observadores differentes com dois circulares muraes; sendo estes circulares collocados um perto do outro na mesma sala d'observações, a fim de estarem ambos sujeitos a circumstancias meteorologicas identicas.

Em uma serie d'observações de distancias zenithaes directas e reflectidas designemos por

$$D_1, D_2 \ldots D_n;\ R_1, R_2, \ldots R_n;$$

as tomadas no primeiro circular:

e por $$D'_1, D'_2, \ldots D'_n;\ R'_1, R'_2, \ldots R'_n;$$

as tomadas no segundo circular.

Suppondo, por exemplo, que as observações simultaneas duas a duas se fizeram na ordem seguinte:

$$D_1 \text{ e } D'_1,\ R_2 \text{ e } R'_2,\ D_3 \text{ e } R'_3,\ R_4 \text{ e } D'_4;$$

e chamando μ, μ' os erros de index dos nonios dos dois circulos, teremos:

$$D_1 = \mu + z_1,\ R_2 = \mu + 180° - z_2,\ D_3 = \mu + z_3,\ R_4 = \mu + 180° - z_4,$$

$$D'_1 = \mu' + z_1,\ R'_2 = \mu' + 180° - z_2,\ R'_3 = \mu' + 180° - z_3,\ D'_4 = \mu' + z_4,$$

das quaes se tiram

$$\mu' - \mu = D'_1 - D_1 = R'_2 - R_2 = \frac{D'_1 - D_1 + R'_2 - R_2}{2} = A,$$

$$\mu' + \mu = D_3 + R'_3 - 180° = D'_4 + R_4 - 180°$$

$$= \frac{D_3 + R'_3 + D'_4 + R_4}{2} - 180° = B;$$

e por conseguinte

$$\mu' = -\frac{A+B}{2}, \ \mu = \frac{B-A}{2}.$$

127. O *circulo mural* e o *oculo meridiano* são os dois instrumentos mais perfeitos, de que até agora se tem usado nos grandes observatorios, e ainda se usa em alguns, para observar a distancia zenithal meridiana dos astros, e o tempo da sua passagem pelo meridiano; elementos estes, com o primeiro dos quaes se determinam as declinações dos astros, quando se conhece a do zenith que é a altura do polo, e com o segundo se determinam as suas ascensões rectas. Por isso é necessario attender no uso d'elles ás correcções que resultam de pequenos erros nas suas verificações; o que já fizemos no oculo meridiano, e vamos fazer no circular mural.

Correcções do circular mural

128. *Erro de verticalidade.* Supponhamos que o ponto zenithal Z (Fig. 38) se desvia para o oriente ou para occidente, e toma a posição Z′, sendo o ponto horizontal H polo do arco $ZZ' = L$ que elle descreve. Chamando z' a distancia observada ao falso zenith, e z a distancia ao verdadeiro zenith, o triangulo SZZ' dá:

$$\cos z = \cos z' \cos L;$$

da qual, se z' não é muito pequena, se tira

$$\delta' z = z - z' = \cot z' \frac{2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} L}{\operatorname{sen} 1''}.$$

129. *Inclinação do raio visual ao plano do circulo.* Se o astro se observa fóra do fio do meio, ou se o raio visual, correspondente a este fio, não é parallelo ao plano do circulo, as distancias zenithaes lidas são projecções das observadas, e por isso carecem de ser reduzidas a estas.

Seja z'' a distancia zenithal observada (Fig. 39), z' a lida, p o arco perpendicular abaixado do astro sôbre o plano do circulo, e P o angulo horario. Teremos:

$$\cos z'' = \cos p \cos z', \quad \operatorname{sen} p = \operatorname{sen} \Delta \operatorname{sen} P.$$

que, por serem P. p, $z''-z'$, pequenos angulos, dão

$$z''-z'=\cot z \operatorname{sen}^2\Delta \frac{2\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}P}{\operatorname{sen} 1''}.$$

130. *Erro de orientação do raio visual.* Seja z a distancia zenithal meridiana, e z'' a observada (Fig. 40). O triangulo SPZ dá

$$\cos z''=\cos D\cos\Delta+\operatorname{sen} D\operatorname{sen}\Delta\cos P;$$

e é

$$z=\pm(\Delta-D),$$

segundo está o astro áo sul ou ao norte do zenith. D'onde resulta

$$\cos z-\cos z''=2\operatorname{sen}\Delta\operatorname{sen} D\operatorname{sen}^2\tfrac{1}{2}P;$$

ou, sendo $z-z''$ um pequeno arco,

$$z-z''=-\frac{2\operatorname{sen}\Delta\operatorname{sen} D}{\operatorname{sen} z\operatorname{sen} 1''}\operatorname{sen}^2\tfrac{1}{2}P.$$

