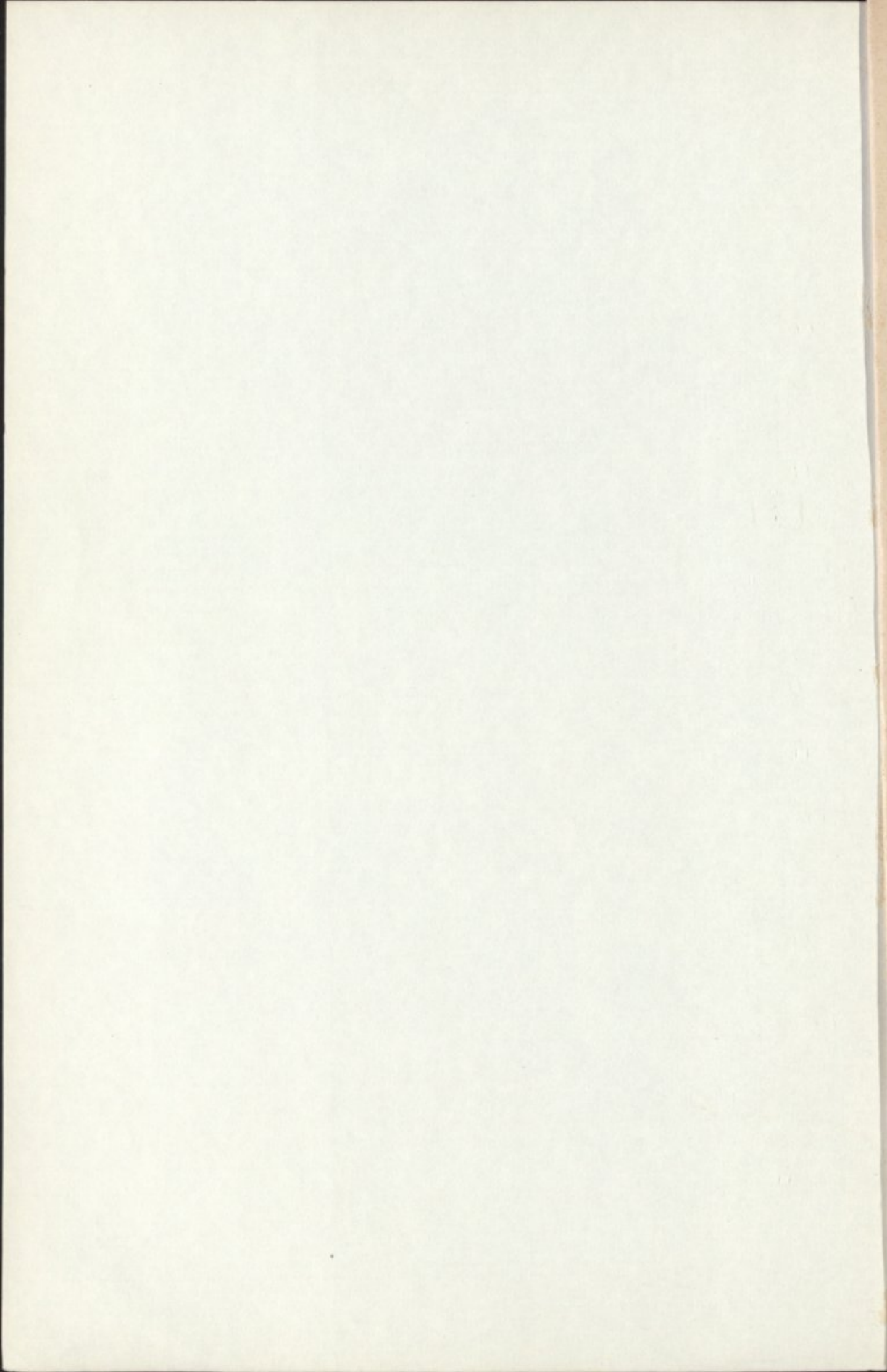


2

$$\frac{22}{4} = 36$$



8

ASOCIACIÓN ESPAÑOLA

PARA EL

PROGRESO DE LAS CIENCIAS

30
2
7



Universidade de Coimbra
Faculdade de Letras



1317642178

ASOCIACIÓN ESPAÑOLA

PARA EL

PROGRESO DE LAS CIENCIAS

NOVENO CONGRESO

CELEBRADO EN LA CIUDAD DE SALAMANCA

DEL 24 AL 29 DE JUNIO DE 1923

(SEGUNDO CONGRESO DE LA ASSOCIAÇÃO PORTUGUESA
PARA O PROGRESSO DAS SCIÊNCIAS)

TOMO I



11613

MADRID

JIMÉNEZ Y MOLINA, IMPRESORES

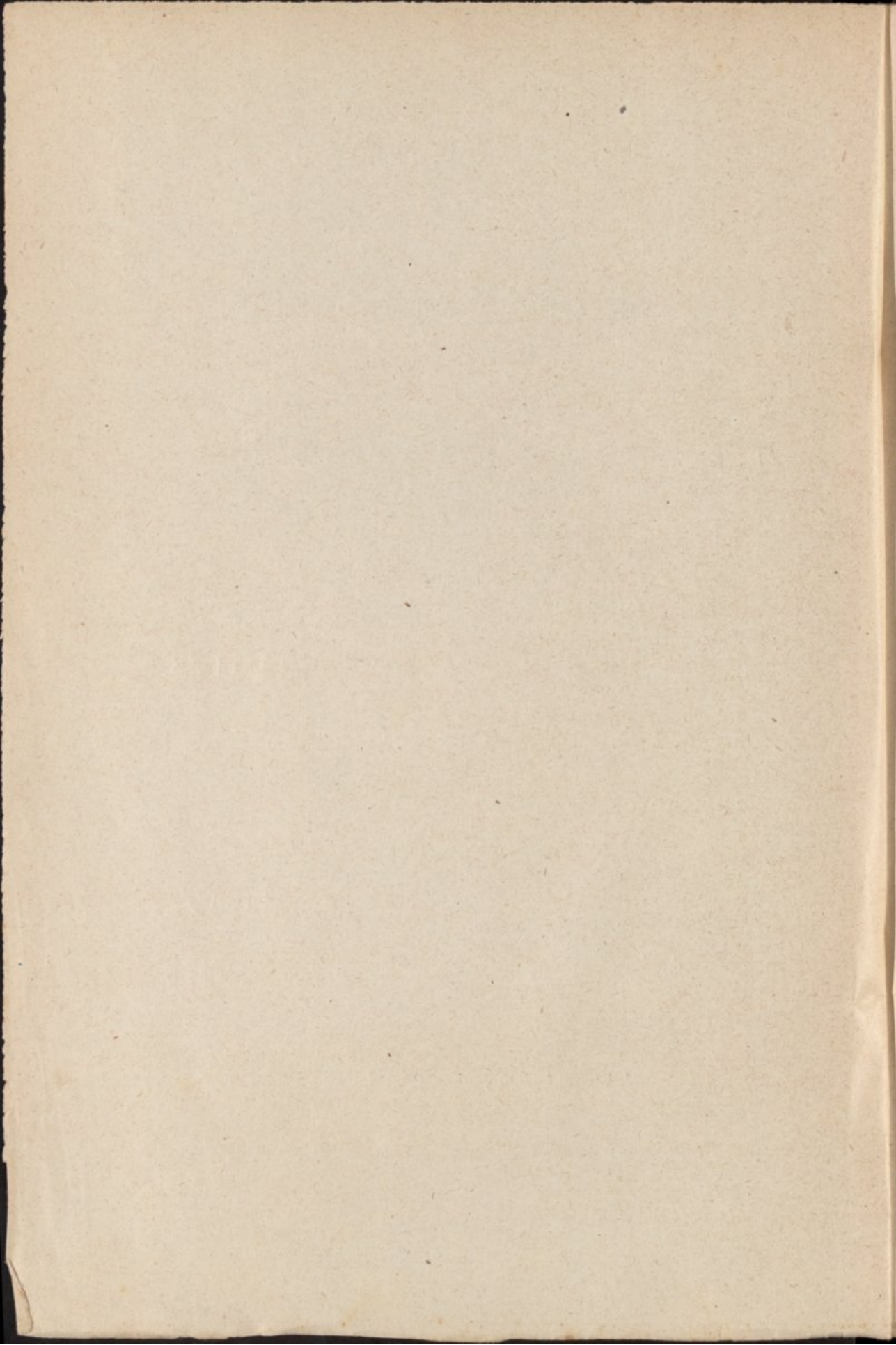
Teléfono J-315.

1923

LIVROS DO

Prof. Joaquim de Carvalho

22
4
36

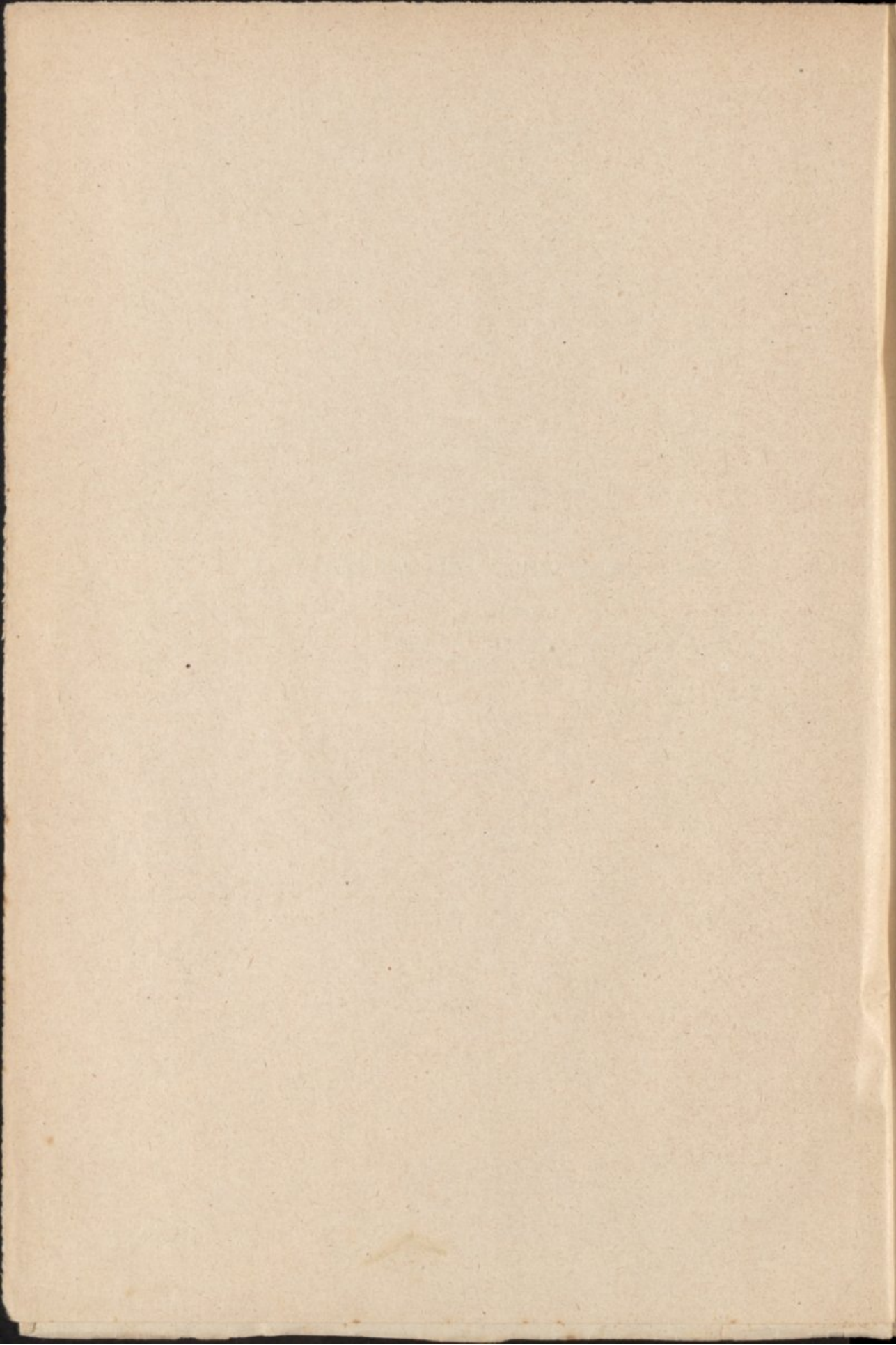


I

SESIÓN DE APERTURA DEL CONGRESO

CELEBRADA

EN EL TEATRO BRETÓN
EL DÍA 24 DE JUNIO DE 1923



DISCURSO INAUGURAL

POR EL

D R . RAMÓN TURRÓ

DIRECTOR DEL LABORATORIO BACTERIOLÓGICO MUNICIPAL
DE BARCELONA

La disciplina mental.

I

Requerimientos inexcusables me han traído a este sitio de honor con la misión de inaugurar las tareas de este Congreso, último de la serie que de año en año viene celebrando lo más granado de la mentalidad española. Deberes de disciplina, sin cuyo cumplimiento ninguna empresa es fecunda, me obligaron a aceptar el honroso encargo, y al escribir este discurso, a Dios le pedí ayuda, porque mi sensorio, por lo viejo, no es ya como aquellas plantas que se abren al ambiente de la primavera, sino como las que mustia la impresión de los primeros fríos del otoño. Si lo escribí trabajosamente por la torpeza mental que la edad trae consigo, hoy, que vengo a leerlo a este noble y sabio senado, no me atrevo a hacerlo sin ponerlo bajo el amparo de vuestra benevolencia. Tenedla conmigo y os la agradeceré en el alma.

En una Asociación como la nuestra, que abarca tantos ramos del saber, no me parece oportuno en la ocasión presente el desarrollo de un tema especializado, porque si interesa a unos, por ser de su dominio y competencia, no interesa igualmente a los que no se encuentran en iguales condiciones. Un tema general me parece más apropiado al acto que celebramos. Así lo entendieron no pocos de los que ocuparon el sitio que hoy ocupa el último de todos vosotros, y, aprendiendo de su ejemplo, reflexioné sobre el caso y al fin me pareció que quizá no sería ocioso ni estaría aquí fuera de lugar abordar el tema de la disciplina mental.

Vivimos en una época en que se piensa mucho. La fiebre de la producción intelectual lo domina todo, como si la preocupación más viva del hombre de nuestros días fuese la de dejar impresa la huella de su pensamiento. Los más humildes la escriben en el aire con sus discusiones vehementes. Y no es malo que se piense tanto, ni es malo que sean debatidos los más arduos problemas; lo incomprensible es que cuanto más se piensa, más crece la discordia que encona a los hombres que conviven en una misma comunidad, y cuanto más se discute, más aumenta la confusión en que viven. Las disensiones que en otras épocas hubo, ya por principios religiosos contrapuestos, por intromisiones de un poder en otro, por ambiciones desapoderadas, por odios inveterados, eran mantenidas con criterio tan cerrado, que cada bando apelaba a la violencia para imponer su voluntad al adversario; pero en la nuestra, lo que agita a las comunidades humanas de poco más de un siglo acá, en sentido progresivamente creciente, son problemas planteados por espíritus superiores, ideales que aspiran a mejorar la vida; y como esos problemas, en vez de llegar a una solución satisfactoria, o siquiera medianamente aceptable, se replantean poco tiempo después en otra forma, o esos ideales se renuevan sin cesar, ocasionando mudanzas y trastornos, cuyo término no se divisa, y esto es un mal grave, claro está que hay que achacar el mal de nuestra época o a que piensa demasiado o a que no piensa como debiera para acertar.

La inteligencia desempeña entre los hombres una función bienhechora y providente: la de ponerlos de acuerdo; y como esto no sea posible por lo enmarañado y complejo del asunto, les lleva a una avenencia o a términos de una transacción que no perturba la armonía que entre ellos debe reinar. Así proceden los hombres cuando proceden razonablemente. Mas como si ahora no se entendiera que sea este su más alto y noble objetivo, ella trabaja como nunca trabajó, ella crea proyectos en que nunca se soñó para conseguir la felicidad del hombre sobre la tierra, y con esto se da por satisfecha, como si con sólo pensar ya llenase su cometido. Y no es así. La inteligencia aspira a algo más trascendente: a uniformar el pensamiento humano de modo que lo que es verdad para unos lo sea también para los demás. Observad si no cómo proceden los hombres que cultivan las ciencias de observación, empíricas o experimentales, y las ciencias exactas. Su obra es estable por resultar de una colaboración incesante. Los disci-

pulos no destruyen la labor del maestro; la continúan con amor, depurándola de errores, si los hubiere, y ampliando los puntos de vista desde los que los hechos fueron interpretados y formulando teorías más vastas y comprensivas para explicarlos. Ese trabajo es fecundo, a condición de que voluntariamente se sometan a un mismo plan al investigar, a un mismo método al razonar, pues supuesto que esos hombres selectos no hubiesen renunciado al derecho de pensar libremente las cuestiones que estudian, la obra en que ahora colaboran abnegadamente no sería ya posible, y las ciencias que hoy se nos ofrecen como cuerpos de doctrina coherentes por todos profesados y acatados, serían un semillero de controversias.

Claro está que no son reductibles a un severo método científico un sinnúmero de cuestiones en cuyo estudio puede la inteligencia desenvolverse más libre y holgadamente. Es más: las mismas cuestiones que han pasado al dominio de la ciencia, que es un dominio común, antes de haberse llegado a un acuerdo perfecto y definitivo acerca de ellas fueron objeto de tanteos y divagaciones que hoy nos parecen banales y en su tiempo tuvieron un valor comparable al de los primeros pasos que da el explorador en un país desconocido. Por inseguros que fuesen estos primeros pasos, por tortuosos y extraviados que fuesen los primeros caminos, lo cierto es que, de no mediar esos trabajos preparatorios, ni se habría encauzado la investigación, ni trazado al fin el camino por donde podía avanzar sin obstáculos ni peligros. Ese trabajo preparatorio con que empieza el desglose y conocimiento de las cuestiones que más tarde vinieron a plantearse en forma de problemas estrictamente científicos tiene indudablemente un valor, y lo tiene tanto mayor cuanto más disciplinadamente se lleva a cabo. Cuanto más se aunan unos trabajos con otros al esclarecer los hechos que son objeto de litigios y encontrados pareceres, más se tiende a uniformar el conocimiento que de ellos se alcanza; pero cuanto más la opinión de uno, sistemáticamente sostenida, prevalezca sobre las otras y las absorbe y anonada, más se cierran los caminos, y el progreso detiene su curso y el conocimiento se estanca. Como ejemplo de una y otra marcha os recordaré a los alquimistas. Ninguno de ellos acertó con el camino recto que más tarde trazara Lavoisier; mas mientras unos renovaban las tentativas con el afán de llegar a algo nuevo, otros, desentendiéndose más de este trabajo, se aislaban en su torre de marfil y

desde ella disertaban. Dentro de los crasos errores en que todos se movían, es indudable que los primeros fueron más fecundos que los segundos, aunque no se creyera así.

Lo que apuntamos respecto de la muchedumbre de cuestiones o temas que fueron objeto de discusión antes de ser planteadas y resueltas metódicamente, pasando a formar parte del acervo de la ciencia positiva, pasa también en muchas otras que no son ni pueden ser todavía, en el estado actual de nuestros conocimientos, sistematizadas científicamente. Es natural que se las estudie, que se las desglose del bloque de que forman parte, que se las considere bajo los nuevos aspectos con que se presentan a medida que se las va desentrañando; pero también es natural que ese estudio se emprenda bajo los auspicios de la mayor disciplina posible. Dentro de los encontrados pareceres que sobre ellas han de reinar forzosamente, y dentro de las distintas facetas o aspectos con que irremisiblemente han de ofrecerse, importa ante todo y sobre todo que los esfuerzos se mancomunen y concurren a un fin común. Si así no se procede y cada uno se encastilla en su opinión personal y se pasa la vida rebatiendo las de los demás con ánimo de achicarlas para que la suya prepondere, no vamos por esos caminos de etapa en etapa al esclarecimiento progresivo de la verdad que estas cuestiones contuvieren, sino a la confusión y al caos. En todas ellas se ventilan cuestiones de hechos, y sobre ellos cabe llegar a un acuerdo más o menos cerrado, siempre que los observemos objetivamente tales como son; mas si en vez de aproximarnos a ellos prescindimos de su examen y nos empeñamos en interpretarlos a través de principios que personalmente nos parecen ciertos, nos figuraremos entonces que la inteligencia no tiene otra misión que cumplir sobre la tierra que explicar desde sí misma lo que no comenzó por estudiar detenidamente y con maduro juicio. Con proceder en esta forma subvertimos el orden natural con que se desenvuelven las funciones de la mente. Damos por supuesto que ella conoce los hechos, ya que los explica, y lo cierto es que para que pueda explicarlos debidamente es indispensable que primero los conozca clara y distintamente y sepa a qué atenerse respecto a su naturaleza y modo de ser íntimo. Si pasa a explicarlos sin más base que la de su preñación empírica o vulgar, esa inteligencia vive en plena indisciplina.

Con pretexto de que el pensamiento es libre se ha supuesto que

cada cual puede plantearse y aun resolver las cuestiones como mejor le parezca, más le agrade o convenga. Todos reconocemos que el pensamiento es libre y nos repugna que se pongan trabas a su libérrima expansión. En este punto coincidimos todos en nuestros tiempos, más o menos explícitamente. Los mismos que acotaron a la investigación determinados temas, por suspicacias y recelos que luego se ha visto eran infundados, los abrieron a su acceso y aun ellos mismos la emprendieron. Hoy nadie pediría a Galileo la retractación que en otro tiempo se le exigiera. Los ánimos se han serenado y los caminos han sido abiertos para todos; por todas partes se ha puesto la señal de vía libre. Y así debe ser, si bien lo miramos, porque cuando Dios infundió en el sensorio humano la inteligencia no lo hizo ciertamente para que el hombre corrigiese su obra maestra al limitar el uso natural de sus funciones en lo que le conviniese: ya cuidó él de cegarla ante lo inescrutable y de confiar a la gracia y a la fe la misión de llenar el antro tenebroso inasequible a la razón.

Mas si todos convenimos en que el pensamiento es libre, en que es abominable ponerle trabas, y a más de abominable es necio porque a fin de cuentas quien sale perdiendo es quien las pone, no todos hemos convenido igualmente en que cada cual es libre de opinar como quiera, sino como debe hacerlo, de conformidad con la naturaleza misma de la inteligencia. No se debe recabar para el pensamiento el derecho a pensar como se quiera, porque esto sería reclamar el derecho al libertinaje para la función más augusta de que disponemos. En el desempeño de su misión la inteligencia debe moverse dentro de las condiciones que por Natura misma le fueron prescritas. Rige también para ella una moral, y la moral se traduce en forma de deber cuando no es una palabra vana. Ese deber es cumplido religiosamente en los dominios de la ciencia estricta, y puede serlo porque viene consignado en forma de cánones en esa preceptiva que llamamos método; mas como quiera que esa preceptiva nos falta respecto de todas aquellas cuestiones hoy por hoy irreductibles a las austeridades de un método preciso, la inteligencia al investigarlos debe ajustar su conducta al mismo ideal en que se inspiró aquélla. La inteligencia se acerca a la verdad, que es su bien supremo, cuanto más impersonaliza el conocimiento, cuanto más lo uniforma entre los hombres, y llega a la cima que remonta con sus penosas jornadas cuando ese conocimiento se

hace perdurable a través de los tiempos, conservándose invariable y constante en todas las latitudes de la tierra. Mas la inteligencia llega a impersonalizar el conocimiento precisamente porque el objeto de que conoce no le es dado con ella, sino desde fuera de ella, como un elemento extrínseco al que debe acercarse y apresar, y con el que debe conformarse si de veras ansía conocerlo tal como exteriormente le fué dado; de otra manera se aleja de su objeto y se figura que lo conoce cuando interiormente lo reconstruye, según le parece debe ser. Entonces le ataca el mal del subjetivismo que, a mi juicio, es el mal de que padecen nuestros tiempos; entonces nos subvertimos por proceder al revés de como debíamos hacerlo, y nos figuramos que las cosas no son como son, sino conforme las concebimos; entonces es cuando damos en creer que con pensar basta, por traerse consigo la inteligencia las fuentes del conocimiento, y no hay más que dejarlas correr libremente para alcanzar el conocimiento de las cosas y los actos humanos. Visto el problema de la naturaleza de la inteligencia desde ese otro punto de vista, tan opuesto al anterior, ya no nos acicatea el deber de pensar las cosas como son o según su realidad objetiva, sino como miradas desde adentro nos parecen ser, y la moral o la disciplina interior que informaba nuestra conducta al pensar se relaja lentamente y acaba por extinguirse. Insensiblemente, al resbalar por esa pendiente nos hallamos en pleno estado de indisciplina mental. Nos parece entonces que con pensar basta para crear el conocimiento, y no advertimos que ese conocimiento no se conforma ya con la realidad de cuanto nos rodea por habernos abstraído a su contacto vivo al enclaustrarnos en nuestro interior y crear para nuestro uso un mundo nuevo, que no es ya trasunto del mundo en que moramos. Y aquí comienzan los conflictos entre la realidad viva que nos hiere y martiriza y la concepción que de ella nos formamos; aquí comienza la pugna y contradicción entre la vida práctica y la vida ideal que debíamos vivir.

