspondem-se na mesma ordem entre si.*

Pois que, denotando esta correspondência entre s e s' pelo símbolo: $s \bigcirc s'$, existe identidade de relações ou conceitos que definem a correspondência entre as sucessões s e s', s e s'', e portanto (n.º 15, (3),

$$\text{se é: } s \bigcirc s', \text{ e, } s \bigcirc s'', \text{ é: } s' \bigcirc s''.$$

18. — Duas *figuras* F, F′ *dizem-se correspondentes*, se são formadas por dois grupos de pontos em correspondência biunívoca, isto é, se a cada ponto X de uma corresponde um só ponto X′ da outra figura, e ao ponto X′ da segunda corresponde o ponto X da primeira.

Cor. 1. — Por conseqüência, se o ponto X é correspondente de X′, e Y é correspondente de Y′, os *pares de pontos* (X, Y), (X′ Y′) dizem-se *correspondentes*, por serem formados de pontos correspondentes de F e F′ (17, I, I′): *a cada par de pontos* (X, Y) *de uma figura* F *corresponde um só par de pontos* (X′, Y′) *na outra figura* F′, *e recìprocamente.*

Cor. 2. — Em geral, duas figuras formadas, de pontos que se correspondem biunìvocamente em duas figuras F, F′ correspondentes (a que pertencem), são entre si correspondentes (17, I, I′); são partes correspondentes das figuras F e F′.

As proposições enunciadas sôbre correspondência de sucessões ou grupos biunívocos de elementos quaisquer extendem-se à correspondência de pontos, figuras, etc.

19 — Dois pares de pontos congruentes $(A, B) \equiv (A', B')$, dizem-se *iguais entre si* (16). Todos os pontos são (14) *iguais*.

Def. i. — Diz-se que duas figuras F e F' teem entre si **correspondência de igualdade**, se os seus pares de pontos correspondentes são iguais, cada um a cada um:

Cor. — A correspondência de igualdade existe: 1) se a todo o ponto X de uma figura F corresponde um só ponto X' da outra F', e (18, cor. 1) a todo o par de potos (X, Y) de F corresponde um só par $(X' Y')$ de pontos de F'; 2) se todo o par de pontos (X, Y) da figura F é igual ao seu correspondentes (X', Y') na outra figura F': $(X' Y') = (X, Y)$.

A existência da igualdade de duas figuras contêm implicita 1) a correspondência biunívoca, e 2) a igualdade dos pares de pontos correspondentes. Quando uma figura F' é igual a uma parte de outra F, F' e F *são desiguais*.

Entre duas figuras quaisquer só é possível um de dois factos seguintes, cada um dos quais se exprime:

1.° — *as figuras são iguais entre si* (correspondência de igualdade), e indica-se pelo símbolo: $=$, $F = F'$, e $F' = F$.

2.° — *as figuras são desiguais*, e denota-se com o símbolo: $\neq$, $F \neq F'$.

Assim por ex., duas figuras congruentes, ou idênticas (15), são iguais por sôbreposição.

I. — *Duas figuras correspondentes em figuras iguais, são iguais entre si* (17 i, i'). Os pontos e partes correspondentes em figuras iguais, dizem-se *homólogos* entre si.

Se as figuras F e F' são iguais, a correspondência dos seus pontos é de igualdade; seja f uma figura pertencente a F e f' pertencente a F'. Se as figuras f e f' são correspondentes por serem formados de pontos correspondentes das figuras iguais F e F', é evidente que essa correspondência de f e f' é a que define a igualdade $F = F'$ das figuras F e F', e portanto as suas partes correspondentes f e f' são iguais: $f = f'$.

II. — *Toda a figura é igual a si própria. Duas figuras* F *e* F' *são iguais entre si, isto é: se* $F = F'$, *é* $F' = F$. *Duas figuras iguais a uma terceira, são iguais entre si.*

Sejam: $F' = F$, $F'' = F$. Se as figuras F' e F'' são iguais à figura F, aos pontos $A' B' C' D' \dots$ de F' correspondem na mesma ordem os pontos $A, B, C \dots$ de F, e a estes correspondem os pontos $A'', B'', C'', \dots$ de F'', a cada ponto X' de F', correspondente de um ponto X de F, correspondente um só ponto X'' de F'', correspondente de X, e isto significa que as duas figuras F' e F'' são correspondentes (18). E sendo, por definição de igualdade (def. I), $(A', B') = (A, B), \dots$ $(X', Y') = (X, Y)$, e $(A'' B'') = (A, B)$, $(A'', C'') = (A, C) \dots$ $(X'', Y'') = (X, Y)$, resulta (16, 1) que $(A'', B'') = (A', B')$, $(A'', C'') = (A', C'), \dots$ $(X'', Y'') = (X', Y')$, e portanto as figuras F' e F'' são iguais: $F' = F''$.

As três proposições são *as leis de igualdade*, e como no n.º 15, enunciam-se.

1) É, $F = F$.

2) Se, $F = F'$, é: $F' = F$.

3) Se, $F' = F$, e, $F'' = F$, é: $F' = F''$.

As duas preposições 1) e 2) exprimem as condições essenciais da igualdade. E reciprocamente, 1) e 2) deduzem-se da 3.ª proposição, sómente quando esta estabelece a *relação de igualdade* com a significação definida nas primeiras, isto é, se **toda a propriedade de** F' e de F'' **é** *também propriedade de* F, é $F' = F''$, e $F'' = F'$.

§ 4.

Continuidade das linhas. Axioma

20. — Chama-se **figura pontual,** *um grupo de pontos distintos e isolados,* tal que (8) em uma sucessão dos seus pontos, existem pontos consecutivos. Qualquer ponto é consecutivo de (ou teem como consecutivo) outro ponto, e entre dois pontos consecutivos não existe ponto algum do pontual.

A idea primitiva de figura ou forma geométrica, como um grupo de pontos, é a conseqüência do axioma fundamental de existência (n.º 3), e as figuras resultam por construção (n.º 7), de ligações de pontos distintos: são, pois, individualizadas essencialmente como figuras pontuais.

Nas figuras que vamos definir pelas suas propriedades, existem as pontuais que forem explícitamente assinadas sôbre elas pelos seus pontos.

As formas de um ponto móvel (9, 1.ª, 11) são pontos iguais ao próprio ponto (14, 19) (considera-se os pontos especiais como distintos dos pontos ordinários com os quais coincidam).

Def. I. — Diz-se **sucessão linear de pontos** ou **linha,** a sucessão de formas de um ponto móvel M, correspondentes a todos os seus estados. A dois pontos M′, M″ da linha, correspondentes a um estado do ponto M e (8) um seu sucessivo, dá-se o nome de **sentido da linha,** e indica-se por M′ M″.

Uma *linha* diz-se *primitiva ou reduzida* (caminho primitivo), se não teem pontos especiais; os *seus* pontos estão situados na ordem ou sentido que a própria sucessão define.

Cor. 1. — *Todo o ponto móvel sôbre uma linha primitiva, passa uma só vez por cada um dos seus pontos*, pois é formada de pontos ordinários.

Duas *linhas opostas* são formadas pelos mesmos pontos, e teem sentidos opostos (8); é o que se exprime pela locução: toda a linha tem dois sentidos, um oposto ao outro.

Uma linha ou sucessão linear de pontos pode ser *limitada* por um ou dois pontos (8), ou *ilimitada*, e esta diz-se também *linha indefinida*.

Um raio de luz dá-nos a imagem de uma linha limitada por um ponto, o foco luminoso.

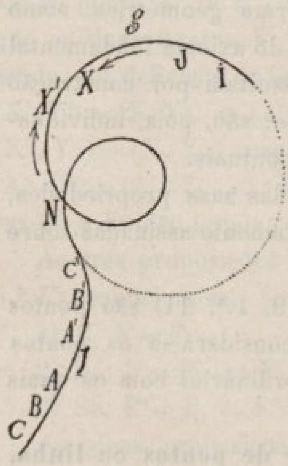


Fig. 3

Def. ii. — Toda a sucessão linear pertencente a uma linha l e do mesmo sentido, diz-se **parte da linha** l. *Região* (linear) de uma linha l é uma parte da linha l ou da linha oposta, e existente, portanto, sôbre a linha l; chama-se *segmento linear*, a região limitada por dois pontos — os *extremos* do segmento (8).

Os pontos de uma linha indefinida e os pontos de uma linha limitada, distintos dos extremos, são **pontos interiores** da linha.

Def. iii. — Uma linha diz-se *fechada*, se as suas extremidades coincidem: todo o ponto móvel M sôbre uma linha fechada c, a partir de um ponto A, volta sempre ao ponto A correspondente ao estado final do ponto M, móvel sôbre a linha c.

As linhas indefinidas, e as limitadas que teem extremos distintos, são *linhas abertas*.

21. — Sejam I J K... N e N... K J I duas pontuais existentes sôbre uma linha *g* (fig. 3). Se o ponto N é sucessivo de I na primeira pontual, todo o ponto X móvel sôbre a linha *g*, desde I até N, encontra todos os sucessivos de I, e todo o ponto X′ móvel sôbre *g* desde N até I no sentido oposto N I (da segunda pontual), passa pelos pontos da região N I da linha *g* compreendidos entre N e I, e encontra o ponto X em algum dos seus estados sôbre *g*: o ponto X′ encontra, necessáriamente, o ponto X sôbre a linha *g*:

Cor. — Por conseqüência, *dois pontos* X *e* X′ *móveis em sentidos opostos sôbre uma região de uma linha* g, *a partir das suas extremidades, encontram-se um um ponto da linha* g.

Estabelece-se então o seguinte:

Axioma da continuidade: — Entre dois pontos quaisquer de uma linha, existe algum ponto interior.

Todas as linhas são *contínuas*, gozam da propriedade essencial (a continuidade) definida pelo axioma anterior.

Cor. 1. -- Em todo o segmento linear existe pelo menos um ponto, distinto dos extremos.

Cor. 2. — *Todo o ponto interior* I *de uma linha aberta divide-a em duas partes ou regiões lineares separadas pelo pon'o* I, uma formada pelos pontos de que I é sucessivo, a outra pelos pontos da linha, sucessivos do ponto I.

Cor. 3. — *Em uma linha não existe um primeiro ponto nem um último ponto interior.* Com efeito, qualquer ponto interior I não é o primeiro nem o último ponto da linha, porque entre I e um dos extremos existe (axi.) outro ponto interior.

Def. i. — Dois **segmentos** lineares dizem-se **consecutivos**, se pertencem a uma linha e têm *um só ponto comum* — o extremo de um coincidente com um extremo do outro segmento, Um ponto interior a um segmento divide-o em dois segmentos (*colineares*) consecutivos; dois segmentos tornam-se consecutivos (pelo movimento), fazendo coincidir sómente o extremo de um com a origem do outro..

Duas partes ou duas regiões de uma linha são consecutivas, se teem um só ponto comum.

Às *linhas* dá-se ainda o nome de **curvas**, e aos segmentos lineares, o de **arcos**. O ponto especial onde se interceptam dois ou mais arcos de uma linha, diz-se *nodo;* por ex,, o ponto N (fig. 3) é um nodo da linha g.

2.º Pôsto isto, atribue-se a um caminho geométrico (11) ou *sucessão linear de uma figura móvel* as seguintes condições necessárias (continuidade do movimento):

1) *Existem pontos distintos dos caminhos.*

2) Toda a figura móvel passa de um estado a outro por uma sucessão de figuras iguais, tal que: *entre dois estados da figura, existe sempre* (axi.) *alguma figura interior ao caminho.*

A primeira proposição é a conseqùência do axioma do ponto (n.º 3), e fundamenta toda a especulação geométrica.

Quando uma figura F passa de um estado inicial F_0 a outro, gerando um caminho (11), todo o ponto A da figura descreve um segmento linear; e todos os pontos (não singulares) da figura geram (9, axi., 10) segmentos lineares: ao estado do ponto A, distinto dos extremos do segmento, correspondem, para todos os pontos da figura, estados distintos do estado inicial e final (9, axi.), e êsses pontos são interiores aos segmentos gerados pelos pontos da figura móvel (axi.).

Os pontos da figura F, correspondentes ao estado do ponto A, constituem uma figura igual a F e interior ao caminho que ela descreve.

Def. ii. — Chama-se **superfície**, uma sucessão linear de linhas iguais ou desiguais, ou o caminho de uma linha móvel (*caminho linear*).

Quando uma superfície é gerada pelo movimento de uma linha invariável g, a linha móvel g diz-se **geratriz** da superfície.

Cada ponto da geratriz descreve uma linha pertencente à superfície; e **entre duas geratrizes distintas** *existe* (2.º) *sempre uma geratriz.*

II.

§ 5.

A linha recta

22. — Def. i. — **Existe uma sucessão linear de pontos 𝔄𝔅ℭ... chamada linha recta, tal que, se 𝔄𝔅ℭ... se move passando por dois pontos distintos A, B de um seu estado ABC..., existe sempre um só ponto ℭ em coincidência com qualquer ponto C de ABC..., e todo o ponto de 𝔄𝔅ℭ... está sôbre ABC..., em todos os estados da recta móvel 𝔄𝔅ℭ...**

A recta 𝔄𝔅C... **passa sempre por um 3.º ponto** C, por onde passou uma vez, em todo o movimento que se definiu.

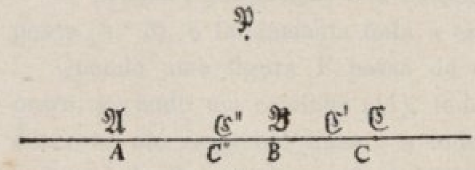


Fig. 4

A linha recta existe, isto é, a figura 𝔄𝔅ℭ... que vimos de definir é uma linha: entre dois estados 𝔄𝔅ℭ... 𝔄''𝔅''ℭ''... da recta, correspondentes à passagem de dois dos seus pontos ℭ, ℭ'' por C, existe um ponto ℭ' (def.) em contacto com C, compreendido entre ℭ e ℭ'' (21, 2.º). E como o ponto C de ABC... é qualquer, todo o ponto móvel ℭ coincide com um só ponto de ABC..., e portanto ABC... *é uma linha* (20, def. i) gerada por um ponto da recta movel 𝔄𝔅ℭ...: logo, *coincidem em todos os seus pontos*, ABC... *e* 𝔄𝔅ℭ... *são linhas rectas iguais.*

Def. i′ — Se a recta 𝔄𝔅ℭ... móvel em contacto com dois pontos A, B, passa por um terceiro ponto C, qualquer dos seus pontos passa necessáriamente (def.) em C; e sendo C um ponto qualquer da figura rectilínea ABC..., fazendo variar C sôbre ABC..., resulta que: *a recta* 𝔄𝔅ℭ... *coincide, em todos os seus estados, com a recta fixa* ABC... Êste movimento é (13, def. ii) um *escorregamento*, e ABC... diz-se **recta de escorregamento** da recta 𝔄𝔅ℭ...:

1.ª A *recta pode escorregar* indefinidamente *sôbre si própria.*

2.ª Se o par de pontos (𝔄, 𝔅) da recta 𝔄𝔅ℭ... coincide (16, 2.ª) com (B, A), existe ainda (def.) um só ponto da recta em coincidência com C, no movimento definido; a recta 𝔄𝔅ℭ... na posição **oposta** (20) ...CBA..., coincide com a recta ABC, escorregando indefinidamente sôbre ela: Esta operação diz-se **inversão da recta** 𝔄𝔅ℭ...:

Logo, *a recta* 𝔄𝔅ℭ... *é igual, e congruente por escorregamento, à recta oposta* ...ℭ𝔅𝔄:

Toda *a recta é* **invertível:** 𝔄𝔅ℭ... = ℭ𝔅𝔄...

Def. ii. — Se, no movimento da recta 𝔄𝔅ℭ... **dois pontos** 𝔄, 𝔅 **são singulares** (9, 3.ª), admite-se que **qualquer ponto** ℭ = C **é** também **singular** na rotação da recta em tôrno de (A, B), e portanto todos os pontos da recta (def. i) são singulares, *e sómente os pontos da recta* (axioma, n.º 23): se a recta gira em tôrno de dois dos seus pontos, todos os pontos da recta são singulares. Diz-se que **a recta é um eixo de rotação,** quando tem dois pontos singulares:

3.ª Se *a recta tem dois pontos singulares, todos os seus pontos são singulares* (e sómente os seus pontos), e *a recta gira sôbre si própria.*

Por conseqüência, **a recta é igual a si própria,** *por escorregamento, inversão e rotação.*

Cor. 1. — *A figura móvel, que tem todos os seus pontos singulares* (12, 3.ª), *é* por definição, *uma recta*; poisque, tendo todos, têm dois pontos singulares, e *é eixo de rotação.*

Cor. 2. — *Todo o ponto singular* P, *invariavelmente ligado à recta em rotação*, pertence e *é um ponto da própria recta.*

O ponto P forma com a recta uma figura (7), que tem todos os pontos singulares (cor. 1).

Admite-se a existência de pontos exteriores à recta (3, 21, 2.º), e portanto:

Cor. 3. — *Qualquer ponto exterior a um eixo de rotação, e a êle ligado não é singular*; e, reciprocamente, *todo o ponto não singular, ligado a uma recta em rotação, está fora da recta.*

Mov. de rotação das figuras.

Cor. 4. — Quando *uma figura* se move em torno de dois dos seus pontos $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ (12, 2.ª), *têm um eixo único, formado pelos pontos singulares da figura* (cor. 1, 2); e todos os seus pontos $\mathfrak{P}$ exteriores à recta $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, giram em torno do eixo, descrevendo caminhos (fig. 5.)

4.ª Relações entre as linhas rectas.

Se duas rectas $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\ldots$, $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'\ldots$, teem três pontos coincidentes $\mathfrak{A}\equiv\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}\equiv\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}\equiv\mathfrak{C}'$, estas rectas teem sempre três pontos comuns em contacto com três pontos fixos A, B, C (def. I), em todos os movimentos definidos de escorregamento e rotação das rectas em contacto com A, B: há sempre um 3.º ponto coincidente das duas rectas, em contacto com o ponto C.

Uma recta pode passar por dois pontos dados (10, cor. 1): é sempre possível sôbrepor dois pontos de uma recta a outra recta, e assim, *duas rectas quaisquer podem ter dois pontos comuns.*

Teor. I. — Posto isto, sejam as duas rectas $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$, $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'$, tendo dois pontos comuns $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{B}'$, ligadas entre si pelos dois pontos e formando assim (7) uma nova figura.

Na rotação desta figura em torno de $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, todo o ponto de $\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}$ é singular, e todo o ponto de $\mathfrak{A}'\,\mathfrak{B}'\,\mathfrak{C}'$ é também singular, (3.ª), qualquer ponto $\mathfrak{C}'$ da recta $\mathfrak{A}'\,\mathfrak{B}'\,\mathfrak{C}'$ existe necessáriamente (cor. 2) sôbre $\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}$, e $\mathfrak{C}$ sôbre $\mathfrak{A}'\,\mathfrak{B}'\,\mathfrak{C}'$, pois que estes pontos pertencem, respectivamente, às duas rectas e à figura por elas formadas (fig. 5): portanto as duas rectas coincidem (cor. 1), e ainda coincidem, quando uma se torna fixa e a outra gira em torno de $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, ou resvala sôbre estes pontos (def. I):

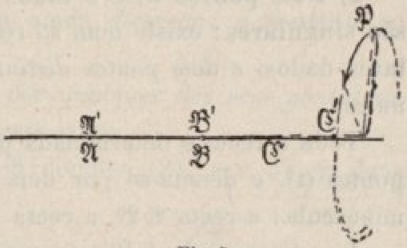


Fig. 5

Os pontos da recta $\mathfrak{A}'\,\mathfrak{B}'\,\mathfrak{C}'$ existem sôbre $\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}$, e as duas rectas coincidem, formando (cor. 1) uma recta única:

I. — Logo, *se duas rectas teem dois pontos comuns, coincidem, formando uma recta única;* e *todas as rectas podem coincidir.*

Nota à DEF. II. — Analizemos a hipótese de um terceiro ponto $\mathfrak{C}$ não ser singular na rotação da recta; existiria para cada estado da recta móvel, um ponto $\mathfrak{C}_1$ distinto de $\mathfrak{C}$ $(\mathfrak{C}_1 \neq \mathfrak{C})$ em contacto com C, e o próprio ponto $\mathfrak{C}$ estaria em contacto com outro ponto $C_1 \neq C$ de A B C, e só voltaria a coincidir com C em um estado idêntico ao primitivo (14, cor. 1), deslocando-se de C_1 para C: $(\mathfrak{B}, \mathfrak{C})$ e $(\mathfrak{B}, \mathfrak{C}_1)$ coincidem com (B, C), em estados distintos da recta, e todavia (16, 1) não são idênticos, a recta é *variável* ou *flexível*, na hipótese considerada.

O axioma da congruência (14) não é satisfeito para $\mathfrak{C} \neq \mathfrak{C}_1$ e as propriedades 3.ª e 4.ª são a conseqüência imediata do axioma contido na def. II.

23. — É evidente que há pontos exteriores à recta. Atribue-se à linha recta outras propriedades necessárias — def. II, 3.ª e 4.ª independentes dos axiomas fundamentais de existência, estabelecendo o seguinte:

Axioma da recta[1]:

1) **Existem pontos exteriores à linha recta.**

2) **Dois pontos 𝔄, 𝔅 e todos os pontos da recta 𝔄𝔅ℭ são singulares:** existe uma só recta com dois pontos singulares dados, *e dois pontos distintos pertencem a uma recta única.*

Toda a recta é determinada por dois quaisquer dos seus pontos (I), e denota-se por dois pontos, ou por uma letra minuscula: a recta 𝔄𝔅, a recta *r*.

I. — Se a recta A B′ tem o ponto A comum à recta AB e o ponto B′ exterior à recta AB, todos os pontos de AB′ distintos de A, são exteriores à recta AB; diz-se que as rectas AB, AB′ se interceptam (4) no ponto A.

De facto, se as rectas tivessem outro ponto comum, distinto do ponto A, coincidiam (Teor. I) e o ponto B′ existia sôbre a recta AB: Afirma-se, portanto, o seguinte axioma (cf., n.º 31):

Se duas rectas r, r′ *teem um ponto comum* A, *e um ponto de uma é exterior à outra, as rectas* r *e* r′ **teem um só ponto comum** A, interceptam-se no ponto A.

---

[1] A existência de uma figura tendo todos os seus pontos singulares, é uma consequência (3.ª cor. 1) deste axioma da *recta*, e assim só se admitiria a proposição do n.º 12, 3) como axioma, se negassemos o presente axioma.

Há duas afirmações distintas: a existência de um par de pontos (A, B) singular, e a existência da recta eixo de rotação; mas a 1.ª é um axioma necessário (n.º 6), e ambas estariam implícitamente na 3.ª proposição do n.º 12.

Propriedades dos raios

24. — Se um ponto se move sôbre uma recta, passa uma só vez por cada um dos seus pontos (20, cor.).

Chama-se **sentido da recta** $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ a própria sucessão $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\ldots$ dos seus pontos, e denota-se (20, def. I) por qualquer ponto $\mathfrak{A}$ e um seu sucessivo $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \ldots$; a ordem ou sentido da recta diz-se ainda *direcção:* **o sentido** ou **direcção** $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ da recta.

1.ª *A recta é dividida por qualquer dos seus pontos em duas partes, limitadas por esse ponto.*

O ponto $\mathfrak{A}$ da recta $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ divide-a (21, cor. 3) em duas partes consecutivas, uma $\mathfrak{X}'\mathfrak{U}$, a que pertencem todos os pontos $\mathfrak{X}' \ldots X_1, X_2, X_3, \mathfrak{A}$ de que o último $\mathfrak{A}$ é sucessivo, a outra parte $\mathfrak{A}\mathfrak{X}$ constituida pelos seus sucessivos X_4, $X_5, \ldots \mathfrak{X}$; as duas partes $\mathfrak{X}'\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{A}\mathfrak{X}$ são limitadas pelo ponto $\mathfrak{A}$ *origem* (8, 1.ª), e dois pontos quaisquer, um de cada parte, compreendem o ponto $\mathfrak{A}$.

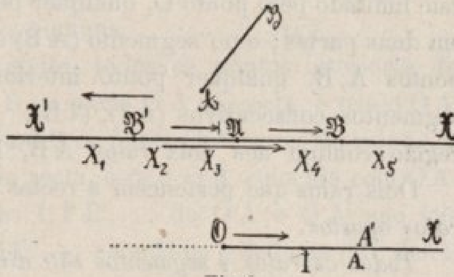


Fig. 6

O ponto variável $\mathfrak{X}$ *avizinha-se* do ponto $\mathfrak{A}$, se X_2 é interior ao segmento $(X_1 \mathfrak{A})$, X_3 é interior a $(X_2 \mathfrak{A}), \ldots$ e *distancia-se* do ponto $\mathfrak{A}$, se X_4 é interior a $(\mathfrak{A} X_5)$, X_5 é interior a $(\mathfrak{A} X_6)\ldots$

Def. I. — Chama-se **raio** a parte $\mathfrak{A}\mathfrak{X}$ da recta limitada por um só ponto $\mathfrak{A}$, e denota-se por: $\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{X}}$: Todos os pontos de um raio pertencem à mesma parte da recta.