131. As correcções dos n.^{os} 129 e 130 reunidas dão

$$\delta''z=z-z'=\left(\frac{\cos z\operatorname{sen}\Delta-\operatorname{sen} D}{\operatorname{sen} z}\right)\frac{2\operatorname{sen}\Delta\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}P}{\operatorname{sen} 1''};$$

ou, pondo por z o seu valor $\pm(\Delta - D)$ que tem logar na passagem superior,

$$\delta'' z = \pm \operatorname{sen} 2\Delta \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} P}{\operatorname{sen} 1''}.$$

Ajuntando pois as correcções $\delta' z$ e $\delta'' z$, teremos a correcção total:

$$\delta z = \pm \operatorname{sen} 2\Delta \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} P}{\operatorname{sen} 1''} + \cot z \frac{2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} L}{\operatorname{sen} 1''}.$$

E porque é $\delta\Delta = \pm \delta z$,

será em fim:

$$\delta\Delta = \operatorname{sen} 2\Delta \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} P}{\operatorname{sen} 1''} \pm \cot z \frac{2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} L}{\operatorname{sen} 1''} \ldots (1).$$

132. Nas passagens inferiores pelo meridiano, temos

$$\cos z'' = \cos D \cos \Delta - \operatorname{sen} D \operatorname{sen} \Delta \cos P, \quad z = D + \Delta,$$

que dão

$$\cos z'' - \cos z = 2 \operatorname{sen} D \operatorname{sen} \Delta \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} P,$$

ou $$z - z'' = \frac{2 \operatorname{sen} D \operatorname{sen} \Delta \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} P}{\operatorname{sen} z \operatorname{sen} 1''};$$

por conseguinte

$$\delta''z = \frac{\cos z \operatorname{sen} \Delta + \operatorname{sen} D}{\operatorname{sen} z} \cdot \frac{2 \operatorname{sen} \Delta \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} P}{\operatorname{sen} 1''},$$

ou

$$\delta''z = \frac{\operatorname{sen} 2\Delta \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} P}{\operatorname{sen} 1''};$$

e finalmente $\delta z = \delta' z + \delta'' z,\ \delta \lambda = \delta z.$

A formula (1) tem assim logar em ambas as passagens: devendo usar-se do signal — no segundo termo, quando estiver o astro entre o polo e o zenith.

133. *Inclinação do fio horizontal.* Seja $A_{,}CA'_{,}$ (Fig. 41) a recta horizontal que passa pelo centro C dos fios, projectada na esphera celeste; $S_{,}S'_{,,}$ as posições d'uma estrella quando toca o fio transverso SCS′ nos pontos $S_{,}$, $S'_{,,}$. As distancias zenithaes lidas são $ZA_{,} = z_1$, $ZA'_{,,} = z_2$; e os erros d'ellas são $A_{,}S_1 = e_1$, $A'_{,,}S'_{,,} = e_2$. Teremos pois

$$z_1 - e_1 = z_2 + e_2.$$

E como, fazendo $A_{,}C = h_1$, $A'_{,,}C = h_2$, os pequenos triangulos $A_{,}CS_{,}$, $A'_{,,}CS'_{,,}$, dão

$$\frac{e_1}{h_1} = \frac{e_2}{h_2},\ \text{ou}\ \frac{e_1}{e_1 + e_2} = \frac{h_1}{h_1 + h_2},\ \frac{e_2}{e_1 + e_2} = \frac{h_2}{h_1 + h_2},$$

resultam

$$e_1 = \frac{(z_1 - z_2)\, h_1}{h_1 + h_2},\ e_2 = \frac{(z_1 - z_2)\, h_2}{h_1 + h_2}.$$

Em outra distancia h_x do ponto C, será:

$$e_x = \frac{z_1 - z_2}{h_1 + h_2} \cdot h_x,\ z = z_x \mp e_x \ldots\ (2).$$

Para cada estrella póde tomar-se por $\dfrac{h_x}{h_{,} + h_2}$ a razão dos intervallos de tempo correspondentes.