Mientras la obra de liberación del pensamiento humano iniciada por Descartes quedó confinada en la esfera de la investigación filosófica, no ejerció una influencia decisiva sobre las comunidades humanas; mas en cuanto con la Enciclopedia y la Revolución francesa se dieron cuenta las gentes, muy lenta y trabajosamente, que cada cual era libre de pensar las cosas y los hechos como mejor le acomodase, porque estas cosas y estos hechos no son como son sino como se los

concibe, el curso de la Historia cambió de rumbo. Los pueblos se pasaron la vida en un reposo soñoliento mientras llevaron impreso en el alma el *initium sapientiae est timor Dei*; mas cuando comprendieron que el principio de la sabiduría está en la duda que mueve al cambio y a la renovación, se puso en juego el resorte de que nació la fuerza, desconocida hasta entonces, que todavía los está llevando por nuevos derroteros. No se les dijo que con la duda la inteligencia madura frutos de bendición cuando funciona debidamente reglada; no se les dijo que la duda debe mover la inteligencia dentro de la armadura de una férrea disciplina que la encarrile al bien y a la verdad; se les enseñó a dudar de cuanto una tradición secular sedimentó en su mente, fuese justo o injusto, mentira o verdad, como si no hubiesen heredado de sus mayores más que preocupaciones intolerables que urgía desechar cuanto antes y substituir con verdades más racionales y más propias del hombre digno de serlo. La duda sugerida en esta forma entronizó la indisciplina mental, y esa indisciplina nos empuja como una tempestad a una empresa de demolición de la que sabemos cómo empezó y no sabemos cómo acabará. Y como quiera que la duda es un estado angustioso del que forzosamente hay que salir para llegar a una conclusión, y como esa conclusión, por ser personal, es puesta luego en litigio y devorada por otras que momentáneamente parecen más adecuadas al caso, de ahí las mudanzas que sobrevienen, de ahí la inestabilidad, de ahí el desasosiego de los espíritus, de ahí la necesidad de recentrarse de una manera estable y la imposibilidad de conseguirlo. El mal de que adolece la época en que vivimos es un mal muy hondo y muy grave. Los espíritus frívolos, que no miran las cosas por la urdimbre sino por la haz, creen poder remediarlo con los paños calientes de nuevas reformas y nuevos ensayos. Precisamente con esas reformas y con esos ensayos comienza nuestra época su calvario, no por malas, sino por la fuerza recóndita que la impele siempre hacia un más allá. Observad si no cómo lo que en un momento dado de nuestra época nos obsesiona como el ideal supremo en que ha de moldearse la vida de un pueblo para lograr su máximo bienestar, se desvanece luego y otro aparece en lontananza, que también fascina y arrebató, y se disipa a su vez. Con estas mudanzas no se trata de corregir los defectos de la obra precedente, subsanar sus errores y perfeccionarla; se trata de volcarla y substituir la por otra que por ser la más nueva pa-

rece siempre la mejor. A nuestra época le falta el espíritu de continuidad y colaboración que tanto ha favorecido a otras. Todo envejece pronto, todo pasa y se arruina con facilidad. La inestabilidad es su característica dominante. Con las reformas que se emprenden, más que de curar un mal, se trata de atenuar sus efectos o retrasar su explosión. Nadie se forja ilusiones sobre su eficacia; se estima la obra provisional y cosa transitoria, como si estuviese en el ánimo de todos la existencia de la fuerza superior que ha de derribarla. Observad si no cómo el régimen que tras largos quebrantos y fatigas logró estatuirse para centrar la vida de un pueblo, a poco de apagada la luminaria con que su triunfo fué celebrado, empieza a roerlo el diente de una crítica descontentadiza y huraña; observad cómo esa crítica se hace de día en día más demoledora, cómo se inquietan los espíritus con los anhelos de otra cosa nueva. De poco más de un siglo acá difícilmente encontraremos en la historia de los pueblos contemporáneos el período en que hallaron aquella paz y satisfacción interior que se prometieron del ideal que implantaron. Algo desde la entraña viva los mueve hacia un más allá, incitándoles a renovar el ambiente en que respiran, como si siempre, mal avenidos con su suerte, viesen en lo presente la vía dolorosa que han de salvar para llegar cuanto antes a lo que el porvenir les depara como lo único digno de ser vivido. En esos anhelos, que se extinguen con una generación y renacen más potentes y bravíos con la que viene, cambiando de objetivo, hay que buscar la causa de la inestabilidad en que vivimos.

Convengamos en que la vida de nuestra época no es como la que vivieron nuestros mayores. Será mejor, será peor, tendrá más ventajas o más inconvenientes; no lo discutamos; pero reconozcamos el hecho de que no vivimos como ellos vivieron. No lo vemos así cuando observamos los sucesos aisladamente; mas cuando los filiamos unos de otros coherentemente, a modo de una serie de antecedentes y consecuentes, el desenvolvimiento de la historia contemporánea se nos ofrece como en una perspectiva y a la manera de un río cuya corriente remontamos de afluente en afluente hasta sus fuentes; entonces advertimos que la fuerza que la impulsa, su espíritu vector, es muy otro del que impulsó otras edades, tanto, que no tiene semejanza con ninguna de ellas. Como si sobre el planeta hubiese aparecido un hombre nuevo, no parece que la vida de nuestra época sea la continuación de la de nuestros

antiguos progenitores, sino otra que comienza con ella. Ese nuevo concepto de la vida se ha formado muy lentamente. Comenzó por la crítica ligera del legado de la tradición; de ligera pasó a irónica y sarcástica, zahondando más y levantando la duda de si había necesidad de desprenderse de todas las preocupaciones heredadas. Aplicando en este punto la duda metódica de que se había servido Descartes para otro objeto, se desvaneció el prestigio de las antiguas instituciones y se transformaron en otras que consentían al pueblo una vida más holgada y libre y evitaban los abusos del poder. Con ellas se inauguró un largo período de transición al que faltó el sentido de la medida. A cada nueva conquista o concesión surgieron más vehementes aspiraciones, con las cuales, más que de consolidar los beneficios obtenidos, se trataba de seguir adelante siempre en pos de una vida mejor, viendo en la presente la vida inactual. Como el caminante que marchara de frente hacia el horizonte visual y anheloso de alcanzarlo para entregarse al fin al reposo no reparase en la belleza de los paisajes que atraviesa, así las generaciones que se van sucediendo, fijos siempre los ojos en lo porvenir, no sienten la alegría del vivir presente. Lo que en nuestra época hemos dado en llamar ideales son etapas del camino recorrido; todos responden al anhelo que nos mueve a proseguir la carrera emprendida. So pretexto de que el hombre es un ser esencialmente perfectible, nos fascina la idea de que podremos transformarnos en otros de como Natura nos hizo. Si un anciano, algo más que centenario y tronco de cuatro o cinco generaciones, en compendiada síntesis revelase a sus últimos descendientes, jóvenes entusiastas de los ideales que hoy privan, las impresiones de su larga vida, les hablaría en esta o parecida forma: «Vivíamos muy mal en aquellos tiempos. De niño, recuerdo que mi padre sufrió mucho sólo por ver algo más claro que la generalidad del vecindario. Tuve yo también en mis mocedades ideales que me enardecían la sangre, como los que profesáis enardecen la vuestra. No os diré cómo eran, pues apenas quedó memoria de ellos; pero nos inspiraban una fe tan acendrada, que no concebíamos otros más perfectos para devolver a los pueblos la vida libre que sus opresores les quitaron. Cuando estuvieron en sazón sonó la hora de su triunfo, y poco conseguimos con ellos, porque en pos de nosotros vinieron otros con más amplias miras y más recio empuje, demostrando que la vida libre debía ser de otra manera de como la habíamos con-

cebido. Entre los que vinieron a destruir nuestra obra estaban mis hijos, mis propios hijos, los que fueron vuestros bisabuelos. Eran jóvenes, algunos adolescentes, y éstos precisamente, con alma generosa y pura, eran los que más vivamente apetecían la nueva forma del bienestar humano, hasta entonces no conseguida ni soñada. El tiempo me vengó de sus injurias como yo no quisiera. Sus hijos, los que fueron vuestros abuelos, hicieron con ellos lo que ellos hicieran antes conmigo. Después, yo no sé bien lo que sucedió ni cómo vino. Aquí y allá brotaron hombres eminentes que formaron escuela. Unos eran pensadores profundos, otros más imaginativos o sentimentales, y con ellos se inició una implacable revisión de valores, de la que salieron muy malparados los principios básicos de las comunidades humanas, hasta entonces respetados en lo que tienen de más esencial. Ya no se debatía si el Estado debía moldearse en esta o en la otra forma; fué la institución misma la que se puso en tela de juicio, y mientras unos mantenían la necesidad de abolirlo por ser fuente de tiranía, otros, al parecer más comedidos, trataron de derrocarlo hasta en sus cimientos y crear otro de nueva planta que fuese, a la vez que administrador universal de todos los bienes, quien tasase los valores del trabajo y señalase a cada cual la ración que más le conviniese con pródiga munificencia. Y mientras en la esfera de la idealidad pura formulábanse tan formidables proyectos para lo porvenir, en esta esfera también demoliábanse las normas de derecho que se habían estatuido para condicionar el ejercicio del principio de autoridad y evitar sus abusos, sacándose a discusión el principio mismo, como si fuese cosa baladí de la que pudiera prescindirse. Ese furor revisionista alcanzó luego a los valores éticos. Siempre se había creído que la condición inalienable de la convivencia de unos hombres con otros radica en su moralidad, hasta tal punto, que nadie había dudado hasta entonces de que sus transgresiones eran merecedoras de sanción; mas con pretexto de que la moral no debía inspirarse en principios religiosos, por ser preocupaciones de los viejos tiempos, se dió en crear una moral universal sin preceptiva, y mientras se estaban buscando los principios de razón en que fundarla, borrábanse de la conciencia humana las nociones del bien y del mal y se medían con el mismo rasero las travesuras de los listos con la caridad sublime de quien sabe sacrificarse por el prójimo. Y ese furor no se detuvo ahí: pasó más allá y atentó desaprensivamente contra lo que

ha sido estatuido por la naturaleza misma. La familia, el sagrado del hogar, oasis divino en que es posible la fruición inefable de la vida, fué considerada como el producto fortuito del ayuntamiento del macho con la hembra; el amor a la patria, que crearon las condiciones étnicas que seleccionan las razas y los acontecimientos de la historia fortalecieron al fundir el alma de los pueblos en un mismo crisol, se consideraba como un amor bastardo indigno del hombre superior, que sólo debe amar a la humanidad...

»Así empezó a formarse en el último tercio del siglo próximo pasado la ola que en la generación actual va adquiriendo proporciones gigantescas. La impulsa el ideal que por turno os toca a vosotros defender, ¡hijos de mis hijos! Probado hasta la evidencia, después de tantas tentativas frustradas, después de tantos ensayos fracasados, que el hombre no puede conseguir sobre la tierra la felicidad que anhela, hay que prescindir de cómo es y crear otro de nuevo, rey de los venturosos destinos que le aguardan. Él surgirá del cataclismo remozado y muy otro de como fué en los tiempos de barbarie que le corrompieron; él renacerá purificado y reinará sobre las tierras de promisión. Que cómo será eso nadie lo explica ni nadie lo sabe; pero todos lo creen. En este mesianismo ha venido a resolverse el ideal de nuestros tiempos; la fe lo inspira y la fe es la más poderosa de las fuerzas que en la tierra existen.

»Hijos de mis hijos: ved de dónde venimos, ved en dónde estamos, mirad adónde vamos, para que no os fascine la vorágine que os sorbe por momentos. Reflexionad que en lo humano el dolor es inevitable, que una vida feliz sólo puede ser soñada. Yo recuerdo haber leído, no se dónde, porque mi memoria es flaca, que hubo una tribu que perdió el fuego por culpa de las sacerdotisas que debían conservarlo. Mientras por toda la tribu se difundía una consternación inmensa, a las altas horas de la noche un niño vió en la cima de una montaña altísima una llama redonda, y la tribu alborozada se puso en marcha para recobrar el fuego que había perdido y tanta falta le hacía. Llegaron fatigadísimo a la cumbre del monte, y con dolor advirtieron que la llama redonda brillaba sobre otra montaña de una lejana cordillera, y hacia ella reemprendieron la marcha. Otro desengaño les esperaba al final de la nueva carrera, pues la llama redonda brillaba más lejos, en el confín del horizonte; y mientras los más animosos querían proseguir la marcha y

otros se resistían, una vieja les salió al paso y les preguntó que adónde iban tan mustios y desalentados, y ellos le contestaron que a buscar el fuego que habían perdido. Y la vieja les preguntó dónde estaba, y ellos, señalando con la mano la llama redonda que brillaba en el confín del horizonte, le dijeron «allí está». Y la vieja les miró compasivamente y les dijo: «Está muy alto para que podáis asirlo y traérselo a la tierra, »porque aquel fuego es la luna que declina.»

II

Nada más ajeno a nuestro propósito que rebajar el valor de nuestra época, a la que nos reconocemos deudores de enormes e inapreciables beneficios. Como juzgaría muy mal del Renacimiento quien sólo lo viese a través del fanatismo religioso que durante tan largos años ensangrentó la Europa, así sería injusto y propio de un entendimiento estrecho quien no viese en nuestra época más que sus extravíos. Si hemos apuntado la inquietud que la devora, no ha sido con ánimo de depreciarla, sino con otro fin muy distinto. A través de las vicisitudes y mudanzas que ha pasado, mucho de bueno ha sedimentado, grandes progresos ha conquistado, de que podemos vanagloriarnos ante la posteridad sin pecar de lisonjeros. Será desvariado, si queréis, pretender que el hombre, por ser indefinidamente progresivo, pueda cambiarse en otro y conquistar sobre la tierra la suprema felicidad en que soñamos a ratos perdidos; pero es indudable que, a pesar de las impurezas que nos rodean y de las contrariedades que nos asedian y nos amargan, estamos mejor de como estábamos, y el ambiente en que vivimos es más sano que aquel otro ambiente en que se nos mantuvo reclusos.

Sea como fuere, ya que no nos proponemos aquilatar los méritos o defectos de nuestra época, sino estudiar el mal que la aqueja, interesa a nuestro objeto hacer constar que la extremada facilidad con que pasa de unos a otros proyectos sin que acierte con uno en que pueda asentarse establemente, no depende de que haya dado en *la fatal manía de pensar*, como se dijo por doctores que pecaron de indoctos, sino de *su modo de pensar* de las cosas y los hombres. Por ese modo de pensar se da por supuesto que es el criterio personal lo que da al conocimiento su valor, cuando por una tradición secular, que comien-

za con los filósofos griegos y halla en Aristóteles su más alta y acabada expresión, se venía creyendo que la estimación del conocimiento no depende del criterio personal, sino de que se conforme o no con la realidad del objeto. Es Descartes quien interrumpe esta tradición y señala a la investigación filosófica ese nuevo derrotero. No sin razón le llama Bergson padre de la filosofía moderna. Mas para que pueda considerarse al sujeto juez inapelable y árbitro supremo del valor del conocimiento, es indispensable que la naturaleza de la inteligencia, del entendimiento, de la razón, como queráis llamarlo, sea comprendida de muy otra manera de como lo fuera por la filosofía helénica y los hombres cumbres de la filosofía escolástica que la comentaron y en algunos puntos la ampliaron admirablemente. Evidentemente, si la inteligencia saca de sí misma el raudal de sus conocimientos con ocasión de los elementos sensoriales que la sensibilidad acumula en sus vestíbulos, el conocimiento no tiene otro valor que el que el sujeto le otorga, y ese valor es y será siempre personal; mas si la inteligencia no tiene de qué pensar mientras el objeto del conocimiento no le sea dado extrínsecamente (como a la potencia le es dado un punto de aplicación para que pueda desarrollar sus efectos mecánicos), el valor del conocimiento será siempre impersonal, tan impersonal como lo que es dado como objeto. Entre estas dos direcciones contrapuestas se mueven las corrientes del pensamiento filosófico moderno. Con Descartes se inicia la corriente subjetivista con sólo concebir que la inteligencia funciona a la inversa de como se había entendido siempre; más tarde, con la intervención de Kant, el mismo problema se plantea bajo otro aspecto, el aspecto lógico del conocimiento, y en nuestros días sigue complicándose extraordinariamente en manos de los neokantianos. Admitida la desviación inicial que impuso Descartes, se ha ido tan lejos y de tal modo se han embrollado las cuestiones, que los neokantianos reconocen la necesidad de retroceder y volver a Kant para reorientarse. Mas hay que retrotraerse más allá de Kant y remontar hasta Descartes para dar con el punto en que nos desviamos de la línea que nos había trazado la filosofía griega, por cuanto la cuestión capital que hay que debatir es si la inteligencia trae consigo los medios de valoración del conocimiento, o si esos medios son ineficaces mientras no pueda contrastarlo con su objeto. En el primer caso las cosas son conforme las concebimos, y en el segundo caso debemos

concebir las cosas conforme son. Es la naturaleza misma de la inteligencia la que es discutida. ¿Debemos entenderla según el espíritu griego, reencarnado a través de los tiempos en el alma de la raza latina, o debemos entenderla de conformidad con el espíritu que informa al racionalismo moderno?

Supuso Descartes que el pensamiento es obra espontánea de esa cosa inmanente que en nosotros piensa. Del previo conocimiento de esta cosa necesitamos para llegar al conocimiento de Dios, al conocimiento de las verdades que desde ella fulguran y al de cuanto nos rodea. Suponed que el conocimiento de ella nos falta o que podamos dudar de su existencia, y ya no estamos seguros de cuanto nos dice, como no estaríamos seguros de cuanto otro nos dijere si dudásemos de su existencia. Y ésta es la razón de que se esfuerce Descartes en demostrar que hay que tomar esta cosa como punto de partida inicial por ser el único posible. Procediendo con discreción metódica, duda Descartes del testimonio de los sentidos, pues claro vemos que pueden alucinarnos y nos alucinan a menudo, y de esto colige que ninguna garantía tenemos de que no nos alucinen siempre. Punto tan dudoso no puede ser tomado como punto de partida. La duda de si el mundo exterior existe es posible; pero no es posible dudar de esa cosa íntima que al pensar nos sugiere esa duda. Su presencia se nos revela en sus efectos, en los conocimientos mismos que desde sí fulgura. ¡Ellos son como son porque así nos lo impone a manera de un *fiat lux!* Nos los figuramos trasunto de las cosas exteriores, y no caemos en la cuenta de que los más preclaros y de más limpio linaje son creaciones subjetivas. Un triángulo, una esfera, la línea, el punto, no son objetos sino ideas puras improvisadas en la mente por esa cosa recóndita. Mas al lado de esas ideas puras las hay de cosas que subsisten fuera de la mente que las creara y pueblan el ambiente. Y aquí es donde Descartes tropieza con una gran dificultad. Santo y bueno que no tengamos la menor duda de esa cosa que en nosotros piensa, pues la percibimos en sus efectos; pero ¿cómo afirmar que esas cosas exteriores son? ¿Cómo asegurar que en los objetos hay algo tan real como real es la *res cogitans*?

Renato Descartes salva la dificultad invocando el argumento ontológico que ideara San Anselmo para demostrar la existencia de Dios, y con su auxilio la vence, pues de ninguna manera podía la bondad

divina consentir que la vida de la inteligencia fuese como la del sueño al poblar el ambiente de fantasmas, y por eso infundió en ella la certidumbre nativa de que esos fantasmas son la representación de cosas subsistentes, conocimientos reales.

Tal es en síntesis la naturaleza de la inteligencia según Descartes. Era el padre de la filosofía moderna un espíritu ponderado, una inteligencia disciplinada (y quizás lo fué en exceso en determinado sentido), y no podía menos que plantearse el problema de la verdad y el error, del buen y mal funcionamiento de la inteligencia. Recusado el testimonio de los sentidos, las ideas que sobre los elementos que nos sugieren levantamos no tienen valor por venir de ellos, sino por la certidumbre o la evidencia con que las pensamos. Mas una idea que ayer nos pareció cierta, sometida a la acción de la rumia con que la meditamos nos parece incierta o equivocada; otra idea, en cambio, que ayer nos pareció brumosa y vaga se nos aparece hoy como verdadera. ¿Cómo descifra ese juez supremo que en nosotros piensa lo cierto de lo dudoso, lo veraz de lo engañoso?

Hay ideas de las que no cabe dudar. Como la luz y las tinieblas no se juntan, así se excluye la verdad del error. La verdad nos viene impuesta desde el sujeto mismo con el esplendor de su evidencia, y esa evidencia se nos denuncia interiormente por dos caracteres distintivos: la claridad y la distinción. Una idea es clara cuando, limpia de la ganga que la oscurece, brilla aisladamente con luz propia; una idea es distinta cuando las partes de que se compone brillan con la misma luz que su conjunto. Es la cosa misma que en nosotros piensa la que centellea desde su fondo la verdad en esta forma, y así es como la distinguimos del error.

No trata de explicar Descartes cómo la verdad es formulada; se limita a consignar cómo es dable reconocerla una vez creada. A manera de una anunciación de la *res cogitans* aparece la idea clara y distinta con tal evidencia que no necesitamos de más garantía que la del testimonio personal para aceptarla, y así dice textualmente que *las ideas claras y distintas son todas verdaderas*.

No dudamos que lo eran, efectivamente, las que en esta forma aparecían en la mente del genial matemático, del físico eminente, del ponderado observador de la naturaleza, del pensador profundo y admirable, ya que un largo aprendizaje le había enseñado a distinguir lo claro

de lo brumoso, lo distinto de lo confuso; sabía muy bien a qué atenerse acerca de este punto, aunque en ciertos momentos le fallase su pericia personal. Mas una vez erigido el criterio personal en árbitro de la verdad, aunque el común de los hombres no seamos Descartes, ni como él nos hayamos amaestrado con asiduidad en el arte de distinguir lo evidente de lo que parece serlo, es naturalísimo que todos nos sintamos igualmente competentes para diferenciar la verdad del error, la ilusoria quimera de lo real que a nuestro entorno palpita. Es también naturalísimo, una vez reconocido que el criterio de la evidencia personal es el supremo tribunal que ha de dirimir todos los litigios y resolver en última instancia todas las dudas que se ofrezcan, que valoremos los juicios de los demás según mejor nos parezca y demos a nuestros propios pensamientos el valor que más nos acomode. Por encima de mí no hay nada superior a que deba supeditarme. La *res cogitans* impone desde sí misma a quien está dotado de poderoso esfuerzo mental su modo o manera de enjuiciar las cosas y los hombres, y hay que respetar ese modo de pensar, y hay también que respetar el mío, aunque esté indotado y sea pobrísimo en vigoría mental, por ser también mi *res cogitans* la que impone mi modo de pensar.

Resuelto el problema en esta forma, por ley de su naturaleza el pensamiento es nativamente libre, personalmente libre, pues ni debe someterse o siquiera aconsejarse de jerarquías, ni obedece a más disciplina que a la que le viene impuesta desde el fondo mismo de la cosa que piensa. Ella nos anuncia el conocimiento al formularlo, ella lo inspira claro y distinto y es percibido como evidente, y de ese conocimiento decimos: *es la verdad*, y con esa palabra queremos significar: *es mi modo de entenderla*. Si al confrontarla con la de los demás advertimos que coincidimos con ellos, decimos que opinan como nosotros; si disienten, decimos entonces que opinan de distinta manera, y así es como se forma el concepto de *la verdad*, que varía con los hombres, con las latitudes y con los tiempos que un pragmatismo casero ha puesto de moda en nuestros días.

No tenía ciertamente el espíritu altísimo de Descartes ese concepto misérrimo de la verdad. Nunca creyó que fuese verdadero lo opinable, sino lo inopinable; pero como abandonó al criterio personal la apreciación de lo claro y de lo distinto, era inevitable que sucediese lo que después ha sucedido.