Os raios $\overline{\mathrm{O\,I}}$, $\overline{\mathrm{I\,O}}$, e partes destes raios, são *prolongamentos* de segmento (O I), e todo o segmento pode prolongar-se indefinidamente.

DEF. II. — **Vector** $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, é a parte limitada por dois pontos distintos $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$, móvel sôbre a recta no sentido $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, e denota-se por: $\overrightarrow{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}$: se o vector $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ se transporta para $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$, o par de pontos $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ fica invariavel (16): $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = (\mathfrak{A}', \mathfrak{B}') = \ldots$ inv. O ponto $\mathfrak{A}$ é *a origem,* e $\mathfrak{B}$ a *extremidade* do vector $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$.

Dá-se o nome de **pontual** à figura composta de quaisquer pontos A, B, C,... de uma mesma recta r, e à própria recta r, considerada como a totalidade dos seus pontos (*pontual regrada*).

A recta é uma linha ilimitada; distingue-se na recta duas espécies de partes e regiões: *limitadas por um só ponto* (raios), e *limitadas por dois pontos* (vectores e segmentos). Em um raio limitado pelo ponto O, qualquer ponto interior I divide-o em duas partes; e no segmento (A B) ou (B A) limitado pelos pontos A, B, qualquer ponto interior I divide-o em dois segmentos consecutivos (A I), (I B). O segmento (A B) é a região comum aos dois raios $\overline{A}B$, $\overline{B}A$.

Dois raios que pertencem a rectas opostas, dizem-se (20) *raios opostos.*

Todos os raios e segmentos são divisíveis em duas partes consecutivas, por um ponto interior I; *um ponto* I *interior a um segmento* (A B) *determina sôbre a recta dois raios opostos* $\overline{I}A$, $\overline{I}B$.

2.º *Em uma recta* $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ *existem sómente dois pontos distintos* $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}'$, *e dois pares de pontos* $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$. $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}')$ *iguais a um par de pontos* (A, B), e os pontos $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}'$ compreendem o ponto comum $\mathfrak{A}$.

Fazendo coincidir (A, B) com os pontos $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ da recta, $\mathfrak{B}$ é o único ponto da recta $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ coincidente com B (22 def. I), e invertendo a recta (22. 2.ª) em redor do ponto $(\mathfrak{A} \equiv A)$, existe sôbre a outra parte $\mathfrak{A}\mathfrak{B}'$ da recta um um só ponto $\mathfrak{B}'$ coincidente com B,

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \equiv (A, B) \equiv (\mathfrak{A}, \mathfrak{B}') \qquad \mathfrak{B} \not\equiv \mathfrak{B}'$$

e estão na ordem $\mathfrak{B}'\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, pois $\mathfrak{B}$ e $\mathfrak{B}'$ pertencem aos raios opóstos $\overline{\mathfrak{A}}\mathfrak{B}$, $\overline{\mathfrak{A}}\mathfrak{B}'$, estão de uma parte e doutra do ponto $\mathfrak{A}$.

Cor. 1. — *Sôbre um raio de origem* $\mathfrak{O}$, *existe um só ponto* $\mathfrak{A}$ *tal que* $(\mathfrak{O}, \mathfrak{A})$ *é igual ao par de pontos* (A, B): existe na recta e de um lado do ponto $\mathfrak{O}$, um só par de pontos $(\mathfrak{O}, \mathfrak{B})$ com um extrêmo em $\mathfrak{O}$, e igual ao par de pontos dado (A, B).

25. — Teor. i. — *Se dois raios* $\overline{O}A$, $\overline{O}A'$ *teem a mesma origem e um ponto interior* I *comum, coincidem* em todos os seus pontos interiores.

Os raios $\overline{O}A$, $\overline{O}A'$ existem sôbre a recta OI (22, 4.ª), e entre o ponto interior comum I e a origem O há (21, cor. 1) outros pontos interiores $I', I'', \ldots$, comuns aos dois raios.

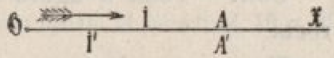


Fig. 7

Com efeito, todos os pontos interiores do raio $\overline{O}A$ existem (def. i) na parte OA da recta, e tendo $\overline{O}A'$ um ponto I sôbre $\overline{O}A$, todos os pontos interiores do raio $\overline{O}A'$ existem na parte $\overline{O}A$ da recta, o raio $\overline{O}A'$ coincide com $\overline{O}A$.

Os pontos interiores $I, I' I'', \ldots$ de $\overline{O}A$ e $\overline{O}A'$ são tais que os raios $\overline{O}I$, $\overline{O}I'$, $\overline{O}I'''$, ... coincidem e definem (20, def. i) o mesmo sentido OI.

Cor. — Quando dois raios coincidem, os raios opostos tornam-se coincidentes.

Teor. ii. — *Qualquer raio é igual a outro raio. Todas as rectas são iguais entre si.*

Sejam r, r' duas rectas distintas, e $\overline{O}A$, $\overline{O'}A'$ os sentidos de r, r'.

Na recta r' e a partir de O' existe um só ponto A' tal que (24, cor. 1) $(O', A') = (O, A)$, e se aos pontos $A, B, C, \ldots$ do raio $\overline{O}A$, de r, fizemos corresponder os pontos $A', B', C', \ldots$ do raio $\overline{O'}A'$, de modo que seja $(O', A') = (O, A)$, $(O', B') = (O, B,)$ $(O', C') = (O, C), \ldots$ a cada ponto X' da parte $\overline{O'}A'$ de r' correspondente um só ponto X no raio $\overline{O}A$ de r, e reciprocamente.

Se fizermos coincidir os raios $\overline{O}A$, $\overline{O'}A'$ (teor. I), o ponto B coincide com B', C com C',... cada par de pontos de $\overline{O}A$ é igual ao par de pontos correspondente de $\overline{O'}A'$,

$$(A, B) = (A', B'), (A, C) = (A'C'), \ldots (O, X) = (O'X'),$$

os pontos das pontuais A, B, C,... A', B', C', .. correspondem-se na mesma ordem, e *os raios* $\overline{O}A$, $\overline{O'}A'$ *são iguais* (19, def. I). Os raios opostos são também iguais, e portanto, entre duas rectas r, r' pode-se sempre construir uma correspondência de igualdade: todas as rectas são iguais:

Cor. — Toda a figura igual a uma recta é uma linha recta.

Teor. III. — *Em uma recta* r' *existe um segmento igual a um segmento de outra recta* r (e uma parte de r' igual a outra parte de r, ou de r').

Se nos dois segmentos (A B), (A' B') das rectas r, r', em que os pares de pontos (A, B) (A', B') são iguais, a cada ponto X do raio AB e interior ao segmento (A B) corresponde um só ponto X', interior a (A' B'), tal que (24, cor. 1) seja $(A, X) = (A', X')$, e se X_1, X'_1, são dois pontos em correspondência biunívoca nos dois raios de r, r' (teor. I), é: $(X, X_1) = (X', X'_1)$: são portanto iguais os pares de pontos (X, X_1), (X', X'_1) correspondentes em os segmentos (A B), (A' B'), e estes (como partes correspondentes (19, 1) das rectas r, r') são iguais entre si: $(A B) = (A' B')$.

Se $(A B) = (A' B')$, é $(A, B) = (A', B')$, por serem pares de pontos correspondentes dos segmentos.

Cor. 1. — *Sôbre um raio de origem* $\mathfrak{O}$, *existe um só segmento tendo um extremo em* $\mathfrak{O}$ *e igual a um segmento* $(\mathfrak{A}\mathfrak{B})$.

Segmentos iguais: Sendo $(A, B) = (A', B')$, pode-se construir em os segmentos (AB), (A'B') uma correspondência de pontos na mesma ordem.

Se os segmentos (A B), (A′ B′) são iguais, a uma sucessão (X) de pontos de (A B) corresponde em (A′ B′) uma série de pontos (X′) na mesma ordem, a cada ponto X de (A B) um só ponto X′ em (A′ B′): *todo o par de pontos de* (A′ B′) *é igual ao seu correspondente em* (A B):

$$(X', X'_1) = (X, X_1),$$

e as partes correspondentes (segmentos, por ex.,) dos dois segmentos, são iguais entre si (cf, 27, Teor. I).

Dos atributos da linha recta e do conceito de correspondência de igualdade (19) resultam, pois, as *propriedades essenciais* dos *segmentos* rectilínios, que se enunciam:

1) Todo o segmento rectilínio é divisível em duas partes (24, 1.ª) por um ponto interior.

2) Existem segmentos iguais entre si (pode-se construir); e (16, (1) dois segmentos iguais, a um terceiro, são iguais entre si.

3) Todo o segmento é igual ao seu oposto (*é invertível*, 16, I, 22): (A B) = (B A).

4) Dois segmentos rectilínios, ou são iguais entre si, ou são desiguais (quando um é igual a parte do outro).

Exercício:

Designando os segmentos rectilínios por letras minusculas $a, b, c, \ldots$ podemos afirmar:

1. É: $a = a$.
2. Se: $a = b$, é: $b = a$.
3. Se: $a = b$, $b = c$, é: $a = c$.
4. Se: $a = b$, e, $b \neq c$, é: $a \neq c$.

Qualquer segmento não é igual a uma sua parte, pois que os pares de pontos extremos (pelo menos) são desiguais: se $b \neq c$ e b é igual a parte de c, (n.º 2, 1) então a é igual a parte de c; e se c é parte de b, c é parte de a: os segmentos a e c são desiguais ($a \neq c$).

5. Mas se: $a \neq b$, e, $b \neq c$, entre os segmentos a e c existe uma das suas relações (3. 4.): ou $a = c$, ou $a \neq c$, e uma exclue a outra.

26. Def. I. — Diz-se que o **segmento rectilíneo** ($\mathfrak{A}\mathfrak{B}$) é **maior que** o segmento ($\mathfrak{C}\mathfrak{D}$), se êste é igual a uma parte do primeiro: e o segmento rectilíneo ($\mathfrak{C}\mathfrak{D}$) diz-se **menor que** o segmento rectilíneo ($\mathfrak{A}\mathfrak{B}$). Se o segmento ($\mathfrak{C}\mathfrak{D}$) é igual a parte de ($\mathfrak{A}\mathfrak{B}$), diz-se: ($\mathfrak{A}\mathfrak{B}$) *é maior* (>) *que* ($\mathfrak{C}\mathfrak{D}$), e ($\mathfrak{C}\mathfrak{D}$)

é menor que ($<$) $(\mathfrak{A}\mathfrak{B})$, e, com os sinais $>$ e $<$, denota-se estas duas expressões, escrevendo respectivamente

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) > (\mathfrak{C}\mathfrak{D}),\ (\mathfrak{C}\mathfrak{D}) < (\mathfrak{A}\mathfrak{B}),$$

e qualquer delas significa que $(\mathfrak{C}\mathfrak{D})$ é igual a parte de $(\mathfrak{A}\mathfrak{B})$: *Qualquer segmento é maior que uma sua parte.*

Cor. 1. — *Se* (AB)$>$(CD), e (CD)$\gtreqless$(EF), é: (AB)$>$(EF).

Com efeito, é (def.) (EF)$\lesseqgtr$(CD), e (CD)$<$(AB), e sendo (EF) igual a (CD) ou igual a parte de (CD), e (CD) igual a parte de (AB), logo (EF) é (n.º 2, 1) igual a parte de (AB): (AB)$>$(EF).

Cor. 1'. — Se (AB)$<$(CD), e (CD)$\lesseqgtr$(EF), é: (AB)$<$(EF).

§ 6.

Operações sôbre segmentos

27. — Duas partes ou regiões de uma linha recta tornam-se consecutivos por escorregamento, fazendo coincidir sómente um extrêmo de uma com um extrêmo da outra (21, def. I): se (AB) e (BC) teem um só ponto comum B, (AB) e (BC) são *segmentos consecutivos* na recta ABC, e denota-se ligando-os pelo sinal $\frown$ (que se lê: *e*):

$$(AB) \frown (BC) \equiv (ABC) = (AC)$$

Os segmentos (X_1X_2), (X_2X_3), (X_3X_4), ... da fig. 6 são consecutivos.

Def. I. — **Adicionar um segmento rectilínio** $(\mathfrak{L}\mathfrak{M})$ **a outro segmento rectilínio** $(\mathfrak{N}\mathfrak{O})$, significa *construir sôbre a recta dois segmentos* $(AB) \frown (BC)$ iguais respectivamente a $(\mathfrak{L}\mathfrak{M})$, $(\mathfrak{N}\mathfrak{O})$.

O segmento **resultante** (AC) chama-se **soma** dos segmentos dados ou *aditivos* $(\mathfrak{L}\mathfrak{M})$, $(\mathfrak{N}\mathfrak{O})$. Esta operação diz-se **adição** e denota-se por:

$$(\mathfrak{L}\mathfrak{M}) + (\mathfrak{N}\mathfrak{O}) = (AC)$$

O segmento resultante (A C) é único, como vamos demonstrar.

TEOR. I. — *Se o segmento* (A B) *é igual ao segmento* (A′ B′) *e* (B C) *é igual a* (B′ C′), *e se os pontos* A, B, C, A′, B′, C′ *estão na mesma ordem, o segmento* (A C) *é igual a* (A′ C′): (A C) = (A′ C′).

Sôbre o raio $\overline{\text{A}}$B da recta *r* (fig. 8) existe um só ponto B (25, cor. 1) tal que (A B) = (A′ B′). Fazendo coincidir os segmentos (A B), (A′ B′) das regiões (A B C), (A′ B′ C′) da recta, os raios $\overline{\text{A}}$C, $\overline{\text{A}}$′C′ coincidem (25, T. I), os pontos C, C′ coincidem porque, por hipotese, (B C) = (B′ C′) e A B C, A′ B′ C′ estão na mesma ordem, e portanto:

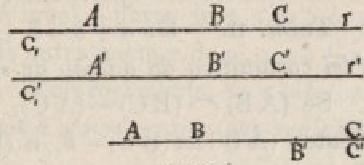


Fig. 8

$$(\text{A C}) = (\text{A}' \text{C}').$$

Se os pontos C, C′ são *interiores* aos raios $\overline{\text{B}}$ A, $\overline{\text{B}}$′ A′, a sôbreposição destes raios faz coincidir (B C), (B′ C′), e (A C) = (A′ C′): e o mesmo sucede quando A, A′ são interiores aos segmentos (B C), (B′ C′).

(A B C), (A′ B′ C′) podem pertencer a rectas diferentes *r*, *r′* (25, T. III).

I′. — *Reciprocamente:*

Se (A C) = (A′ C′), (B C) = (B′ C′), (A B) = (A′ B′), é: A B C = A′ B′ C′, isto é, *os pontos* A B C, A′ B′ C′ *correspondem-se na mesma ordem sôbre as rectas* r, r′.

Por conseqüência, quaisquer que sejam os segmentos consecutivos (A B), (B C) iguais aos segmentos dados ($\mathfrak{L}\mathfrak{M}$), ($\mathfrak{N}\mathfrak{O}$), a soma resultante é sempre a mesma, a operação da adição é *uniforme*.

Pôsto isto, se (A B) ⌒ (B C), e (A′ B′) ⌒ (B′ C′), pondo:

$$(\mathfrak{L}\mathfrak{M}) = a,\ (\mathfrak{N}\mathfrak{O}) = b,\ (\mathfrak{L}'\mathfrak{M}') = a',\ (\mathfrak{N}'\mathfrak{O}') = b',$$

das proposições anteriores deduz-se as *propriedades da adição de segmentos:*

Cor. 1. — *Se* a = a', *e* b = b', *é:* a + b = a' + b': *somando a segmentos iguais entre si, obtemos somas iguais.*

Cor. 2. — *Se* a + b = a' + b', *e,* a = a', *é:* b = b': *se a soma de dois segmentos é igual à soma de outros dois segmentos, e um aditivo da primeiro é igual a um aditivo da segunda, os outros aditivos são iguais entre si.*

Teor. II. — É: $a + b = b + a$. Esta proposição exprime a *lei comutativa da adição de segmentos.*

Se $(AB) \frown (BC) = (AC)$, tomando sôbre AB os segmentos $(AB') \equiv (BC) = b$, e $(B'C') \equiv (AB) = a$, os pontos C, C' coincidem, poisque invertendo $(AB'C')$, a coincidência de $(C'B')$ e (AB) produz (25, T. I) a coincidência de B'A com (BC): é $(AC') = (AC)$. De facto, sendo ABC e C'B'A opostas, são da mesma ordem (17), e portanto (Teor. I): $(AC') = (AC)$, $(AB') \frown (B'C')$ ou $b + a = a + b$: *a soma de dois segmentos é única, qualquer que seja a ordem dos segmentos aditivos.*

Ex.: O Cor. 2 pode, portanto, enunciar-se: se $a + b = a' + b'$, e $b = b'$, *é:* $a = a'$.

Teor. III. — $(a + b) + c = a + (b + c)$: *lei associativa* da adição de segmentos.

Sejam os três segmentos $(\mathfrak{L}\mathfrak{M}) = a$, $(\mathfrak{N}\mathfrak{O}) = b$, $(\mathfrak{P}\mathfrak{Q}) \equiv (CD) = c$; sendo

$$a + b = (AC),\ b + c = (BC) \frown (CD) \equiv (BD),$$

resulta (def.) por adição,

e,
$$(a + b) + c = (AC) \frown (CD) \equiv (AD),$$
$$a + (b + c) = (AB) \frown (BD) \equiv (AD),$$

e portanto (19, II) é:

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

Por conseqüência, *a adição de segmentos* é comutativa e associativa.

A adição de dois segmentos *é um segmento* (soma): a soma de 3, 4, 5, ... n segmentos resulta adicionando a soma dos dois primeiros com o terceiro, o quarto com a soma obtida, e assim sucessivamente, o último segmento n com a soma dos $(n-1)$ primeiros segmentos.

A soma *de dois ou mais segmentos* **é maior que os aditivos**: Se um segmento b é igual a parte de a, é $a > b$, e o segmento a é a soma de b e da outra parte x de a, $a = b + x$; o segmento x é único (cor. 2). Recíprocamente, se $a = b + x$. é $a > b$, isto é (26, def.) *a soma é sempre maior que qualquer aditivo:*

Teor. iv. — *Se* $a > b$, *existe um segmento* x *tal que:* $a = b + x$; recíprocamente: *se* $a = b + x$, *é:* $a > b$.

Destas proposições e dos cor. 1 e 2 do Teor. i, deduz-se:

Cor. 1. — Se, $a \geqq a'$, e, $b > b'$ é: $a + b > a' + b'$.

1'. Se, $a \leqq a'$, e, $b < b'$, é: $a + b < a' + b'$.

Cor. 2. — Se: $a + b > a' + b'$, e, $a = a'$ é: $b > b'$.

Os corolarios anteriores enunciam-se:

1) *Se um segmento é igual ou maior que um segundo segmento, e um terceiro segmento é maior que um quarto, a soma do 1.º com o 3.º é maior que a soma do 2.º com o 4.º segmento.*

2) *Se a soma de dois segmentos é maior que a soma de outros dois segmentos, e um dos primeiros é igual a um dos segundos aditivos, o outro segmento da primeira soma é sempre maior que o outro aditivo da segunda soma.*

Exercícios: (Aplicação dos Teoremas para deduzir os corolários 1 e 2).

1. Com efeito, seja $a = a'$, $b > b'$; é (Teor. iv) $b = b' + x$, e portanto (T. i, Cor. 1) $a + b = a' + (b' + x) = (a' + b') + x$, e: $a + b > a' + b'$. E se: $a > a', b > b'$, é $a = a' + x$, $b = b' + y$, donde (T. i, cor. 1), $a + b = (a' + x) + b' + y = a' + b' + x + y = (a' + b') + (x + y)$, e $a + b > a' + b'$.

2. Se $a+b>a'+b'$, é: $a+b=(a'+b')+x=a'+(b'+x)$, e da hipotese $a=a'$ resulta (T. I, cor. 2) $b=b'+x$, e portanto é, $b>b'$.

Em geral, as proposições demonstradas aplicam-se à adição de um número qualquer de segmentos: tendo-se demonstrado que são verdadeiras para dois segmentos, e depois para três, deduz-se ainda para n, a soma de n segmentos é um segmento: A *adição de segmentos* goza das propriedades associativa e comutativa, produz um resultado único: *é uma operação uniforme.*

28. — Def. I. — Fazendo coincidir os raios $\overline{C}A$, $\overline{C}B$, **o segmento** (A B) diz-se **diferença** entre o maior e o menor dos segmentos (A C), (B C): se $(AC)>(BC)$, e segmento (A B) é único (Teor. IV),

$$(AC)=(BC)+(AB)=(AB)+(BC) \tag{1}$$

e a diferença (A B) entre (A C) e (B C) denota-se por:

$$(AB)\equiv(AC)-(BC): \tag{2}$$

Subtrair de um segmento (A C) outro segmento menor (B C), significa fazer coincidir os raios $\overline{C}A$, $\overline{C}B$ e determinar o terceiro segmento (A B), que adicionado ao segundo dá (1) uma soma igual ao primeiro (A B). Esta operação chama-se **subtracção** de segmentos.

Se designarmos o *diminuendo* $(AC)\equiv a$, *o diminuidor* $(BC)\equiv b$, e o 3.º segmento ou *diferença* (2) por $(AB)\equiv a-b$, resulta (1) que: $a=b+(a-b)$: o diminuendo é igual à soma do diminuidor e da diferença (*resto*), ou

$$(a-b)+b=a,$$

adicionando à diferença o segmento diminuidor, resulta o segmento diminuendo.

Cor. 1. — É: $(a+b)-b=a$. *Subtraindo à soma de dois segmentos um dos aditivos, obtem-se o outro.*

Com efeito, adicionando à diferença $(a+b)-b$ o diminuidor b, resulta (def.) o segmento $(a+b)$,

$$a+b=((a+b)-b)+b, \qquad [b\equiv b,]$$

donde (27, T. I, cor. 2):

$$(a+b)-b=a.$$

Assim, dada a soma $s=(a+b)$ de dois segmentos e um dêles (b), pode-se achar o outro segmento aditivo.

Das expressões anteriores resulta a identidade: $b+(a-b)\equiv(a+b)-b$.

TEOR. I. — Se, $a=a'$, e $b=b'$, e se $a>b$, será: $a-b=a'-b'$: *A diferença de dois segmentos dados é igual à diferença entre dois segmentos respectivamente iguais aos primeiros.*

De facto, sendo $a'=a$, e $a>b$ é (26, cor. 1) $a'>b$, e de $b=b'$ resulta: $a'>b'$; portanto, é $a=(a-b)+b$, e $a'=(a'-b')+b'$, e sendo $a=a'$, a hipótese é equivalente à seguinte (19, 3):

$$(a-b)+b=(a'-b')+b', \qquad b=b',$$

logo (27, cor. 2) é:

$$a-b=a'-b'.$$

COR. 1 — *Se subtrairmos a segmentos iguais outros segmentos iguais entre si*, resultam diferenças iguais.

O teorema I é ainda uma conseqüência imediata da def. I e do teorema I do n.º 27, e significa que, como a adição, a *subtracção de segmentos é uma operação uniforme.*

Por conseqüência, a diferença entre dois segmentos $(\mathfrak{L}\,\mathfrak{M})$, $(\mathfrak{N}\,\mathfrak{O})$ é um segmento único, e é igual à diferença entre dois segmentos iguais, respectivamente, ao diminuendo e ao diminuidor: pondo

$$(\mathfrak{L}\,\mathfrak{M})\equiv(A\,C),\ (\mathfrak{N}\,\mathfrak{O})\equiv(B\,C),$$

é

$$(\mathfrak{L}\,\mathfrak{M})-(\mathfrak{N}\,\mathfrak{O})\equiv(A\,C)-(B\,C)=(A\,B).$$

Se dois segmentos (A B), (A′ B) são iguais, a sua sôbreposição (a partir do extrêmo B) pode exprimir-se (1) por:

$$(A\,B) - (A'B) = (A \equiv A'),$$

e a diferença obtida é um ponto $(A \equiv A')$: diz-se, por convenção, que a diferença entre dois segmentos iguais é um *segmento nulo*, que se designa pelo símbolo *o* de *zero:* $a - a = o$;

é (cor. 1): $\quad a + o = a, \; a - o = a.$

A diferença de dois segmentos é menor que o diminuendo, e assim, qualquer segmento rectilínio é maior que o segmento nulo, e se a é um segmento com extremos distintos, o segmento nulo é menor que qualquer segmento a, $(A\,A) < a$.

Adição de vectores sôbre uma recta (colineares)

A distancia (A, B) (ou o segmento (A B) diz-se a *grandeza* ou *valor absoluto* do vector $\overrightarrow{AB}$: o mesmo se diz de uma parte ou região da recta, tendo os extremos A, B. Dois *vectores* $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A'B'}$ são *iguais*, se teem o mesmo sentido e $(A, B) = (A', B')$; dois *vectores são simétricos*, se teem sentidos contrários e grandezas iguais.