XII

Do circular meridiano.

134. O circular meridiano, hoje adoptado na maior parte dos bons observatorios, é a reunião do oculo meridiano com o circular mural em um só instrumento.

A uma extremidade do braço de rotação, que deve ser mais curto e mais grosso que o do simples oculo meridiano, está firmemente ligado um círculo graduado de grande raio; e na outra extremidade ha um systema proprio para fixar o braço de rotação, e para lhe dar pequenos movimentos.

Sôbre os pilares, onde assenta o braço de rotação, ha microscopios cujos eixos opticos, perpendiculares ao plano do círculo graduado, se projectam nas divisões do mesmo círculo que vão passando defronte d'elles; e, para completar as leituras, ha parafuzos micrometricos que movem os reticulos dos microscopios.

A luz proveniente d'um foco luminoso, sendo reflectida em espelhos convenientemente inclinados, illumina não só o reticulo do oculo, senão tambem a graduação do círculo nos logares onde deve ler-se, e os reticulos dos microscopios.

135. Os erros do eixo de rotação e do eixo optico d'este instrumento corrigem-se e apreciam-se como se disse nos n.os 96, 97, 108, 109, 110, 111; e attende-se á influencia do que ainda restar d'elles nas passagens meridianas como se disse nos n.os 113 e 114; advertindo que, se o observador não muda de posição quando se trocam as extremidades do nivel, deve usar-se, em logar da fórmula (1) do n.º 107, da seguinte:

$$L = \frac{D - E + D' - E'}{4}.$$

A perpendicularidade do circulo ao eixo de rotação póde verificar-se como se disse no n.º 121.

136. O collimador, posto na extremidade do oculo onde se applica o olho do observador, é um ocular composto, dentro do tubo do qual ha um vidro que se póde inclinar á vontade. Dá-se a este vidro a inclinação necessaria para que, batendo 'nelle uma luz intensa recebida por uma abertura lateral, cheguem ao olho do observador duas imagens dos fios do reticulo, uma directa, outra proveniente da reflexão em um banho de mercurio posto debaixo do objectivo.

Se a imagem reflectida do fio do meio coincide com a directa, o eixo optico está no plano vertical. Se tambem a imagem reflectida do fio transverso coincide com a directa, o eixo optico é vertical, e por isso perpendicular ao eixo de rotação, já horizontal: conseguintemente a sua extremidade objectiva corresponde então ao ponto nadir.

137. Chamando ν a leitura correspondente ao nadir, a correspondente ao zenith será

$$\mu = \nu \pm 180^\circ;$$

o que é conforme com o que se disse no n.º 124.

Por conseguinte, chamando z a distancia zenithal observada do astro, e L a leitura correspondente, serão:

$$\mu = \nu \pm 180^\circ, \; L = \mu + z, \; z = L - \mu.$$

Se as leituras diminuirem quando crescerem as distancias zenithaes, mudaremos o signal de z nestas equações.

138. Attende-se á influencia nas distancias zenithaes dos erros da verticalidade do circulo, do eixo optico ou da direcção do raio visual, e de inclinação do fio transverso, como se disse nos n.os 131 e 133.

XIII

Do sector zenithal.

139. As equações dos n.^{os} 128, 129, 130,

$$\cos z_{,} = \cos z'' \cos L, \quad \cos z'' = \cos p \cos z', \quad \cos z - \cos z_{,} = 2 \operatorname{sen} \Delta \operatorname{sen} D \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} P,$$

ou
$$\operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(z_{,} - z'') = \frac{\cos z'' \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} L}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(z'' + z_1)},$$

$$\operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(z'' - z') = \frac{\cos z' \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} p}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(z'' + z')},$$

$$\operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(z_{,} - z) = \frac{\operatorname{sen} \Delta \operatorname{sen} D \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} P}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(z_{,} + z)},$$

mostram que, no caso de ser muito pequena a distancia zenithal, podem os erros L, p, P dar correcções mais attendiveis, $z_{,} - z''$, $z'' - z'$, $z - z_{,}$. Por isso convém neste caso ser muito escrupuloso na correcção dos erros do zenith e do eixo optico, e na reducção das distancias zenithaes ao meridiano; e primeiro que tudo escolher um instrumento em que aquelles erros se possam attenuar mais efficazmente.