El punto de vista en que se sitúa Descartes al emprender su investigación memorable es indudablemente un mal punto de vista. Nada más cierto que la existencia de esa cosa que en nosotros piensa. Sabemos que todo cuanto comienza tiene una causa, y pues los fenómenos mentales comienzan, claro está que una causa los produce al determinar su tránsito del no ser al ser; mas esta causa yace oculta en la sombra densa que la abriga; de ella conocemos los efectos, y en el punto mismo en que comienzan a presentarse denuncian su presencia; pero como es en sí misma inobservable, nos limitamos a observar el efecto producido, y decimos entonces: siento un dolor, aparece en mi mente un color que antes no había, un sonido que interrumpió el silencio que reinaba en mi conciencia. La observación se extiende luego a las circunstancias que acompañan la aparición de este fenómeno, y mientras comprobamos que algunas de ellas son fortuitas o accidentales, de otras advertimos que son indispensables para que el mismo fenómeno reaparezca. Así descubrimos que sin que el oído sea golpeado por ciertas vibraciones, sin que en la retina se encienda un color bajo la influencia del lumínico, sin que ciertos nervios de la piel sean castigados por una excitación, ni el sonido, ni el color, ni el dolor aparecen en la conciencia. Bien sabemos que ninguna de esas sensaciones es producida por estas excitaciones, porque lo que realmente las produce es una causa más profunda y oculta a la que la ciencia experimental llama *causa primera*; pero también sabemos que cuando se excita el nervio acústico, la retina o los nervios doloríferos del tegumento externo a estas excitaciones sucede un sonido, un color, un dolor, por cuya razón la ciencia experimental las llama *causas segundas*. Estas causas segundas no *producen* el fenómeno; lo que lo produce realmente es la virtud que lo crea o determina su tránsito del no ser al ser; pero como nosotros no sabríamos nunca cuándo esa virtud o causa primera surtiría su efecto, nos servimos de las causas segundas, a que también llamamos condición del fenómeno, para preverlo, y así decimos: la causa primera dará de sí por su virtud creatriz ese fenómeno que llamamos sonido, color, dolor, a condición de que sea excitado el oído, la retina o los nervios del tegumento externo, y así lo afirmamos por cuanto una observación invariable y constante nos ha enseñado que así sucede efectivamente. Por esos medios y por la aplicación de esos procedimientos llega la ciencia experimental al conocimiento de cuándo y

cómo esa causa primera, que Bacon de Verulamio llamaba *sorda por no contestar a nuestras preguntas*, producirá su efecto.

Al considerar los fenómenos mentales como fenómenos condicionados, procedemos como los físicos, los químicos y los fisiólogos procedieron al estabilizar las respectivas ciencias en que se ocupan. Mientras estas ciencias vincularon los fenómenos a sus causas *productoras* o *primeras* no existieron; se daba de ellos una explicación sobrado vana o peregrina. ¿Qué sabríamos de la refracción de la luz de atribuirla a la virtud que cambia su dirección? ¿Qué de la descomposición o recomposición de los cuerpos al explicarla por las fuerzas ocultas que separan o agrupan sus elementos? ¿Qué de la acción fisiológica del opio al atribuirla a la virtud dormitiva de que con ironía nos habla Molière? Mas si en vez de vincular el fenómeno a su causa primera, explicándolo ilusoriamente por ella, lo vinculáis a su condición, lo inunda una nueva claridad, y su explicación se hace llana y comprensible. Decid que la luz se desvía cuando atraviesa una variable de densidad; que los cuerpos se combinan o descomponen siempre con unos mismos elementos y siempre en proporciones definidas y estables; que los fenómenos en los seres vivos no aparecen bajo la influencia de virtudes vitales, sino de condiciones que prefijan mecánicamente su reaparición, y saldréis de esa vana palabrería que parece profunda y suena a hueco como una caja vacía.

El grave pecado en que incurrió Descartes al vincular los fenómenos mentales a su causa primera consiste en no haberse abstraído a la preocupación de su tiempo, como se abstrajo en buena parte en los dominios de la física, aunque no con la claridad con que lo hizo Galileo al fundar la ciencia mecánica y por extensión la ciencia física. Aborto Descartes con la visión de la cosa que piensa, creyó conocer los fenómenos mentales mejor de como los conociera antes, cuando es la verdad que seguían siendo tan oscuros como lo fueron para la ciencia experimental los físicos, químicos o biológicos al ser vinculados a las virtudes que se invocaban para su explicación y que tanto exasperaban a Galileo. De situarse en otro punto de vista más asequible a la observación habría comprobado que también los fenómenos de la mente son fenómenos condicionados, tanto, que en igualdad de condiciones internas y externas, las inteligencias funcionan uniformemente, y a medida que esas condiciones varían, varían también los resultados. Con condi-

ciones o sin ellas, siempre es la *res cogitans*, siempre es la causa profunda lo que crea el conocimiento a manera de un *fiat*; pero nosotros estamos condenados a ignorar cómo lo crea y cuándo lo crea, mientras desconozcamos las condiciones que nos permitan preverlo. Explicar un fenómeno en el mundo físico o en el mundo mental es encadenarlo al antecedente a que sucede, y al eslabonarlo a una serie en esta forma adquirimos el conocimiento de su curso o sucesión, pues de cada uno de ellos sabemos cuándo aparecerá con sólo conocer la condición o fenómeno precedente que ha de serle antepuesto para que así suceda, y adquirimos también el conocimiento de cómo aparecerá, ya que esa modalidad depende de cómo le sea antepuesta la condición a que subsiga de una manera invariable y constante. Con esto no abolimos la *res cogitans*, como el físico no suprime la causa profunda en el mundo exterior con estudiar la sucesión de los fenómenos; queda en pie como antes; pero como de nada nos sirve para el conocimiento de la ilación de los fenómenos, la eliminamos, y fijando toda nuestra atención en la observación, procuramos descubrir con ella los antecedentes que prefijan su sucesión.

De observar la sucesión de los fenómenos mentales bajo la influencia de las condiciones que la prefijan, ya no es posible subscribir la tesis de que ellos nazcan de una potencia oculta que espontáneamente nos los impone, porque a lo que su voz nos dicta hay que atenerse; la cuestión cambia ahora de aspecto y muy radicalmente por cierto. Hay que aceptar el dolor, el color, el sonido, tales como por su causa productora nos vienen impuestos; pero como las reacciones de esta causa no aparecen sin que hayan sido previamente excitados ciertos nervios del tegumento externo, sin que haya sido impresionada la retina o las cuerdas del órgano de Corti, hay que aceptar a la vez que esa causa primera no reacciona sino cuando se anteponen estas condiciones, y que ellas aparecen como son según sean éstas. De la misma manera hay que aceptar que aparecen en la mente conocimientos claros y distintos, conocimientos borrosos o indistintos, y que unos y otros son impuestos por esta causa profunda que escapa a la observación más aguda y tenaz; mas si ella en sí misma escapa a la observación, no escapan a su vez las condiciones que preceden y acompañan a la formación de esos conocimientos claros y distintos o de los confusos, y según como sean éstas así serán aquéllos. Vistas las cosas del espíritu al

través de otro prisma, no diremos ya que podamos apreciar lo que es claro o lo que es borroso al arbitrio de nuestro criterio personal, pues ese criterio será siempre arbitrario mientras desconozcamos las condiciones en que es dado lo que llamamos claro y las condiciones en que es dado lo borroso. El problema no está ahí, ni es el testimonio de la conciencia el que ha de resolverlo, sino el conocimiento circunstanciado de las condiciones a que responden esas voces de la mente. ¿Qué más da que uno tenga por verdad lo que otro reputa falso? Si la verdad es un vocablo que se usa entre los hombres con un sentido riguroso y exacto, aquí lo que nos importa averiguar es a qué condiciones responde ese conocimiento y a cuáles responden cuantos no son valorados con la misma medida.

Véase, pues, cuánta razón nos asistía al asegurar que la cuestión de la verdad o el error que Descartes resolvía por el testimonio personal queda intacta y sin resolver en los términos en que la deja planteada. Nos dice que la idea verdad es siempre distinta y clara, y nos falta saber en qué condiciones debe ser dado lo que así llamamos; nos dice que la evidencia es signo de verdad, y nada sabemos de las condiciones en que esa evidencia debe ser dada.

Abiertas quedan estas cuestiones al ojo escrutador del observador; mas antes de abordarlas será conveniente examinar si todos los hombres consideran la mente como un condicionado con perfecta uniformidad de pareceres cuando prescinden de apriorismos y prejuicios y se atienen únicamente a lo que la experiencia les pone de manifiesto.

Todos convenimos en que los hombres que viven en condiciones análogas o similares, ya que una perfecta identidad es en este punto imposible, son los que más coinciden en su manera de sentir, pensar o querer. Si esas condiciones se perpetúan en un mismo medio a través de las generaciones, esos hombres se diferencian de los demás por sus caracteres físicos y por la base neurofisiológica que preside al desenvolvimiento de sus funciones espirituales, y así es como se forman esas comunidades que denominamos naciones. Su alma colectiva no es una invención de los profesionales del razonamiento personal, sino producto natural de la suma de coincidencias que a todos es común, y os explicaréis la génesis formativa de esa alma nacional si observáis la similitud de condiciones externas e internas de que es mero resultado. Si suponéis que las condiciones de ese pueblo cambian, observa-

réis cómo readapta su vida al nuevo ambiente. Imaginad al efecto que es conquistado por otro y reducido a la esclavitud. A menos de apelar al suicidio sublime de los numantinos, viene obligado a readaptarse desintegrando los procesos neurofisiológicos que fueron la base de su mentalidad anterior y rehacerlos de nuevo bajo el plan que su opresor le impone. La labor es ímproba y dolorosísima; pero como a todo se acostumbra uno cuando no queda otro remedio, acaba por resignarse y hasta por connaturalizarse, envilecido, con su nuevo estado. En eso se apoya Rousseau al afirmar con profundo acierto que *el hombre nacido en la esclavitud nace para la esclavitud*.

Véase, pues, cómo, inspirándonos en los dictados del buen sentido no podemos menos que reconocer que la inteligencia se hace según las condiciones que presiden a su formación. Es posible embrutecerla o anularla; es posible aguzarla; es posible orientarla en determinado sentido, como lo es desviarla en sentido opuesto; es posible uniformarla artificiosamente, como lo es lograr que discrepen unas de otras con entronizar el imperio de las opiniones personales. Quienes dispongan de los resortes que hay que poner en juego para mover la inteligencia humana, éstos han sido, son y serán siempre los amos del mundo.

Hay, sin embargo, condiciones que a todos nos vienen impuestas igualmente por preestablecerlas la naturaleza misma. Como no nos admira que la función visual sea idéntica en los hombres, tampoco nos admira que los conocimientos inmediatos que esa función sugiere sean uniformes en ellos. Tan natural nos parece que atribuyamos a los objetos unos mismos colores, un mismo tamaño, una misma forma, una misma distancia, que, sin necesidad de preguntárselo, damos por supuesto que nuestros semejantes proceden como nosotros, y como alguno discrepe le instamos a que lo mire mejor, bien persuadidos de que su aparato visual, por ser como el nuestro, en todas las mentes ha de surtir la misma clase de conocimientos. Si a pesar de todo acontece que donde nosotros distinguimos una variedad de colores haya quien sólo distingue un color más uniforme, o que la imagen óptica, que nosotros proyectamos al sitio en que realmente está el objeto, él la proyecta ilusoriamente a un sitio más próximo, le aconsejamos que se cure de la dolencia que le aflige, bien convencidos de que, una vez recobre su función visual la normalidad perdida, volverá a percibir en los objetos lo mismo que nosotros percibimos.

Lo que indicamos respecto a la suma de conocimientos que adquirimos con el auxilio de la función visual es igualmente aplicable a los demás sentidos, así externos como internos. Diferenciamos unos cuerpos de otros por el timbre con que nos suenan, por su olor o su sabor, por sus estados térmicos, por su blandura o resistencia, por su peso, por su dureza, por sus reacciones elásticas, etc., como en lo interno distinguimos la distribución topográfica de las partes de que se compone el cuerpo, la energía y extensión del movimiento, la dirección del mismo, el peso descentrado de la base de sustentación, la forma de las superficies articulares cuando resbalan o se comprimen, etc. La acuidad perceptiva varía entre unos y otros sujetos; pero la percepción misma o los conocimientos inmediatos que adquirimos respecto de nuestro propio cuerpo y de los objetos externos es común en todos ellos por responder a condiciones uniformes.

A todos estos conocimientos, base de la inteligencia y fundamento de la ciencia, los llamamos experiencias, y si nos preguntamos qué queremos decir con esta palabra nos contestaremos que con ella hacemos referencia a una clase de conocimientos que fueron formulados en la mente de un modo tan impersonal que no está a nuestro arbitrio modificar ni alterar, que en todas partes se formulan de igual manera, que ayer fueron como hoy y mañana seguirán siendo como siempre fueron, pues ni siquiera concebimos que venga un día en que el plomo bote como el platino o el marfil, que el vellón de lana pese como el plomo, que la sal no sea salada, y así en lo demás.

Ningún filósofo de los habidos se ha preocupado de definir lo que entendemos decir con la palabra «experiencia»; hablan de ella como si su sentido fuese tan claro que resultase redundante precisarlo y delimitar debidamente su extensión. No hablan, sin embargo, de ella como es, sino como la interpretan o se les figura que es. Así hemos visto que Descartes recusa todo valor al testimonio de los sentidos porque a menudo nos engañan, con lo cual da muestra clarísima de no entender que cuando bajo la sugestión del sentido se formulan en la mente experiencias no nos engañan nunca. Profundamente llevamos entallada la prenoción de que una experiencia rectificable ya no es una experiencia, aunque por tal se tuvo; lo es sólo el conocimiento inmediato que siempre se reproduce de la misma manera. Descartes no dudaba que todas las sugestiones del sentido son de la misma clase y condi-

ción, y se equivocaba en esto porque las hay perennes o estables y las hay falaces. Cómo sean las unas y las otras no es fácil explicarlo en breve espacio, pero el hecho es absolutamente cierto; tanto, que si la luz dejase de mostrarse desviada al pasar de un medio a otro, la física no sería posible, ni lo sería ninguna ciencia de observación, supuesto que el fenómeno no se percibiría uniformemente, sino de una manera versátil y cambiante.

Kant, por su parte, da a la palabra experiencia un sentido personal. En su sentir, la experiencia es la sensación pura, la impresión recibida; ella no es un conocimiento inmediato, sino *materia reductible a conocimiento*, y así dice que *ningún conocimiento procede de la experiencia, bien que todos comienzan con ella*. Para el físico, el químico, el naturalista, el fisiólogo, el mecánico, la experiencia es el conocimiento inmediato de un hecho. Que ese conocimiento se adquiriera como lo explica Kant o que se explique de otra manera, eso nada tiene que ver con el tema que debatimos. Aquí lo que se trata de hacer constar es que bajo la sugestión del sentido son formulados en la mente conocimientos fijos, inquebrantables, irrectificables, a los que el hombre de ciencia da un valor: el valor de experiencias. Kant, desentendiéndose de ese problema primordial, arbitrariamente supone que hay una materia sensorial, confusa y varia, amorfa y ciega en sí misma, reductible a conocimiento lógico, y esto es de todo punto inadmisibile por cuanto la experiencia de los particulares (el color, el peso, la viscosidad, la blandura, la dureza, atribuidas a los cuerpos) tienen por sí mismos un valor que no es de naturaleza lógica.

Esos primeros conocimientos que hallamos formulados en la mente sin saber cómo lo hayan sido se distinguen de los que sabemos introspectivamente cómo lo fueron, por caracteres claros. Ellos son uniformes, esto es, *universales*, por cuanto las condiciones con que Natura los preestableció en nuestra mente son las mismas con que las preestableció en la de los demás; ellos son *impersonales* porque no depende de nuestro arbitrio formularlos de otra manera de como lo hizo Naturaleza misma; ellos son *invariables* porque siempre se reproducen de la misma manera, en igualdad de condiciones, en todos los tiempos y lugares. Precisamente por coincidir todos los hombres en la apreciación del peso del plomo y de la lana, en la del color propio de la sal o del cobre, en la del timbre propio del cristal y del bronce; por care-

cer de la potestad de percibir estas experiencias de otra manera de como lo son y por reproducirse siempre en la misma forma, al conocimiento de estos particulares lo llamamos verdadero. Con la palabra verdad designamos el conocimiento estable; lo que cambia no lo estimamos verdad más que cuando alteramos el sentido de las palabras.

Sobre la base de esa muchedumbre de experiencias que fueron fijadas en la mente, cabe ya lanzarse a una empresa más alta. Cabe agruparlas diferenciando las que son propias de un objeto y las que lo son de otro, y con esa tarea llegaremos a formarnos el concepto empírico de las cualidades y propiedades que son comunes a una clase dada de cuerpos, inertes o vivos, y de las que los diferencian. Importa que esa labor se emprenda y prosiga bajo los auspicios de una severa disciplina, porque si acontece que porque hayamos visto el cobre humedecido le atribuimos la avidez por la humedad que hemos visto en la sal, pecaremos gravemente por falsear el concepto. Hay que observar, pero hay que observar bien, porque el concepto no tiene valor alguno sino en tanto que es la expresión general de lo que luce en la mente en forma de experiencias particulares; si son trasunto de ellas, serán verdaderos, que es como decir uniformemente percibidos o universales, impersonales e invariables. Como no somos libres de percibir los objetos de otra manera de como lo sugiere el sentido, así tampoco lo somos al conceptuarlos empíricamente; por incurias de la atención podemos faltar, y por esto se nos impone el deber de proceder con atención experta y avizorada. Al sentimiento de ese deber es a lo que llamamos en esta operación *disciplina empírica*.

Pasando de esta tan modesta como fecunda observación a un grado más alto del trabajo intelectual, veamos ahora cómo de la simple comprobación de un hecho o fenómeno empírico nos habilitamos para su reproducción experimental. Todos hemos experimentado con cierto asombro que al sumergir un bastón en una masa transparente de agua, al parecer se quiebra, y a eso lo llamamos una experiencia, porque siempre se ha visto así y seguirá viéndose de la misma manera. Mientras no pasamos de ahí, el conocimiento del hecho tiene un valor que se presupone al de toda posible explicación del mismo. Si se nos ocurre pensar que por ser el agua más densa que el aire la luz se quiebra al atravesarla, nos parecerá natural que al emitirse desde la parte del bastón sumergida nos la muestre en un sitio en que realmente no

está; mas nuestra presunción carecerá de valor mientras no generalicemos más y comprobemos que a través de todos los cuerpos transparentes de densidad variable la luz se desvía más o menos según ésta sea. No basta que lo pensemos con respecto a la densidad del agua; es menester que lo pensemos respecto a la densidad y lo comprobemos experimentalmente, ya que el pensarlo es personal, y lo personal en este punto no alcanza la categoría de verdad mientras no haya logrado impersonalizarse. Esa abnegada abdicación de sí mismo, esa renunciación de la propia personalidad, es lo que constituye lo que llamamos *disciplina experimental*, que no es en el fondo más que una moral de la inteligencia. Los que no sienten esa moral imaginan que con haber visto una y otra vez la reaparición del fenómeno ya está demostrado experimentalmente, y esta creencia tiene mucho de infantil, porque la verdadera demostración experimental no estriba en que uno lo haya visto, sino en que los demás lo vean, prefijando al efecto, clara y distintamente, las condiciones a que el fenómeno responde. El testimonio personal es nulo en la ciencia.

La muchedumbre de experiencias formuladas en la mente bajo la sugestión del sentido fraguan conceptos cuantitativos de carácter intensivo o extensivo. Como atribuimos a los cuerpos *a, b, c ... n* el color blanco, una forma dada de cristalización, un determinado peso específico, y conceptuamos que los cuerpos dotados de estos y otros caracteres cabe comprenderlos bajo la denominación de sal común, así inferimos de la intensidad con que es dado su color o su sabor, o del tamaño con que se nos presentan ante la vista o el tacto, los conceptos de mayor, menor o igual. Estos conceptos son incomparablemente más extensos que los llamados empíricos, pues a todas las experiencias que poseemos de los particulares son igualmente aplicables. Ni unos ni otros tienen el valor de la suma en que se computan los casos vistos, como se creyó por las antiguas escuelas empíricas, cuando se les consideraba producto de una simple repetición; hoy está generalmente reconocido que esos conceptos son la expresión verbal de los particulares homogéneos. Si no diésemos un nombre, el nombre de sal común, a todos los cuerpos que se nos ofrecieron con ciertos y determinados caracteres, no existiría este concepto; lo que sí existiría sería una serie de cuerpos que vendríamos obligados a observar uno por uno para cerciorarnos de que sus caracteres son comunes, y en

este caso el valor del concepto no rebasaría de los casos vistos, esto es, sería realmente empírico; mas con asumir los casos vistos bajo una misma denominación o vocablo, comprendemos de un golpe lo comprobado y lo comprobable, y esa comprensión tiene un valor *a priori* por tenerlo el signo verbal con que la expresamos. Lo propio nos pasa con el concepto, incomparablemente más vasto, de cantidad. Sólo los particulares son cuantitativos; mas sus variantes intensivas o extensivas las asumimos bajo una denominación común al expresarlas con un nombre que tiene un valor *a priori*, por ser el signo de todas ellas, de las vistas y las posibles. En realidad, los conceptos comienzan a formarse en la inteligencia con el lenguaje, que es su más vivo propulsor; de faltarnos estos símbolos verbales nuestra inteligencia no se elevaría tan por encima de la del resto de los animales.

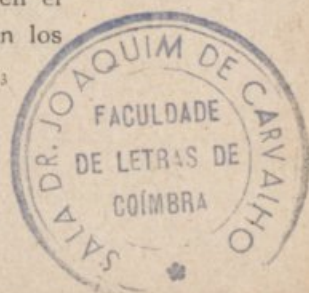
La clara comprensión de la naturaleza de los conceptos nos pone de manifiesto la automática disciplina con que se ha procedido en la elaboración de las verdades axiomáticas. Cuando decimos que el todo es mayor que las partes, o que dos cosas iguales o desiguales a una tercera son iguales o desiguales entre sí, expresamos en forma general y *a priori* por medio de la palabra lo que es dado en forma de experiencias particulares en la mente, de suerte que el axioma no es verdad porque así lo concebimos, sino que lo concebimos así porque así es en las experiencias de que fué inferido. Como éstas son impersonales y son universales por haber sido impuestas a todos los hombres por unas mismas condiciones, así es universal e impersonal el axioma con que todas ellas son designadas. De ahí que al proceder a la inversa de como se procedió en la elaboración del axioma y descender a la revisión de los particulares, no podemos hallar un solo caso en que la parte sea mayor que el todo, ni un solo hecho que contradiga ningún otro enunciado del mismo jaez.

Lo propio cabe decir de los principios que son fundamento de la ciencia experimental. Mirándolos bien no son principios, sino resultados. Al afirmar que la materia o el movimiento son indestructibles, afirmamos de un modo general lo que nunca se ha visto en las experiencias particulares, y como no se ha visto nos faltan elementos representativos con que conceptuar lo contrario. Otra cosa sería si una sola experiencia nos hubiese mostrado la aniquilación de una porción de materia o la extinción de un movimiento; esta excepción

conocida levantaría la duda de si existen otras que nos son desconocidas.

En la esfera del razonamiento discursivo, la inteligencia, en apariencia al menos, parece moverse más libremente de lo que se mueve en esas regiones en que tan trabada se nos muestra de las condiciones externas a que responde. Se nos figura que los teoremas se improvisan en la mente del matemático que los descubre a modo de intuiciones de súbito alumbradas por una virtud misteriosa. Nada de esto es cierto. Ellos se elevan a la categoría de verdades precisamente por ofrecérsenos con los mismos caracteres con que se nos ofrecen las experiencias, los conceptos que de ellas se inducen y los principios del orden experimental. Como un cambio en la materia inerte supone otro cambio precedente que se puso como su condición; como el ser vivo supone el esqueje, el huevo, la semilla de que salió; como la célula supone la segmentación de otra célula o la irrupción de las células contenidas en la madre, así el enunciado teoremático supone una gestación preparatoria consciente o subconsciente y no el relampagueo de una cosa oculta. Sin la preexistencia de precedentes no hay enunciados posibles; la generación espontánea del conocimiento en la mente es tan desatinada como la de los seres vivos. Una verdad viene de otra por descenso lógico; el consecuente cae como un peso del antecedente que virtualmente lo contiene, y así es como sale de la umbría a la luz.