Sejam $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ dois vectores existentes sôbre uma recta *r*, e tais que a extremidade do 1.º coincide com a origem do 2.º vector; o *vector* $\overrightarrow{AC}$ *diz-se soma* dos dois vectores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$,

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}:$$

Adicionar dois vectores $\overrightarrow{\mathfrak{L}\mathfrak{M}}$, $\overrightarrow{\mathfrak{N}\mathfrak{O}}$ existentes sôbre uma recta, significa: fazer coincidir a extremidade de um com a origem do outro, e determinar **o vector soma** assim formado pela origem do primeiro e extremidade do segundo vector.

Se $\mathfrak{L}\overrightarrow{\mathfrak{M}} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{\mathfrak{N}\mathfrak{O}} = \overrightarrow{BC}$, é

$$\mathfrak{L}\overrightarrow{\mathfrak{M}} + \overrightarrow{\mathfrak{N}\mathfrak{O}} \equiv \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Ex: A soma dos vectores iguais a $\overrightarrow{X_1X_2}$, $\overrightarrow{X_2X_3}$ (fig. 9) é o vector $\overrightarrow{X_1X_3}$; a soma dos vectores $\overrightarrow{X_2X_3}$ e $\overrightarrow{X_3X_1}$ é: $\overrightarrow{X_2X_3} + \overrightarrow{X_3X_1} = \overrightarrow{X_2X_1}$.

A soma de dois vectores simétricos iguais a $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, é o *vector nulo:* $\overrightarrow{AA} \equiv o$,

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} \equiv o.$$

Invertendo um vector, resulta um seu simétrico, e denota-se esta operação com o sinal —,

$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA};$$

designa-se dois vectores simétricos $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A'B'}$, por: $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{A'B'}$.

Obs.: — 1) A soma de n segmentos iguais a um segmento (A B) diz-se *múltiplo* do segmento (A B) segundo o número n, e indica-se por: $(AB)\,n = (AB) + (AB) + \ldots + (AB)$. Se um segmento (C D) é múltiplo (n) de outro segmento (A B), é $(CD) = (AB)\,n$, o segundo diz-se *submúltiplo* do primeiro segundo o número n ou a n.^esima^ *parte* de (C D), e indica-se por: $\frac{(CD)}{n} \equiv (AB)$. Os múltiplos de um segmento (A B) segundo os 1.^os^ números 2, 3, 4, 5,. . teem as designações particulares: segmentos *duplos*, *triplos*, *quádruplos*,. . . ; e os submúltiplos correspondentes dizem-se: *metade, terça parte, quarta parte*. . . de (A B). Estas designações são ainda adoptadas na decomposição de qualquer figura em *partes* (4, II) *iguais*.

2) Se o segmento (A B) é submúltiplo dos segmentos (M N), (N O), $(AB) = \frac{(MN)}{m} = \frac{(NO)}{n}$, o segmento (M N) é igual à soma de m submúltiplos $\frac{(NO)}{n}$ de (N O), e designa-se por: $\frac{(NO)}{n}\,m$ ou $(NO)\,\frac{m}{n} = (MN)$; $\frac{m}{n}$ indica *a relação dos segmentos* (M N), (N O); e se estes são consecutivos, o ponto N divide o segmento (M O) em duas partes (M N), (N O) segundo aquela relação.

29. — Def. i. — Em todo o segmento rectilínio (A B) existe um só ponto interior $\mathfrak{M}$ que o divide em duas partes iguais, e $\mathfrak{M}$ diz-se o **ponto médio** ou **meio** do segmento (A B). O ponto $\mathfrak{M}$ separa os raios opostos $\overline{\mathfrak{M}}$ A, $\overline{\mathfrak{M}}$ B.

Com efeito sejam as pontuais iguais $A A' A'' A''' \ldots$ $B B' B'' B''' \ldots$ interiores a (A B) e pertencentes aos raios opostos $\overline{A} B$, $\overline{B} A$; é (25, iii), $(A A') = (B B')$, $(A A'') = (B B'')$, $(A A''') = B B''')$, ... Se dois pontos $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{M}''$ se movem sôbre os raios opostos $\overline{A} B$, $\overline{B} A$ e os seus estados são pontos correspondentes A' e B', A'' e B'', A''' e B''', ... os dois pontos móveis encontram-se (20, cor.) em um só ponto interior (25, iii, cor. 1) $\mathfrak{M}$, e por hipótese, é $(A \mathfrak{M}) = (\mathfrak{M} B)$: logo $\mathfrak{M}$ é o ponto médio de (A B), e *todo o segmento rectilínio tem um só ponto médio*, é divisível em duas partes iguais.

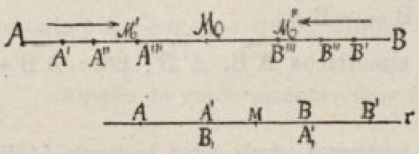


Fig. 9

E um segmento é divisível em n partes iguais ou em duas partes segundo uma relação dada (28, obs.), por um só ponto interior.

I. — *Se os segmentos* (A B), (A′ B′) *são iguais e do mesmo sentido, os meios dos segmentos* (A B′), (B A′) *coincidem.* E recíprocamente, *se os meios dos segmentos* (A B′) *e* (B A′) *coincidem,* A B *e* A′ B′ *são iguais* (e do mesmo sentido) $A B = A' B'$; os segmentos (A A′) e (B B′) são tambêm iguais, e $A A' = B B'$.

Seja M o meio de (A B′), $(A M) = (M B')$; invertendo o raio $\overline{M} B'$, a sôbreposição de (B′ M) a (A M) produz (25, teor. i) a coincidência dos raios $\overline{A} B$, $\overline{B'} A'$ e dos pontos B e A′, pois por hipótese é $A B = A' B'$ (os raios A B, A′ B′ são do mesmo sentido), e portanto: $(MB)=(MA')$ o ponto M é também o meio de (BA').

Recíprocamente, se $(AM)=(MB')$ e $(BM)=(MA')$, como os pontos A e B' pertencem aos raios opostos MA MB', a sôbreposição dêstes raios a partir da origem M e a de (MA) e (MB') produz a coincidência dos pontos B' e A': logo $(AB)\equiv(B'A')$, e (AB), $(A'B')$ são do mesmo sentido, $AB=A'B'$. Estas proposições resultam ainda dos Teor. I, I' do n.º 27.

Por conseqüência, os vectores iguais satisfazem às condições:

II. — *Dois vectores* $\overrightarrow{AB}$ *e* $\overrightarrow{CD}$ *são iguais, se o meio de* (AD) *coincide com o meio de* (BC). Se os vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ são iguais $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$, os meios de (AD) e (BC) coincidem: $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$.

Cor. — Se o meio de (AC) coincide com o meio de (BD), os vectores AB e CD são simétricos: $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{CD}$. E recíprocamente.

§ 7.

Rectas paralelas

30. — Def. I. — **Dois pontos** A e A' dizem-se **opostos em relação ao ponto médio** O **do segmento** (AA'): os raios $\overline{OA}$ $\overline{OA'}$ são opostos (29) e $(OA)=(OA')$; e dado um ponto A e o ponto O, existe (24, 2.ª, cor. 1) um só ponto A' oposto ao ponto A em relação a O, distinto de A.

Uma figura $A'B'C'D'\ldots$, diz-se *oposta* a outra figura $ABCD\ldots$ *em relação a um ponto* O, (fig. 10), se é formada de pontos opostos aos pontos da segunda figura em relação a O. O ponto O é o meio dos segmentos (AA'), (BB'), (CC'),... e as duas figuras são opostas uma a outra.

Duas figuras dadas dizem-se *opostas* em relação a um ponto O, se todo o ponto de uma tem o seu oposto na outra em relação a O:

Portanto, *toda a figura tem uma só figura oposta* em relação a um ponto dado O; *e se* O *não pertence a uma delas, está fora da outra.*

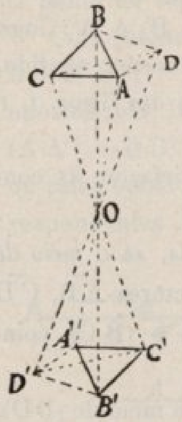


Fig. 10

Como duas figuras opostas estão entre si em correspondência biunívoca, são correspondentes, e veremos que são figuras iguais.

Por esta definição, a figura oposta a uma recta r em relação a um dos seus O, é a própria recta r (24, 2.º).

Sejam $A', B', C', \ldots$ pontos opostos aos pontos $A, B, C, \ldots$ da recta r, em relação ao ponto O fora da recta r, (fig. 11 e 12); demonstraremos (36, T. II) que os pontos $A', B', C', \ldots$ formam uma pontual, e portanto *a figura* $A'B'C'\ldots$ *oposta a uma recta* r em relação a um ponto O, *é uma linha recta* r'. Os segmentos (AA'), $((BB')$, (CC'), e as rectas AA', BB', CC' dizem-se **transversais** da recta r e da figura $A'B'C'\ldots$

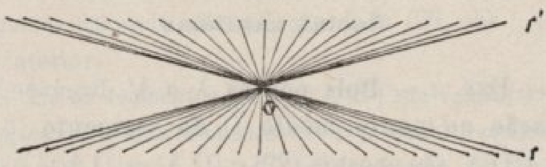


Fig. 11

1.ª Prop. das figuras opostas [1] —: *Toda a figura oposta a uma recta* em relação a um ponto fora dela, *é uma* **linha recta** (fig. 11).

[1] M. Veronese considera esta propriedade como um postulado das figuras opostas, *op. cit.*, § 2.

Def. ii. — *A linha oposta a uma recta r em relação a um ponto, diz-se* **paralela** á recta r: a recta r' é paralela à recta r.

Esta definição indica o processo para *construir uma paralela a uma recta dada* r: 1) se a paralela tem de passar

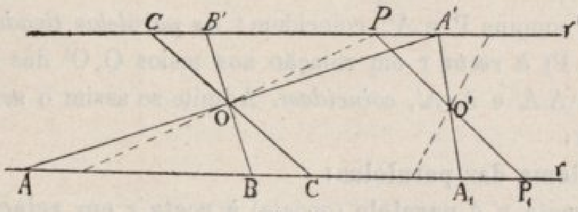


Fig. 12

por um ponto dado A′ (fig. 12), une-se êste ponto a qualquer ponto A da recta r por meio da transversal (A A′), e determina-se o segundo ponto B′ oposto a um ponto B de r em relação ao ponto médio O (def. i) de (A A′). Pela propriedade das figuras opostas, a paralela à recta r é uma linha recta, e sendo A′ e B′ dois dos seus pontos, a récta A′B′ é uma paralela à recta r (referida ao ponto O).

Como a figura oposta a uma recta em relação a qualquer dos seus pontos é (24, 2.ª) a própria recta (par de rectas opostas coincidentes), a paralela a uma recta, tirada por um dos seus pontos, é a própria recta dada.

2) Se é dado o ponto O, toma-se dois pontos quaisquer A e B de r, determina-se os seus opostos A′ e B′ em relação a O, e a recta A′B′ é paralela à recta r. A′B′ é a única paralela a r, referida ao ponto dado O, pois que (def. i) cada ponto A, B, C... da recta r tem um só ponto oposto, referido a O. Estas construções efectuam-se com a régua e o compasso.

Cor. — A recta A B′ *é paralela a* A′B.

2.ª — Seja r' a paralela à recta r em relação ao ponto O;

construa-se uma paralela r'' a r, referida ao ponto médio O′ de outra transversal A_1A'; dirigindo pelo ponto P_1 de r a transversal P_1O', admite-se que P_1O' **intercepta a primeira paralela** r' no ponto P, e êste **ponto** P é ainda **oposto ao ponto** P_1 de r, e portanto P pertence às paralelas r' e r'' à recta r, referidas aos pontos O e O′, e tendo r' e r'' dois pontos comuns P e A′, coincidem: *As paralelas tiradas por* A′ (ou P) *à recta* r em relação aos meios O, O′ das transversais A A′ e A_1A', *coincidem*. Admite-se assim o seguinte axioma:

Axioma das paralelas:

A recta r' é paralela (*oposta*) **à recta r em relação ao ponto médio de qualquer transversal.**

Esta proposição estabelece a significação de *rectas paralelas:*

Def. II′. — *Duas rectas* dizem-se *paralelas entre si* se são opostas uma a outra em relação a qualquer ponto.

A paralela a uma recta, referida a um ponto dado O, é ainda paralela à recta em relação ao ponto médio de qualquer segmento transversal, e portanto:

Cor. 1 — As paralelas a uma recta que teem um ponto comum, coincidem. *Por um ponto dado fora de uma recta pode-se dirigir uma, e só uma, paralela à recta.*

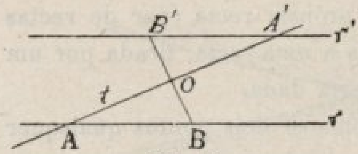


Fig. 13

Teor. I. — *Se dirigirmos uma* **recta** t *pelo meio de uma transversal das paralelas* r *e* r′ *e por um ponto* A *da recta* r, *a recta obtida* t *é* ainda *transversal, intercepta a paralela* r′ *à recta* r *em* **um ponto oposto ao ponto** A (23, I).

Esta proposição resulta do axioma das paralelas e do enunciado I do n.º 23, e aquela propriedade de t (fig. 13) ser transversal é condição necessaria ao axioma (cf. n.º 31) anterior.

Cor. Se uma recta passa pelo meio de uma transversal de duas rectas paralelas r e r' e intercepta uma delas, corta também a outra paralela.

III.

§ 8.

Feixes de rectas e de raios. O plano

31. — Na construção de um pavimento e em construções semelhantes observa-se o seguinte: a uma trave rectilínea fixam-se duas ou mais traves rectilíneas que se cruzam em um ponto pelas arestas, formando *um feixe;* e sôbre estas vigas *de suporte* se vão assentando as traves da construção definitiva. Os materiais direitos de todo o travejamento

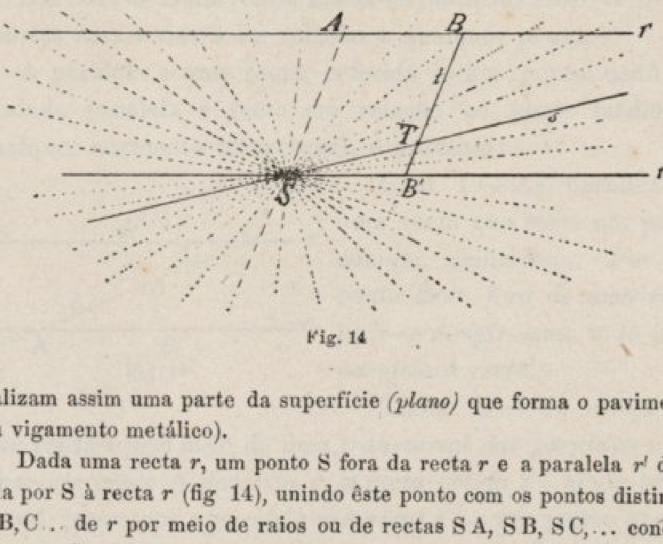


Fig. 14

realizam assim uma parte da superfície *(plano)* que forma o pavimento (ou vigamento metálico).

Dada uma recta r, um ponto S fora da recta r e a paralela r' dirigida por S à recta r (fig 14), unindo êste ponto com os pontos distintos A, B, C... de r por meio de raios ou de rectas S A, S B, S C,... concorrentes em S, qualquer recta s, dirigida por S e por um ponto T do segmento transversal (B B′), intercepta também a recta r em um ponto. E por indução ainda se afirma que, se uma recta t (paralela a SA) corta dois raios em pontos distintos, **intercepta todas** as rectas S A, S B, S C,. . dirigidas por S e por *r*.

Se um ponto T se move sôbre B B′ aproximando-se do ponto B′, a recta *s* (ou S T) gira em redor de S e avizinha-se da paralela *r*′; os seus pontos de intercepção com *r* distancíam-se do ponto A na *direcção* de um ponto da recta *r* — o *ponto no infinito da recta* r.

Def. i. — *Projectar* um ponto A de outro ponto fixo S significa construir o raio $\overline{S}$A ou a recta S A; a recta S A (ou $\overline{S}$ A) diz-se a *projectante* do ponto A, e S o *centro*. Uma recta dirigida pelo centro S é a projectante de qualquer dos seus pontos.

As operações *projectar* e interceptar são possíveis em certas condições: *projectar* é unir dois pontos distintos por uma linha recta, e *interceptar* é definir o ponto comum a duas rectas distintas (23, i).

Projectar de um centro S uma pontual A B C . pertencente à recta *r* significa projectar de S os seus pontos A, B, C,. . A figura formada pelas projectantes S A, S B, S C,. . . é um **feixe de rectas** ou **feixe de raios,** segundo se considera as suas rectas ou os seus raios de origem S como elementos do feixe, e denota-se por: (S *r*).

Se projectarmos uma recta *r* de um ponto S fora da recta, resulta um *feixe* a que se dá o nome de **plano** projectante; considera-se a paralela *r*′ dirigida por S à recta *r* como a projectante de *o ponto no infinito* da recta *r*.

Def. ii. — A figura formada por todas as rectas que unem os pontos distintos de uma recta *r* com um ponto S exterior à recta, diz-se **feixe de rectas, feixe de raios,** ou **plano,** e êste denota-se pelo símbolo: S *r*.

O feixe de raios ou de rectas (S *r*) é uma *figura radiada,* ou *regrada,* isto é, formada de raios limitados por S, ou de rectas; e o plato S *r* considera-se como uma figura pontual formada de pontos pertencentes a todas as rectas do feixe (S *r*) que resultam de unir *o centro* S com a recta *r*.

Def. iii. — A recta *r* diz-se **directriz** do feixe (S *r*) de *centro* S, e as projectantes S A, S B, S C,. . . **geratrizes** do feixe (S *r*) ou do plano S *r* (21, def. ii).

Se uma recta gira em redor de um ponto fixo S, apoiando-se sôbre uma recta fixa ou directriz r, gera assim um plano S r (21, def. II).

Se uma recta r' intercepta **todas as geratrizes** SA, SB, SC,... em os pontos A', B', C',... as rectas SA e SA', SB e SB'... coincidem, por terem dois pontos comuns A e A', B e B',... SA e SA' são projectantes de qualquer ponto A (ou A') da própria recta SA: pontanto os *feixes* (S r) e (S r') *são idênticos*.

DEF. IV. — Diz-se que uma recta **pertence** a um feixe se tem dois pontos distintos sôbre o feixe.

Pôsto isto, estabelece-se o seguinte:

Axioma do plano:

1) Se duas rectas r e r' teem um ponto comum A e um ponto de r' está fora de r, as rectas r e r' *teem um só ponto comum*, interceptam-se em A (n.º 23, I).

2) **Se uma recta intercepta duas geratrizes em pontos distintos, intercepta todas as geratrizes do feixe** em pontos distintos.

COR. 1. — *Toda a recta que intercepta uma geratriz e uma recta do feixe, intercepta todas as geratrizes,* isto é, **pertence ao feixe**. Poisque se r' intercepta uma recta de (S r), por êsse ponto de intersecção passa uma geratriz, e portanto r' intercepta esta 2.ª geratriz e (axioma) todas as outras.

32. — Um feixe de rectas define *o plano* pelas suas propriedades:

TEOR. I. — *O plano é definido por uma recta* r *do feixe e um ponto* S *fora da recta.*

Seja S (fig. 15) um ponto existente fora da recta r, e (S r) o feixe (definido pelo ponto S e pela directriz r) gerador do plano S r, e S' e r' um ponto e uma recta pertencentes ao feixe (S r).

A hipótese de o ponto S′ e a recta r' existirem sôbre (S r) significa (def. IV): a recta r' intercepta duas geratrizes S A, S B de (S r) nos pontos A′, B′; e S′ é o ponto de intercepção de duas rectas S X, S′ A′ de (S r), isto é, S′ pertence a uma geratriz S X.

Projectando de S′ os pontos A′, B′, . . construe-se o

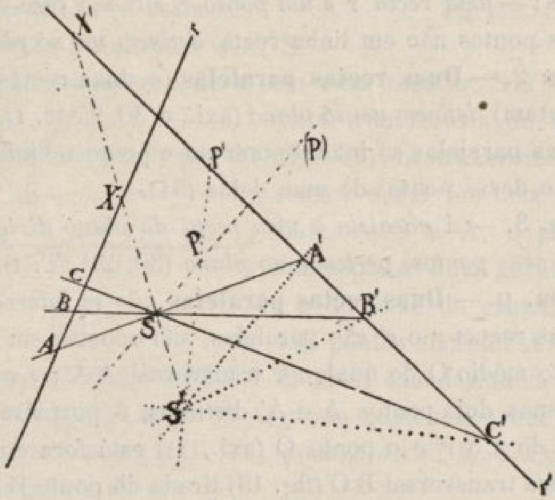


Fig. 15

feixe (S′ r'), e como os seus raios S′ A′, S′ B′, S′ C′, . . . se apoiam sôbre pares de geratrizes S X e S A, S X e S B, . . . do feixe (S r) (axioma), todos os pontos e rectas de (S′ r') pertencem a (S r): Portanto (S′ r') pertence ao plano S r.

Recìprocamente, o raio S′ S (ou S′ X) de (S r) é interceptado pela recta r' em um ponto X′, e portanto S′ S é também (cor. 1) uma geratriz do segundo feixe (S′ r'): Qualquer ponto P de (S r) pertence a (S′ r'), poisque a geratriz S P intercepta a recta r' (em P_1) e a geratriz S′ S de (S′ r') em S, S P pertence (cor. 1) a êste feixe, e portanto todos os seus pontos, incluindo P, pertencem a $S'r'$ (ainda que P exista sôbre SS'):

Logo, ($S'r'$) define um plano $S'r'$ idêntico a Sr: *uma recta* r' de Sr *e um ponto* S' existente fora da recta r' individualizam o plano Sr.

Cor. 1. — *Se duas rectas* r, s *se interceptam*, toda a recta que passa por dois pontos distintos das rectas r e s intercepta-as: — *uma recta* r *e um ponto* S *situado fora da recta* (ou três pontos não em linha recta) *definem um só plano* S r.

Cor. 2. — **Duas rectas paralelas** (e duas rectas que se interceptam) *definem um só plano* (axi., e 30, Teor. I). Diz-se que duas paralelas se interceptam em o ponto no infinito (na direcção desse ponto) de uma delas (31).

Cor. 3. — *A paralela a uma recta do plano dirigida por um dos seus pontos, pertence ao plano* (30, 2.ª, T. I).

Teor. II. — **Duas rectas paralelas** *não se interceptam*.

Se as rectas r e r' são paralelas, são opostas em relação ao ponto médio O de qualquer transversal AA': r e r' teem pelo menos dois pontos A e A' distintos, e portanto AA' é distinta de r e r' e o ponto O (axi., 1)) está fora de r e r'. Uma nova transversal B O (fig. 13) tirada do ponto B de r intercepta (30, Teor. I) r' em um ponto B' oposto a B, e sendo BB' distinta de r, o ponto B' de r' existe fora de r: qualquer transversal dirigida por O é distinta de r e r', e intercepta-as em dois pontos opostos a O e distintos (30, def. I), todas as transversais existentes no plano Or encontram r e r' em pares de pontos distintos, logo r e r' não teem um ponto comum, não se interceptam.

Cor. 1. — *Duas rectas que se interceptam não são paralelas.*

Se as rectas r e s se cortam em P (fig. 16), construindo por qualquer ponto P' de s a paralela r' a r, r' tem um ponto A' fora da recta s, é distinta de s: e todas as paralelas à recta r dirigidas pelos pontos de s são distintas de s: r e s não são paralelas.

E a paralela dirigida pelo ponto P a r, é a própria recta r, distinta de s.

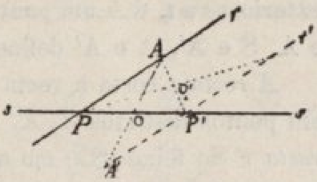


Fig. 16

Teor. iii. — *Se uma recta* s *intercepta outra* r, *não é paralela a uma paralela* r′ *à recta* r.

Sejam as paralelas r e r', S o ponto de intersecção de r com uma recta s, S S′ e A A′ duas transversais de r e r' (fig. 17); a transversal A A corta r e S S′ em dois pontos distintos O e A, e portanto intercepta as duas geratrizes r e s do feixe de centro S em dois pontos distintos A e A_1, e os segmentos (O A) e (O A_1) de A A′ são desiguais (um é parte do outro): (O A) $\neq$ (O A_1): não existem sôbre a recta s pontos opostos aos (A′ B′, . .) pontos de r': logo a recta s não é paralela a r'.