Para este fim reduz-se o limbo a um pequeno número de graus, dando-lhe um raio muito grande, e suspendendo-o d'um eixo de rotação similhante ao do oculo meridiano. Diminue-se assim a influencia dos erros da graduação; e tornam-se mais perfeitas, pela inversão, a verticalidade do limbo e a direcção do eixo optico.

O instrumento assim construido e assentado é o *sector zenithal*.

140. Com o sector observe-se uma estrella proxima do zenith em duas noites consecutivas, invertendo-o na segunda; e, suppondo o zero da graduação entre as duas posições do oculo, tome-se a semisomma das duas leituras. Esta semisomma será a distancia zenithal da estrella; e comparando-a com a primeira leitura, ter-se-ha o erro do index, como no n.º **117**,

$$\text{erro de index} = \frac{z+z'}{2} - z = \frac{z'-z}{2},$$

que se poderá applicar nas outras observações feitas com o mesmo instrumento.

Mas a avaliação das distancias zenithaes pela semisomma das duas leituras em posições inversas do limbo deve ter-se como mais exacta; e por isso ha *sectores zenithaes* de tal modo construidos, que o limbo, por estar preso a um apparelho, cujas extremidades conicas encaixam em duas barras horizontaes firmemente ligadas com o braço de rotação e podem gyrar em volta dos pontos de inserção 'nellas, se inverte mudando a face de *este* para *oeste*, ou ás avessas, sem que seja necessario inverter o mesmo braço.

Esta construcção permitte, pela rapidez da inversão, observar na mesma noite duas vezes o astro, em duas posições inversas, uma pouco antes da passagem meridiana, outra pouco depois, de um modo similhante ao indicado no n.º **125**; mas a reducção das distancias extrameridianas á meridiana deve fazer-se com muito escrupulo, como já dissemos.

XIV

Do instrumento de passagens no primeiro vertical.

141. Este instrumento, de que se usa em alguns observatorios, é um oculo similhante ao meridiano, collocado de modo que o eixo de rotação fique no plano meridiano, e o oculo no primeiro vertical, isto é, no plano vertical cujo azimuth é 90°.

Para collocar no meridiano o eixo de rotação do braço, que deve ser todo vasado, põe-se 'neste uma lente objectiva, e outra ocular com o competente reticulo; dirige-se para uma marca meridiana; e nota-se o ponto d'ella onde se projecta o encruzamento dos fios. Depois dá-se ao braço um movimento de rotação de 180° em torno do eixo, de modo que as extremidades do oculo que apontavam para léste e para oeste se troquem apontando respectivamente para oeste e para léste; e nota-se tambem o ponto da marca meridiana onde agora se projecta o mesmo encruzamento dos fios. Finalmente, movendo o reticulo, divide-se ao meio o espaço percorrido pela projecção sôbre a marca; e, conseguida a bissecção o mais perfeitamente que for possivel, move-se o braço até que o encruzamento se dirija para o centro da marca.

Collocado o eixo de rotação no meridiano, e nivellado, põe-se uma marca, a léste ou oeste, na direcção do eixo optico do oculo, e regula-se este eixo como se disse no n.° 97.

Ficando o eixo horizontal de rotação no meridiano, e o eixo optico do oculo perpendicular a elle, conseguintemente na direcção este-oeste, fica o instrumento na posição em que deve estar.

142. Seja (Fig. 42) $S'ZS''$ o primeiro vertical; $S'SS''$ o parallelo d'uma estrella, que atravessa aquelle circulo nos pontos S', S''; e P o polo.

O triangulo PZS', rectangulo em Z, dá

$$\cos P = \cot \Delta \tan D \ldots (1);$$

onde Δ designa a distancia polar da estrella, e D a distancia do polo ao zenith, ou a *colatitude.* Portanto:

1.° Se a estrella é conhecida, e se a observação dá o intervallo de tempo P decorrido entre as passagens pelo meridiano e uma das passagens pelo primeiro vertical, ou o intervallo de tempo 2P decorrido entre as passagens pelo primeiro vertical, sendo estes intervallos convertidos em arco, a equação (1) dará a colatitude D.