De ahí que lo que lógicamente condiciona al consecuente es el antecedente; como fuera falso, falso sería también aquél. La garantía de que los antecedentes de que necesitamos para formular sus respectivos consecuentes sean verdaderos la hallamos en los que fueron puestos como la condición de su génesis, y la de éstos a su vez en sus precedentes, formando con esos eslabones la cadena de que resulta el conocimiento matemático. Ningún teorema es verdad aisladamente considerado; pasa a serlo cuando se eslabona a la serie de que forma parte al continuarla; entonces es cuando se advierte que el último enunciado no puede ser formulado de otra manera de como lo imponen los precedentes de que se desprende, por mucho que en ello nos empeñemos. A la operación que llevamos a cabo para cerciorarnos de que no cabe pensarlo de otra manera de como es formulado en el enunciado es a lo que llamamos *demonstración*. Con ella se aducen los



datos o antecedentes más inmediatos de que se requiere para que el nuevo enunciado no pueda ser comprendido de otra manera de como lo es, y se da por supuesto, además, la conmemoración subconsciente de todo el proceso mental que basamenta la última conclusión. Demuéstrase, por ejemplo, el valor del triángulo dándose por supuesto el valor de los ángulos alternos e internos; si hubiera dudas respecto de esos últimos valores la demostración no sería posible; mas si hubiere duda acerca del valor del espacio comprendido entre dos líneas intersecadas en un punto común, si la hubiere acerca de la comprensión de la abertura de esas líneas o acerca de la de las líneas o del punto, el edificio lógico montado sobre esta base de derrumbaría; mas como no la hay, por comprender todos uniformemente que el espacio limitado por las líneas es mayor, menor o igual a otro, por ser uniforme la comprensión del punto, la de la dirección en que están colocados, nos hallamos con que ni el conocimiento del último eslabón, ni el de los eslabones intermedios, ni el de las experiencias inmediatas que tomamos como puntos de partida pueden ser puestos en duda, por ser impersonales, invariables y universales, caracteres distintivos de lo que hemos convenido en llamar verdad.

Al prefiar en esta forma las condiciones en que debe ser dada la demostración para que realmente lo sea, es cuando advertimos que el conocimiento se nos presenta *claro* si de antemano lo vinculamos a la condición lógica a que sucede; mientras esta condición nos sea desconocida podrá parecernos claro personalmente, pero ignoramos si siempre será apreciado de la misma manera, pues no podemos responder de si llegará un momento en que no lo veamos así; ahora sí que podemos responder de ello, pues una vez prefijadas las condiciones a que sucede nos es dable afirmar que siempre reaparecerá en la misma forma. Como ese conocimiento fuera complejo (y todos lo son en esta esfera) al vincular las partes de que se compone a sus respectivas condiciones, las vemos simultáneamente *claras*, o sea *distintas* en su conjunto. No las vemos claras y distintas sino en tanto que las *demostramos*, lo cual equivale a decir: en tanto no tenemos a la vista el antecedente lógico que condiciona su aparición.

Descartes invierte los términos del problema que se propone resolver al decirnos que las ideas claras y distintas son verdaderas, cuando lo cierto es que únicamente cuando son verdad son claras y distin-

tas. Al conocimiento de su verdad llegamos por medio de la demostración que nos pone de manifiesto cuándo son claras y cuándo son distintas; mas el punto de vista en que se había situado no le permitía el examen de las condiciones en virtud de las cuales el conocimiento se hace claro y distinto. Supuso que la evidencia con que brillan cierta clase de conocimientos venía nativamente impuesta por su causa creadora, o la *res cogitans*, y así se pudo decir: lo que es evidente es verdad. Enfocada la cuestión desde otro punto de vista, se advierte que la verdad no es tal porque sea evidente, sino porque se demuestra, bien por medio de la ilación lógica de los términos, bien por imponérsenos por condiciones a cuya influencia no es dable substraerse, como ocurre con la experiencia o con los postulados; cuando esta imposición falta y llegamos por medio del discurso a ciertas y determinadas conclusiones, también se acusan como evidentes aunque no sean verdaderas; pero esta evidencia es psicológica o personal y de ninguna manera garantiza la veracidad de estas conclusiones. A la vista de un experimento decisivo y concluyente para resolver una cuestión hasta entonces litigiosa o a la vista de una demostración matemática, decimos: ¡es evidente!; y con esta palabra no queremos significar que el experimento o la demostración nos han convencido por despertar el sentimiento de su evidencia; lo que nos ha convencido y extinguido la tensión en que estaba nuestro espíritu antes de serlo es el experimento o la demostración misma; con su retorno al reposo sobreviene ese estado emocional al que llamamos evidencia. La evidencia acompaña al conocimiento independientemente de que sea verdadero y con tanta mayor intensidad cuanto mayor esfuerzo costó. Ocurre con ella respecto del conocimiento lo que ocurre con el sentimiento estético respecto de la percepción de la belleza. A la vista de un bello cuadro requiérese un esfuerzo perceptivo para la apreciación de sus líneas, de su relieve, de la gama de matices conseguida con la mezcla de los colores en la paleta, y que es como la adivinación de lo que pasa en la retina, y a ese esfuerzo perceptivo le acompaña un estado difusivo de naturaleza emocional, al que se llama sentimiento estético; mas si el cuadro despierta en el espectador afecciones personales, su emoción nada tiene de estética en el sentido estricto de la palabra. Así comprobamos que no son los que más palidecen o lloriquean los que mejor aprecian su mérito, sino los que más atienden y se fijan. Tampoco son

los que con mayor evidencia sienten su labor mental los que más aciertan, sino los que mejor la demuestran, porque ellos son los que obligan.

III

Los campos se deslindan según fijemos en uno u otro sentido el concepto que nos formamos de la naturaleza de la inteligencia. Si, de conformidad con la tesis helénica, creemos que el objeto de que conoce le viene impuesto exteriormente, se nos hace fácil la comprensión de que si ese objeto es siempre dado de la misma manera, como la inteligencia se le ajuste, su conocimiento es invariable a través de los tiempos, y es universal por cuanto en todas las inteligencias es formulado de igual manera. De ahí el conocimiento estable a que llamamos verdad. En este punto el problema que se nos plantea es el de *cómo se ajusta la inteligencia a su objeto*. Aunque es de solución difícil y motivo de graves controversias, prácticamente lo hallamos resuelto con observar cómo procede el investigador en la construcción de las ciencias empíricas, experimentales y racionales o exactas. De esta observación resulta por manera incontestable que el investigador comienza por renunciar a la libertad de pensar, sometiendo la facultad a una austera y severísima disciplina. Si se propone clasificar los objetos que pueblan el ambiente, los acepta tal como le vienen impuestos por la experiencia, por no ser obra suya, sino producto de condiciones externas; y así es como empieza por rendir un culto ferviente al conocimiento impersonal. Que se explique o no se explique cómo es que la visión nos muestra la luz refractándose, polarizándose o desplegando sus colores, ello es que siempre se ha visto así y así seguirá viéndose mientras la función visual sea como es. De conocerse las condiciones fisiológicas bajo cuya influencia son sugeridos estos conocimientos inmediatos, no por esto dejarían de presentársenos como se presentaron siempre, ni los conoceríamos mejor que ahora; sabríamos entonces cómo es que los percibimos así, y nada más, pues todo seguiría igual.

De proponerse el investigador conocer cómo cabe reproducir estos fenómenos, planteándose el problema experimental, comienza también por renunciar a la libertad de concebirlo como mejor le parezca, resignándose a concebirlo tal como es. Él ignora cómo es que la luz se des-

vía en ciertas ocasiones de la línea recta que en el momento anterior seguía; conoce el hecho por experiencia, pero nada sabe de su causa. Si acierta a relacionar esa desviación con la mayor o menor densidad del nuevo medio que la luz atraviesa descubre la condición impersonal que objetivamente ha de ser antepuesta para que la visión nos la muestre desviada. Con ello sigue desconociendo las condiciones fisiológicas bajo cuya influencia es formulado el conocimiento inmediato de la luz desviada; pero a partir de este momento por siempre más adquirió el conocimiento de que para que los ojos la muestren así es indispensable que a su paso tropiece con una variable de densidad.

A la misma disciplina se somete el investigador cuando, abstraído al paracer de cuanto le rodea, formula un teorema nuevo. Tampoco en este punto es cierto que ese teorema sea verdad porque la *res cogitans* lo imponga clara y distintamente, como decía Descartes; lo es por *el modo de pensarlo*; lo es por el conocimiento previo de las condiciones que prefijan su aparición, de suerte tal que no pueda ser formulado de otra manera de como lo es, conforme se ha explicado anteriormente. Recordad al efecto que la determinación del valor del triángulo no es posible sin la determinación previa del valor de sus ángulos; la garantía de la primera verdad está en que lo sea la anterior, como la garantía de ésta está en los precedentes de que devino, y así es como de eslabón en eslabón vamos descendiendo por la cadena hasta llegar a los conceptos de la abertura mayor, de la abertura menor o de dos aberturas iguales, inferidas de la suma inmensa de experiencias en cada una de las cuales la cantidad nos es dada en forma de particulares. Con vincular el nuevo teorema a los teoremas precedentes en que se apoya y de los que se desprende, decimos que lo demostramos, y con la palabra demostración queremos significar que por sernos conocidas las condiciones que prefijan su formación y nacimiento comprendemos que no puede ser formulado de otra manera de como lo ha sido, ni nadie podrá conseguirlo por mucho que en ello se esfuerce. Decimos entonces que ese conocimiento es claro, y si nos preguntamos qué significamos con la palabra claro, advertimos que brota del conocimiento previo de la condición lógica a que responde; decimos que es distinto, y al precisar la significación de la palabra, advertimos que cada una de las partes de ese conocimiento complejo está vinculada respectivamente a las condiciones o antecedentes lógicos de que

devino, de suerte que el nuevo teorema no es verdad porque aparezca claro y distinto en la mente, sino que es claro y distinto por ser verdad, y es verdad porque la ligazón lógica de los antecedentes de que devino no puede hacerse de otra manera de como se hizo, a cuya operación es a lo que damos el nombre de *demonstración*.

Profundamente penetrados del modo como piensan y proceden los hombres beneméritos que formulan el conocimiento estable, a todos asequible, a todos gratisimo, surge en la mente el ideal en que debemos inspirarnos para comportarnos como ellos en todas aquellas cuestiones que hoy por hoy no son reductibles a un método definido y concreto. Ese ideal nos ha de llevar siempre a la impersonalización del conocimiento durante la observación serena de lo que ha de suministrar a la inteligencia su más sano y substancioso alimento. Nunca sabremos cómo son las cosas y los hombres mientras no nos acerquemos a ellas con amor y no las observemos. ¿Qué sabe de la luz, qué sabe de los colores con que viste los objetos quien cierra los ojos y vive abstraído en su recuerdo? Pues eso mismo sabe de las cosas y de los hombres quien en vez de observarlos se adentra consigo y los imagina. Cierto que para la práctica de esta observación nos falta la preceptiva que guía a los hombres que cultivan la ciencia; pero no nos faltan modelos que imitar. Al legar a la posteridad los discípulos de Sócrates la obra de su maestro, le legaron un monumento comparado, con el cual el propio Parthenon resulta una obra de quincalla. El buen sentido la inspira, el buen sentido la dirige, y si os preguntáis qué es eso del buen sentido que todos invocamos cuando queremos salir de los apuros en que nos meten los desvariados que no lo tienen, no os será difícil adivinar que es el producto de una observación feraz y abundante, perfectamente digerida y mejor asimilada.

Nunca, inspirándoos en el buen sentido, os preguntaréis *por qué* las cosas y los hombres son; siempre os preguntaréis *cómo son*, y para saberlo tenéis necesidad de observarlo, examinándolo detenidamente. Oís a cualquiera de esos rebeldes que andan sueltos *por qué* ha de haber una autoridad que frene y regule las acciones humanas, y en seguida os diréis con aire conmisericordioso: ése no se ha preguntado nunca *cómo es* que la autoridad es indispensable para que sea posible la convivencia de unos hombres con otros; ése no ha observado nunca cómo son los hombres.

Oís preguntar a uno que *por qué* la mujer no ha de ser como el hombre, y en seguida, como os inspiréis en el buen sentido, os contestáis: ése no se acuerda de que la mujer es madre y el hombre no lo es ni sirve para el caso; ése no ha observado que es la mujer la que ama el fruto de sus amores como ama una parte integrante del propio cuerpo mientras lo lleva en la matriz, y así sigue amándolo cuando se corta el cordón umbilical para trasplantarlo al mundo exterior; ése no sabe que sin detrimento de la madre la mujer no debe ser hombre. Y así pensando, le volveréis la espalda y le dejaréis que siga su camino con la cabeza llena de viento, y como topéis con vuestra mujer os decís: ¡bendita tú que eres la madre de mis hijos!

Oís a un razonador empedernido preguntar *por qué* nos hemos de sacrificar por la patria y tolerar que se nos entierre en olvidada zanja, quizá sin una cruz que con los brazos abiertos ponga nuestra sepultura anónima bajo el amparo del cielo, y os parece que ese razonador blasfema. Sin que se os ocurra pensar que si otros no se hubieren sacrificado por ella no la tendríamos, y entonces veríamos la mucha falta que hace, protestáis de que sea objeto de menosprecio un sentimiento que os viene impuesto por la naturaleza misma, y estimáis sacrílego y hasta ruin que eso se discuta, ya que se funda en una de aquellas razones que la razón no comprende, de que nos habló Pascal.

Así, y por el estilo, juzgaréis de las cuestiones que se os ofrezcan en el camino de la vida si el buen sentido os inspira y os guía. Mas, si de conformidad con el nuevo espíritu, pensáis que las cosas y los hombres no son como las exhibe la observación, sino conforme el entendimiento las concibe y explica, entonces todo cambia y se subvierte y os sentiréis transformados en hombre de una casta más superior a la que pertenecisteis antes. Los fallos del buen sentido, que tan decisivos os parecieron, los estimaréis ahora propios del hombre que renunció a pensar de las cosas y los hombres como deben ser, so pretexto de que hay que pensarlas como son. Ya no creeréis que el objeto es dado impersonalmente como el término al que precisa ajustar el conocimiento. Si habéis llegado hasta Kant se os figurará que *el objeto del conocimiento* es obra constructiva de la mente, levantada con materiales sensoriales amorfos y ciegos en sí mismos, objeto que nada tiene que ver con el que percibimos por medio de la experiencia bien entendida. Si no habéis llegado hasta Kant por haberos detenido en

Descartes, los términos en que el problema se plantea os parecerán más claros y transparentes, brillando al sol y sin brumas. Los objetos son conocidos como son, pero no porque la mente obedezca a las condiciones externas que en ella les imponen en forma de experiencias, sino porque Dios infundió en esa mente la certidumbre nativa de que las imágenes con que se los representa responden a cosas reales, a objetos subsistentes por sí mismos. Mas como quiera que esas representaciones unas veces sean falsas, otras ilusorias y otras verdaderas, no sabríamos a qué atenernos sobre su valor efectivo si la *res cogitans* no nos presentase las que son verdaderas clara y distintamente con el esplendor de la evidencia, mientras que las que no lo son nos la presenta indistinta y confusamente. Y he aquí cómo con esas claridades interiores queda a nuestro arbitrio personal separar el grano sano del picado; he aquí cómo con sólo atenernos a nuestro juicio personalísimo podemos separar la verdad del error, el buen pensar del extraviado. Las cosas y los hombres ya no son sino conforme las concebimos si nos parecen evidentes.

Ese principio crea en los hombres un nuevo modo de pensar que en nada se parece al de las inteligencias disciplinadas que cultivan la ciencia, ni al modo de pensar socrático que cultivamos en forma de buen sentido. Connaturalizados con ese nuevo modo de pensar y adquirida con la habitud la persuasión profunda de que lo que concebimos como más perfecto y acabado, más perfecto y acabado es; que lo que más racional nos parece es más valioso que la realidad viva que hemos renunciado a observar, damos, por ejemplo, en imaginar que una forma de gobierno es más perfecta que otra, y sólo por serlo hay que otorgarla a un pueblo como un bien y una mejora. Y puede que lo sea; pero si esta consideración nos autoriza para implantarla, el buen sentido nos grita al oído que son los pueblos mismos los que con su historia se crearon los moldes en que viven, y si tratamos de embutirlos en otros nuevos obramos con violencia por obligarlos a vivir de otro modo de como vivieron siempre. Mas el oído permanece sordo a la viva voz de la experiencia, porque si la razón desde el pináculo de su gloria lo dicta así, ¿qué puede haber en el mundo superior a sus dictados omniscientes?

Hubo en la antigüedad un pueblo, el romano, que se hizo dueño del mundo y es orgullo de la raza a que pertenecemos, pues de su es-

tirpe somos. Pues ese pueblo, observando al hombre como es y observando además a los pueblos que vinculaba a su dominio, conforme eran según su religión, usos y costumbres, creó formas de derecho tan objetivas, tan adaptadas a la naturaleza humana como un traje cortado a la medida del individuo que ha de usarlo. Fué una obra de colaboración sabia y fecunda que perduró durante siglos con eclipses y renacimientos. Observad, sin embargo, que el espíritu que movía al legislador romano no es el mismo que mueve al de nuestra época. Sobre éste gravitan como un peso muerto las diferentes concepciones que se vienen sucediendo acerca de la naturaleza del hombre, y ateniéndose a los principios, a los sagrados principios, más se preocupa de ser consecuente con la doctrina que impera a la sazón, que de adaptar las leyes al modo de ser de los pueblos. Y ¿qué más natural que así sea si es cierto que las cosas y los hombres no son como son, sino como eventualmente la razón los comprende?

De multiplicar los ejemplos, al pasar de una cuestión a otra, siempre observaríamos la distinta solución que reciben según se las someta al fuero de la razón libre o al fuero de la experiencia a que esta razón debe ajustarse cuando de veras desea conformarse con la realidad de las cosas y los hombres; el contraste es tan vivo que sangra a menudo.

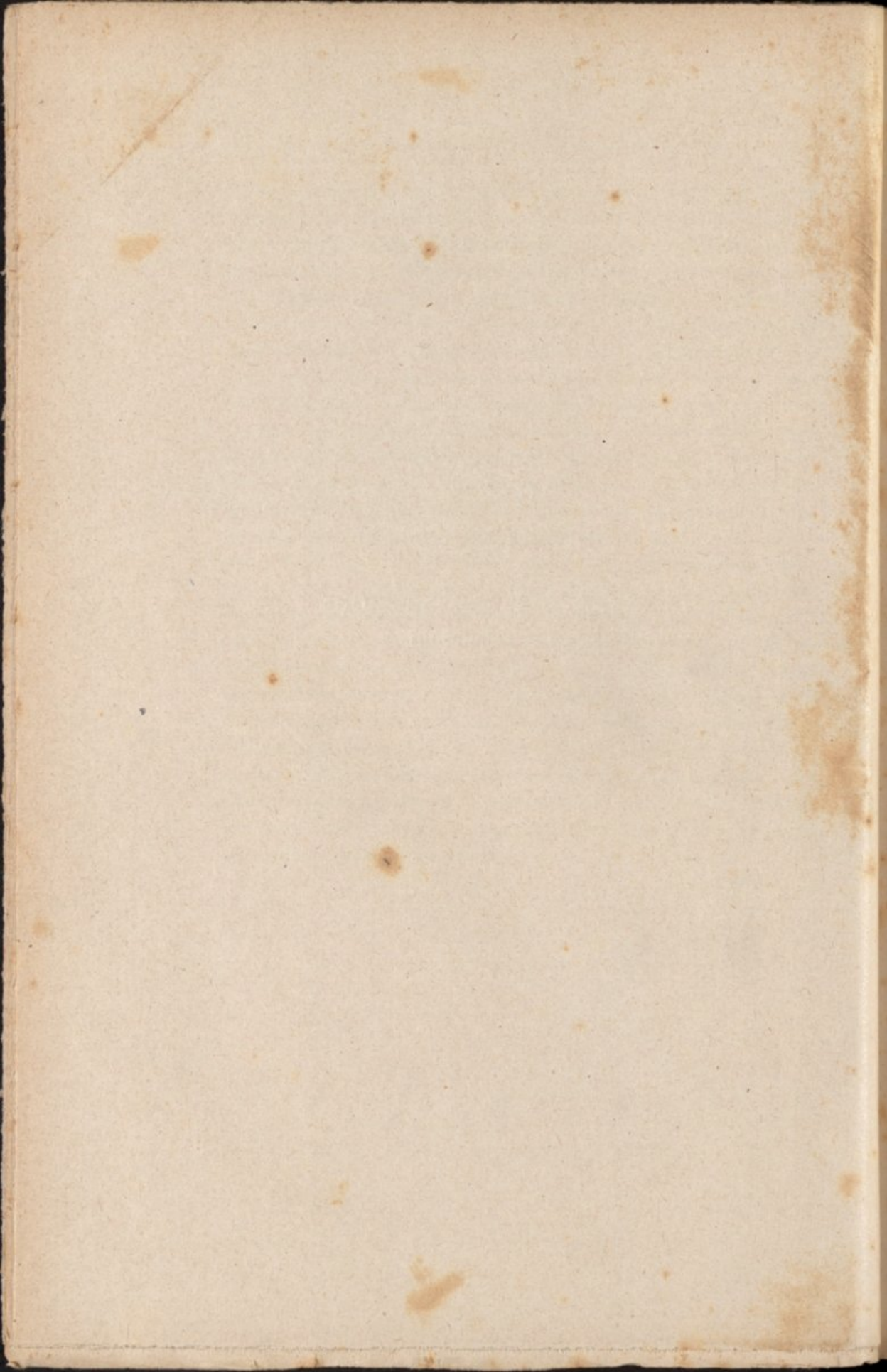
Hoy, fuera de los dominios de la ciencia positiva, no se abriga la menor duda que son las concepciones de la razón libre las que deben prevalecer sobre las enseñanzas de la experiencia o de la observación objetiva. No se vacila en creer que en esos ideales hay que informar la vida de los pueblos. Si bien el lento transcurso de los años va demostrando que esos ideales son rectificadas y sucesivamente abandonados, el principio que inspiró a los pasados y a los presentes sigue en pie, manteniéndose con el mismo fervor, y en ocasiones con el mismo fanatismo con que en otras épocas se mantuvo un determinado principio religioso. Pasa el predominio de una escuela política o económica y otra le sucede; cae en el mayor descrédito la doctrina con que ayer se pretendía remediar nuestros males y es substituída por otra que acomete la misma empresa; lo que no pasa es el nuevo modo de pensar que inspiró las pasadas y seguirá inspirando las futuras como si no hubiese otro y no se nos ocurriese dudar de su eficacia después de tantos y crueles fracasos. Tan profundamente está entalla-

do en la conciencia de los pueblos que por esas vías ha de llegarse forzosamente a una solución, que ni los desengaños pasados ni las decepciones que les aguardan les mueven a reflexión, inquiriendo la causa del malestar que padecen: que si esto hicieran, volverían los ojos a una realidad cuyo contacto perdieron, y recobrando el buen sentido entenderían entonces que ni las cosas ni los hombres son como los sabios los conciben o como los imaginan los de fantasía arrebatada, sino que aquéllas y éstos son como Dios o Natura los hizo, y a ello hay que atenerse por ser lo principal, y no a la doctrina que los muestra como debieran ser a juicio del preopinante. De no proceder a esa reforma interior que lenta y progresivamente cambie el modo de pensar de las gentes y también el modo de pensar de las inteligencias superiores que viven de su propia substancia como la mecha de su aceite, no cabe esperar que el espíritu que alienta en la época contemporánea se extinga y nos abramos a otra vida. Transformación tan radical y profunda parece imposible; pero el tiempo hará su obra por ser el tiempo quien al fin dice la verdad. Nadie podía prever que aquellos que se destrozaban brutalmente cuando las guerras de la reforma habían de vivir en santa paz. El dolor les mostró la necesidad de la tolerancia, y hoy ostentan como la más preciada de sus virtudes lo que a fuerza de palo les fué impuesto. También vendrá para nuestra época el desengaño en el valor del juicio personal, y con él la nueva enseñanza que ha de curarle del grave mal que padece. Que la historia sea tan benévola con la insania que habrá dejado tras sí tanta desolación y ruina como lo habéis sido vosotros con la palabra de este viejo inválido que efusivamente os saluda.

HE DICHO.