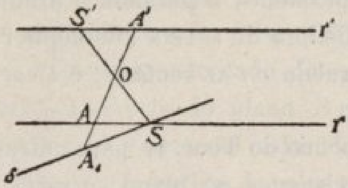


Fig. 17

(O próprio ponto A_1 podia ser A′ e então s interceptava r' em A′, e s, r' não eram paralelas (T. ii, cor. 1); e A_1 seria o único ponto comum, pois (axi., 1), r' e s são distintas por S).

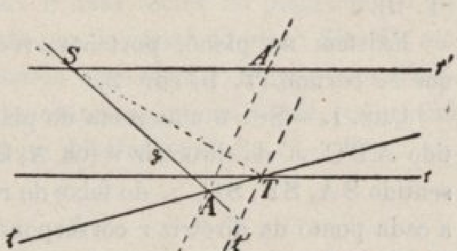


Fig. 18

Teor. iv. — *Se uma recta* t *do plano intercepta outra* r, *intercepta também a paralela* r′ *à recta* r.

Se T é o ponto de intersecção das rectas r e t, e (fig. 18)

r' é paralela a r, as rectas r' e t não são paralelas (Teor. III), e a recta t é distinta de r e r'. Sejam S e A′ dois pontos de r' exteriores a t, e A um ponto de t fora da recta r'; os pontos S e A, S e A′, A e A′ definem g, r' e s.

A recta t corta a recta r do plano e a geratriz g de (S s) em pontos distintos T, A, logo *t intercepta* (axi., cor. 1) *a recta r′* do feixe (S s) em um ponto distinto de T, e portanto as paralelas r e r' teem (como vimos, teor. II) todos os pontos distintos, não se interceptam.

Cor. 1. — *Duas rectas não paralelas interceptam-se.*

Se as rectas t e r' não são paralelas, a paralela r tirada pelo ponto T de t à recta r' é distinta de t, esta intercepta r, e portanto intercepta (IV) a paralela r': as rectas r' e t cortam-se.

Cor. 2. — Repetindo o raciocínio do Teor. IV para outras paralelas r'', r''',.. à recta r existentes no plano: *a recta* t *intercepta* r *e todas as paralelas* r″, r‴,... *do plano.* E as rectas r e t ficam *divididas em quatro partes distintas,* pelo ponto de intersecção.

Obs. — Não se pode afirmar que — *duas rectas não se interceptam;* esta locução é complementar de rectas paralelas: diz-se que duas se não interceptam, quando são paralelas (T. II).

Existem no plano, portanto, rectas paralelas e rectas que se cortam (T. II, cor. 2).

Def. I. — Se s é uma recta do plano S r, (fig. 19), o sentido ABC... da directriz r (ou $A_1 B_1 C_1$... de r_1) define o sentido SA, SB, SC,... do feixe de rectas (ou de raios) (S r): a cada ponto da diretriz r corresponde um só raio (ou recta) do feixe (S r) e um só ponto da recta s: o sentido dos pontos A′, B′, C′, .. de s é (def. III) o mesmo dos pontos A, B, C,... da recta r: aos raios sucessivos $\overline{S}A$, $\overline{S}B$, $\overline{S}C$,... e ao raio $\overline{S}X$ da paralela r' á recta r sucedem-se os raios opostos ($\overline{S}A'$,

$\overline{S}B'$, $\overline{S}C'$,...) até ao raio $\overline{S}X'$ oposto a $\overline{S}X$, voltando ao primeiro raio $\overline{S}A$, que completa o feixe (S*r*).

Sentido do plano. — Portanto *um feixe de rectas* ou de raios (S*r*) *é uma sucessão linear de rectas* (ou de raios), cujo sentido é o de uma recta situada no plano e que não passa pelo centro do feixe: *o sentido de um plano* S*r* *é dado por uma recta* r — a directriz — *e por um ponto* S *fora da recta,* o centro do feixe (S*r*).

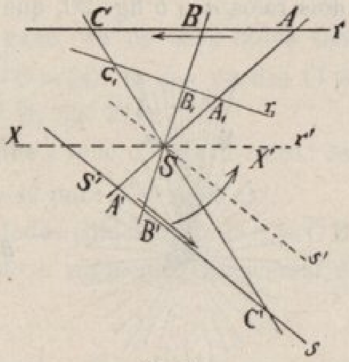


Fig. 19

O sentido adoptado diz-se *sentido directo* do plano S*r*, e um raio *g* gira em redor do ponto S no sentido do plano, se o ponto de intersecção de *g* com *r* se move no sentido da recta *r*.

Cor. — *Uma recta* s *do plano* S*r* *gira no sentido* (convencionado) *directo* em redor de um dos seus pontos S' se a sua paralela *s'* conduzida pelo ponto S se move nesse sentido.

Def. ii. — Um plano *s' r'* move-se (*resvála*) sôbre um plano fixo S*r*, se (Teor. i) duas rectas do plano móvel interceptam, cada uma, um par de rectas do plano fixo S*r* em pontos distintos; ou, quando uma recta *r'* e um ponto S' exterior a recta *r'* e pertencentes ao plano móvel, coincidem com uma recta e um ponto do plano fixo S*r* (fig. 15).

§ 9.

Ângulos. — Partes do plano

28. — Def. i. — Designe-se dois raios $\overline{O}A$ e $\overline{O}B$ por: *a*, *b*. A uma **parte** de um feixe de raios, limitada pelos raios *a* e *b*, dá-se ainda o nome de **feixe** (angular); os raios *a* e *b* chamam-se *lados* e a origem comum O, *vértice* do feixe, e indica-se por: (ab) ou $A\widehat{O}B$.

Um feixe de raios (Or) fica dividido em *duas partes* por dois raios *a* e *b* fig. 20, que limitam dois feixes distintos: o

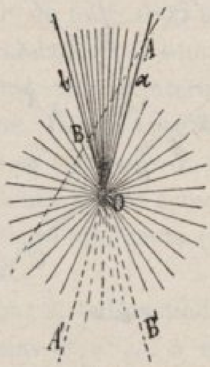


Fig. 20

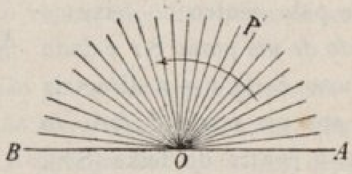


Fig. 21

que não contêm os raios $\overline{O}A'$ e $\overline{O}B'$ opostos a *a* e *b* diz-se feixe **convexo,** e o outro, $B\widehat{O}A$ a que pertencem os raios $\overline{O}A'$ e $\overline{O}B'$, diz-se feixe **côncavo.**

Notação. — Se adoptarmos (por convenção) o mesmo sentido *para todos os feixes* — o sentido directo do plano — designando o **primeiro lado** por *a* e o **segundo** lado (último do *feixe*) por *b*, **um feixe** (ab) fica definido pelos seus lados *a*, *b*.

Def. II. — Chama-se **ângulo** a parte de um feixe de raios limitada por dois raios *a* e *b* no sentido do plano, e denóta-se escrevendo o primeiro lado *a* seguido do segundo lado *b*, por meio dos símbolos: ab, ou $A\widehat{O}B$.

Um par de raios $\overline{O}A$, $\overline{O}B$ com a mesma origem, define o ângulo $A\widehat{O}B$ segundo a notação, isto é, diz-se *ângulo* a figura de dois raios $\overline{O}A$, $\overline{O}B$, e o ponto O é o seu **vértice.**

Def. iii. — Dois **ângulos** dizem-se **opostos pelo vértice** se os lados respectivos são raios opostos (o 1.° lado de um oposto ao 1.° do outro, e os 2.^{os} lados opostos); por ex., os ângulos $A\widehat{O}B$ e $A'\widehat{O}B'$ (e $A\widehat{O}B'$, $A'\widehat{O}B$) são opostos pelo vértice O, fig. 20.

Def. iv. — Diz-se **ângulo razo**, se os seus lados são opostos, e designa-se por: $A\widehat{O}B \equiv (\pi)$. O seu vértice O é um ponto arbitrário interior a AB, fig. 21.

2) Chama-se ângulo de **um giro** a todo o feixe de raios: os seus lados coincidem, e designa-se por: $A\widehat{O}A \equiv (\pi)2$.

3) Diz-se *ângulo nulo,* se os lados coincidentes $\overline{O}A \equiv \overline{O}B$ são ós seus únicos raios: e todo o segmento transversal é nulo (n.° 28): $A\widehat{O}B \equiv 0$.

34. — Projecte-se de uma recta r um ponto O por meio de raios, unindo cada ponto de r com O pelos raios $\overline{A}O$, $\overline{B}O$, $\overline{C}O, \ldots$ tendo a origem em r (limitados pela recta r), fig. 22.

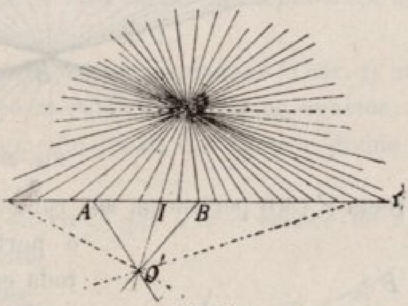


Fig. 22

Def. i. — Diz-se **semiplano** a figura (radiada) de todos os raios tendo origem sôbre uma recta r e concorrentes em um ponto O fora da recta r, e denota-se com o símbolo: $\overline{r}O$.

A recta r diz-se **origem** do semiplano.

Como todas as rectas do feixe de rectas (Or) interceptam (31, axi.) a recta r, ficam divididas em duas partes (24, 1.^{a}) pelo seu ponto de intersecção com r: diz-se que uma recta r divide o plano em **duas partes** distintas ou **semiplanos opostos** $\overline{r}O$, $\overline{r}O'$ tendo a origem comum r. Designa-se, por convenção, o sentido do plano por dois raios sucessivos de um semiplano, ou por um ângulo cônvexo.

Def. II. — Diz-se que **dois pontos** A e B **existem** de uma parte e doutra ou **em partes opostas** de um plano em relação a uma recta *r*, se *r* divide o segmento (A B) (em um ponto interior), fig. 24.

Cor. 1. — *Se o segmento que une dois pontos* A, B *de um plano é interceptado por uma recta* r, *êsses pontos existem em partes opostas do plano em relação à recta* r.

Com efeito, se a recta *r* corta o segmento (A B) em um ponto interior I, os raios $\overline{I}$A, $\overline{I}$B são opostos (24, 1.ª); estes raios e os pontos A, B pertencem aos semiplanos opostos $\overline{r}$A, $\overline{r}$B.

Cor. 2. — *A paralela* r′ *a uma recta* r *existe* toda *em uma só parte do plano em relação à recta* r. Os pontos da

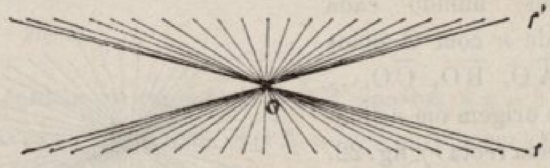


Fig. 23

recta *r′* (30) pertencem aos raios do semiplano $\overline{r}$O (fig. 23), e portanto a paralela *r′* existe toda em $\overline{r}$O.

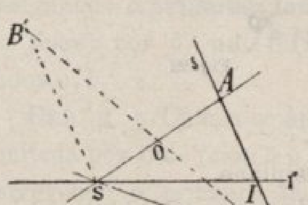


Fig. 24

Teor. I. — *Se uma recta* s *tem dois pontos* A, B *nas duas partes opostas em que a recta* r *divide o plano, a recta* A B *intercepta a recta* r em um ponto interior ao segmento (A B).

As rectas *r* e A B são, por hipótese, distintas; seja S um ponto da recta *r* e não pertencente à recta A B (fig. 24).

Dirija-se por S a paralela SB′ à recta AB; como AS tem o ponto S e o ponto O fora da recta AB, a transversal BOB′ tem também o ponto B′, oposto a B, fora da recta AB, e portanto a paralela SB′ é distinta (31, axi. 1)) da recta AB. Ou o ponto B′ existe sôbre a recta r, ou está fora de r: na 1.ª hipótese as rectas SB′ e r coincidem (30, cor. 1), isto é AB é paralela à recta r e existe (cor. 2) no semiplano $\overline{r}A$, e os seus pontos A, B estão na mesma parte da recta r; na 2.ª, que é (def. II) a hipótese enunciada, a recta r intercepta a recta SB′ em S (31, axi.) e portanto (32, Teor. IV) AB e r interceptam-se em um ponto I.

Portanto, a hipótese de dois pontos A, B de uma recta existirem em partes opostas do plano em relação a uma recta r significa: r e AB não são paralelas, a recta AB corta a recta r.

I′ — *O segmento que une dois pontos situados em partes opostas do plano em relação a uma recta, intercepta-a em um ponto interior.* É inversamente, Cor. 1.

Com efeito, as rectas AB e r interceptam-se (Teor. I) em um ponto I, e por hipótese os raios $\overline{I}A$, $\overline{I}B$ são opostos: o ponto I é interior ao segmento (AB) e a recta r divide o segmento.

TEOR. II. — *A recta (ou raio) que une o vértice de um ângulo convexo a um ponto interior de um segmento transversal, intercepta qualquer segmento transversal em um ponto interior.*

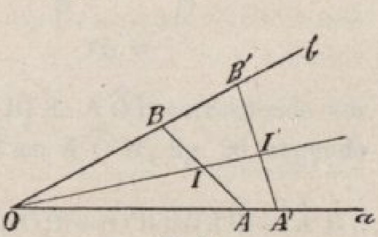


Fig. 25

Seja $A\widehat{O}B$ o ângulo e $\overline{O}I$ o raio que intercepta o seu segmento transversal (AB) em o ponto interior I (fig. 25): os raios $\overline{I}A$, $\overline{I}B$ são opostos, os pontos A, B e todos os raios tendo a sua origem sôbre a recta r (OI) e concorrentes em A, B existem (def. I) em os semiplanos $\bar{r}A$, $\bar{r}B$. Os raios $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ pertencem, respectivamente, àqueles semiplanos, e portanto quaisquer pontos A′, B′ dos lados do ângulo $\widehat{AOB}$.

Logo o raio interior $\overline{OI}$ intercepta (Teor. I) todo o segmento transversal (A′B′) em um ponto interior I′.

Os raios I′A′, I′B′ são opostos.

Cor. 1. — Por conseqüência: os lados de um ângulo convexo estão de uma parte e doutra de uma recta que passa pelo vértice e por um ponto interior ao ângulo.

A ordem dos pontos A, I, B, *é a mesma dos pontos* A′I′B′.

Cor. 2.º — *Todo o raio interior a um ângulo divide-o em dois ângulos* (consecutivos). O ângulo $\widehat{AOB}$ fica dividido em dois ângulos $\widehat{AOI}$, $\widehat{IOB}$ tendo o lado comum $\overline{OI}$.

IV.

§ 10.

Do axioma de igualdade: Ângulos iguais

35. — Def. i. — **Dois ângulos** $A\widehat{O}B$, $A'\widehat{O'}B'$ **dizem-se iguais** se a dois pontos A, B dos raios $\overline{O}A$, $\overline{O}B$ de $A\widehat{O}B$ correspondem os pontos A', B' de $A'\widehat{O'}B'$ tais que (19): $(OA) = (O'A')$, $(OB) = (O'B')$, $(AB) = (A'B')$,

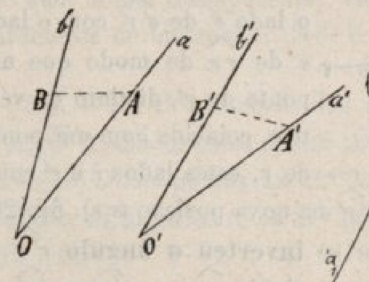


Fig. 26

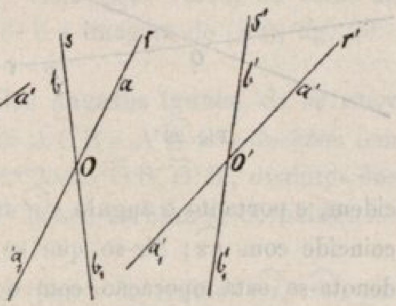


Fig. 27

A cada par de pontos (A, B) de $A\widehat{O}B$ corresponde um só par de pontos (A', B) igual em $A'\widehat{O'}B'$, fig. 26, segundo a ordem da notação.

Cor. 1. — *Se:* $(OA) = (O'A')$, $(OB) = (O'B')$ e $(AB) = (A'B')$, *os ângulos* $A\widehat{O}B$ *e* $A'\widehat{O'}B'$ *são iguais* — $A\widehat{O}B = A'\widehat{O'}B'$:

Todos os segmentos correspondentes (AB), (A'B'), nestas condições, são iguais.

Def. ii. — Diz-se **ângulo de duas recta** r, s o feixe definido por um raio a da recta r e o seu primeiro sucessivo b da recta s (no sentido do plano) com a mesma origem de a, e denota-se por: $\widehat{rs}$. O ponto O de intersecção do **par de rectas** r, s é o **vértice** do ângulo (fig. 27).

Dois ângulos $\widehat{rs}$, $\widehat{r's'}$ são iguais se os seus feixes correspondentes (ab), $(a'b')$ são iguais, e e os pares de rectas (r, s) e (r', s') dizem-se iguais (fig. 27). Para estas definições estabelece-se o seguinte:

Axioma da igualdade:

Se os lados r, r' **de dois ângulos iguais** $\widehat{rs}$, $\widehat{r's'}$ **e dois pontos dos 2.^{os} lados** s, s', distintos dos vértices **coincidem, os ângulos** $\widehat{rs}$, $\widehat{r's'}$ *(e os 2.^{os} lados s, s')* **coincidem.**

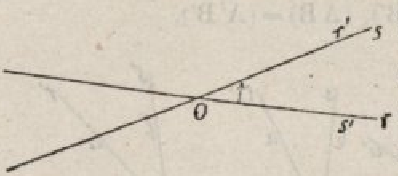


Fig. 28

Sejam os ângulos iguais $\widehat{rs} = \widehat{r's'}$; fazendo coincidir o lado s' de $\widehat{s'r'}$ com o lado s de $\widehat{rs}$ de modo que um ponto de r', distinto do vértice, coincida com um ponto de r, estes lados r e r' coincidem, e portanto o ângulo $\widehat{s'r'}$ na nova posição (rs). fig. 28, coincide com $\widehat{rs}$; diz-se que se **inverteu o ângulo** $\widehat{r's'}$, e denota-se esta operação com o sinal: $\widehat{rs} = -\widehat{r's'} = \widehat{s'r'}$; e resulta:

Teor. i. — *Todo o ângulo de duas rectas é invertível; todo o ângulo* ab *é invertível:* ab $= -$ ba.

Cor. 2. — *Pode-se inverter um plano ou um feixe de rectas.*

Com efeito, seja o feixe (St) e o ângulo $\widehat{rs}$, fig. 29; invertendo este ângulo, a recta A B C fica invertida e A′ B′ C′ é a nova direcção da directriz t do feixe S (A′ B′ C′ . . .), e o plano S t' coincide com o plano S t; todos os raios de (S t') estão no sentido do feixe, e considerando-o como fazendo parte do plano S t, então o seu sentido é C′ B′ A′ (contrário ao do próprio feixe (S t')).

As figuras do feixe (S t') ficam invertidas como a escrita

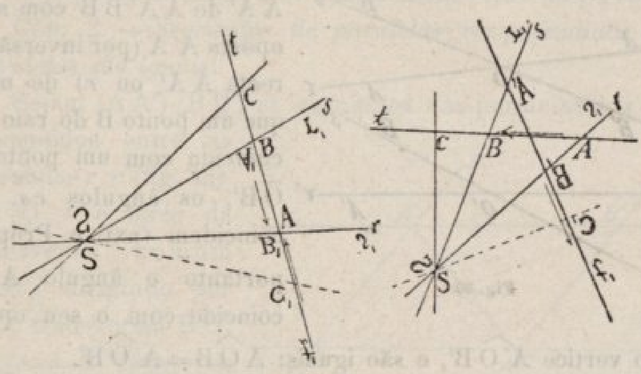


Fig. 29

de uma fôlha transparente, vista pelo verso, ou como os caracteres de imprensa: (S t') é a imagem de (S t), fig. 29.

36. — 1.ª Propriedade dos **ângulos iguais.** *Se os raios* $\overline{O}$ A, $\overline{O'}$ A′ *dos ângulos iguais* $A\widehat{O}B$ e $A'\widehat{O'}B'$ *coincidem* (em direcção) e *dois pontos dos 2.ᵒˢ lados* $\overline{O}$ B, $\overline{O'}$ B′, distintos dos vértices, **os ângulos** (e os 2.ᵒˢ lados) **tornam-se coincidentes** (35, axi.)

Sejam os ângulos iguais (pares de rectas) $\widehat{rs}$, $\widehat{r's'}$, por serem iguais os ângulos A O B = A′ O′ B′, fig. 27 e 30. Se o lado $\overline{O'}$ A′ coincíde com o lado $\overline{O}$ A de modo que um ponto de O′ $\overline{B'}$, distinto do vértice O′, coincida com um ponto de $\overline{O}$ B (por ex., fazendo escorregar r' sobre r), os segundos lados $\overline{O}$ B, $\overline{O'}$ B′ e os vértices O, O′, coincidem (35, axi.), e portanto os ângulos $A\widehat{O}B$, $A'\widehat{O'}B'$ e $\widehat{rs}$, $\widehat{r's'}$ coincidem.

Teor. i. — *Os ângulos opostos pelo vértice são iguais entre si:*

Os feixes opostos pelo vértice são iguais.

Tomemos sôbre o ângulo $\widehat{rs}$ os pares de rectas coincidentes (6, II), ou ângulos iguais $AA'\widehat{B}B'$, $A'\widehat{A}BB'$, fig. 30.

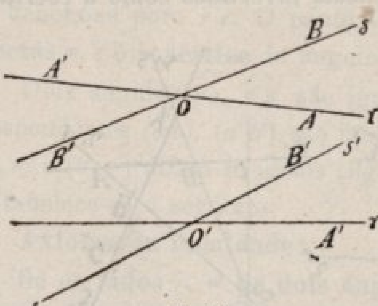


Fig. 30

Se fizermos coincidir a recta AA' de $A\widehat{A'B}B'$ com a sua oposta $A'A$ (por inversão da recta AA' ou r) de modo que um ponto B do raio $\overline{O}B$ coincida com um ponto de $\overline{O}B'$, os ângulos $\widehat{rs}$, $\widehat{r's'}$ coincidem (axi. e Prop.) e portanto o ângulo $A\widehat{O}B$ coincide com o seu oposto pelo vertice $A'\widehat{O}B'$, e são iguais: $A\widehat{O}B = A'\widehat{O}B'$.

COR. 1. — *A figura dos raios do plano, de origem* O, *é igual à figura formada pelos raios opostos;* poisque a cada par de raios da primeira corresponde na outra um par de raios opostos àqueles, formando ângulos opostos pelo vértice.

TEOR. II. — *Duas figuras opostas em relação a um ponto* O *são iguais entre si.*

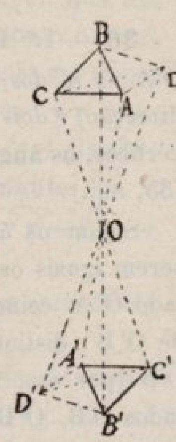


Fig. 31

Sejam ABCD .., A'B'C'D', fig. 31, duas figuras opostas uma a outra em relação ao ponto O, e A, B, C, D,... A,'B,'C,'D,'.... os pontos correspondentes nas duas figuras; sendo $A\widehat{O}B$ e $A'\widehat{O}B'$ dois ângulos opostos pelo vértice O, são iguais (Teor. I), e os segmentos homólogos (correspondentes) (AB) e (A'B') são iguais (38, cor.): (AB)=(A'B'). Quaisquer pares de pontos correspondentes, são iguais entre si (AC) = (A'C'), (BC) = (B'C'),... e sendo A'B'C'... a única figura oposta a ABCD.. a respeito do ponto O (30, def. I), ABCD... e

A′B′C′D′... são figuras iguais entre si (19, def. I). Por conseqüência (Teor. I):

Cor. 1. — *A linha oposta a uma recta é uma linha recta: A paralela a uma recta é uma linha recta* (30, Prop. I).

Cor. 2. — *Segmentos de paralelas compreendidos entre paralelas são iguais.*

Sejam (A A′) (B B′) os segmentos das paralelas *s*, *s′* compreendidos entre as paralelas *r*, *r′* (fig. 32). Se O é o meio da transversal comum (A B′), dirigindo por B a transversal B O, o ponto A′ oposto ao ponto B existe sôbre *r′* e pertence também à recta *s′* paralela a *s*: logo os segmentos (A A′), (B B′) são opostos, e também os segmentos (A B), (A′ B′) determinados pelos extremos expostos são iguais: (A B) = (A′ B′), (A A′) = (B B′).

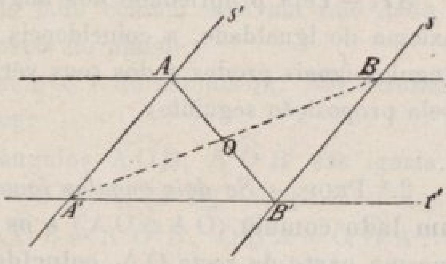


Fig. 32

Cor. 3. — *Todos os feixes de rectas do plano são iguais entre si.*

Se S e S′ são os centros de dois feixes do plano e O é o ponto médio do segmento (S S′), toda a recta *r* do feixe de centro S′ tem uma recta *r′* oposta (paralela) em relação ao ponto O e que passa por S′; essa recta *r′* é única e pertence ao feixe S′ (32, Teor. I, cor. 3): Os dois feixes são figuras opostas, e portanto todos os feixes do plano são figuras iguais (19, II).

Cor. 4. — *Os ângulos* (e feixes) *razos são iguais entre si. As duas partes opostas de um plano em relação a uma recta são iguais entre si:* a recta divide o plano em dois semiplanos iguais, por serem figuras opostas (em relação a qualquer ponto da recta, 34, def. I).

Se dois ângulos razos pertencem a semiplanos opostos, são iguais (Teor. II); se estão situados em feixes de raios distintos, fazendo coincidir os lados e o vértice, os seus raios coincidem todos se ficam situados na mesma parte do plano; ou pertencem a partes opostas, e como figuras opostas são iguais entre si.

37. — Pela propriedade dos ângulos iguais e segundo o axioma de igualdade, a coincidencia dos 2.^{os} lados de dois ângulos iguais produz a dos seus vértices, o que se exprime pela proposição seguinte:

2.ª Prop. — *Se dois ângulos iguais* $A\widehat{O}B$, $A'\widehat{O'}B'$ *teem* **um lado comum** ($\overline{O}A \equiv \overline{O}A'$) **e os segundos existem da mesma parte da** recta OA, **coincidem:** Portanto:

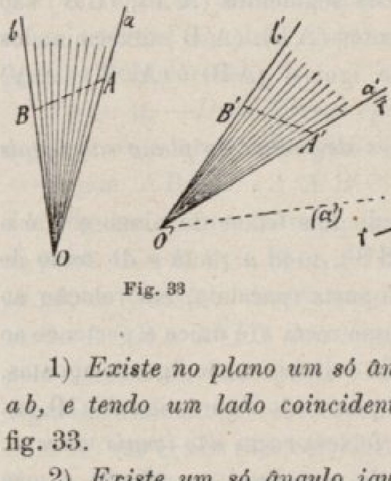


Fig. 33

Fig. 34

1) *Existe no plano um só ângulo igual a um ângulo* dado ab, *e tendo um lado coincidente com um raio* $\overline{r}$ *do plano*, fig. 33.

2) *Existe um só ângulo igual a um ângulo dado, tendo um lado* (o 1.º por ex.) *sôbre uma recta* r *de modo que o outro lado passe por um ponto* P *do plano*, isto é, **existe um só raio que passa por** P **e é o 2.º lado do ângulo.**

Def. i. — Êste ângulo define-se por um dos símbolos: $\widehat{rP}$, ou $\widehat{Pr} \equiv A\widehat{O}B = ab$, segundo o ponto P pertence ao 2.º ou ao 1.º lado do ângulo, fig. **34**.

O ponto P pode estar sobre a recta r e nesta hipótese P é o vértice do ângulo. É, fig. 34, $\widehat{rP} = A\widehat{O}P$, e $\widehat{Pr} = P\widehat{O'}A$.

Obs. — Dado um ângulo ab, existem no plano dois ângulos iguais a ab, tendo um lado comum com um raio dado e situados em partes opostas do plano.

Pôsto isto, das Def. i, ii e do axioma (n.º 35) resultam as proposições seguintes:

Cor. 1. — Se os ângulos $A\widehat{O}B$, $A'\widehat{O'}B'$ são iguais e $(O'A') = (OA)$, $(O'B') = OB)$, é: $(A'B') = (AB)$.

Teor. i. — Se: $A\widehat{O}B = A'\widehat{O'}B'$, $O\widehat{B}A = O'\widehat{B'}A'$, e $(OB) = (O'B')$, é: $(OA) = (O'A')$, $(AB) = (A'B')$.

As rectas OA e BA interceptam-se em A; no semiplano $\overline{O'B'}A'$ existe, 1), um só raio $\overline{O'}A'$ tendo a origem em O' tal que $A'\widehat{O'}B' = A\widehat{O}B$, e um só raio $\overline{B'}A'$ do ângulo $O'\widehat{B'}A' = O\widehat{B}A$, fig. 35; sobrepondo os lados $\overline{O}B$, $\overline{O'}B'$ e dois pontos dos lados $\overline{O}A$, $\overline{O'}A'$, os ângulos $A\widehat{O}B$ e $A'\widehat{O'}B'$, e $(OB) = (O'B')$ coincidem; os ângulos $O\widehat{B}A$, $O'\widehat{B'}A'$ teem um lado comum $(OB \equiv O'B')$ e os 2.ºs lados BA, $B'A'$ no mesmo semiplano, e portanto coincidem (2.ª *Prop.*), A e A' sobrepõem-se: $(AB) = (A'B')$ e $(OA) = (O'A')$.

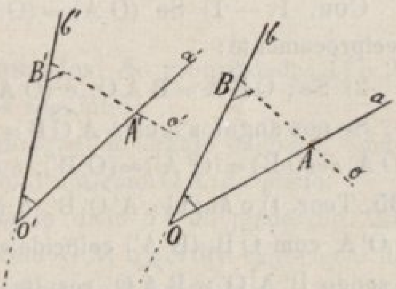


Fig. 35

Teor. ii. — Se $A\widehat{O}B = A'\widehat{O'}B'$, e $O\widehat{B}A = O'\widehat{B'}A'$, e são iguais os segmentos transversais $(AB) = (A'B')$, é: $(OA) = (O'A')$, $(OB) = (O'B')$.

Com efeito, sobrepondo os raios $\overline{B}A$, $\overline{B'}A'$, fig. 36, e dois pontos dos lados $\overline{B}O$, $\overline{B'}O'$, os vértices B, B' e os segmentos $(BA) \equiv (B'A')$ coincidem, e tendo $A\widehat{O}B$ e $A'\widehat{O'}B'$ os 2.^{os} lados $\overline{O}B$, $\overline{O'}B'$ sobrepostos e os 1.^{os} lados $\overline{O}A$, $\overline{O'}A'$ um ponto comum $A \equiv A'$, coincidem (36, Prop.) e portanto: $(OA) = (O'A')$, $(OB) = (O'B')$.

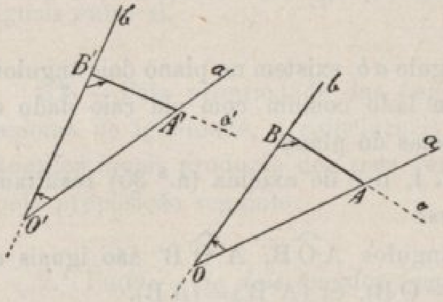


Fig. 36

Nas hipóteses dos teoremas anteriores é: $B\widehat{A}O = B'\widehat{A'}O'$.

Cor. 1. — 1) Se $(OA) = (OB)$, é: $O\widehat{B}A = B\widehat{A}O$. E recíprocamente:

2) Se: $O\widehat{B}A = B\widehat{A}O$, é $(OA) = (OB)$.

Se nos ângulos iguais $A\widehat{O}B = A'\widehat{O'}B'$, fig. 35, tomarmos $(OA) = (OB) = (O'A') = (O'B')$, é $(BA) = (B'A')$ e invertendo (35, Teor. I) o ângulo $A'\widehat{O'}B'$, o raio $\overline{O'}B'$ coincide com $\overline{O}A$ e $\overline{O'}A'$ com $\overline{O}B$, $(B'A')$ coincide com (AB), $O\widehat{B}A \equiv B'\widehat{A'}O'$, e sendo $B'\widehat{A'}O' = B\widehat{A}O$, resulta: $O\widehat{B}A = B\widehat{A}O$.

(35, T. I., $O\widehat{B}A \equiv -O'\widehat{A'}B' = B'\widehat{A'}O' \equiv B\widehat{A}O$).

Como o ponto B' coincide com A e A' com B, os pares de pontos (A, B) e (B', A') coincidem, e de $(B', A') \equiv (B, A)$ resulta (15, 3): $(A, B) = (B, A)$, d'onde:

Cor. 2. — *O par de pontos* (A, B) *é igual ao seu oposto* (B, A); todo o segmento rectilíneo (AB) é invertível (16, I).

A def. I do n.º 35 e as proposições agora demonstrados sôbre igualdade de ângulos (cor. 1, Teor I, II, cor. 1) com os casos particulares correspondentes, enunciam-se no grupo seguinte:

1.º — Se: (O A) = (O′ A′), (O B) = (O′B′), e (A B) = (A′ B′), *os ângulos* $A\widehat{O}B$ e $A'\widehat{O'}B'$ *são iguais:* $A\widehat{O}B = A'\widehat{O'}B'$.

2.º — *Se os ângulos* $A\widehat{O}B$ e $A'\widehat{O'}B'$ *são iguais* e (O A) = (O′ A′), (O B) = (O′ B′), é: (A B) = (A′ B′).

3.º — *Se é* $A\widehat{O}B = A'\widehat{O'}B'$, $O\widehat{B}A = O'\widehat{B'}A'$, e (O B) = (O′B′), é: (O A) = (O′ A′) (A B) = (A′ B′),

1) *Se:* (O A) = (O B), é: $O\widehat{B}A = B\widehat{A}O$; e inversamente:

1′) *se:* $O\widehat{B}A = B\widehat{A}O$, é: (O A) = (O B).

2) *Se:* (O A) = (O B) = (A B), é: $O\widehat{B}A = B\widehat{A}O = A\widehat{O}B$; e inversamente:

2′) *se:* $A\widehat{O}B = O\widehat{B}A = B\widehat{A}O$, é: (O A) = (O B) = (A B).

4.º — Se: $A\widehat{O}B = A'\widehat{O'}B'$, $O\widehat{B}A = O'\widehat{B'}A'$, e são iguais os segmentos transversais (A B) = (A′ B′), *resulta que:* (O A) = (O′ A′), (O B) = (O′ B′).

38. — Construção de ângulos: Às propriedades 1) e 2) correspondem os problêmas seguintes:

I) — Construir um ângulo igual ao ângulo dado *a b*, tendo para 1.º lado (ou 2.º, por ex.) um raio $\overline{O}A$ do plano.

Fazendo resvalar o ângulo dado *a b* no plano (fig. 33) até o 1.º lado *a* coincidir com $\overline{O}A$, o vértice O (origem do raio dado) e um ponto do outro lado *b* determinam o 2.º lado do ângulo $A\widehat{O}B$.

II) — Construir um ângulo igual a *a b*, tendo um lado (o 1.º por ex.,) sôbre uma recta *r* de modo que o outro lado do ângulo passe por um ponto P do plano (37, 2), def. I).

Faz-se resvalar o lado *a* do ângulo dado *a b* sôbre a recta *r*, fig. 34, até que o lado *b* passe pelo ponto P.

Esta operação é sempre possível; de facto, fazendo resvalar o feixe (*a b*) no semiplano $\overline{r}P$, o raio *b* intercepta

(32, Teor. IV) a paralela à recta r dirigida por P, e de todos os raios de $\overline{r}$P existe um só $\overline{O}$P que é o 2.º lado do ângulo $\widehat{r\mathrm{P}}$ (Cf., n.º 42, Teor. I).

Se o ponto P existe sôbre a recta r, a solução é a do problema anterior I); os ângulos podem ser côncavos.

Obs. — Para construir feixes ou ângulos convexos sem designar a ordem ou sentido dos lados, é necessário indicar o semiplano.

Teor. I. — *Por dois pontos distintos* $\mathrm{P} \neq \mathrm{P}'$ *do plano podem passar, respectivamente, os lados de um ângulo dado.*

Dados dois pontos distintos P e P', fig. 37, e um ângulo ab (ou ângulo de duas rectas r, s), dirigindo por P uma recta r, existe (*37, 2.ª Prop.* 2)) um só raio $\overline{O}$P' que é o segundo lado do ângulo $\widehat{r\mathrm{P}} = ab$: fazendo resvalar o ângulo dado ab no plano de modo que o raio a passe por P, e o lado b por P', resulta o ângulo $\mathrm{P}\widehat{\mathrm{O}}\mathrm{P}' = ab$; se um dos lados coincide com $\overline{\mathrm{P}'}$P (ou $\overline{\mathrm{P}}$P'), o vértice do ângulo $a'b' = ab$ (ou $a''b''$) coincide com o ponto P' (ou P).

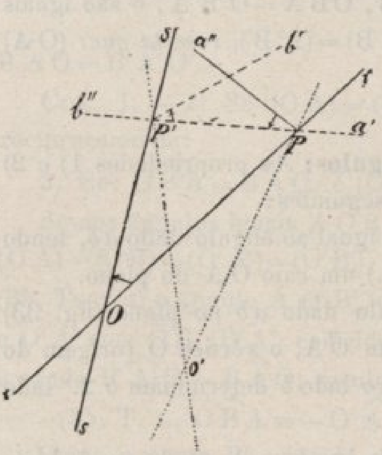


Fig. 37

E pelos pontos P, P' passam duas rectas r, s — os lados do ângulo dado de duas rectas $\widehat{rs}$.

Def. I. — **O ângulo de duas rectas** que passam por dois pontos P, P' denota-se pelo símbolo: $\widehat{\mathrm{P}\mathrm{P}'} \equiv ab$.

O ângulo de duas rectas r, s denota-se, pois, segundo os casos (35, def. II; 37, def. I), pelos símbolos: $\widehat{rs}$, $\widehat{r\mathrm{P}}$ e $\widehat{\mathrm{P}\mathrm{P}'}$.

39. — Um raio interior a um ângulo e tendo a origem no seu vértice, divide-o em duas partes distintas (34, T. II, cor. 1, 2).

Diz-se que um ângulo ab é **maior** que o ângulo $a'b'$ se êste é igual a parte de ab: E o ângulo $a'b'$ diz-se **menor** que o primeiro ab: é, $ab > a'b'$, $a'b' < ab$. Um ângulo é maior que uma sua parte (26, def. I).

Def. I. — Dois *ângulos* convexos $A\widehat{O}B$ e $B\widehat{O}C$ do plano dizem-se *consecutivos:* o 2.º lado de um coincide com o 1.º lado do outro; teem um lado comum $\overline{O}B$, e os outros lados estão em partes opostas em relação a $\overline{O}B$. Ex., $A\widehat{O}B$ e $B\widehat{O}A'$, fig. 30.

Def. II. — **Adicionar** dois ângulos $L\widehat{O}M$, $N\widehat{O}P$ significa construir dois ângulos consecutivos e iguais àqueles: $ab = L\widehat{O}M$, $bc = N\widehat{O}P$, e determinar o ângulo ac, que se diz a **soma** dos dois ângulos dados, e é: $ab + bc = ac$.

O ângulo ab diz-se **diferença** dos dois ângulos ac e bc, e o primeiro é maior que o segundo, $ac > bc$.

Def. III. — Se a soma de dois ou mais ângulos $A\widehat{O}B$, $C\widehat{O}D$, $E\widehat{O}F, \ldots$ é tal que um ou mais ângulos aditivos (ou parte de um dêles) se sobrepõem duas ou mais vezes no plano, os feixes sobrepostos e os seus raios pertencem a dois ou mais feixes de raios ou ângulos giros distintos e sobrepostos.

Diz-se que o *ângulo-soma* é *composto* de um, dois, três, .. *n giros*, $(\pi)2$, e *de um ângulo* ab, côncavo ou convexo: $A\widehat{O}B + C\widehat{O}D + E\widehat{O}F + \ldots = (\pi)2n + ab$. $(n = 1, 2, 3, \ldots)$

Dois raios $\overline{O}A$, $\overline{O}B$ com origem comum dividem o plano em dois feixes (ab), (ba), um côncavo e outro convexo, cuja soma é um ângulo giro:

$$(ab) + (ba) = (\pi)2.$$

Os teoremas sobre operações de segmentos rectilínios (§ 6) demonstram-se e aplicam-se ainda à adição e subtracção de ângulos.

Obs.: — 1) **Pràticamente** considera-se o ângulo razo **igual à soma** de 180 ângulos iguais ou submúltiplos $(\pi)\frac{1}{180}$ de (π): diz-se *gráu* o ângulo igual a 180ma *parte* do ângulo razo, e representa-se por: 1^o. Chama-se *minuto sexagésimal* ao ângulo igual à sexagésima parte de um grau, e denota-se por $1'$; e diz-se *segundo sexagésimal* o ângulo igual à 60ma parte de um minuto, e denota-se por: $1''$.

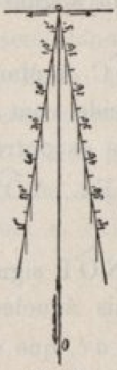


Fig. 38

$(\pi) = 180^o$, $1^o = 60'$, $1' = 60''$.

2) Chama-se *grado* o ângulo igual ao submúltiplo $(\pi)\frac{1}{200}$ ou 200ma *parte* do ângulo razo, e denota-se *um grado* por 1^g. *Minuto centésimal* é o ângulo igual à centésima parte de um grado, e denota-se por: $1^{\backslash}$: *segundo centésimal* é 100ma parte de $1^{\backslash}$ e indíca-se por: $1^{\backslash\backslash}$.

Nesta designação decimal dos ângulos é pois: $(\pi) = 200^g$; $1^g = 100^{\backslash} = 10{:}000^{\backslash\backslash}$; $1^{\backslash} = 100^{\backslash\backslash}$. Ou: $1^{\backslash} = 0^g{,}01$: $1^{\backslash} = 0^g{,}0001$.

Os ângulos designam-se, na prática, por meio de transferidores (transparentes) em graus ou em grados (com um *nónio*, nas medidas de grande rigor) Pode-se construir (e medir) ângulos com a aproximação de $10'$ até $1'$ com o auxilio de um **ângulo de diferenças**, fig. 38, que gira sôbre o plano em tôrno do vértice, como dispositivo do transferidor.

40. — Def. I (teor.) — *Existe uma recta única que divide um ângulo* a b *em duas partes iguais;* essa recta diz-se **bissectriz** do ângulo $a\,b$, e passa pelo vértice O.

Seja $a\,b$ o ângulo de vértice O, e A, B dois pontos dos lados, tais que: $(\mathrm{O\,A}) = (\mathrm{O\,B})$, e M *o meio do segmento* (A B), fig. 39. O raio $\overline{\mathrm{O}}\mathrm{M}$ divide o feixe $(a\,b)$ em dois ângulos iguais $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{O}}\mathrm{M} = \mathrm{M}\widehat{\mathrm{O}}\mathrm{B}$ (35, Def. I), e divide ao meio os segmentos $(\mathrm{A'B'})$, $(\mathrm{A''B''})$.... idênticos a (A B), nos pontos $\mathrm{M'}, \mathrm{M''}, \ldots$ e estes são únicos (29, def. I).

E inversamente, construindo os meios dos segmentos

(A′B′), (A″B″),... estes pontos médios coincidem com os pontos M′, M″,.. de O M: portanto as rectas O M, O M′,... coincidem, os pontos médios de (A′B′), (A″B″),.. . pertencem à recta única O M, **bissectriz** do ângulo $a\,b = (\mathrm{A}\widehat{\mathrm{O}}\mathrm{M})\,2$.

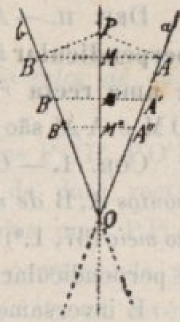


Fig. 39

Cor. 1. — Os lados de um ângulo existem em partes opostas do plano em relação à sua bissectriz (34 Teor. II cor. I).

Cor. 2. — *Os pontos da bissectriz são equidistantes de dois pontos* A, B *dos lados do ângulo e tais que* (O A) = (O B):

E inversamente, os pontos M, M′, M″,... interiores a um feixe e equidistantes, (37, 1.º) de dois pontos A, B dos lados e a igual distancia do vértice O ($\overline{\mathrm{O}}\,\mathrm{A} = \overline{\mathrm{O}}\,\mathrm{B}$), pertencem à bissectriz.

A bissectriz do ângulo razo é única.

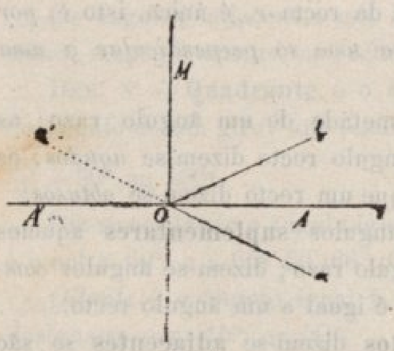


Fig. 40

Se $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{O}}\mathrm{A}'$ é um ângulo razo, faça-se coincidir (fig. 40) a recta A A′ com a bissectriz do ângulo $a\,b$: O raio a', oposto ao raio a, e o raio b existem na mesma parte do plano a respeito de A A′ (cor. 1), e (36, T. II) é $a'\widehat{\mathrm{O}}\mathrm{A}' = \mathrm{A}\widehat{\mathrm{O}}b$: se O M é a bissectriz do ângulo $b\,a'$, é $b\widehat{\mathrm{O}}\mathrm{M} = \mathrm{M}\widehat{\mathrm{O}}a'$, e sendo estas partes correspondentes nos ângulos A O M e M O A′, estes ângulos são iguais,

$$\mathrm{A}\widehat{\mathrm{O}}\mathrm{M} = \mathrm{M}\widehat{\mathrm{O}}\mathrm{A}' = (\pi)\,\frac{1}{2},$$

O M divide o ângulo razo em dois ângulos iguais, é portanto a sua única bissectriz.

Def. ii. — A bissectriz O M de um ângulo razo diz-se **perpendicular** à recta A A′ dos seus lados; **a perpendicular a uma recta** *r*, tirada por um dos seus pontos **é única**: O M e A A′ são *rectas perpendiculares*.

Cor. 1. — *Os pontos de um plano equidistantes de dois pontos* A, B *de uma recta* r, existem (def. i) na *perpendicular ao meio* (37, 1.°) *do segmento* (A B); a bissectriz de *a b* (fig. 39) é perpendicular a A B e divide (A B) ao meio.

E inversamente:

Cor. 2. — *Os pontos da perpendicular ao meio de um segmento* (A B) *são equidistantes de* A e B.

Se (M A) = (M A′) e O é o ponto médio do segmento (A A′), (O A) = (O A′), resulta (35, def. i): $A\widehat{O}M = M\widehat{O}A'$. A recta M O é a bissectriz do ângulo razo A O A′ e a perpendicular dirigida pelo ponto M à recta A A′ ou *r*:

Cor. 3. — A perpendicular a uma recta *r*, tirada por um ponto M do plano, fora da recta *r*, é única, isto é, *por um ponto* M *do plano passa uma só perpendicular a uma recta* r.

Diz-se ângulo *recto* a metade de um ângulo razo; os ângulos menores que um ângulo recto dizem-se *agudos;* os ângulos convexos maiores que um recto dizem-se *obtusos*.

Def. iii. — Dizem-se ângulos **suplementares** aqueles cuja soma é igual a um ângulo razo; dizem-se ângulos *complementares*, se a sua soma é igual a um ângulo recto.

Def. iv. — **Dois ângulos** dizem-se **adjacentes** se são consecutivos e suplementares: *os lados* $\overline{O}$ A, $\overline{O}$ A′ *não comuns* de dois ângulos adjacentes (ex., $A\widehat{O}b$ e $b\widehat{O}A'$) *são raios opostos*, e a sua soma é igual a um ângulo razo.

Se duas rectas *r*, *s* se interceptam, formam os dois **ângulos** de duas rectas: $\widehat{rs}$ e $\widehat{sr}$; e estes ângulos dizem-se ainda

adjacentes *por uma das rectas r* ou *s*, e gozam da propriedade:

$$\widehat{rs}+\widehat{sr}=(\pi):$$

Cor. 1. — *A soma de dois ângulos adjacentes de duas rectas* r, s *é igual a um ângulo razo.*

Pela definição I e notação (n.º 38), os feixes $P\widehat{O}P'$, $P\widehat{O'}P'$ da *fig. 37* pertencem aos ângulos iguais de duas rectas r, s que passam pelos pontos P, P', definidos por: $\widehat{PP'}=a'b'$, e $\widehat{P'P}=a'a''=b'b''$; o feixe $P\widehat{P'}b'$ corresponde ao ângulo constante de duas rectas: $\widehat{PP'}=\text{inv.}(a'b')$ com o vértice em P'; e $a''\widehat{P}P'=a''b''$ é a posição do mesmo ângulo $\widehat{PP'}$, tendo o seu vértice coincidente com o primeiro ponto P.

Os dois ângulos $\widehat{PP'}$, $\widehat{P'P}$ *são suplementares:*

$$\widehat{PP'}=\text{inv.}\ (a'b'),\ \widehat{PP'}+\widehat{P'P}=(\pi).$$

Cor. 2. — *As bissectrizes de dois ângulos adjacentes são prependiculares.*

Os ângulos adjacentes ab, ba', fig. 40, tem por bissectrizes, respectivamente, as rectas perpendiculares r e OM.