II
DISCURSOS
DE
INAUGURACIÓN DE LAS SECCIONES

LEÍDOS EL 25 DE JUNIO DE 1923



Sección 1.^a
CIENCIAS MATEMÁTICAS

DISCURSO INAUGURAL

PELO

DR. PEDRO JOSÉ DA CUNHA

PROFESSOR DA UNIVERSIDADE DE LISBOA

A teoria dos conjuntos e as suas aplicações á teoria geral das funções de variáveis reais.

O desenvolvimento extraordinario experimentado pela análise matemática nos ultimos anos torna quasi impossivel a um cérebro humano conhecê-la igualmente bem em todas as suas ramificações. A necessidade da especialização impõe-se cada vez mais, por forma que dentro em breve, e salvo espiritos privilegiados, não poderão os géometras deixar de confinar-se dentro desse campo em dominios parciais mais ou menos limitados. O facto tem graves inconvenientes, pelas relações uteis que sempre existem entre os diversos ramos da mesma sciencia, e convém por isso opôr-lhe, até onde fôr possível, uma barreira eficaz. É necessario para isso tornar máximo o rendimento do esforço desenvolvido pelo matemático num tempo dado; isto é, conseguir que com o mesmo esforço e no mesmo tempo o número dos factos scientificos adquiridos, ou a generalidade com que se apresentam, sejam tão grandes quanto puder ser. Daí a conveniencia de libertar os conceitos e as demonstrações de hipóteses restritivas, de modo que, em vez de se caminhar do particular para o geral por successivas generalizações, como a história da sciencia nos ensina ter sido realmente a marcha seguida pela humanidade na grande maioria dos casos, se procure dar aos principios uma forma mais ampla, pelo estabelecimento de bases duma grande generalidade, cabendo dentro dêles, como consequências imediatas, todos os que es deduziriam su-

cessivamente partindo dessas hipóteses restritivas, de que convém irmo-nos quanto possível libertando.

É o que se tem feito, por exemplo, na teoria da integração.

Ainda há pouco estabelecia-se a noção de integral definido considerando primeiramente as funções duma só variavel, contínuas no intervalo da integração; e generalizava-se depois essa noção sob dois aspectos diferentes: por um lado, passando das funções contínuas para as funções com um número finito de discontinuidades num intervalo limitado; por outro lado, passando das funções duma só variavel para as funções de duas, três ou mais variaveis e aumentando na mesma escala o número das dimensões do campo da integração. Hoje, considerando apenas funções limitadas e conjuntos mensuráveis, pode expôr-se a teoria dos integrais de Darboux sob uma forma bastante geral, sem nos preocuparmos com a continuidade da função integranda, nem com o número das dimensões do campo. Da noção dos integrais de Darboux deriva a do integral de Riemann, com a consequente noção de função integravel e o estabelecimento immediato do criterio de integrabilidade; e a conveniente applicação desse criterio, com as suas duas modalidades, permite incluir logo no número daquellas funções, não só as funções contínuas, como tambem as funções de variação limitada introduzidas na sciencia por Camille Jordan, e que tão grande papel representam hoje na teoria geral das funções de variaveis reais (1).

Outra maneira de poupar tempo, ou de limitar o esforço, no alargamento constante dos horizontes scientificos, reside no estudo á parte do abstracto que pode considerar-se comum a teorias, que até muitas vezes se apresentam com objectivos completamente diversos. Os vertices dum poligono ou os pontos dum segmento de recta formam colecções cujos elementos são pontos em número finito ou infinito. Os números racionais, inteiros ou fraccionarios, comprehendidos entre dois números dados, formam igualmente colecções com um número finito ou uma infinidade de elementos. Um sistema de equações é ainda uma colecção, cujos elementos—as equações—tambem na análise

(1) Veja-se a conferencia *Sur les fonctions à variation bornée et les questions qui s'y rattachent*, pronunciada pelo Sr. Charles de la Vallée-Poussin, no Congrès International des Mathématiciens, de Strasburgo.

moderna se podem considerar em número finito ou infinito. Nestes exemplos, e em todos os mais que se poderiam apresentar, nota-se que os conceitos de que se trata são sempre agregados de objectos iguais, distinguindo-se uns conceitos dos outros pela natureza especial desses objectos. Portanto, se fôr possível estabelecer principios, a que se subordinem os objectos reunidos em colecções, só pelo facto de o estarem, independentemente da sua natureza, esses principios serão applicaveis a todos esses conceitos tomados isoladamente. O estabelecimento de tais principios constitui, pois, uma teoria genérica, especie de abstracto comum a todas as teorias particulares, que visam em especial cada um dos conceitos, logo que se concretiza a natureza dos seus elementos. Ora o conhecimento desse abstracto não só permite apreciar as ligações e analogias, que existem entre ramos da sciencia, que á primeira vista parecem distanciados, como simplifica a exposição das teorias particulares, porque evita a repetição do que seria, afinal, comum a todas elas.

Deve-se ao sábio alemão G. Cantor a idea de estudar as propriedades, que apresentam os objectos reunidos em colecções, independentemente de quaisquer combinações operatórias. Foi elle, portanto, quem estabeleceu pela primeira vez a noção de *conjunto*, que estava destinada a ganhar rapidamente uma importancia consideravel, pelas suas variadas e utilissimas applicações em diferentes ramos das sciencias matemáticas.

A teoria geral dos conjuntos divide-se, como é sabido, em duas partes distinctas, tendo respectivamente por objecto os conjuntos *abstractos* e os conjuntos *concretos*, isto é, aqueles em que se *abstrai* da natureza dos seus elementos, e aqueles em que essa natureza se *concretiza*; e entre os conjuntos da segunda categoria figuram em primeira plana, ofuscando, por assim dizer, todos os outros pela sua enorme importancia na teoria geral das funções, os chamados *conjuntos de pontos*, isto é, aqueles cujos elementos são números ou sistemas de números.

O papel primacial, que os conjuntos de pontos desempenham na teoria que venho de citar, manifesta-se logo na maneira como permitem introduzir simplicidade na linguagem e nitidez nos conceitos. Na análise moderna dá-se á noção de função uma tal generalidade que seria difficil apresentá-la sem os elementos que nos fornece a teoria dos

conjuntos; introduzida, porém, na sciencia a idea de conjunto, define-se aquele conceito fundamental com a maior generalidade e precisão. Diz-se, com efeito, que u é uma função das variáveis independentes x, y, \dots , definida num conjunto (E), quando a cada ponto (x, y, \dots) desse conjunto corresponde um, e um só, valor de u . A correspondencia entre os valores de u e os sistêmas de valores de x, y, \dots , pode ser qualquer; só é necessario que exista. A pequena dificuldade que surgiria pelo facto de haver relações entre variáveis dependentes e variáveis independentes, por virtude das quais as primeiras tomam mais do que um valor para cada sistêma de valores das segundas, remove-se facilmente pela decomposição em ramos e consideração separada de cada um dêles.

A simplicidade, e até a uniformização da linguagem, torna-se evidente em muitos casos, como, por exemplo, nas questões em que é necessario exprimir que, sendo u, v, w, \dots funções das variáveis x, y, z, \dots definidas num conjunto (E); e (F) o conjunto dos pontos (u, v, w, \dots) correspondentes a todos os pontos de (E); as variáveis x, y, z, \dots , são inversamente funções de u, v, w, \dots , definidas no conjunto (F). Como esta propriedade, quando se verifica, denuncia a existencia duma correspondencia unívoca e recíproca entre os elementos dos conjuntos (E) e (F), e é uma correspondencia dessa natureza que caracteriza a igualdade de potencias, pode-se enunciar a referida propriedade com todo o rigor e clareza dizendo simplesmente que os conjuntos (E) e (F) teem a mesma potencia.

Outra vantagem da consideração dos conjuntos de pontos no estudo das funções apreende-se facilmente notando que algumas propriedades de certas classes de funções derivam imediatamente da natureza do conjunto em que são definidas. Assim, por exemplo, se uma função continua é definida num conjunto limitado e fechado, pode afirmar-se *a priori* que a sua continuidade é necessariamente uniforme (1).

Dadas as funções f_1, f_2, \dots das variáveis x, y, \dots definidas e continuas num conjunto (E), seja (F) o conjunto dos pontos (f_1, f_2, \dots) , que

(1) Para os que distinguem entre funções continuas num conjunto e funções continuas em todos os pontos dum conjunto, este principio enuncia-se assim: *Se uma função é continua em todos os pontos do conjunto em que é definida, e este é limitado e fechado, a função é necessariamente continua no conjunto.*

correspondem aos diferentes pontos de (E). Se (E) é limitado e fechado, (F) é também limitado e fechado. Se (E) é conexo, (F) é igualmente conexo.

Se é limitado e fechado o conjunto (E), em que são definidas as variáveis u, v, \dots como funções contínuas de x, y, \dots ; por seu lado, x, y, \dots , consideradas como funções definidas de u, v, \dots no conjunto (F), são contínuas em (F).

E como estes, muitos outros exemplos se poderiam apresentar.

Mas como se vê bem a grande vantagem que há na consideração dos conjuntos de pontos é notando o paralelismo e a relação directa existente entre os progressos realizados nesta teoria e na teoria geral das funções de variáveis reais. As correlações entre as duas teorias são tão íntimas, que é difícil dizer se os desenvolvimentos, que tem tido a segunda, se obtiveram aproveitando os que abstractamente se realizaram na primeira, ou se estes foram procurados intencionalmente para satisfazer ás exigencias da segunda.

Já tive ocasião de notar como o progresso determinado na teoria da integração pela consideração dos integrais de Darboux e de Riemann está relacionado com a teoria dos conjuntos. O campo da integração é um conjunto mensuravel no sentido de Jordan, e a função integranda, uma função limitada, quer dizer, uma função cujos valores formam um conjunto limitado. Mas é facil de vêr que todos os outros progressos realizados ulteriormente na mesma teoria estão igualmente ligados a progressos feitos na teoria dos conjuntos de pontos, pela generalização da noção de medida ou pela introdução da noção nova de *função de conjunto*.

* * *

O Sr. Charles de la Vallée-Poussin, na notavel conferencia que realizou no Congresso Internacional dos Matemáticos, de Strasburgo, e para cujo tema escolheu as funções de variação limitada e as questões que a elas se ligam, referiu-se muito em especial ás investigações recentes, relativas ao que êle chama a *teoria geral das funções de variáveis reais*, isto é, ao elevado ramo da análise matemática que fundaram no começo deste século sábios eminentes do valor dos Srs. Baire, Borel e Lebesgue, aos quais julgo de inteira justiça associar o proprio senhor de la Vallée-Poussin.

Dado o têmea escolhido para a sua conferencia, o illustre géometra belga tratou de mostrar como o estudo das funções de variação limitada forma ainda hoje a parte mais importante dessa nova teoria; e para isso examinou sucessivamente quatro das suas questões mais notáveis, em que a noção de função de variação limitada desempenha um papel primacial, ou sejam o *integral de Lebesgue*, as *funções de conjunto*, o *integral de Stieltjes*, e as *funcionais lineares*. Vou insistir em como para o desenvolvimento das mesmas questões são indispensáveis a noção de conjunto e os principios da respectiva teoria, incluindo os que respeitam á sua medição.

A generalização da noção de integral devida a Lebesgue não deriva apenas da maneira diferente como concebeu os elementos do integral. Como se sabe, Lebesgue dividiu em intervalos elementares, por pontos intermédios l_2, l_3, \dots, l_n , o intervalo dos valores extremos ($l_1 = A$ e $l_{n+1} = B$) da função, associando com cada um dos pontos l_i a medida e_i do conjunto dos pontos em que se tem $l_i \leq f < l_{i+1}$, ou a medida e_{i-1} do conjunto dos pontos em que é $l_{i-1} \leq f < l_i$, contrariamente ao que se faz para os integrais de Darboux, em que é o conjunto (E) que se decompõe em elementos, associando-se com cada um dêles o valor que a função toma em qualquer dos seus pontos. A generalização depende tambem da forma diversa como se entende a medida do conjunto para Lebesgue ou para Jordan. A maior generalidade da noção de medida segundo Borel-Lebesgue é que determina a maior generalidade da noção de integral, segundo Lebesgue. O integral de Lebesgue contém o de Riemann como caso particular, do mesmo modo que os conjuntos mensuráveis segundo Borel-Lebesgue comprehendem como casos particulares os conjuntos mensuráveis de Jordan.

Para apreciar no seu justo valor a importância e o alcance do integral de Lebesgue é conveniente cotejá-lo com a classificação dos funções proposta pelo Sr. Baire. Como se sabe, nesta classificação as funções contínuas formam a classe 0; as funções limites de funções contínuas, que não pertencem á classe 0, formam a classe 1; em geral, as funções limites de funções da classe $n - 1$, que não pertencem a essa classe nem a nenhuma das anteriores, formam a classe n .

As funções da classe 0 integram-se pelos metodos elementares, mas já não acontece o mesmo, na generalidade dos casos, ás das classes seguintes, embora se recorra á generalização de Riemann.

Adoptado, porém, o integral de Lebesgue, a dificuldade desaparece, porque todas as funções de Baire são integráveis no sentido de Lebesgue.

É certo que algumas tentativas se tem feito para desembaraçar a teoria da integração, tanto quanto possível, das contribuições da teoria dos conjuntos. O Sr. Borel, por exemplo, conseguiu dar para o integral de Lebesgue, aplicado ás funções de Baire, duas definições que não obrigam a adoptar um criterio especial para a medição dos conjuntos, mas essas definições não se libertam inteiramente da teoria dos conjuntos, pois ambas supõem que se abstrai de pontos em que a função de Baire não é contínua, abrangidos numa infinidade numeravel de intervalos cujas medidas tem uma soma tão pequena quanto se queira.

O Sr. Young foi mais longe. Pretendendo desembaraçar a teoria da integração de toda a contribuição fornecida pela teoria dos conjuntos, tratou de ligar directamente a definição de integral aos conceitos de Baire, e conseguiu-o pela consideração das sucessões monótonas de funções. Se estas são continuas, os seus limites são, como se sabe, funções semicontínuas. E o Sr. Young lembrou-se de definir os integrais das funções semicontínuas pelos integrais de Darboux, tomando-os por excesso ou por defeito, conforme a função considerada é semicontinua superior ou inferiormente.

Para as outras funções de Baire aproveitou a propriedade de poderem ser geradas por passagens ao limite operadas sobre sucessões monótonas. Dando a primeira passagem ao limite as funções semicontínuas, tomou o Sr. Young por definição como integral duma função de Baire o limite comum dos integrais de duas funções semicontínuas, que compreendam entre si a função considerada.

As definições dos Srs. Borel e Young são muito interessantes e engenhosas, mas eu inclino-me para a opinião do Sr. de la Vallée-Poussin, que lhes prefere a de Lebesgue, embora menos simples, não só por ser a mais natural e a que mais desce ao fundo das coisas, mas sobretudo porque é a que prepara melhor para o estudo do integral considerado como *função de conjunto*.

Convém lembrar, a propósito, que os números que designam as *classes de Baire* constituem a sucessão dos números *transfinitos*; que há identidade entre as *funções de Baire* e as *funções mensuráveis*; e

que, tanto para a definição daquêles números como para a das funções mensuráveis não se pode prescindir dos elementos que fornece a teoria dos conjuntos. É também na noção de *função somável*, devida a Lebesgue, intervém, embora implicitamente, a ideia de conjunto, pois que as funções assim designadas só diferem das integráveis em não ser limitado o conjunto dos seus valores. Lembrarei ainda que, a estreitar os laços que prendem a teoria dos conjuntos e a teoria da integração, se dá o facto de ser esta que, por assim dizer, deu vulto á noção de conjuntos de medida nula. Com efeito, é sempre possível desprezar na integração os conjuntos de pontos que podem encerrar-se numa infinidade numerável de domínios rectangulares cujas medidas teem uma soma tão pequena quanto se queira, e esses conjuntos são, como é sabido, os que receberam a denominação de conjuntos de medida nula.

Passêmos agora ás funções de conjunto.

Por esta designação apenas se pretende exprimir uma correspondência entre um conjunto E e um número $F(E)$. Esse número é o valor da função no conjunto.

A mais simples das funções de conjunto é seguramente a sua medida. Veem em seguida os integrais das funções definidas no próprio conjunto. E a este respeito é interessante recordar que o integral referido a um conjunto qualquer (E) se pode sempre considerar referido a um domínio rectangular (R) , que contenha (E) , pela intromissão da *função característica de conjunto*, cuja primeira consideração é devida ao Sr. de la Vallée-Poussin (1).

Sendo, com efeito, $P(x, y, \dots)$ os pontos de (E) , $f(P)$ a função integranda e $\theta(P)$ a função característica de (E) , tem-se identicamente

$$F(P) = \int_{(E)} f(P) dP = \int_{(R)} \theta(P) f(P) dP$$

visto ser $\theta(P) = 1$ em todos os pontos de (E) , e $\theta(P) = 0$, em todos os pontos que não pertencem a (E) .

Sob esta forma torna-se saliente que, se (E) é a soma dum número finito ou duma infinidade numerável de conjuntos $(E_1), (E_2, \dots)$, sem

(1) «Sur l'intégrale de Lebesgue», in *Transactions of the American Mathematical Society*, 1915.

pontos comuns, o integral no conjunto soma ($E_1 + E_2 + \dots$) é a soma dos integrais em cada um dos conjuntos componentes. Expressou o senhor Lebesgue esta propriedade dizendo que o integral é uma *função aditiva* de conjunto; e o Sr. de la Vallée-Poussin acrescenta que é uma função *completamente aditiva*, querendo acentuar com esta maneira de dizer que a propriedade se estende a um número infinito de componentes.

Considerado como função dum conjunto variavel, o integral toma a designação de integral indefinido. Além de ser uma função aditiva de conjunto, este integral é também uma função *absolutamente continua*, que quer dizer, é infinitamente pequeno em qualquer conjunto de medida infinitamente pequena. E as duas propriedades caracterizam os integrais indefinidos, como o Sr. Lebesgue foi o primeiro a demonstrar. Vê-se, pois, que é realmente util considerar o integral como uma função de conjunto, para dar conta da sua natureza e das suas propriedades distintivas, e, conseguintemente, que tem menos interesse a sua definição apresentada em absoluta independencia da teoria dos conjuntos.

Se nos limitarmos aos conjuntos lineares e ás funções duma só variavel, a derivada dum integral, considerada ainda como função de conjunto, não apresenta nada de especial, e reduz-se simplesmente á duma função de ponto. Se a derivada não existe, há em todo o caso os quatro números derivados.

Podem imaginar-se outras funções de conjunto. Chamando *continua* a uma função de conjunto, que é infinitamente pequena em todo o conjunto de diametro infinitamente pequeno, esta continuidade em sentido lato não importa a continuidade absoluta, o que mostra poder haver funções aditivas de conjunto, mesmo continuas, que não sejam integrais indefinidos.

Estas funções aditivas de conjunto, consideradas em toda a sua generalidade, apresentam um interesse capital. Resulta, com efeito, das investigações dos Srs. Radon, Charles de la Vallée-Poussin e Lebesgue a sua identidade com as funções de variação limitada; o problema da decomposição destas funções nas suas partes constitutivas equivale a análogo problêma nas funções aditivas de conjunto; e é nestas ultimas que êle se apresenta sob a forma mais clara e instructiva.

Vê-se, pois, a importancia que a teoria dos conjuntos reveste para o estudo das funções de variação limitada, que teem hoje um papel tão consideravel na teoria geral das funções de variaveis reais.

A noção do integral de Stieltjes, isto é, a do integral duma função continua em relação a uma função de variação limitada, não parece á primeira vista ter a mesma ligação com a teoria dos conjuntos, mas o estudo aprofundado do assunto mostra que não é assim, porque o integral de Stieltjes é, afinal, uma função aditiva de conjunto, embora, na generalidade dos casos, não seja absolutamente continua.

As funções de conjunto, que tenho considerado, interveem ainda na ultima das quatro questões desenvolvidas pelo Sr. de la Vallée-Poussin na sua erudita conferencia.

Seja E um conjunto e $V(E)$ um número que corresponde a E segundo uma lei determinada; como se sabe, tem-se dado a essa correspondencia a designação de *operação funcional*, ou mais simplesmente *funcional*, unívoca em E . O estudo dessas operações constitui o *calculo funcional*, em que se tem notabilizado principalmente o Sr. Fréchet (1).

As funções aditivas de conjunto relacionam-se com funcionais particulares, para as quais chamou a atenção o Sr. Hadamard, que lhes deu o nome de *funcionais lineares*. O Sr. Riesz fêz dar á teoria destas funcionais um passo decisivo, mostrando que toda a funcional linear pode ser posta sob a forma dum integral de Stieltjes, o que reduz o estudo das funcionais lineares ás teorias a que me acabo de referir.

* * *

¿Dadas as ligações existentes entre a teoria dos conjuntos e a teoria geral das funções de variaveis reais, como há de desenvolver-se a primeira destas teorias para poder fornecer á segunda todos os elementos de que ela carece?

É obvio que se deve começar pela teoria dos conjuntos abstractos.

Convém dar a noção de *potencia* como ela primeiramente se nos oferece, isto é, traduzindo a correspondencia unívoca e recíproca que pode existir entre os elementos de dois conjuntos. A definição de potencia considerada em absoluto, isto é, o conceito que o conjunto su-

(1) Vidé o seu «Calcul fonctionnel», in *Enseignement mathématique*, 1911

gere á nossa razão quando abstraímos da natureza e da disposição dos seus elementos, deve tambem ser apresentada, porque levou Cantor a considerar a potencia como uma generalização do número cardinal. Mas convém acentuar bem o que esta generalização tem de delicado, mostrando que, se dois conjuntos finitos não podem ser equivalentes quando um dêles é formado só com parte dos elementos do outro, dois conjuntos infinitos em identicas condições podem ter a mesma potencia.

Vem depois a noção de *conjunto numeravel* (não me parecendo de grande necessidade a distinção que alguns autores fazem entre conjuntos *numeraveis* e conjuntos *enumeraveis*) e a noção de conjunto com a potencia do continuo, bem como o estudo das propriedades fundamentais duns e doutros.

Numas *Reflexões*, que há pouco publiquei *sobre a teoria dos conjuntos* (1) estabeleço todos esses principios sem fazer referencia ao axioma de Zermelo, que alguns autores utilizam nos seus raciocinios. Sirvo-me, porém, dum postulado, susceptivel de verificação em muitos casos, que me parece realmente indispensavel fazer intervir nas demonstrações dalgumas propriedades fundamentais. Consiste êle em que, *dado um conjunto infinito qualquer, isto é, numeravel ou não, é sempre possivel extrair dêle uma infinidade de elementos formando um conjunto numeravel, sem que o conjunto formado pelos elementos restantes deixe de ser infinito.*

É, por exemplo, neste postulado que baseio a demonstração de que *todo o conjunto numeravel pode ser decomposto numa infinidade numeravel de conjuntos numeraveis sem elementos comuns*; bem como a de que *não se muda a potencia dum conjunto não numeravel suprimindo-lhe elementos que formem um conjunto numeravel.*

A propriedade de ter a potencia do contínuo todo o conjunto cujos elementos são definidos por um número finito ou uma infinidade numeravel de variaveis independentes, cada uma das quais passa por um conjunto de valores com a potencia do contínuo, merece uma referencia muito especial, não só por mostrar a independencia entre a noção de potencia e a do número das dimensões dos conjuntos de

(1) In *Journal de Sciencias Mathemáticas, Fisicas e Naturais*, publicado sob os auspicios da Academia das Sciencias de Lisboa, 3.^a serie, tomo III, 1922.

pontos, como por ter uma applicação importante na determinação da potencia dos conjuntos perfectos.

No trabalho, a que me reporto, preocupei-me um pouco com os conjuntos finitos. Insisto em que estes conjuntos devem ser considerados como casos particulares dos conjuntos numeraveis, não tanto porque os seus elementos tambem se podem *numerar*, como principalmente porque a maior parte dos princípios que se enunciam aludindo a conjuntos numeraveis continuam sendo verdadeiros se estes conjuntos se substituem por conjuntos finitos. Acontece mesmo que certos princípios de applicação corrente só são verdadeiros em todas as hipóteses se se admite que os conjuntos finitos são casos particulares dos conjuntos numeraveis. E este facto levou-me a modificar alguns enunciados, para os tornar mais precisos e rigorosos, e a completar certas demonstrações, para todas as hipóteses possiveis serem tomadas em consideração.

Ainda no dominio dos conjuntos abstractos é necessario considerar os conceitos de *conjuntos semelhantes* e *tipos de ordem*.

* * *

O estudo dos conjuntos de pontos, se apenas se tivesse em vista a exposição da teoria das funções tal como se nos oferece na maior parte dos tratados classicos (por exemplo, no excelente *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, de C. Jordan) não precisaria ter um grande desenvolvimento.