Def. v. — **Quadrante** é o ângulo igual à *quarta parte* do ângulo de um giro: um quadrante é igual ao ângulo recto $\frac{(\pi)}{2}=90^{o}$ ou 100^{g}.

Diz-se **sextante** o ângulo igual à *sexta parte* de um giro: é igual a 60^{o}, e a $66^{g}\ 66'\ 66''$,(6). [66^{g},66667].

Oitante é o ângulo igual à *oitava parte* de um giro, e designa-se por: 45^{o}, ou 50^{g}.

Intersecção de rectas.
Paralelas. — Movimento de translação rectilínea

41. — Def. i. — Se uma recta s (ou XX') intercepta duas rectas r, r' do plano respectivamente em os pontos A, B, fig. 41, a recta transversal s divide r e r' em os raios opostos $\overline{A}1$ e $\overline{A}1'$, $\overline{B}2$ e $\overline{B}2'$: 1) Os dois raios $\overline{A}1$, $\overline{B}2$ (ou os seus opostos $\overline{A}1'$, $\overline{B}2'$) existentes na mesma parte do plano em relação à transversal s, dizem-se **correspondentes** do mesmo lado de AB; 2) os dois raios $\overline{A}1$, $\overline{B}2'$ (ou $\overline{A}1'$, $\overline{B}2$), pertencendo a semiplanos opostos pela origem comum s, dizem-se **alternos** ou opostos; 3) os raios $\overline{A}B$ e $\overline{B}A$ da transversal s

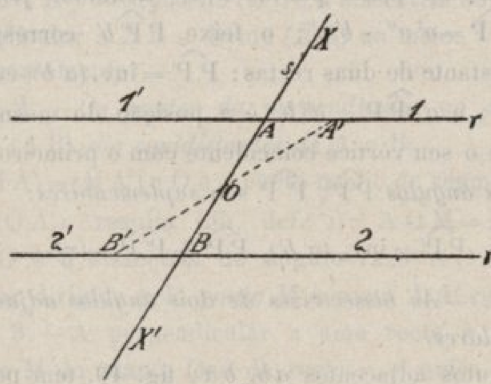


Fig. 41

dizem-se **internos**, e os raios AX e BX', opostos respectivamente aqueles, dizem-se **externos**.

A estas designações dos raios de r, r' e s correspondem os nomes dos oito ângulos convexos que aqueles raios definem no plano:

Def. II. — 1) Os ângulos $X\widehat{A}1'$, $X\widehat{B}2'$ dizem-se **correspondentes;** os pares de ângulos $X'\widehat{A}1$ e $X'\widehat{B}2$; $1\widehat{A}X$ e $2\widehat{B}X, \ldots$ são correspondentes.

2) os ângulos $B\widehat{A}1$, $2\widehat{B}A$ dizem **internos** *do mesmo lado;* dois ângulos tais como $X\widehat{A}1'$, $2'\widehat{B}X'$ dizem-se **externos** *do mesmo lado* da transversal s.

3) Dizem-se **alternos internos** dois ângulos tais como:

$B\widehat{A}1$, $A\widehat{B}2'$; $2\widehat{B}A$, $1'\widehat{A}B$; dizem-se *alternos externos* dois ângulos tais como $X'\widehat{B}2$, $X\widehat{A}1'$; $1\widehat{A}X$, $2'\widehat{B}X'$.

Se as rectas r, r' são paralelas, dois ângulos alternos internos, ou alternos externos, são figuras opostas em relação ao meio do segmento transversal (A B), e estes ângulos dizem-se *opostos* (30, def. I II); portanto (36, Teor. II):

Cor. 1. — *Se uma recta* s *intercepta duas paralelas* r, r′, *os ângulos alternos internos* (e alternos externos) *são iguais entre si.*

Teor. I. — *Se duas rectas paralelas* r, r′ *são interceptadas por uma transversal, os ângulos: alternos internos* (ou externos), *e os ângulos correspondentes são iguais;* os ângulos internos, ou externos, da mesma parte da transversal são suplementares.

I′ — E inversamente: *Duas rectas* r, r′ do plano *são paralelas* se uma *transversal as intercepta segundo ângulos alternos internos (ou externos) iguais, ou correspondentes iguais entre si;* ou se os ângulos internos (e externos) da mesma parte da transversal são suplementares.

Sejam (fig. 41) os ângulos alternos internos iguais (cor. 1) $2\widehat{B}A = 1'\widehat{A}B$. Os ângulos $1'\widehat{A}B$ e $1\widehat{A}X$ opostos pelo vértice são iguais, e portanto os ângulos correspondentes $1\widehat{A}X$ e $2\widehat{B}X$ (ou $2\widehat{B}A$) são iguais: $1\widehat{A}X = 2\widehat{B}X$.

E sendo adjacentes os ângulos $B\widehat{A}1$ e $1\widehat{A}X$, resulta que os ângulos $B\widehat{A}1$ e $2\widehat{B}A$, internos do mesmo lado de A B, são suplementares: $B\widehat{A}1 + 2\widehat{B}A = (\pi)$.

Inversamente: Se os ângulos alternos internos $B\widehat{A}1$, $A\widehat{B}2'$ são iguais, seja A′B′ uma nova transversal das rectas r, r' tirada pelo meio O do segmento transversal (A B): sendo, pois, $(OA) = (OB)$, $B\widehat{A}1 = A\widehat{B}2'$ e $A'\widehat{O}A = B'\widehat{O}B$ resulta (37, Teor. I) que: $(OA') = (OB')$ e portanto as rectas r, r' são paralelas.

TEOR. II. — *As rectas* r', r'', r''', .. *paralelas a uma recta* r *são entre si paralelas.*

Pois que cada uma delas e a recta r formam com uma transversal comum s que a todas intercepta (32, Teor. IV, cor. 1), ângulos correspondentes iguais entre si.

COR. 1. — *As perpendiculares a uma recta*, pertencentes a um plano, *são rectas paralelas.*

DEF. I'. — Os *raios* correspondentes $\overline{A}1$, $\overline{B}2$ de duas rectas paralelas r, r', interceptadas por uma transversal s, dizem-se *paralelos da mesma direcção;* e os raios alternos $\overline{A}1$, $\overline{B}2'$ dizem-se **paralelos de direcções opostas,** ou (30) simplesmente **opostos.**

TEOR. III. — *Se dois ângulos teem os lados paralelos da mesma direcção, são iguais entre si.* Dois ângulos são suplementares, se o 1.º lado de um e o 2.º do outro teem a mesma direcção, e os restantes lados são opostos entre si.

Sejam ab e $a'b'$ dois ângulos de lados a e a', b e b' respectivamente opostos; os raios a e a' são opostos, e os raios b e b' são também em relação ao mesmo ponto do plano (30, def. I, axi.), e portanto os ângulos ab, $a'b'$ são figuras opostas em relação ao ponto médio M do segmento dos seus vértices, e (cor. 1): $ab = a'b'$.

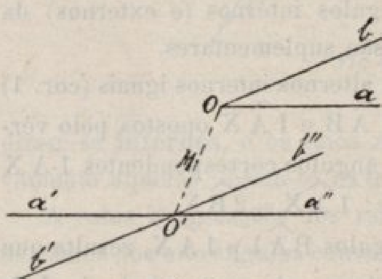


Fig. 42

Se os lados de dois ângulos ab, $a''b''$ são paralelos da mesma direcção, o ânguo $a'b'$, oposto pelo vértice a $a''b''$, é oposto ao ângulo ab, e portanto: $a''b'' = a'b' = ab$, dois ângulos de lados paralelos e da mesma direcção são iguais.

Quando o 1.º lado de um ângulo é paralelo da mesma direcção do 2.º lado de outro ângulo, e o 2.º lado daquele é oposto ao 1.º do segundo ângulo, os dois ângulos são suplementares.

TEOR. IV. — *Duas rectas* r, *s de um plano interceptam-se na parte do plano em que formam com uma recta transversal* t, *ângulos internos (dessa parte de* t) *cuja soma é menor que um ângulo razo.*

IV′. — Inversamente: Se duas rectas r, s se interceptam, formam com uma transversal t e na parte do plano em que se interceptam, ângulos internos cuja soma é menor que um ângulo razo.

Demonstra-se esta proposição — «postulado de Euclides» ou axioma XII dos seus *Elementos* — no n.º 43.

42. — DEF. I. — **Rectas paralelas por translação.** — Se uma recta s_1 de um plano móvel escorrega sôbre uma recta s do plano fixo, diz-se **translação rectilínea** o movimento do plano e de qualquer figura do plano móvel. A recta s_1 diz-se *recta móvel de escorregamento.*

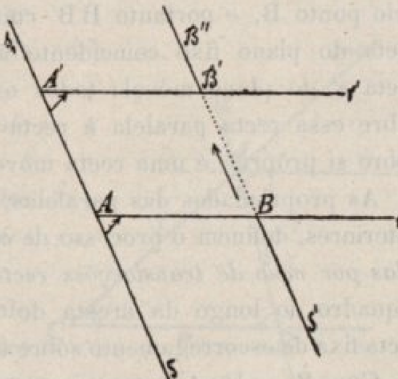


Fig. 43

TEOR. I. — *Toda a recta* r *de um plano em translação move-se paralelamente a si própria.*

Se s é a *recta de escorregamento* (22, def. I′) do plano móvel (fig. 43) e r é uma recta deste plano, as suas posições $r', r'', \ldots$ são paralelas à recta r, pois que os ângulos $rs, r's', \ldots$ são iguais (Teor. I′).

Teor. ii. — **Um ponto de um plano em translação descreve sôbre o plano *fixo* uma recta paralela à recta de escorregamento.**

Com efeito, se s é a recta de escorregamento do plano e r' é a nova posição da recta r que intercepta s (fig. 43), as rectas $r, r', r'', \ldots$ são paralelas (Teor. i). Se B$'$ é a nova posição de ponto móvel B pertencente à recta r, o segmento (A B) de r é invariável; é pois: $(AB) = (A'B')$, AB' e BA' interceptam-se (34, teor. ii) em O, $B\widehat{A}B' = A'\widehat{B'}A$ e $B'\widehat{O}A' = A\widehat{O}B$ (fig, 32): logo (37, Teor. ii) $(OA) = (OB')$, $(OA') = (OB)$, os estados $B', B'' \ldots$ do ponto móvel B pertecem à recta s' paralela à recta s de escorregamento, tirada pelo ponto B.

Cor 1. — *Toda a recta paralela à recta de escorregamento* move-se sôbre si própria, e *é recta de escorregamento.*

De facto se s' é uma paralela à recta s de escorregamento do plano, (fig. 43), qualquer ponto B da recta s' descreve sôbre o plano fixo uma paralela B B$'$ à recta s, que passa pelo ponto B, e portanto B B$'$ coincide (30, cor. 1) com a recta do plano fixo coincidente inicialmente (5, ii) com a recta s' do plano móvel: todos os pontos de s' movem-se sôbre essa recta paralela à recta s, logo a recta s' resvala sôbre si própria, é uma recta móvel de escorregamento.

As propriedades das paralelas, enunciadas nos teoremas anteriores, definem o processo de *construcção de rectas paralelas por meio de translacções rectilíneas* de uma lamina ou esquadro ao longo da aresta de uma régua, que realiza a recta fixa de escorregamento sôbre o plano. Por conseqüência:

Cor. 2. — *De uma translação rectilínia de uma recta resulta uma recta paralela.*

Polígonos. Propriedades do triângulo

43. — Def. i. — Diz-se *triângulo* a figura de três segmentos rectilínios (A B), (B C), (C A) que unem três pontos

A, B, C — os *vértices*, e (A B), (B C), (C A) os *lados* do triângulo; cada vértice diz-se *oposto* ao lado dos outros vértices.

Os três ângulos convexos $A\widehat{B}C$, $B\widehat{C}A$, $C\widehat{A}B$ formados por cada par de lados (e tendo cada um o lado oposto ao vértice no interior) dizem-se *ângulos* do triângulo; e para simplificar designamo-los, como feixes, apenas pelos seus vértices $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$, sem alterar a ordem dos seus lados, quando não resulte confusão possível.

Def. II. — 1) **Ângulo externo** de um triângulo é o ângulo adjacente a um ângulo interno; por ex. o ângulo $B\widehat{A}C'$ formado pelo lado A B e o prolongamento A C′ de outro lado (A C) é externo. 2) Diz-se **ponto interior** de um triângulo qualquer ponto interior a um segmento rectilínio tendo os extremos sobre dois lados. Diz se também triângulo a parte do plano formada pelos pontos interiores à linha A B C A. 3) Um triângulo diz-se *isosceles* se tem dois lados iguais, e *equilátero* se os três lados são iguais entre si.

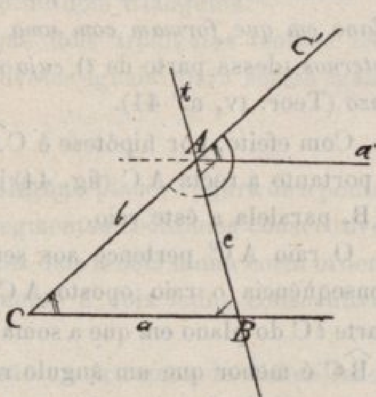


Fig. 44

Teor. I. — *Um ângulo externo de um triângulo é igual à soma dos ângulos internos dos outros dois vértices.*

Se A B C é o triângulo dado, dirigindo pelo vértice A o raio a' paralelo ao lado C B (fig. 44) e na direcção de C B, o raio a' é interceptado pelas rectas A B e A C (32, Teor. IV) e é distinto destas rectas; como a' não intercepta o segmento paralelo (C B), a' é exterior ao ângulo $C\widehat{A}B$, e existindo este raio no mesmo semiplano $\overline{CAB}$ de $C\widehat{A}B$, pertence ao ângulo externo $B\widehat{A}C'$ adjacente a $C\widehat{A}B$: a' é interior a $B\widehat{A}C'$ e divide-o (34, Teor. II, cor. 1) em os ângulos consecutivos $B\widehat{A}a'$ e $a'\widehat{A}C'$. Os ângulos $B\widehat{C}A$, $a'\widehat{A}C'$ são correspondentes, e $A\widehat{B}C$, $B\widehat{A}a'$ são alternos internos (41, Teor. I): $B\widehat{C}A = a'\widehat{A}C'$, $A\widehat{B}C = B\widehat{A}a'$.

Portanto, $\quad A\widehat{B}C + B\widehat{C}A = BAa' + a'\widehat{A}C' = B\widehat{A}C'$,

o ângulo externo $B\widehat{A}C'$ é igual à soma dos ângulos internos opostos $A\widehat{B}C$, $B\widehat{C}A$.

Cor. 1. — *A soma dos ângulos de um triângulo é igual a um ângulo razo.*

Os ângulos $C\widehat{A}B$, $B\widehat{A}C'$ são adjacentes, donde resulta que:

$$B\widehat{A}C' + C\widehat{A}B = A\widehat{B}C + B\widehat{C}A + C\widehat{A}B = (\pi),$$

os três ângulos de um triângulo são suplementares.

Duas rectas r, s *de um plano interceptam-se na parte do plano em que formam com uma recta transversal* t, *ângulos internos* (dessa parte de *t*) *cuja soma é menor que um ângulo razo* (Teor. IV, n.º 41).

Com efeito, por hipótese é $C\widehat{A}B + B\widehat{A}a' (= A\widehat{B}C) < (\pi)$, e portanto a recta AC (fig. 44) intercepta o raio a' e a recta CB, paralela a êste raio.

O raio AC' pertence aos semiplanos $\overline{a'C'}$ e $\overline{tC'}$, e por conseqüência o raio oposto AC intercepta a recta BC na parte $\overline{tC}$ do plano em que a soma dos ângulos internos $C\widehat{A}B$, $A\widehat{B}C$ é menor que um ângulo razo.

Igualdade de triângulos:

Os teoremas do n.º 37, agrupados nas proposições 1.ª, 2.ª, 3.ª, e 4.ª, estabelecem as condições de igualdade de dois triângulos:

1.ª *Dois triângulos são iguais se os três lados de um são* *iguais aos seus correspondentes no outro: se* $(AB) = (A'B')$, $(BC) = (B'C')$, $(CA) = (C'A')$, é: $ABC = A'B'C'$.

2.ª *Se dois triângulos teem dois lados correspondentes e o ângulo por êles formado respectivamente iguais, são iguais.*

3.ª *Se dois triângulos teem dois ângulos correspondentes e o lado dos seus vértices respectivamente iguais, são iguais.*

1) *Em um triângulo isosceles são iguais os ângulos opostos aos lodos iguais.*

1') E inversamente: *Se um triângulo tem dois ângulos iguais, é isosceles.*

2) *Os ângulos de um triângulo equilátero são iguais entre si.*

2') E, *se um triângulo tem os seus ângulos iguais (equiângulo), é equilátero.*

4.ª *Se dois triângulos teem dois ângulos e um lado oposto a um ângulo correspondente, respectivamente iguais, são iguais.*

Um triângulo fica definido por três elementos: *três lados; dois lados e um ângulo; dois ângulos e um lado* (3.º e 4.º), que estabelecem a igualdade de dois triângulos.

Portanto, é suficiente que dois triângulos tenham três dêstes elementos correspondentes iguais, para serem iguais entre si.

44. — Def. i. — Diz-se **polígono** plano, a figura de n pontos (*vértices*) de um plano e n segmentos rectilínios consecutivos ou *lados*, que unem os vértices dois a dois numa certa ordem, e cada vértice pertence sómente a dois lados consecutivos (não em linha recta).

O último e 1.º vértices são os extremos do último lado; e nas construções, quando três vértices consecutivos estão em linha recta, não se considera o vértice compreendido.

2) Dizem-se *ângulos* do polígono ABCDEFA os ângulos (convexos ou côncavos) formados por cada par de lados consecutivos e no sentido do plano.

3) Um polígono diz-se convexo se os seus vértices pertencem à mesma parte do plano em relação à recta de um dos seus lados. O triângulo é um polígono convexo de três lados.

Def. II. — Diz-se *linha poligonal* a figura de n pontos de um plano e $(n-1)$ segmentos rectilínios que os unem dois a dois numa certa ordem; o 1.º e o último pontos são os extremos da linha poligonal, que é uma linha aberta (20, def. III).

Teor. I. — Dois polígonos ou linhas poligonais são iguais se teem todos os lados e ângulos correspondentes iguais, no sentido directo do plano.

Existe no plano um só polígono igual a um polígono dado, tendo sôbre o plano dois vértices correspondentes a dois vértices do polígono igual.

Se dois polígonos (ou linhas poligonais) satisfazem a estas condições de igualdade, são figuras iguais entre si (19, def. I), pois cada par de lados consecutivos e o seu ângulo determinam (2.ª) um terceiro lado igual do seu triângulo em um par de pontos correspondentes, igual nos dois polígonos.

Teor. II. — *Se dois polígonos quaisquer teem os lados e ângulos correspondentes iguais, menos:* 1) dois ângulos e o lado comum (2.ª); ou 2) dois lados consecutivos e o seu ângulo (3.ª), *os polígonos são iguais.*

Os elementos que faltam, respectivamente, nos dois casos, existem implicitamente nos elementos dados, como nas condições 2.ª, 3.ª de igualdade dos triângulos, respectivamente.

Por conseqüência, para construir um polígono igual a outro dado, é suficiente que se conheça os $2n$ lados e ângulos menos três daqueles elementos; um polígono de n vértices é definido por $2n-3$ elementos consecutivos nas condições designadas: 1), 2).

Cor. 1. — *Um polígono* **convexo** *fica definido pelos seus* *lados e ângulos menos:* 1) três ângulos consecutivos (1.ª); 2) dois ângulos e o lado comum (2.ª); ou 3) dois lados consecutivos e o seu ângulo (3.º).

Nota-se sempre nas aplicações do teorema II, que a generalidade do seu enunciado é conseqüência da definição de ângulo, com a significação expressa de designar todos os ângulos do polígono no mesmo sentido do plano: Pode-se construir um polígono igual a outro, dado pelos seus elementos, sem ter êste à vista.

V.

§ 11.

Da circunferência. – O circulo

45. — Os pontos O e A são distintos: $O \neq A$.

Def. I. — Diz-se **circunferência** a sucessão linear de pontos (X) pertencentes a um feixe de raios e equidistantes do seu centro O: $(O, X) = \overline{OA}$.

O segmento rectilíneo (O A) e os segmentos iguais (O X) do feixe de raios, dizem-se **raios** da circunferência de **centro** O.

A circunferência é, pois, uma linha fechada; e os seus segmentos dizem se **arcos de circunferência:**

Das locuções que definem (n.° 9) um ponto móvel, resulta: a circunferência é a *linha descrita por um ponto* A *na rotação do par de pontos* (O, A), *sôbre o plano, em redor do centro* O (9, 2.ª, def. III). Esta propriedade define o processo de construção da circunferência fazendo uso do compasso, cujas pontas, em ligação invariável, realizam o par de pontos (O, A).

Cor. 1. — *Se a circunferência gira no plano em tôrno do seu centro,* **escorrega** *sôbre si propria.*

Def. I'. — Diz-se **círculo** a sucessão linear de raios $(OX) = (OA)$ da circunferência. Os pontos interiores aos raios dizem-se *interiores* à circunferência, e pertencem ao círculo.

Def. ii. — Diz-se **ângulo ao centro** o ângulo formado por dois raios da circunferência; um segmento rectilínio tendo os extremos de um arco, é uma *corda;* e *diâmetro* é toda a corda que passa pelo centro. A corda diz-se *subtensa* ao arco, e dois arcos com os extremos comuns a uma corda *subtendem* a corda.

Def. iii. — 1) Um **arco** diz-se **compreendido entre os lados** *de um ângulo* se os seus pontos são interiores ao ângulo. Sendo a circunferência uma sucessão linear de pontos de um feixe, de raios, um *arco* está *compreendido* entre os lados de um ângulo ao centro, se o 1.° e o 2.° extremos do arco pertencem aos lados correspondentes do ângulo, adoptando-se o mesmo sentido para os arcos e ângulos ao centro.

2) A parte de um círculo, pertencente a um ângulo ao centro diz-se **sector circular**.

Teor. i. — *Toda a recta que passa pelo centro de uma circunferência intercepta-a em dois pontos opostos*, os extremos de um diâmetro.

Se uma recta r passa pelo centro O da circunferência, sôbre r existem (24, 2.ª) sómente dois pontos B, B' tais que $(OB) \equiv (OB') \equiv (OA)$, e como a cada raio pertence um só ponto da circunferência, a recta r intercepta-a sómente em dois pontos opostos B, B', extremos do diâmetro BB'.

Os pontos I do círculo tais que $(OI) < (OA)$ (raio) formam a **parte interior,** e os pontos das rectas r exteriores a (BB'), pertencem à **parte exterior** à circunferência.

Teor. ii. — *As circunferências de raios iguais são iguais.*

Pois que duas delas são figuras opostas em relação ao ponto médio do segmento dos seus centros (36, T. ii, cor. 3).

Teor. iii. — *Ângulos ao centro iguais compreendem na circunferência* (ou em circunferências iguais) *arcos e cordas iguais. E inversamente.*

Se os ângulos ao centro $A\widehat{O}B$, $A'\widehat{O'}B'$ são iguais, os seus feixes e portanto (19, I) os seus arcos compreendidos $\widehat{AB}$, $\widehat{A'B'}$ são iguais, e $(AB)=(A'B')$.

E, se dois arcos $\widehat{AB}$, $\widehat{A'B'}$ são iguais, as suas cordas (AB), $(A'B')$ são iguais e $(OA)=(O'A')=(OB)=(O'B')$: e por conseqüência (37, 1.ª) são iguais os ângulos $A\widehat{O}B$, $A'\widehat{O'}B'$ que os compreendem em circunferências iguais:

Cor. 1. — *A bissectriz de um ângulo ao centro divide o seu arco em dois arcos iguais.*

Def. IV. — Um diâmetro divide a circunferência em dois arcos iguais que se dizem **semicircunferências**, e divide o círculo em duas partes iguais, *semicírculos.*

Diz-se **quadrante** o arco de circunferência compreendido no ângulo ao centro de um quadrante; usa-se as mesmas designações para os arcos e sectores de um *sextante* e um *oitante* (40, def. V).

Cor. 2. — **Dois diâmetros perpendiculares** dividem a circunferência em quatro **quadrantes**.

Teor. IV. — *O diâmetro perpendicular a uma corda, divide ao meio a corda e os arcos que a subtendem* (40, cor. 1).

IV'. — E inversamente: *A perpendicular dirigida pelo meio de uma corda, passa pelo centro da circunferência e pelos meios dos dois arcos que subtendem a corda* (40, cor. 2).

Estas proposições resultam dos cor. 1 e 2 do n.º 40.

46. — Teor. I. — *Por três pontos não pertencentes a uma linha recta passa* **uma só** *circunferência.*

Sejam A, B, C, fig. 45, três pontos não situados em uma linha recta (A B e A C interceptam-se em A, n.^{os} 23 e 32, T. I cor 1), M, M', M'' os meios dos segmentos (A B), (B C), (C A), e M O, M' O', M'' O'' as suas perpendiculares. Da hipótese resulta que as rectas A B, A C se interceptam na parte $\overline{MM''}A$ da recta MM'' (41, Teor. IV) em que $A\widehat{M}M'' + M\widehat{M''}A < (\pi)$; e as suas perpendiculares MO, $M''O''$ formam com a transversal MM'' ângulos internos $O\widehat{M}M'$, $M\widehat{M''}O''$ tais que a sua soma é igual à daqueles: $OMM' + MM''O'' = AMM''\ MM''A < (\pi)$, e portanto as perpendiculares OM e $O''M''$ interceptam-se em um ponto O, equidistante (40, cor. 1) de A, B e A, C: $(OA) = (OB) = (OC)$.

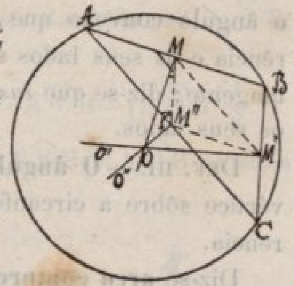


Fig. 45

A perpendicular $M'O'$ ao meio de (BC) passa pelo ponto O, pois que é (40, cor. 2) $(OB) = (OC)$, a recta $M'O$ é perpendicular a (BC); MO, $M'O'$, $M''O''$ interceptam-se em um ponto comum O, que é o único centro da circunferência que passa por A, B, C:

1.ª Prop. — **A circunferência** *tem* **um só centro.**

Cor. 1. — *As perpendiculares aos lados de um triângulo, dirigidas pelos seus meios, são concorrentes em um ponto equidistante dos vértices;* interceptam-se no mesmo ponto.

Êsse ponto é o centro O da circunferência determinada pelos seus vértices, e o triângulo ABC diz-se **inscrito** na circunferência.

Problêma I. — Construir a circunferência que passa por três pontos dados A, B, C.

Angulo inscrito

47. — Def. I. — Se uma recta s intercepta a circunferência em dois pontos distintos $A \neq B$, diz-se **secante**.

Diz-se **tangente** a recta que tem um só ponto comum com a circunferência; o único ponto comum diz-se **ponto de contacto** da tangente à circunferência.

Def. II. — Diz-se **ângulo inscrito** na circunferência todo o ângulo convexo que tem o seu vértice sôbre a circunferência e os seus lados são secantes, ou um secante e outro tangente; diz-se que *insiste* sôbre o arco compreendido entre os seus lados.

Def. III. — **O ângulo de duas rectas** $\widehat{rs}$ que tem o seu vértice sôbre a circunferência, diz-se **inscrito** na circunferência.

Diz-se **arco compreendido** entre os lados de um ângulo inscrito de duas rectas $\widehat{rs}$, o arco interior aos feixes opostos do ângulo $\widehat{rs}$ das duas rectas r e s; é o arco por onde passa o 1.º lado r, quando este descreve o ângulo $\widehat{rs}$. Ex., o ângulo $\widehat{rs}$, fig. 47, compreende o arco $\frown{AB}$ ($\frown{AVB}$), formado dos arcos consecutivos $\frown{AV} \frown \frown{VB} = \frown{AB}$ e o ângulo $\widehat{sr}$ compreende o arco $\frown{BA}$.

O ângulo ao centro que compreende o mesmo arco do ângulo inscrito, diz-se *correspondente*. Todo o ângulo de duas rectas, tendo o seu vértice sôbre a circunferência, é *inscrito*.

Teor. I. — *Um ângulo inscrito é igual a metade do ângulo ao centro que compreendem o mesmo arco.*

Seja A V B um ângulo inscrito na circunferência de centro O, tendo como primeiro lado o diâmetro VA, fig. 46, e $A\widehat{O}B$ o ângulo ao centro que compreende o arco $\frown{AB}$.

Na circunferência é $(OA) = (OB)$, os ângulos $A\widehat{V}B$ (ou OVB) e $V\widehat{B}O$ são iguais (43, 3.ª, 1): $A\widehat{V}B = V\widehat{B}O$. O ângulo ao centro $A\widehat{O}B$, é externo ao triângulo VBO, donde (43, Teor. I) resulta: $A\widehat{O}B = A\widehat{V}B + V\widehat{B}O = (A\widehat{V}B)2$.

Se os ângulos $A_1\widehat{V}A$, $A\widehat{V}B$ são consecutivos, é $A_1\widehat{V}A + A\widehat{V}B = A_1\widehat{V}B$, $A_1\widehat{O}A = (A_1\widehat{V}A)2$, $A\widehat{O}B = (A\widehat{V}B)2$,

$A_1 O A + A O B = (A_1 V A)\,2 + (A V B)\,2$, donde resulta: $A_1 \widehat{O} B = (A \widehat{V} B)\,2$.

Para o raio $\overline{V B_1}$, interior a $A_1 \widehat{O} A$, é $A_1 \widehat{V} B_1 = A_1 \widehat{V} A = B_1 \widehat{V} A$, e da propriedade demonstrada deduz-se $A_1 \widehat{O} B_1 = (A_1 \widehat{V} B_1)\,2$.

Logo é, em todas as hipóteses, $\quad A \widehat{V} B = (A \widehat{O} B)\,\dfrac{1}{2}$.

Pôsto isto, os ângulos definidos $A \widehat{V} B$ e $A \widehat{O} B$ existem

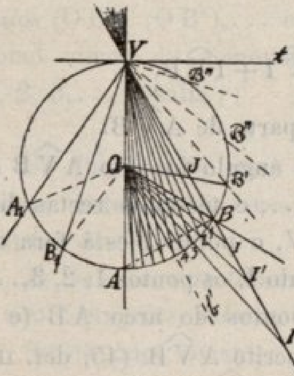


Fig. 46

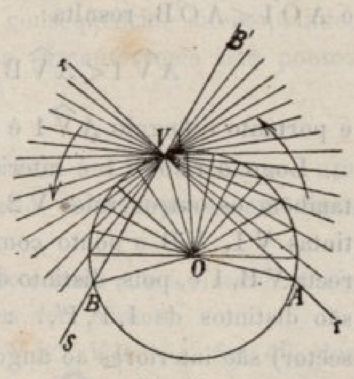


Fig. 47

na mesma parte $\overline{V} \overline{A} B$ do plano, e a parte B l do lado V B do ângulo A V B é interior ao ângulo ao centro $A \widehat{O} B$ (e a corda (A B) é interior aos dois ângulos A O B, A V B).

Tire-se pelo centro O da circunferência o raio b paralelo ao lado V B de $A \widehat{V} B$ (fig. 46); vê-se imediatamente que b é a bissectriz dêste ângulo. Os *raios* do ângulo ao centro $A \widehat{O} b$ não interceptam (34, cor. 2) o raio $\overline{V} B$, e portanto *os seus pontos são interiores ao ângulo inscrito* $A \widehat{V} B$: *o arco de* $A \widehat{O} b$ (e o sector) *pertence a* $A \widehat{V} B$.

Na outra parte $b \widehat{O} B$ do ângulo ao centro, cada um dos raios $\overline{O}\,1$, $\overline{O}\,2$, . do feixe $b \widehat{O} B$ e o raio $\overline{V} B$ formam com a transversal A V ângulos internos, na parte $\overline{AVB}$ do A V, cuja soma é menor que um ângulo razo, e portanto (41, Teor. IV) êsses raios interceptam V B na parte $\overline{B}$ I, interior a $A\widehat{O}B$, em os pontos $I, I', I'', \ldots$ distintos do ponto B (31, Axi. 1), 2).

Estes pontos $I, I', I'', \ldots$ são distintos da circunferência: com efeito, o ponto I é a intersecção do raio $\overline{O}1$ com V B, os pontos 1 e B são distintos por pertencerem aos raios distintos $\overline{O}1$, $\overline{O}B$. Sendo $A\widehat{O}1 = (A\widehat{V}1)2$, $A\widehat{O}B = (A\widehat{V}B)2$, e $A\widehat{O}1 < A\widehat{O}B$, resulta:

$$A\widehat{V}1 < A\widehat{V}B = A\widehat{V}1 + 1\widehat{V}B,$$

e portanto o ângulo $A\widehat{V}1$ é uma parte de $A\widehat{V}B$.

Logo o raio $\overline{V}1$ é interior ao ângulo inscrito $A\widehat{V}B$, e, também os outros raios $\overline{V}2$, $\overline{V}3, \ldots$, e tendo as rectas distintas V 1, V B o ponto comum V, o ponto 1 está fora da recta V B, 1 é, pois, distinto do ponto I, os pontos $1, 2, 3, \ldots$ são distintos de $I, I', I'', \ldots$: os pontos do arco A B (e o sector) são interiores ao ângulo inscrito $A\widehat{V}B$: (45, def. III) **o ângulo inscrito** $A\widehat{V}B$ *e o* **ângulo ao centro** *correspondente* $A\widehat{O}B$ **compreendem o mesmo arco.**

E os ângulos inscritos $A_1\widehat{V}B$, $A_1\widehat{V}B_1$ gozam desta propriedade.

Os pontos $I, I', I'', \ldots$ não pertencem à circunferência; e para um raio O B′ exterior a $A\widehat{O}B$ é $A\widehat{O}B' > A\widehat{O}B$, e correspondo-lhe o ângulo inscrito $A\widehat{V}B' > A\widehat{V}B$, V B′ é distinta de V B e exterior a $A\widehat{V}B$, o raio (O B′) intercepta V B em um ponto J, *interior ao raio* (O B′) e distinto do ponto B′: $J \neq B'$, e como sobre cada raio existe um só ponto da circunferência e os pontos $J, I, I', I'', \ldots$ são distintos da circunferência, *a recta* V B *intercepta-a sómente em dois pontos* V e B.

Esta propriedade da circunferência é muito interessante e de grande importância nas suas relações com as rectas do plano, e enuncia-se:

2.ª Prop. — *Se uma recta* s *tem dois pontos comuns com a circunferência,* **a recta** secante *s* **intercepta a circunferência sómente em dois pontos** *distintos.*

Os raios $\overline{V}1$, $\overline{V}2$, $\overline{V}3$,... interiores ao ângulo inscrito $A\widehat{V}B$ interceptam (34, Teor. II) o *raio* (OB) em pontos interiores, e também interceptam em pontos interiores os *raios* (OB′), (OB″),... e por conseqüência, interceptando, como vimos de demonstrar, a circunferência nos pontos 1, 2, 3,... resulta:

3.ª Prop. — **Se uma recta tem** *um ponto comum e* **um ponto interior** *à circunferência,* **intercepta-a em dois pontos** *distintos.*

2) *Se uma recta tem um ponto comum com a circunferência e não é tangente, intercepta-a em dois pontos.*

Se os raios secantes VB′, VB″, VB‴,... fig. 46, dos ângulos inscritos $A\widehat{V}B'$, $A\widehat{V}B''$, $A\widehat{V}B'''$,... se aproximam do tangente *t* à circunferência no ponto de contacto V, os ângulos ao centro correspondente $A\widehat{O}B'$, $A\widehat{O}B''$,... são sucessivamente maiores, o ângulo $A\widehat{O}B'''$ externo aproxima-se do ângulo razo $A\widehat{O}V$ (e os ângulos iguais $O\widehat{V}B''$, $V\widehat{B'''}O$ tendem para o ângulo recto): quando o 2.º lado do ângulo inscrito $A\widehat{V}T$ é tangente *t* à circunferência, resulta que, por definição de tangente, a semicircunferência $A\widehat{B}V$ é interior ao ângulo inscrito $A\widehat{V}T$ e o ângulo ao centro correspondente $A\widehat{O}V$ é um ângulo razo, compreende o mesmo arco que os lados do ângulo inscrito $A\widehat{V}T$: portanto (Teor. I) é,
$$A\widehat{V}T=(A\widehat{O}V)\frac{1}{2}=(\pi)\frac{1}{2}:$$

4.ª Prop. — **A tangente à circunferência é perpendicular ao raio do ponto de contacto.** *A circunferência existe toda de uma parte do plano em relação a uma sua tangente; é interior a êsse semiplano.*

Cor. 1. — *Se o ângulo inscrito tem um lado tangente à circunferência e o outro lado é um diâmetro, o ângulo é recto.*

E inversamente, *se um ângulo recto inscrito tem um diâmetro como lado, a outro lado é tangente à circunferência.*

O ângulo inscrito $B\widehat{V}T$ com um lado V T tangente e o lado V B interior a $A\widehat{V}T$ é, teor. I, $B\widehat{V}T = A\widehat{V}T - A\widehat{V}B = (A\,O\,V)\frac{1}{2} - (A\,O\,B)\frac{1}{2} = (B\,O\,V)\frac{1}{2}$. Para o ângulo inscrito $A_1\,V\,T$ com o lado $V\,A_1$ exterior a A V T, é, fig. 46, $A_1\,V\,T = A_1\,V\,A + A\,V\,T = (A_1\,O\,A)\frac{1}{2} + (A\,O\,V)\frac{1}{2}$, e portanto: $A_1\,V\,T = (A\,O\,V)\frac{1}{2}$.

A propriedade do ângulo inscrito, enunciada no teorema I, fica demonstrada para a hipótese de *um lado do ângulo* ser *tangente à circunferência.*

Do teorema I e das propriedades demonstradas para o ângulo inscrito, resulta em todas as hipóteses:

Cor. 2. — *Os ângulos inscritos na mesma circunferência que compreendem o mesmo arco ou arcos (e cordas) iguais, são iguais.*

E inversamente: Os ângulos inscritos iguais compreendem na mesma circunferência (ou em circunferências iguais) arcos iguais.

Pois que são iguais a metade do mesmo ângulo ao centro, ou ângulos ao centro iguais (45, Teor. III).

Cor. 3. — *Os ângulos inscritos que insistem sôbre uma semicircunferência são quadrantes:* $V\widehat{B}A = (V\widehat{O}A)\frac{1}{2} = (\pi)\frac{1}{2}$.

Os ângulos inscritos considerados são, pois, os seguintes: I. — $AVB = (AOB)\frac{1}{2}$; 1): $A_1VB = (A_1OB)\frac{1}{2}$; 2): $A_1VB_1 = (A_1OB_1)\frac{1}{2}$; 3: $VBA = (VOA)\frac{1}{2} = (\pi)\frac{1}{2}$.

II. — $AVT = (AOV)\frac{1}{2}$; 1) $BVT = (BOV)\frac{1}{2}$; 2): A_1VT $(A_1OV)\frac{1}{2}$.

Problema I. — Dirigir por um ponto de uma recta dada a perpendicular que passa por êsse ponto.

Se AB é a recta e B o ponto dado, fig. 46, determina-se um ponto O equidistante de A e B: $(OA) = (OB)$, e descreve-se a circunferência de centro O e raio (OA) (46, 1.ª *Prop.*) A extremidade V do diâmetro AV é um ponto (2.ª Prop.) da *perpendicular* BV, ou r, à recta dada AB, pois que (cor. 3) é $VBA = (\pi)\frac{1}{2}$.

Prob. II. — Construir as tangentes a uma circunferência dirigidas por um ponto exterior.

48. — Teor. i. — **O ângulo inscrito de duas rectas** r, s *é igual a metade do ângulo ao centro que compreende o mesmo arco.* O seu vértice é qualquer ponto da circunferência.

Com efeito, por definição de ângulo inscrito rs em uma circunferência (47, def. iii), uma das suas rectas é, em geral, secante, podendo ser ambas secantes, e portanto compreende sempre um arco da circunferência: O ângulo $rs \equiv AVB'$ da fig. 47 compreende o arco $\widehat{AVB}$ e é igual a metade do ângulo ao centro AOB que compreende êste arco; o ângulo suplementar $sr \equiv BVA$ tem inscrito o outro arco BA, e é igual a metade do ângulo ao centro correspondente BOA, no sentido directo do plano: $\widehat{rs} = (A\widehat{O}B)\frac{1}{2}$, $\widehat{sr} \equiv \widehat{BA} = (B\widehat{O}A)\frac{1}{2}$.

Todo o ângulo rs tendo o seu vértice sôbre a circunferência é inscrito, e basta que *o vértice do ângulo inscrito de duas rectas* seja *qualquer ponto de circunferência:* Portanto, o ângulo inscrito de duas rectas rs gosa da propriedade demonstrada, com toda a generalidade.

Cor. 1. — Se o ângulo rs é razo, as duas rectas coincidem, podendo ser tangentes; e êste ângulo inscrito $rs = (\pi)$ compreende toda a circunferência (4.ª Prop.), como o seu ângulo ao centro correspondente de um giro.

Cor. 2. — *Os ângulos de duas rectas, inscritos, cujos lados* r, s, *passam por dois pontos dados* A, B *da circunferência, são iguais entre si.*

Problema I. — Unir dois pontos A, B por um arco de circunferência em que se inscreva um ângulo dado ab.

Seja $ab = \mathrm{AVB}$ o ângulo dado, fig. 46. Construe-se (38, I) o 2.º lado AV do ângulo $\mathrm{BAV} = (\pi)\frac{1}{2} - ab$, complementar do ângulo dado ab, e dirige-se pelo meio de (AB) a perpendicular b' que intercepta AV no ponto O, centro da circunferência (45, IV'). Ao ângulo $\mathrm{AO}b' \equiv ab = (\mathrm{AOB})\frac{1}{2}$ corresponde o ângulo ao centro AOB, e *o arco* obtido AVB (e o segmento circular AVBA) diz-se *capaz* do ângulo ab, nele estão insesitos todos os ângulos iguais a ab. *O lado t* do ângulo inscrito $t\mathrm{AB} = ab$ é perpendicular ao raio OA e *tangente* à circunferência em A.

II. — *Unir dois pontos* A, B *por uma circunferência capaz de um ângulo dado de duas rectas* $\widehat{\mathrm{rs}} = \widehat{\mathrm{AB}}$.

Em geral, aplica-se a propriedade do teor. I do n.º 38. Se o ângulo é dado *por* **duas direcções** r e s, move-se o plano até que a perpendicular s' ao meio de (AB) seja paralela à recta s, e dirige-se por A a paralela r' à direcção s: o ponto O de intersecção de r' e s' é o centro da circunferência em que está inscrito o ângulo dado: $\widehat{\mathrm{AB}} = \widehat{rs}$.

§ 12.

O gónio. — Geração da circunferência (nova def.)

49. — Def. i. — Diz-se **Paralaxe** *de dois pontos* P, P′ em relação a um ponto V, o **ângulo de duas rectas** V P, V P′ que projectam do ponto V os pontos P, P′; o centro V é o **vértice** da paralaxe, e denota-se por: $\widehat{PP'} = V$.

2) **O ângulo de duas direcções** r, s diz-se a poralaxe de dois pontos distintos pertencentes (31, def. i) às rectas r, s.

Se um desses pontos coincide com a intersecção V de r e s, o segundo ponto é distinto de V e existe em r ou em s (37, def. i, 38, i): $\widehat{rV} = \widehat{Vs} = V$.

Diz-se que a paralaxe é o **ângulo sob o qual é visto** do ponto V o segmento rectilínio (P′ P″), segundo a notação e o sentido directo.

5.ª Prop. — **A sucessão linear dos vértices dos ângulos iguais** $rs = r's' \ldots$ *de duas rectas, cujos lados passam por dois pontos* P, P′ *do plano,* **é uma circunferência** *única.*

Sejam A, B dois pontos distintos e $rs = AB$ o ângulo inscrito na circunferência c, cujos lados O A, e O B passam pelos pontos A, B, fig. 48, e o ângulo de duas rectas $PP' = rs$ igual a A B; os seus lados V P, V P′ passam pelos pontos P, P′ do plano, tais que:

$$(PP') = (AB), \qquad \widehat{PP'} = \widehat{AB} = \widehat{rs}, \tag{1}$$

Existe no plano uma só recta P V que faz (38, Teor. i) com a recta P′ V um ângulo $PP' = AOB$. Temos pois, por hipótese (1):

$$VP'P = OBA, \qquad PVP' = AOB, \qquad (PP') = (AB), \tag{2}$$

e portanto (43, 4.ª): $(PV) = (AO)$, $(P'V) = (BO)$.

Seja $A\widehat{O'}B = \widehat{rs}$ outra posição do ângulo inscrito na circunferência c, e $P\widehat{V'}P' = \widehat{PP'}$ a posição correspondente do ângulo PP' em que é $V'P'P = O'BA$, e AO', PV' são interiores, respectivamente, aos ângulos OBA, $VP'P$.

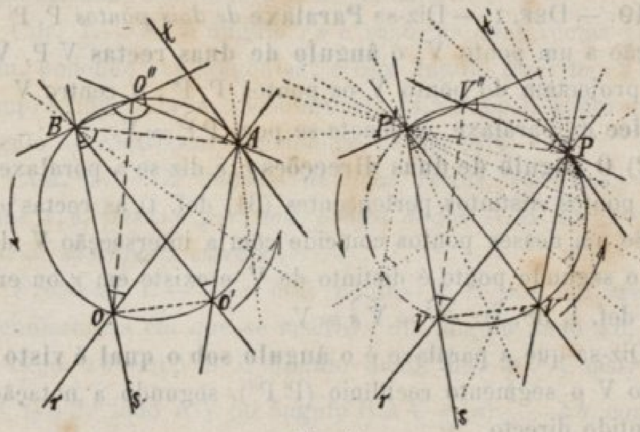


Fig. 48

Se o ângulo PP' (inv.) se move no plano e os seus lados r, s, passam pelos pontos fixos P, P', escorregando sôbre eles, a cada posição de PP' e dos seus lados r, s corresponde uma posição do ângulo inscrito na circunferência c e igual a AB (n.º 38): o vértice V de PP' descreve uma linha sôbre o plano.

Seja pois, $V'P'P = O'BA$: por ser (1) $PV'P' = AO'B$, e $(PP') = (AB)$, é (43, 4.ª): $(P'V') = (BO')$, $(PV') = (AO')$.

Por consequência, sendo pela hipótese anterior $V'P'P = O'BA$, e (2) $VP'P = OBA$, é $VP'P - V'P'P = VP'V'$, $OBA - O'BA = OBO'$, é (n.º 28, Teor. I) $VP'V' = OBO'$; sendo portanto,

$$OP'V' = OBO', \quad (P'V) = (BO), \quad (P'V') = (BO'),$$

resulta (43, 2.ª) a igualdade:

$$(VV') = (OO'). \tag{I}$$

Esta igualdade demonstra que a cada par de pontos (O, O') da circunferência c corresponde uma só posição do ângulo $P P'$ e um só par de pontos (V, V') igual, na linha c' gerada no plano pelo vértice V do ângulo $P P'$: segundo a significação geral de igualdade (19, def. I), o arco $V V'$ da linha c' é **igual ao arco de circunferência** $O O'$ correspondente na circunferência c.

Se o vértice V de $P P'$ coincide com P', à sua posição $t' P P'$ corresponde na circunferência c o ângulo $t A B = t B$ em que t é tangente à circunferência c no ponto A (48, Probl. I), e é, como vimos, $(P V) = (A O)$ $(P V') = (A O'), \ldots$: t' é correspondente à tangente t, e portanto é tangente a linha c'.

Seja V'' o vértice de um ângulo igual a $P P'$, na outra parte do plano: se $- P P' V'' = A B O''$, e pela hipótese (1), $P' V'' P = B O'' A = (\pi - A B)$, $(P P') = (A B)$, resulta: $(P V'') = (A O'')$, $(P' V'') = (B O'')$.

É portanto, por (2), $V P' P = O B A$, $P P' V'' = A B O''$, e por adição destes ângulos, $V P' V'' = O B O''$, $(P' V'') = (B O'')$: resulta pois (43, 2.º) a igualdade:

$$(V V'') = (O O''). \tag{II}$$

Por conseqüência é também

$$(V' V'') = (O' O'').$$

Continuando o movimento do ângulo $r s$ no arco $V'' P'$ até o primeiro lado r coincidir com $P' P$, o segundo lado s é tangente à curva c' no ponto de contacto P', e assim sucessivamente, os vértices $V', V'', V''' \ldots$ dos ângulos iguais a $r s$ formam a linha c', e a sucessão das igualdades anteriores é:

$$(V V') = (O O'),\ (V V'') = (O O''),\ (V' V'') = (O' O''), \ldots$$

As duas linhas c, c' são iguais entre si, e a sucessão linear dos vértices $V. V', V'', \ldots$ dos ângulos iguais a $P P'$, é uma circunferência.

Cor. 1. — *Se os lados dos ângulos de duas rectas, iguais entre si, passam por dois pontos fixos do plano,* os seus vértices existem sôbre uma circunferência: **os ângulos são inscritos na circunferência** definida pelos dois pontos e um vértice.

Cor. 2. — Os vértices dos ângulos iguais $PVP' = PV'P' = \ldots = ab$ (cujos lados passam por dois pontos P, P') pertencem ao arco PVP' da circunferência definida pelos pontos P, P' e V: é o arco capaz do ângulo ab.