Estabelecida a noção fundamental de *desvio* (ou, segundo outros, a de *distancia*), passar-se hia naturalmente para as de ponto limite duma sucessão ou dum conjunto, ponto isolado, conjunto derivado e conjunto complementar; daí para a classificação dos conjuntos, conforme a natureza dos pontos que os constituem; e a seguir para a demonstração dos teoremas classicos relativos aos pontos limites, á natureza dos conjuntos derivados e á existencia dos pontos-fronteiras. Com estes elementos seria facil estabelecer a noção de conjunto limitado, considerando primeiro os conjuntos lineares, e generalizando depois para os conjuntos a qualquer número de dimensões; bem como os teoremas referentes aos desvios dos conjuntos, aos pontos de condensação e aos conjuntos conexos.

E este estudo sucinto poderia ser continuado com a investigação da potencia das diversas classes de conjuntos de pontos.

Restaria, depois, indicar o que seja a *medida* dum conjunto segundo o critério de Jordan.

A parte esta ultima questão, todas as outras estão tratadas nas minhas *Reflexões*.

Dada a noção de desvio (ou de distancia) digo como se pode delimitar uma porção do espaço em torno dum ponto, conceito que me é necessario para a demonstração do teorêma de Bolzano-Weierstrass; analiso o enunciado do teorêma, que se encontra na maior parte dos livros, concernente ao conjunto (E') *derivado* doutro conjunto (E), fazendo vêr que êle não é necessariamente fechado, porque em certos casos pode ser isolado ou finito; modifico esse enunciado dizendo que *o derivado (E') de qualquer conjunto (E), se tem num espaço limitado um número infinito de pontos, é necessariamente fechado*; e baseio a demonstração no teorêma de Bolzano-Weierstrass, que estabeleço préviamente enunciando-o da seguinte fórmula: *Todo o conjunto que num espaço limitado tem um número infinito de pontos, tem pelo menos um ponto limite*.

Fazendo a classificação dos conjuntos como é costume, isto é, mesmo considerando as quatro categorias de conjuntos *isolados, fechados, densos em si mesmos e perfeitos*, observo que esta classificação enferma dum vicio, e é que não abrange todos os conjuntos de pontos possíveis. Apresento, de facto, alguns exemplos de conjuntos que não estão compreendidos em nenhuma daquelas quatro classes, e que são, afinal, conjuntos densos em si mesmos com pontos isolados. Um desses exemplos é dado pelo conjunto constituído pelos valores da função

$$f(x) = \frac{1+x}{2} - \frac{3}{4} I(x),$$

definida no intervalo (0,1), onde I(x) designa o maior número inteiro contido em x. O ponto limite 1 não pertence ao conjunto, e há o ponto isolado $\frac{1}{4}$.

Tomando para base da classificação a natureza dos elementos que constituem o conjunto, e notando que estes, ou são pontos isolados, ou são pontos limites, pondero que um conjunto desta natureza pode ter:

ou só pontos isolados;
 ou só pontos limites;
 ou pontos isolados e pontos limites.

No primeiro caso, o conjunto é *isolado*.

No segundo, pode suceder que o conjunto compreenda todos os seus pontos limites ou só parte dêles. Na primeira hipótese é *perfeito*, e na segunda, *denso em si mesmo*.

Finalmente, no terceiro caso, ainda pode dar-se a mesma coisa, quere dizer, o conjunto pode compreender todos os seus pontos limites, ou só uma parte. Na primeira hipótese é *fechado*; na segunda verifica-se a circumstancia a que a classificação seguida até agora não atendia. Como nestes conjuntos se dà o grau mais elevado de completude, no que respeita ás relações com o conjunto derivado, lembrei que se lhes desse a designação de *conjuntos complexos*.

O conceito de *conjunto limitado* é um daquêles que, pela sua grande importancia, me mereceram nas *Reflexões* maior atenção. Discuto especialmente, no caso dos conjuntos lineares, a questão de saber se, quando um limite M é atingido, há ou não algum elemento do conjunto compreendido entre M e $M-\delta$, por menor que seja δ ; ou se, quando se sabe que entre M e $M-\delta$ existe sempre algum elemento do conjunto, por menor que seja δ , o limite M é, ou não, atingido.

Considerando todos os casos possiveis chego á conclusão de que, embora o facto possa verificar-se noutras especies de conjuntos, *a priori* só para os conjuntos perfeitos se pode afirmar a coexistencia destas três propriedades:

- 1.^a Não ha no conjunto nenhum elemento maior do que M ;
- 2.^a Ha no conjunto um elemento igual a M ;
- 3.^a Por menor que seja o número positivo δ , existe sempre no conjunto algum elemento compreendido entre M e $M-\delta$.

E *mutatis mutandis* para o limite inferior.

Nos teorêmas referentes aos pontos de condensação teem todo o cabimento as reflexões que na teoria dos conjuntos abstractos faço com relação aos conjuntos finitos. Mostro como o teorêma classico, segundo o qual *o conjunto formado pela reunião duma infinidade numeravel de conjuntos numeraveis é numeravel* se pode enunciar mais geralmente dizendo que *o conjunto formado pela reunião duma infinidade numeravel de conjuntos finitos ou numeraveis é numeravel*; e como

este aspecto mais geral do principio é o que tem de adoptar-se para se poder estabelecer com todo o rigor os teorêmas a que me reporto. O próprio enunciado do de Cantor-Bendixon carece, a meu vêr, de modificação, para ser verdadeiro em todos os casos; por isso o exprimo assim: — *Todo o conjunto fechado, não numeravel, pode sempre decompôr-se num conjunto perfeito e num conjunto finito ou numeravel.*

Finalmente, nas linhas que consagro á investigação da potencia dos conjuntos de pontos, prendo-me com uma circumstancia, que me parece conveniente esclarecer.

Demonstra-se, como já recordei, que a potencia do contínuo é independente do número das dimensões do conjunto, isto é, que tem a potencia do contínuo todo o conjunto cujos pontos são definidos por coordenadas, ou parâmetros, que passam por conjuntos de valores com essa mesma potencia.

Demonstra-se, por outro lado, que tem a potencia do contínuo todos os conjuntos perfeitos lineares, qualquer que seja a sua estructura.

E da conjugação das duas demonstrações conclui-se que todos os conjuntos perfeitos tem a potencia do contínuo.

Afigurou-se-me que, para esta conclusão se poder tirar logicamente, alguma coisa mais seria necessario dizer; e pensei que se poderia estabelecer directamente uma correspondencia unívoca e recíproca entre os elementos dum conjunto perfeito a qualquer número de dimensões e os dum conjunto perfeito linear (1). O caminho natural não é, porém, êsse, mas sim o que vou expôr.

Seja (E) um conjunto perfeito no espaço a n dimensões, e $\pi(a_1, a_2, \dots, a_n)$ qualquer dos seus pontos. Podemos tomar os parâmetros a_1, a_2, \dots, a_n como as coordenadas dum ponto π deste espaço em relação a um sistêma de n eixos coordenados, de sorte que, sendo $p_i(a_1^i, a_2^i, \dots, a_n^i)$ os pontos de (E) de que π é o ponto limite, tem-se

$$\lim a_1^i = a_1, \lim a_2^i = a_2, \dots, \lim a_n^i = a_n;$$

1) O raciocinio que a este respeito apresento nas minhas *Reflexões sobre a teoria dos conjuntos*—reconheço-o agora—não é correcto. Vou rectificá-lo brevemente em nota inserta no mesmo *Jornal*.

isto é, sobre qualquer dos eixos coordenados, os pontos a_h são pontos limites das sucessões dos pontos a_h^i . Então os conjuntos lineares formados projectando todos os pontos π sobre qualquer dos eixos coordenados são constituídos unicamênte por pontos limites. E não pode haver sobre todos os eixos coordenados pontos limites desses conjuntos lineares, que lhes não pertençam, pois que esses pontos corresponderiam a pontos limites de (\bar{E}) , que lhe não pertenceriam tambem, caso que não pode dar-se, visto (E) ser perfeito.

Então, logo que se demonstre que os conjuntos perfeitos lineares teem a potencia do continuo, provado fica que teem a mesma potencia os conjuntos perfeitos a qualquer número de dimensões, visto os seus pontos serem definidos por coordenadas que passam por conjuntos de valores com a potencia do continuo. Ora aquella propriedade, evidente quando os conjuntos são formados por todos os pontos dum intervalo, estabelece-se facilmente no caso mais geral provando primeiro que todos os conjuntos perfeitos lineares são semelhantes, o que permite considerar sómente um conjunto particular, por exemplo, o das fracções décimais que se escrevem apenas com os algarismos 0 e 1. E que este conjunto tem a potencia do contínuo reconhece-se sem dificuldade, pois que se pode *aplicar* sobre o intervalo contínuo $(0, 1)$ logo que se suprima uma infinidade numeravel de pontos—os extremos posteriores, ou anteriores, dos *intervalos contiguos*—, operação que não altera a sua potencia.

* * *

Se entrarmos mais profundamente no que o Sr. de la Vallée-Poussin chama a teoria geral das funções de variaveis reais, não nos bastam os principios da teoria dos conjuntos de pontos, a que tenho feito alusão.

Não só é preciso generalizar a noção de medida, substituindo ao critério de Jordan o de Borel-Lebesgue, como entrar em linha de conta com um certo número de conceitos novos, cujo estudo se pode fazer com proveito nas obras didáticas do Sr. de la Vallée-Poussin (1). Refiro-me ás operações sobre conjuntos e suas propriedades; á função

(1) Vejam-se, por exemplo, ás suas lições no Colegio de França, publicadas sob o titulo: *Intégrales de Lebesgue.—Fonctions d'ensemble.—Classes de Baire.* (Colecção Borel).

característica de conjunto; aos limites de conjuntos; ás propriedades dos conjuntos *abertos* e *fechados* (que eu diria antes *abertos* e *cerrados*, para não empregar a mesma palavra com duas acepções diferentes); ás dos conjuntos mensuráveis (B); e aos números transfinitos e questões que com êles se ligam.

Isto pelo que respeita ás noções da teoria dos conjuntos, que são imediatamente utilizáveis na teoria geral das funções de variáveis reais. Mas aquela teoria ainda é susceptível doutras aplicações vantajosas. Sem sairmos do estudo das funções e da teoria dos conjuntos de pontos, podemos encarar a aplicação desta á teoria geral das funções ou á teoria das funções de variáveis imaginárias. São também importantes ás suas aplicações á Geometria de situação. E saindo do âmbito dos conjuntos de pontos, ainda se encontram outros conjuntos concretos, que pode haver interesse em considerar. É o que sucede no calculo funcional, e o que se pode exemplificar também com os conjuntos de rectas ou de curvas, que já teem sido estudados por alguns géometras (1).

* * *

A necessidade de satisfazer ás exigencias de todas estas aplicações traz consigo a do correlativo desenvolvimento da própria teoria dos conjuntos, mas independentemente dessa razão de ordem utilitária, os esforços dos matemáticos também se veem exercitando no sentido de fazer progredir o estudo abstracto dos conjuntos considerados em si mesmos. E assim deve ser, por muito que peze aquêles dos matemáticos contemporaneos, que contestam a legitimidade ou o interesse de certas especulações, que lhes parecem demasiadamente abstractas. Mesmo sem pôrmos de parte o critério utilitario, tudo nos aconselha a que prossigamos no estudo desinteressado da teoria dos conjuntos. Todos sabem que investigações feitas tão sómente para a satisfação estética dum pequeno número de espiritos, vieram alguns anos, e até alguns séculos depois, prestar relevantes serviços no vasto campo das aplicações (2).

(1) Vidé *Encyclopédie des Sciences Mathématiques Pures et Appliquées*. Edição francesa. Tomo II, volume I, fascículo 2. L. Zoratti. *Les ensembles de points*.

(2) Vidé *Méthodes et problèmes de théorie des fonctions*, por E. Borel (Colecção Borel).

Já vai longa esta conferencia, e eu não quero abusar muito da benévola atenção dos sábios eminentes que me escutam, e a quem, seguramente, não estou dando novidades. Só mencionarei, portanto, entre as questões mais notáveis de que se ocupa a parte abstracta da teoria dos conjuntos, algumas em que se suscitaram dúvidas ainda não esclarecidas, e que, por isso mesmo, oferecem um largo campo á actividade dos investigadores.

Estudando a questão da igualdade das potencias nos conjuntos infinitos, chega-se á conclusão de ainda não se saber se as potencias de dois conjuntos quaisquer são sempre comparáveis.

Se num conjunto (A) há uma parte (A_1) que tem a mesma potencia que (B), e em (B) não há nenhuma parte que tenha a potencia de (A), a potencia de (A) é superior á de (B).

Se em (A) não há nenhuma parte com a potencia de (B), mas em (B) há uma parte (B_1) com a potencia de (A), a potencia de (A) é inferior á de (B).

Se em (A) há uma parte (A_1) com a potencia de (B), e em (B) uma parte (B_1) com a potencia de (A), os dois conjuntos (A) e (B) teem a mesma potencia.

Nenhuma afirmação, todavia, se pode fazer quando em (A) não há nenhuma parte equivalente a (B), nem em (B) nenhuma parte equivalente a (A). Dois conjuntos finitos nestas condições teem, evidentemente, potencias iguais; mas dar-se há o mesmo quando o número dos elementos é infinito? É o que até hoje ainda ninguem conseguiu apurar; e para mim existe até a duvida de a hipotese se poder verificar nos conjuntos infinitos.

Por outro lado, sabe-se que a potencia do numeravel é a menor das potencias dos conjuntos infinitos, e que a do contínuo, não sendo a mesma que a do numeravel, lhe é, portanto, superior. Desconhece-se, todavia, se há potencias intermédias entre a do numeravel e a do contínuo.

Por um método devido a Cantor pode-se *definir* conjuntos tendo potencias cada vez maiores, mas procurando *conceber* conjuntos com potencias superiores á do contínuo é-se levado a admitir a existencia de conjuntos cujos elementos são definidos por uma infinidade não numeravel de condições, e á concomitante existencia de funções descontínuas em condições análogas. Haverá maneira de nos servirmos,

no calculo, destas funções que são definidas por uma infinidade não numeravel de elementos?

Apontarei, por ultimo, a dúvida, que ainda hoje existe, sobre se a potencia do conjunto dos números transfinitos da classe II é, ou não, a potencia do contínuo.

* * *

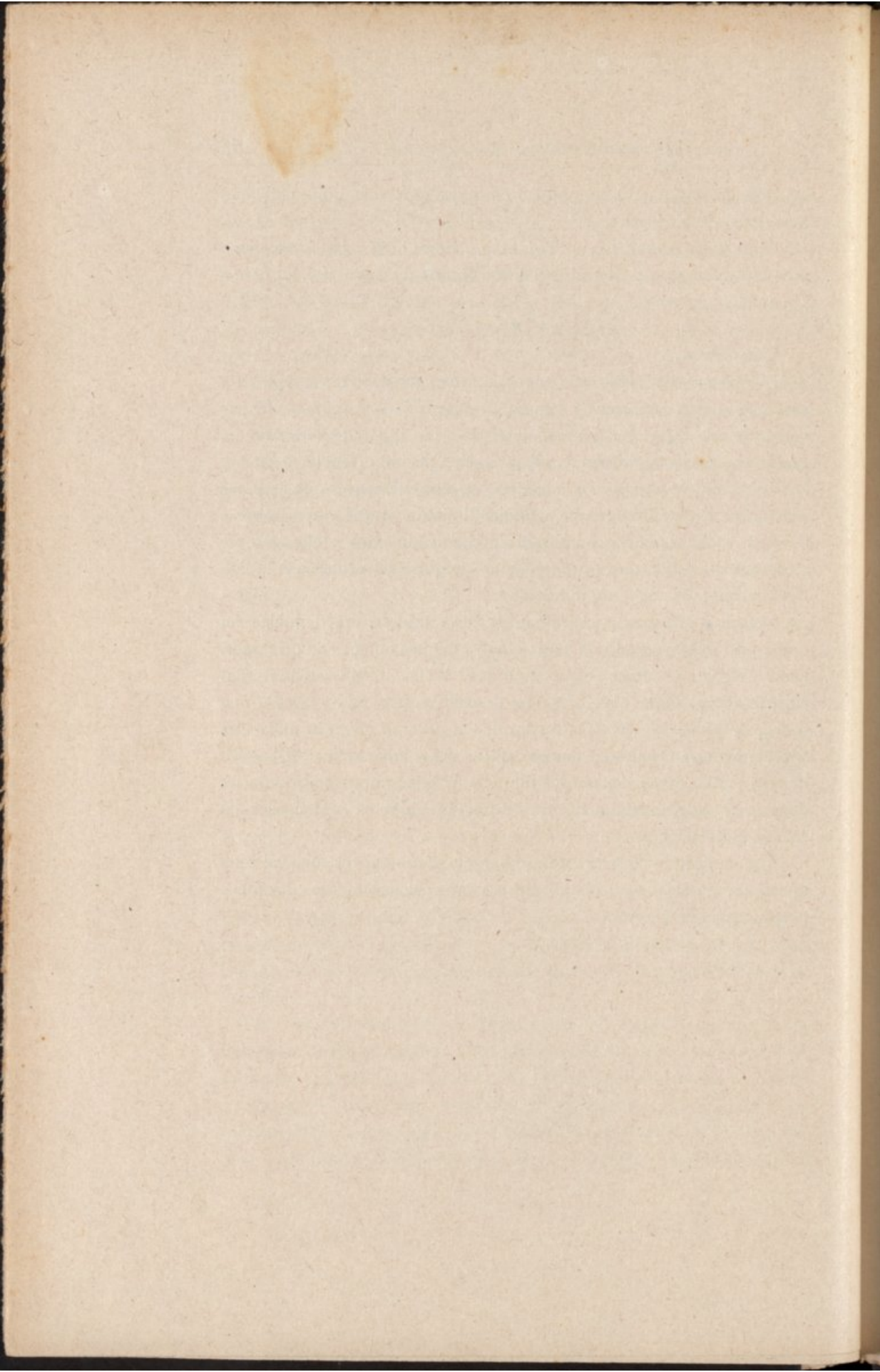
Vou terminar.

Extremamente lisongeadado com o honroso convite, que recebi, para pronunciar esta conferencia inaugural, procurei corresponder-lhe escolhendo um têmea que pudesse interessar tão ilustrado auditorio; e, realmente, poucos poderão avantajarse-lhe em importancia e generalidade dentro do campo das matemáticas puras. Pena foi que os meus acanhados dotes intellectuais, a minha limitada erudição e a pobreza do meu estilo não me permitissem desenvolvê-lo com a elevação correspondente á sua magnitude e á alta categoria scientifica das individualidades eminentes que me escutam.

Tambem imperou na escolha o ser este assunto um daquêles em que mais tenho pensado no exercicio das minhas funções de professor. Como é dever de todos os que mourejam nestas lides contribuir com alguma pedra, ainda que informe e desvaliosa, para que cresça o magestoso edificio da sciencia que professa, pareceu-me que não seria descabida neste Congresso a apresentação das minhas reflexões, suggeridas no estudo duma das teorias que nos nossos tempos mais teem influenciado o desenvolvimento de ramos tão pujantes e vigorosos da análise matemática.

Que os illustres congressistas se dignem desculpar o pouco valor da minha conferencia, esquecendo as suas imperfeições em face dos meus bons desejos de acertar.

Lisboa, 1923



Sección 2.^a

ASTRONOMÍA Y FÍSICA DEL GLOBO

DISCURSO INAUGURAL

POR

HONORATO DE CASTRO

CATEDRÁTICO DE LA UNIVERSIDAD DE MADRID

Orientaciones modernas de Geodesia estática.

De los dos problemas fundamentales a que la Geodesia extiende su campo de acción, hay uno, el de la determinación de la forma de la superficie ideal llamada *Geoide*, que ha ocupado casi en absoluto la atención de los geodestas. Y es que para llegar al estado actual fué preciso hacer esfuerzos gigantescos de ingenio y de trabajo, modular sucesivas hipótesis que, perfeccionadas paulatinamente, daban explicación a los resultados obtenidos tras delicadas y penosas operaciones de medidas de distancias entre ciertos puntos de la superficie terrestre, de diferencias de nivel entre los mismos, de determinación de sus posiciones geográficas, de estudio de la variación de la intensidad de la gravedad con el lugar y con el tiempo.

No es por ello de extrañar que, frente a estas grandes dificultades de teoría y de práctica, haya quedado relegado a término secundario el otro de los dos problemas fundamentales de la Geodesia, el que estudia la estructura interna del Globo terrestre, no para conocer la naturaleza de los elementos que le constituyen (objeto primordial de la Geología), sino más bien para llegar al conocimiento de la distribución interior de las masas.

Atendiendo a la naturaleza de las investigaciones geodésicas, cabe dividir la Geodesia en dos ramas tan diferentes que la influencia que una ejerce sobre la otra no es más que indirecta. *Geodesia estática* y *Geodesia dinámica* son los nombres que se asignan a estas dos ramas de la ciencia geográfica.

La Geodesia dinámica, que estudia las modificaciones más o menos periódicas que experimenta la Tierra, utiliza como instrumentos principales de trabajo la variación en intensidad y dirección de la pesantez y las variaciones de latitud. Todas estas variaciones se ponen de manifiesto por medidas de un orden de magnitud tan pequeño que pasan inadvertidas para las medidas que utiliza la Geodesia estática.

Las causas productoras de los fenómenos a que extiende su acción la Geodesia dinámica residen en el interior del Globo terráqueo, y he aquí precisamente el lazo de unión entre una y otra de las dos ramas de la Geodesia; he aquí la razón de la gran importancia que para el conocimiento de la estructura interna tiene el estudio de los fenómenos que caen bajo el dominio de la Geodesia dinámica.

La Geodesia estática, que prescinde del estudio de las variaciones en la forma del geoide y en la distribución de sus masas, puntualiza y precisa sus investigaciones en la determinación del *estado medio* de la forma de la superficie y de la estructura interna del Globo terrestre; es decir, el estado medio de la forma y estructura del geoide.

No estará fuera de lugar que puntalicemos aquí la significación de la palabra *geoide*, que no es la superficie real de la Tierra, sino una superficie ideal, que es la que realmente interesa al geodesta.

Es evidente que en las aguas marinas existe un constante desequilibrio, producido por causas tan diversas como la atracción variable del Sol y de la Luna, las diferencias de presión atmosférica, los fenómenos de transporte debidos a causas de orden meteorológico y a la rotación terrestre, fenómenos todos que se condensan en las mareas y en las corrientes oceánicas.

Pues bien: si en un punto determinado de la costa se instala un mareógrafo y se toma el promedio de los valores que indican el nivel alcanzado por el agua durante un largo período de tiempo, en observaciones convenientemente distribuídas durante las horas del día, este promedio representará el *nivel medio del mar en aquel punto*.

Si suponemos después trazadas todas las verticales posibles en los puntos de la superficie del mar, y en cada una de esas verticales fijamos el punto que representa el nivel medio, obtendremos por este procedimiento un lugar geométrico de puntos, es decir, una superficie que, prolongada idealmente por bajo de los continentes, es a la que el geodesta Listing designó en 1873 con el nombre de *Geoide*.

El propósito que perseguimos al redactar estas líneas, en que no encontraréis ideas originales, es el poner de manifiesto los esfuerzos realizados por los modernos geodestas para dirigir sus estudios hacia el interior de la Tierra; para sentar los principios fundamentales en que han de sustentarse las investigaciones de la Geodesia estática, sobre todo en aquella parte que hace relación a la estructura interna; para relacionar con las medidas de superficie y pesantez los preciosos elementos de juicio que nos proporciona la seismografía y que ha permitido sacar de su conjunto consecuencias de valor científico inestimable.

El director del servicio geodésico de Dinamarca, el eminente hombre de ciencia F. A. Buchwaldt, propone en un trabajo recientemente publicado en *Den Dauske Gradmaling*, núm. 17, una nueva organización de investigaciones encaminadas a poner de manifiesto de la manera más clara posible la influencia y naturaleza de las causas internas.

Para conseguirlo ha tenido que romper por completo con los procedimientos generalmente adoptados hasta hoy.

Comienza en la primera parte de su trabajo por hacer un estudio esquemático para mostrar el partido que se puede sacar de las que llama medidas de superficie, es decir, de las medidas geodésicas ordinarias, de las medidas de bases, triangulaciones y determinaciones astronómicas de vértices.

Pasa después a realizar un estudio crítico del método de las desviaciones de la vertical, exponiendo por medio de consideraciones elementales un método prácticamente utilizable para la determinación de la superficie, método que es aplicable lo mismo a las grandes que a las pequeñas extensiones.

Al final de esta primera parte de su trabajo expone el método que permite pasar del conocimiento detallado de la superficie al de la repartición interior de masas, complementando el conocimiento de la superficie con datos deducidos de medidas sísmicas.

Dedica después un capítulo al estudio de las medidas de pesantez, estableciendo las relaciones por virtud de las cuales se enlazan estas medidas con la forma general de la superficie.

Los resultados obtenidos en este capítulo se aplican en uno posterior a la determinación de la forma del geoide, utilizando como materiales de trabajo las medidas de superficie y las de pesantez.

En el capítulo que sucede abandona la hipótesis que sobre la forma del geóide había establecido, modificando las fórmulas convenientemente y haciendo después una reseña del tratamiento algébrico de los materiales de observación.

En todo este capítulo la base de las investigaciones es una nueva hipótesis establecida con ánimo de fijar la atención sobre la constitución interna. Esta hipótesis, que es un desarrollo de la interpretación isostática de Wegener, da desde el primer momento una idea de la constitución interna del Globo terrestre. Las medidas de superficie, de pesantez y sísmicas permiten deducir por medio de las correspondientes fórmulas las correcciones generales y locales a la forma hipotética.

De todo ello daremos idea a grandes rasgos en las páginas siguientes.

Medidas de superficie.

La razón del nombre genérico que antecede aplicado a la medida de bases, triangulaciones y determinaciones astronómicas de vértices, está en que todos estos elementos son suficientes por sí para determinar directamente la forma del geóide.

Que así sea en efecto, basta con las siguientes consideraciones, que no reflejan el procedimiento real que se sigue en la práctica, pero que pueden servir para evidenciar la posibilidad teórica de llegar por su intermedio al conocimiento de la forma.

Supongamos que por los procedimientos conocidos en Geodesia se haya determinado la longitud de una base a que parte de un punto A , base que para simplificar el razonamiento puede ser tan corta que no haya inconveniente en considerarla como un segmento rectilíneo.

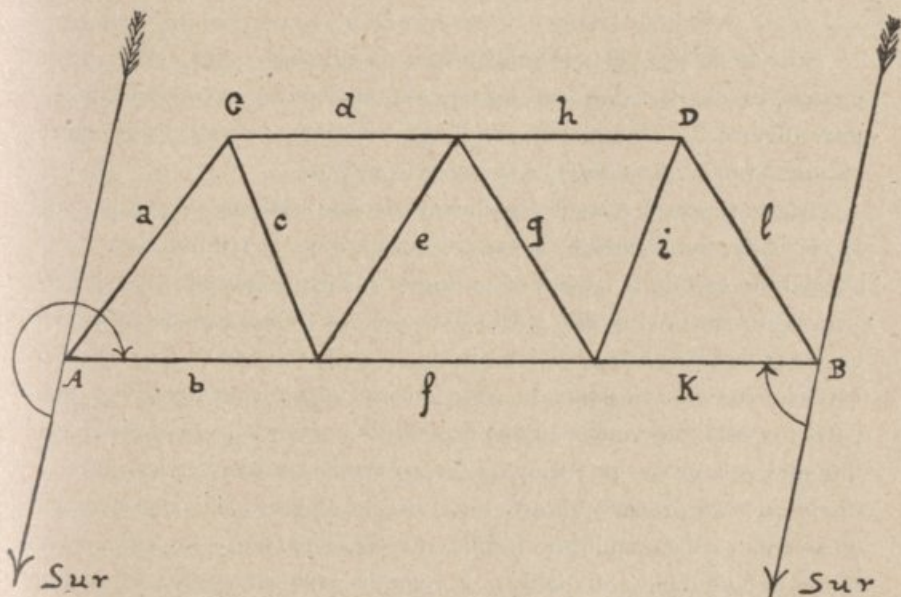
Supongamos también que por medidas sucesivas de ángulos se hayan determinado los lados b, c, \dots, k, l de una serie de triángulos que podremos considerar como planos en una primera aproximación. Por este procedimiento habremos obtenido una banda A, B, C, D , suficientemente estrecha que puede ser aplicada sobre el geóide.

Si los triángulos son tan grandes que no puedan ser considerados como planos será preciso para su cálculo utilizar una hipótesis que nos defina la superficie. La forma esférica que se utiliza en un principio

se modifica a medida que se asciende en el camino de las aproximaciones, pasando a utilizar después la forma elipsoidal de revolución.

Para simplificar el razonamiento no habría inconveniente en suponer que los lados b , f , k están en línea recta.

Determinaciones astronómicas posteriores permiten deducir las latitudes geográficas de los puntos extremos de la red A y B , así como la diferencia de sus longitudes, lo que equivale a determinar el ángulo formado por las correspondientes verticales o normales al geode.



Finalmente, y también por procedimientos astronómicos, se hace preciso determinar el acimut α del lado b en A y el acimut β del lado k en B .

Supongamos después que la distancia que separa los puntos A y B es lo suficientemente pequeña para que se pueda considerar como constante la flexión de la superficie entre esos puntos.

Hechas todas estas medidas e hipótesis podríamos reconstruir la superficie, bastando para ello tomar la banda de triángulos y colocarla de modo que la vertical de A tenga la dirección conocida; que el lado b esté situado en el acimut correspondiente; que la banda de triángulos tenga la flexión suficiente para que el punto B coincida con la po-

sición que corresponde a su determinación geográfica y que el lado k tenga el acimut previamente observado.

Lo hecho no es otra cosa en definitiva que una contribución al conocimiento de la flexión de la superficie en la porción ocupada por los triángulos medidos. La extensión y continuación del procedimiento ofrecen la posibilidad de determinar una porción cualquiera del geoide.

Desviaciones de la vertical.

Sucede en Geodesia lo mismo que en muchas otras ramas de la ciencia, es a saber: que una misma palabra tiene a veces significación muy diversa. La Matemática está llena de casos de este linaje, entre los que la palabra *módulo* es un buen ejemplo.

Algo así sucede con el significado de las palabras «desviación de la vertical», que debemos precisar aquí para evitar confusiones.

Sabido es que la latitud se mide por el ángulo formado por la vertical y el plano del ecuador. El estudio de las variaciones de latitud en un lugar ha introducido el estudio de las desviaciones de la vertical o variaciones en su posición en este mismo lugar. El instrumento que patentiza estas desviaciones es un péndulo horizontal, una masa rígida que gira solamente en torno de un eje teóricamente vertical, y muy disimétrica con relación a este eje. Cuando esta condición se cumple, el sistema está en equilibrio indiferente. Prácticamente no se cumple jamás la condición antedicha, y el sistema está en equilibrio estable cuando su centro de gravedad está en la vertical de su eje. Los movimientos del instrumento ponen de manifiesto las desviaciones de la vertical con una sensibilidad que alcanza a la milésima de segundo de arco. Por este medio ha sido posible descubrir oscilaciones anuas y diurnas en la posición de la vertical, que guardan una relación muy estrecha con el caldeamiento de la superficie terrestre por la radiación solar.

El dominio de estas desviaciones es de la Geodesia dinámica, y para nada hemos de ocuparnos de ellas en este trabajo.

Tampoco haremos aquí mención de la desviación de la vertical producida por la atracción de un macizo montañoso próximo al lugar de la observación.

Las desviaciones de la vertical a que nos referiremos aquí son las que resultan del arrastre de coordenadas geodésicas por un elipsoide hipotético, según explicamos a continuación.

Cuando la triangulación geodésica haya de servirnos exclusivamente para encuadrar en ella los detalles topográficos de un país, los cálculos geodésicos se reducen a la determinación de las coordenadas geodésicas y geográficas de los vértices. Pero si las operaciones geodésicas han de servir de contribución a la determinación de la forma del geoide y a la distribución de masas en su interior, es preciso que los cálculos geodésicos nos conduzcan a la determinación del ángulo que forma la vertical con la normal al elipsoide de referencia.

Es, además, preciso que se hagan determinaciones astronómicas de los tres elementos, latitud, longitud y acimut, o de dos o uno solo en varios vértices de la red, aparte de las que se hagan en el punto o vértice de donde parte el cálculo y transporte de coordenadas geográficas.

Pero resulta que para efectuar este transporte de coordenadas ha de hacerse la adaptación de la red sobre un elipsoide hipotético de dimensiones determinadas y posición fija; es decir, que al pasar de las coordenadas de un punto A de la red a otro B , obtendremos para este último punto coordenadas que estarán referidas a la normal al elipsoide de referencia y no a la vertical verdadera de B .

Si, pues, suponemos que para este punto B se han deducido las coordenadas elipsoidales $(\varphi, \omega, \alpha)$, las astronómicas (l, L, A) diferirán de ellas en

$$l - \varphi = d\varphi \quad L - \omega = d\omega \quad \alpha - A = d\alpha.$$

Estas diferencias reciben el nombre respectivo de *desviaciones de la vertical en latitud, en longitud y en acimut*.

El ángulo formado por las dos normales consideradas se llama *desviación total*, y el ángulo de su plano con el meridiano que corresponde a la normal al elipsoide se llama *acimut del plano de desviación*.

Como acabamos de ver, la definición dada al concepto *desviación de la vertical* descansa en la hipótesis de que el geoide tiene la forma de un elipsoide de revolución.

A continuación daremos una idea del método que permite llegar al conocimiento de la forma del geoide, utilizando como elementos de trabajo las desviaciones de la vertical.

Supongamos que se han efectuado la medida de la base y la triangulación a que nos hemos referido anteriormente.

Cada uno de los triángulos se calculará como si estuviese situado en el elipsoide de referencia, y el conjunto de triángulos así calculados se colocará sobre el mismo elipsoide. Al hacer la superposición de la banda de triángulos sobre el esferoide, los ángulos tendrán que sufrir una deformación; pero ésta será tan pequeña que puede ser despreciada sin ningún inconveniente.

El punto inicial A se colocará sobre un punto del elipsoide que tenga las mismas coordenadas geográficas que se han obtenido por observaciones astronómicas; la banda de triángulos se colocará de tal modo que el acimut del lado b tenga el medido para esta línea. El vértice final B de la banda vendrá a caer sobre un punto B_1 del esferoide, cuyas coordenadas geográficas difieren de las determinadas en B por observaciones astronómicas. La diferencia entre las coordenadas geográficas en B y en B_1 son las desviaciones de la vertical en B . Observemos aquí que las desviaciones de la vertical en el punto inicial A son nulas.

Supongamos también que después operamos con una segunda banda de triángulos que tiene como punto inicial el punto B y como punto final uno C para el cual determinamos las desviaciones de la vertical, de igual modo que se determinaron en el punto B por medio de la primera banda de triángulos.

Si de un modo análogo se continúa la operación habremos conseguido obtener una serie de puntos A, B, C , para los que se ha deducido la desviación de la vertical en latitud, en longitud y, lo que es más interesante para la determinación de la forma del geoide, en acimut. Claro está que cuando se trata de superficies de pequeña extensión existe una relación entre las tres desviaciones, de suerte que, conocidas las desviaciones en longitud y latitud, se puede hallar la desviación en acimut con un error suficientemente pequeño para poderle despreciar.

Las desviaciones de la vertical pueden reemplazar a las medidas de superficie en la determinación de la forma del geoide, pudiendo llegar a este resultado utilizando el método de Helmer expuesto en su obra *Lothabweichungen*, o por Pizzetti en su obra *Geodesia teoretica*, métodos que no son otra cosa que una aplicación de la teoría de la

compensación de redes geodésicas, y que no exponemos aquí por no dar a este trabajo una extensión considerable.

Lo que sí haremos aquí es indicar, aunque sea muy a la ligera, las razones por las que este método de trabajo fundado en la determinación de las desviaciones de la vertical ha tenido que ser substituído por otro al que Buchwaldt da el nombre de «método de los representantes».

La razón principal estriba precisamente en que las desviaciones de la vertical que se obtienen para cada punto no son independientes de la posición del que se eligió como inicial, ni del camino seguido en el arrastre de coordenadas. Así, por ejemplo, si tratásemos de deducir las desviaciones de la vertical en un vértice de la frontera portuguesa, podríamos elegir como punto inicial un vértice de la triangulación española, Madridejós por ejemplo, haciendo el arrastre de coordenadas por la correspondiente triangulación.

El resultado obtenido diferirá más o menos del que se obtendría partiendo de un vértice portugués, y haciendo el arrastre a través de la triangulación portuguesa.

Método de los representantes.

Supongamos que por el procedimiento indicado al hablar de las medidas de superficie, y por intermedio de la flexión y torsión de la banda de triángulos, obtenemos en un punto A una expresión para la curvatura de la superficie en la dirección de un lado b de la triangulación. Como la operación puede repetirse en un acimut cualquiera, podemos suponer que conocemos la curvatura de la superficie en torno al antedicho punto A .

Supongamos también que en la región que tratemos de estudiar tenemos varios de estos puntos I, II, III, IV, V, a los que llamaremos representantes.

En cada uno de ellos se conocen las coordenadas y las derivadas de primer orden p y q , así como las de segundo r , s , t , toda vez que suponemos conocida la curvatura en torno a cada uno de los mismos.

Se supone además que los representantes están situados tan próximos unos a otros, que se pueden deducir por interpolación los valores de las derivadas que corresponden a otro punto intermedio arbitrariamente elegido.

Esta interpolación, que entraña desde luego una hipótesis sobre la forma del geode, puede hacerse, entre otros, por el siguiente procedimiento.

Supongamos que se trata de hallar los elementos que corresponden a un punto intermedio A . Si uno cualquiera de los elementos que corresponden a este punto fuese conocido, se podría, por medio de un desarrollo de Taylor, pasar a conocer el elemento correspondiente de uno de los puntos representantes próximos, y como este elemento es conocido de antemano, resulta que al igualar esos dos valores obtendremos una ecuación o relación entre el elemento de A y las constantes que definen la posición del punto representante elegido.

Los elementos precisos para conocer todo cuanto afecta a la posición y curvatura del punto intermedio A son siete. Pero al relacionar dicho elemento A con un representante se obtienen tres ecuaciones; de donde se deduce que será preciso relacionar el punto A con tres representantes, con lo que se habrá obtenido un número de ecuaciones que excede en dos al de las precisas. Estas ecuaciones superabundantes se pueden utilizar para establecer una concordancia entre las medidas de ángulos y distancias que se realizan entre dos puntos A y B y las determinaciones astronómicas efectuadas en los mismos.

Por este procedimiento toda medida que se efectúe sobre la superficie podrá ser expresada en función de las constantes que fijan la posición de los puntos representantes.

Si después de todo esto consideramos como incógnitas las constantes que fijan la posición de los representantes, nos será posible obtener el número preciso de ecuaciones por medio de las cuales se deduzcan esas constantes en función de los datos de observación.

El procedimiento que acabamos de esquematizar presenta grandes dificultades de cálculo, por el número y naturaleza de las ecuaciones que es preciso manejar.

Estas dificultades se pueden sortear siguiendo un método muy ingenioso, que consiste en operar, no con los valores absolutos de las derivadas de primero y segundo orden de los representantes, sino con las diferencias entre los valores de estas derivadas y las que corresponden a otros puntos situados en una superficie de referencia arbitrariamente elegida.

La naturaleza de la investigación variará naturalmente con la geo-

metría de la superficie de referencia, y aunque la más apropiada sería la superficie esférica, sin embargo, Buchwaldt, para dar más analogía a su método con los procedimientos antiguos, elige como superficie de referencia la de un elipsoide de revolución que tiene su eje menor paralelo al eje de rotación terrestre. Para fijar las longitudes se elige en la Tierra un meridiano fijo, y en el elipsoide de referencia un plano paralelo a él que pase por el eje menor del elipsoide.

Como las diferencias con que se opera son números muy pequeños y sujetos a una variación mucho menor que la que corresponde a las derivadas de donde proceden, resulta para este método la ventaja de que en el cálculo de correcciones pueden despreciarse las potencias de un cierto orden, con lo cual se obtiene una notable simplificación en los cálculos.

Determinación de masas interiores.

Por todo cuanto antecede podemos asegurar que las medidas de superficie son suficientes teóricamente para determinar la forma del geoide. Si, pues, por este procedimiento se hubiese llegado a determinar esa forma con todo detalle, estaríamos en camino de llegar a conocer el problema de distribución interna de masas.

La mecánica racional nos enseña, en efecto, que cuando una superficie potencial es conocida y no existen masas en su exterior, se conoce también la función potencial correspondiente, salvo un factor constante para todos los puntos exteriores a la superficie.

Una sola determinación de gravedad sería suficiente para conocer el valor de ese coeficiente, y por tanto de la función potencial para todos los puntos exteriores al geoide.

Para extender la función potencial a los puntos interiores a la superficie terrestre el problema presenta más serias dificultades.

En cada uno de los puntos del geoide se conoce el potencial V_0 , las tres derivadas de primer orden del potencial por intermedio de la dirección de la vertical, que da las dos derivadas de primer orden de la superficie y del valor de la intensidad de la pesantez. Se conocen además para la superficie tres derivadas de segundo orden, cuatro de tercero..., $(n + 1)$ de orden n . Por intermedio de la pesantez se conocen dos derivadas de primer orden con relación a un sistema de coor-

denadas rectangulares elegido arbitrariamente sobre la superficie, y en general n derivadas de orden $(n - 1)$.

Por consecuencia se obtiene una determinación completa de las derivadas del potencial, agregando a las anteriores la ecuación de Laplace

$$\frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2} + \frac{d^2 V}{dz^2} = \rho,$$

donde ρ es la densidad.

Resulta, en definitiva, que para extender la función potencial hacia el interior del geode es indispensable el conocimiento de la densidad. Para resolver esta grave dificultad, que es inabordable operando con los medios de que hemos hecho mención hasta el presente, es preciso acudir al campo de investigaciones en que se mueve la seismología.

Para enlazar uno a otro estos dos campos de investigaciones se comienza por extender la función potencial hacia el interior en la hipótesis de que la densidad es nula, llegando por este medio a obtener regiones, superficies, líneas o puntos donde la función es discontinua y donde es también discontinua la fuerza correspondiente. Inmediatamente después se supone que estas regiones están dotadas de la masa que corresponde a las variaciones de la fuerza, con lo cual se obtienen unos núcleos capaces de producir una función potencial fuera del geode idéntica a la producida por la Tierra. El conocimiento de estos núcleos es de un interés decisivo. El primero de los que ha lugar a considerar es un núcleo central que corresponde a un reparto regular de masas. Poco después se acomete el estudio de un sistema de núcleos secundarios que representan las acumulaciones y defectos de masas perturbadoras. Las propiedades y distribución de núcleos son las que nos dan los medios de reducir las medidas sísmicas y de establecer por tanto el enlace entre la Geodesia y la Seismología.

Medidas de gravedad.

La posibilidad teórica de llegar a conocer la forma del geode utilizando exclusivamente medidas de superficie es irrealizable prácticamente, toda vez que son muy escasos, en relación con los necesarios, los datos o elementos con que tenemos que operar.

Solamente cuando se hacen intervenir las medidas de la intensidad de la gravedad es cuando se puede llegar a una satisfactoria solución práctica.

Y es de notar que así como se podía teóricamente llegar a determinar la forma del geoide y la función potencial en cada uno de sus puntos utilizando como elementos de trabajo medidas de superficie y una sola determinación de pesantez, es también posible teóricamente llegar a una determinación análoga utilizando una sola medida de superficie, una distancia entre dos puntos y una serie lo más numerosa y densa posible de determinaciones de intensidad de gravedad.

Hay una doble consideración que pone de manifiesto el gran interés que tienen las determinaciones de pesantez. Esta consideración es la de que las medidas de superficie sólo pueden efectuarse en tierra firme y con las limitaciones impuestas por el tiempo y dificultades materiales a ellas inherentes. Las determinaciones afectarán por tanto a regiones muy limitadas, los continentes, y dentro de ellos estarán separadas unas de otras por distancias superiores a las que exigiría un trabajo con pretensión de ir algo más allá de una mediana aproximación.

La gran facilidad con que en tierra firme pueden hacerse determinaciones de la intensidad de la gravedad permite tener una más densa red de elementos de trabajo; la posibilidad de hacer en el mar aquellas determinaciones (1) permite ampliar la extensión de las regiones sujetas a nuestro estudio. He aquí la duplicidad de razones en que se fundamenta el interés de las determinaciones de pesantez a que hemos aludido precedentemente.

Tengamos en cuenta, antes de seguir más adelante, que para determinar la función potencial del geoide utilizando medidas de superficie y una sola medida de pesantez, o valiéndose de medidas de pe-

(1) Además del método de Hecker para determinaciones de pesantez sobre los océanos podría tal vez utilizarse con éxito el de nuestro compañero el catedrático de Física matemática de la Universidad Central D. Pedro Carrasco, que proyecta utilizar un instrumento, aún no construído, para determinar el valor de la intensidad de la gravedad midiendo por medio de un diapasón el intervalo de tiempo que invierte un cuerpo que cae en el vacío para pasar por dos puntos distintos de la trayectoria de un rayo luminoso cuya marcha intercepta a su paso.

santez y una sola medida de superficie, sería preciso extender nuestros conocimientos a toda la superficie del planeta. La imposibilidad de esta realización salta a la vista, y ya hemos hecho mención de ello, cuando se trata de medidas de superficie. En cuanto a las medidas de pesantez, estamos muy lejos del momento en que se pueda con una red suficientemente densa de observaciones hacer un cálculo detallado de la totalidad de la superficie. Por todo ello es preciso reducir nuestras pretensiones, limitando nuestro estudio, si ha de ser un estudio detallado, al de una extensión más o menos grande, pero siempre pequeña en comparación con la superficie total de la Tierra.

No sucede lo mismo cuando se trata de hallar la *forma principal* del geoide. Las determinaciones hechas hasta el día son suficientes para conseguirlo dentro de un prudente límite de aproximación.

El límite de aproximación a que aludimos, alcanzado con los materiales de observación de que actualmente se dispone, es tal que ha de tardarse mucho tiempo en conseguir una mejora apreciable.

Y ahora se presenta el problema de hallar la relación que existe entre las medidas de pesantez y las de superficie, problema que es indispensable abordar, sobre todo si ha de hacerse la determinación detallada de una región por la colaboración común de una y otra clase de medidas.

Hay una razón más que nos obliga a buscar la dependencia entre las medidas de superficie y pesantez. Esta razón es la siguiente: los datos que la observación nos proporciona están afectados de los correspondientes errores accidentales y posiblemente de otros que más que errores pudiéramos llamar equivocaciones.

Pues bien: supongamos que con materiales de superficie y una sola medida de pesantez se hubiese hecho la determinación detallada de una región. Las ecuaciones obtenidas por diferenciación y la de Laplace permitirían obtener la función potencial, y al extenderla al exterior los errores producirían el efecto de la existencia de masa allí donde estamos ciertos de que no la hay. Consecuencia análoga podríamos deducir si la determinación del geoide se hubiese hecho utilizando varias medidas de pesantez y una sola de superficie. El estudio de las relaciones entre la pesantez y las medidas de superficie permite comparar uno y otro resultado y hacer una compensación de errores o comprobar la existencia de equivocaciones.

Para establecer las relaciones entre la pesantez y la forma de la superficie se comienza por buscar la dependencia para el caso en que se estudie la totalidad del geoide.

Supongamos que sobre la superficie del geoide elegimos un sistema de coordenadas (ω, θ) .

Representemos: por V , el potencial que para un punto del geoide tiene el valor constante V_0 ; por $P(\omega, \theta)$, la fuerza normal en el punto (ω, θ) del geoide; por $I : D(\omega, \theta, \omega_1, \theta_1)$, la distancia entre los puntos (ω, θ) y (ω_1, θ_1) .

Con estas notaciones la expresión del potencial en el punto (ω, θ) será:

$$V_0 = \int c P(\omega, \theta) \cdot D(\omega, \theta, \omega_1, \theta_1) \cdot K(\omega, \theta) d\omega d\theta. \quad [I]$$

La integral debe extenderse a toda la superficie, y en ella $K(\omega, \theta)$ depende del sistema de coordenadas elegido, de suerte que

$$K(\omega, \theta) d\omega d\theta$$

es un elemento de superficie. La función P viene determinada por la distribución de la fuerza sobre la superficie y D y K están determinadas por la forma del geoide, mientras que V_0 es un valor constante.

Consideremos, además, una esfera de referencia, fija con relación al geoide y de un radio tal que el geoide fluctúa en torno a la esfera determinando desviaciones tales que sean despreciables las potencias de orden elevado.