Teor. I. — **Se os lados de um ângulo invariável**

$$\widehat{PP'} = \widehat{rs},$$

móvel sôbre o plano, **passam por dois pontos fixos** P, P', **o seu vértice géra uma circunferência.**

De facto, pela propriedade anterior, a curva c' descrita pelo vértice V do ângulo rs é igual à circunferência c.

Cor. 1. — *Os vértices da paralaxe constante de dois pontos* A, B, *existentes no mesmo plano, pertencem a uma circunferência.* O segmento (AB) é visto sob um ângulo dado, de todos os pontos da circunferência.

Teor. II. — Se o **lado** r **de um ângulo** rs **passa por um ponto** A **da circunferência** *e o seu vértice* a descreve, *o outro* **lado** s **escorrega sôbre um ponto fixo** B **da circunferência.** Nos seus sucessivos estados o ângulo é inscrito na circunferência c (46, def. II), e os arcos que êle compreende são iguais entre si e ao compreendido pelo ângulo ao centro (38, Teor. I): como teem o extremo comum A, fig. 48, os 2.os extremos coincidem em B: portanto o lado s escorrega sôbre o ponto fixo B da circunferência.

Teor. III. — *Se os lados de um ângulo* PP', *móvel sôbre o plano, passam por dois pontos fixos* P, P', **todo o raio do ângulo,** tendo a origem no vértice, **passa por um ponto**

fixo: — é o ponto de intersecção do raio com a circunferência gerada pelo vértice do ângulo P P′.

Seja V V″ o raio (ou recta) do ângulo P P′, fig. 48, *b*; o ângulo P V V″ é inscrito na circunferência *c* gerada pelo vértice móvel de P P′, e compreende o arco invariável P V″: pela propriedade demonstrada do Teor. II, o raio V V″ escorrega sôbre o ponto fixo V″ da circunferência.

A mesma propriedade teem os raios V V′, V V″ . .

Def. I. — O ponto V″ diz-se **centro de** rotação e **escorregamento** do raio V V″. Diz se *movimento paraláxico* o escorregamento definido do ângulo P P′, móvel sôbre o plano.

Def. II. — O vértice V descreve o arco V V′, e o raio V P′ resvala sobre P′ no sentido P′ V até passar pelo centro da circunferência *c*′: 2) a partir da sua posição sobre o diâmetro, o raio V P′ escorrega sobre P′ no sentido contrário V P: *A passagem de um raio sôbre o diâmetro* da circunferência *c*′ é **um estado de escorregamento nulo** sôbre o seu centro de escorregamento.

Cor. 1. — Os raios V V′, V V″, . . . teem todos a mesma propriedade: todos os raios de um feixe de raios ou de rectas ($V r_1$) do plano de P P′ com o seu centro em V, teem os seus centros de rotação e escorregamento sôbre a circunferência gerada pelo vértice V do ângulo, no seu movimento paraláxico.

Cor. 2. — *O ângulo de duas direcções* distintas *de uma recta* r_1 pertence ao plano do ângulo P P, *é igual ao ângulo descrito por um dos seus raios* V V″ (ou V P′) *em redor do seu centro de rotação e escorregamento* V′.

Probl. I. — Dados três pontos P′, P″, P‴, *determinar o ponto do plano,* definido pelas paralaxes; $P' P'' = p' p''$, $P' P''' = p' p'''$.

Os pares de pontos (P′, P″), (P′ P‴) são vistos sob os ângulos $p' p''$, $p' p'''$, respectivamente, daquele ponto (P) a determinar, e podem ser dados por direcções no plano. Construindo as circunferências c', c (fig. 50 e 51) em que os dois ângulos estão inscritos (Prob. II, n.^{os} 48 e 49), c, c' teem o ponto comum P$'$, e interceptam-se (n.º 52, Teor. I) em um 2.º ponto P, com as propriedades definidas: este ponto P é a única solução do problema.

Nota: Se as paralelas são iguais:

$$\widehat{p'p''} = \widehat{p'p'''},$$

os três pontos P$''$, P$'''$ e P estão em linha recta: o ponto P existe sobre a recta P$''$P$'''$, e é o vértice do ângulo $P'r = p'p''$ com o 2.º lado na recta r (ou P$''$P$'''$).

50. — O gónio. Compasso de paralaxes.

As proposições que vimos de demonstrar teem interêsse teórico: por conseqüência resulta a definição construtiva da circunferência, determinada por três pontos (46, I), independentemente da existência do seu centro.

Def. — **Circunferência** *é uma* **sucessão linear de vértices de ângulos** *de duas rectas,* **iguais entre si:** $\widehat{rs} = \widehat{r's'} = \ldots$, **cujos lados passam por dois pontos** *do seu plano.*

As proposições anteriores resolvem certas questões teóricas e práticas: Pode-se, portanto, descrever uma circunferência sem conhecer o seu centro, ou o seu raio (Probl. I, n.º 46; I e II, n.º 48).

A *Prop. 5.ª* e o teorema anterior são o *princípio do gónio*, aparelho que o autor descobriu, com o qual se realiza as proposições enunciadas.

i). É formado (fig. 49) de duas alidades rígidas que se interceptam nas arestas (entalhadas uma na outro), e ligadas entre si por um eixo perpendicular ao plano das suas arestas. Um arco circular de um quadrante (metálico), graduado de 0 a 180°, com o centro no eixo das alidades e paralelo ao plano das arestas, dá rigidez ao ângulo das alidades e designa as paralaxes. Cada alidade tem duas pínulas nas extremidades, móveis e com os rectículos no plano da face interior da alidade. O eixo das alidades tem um estilete cuja ponta é o vértice do ângulo P P′.

O *ângulo de alidades* construe o ângulo de duas rectas $\widehat{rs}$ ou paralaxe, e as suas arestas são as rectas r, s.

ii). Dois arcos metálicos faces planas, articulados, formam o *plano* ou base do gónio: sôbre ele e na extremidade de cada arco há um dispositivo **circular**-*azimutal* de forma cilindrica, e move-se em torno de um eixo perpendicular *ao plano* da base. Em dois muros opostos existem cavidades cónicas (em parafusos micrométricos), e o seu eixo comum pertence a um plano diametral do dispositivo circular: nas cavidades assentam as extremidades (munhões) do eixo de uma roldana de rolamento e rotação, paralelo ao *plano*.

A circunferência de rolamento da roldana pertence a um plano diametral do dispositivo descrito, e passa portanto pelo seu eixo.

iii). No centro da base do circular há (em cada um) uma janela cónica (corôa), representando (50, def. I) os *centros* de rotação e escorregamento.

Funciona fixando-se os centros de escorregamento dos circulares sôbre o plano e em coincidência com dois pontos P, P′; assenta-se as arestas das alidades sôbre as roldanas, dando ao ângulo de alidades uma paralaxe fixada (por um pressôr) sôbre o arco graduado, e apoia-se o vértice sobre o plano de P P′: o ângulo de alidades existe sôbre um plano paralelo.

Os circulares teem movimento de rotação (azimutal) em tôrno dos seus eixos, e todo o gónio move-se em rotação e escorregamento: deslocando o ângulo, as alidades resvalam, por rolamento, nos centros P, P′ de escorregamento, e o vértice géra sôbre o plano uma circunferência.

A figura junta representa uma curva traçada (reduzida a $\frac{1}{6}$).

Esta forma particular do aparelho descrito é um *compasso de paralaxes*. Em geral, o gónio com um dispositivo especial variável, gera uma nova curva[1].

Obs.: — As pínulas teem visores circulares, para medir ângulos de direcções no espaço, como no astrolábio simples[2].

51. — 6.ª Prop. — **Se uma circunferência se move** *sôbre o plano* **passando por dois pontos fixos** A, B, *todos os seus pontos passam por um 3.º ponto; e* **resvala sôbre si própria.**

De facto, se a circunferência *c* se move no plano, em contacto com dois pontos fixos A, B (fig. 48), os sucessivos arcos de *c*, com os extremos nos pontos distintos A, B, teem a corda comum AB: os seus ângulos ao centro são iguais (37, 1.ª) e os ângulos inscritos correspondentes são iguais (n.º 47). Por conseqùência, quando o ponto O de *c* passa sôbre a recta fixa AO′, o segundo lado do ângulo inscrito no arco que (nesse estado O′ do ponto O) tem os extremos A, B, coincide com BO′ (38, Teor. I): pontanto o seu vértice O′ coincide com O, passa por este ponto da circunferência fixa no plano.

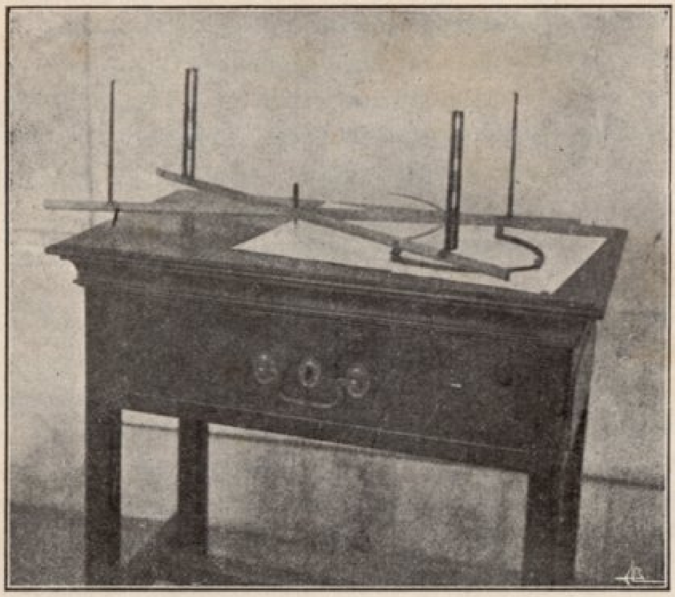
Da mesma forma se demonstra que todos os pontos da circunferência *c*, movel em contacto com os dois pontos A, B, passa pelo 3.º ponto O.

A circunferência *escorrega sôbre si própria* e gira (rotação) em redor do seu centro, como ponto singular deste movimento.

---

[1] A teoria dessa curva especial sái fóra do quadro elementar desta dissertação (§ 4).

[2] *Astronomia dos Lusíadas* — Dr. Luciano Pereira da Silva.



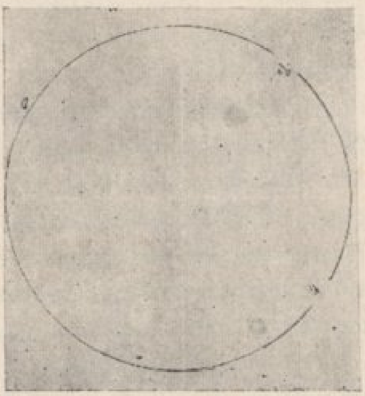


Fig 49

Esta propriedade da circunferência é idêntica à da linha recta (22, def. I), e podemos enunciar a proposição:

Existe uma sucessão linear de pontos c *tal que, se* c *se move sôbre o plano passando por dois pontos fixos* A, B, tem um só ponto C em contacto com o ponto C_1 de um seu estado c_1 $(A_1 B_1 C_1 \ldots)$, e *todos os pontos de* c *passam pelo 3.º ponto* C_1: **a linha** *c* **é uma circunferência.**

Intersecção de circunferências

52. — DEF. I. — Se duas **circunferências** teem dois pontos comuns, dizem-se **secantes;** os dois pontos comuns são pontos de intersecção.

Dizem-se circunferências **tangentes,** se teem um só **ponto** comum ou **de contacto.** Quando existem na mesma parte da tangente comum, dizem-se *tangentes interiores;* e se as circunferências estão em partes opostas do plano em relação à tangente comum, dizem-se *tangentes exteriores.*

Sejam O, O' os centros de duas circunferências c, c' que teem um ponto comum A fora da recta OO', dirigindo por A a corda (AA') perpendicular ao diametro, OO' é perpendicular a (AA') e passa pelo seu meio M (45, IV), e portanto (40, cor. 2) é: $(OA') \equiv (OA)$ e $(O'A') \equiv (O'A)$, *o 2.º ponto* A' *é comum às duas circunferências* c, c'.

Seja (AA_1) uma corda de c, distinta de (AA'): a perpendicular OM_1 a (AA_1) é distinta de OO', não passa pelo centro O' de c'. A perpendicular $O'M_1'$ a (AA_1) intercepta-a em um ponto M_1' distinto de M_1, poisque OM_1 e $O'M_1'$ são paralelas distintas, e, pelo que vimos de demonstrar, a recta AA_1 intercepta a circunferência c' em um ponto A_1' oposto ao ponto A a respeito de M_1'.

Logo, por serem distintos os pontos $M_1 \neq M_1'$, meios de (AA_1), (AA_1'), *os pontos* A_1, A_1', opostos de A em relação àqueles pontos da recta $A A_1$, *são distintos*, e por conseqüência *as duas circunferências c, c′ teem sómente dois pontos comuns* no plano, interceptam-se em A e A′:

TEOR. I. — **Se duas circunferências teem um só ponto comum fóra da recta dos seus centros,** *interceptam-se em um segundo ponto,* **são secantes e distintas.**

COR. 1. — *Os pontos* A, A′ *de intercepção de* c *e* c′ *são opostos em relação ao ponto* M *da recta dos centros.*

TEOR. II. — *Se duas circunferências* c, c′ *são tangentes interiormente e um ponto de* c′ *e interior a* c, *a circunferência* c′ *é interior a* c: *todos* os pontos de c′ são interiores à primeira.

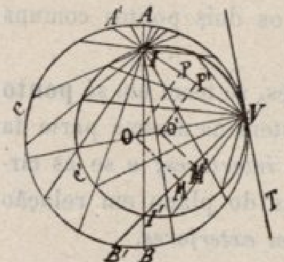


Fig. 50

Seja I o ponto de c′, interior à circunferência c, V o ponto de contacto, (V I′) uma corda de c′ que passa por I, fig. 50: este ponto é interior à corda (V A), que é (47, I) maior que a corda (V I) de c′, (V A) > (V I). As perpendiculares O P, O′ P′ são paralelas e P, P′ são os meios das cordas: (V P′) < (V P), donde resulta que P′ é interior a (V P) e pertence a $\overline{\mathrm{OPV}}$; O′ existe na paralela O′ P′ a O P, e por conseqüência o centro O′ é interior a essa parte $\overline{\mathrm{OPV}}$ do plano, é interior a (O V). É, pois: (O′ V) < (O V).

O centro O′ *de* c′ *é interior ao raio* (O V) da circunferência *c*.

Posto isto, qualquer corda (A I B) de *c* que passe por I intercepta (47, 3.ª Prop.) a circunferência *c′* em um ponto I′ interior a (A B). De facto, dirigindo por V e I′ a corda (V B′) de c, por O e O′ as perpendiculares O M, O′ M′ a (V B′), o centro O′ e O′ M′ são interiores à parte $\overline{\mathrm{OMV}}$ do plano, e portanto o ponto M′ é interior a (M V): (V M′) < (V M), e (V I′) = (V M′) 2 é menor que (V B′) = (V M) 2, (V I′) < (V B′);

logo o ponto I' da circunferência c' é interior à corda (V B') de c, e a (A B).

Todas as cordas (A B) e (V I') formam dois feixes de rectas com os centros, respectivamente, em I e V, que *interceptam a circunferência* c' *em pontos* (I') *interiores às cordas* correspondentes de c : c' é interior à circunferência c.

Cor. 1. — *Se duas circunferências* c, c' *são tangentes interiores e o centro de* c' *é interior ao raio* O V *de* c, *a circunferência* c' *é interior a* c.

Teor. III. — *Se duas circunferências* c, c' *teem um ponto comum sôbre a linha dos centros,* **são tangentes** *nesse ponto de contacto;* teem uma tangente comum no ponto de contacto, que é perpendicular à linha dos centros.

Com efeito: 1) a tangente V T à circunferência c pelo ponto comum sôbre a linha dos centros O O', é perpendicular aos diâmetros de c e c', e portanto é tangente comum a c e c': se as circunferências c, c' existem, pois, nos semiplanos opostos que a tangente separa (47, 4.ª Prop.), são exteriores uma à outra, tem um só ponto de contacto, isto é são tangentes exteriores.

2) Se um ponto I de c' é interior à circunferência c, *qualquer corda* V I' de c', tirada pelo ponto comum V, intercepta (47, 3.ª Prop.) a circunferência c em um ponto B' distinto de I' (Teor. II): logo, como c, c' existem no mesmo semiplano $\overline{\text{VTI}}$ das cordas consideradas, teem um só ponto comum V, são tangentes interiormente.

Para o ponto I da circunferencia c' é interior á corda (V B), e á (A B).

Todas as cordas (A B) e (V L) formam dois feixes de rectas com os centros respectivamente em I e V, que interceptam a circunferencia c em pontos (I) interiores ás cordas correspondentes de c; c' é interior á circunferencia c.

Cor. II — *Se duas circunferencias c, c' são tangentes interiores e o centro de c' é interior ao raio O V de c, a circunferencia c' é interior a c.*

Prop. III. — *Se duas circunferencias c, c' teem um ponto commum sobre a linha dos centros,* **são tangentes** *nesse ponto de contacto, teem uma tangente commum no ponto de contacto, que é perpendicular á linha dos centros.*

Com effeito: 1) a tangente V T á circunferencia c dada no ponto commum sobre a linha dos centros O O', é perpendicular aos diametros d, d' e c', e por isso é tangente tambem a c'.

2) As circunferencias c, c' existem, pois, nos semiplanos oppostos que a tangente separa (11, 4.ª Prop.), são exteriores uma á outra, teem um só ponto de contacto, isto é são tangentes exteriores.

3) Se um ponto J de c' é interior á circunferencia c, a tangente recta V T de c', tirada pelo ponto commum V, intercepta (11, 4.ª Prop.) a circunferencia c em um ponto R distincto de V (Theor. III); logo como c, c' existem no mesmo semiplano V T I das cordas consideradas, teem um só ponto commum V, são tangentes interiormente.

NOTA

Sôbre determinação do ponto de estação

A Prop. 5.ª e o teorema I do n.º 49 resolvem, alguns problemas concretos:

O problema do *ponto de estação* é a determinação exacta, sôbre uma carta topográfica, do próprio ponto (homólogo) que ela ocupa na campanha.

As regras do processo de solução que vamos referir nesta nota, eram aplicadas em alguns serviços de campanha do corpo expedicionário português *(C. E. P.) em França*, especialmente nos serviços de artilharia, atingindo-se um maior rigor.

1.º Processo. — I) Escolhe-se três pontos $(p', p'', p''',)$ notaveis no terreno e bem definidos na carta: P', P'', P'''.

Fixa-se o plano da carta horizontal nivelando-a; a escolha da orientação da carta topográfica é arbitrária.

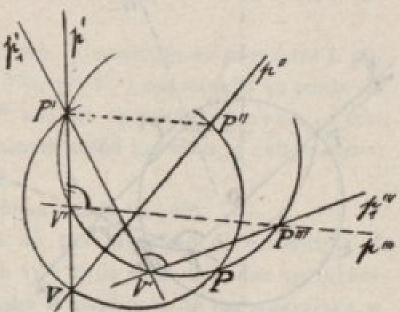


Fig. 51

II) 1) Pelo ponto P' (da carta) e pelo seu homólogo no terreno dirige-se o alinhamento p' com a alidade, que se traça sôbre o plano; pelos pontos P'' e seu homólogo traça-se novo alinhamento p'', que intercepta o primeiro p' em V.

2) Descreve-se a circunferência *c* definida (48, Teor. I) pelos pontos P', P'', V, fig. 51.

III). Pelos pontos P' e seu homólogo traça-se um alinhamento (p_1'); pelos pontos P''' e seu homólogo dirige-se o seu alinhamento p_1'''; este intercepta p_1' em o ponto V_1'.

2) Descreve-se a circunferência c' definida pelos pontos P', P''', V_1'.

Logo, o segundo **ponto** P *de intersecção das circunferência* c, c' é o **ponto de estação** na campanha.

Obs.: Os alinhamentos p', p'' são traçados com a mesma orientação da carta (fixa I), e também os alinhamentos p_1', p_1''' da operação III), embora as duas operações II) e III) tenham separadamente, a mesma orientação, ou diferentes.

Simplificação: Se no fim da operação II) se conserva invariável a orientação da carta (não a alterando por rotação da prancheta), os alinhamentos p' e p_1' do ponto P' coincidem nas duas operações II) e III). Nesta hipótese, a operação III) reduz-se a:

III'. — 1) Pelos pontos P''' e seu homólogo dirige-se o alinhamento p''', que intercepta o alinhamento p' de P' em o ponto V'; 2) descreve-se a circunferência c' definida pelos pontos P', P'', V'; c' intercepta c no ponto de estação P.

Os pontos P', P''', V' e P', P''', V_1' definem uma só circunferência c' (49, Teor. I, cor. 1).

Os alinhamentos reduzem-se assim a três: p', p'', p'''.

É necessário sempre verificar, ao iniciarmos a operação III), que a direcção azimutal da carta é a mesma nas duas operações II), III): só satisfeita esta condição é que bastam os 3 alinhamentos.

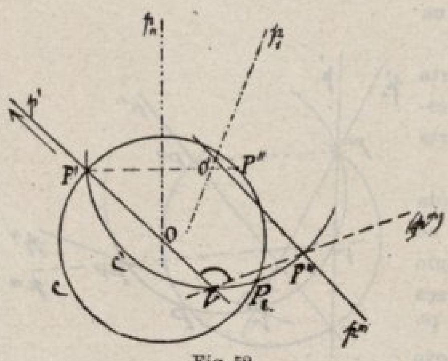


Fig. 52

2 — 2.º Processo *(forma particular).* — I) Prepara-se a carta e escolhe-se os três pontos P', P'', P''', da primeira operação.

II) Baixa-se a perpendicular p_{II}O ao meio de (P' P'') fig. 52, ajusta-se-lhe a alidade e move-se a carta no seu plano até que p_{II}O fique dirigida para o ponto P'' do terreno, como seu alinhamento. 2) Com a carta nesta posição, dirige-se pelos pontos P' e seu homologo no terreno o alinhamento p'P', que intercepta p_{II} em O.

Descreve-se a circunferência c de centro O e raio (O P') = (O P'').

III) Traça-se a perpendicular p_IO' pelo meio do segmento (P' P'''), faz-se coincidir a alidade com $p_{/}\,O'$ e move-se a carta até esta recta ficar na direcção do ponto P' do terreno. Fixada esta posição, traça-se pelos pontos P''' e seu homólogo o alinhamento $P'''\,O'$, ou p''', que intercepta $p_{/}$ no ponto O'. 2) Descreve-se a circunferência c' de centro O' e raio $(O'\,P') = (O'\,P''')$. As circunferências c e c' interceptam-se em o *ponto de estação* P.

Desta forma simplifica-se a construção das circunferências c, c', pois as perpendiculares são dois alinhamentos $(p_{/}$ e $p_{//})$.

Podemos empregar a simplificação do 1.º processo, adoptando a mesma orientação azimutal da carta nas duas operações II) e III): esta tem então a forma:

(III) — 1) Pelos pontos P''' e seu homólogo dirige-se o alinhamento $V\,P'''$ que intercepta o alinhamento p' em o ponto V. 2) A circunferência c' dos pontos P', P''' e V intercepta c em o ponto P.

Os instrumentos empregados são: nível, alidade, compasso e carta topográfica.

3 — A simplificação anterior é uma combinação útil dos dois processos. O 2.º justifica-se; é a aplicação dos Problemas I e II do n.º 48.

O ponto de estação determinava-se também se, em vez das direcções conhecidas dos alinhamentos, fossem dadas as paralaxes $\widehat{P'\,P''} = \widehat{p'\,p''}$, $\widehat{P'\,P'''} = \widehat{p'\,p'''}$ dos pares de pontos (P', P''), $(P'\,P''')$ em relação ao próprio ponto.

O processo geral é, pois (49, Probl. I), construir as paralaxes $p'\,p''$, $p'\,p'''$ de dois pares de pontos $(P'\,P'')$, $(P'\,P''')$ em relação ao ponto de estação (sendo o primeiro ponto P' comum às duas), descrever as circunferências c, c' em que as paralaxes estão inscritas, e determinar o 2.º ponto P de intersecção de c e c'.

É a resolução prática do problêma citado (n.º 49).

Pelas propriedades implícitas do seu princípio de construção, o gónio resolve em conjunto as partes 1) e 2) de cada uma das operações I) e II), dando ao *ângulo de alidades* a amplitude de cada paralaxe, e descreve imediatamente as circunferências c, c', sem determinar (directamente) os seus centros.

Podemos utilizá-lo, como compasso de paralaxes, na solução deste problema do «ponto de estação» em campanha, nos serviços topográficos do traçado de novas cartas, e nos problêmas de posição (triângulações) da geodesia, independentemente da orientação azimutal (explícita) que é automáticamente eliminada.

Fez-se uma tiragem de onze exemplares incompletos, contendo as primeiras 64 páginas do texto, que foram apresentados como dissertação para o exame de estado na E. N. S.