Sobre la esfera de referencia se elige un sistema de coordenadas polares (ω, θ) , y al hablar del punto (ω, θ) del geoide se entiende que es el punto que está en la prolongación del radio (ω, θ) de la esfera.

La posición del punto (ω, θ) sobre el geoide se determina por la relación

$$\zeta = \frac{R-r}{r}$$

donde r es el radio de la esfera y R la distancia del punto (ω, θ) del geoide al centro de la esfera.

La fuerza en el punto (ω, θ) del geoide se determina por la relación

$$\pi = \frac{P-p}{p}$$

donde P es el valor de la fuerza en el punto del geode y p el valor medio aproximado de P .

Esto supuesto, se utiliza un sistema de coordenadas rectangulares (x, y, z) para transformar la expresión [1].

El valor de estas coordenadas es:

$$\left. \begin{aligned} x &= (1 + \zeta) r \operatorname{sen} \omega \cos \theta \\ y &= (1 + \zeta) r \operatorname{sen} \omega \operatorname{sen} \theta \\ z &= (1 + \zeta) r \cos \omega \end{aligned} \right\} \quad [2]$$

de donde se obtiene por diferenciación:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\omega} &= r \operatorname{sen} \omega \cos \theta \frac{d\zeta}{d\omega} + (1 + \zeta) r \cos \omega \cos \theta \\ \frac{dx}{d\theta} &= r \operatorname{sen} \omega \cos \theta \frac{d\zeta}{d\theta} - (1 + \zeta) r \operatorname{sen} \omega \operatorname{sen} \theta \\ \frac{dy}{d\omega} &= r \operatorname{sen} \omega \operatorname{sen} \theta \frac{d\zeta}{d\omega} + (1 + \zeta) r \cos \omega \operatorname{sen} \theta \\ \frac{dy}{d\theta} &= r \operatorname{sen} \omega \cos \theta \frac{d\zeta}{d\theta} + (1 + \zeta) r \operatorname{sen} \omega \cos \theta \\ \frac{dz}{d\omega} &= r \cos \omega \frac{d\zeta}{d\omega} - (1 + \zeta) r \operatorname{sen} \omega \\ \frac{dz}{d\theta} &= r \cos \omega \frac{d\zeta}{d\theta} \end{aligned}$$

Definiendo después las funciones A, B, C por

$$\begin{aligned} A &= r^2 \operatorname{sen}^2 \omega \cos \theta (1 + \zeta)^2 - (1 + \zeta) r^2 \operatorname{sen} \omega \cos \omega \cos \theta \frac{d\zeta}{d\omega} + \\ &\quad + (1 + \zeta) r^2 \operatorname{sen} \theta \frac{d\zeta}{d\theta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= r^2 \operatorname{sen}^2 \omega \operatorname{sen} \theta (1 + \zeta)^2 - (1 + \zeta)^2 r^2 \operatorname{sen} \omega \cos \omega \operatorname{sen} \theta \frac{d\zeta}{d\omega} - \\ &\quad - (1 + \zeta) r^2 \cos \theta \frac{d\zeta}{d\theta} \end{aligned}$$

$$C = r^2 \operatorname{sen} \omega \cos \omega (1 + \zeta)^2 + (1 + \zeta) r^2 \operatorname{sen}^2 \omega \frac{d\zeta}{d\omega}$$

se obtiene:

$$\begin{aligned} K(\omega\theta) &= \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = \\ &= r^2 \operatorname{sen} \omega (1 + \zeta) \sqrt{(1 + \zeta)^2 + \left(\frac{d\zeta}{d\omega}\right)^2 + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \omega} \left(\frac{d\zeta}{d\theta}\right)^2} \quad [3] \end{aligned}$$

Representando por α el ángulo formado por los radios que corresponden a los puntos (ω, θ) (ω_1, θ_1) podremos determinar D $(\omega, \theta, \omega_1, \theta_1)$ por la fórmula

$$D = \frac{1}{r \sqrt{2} \sqrt{1 - \cos \alpha}} \sqrt{1 : \left[(1 + \zeta)(1 + \zeta_1) + \frac{(\zeta - \zeta_1)^2}{2(1 - \cos \alpha)} \right]} \quad [4]$$

Combinando las fórmulas [1], [3] y [4], y teniendo en cuenta que se pueden despreciar las potencias

$$\zeta^2, \pi^2, \left(\frac{d\zeta}{d\omega} \right)^2, \left(\frac{1}{\sin \omega} \frac{d\zeta}{d\theta} \right)^2$$

así como los productos de π por ζ se obtiene

$$\int \frac{\pi + \frac{3}{2} \zeta - \frac{1}{2} \zeta_1}{\sqrt{2(1 - \cos \alpha)}} d\sigma = C \quad [5]$$

En el desarrollo sucesivo se utilizan las funciones esféricas ordinarias de orden n definidas por la expresión

$$K_n = \sum_{s=0}^{s=n} [(A_s \cos s\theta + B_s \sin s\theta) \sin^s \omega (\cos^{n-s} \omega + \frac{(n-s)(n-s-1)}{2(2n-1)} \cos^{n-s-2} \omega + \frac{(n-s)(n-s-1)(n-s-2)(n-s-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2n-1)(2n-3)} \cos^{n-s-4} \omega + \dots)] \quad [6]$$

que es una integral de la ecuación diferencial

$$n(n+1)K_n + \frac{1}{\sin \omega} \frac{d}{d\omega} \left(\sin \omega \frac{dK_n}{d\omega} \right) + \frac{1}{\sin^2 \omega} \frac{d^2 K_n}{d\theta^2} = 0 \quad [7]$$

Por este medio se llega a expresar π y ζ por las siguientes series de funciones esféricas:

$$\pi = \sum_{n=0}^{n=\infty} \Pi_n(\omega\theta); \quad \zeta = \sum_{n=0}^{n=\infty} Z_n(\omega\theta); \quad \zeta_1 = \sum_{n=0}^{n=\infty} Z_n(\omega_1\theta_1) \quad [8]$$

y por éstas y la [5] se obtiene:

$$\left. \begin{aligned} \pi &= \sum_{n=0}^{n=\infty} (n-1) Z_n(\omega\theta) + \text{constante} \\ \zeta &= \Pi_0(\omega\theta) + \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{n-1} \Pi_0 + \text{constante} \end{aligned} \right\} \quad [9]$$

Estas ecuaciones, que en unión de las [8] marcan la dependencia entre las medidas de pesantez y de superficie, exigen tratamiento especial según se determine la función que corresponde a la totalidad de la superficie o a una región parcial.

Cuando se trata del primero de los casos enunciados, se calcula por medio de la primera de las [8] el valor de π , utilizando las observaciones de pesantez hechas sobre toda la Tierra. El valor de ζ se calculará con materiales análogos por la segunda de las indicadas [8], salvo la función Z_1 y de la Z_0 , que deberá ser determinada por medidas de superficie.

En el caso de determinaciones parciales, el empleo de las ecuaciones [8] exigiría el conocimiento de todas las funciones esféricas de una de las especies (las π o las Z), y aun en el caso de tratarse de un cálculo aproximado el número de funciones esféricas necesario sería excesivamente grande.

Para simplificar el método se vuelve a utilizar la ecuación [5] y se busca una relación entre las derivadas de ζ y las de π .

Las normas a que podría ajustarse el estudio de una región limitada pudieran ser las que exponemos a continuación.

Determinése la forma de la superficie y el valor de la pesantez en toda la región de tal modo que en cada uno de los representantes se conozcan:

1.º, los cosenos directores de la normal por medio de las coordenadas geográficas del punto; 2.º, la intensidad de la gravedad; 3.º, las tres constantes que determinan la curvatura de la superficie en el punto representante; 4.º, las derivadas de primero y de segundo orden de la pesantez con relación a los desplazamientos a lo largo de la superficie, o sea tres derivadas de primer orden de la función potencial, cinco de segundo orden y tres de tercero. Agregando a éstos la ecuación de Laplace, se conocerán nueve derivados de primero y segundo orden de la función geoide y tres derivados de tercero, además de las que se pueden obtener por diferenciación de la ecuación de Laplace.

Se supone, desde luego, que los representantes están tan próximos unos a otros que por interpolación se pueden determinar las once constantes que corresponden a un punto intermedio P .

Al llegar a este momento se introducen las relaciones entre las derivadas de superficie y las de pesantez, y por medio de parámetros

interpolados para puntos intermedios se calcula la nivelación geodésica astronómica y las diferencias entre los valores observados de la pesantez. Las observaciones dan el número suficiente de ecuaciones para la determinación de los representantes.

En estas condiciones, al prolongar el geoide hacia el exterior, no se encuentra punto alguno donde la función sea discontinua, puntos que en realidad no existen.

El origen de las coordenadas (ω, θ) se elige de tal modo que el punto $(0,0)$ esté en el interior de la región, lo cual permite simplificar el problema de interpolación al utilizar la dependencia que existe entre las derivadas de la pesantez y las de superficie. La razón de esta simplificación estriba en que en la función esférica general [6] de orden n el factor $\sin^s \omega$ hace que las esféricas especiales, así como sus derivadas, se anulen en el origen y son infinitamente pequeñas en las proximidades del mismo. Esto permite suprimir todas las funciones esféricas donde s es superior a tres.

Aun eliminadas del problema las funciones esféricas que contienen múltiplos θ superiores a 3θ , queda todavía un número muy considerable, desde la de orden cero hasta aquellas en que n es lo suficientemente grande para producir ondas cuyo período sea aproximadamente el doble de la distancia que separa los puntos representantes. Cuando esta distancia sea de medio grado, es preciso llegar hasta las funciones esféricas de orden 360.

Una nueva simplificación se obtiene después agrupando en el cálculo de las funciones π todos aquellos términos en que n tenga el mismo valor. Estos grupos de términos pueden ser determinados por métodos de aproximación con los materiales de observación o eliminados del problema en cuestión.

Para el valor de $n = 0$ se obtiene $\Pi_0 = -Z_0 + \text{constante}$.

Esta función no tiene en el problema más finalidad que el poner de manifiesto que la función de fuerzas no se puede determinar utilizando exclusivamente medidas de superficie, así como tampoco se puede determinar la forma superficial utilizando tan sólo medidas de intensidad de gravedad.

Para $n = 1$ se obtiene $\Pi_1 = 0 \cdot Z_1$, expresión interesante que permite utilizar una función arbitraria Z_1 , sin que por ello altere el valor de Π .

Para $n = 2$ se obtiene

$$\Pi_2 = Z_2 = A_0 \left(\cos^2 \omega - \frac{1}{3} \right) + (A_1 \cos \theta + B_1 \sin \theta) \sin \omega \cos \omega + \\ + (A_2 \cos 2\theta + B_2 \sin 2\theta) \sin^2 \omega$$

función que viene determinada por observaciones de pesantez hechas sobre toda la Tierra y que es conocida con la aproximación suficiente para que el error no pueda tener una influencia apreciable.

Para valores sucesivos y pequeños de n , las funciones en cuestión, que pueden ser determinadas por medio de observaciones de pesantez extendidas a toda la superficie del planeta, tienen valores tan pequeños que pueden ser despreciados sin temor a error sensible.

Al dar a n valores crecientes se llega a una serie de ellos que producen funciones que nos obligan a recurrir para su determinación a los resultados generales de la isostacia de Wegener.

La relación

$$Z_n = \frac{1}{n-1} \Pi_n$$

demuestra que en este método las medidas de pesantez son más interesantes que las medidas de superficie, puesto que las variaciones de pesantez son más grandes que las variaciones de superficie.

Después de discutir la agrupación de las funciones esféricas, llega por fin Buchwaldt a obtener como solución del problema la determinación de un punto intermedio P por parámetros (es decir, derivadas de π y de ζ), que se obtienen por interpolación entre los representantes próximos y ajustándose en esta interpolación a las relaciones que ligán las medidas de superficie y pesantez. Los resultados de las observaciones pueden, en definitiva, ser expresados por medio de esos parámetros, e inversamente, los parámetros pueden ser determinados por medio de las observaciones, y entrando en ellas las medidas de superficie y pesantez es imposible que entre las mismas haya contradicción.

* * *

Hasta este momento la palabra pesantez representaba la acción ejercida por la atracción terrestre; en las páginas sucesivas tendrá su significado propio, es a saber, la resultante de la acción atractiva y de la fuerza centrífuga producida por la rotación terrestre.

La ecuación [1] no puede utilizarse en cuanto se tiene en cuenta el movimiento de rotación de la Tierra. Para introducir las modificaciones que esta rotación aporta al problema se comienza por hacer una hipótesis que se abandona después en momento oportuno. Esta hipótesis supone que la superficie real de la Tierra es una superficie de nivel.

Si consideramos un sistema de coordenadas (r, ω, θ) de tal modo elegido que su eje coincida con el de rotación de la Tierra, el potencial de la fuerza de gravitación se podrá representar por

$$v = v(r, \omega, \theta)$$

y el de la fuerza centrífuga por

$$u = u(r, \omega, \theta) = \frac{1}{2} \alpha^2 r^2 \operatorname{sen}^2 \omega$$

donde α es la velocidad angular del movimiento de rotación terrestre.

El potencial de todas las fuerzas w que ha de servirnos para determinar el geoide será

$$w(r, \omega, \theta) = v(r, \omega, \theta) + u(r, \omega, \theta).$$

El geoide G vendrá determinado por el valor w_0 de esta función. En ella el valor u se substituye por otra v que es desarrollable en la serie convergente

$$v = \frac{1}{r} K_0 + \frac{1}{r^2} K_1 + \frac{1}{r^3} K_2 + \dots$$

donde K_n es una función esférica de orden n .

Teniendo después en cuenta la relación

$$4 \pi \rho = P - \frac{dv}{dn} + \frac{du}{dn};$$

entre la densidad, la pesantez P y las funciones v y u se llega a obtener la ecuación

$$w_0 = \int c \left(P - \frac{dv}{dn} + \frac{du}{dn} \right) \cdot D \cdot K \cdot d\omega \cdot d\theta,$$

que es la que substituye a la ecuación [1] después de introducida la modificación correspondiente a la rotación terrestre.

Para la determinación de $\frac{dv}{dn}$ y $\frac{du}{dn}$ se puede admitir que

$$r^2 = a^2 \frac{1 - e^2}{1 - e^2 \sin^2 \omega}$$

y tener en cuenta que n representa la distancia hasta la superficie contada sobre la normal.

Al abandonar la última de las hipótesis, o sea la que supone que la superficie real de la Tierra es una superficie de nivel, se podría teóricamente saltar por cima de las dificultades que ella trae consigo, eligiendo como superficie de nivel una que contenga en su interior a toda la masa de nuestro planeta. La superficie de nivel situada a 10 kilómetros de altura sobre el mar podría ser utilizable a este fin, siendo preciso reducir a ella las medidas hechas sobre la superficie real de la Tierra. Esta reducción presenta en la práctica ciertas dificultades que se pueden eliminar empleando el método de reducción de Helmert o el de la compensación isostática de Hayford, utilizado para hacer la reducción de las medidas de superficie en los Estados Unidos. Buchwaldt utiliza un método, por medio del cual se puede llegar a la compensación, no sólo de las mazas o macizos continentales que se encuentran sobre el nivel del mar, sino también la que corresponde a la falta o exceso de condensación en las capas inferiores. El método se apoya en una hipótesis que no es otra que la interpretación isostática de Wegener que exponemos a continuación.

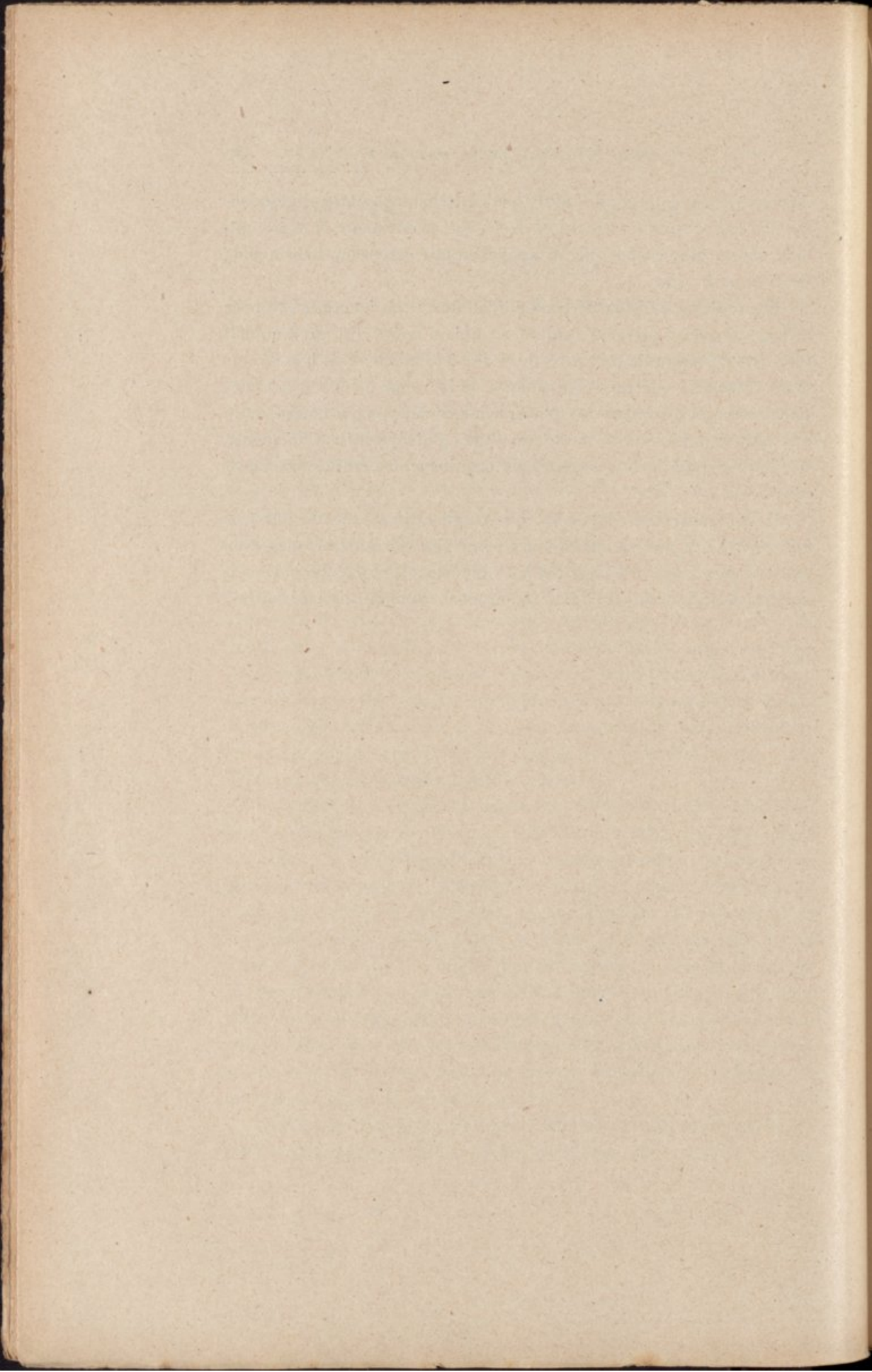
Está la Tierra compuesta, según esta hipótesis, de un núcleo interior de níquel o hierro al que dan el nombre de *nife*, que tiene aproximadamente la densidad del acero. Este núcleo central está envuelto por una gruesa capa de materiales en que predominan los silicatos de magnesio. Sobre esta envoltura, a la que Wegener da el nombre de *sima*, se apoyan por una parte los mares y por otra los continentes formados por materiales donde predominan los silicatos de aluminio. Wegener supone que estos materiales formaron en tiempos una capa uniforme, que llama *sial*, situada entre el *sima* y el mar; estos materiales síalicos se reunieron después formando las acumulaciones continentales que flotan sobre el *sima*, a la manera como flotan los bloques de hielo en las aguas de los mares polares.

La esencia de la hipótesis está en admitir primeramente que la superficie que separa el núcleo central de la capa de *sima* es una super-

ficie esférica, y en segundo lugar, que en todos los puntos de esta superficie hay isostacia perfecta, es decir, que es constante la masa limitada por un tubo radial que se apoya en una extensión determinada de la capa de *sima*.

El problema de hallar la profundidad de un continente es entonces análogo al que se presenta cuando se quiere conocer la profundidad de la parte sumergida de los bloques de hielo a que antes hemos aludido. Claro está que para ello, además de la forma detallada del continente síálico, habremos de conocer su densidad y la que corresponde a la capa de *sima*. Del valor de esta última podemos formar juicio más o menos preciso por los materiales recogidos en las erupciones volcánicas.

En un trabajo más detallado, que tengo el propósito de publicar en breve, he de dar cuenta de la manera cómo deben desarrollarse los cálculos para llegar a determinar las circunstancias todas de la capa o corteza exterior, así como de las reducciones topográficas e isostáticas.



Sección 3.^a

CIENCIAS FÍSICO-QUÍMICAS

DISCURSO INAUGURAL

POR

ÁNGEL DEL CAMPO CERDÁN

CATEDRÁTICO DE LA UNIVERSIDAD DE MADRID

**El momento actual de la enseñanza química
en España.**

Señores:

La benevolencia de nuestro ilustre Presidente, que no la insignificancia de mis merecimientos, me colocan en este instante ante vosotros, con la honrosísima y difícil labor de inaugurar las tareas de la sección de Ciencias Físico-Químicas en el IX Congreso de la ASOCIACIÓN ESPAÑOLA PARA EL PROGRESO DE LAS CIENCIAS.

Siempre había de ser arduo para mí, el último entre los científicos españoles, ocupar dignamente este puesto que honraron antecesores tan ilustres, y dirigirme a un público tan selecto como el que acostumbra asistir a estas reuniones bienales; pero lo es mucho más en estos momentos en que nos vemos honrados con la compañía de representación tan preciada de la Ciencia portuguesa.

Sea para ésta y para sus ilustres mantenedores mi más entusiasta, mi más cordial y fraternal saludo.

Señores congresistas: si la benevolencia ajena me trajo ante vosotros, sea la benevolencia vuestra la que me permita continuar: a ella me confío.

I

Muchò he vacilado para escoger el tema de mi discurso; yendo de una para otra, he recorrido muchas veces en distintos sentidos el camino, no ciertamente muy practicable, de las diversas cuestiones cien-

tíficas o pedagógicas que me han preocupado en estos últimos tiempos.

Confieso que casi siempre mis dudas se resolvían en el sentido de un tema espectroscópico, atraída mi atención por un acontecimiento extraordinario, acaecido no ha mucho en España.

Un suceso extraordinario de gran importancia para nuestro país, y que supone un paso adelante en el progreso de la Ciencia española, es, en efecto, el constituido por el triunfo de nuestro antiguo discípulo de espectroscopia Miguel Catalán; de tal puede, en verdad, calificarse la gran resonancia que en todas partes han tenido sus notables y originales trabajos.

El caso de Catalán, hacia el que me permito llamar vuestra atención, no es uno más de la serie muy estimable, y por fortuna ya no escasa, de jóvenes que van al extranjero y al volver continúan desenvolviendo con éxito las ideas o los temas que un buen maestro les suministrara. El caso de Catalán es muy otro: su extraordinaria afición a la espectroscopia, su creciente interés por tantas interrogaciones como en ese campo surgen a cada instante, le llevan al lado del insigne espectroscopista inglés Fowler; y en su laboratorio, donde no tarda en ponerse a la cabeza de sus habituales asistentes, perfecciona la técnica, y, lejos de necesitar temas del maestro, acomete con tesón admirable los que él mismo había ya encontrado, y no sólo consigue éxitos en la empresa, que nadie había osado, de ordenar espectros tan complicados como el del Manganeso, descubriendo sus sistemas de series, sino que halla regularidades nuevas para las que él mismo sugiere la denominación de *multipletes*, y extendiendo su campo de acción, halla nuevos *multipletes* en el Cromo, y en el Escandio, en el Molibdeno y en la mayor parte de los elementos químicos.

De la gran trascendencia que el descubrimiento de estos *multipletes* tiene para completar el conocimiento de la constitución del átomo, dan idea la preocupación de sabios tan eminentes como Bohr y Sommerfeld, que se ocupan una y otra vez en dar la explicación a los hechos observados por Catalán, y el que en los momentos actuales, desde Alemania a los Estados Unidos, en los laboratorios de Meggers, Fowler, Sommerfeld, Paschen y de otros espectroscopistas de análogo fuste, se apresten los investigadores a continuar por los nuevos rumbos que los trabajos de Catalán señalan.