2.° Se a estrella não é conhecida, mas é conhecida a colatitude de outro logar onde tambem se observam as duas passagens d'ella pelo primeiro vertical: chamando D′, P′, as quantidades relativas ao logar cuja colatitude não se conhece, as equações

$$\operatorname{tang} D = \cos P \operatorname{tang} \Delta, \quad \operatorname{tang} D' = \cos P' \operatorname{tang} \Delta,$$

darão

$$\operatorname{tang} D' = \operatorname{tang} D \,.\, \frac{\cos P'}{\cos P}.$$

3.° Se quizermos formar um catalogo d'estrellas por observações de passagens pelo primeiro vertical feitas em um logar cuja colatitude é conhecida, a equação (1) dará Δ; e os angulos horarios $\frac{S'PS''}{2} = P$, com as horas das observações, darão as passagens pelo meridiano, e por conseguinte as ascensões rectas.

143. Para a resolução d'estes problemas pelas passagens pelo primeiro vertical podem contribuir as observações em muitos fios parallelos, similhantemente ao que se faz nas passagens meridianas.

Seja M (Fig. 43) o encruzamento dos fios centraes no primeiro vertical; e supponhamos que se faz a observação das passagens nos pontos onde dois fios lateraes cortam o transverso, um em F ao norte de M, outro em F′ ao sul de M.

Chamemos $P_1 = ZPF$ o angulo horario observado em F; x o intervallo angular MF que separa este fio do do meio; A o azimuth FZP; e $a = 90° - A$ o angulo azimuthal MZF que subtende aquelle intervallo. Os triangulos MZF, ZPF darão

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} ZF = \cot A \operatorname{sen} \Delta \operatorname{sen} P_1,$$

$$\cos D \cos P_1 = \operatorname{sen} D \cot \Delta - \operatorname{sen} P_1 \cot A,$$

entre as quaes eliminando cot A, resulta

$$\text{sen}\, x = \text{sen D} \cos \Delta - \cos \text{D sen} \Delta \cos \text{P}_1 \ldots . \;(2).$$

A observação no fio F′, attendendo a que nelle é $a = \text{F'ZP} - \text{MZP} = \text{A}' - 90°$, dará similhantemente:

$$-\text{sen}\, x = \text{sen D} \cos \Delta - \cos \text{D sen} \Delta \cos \text{P}_2 \ldots . \;(2)'.$$

Das equações (2) e (2)′ deduzem-se, por somma e por differença,

$$\text{tang D} = \text{tang} \Delta \cos \tfrac{1}{2} (\text{P}_1 + \text{P}_2) \cos \tfrac{1}{2} (\text{P}_1 - \text{P}_2) \ldots . \;(3),$$

$$\text{sen}\, x = \cos \text{D sen} \Delta\, \text{sen} \tfrac{1}{2} (\text{P}_1 + \text{P}_2)\, \text{sen} \tfrac{1}{2} (\text{P}_1 - \text{P}_2) \ldots . \;(4).$$

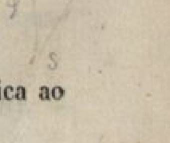
Por tanto, fazendo a observação em dois fios equidistantes do fio do meio, a equação (3) dará a colatitude, se a estrella é conhecida, ou inversamente.

De sorte que esta observação equivale á que se fizesse no fio do meio, e para a qual fosse $\cos \text{P} = \cos \frac{1}{2} (\text{P}_1 + \text{P}_2) \cos \frac{1}{2} (\text{P}_1 - \text{P}_2)$.

A equação (4) dará o angulo x; e depois poderemos resolver os mesmos problemas, da determinação da latitude ou das distancias polares das estrellas, pela observação em um só fio, usando da equação (2), ou do systema equivalente

Uso d'esta formula

$$\text{tang}\, k = \text{tang} \angle \cos \text{P}_1, \ \text{sen}\, (\text{D} - k) = \frac{\text{sen}\, x \cos k}{\cos \Delta} \ldots . \;(5);$$



e mudando o signal de x no caso de se observar no fio lateral, que fica ao sul do fio do meio.

Pondo $\text{tang}\, \varphi = \text{sen}\, k\, \text{tang P}$, e eliminando $\text{sen}\, k$ e $\text{sen}\, \varphi$ entre

$$\text{tang}\, k = \text{tang} \Delta \cos \text{P}, \ \text{tang}\, \varphi = \text{sen}\, k\, \text{tang P}, \ \text{sen}\, \varphi = \text{sen} \Delta\, \text{sen P},$$

das quaes só duas são distinctas, a segunda das equações (5) transforma-se em

$$\operatorname{sen}(D-k)=\frac{\operatorname{sen}x}{\cos\varphi}.$$

E esta, applicada a duas observações no mesmo fio, dará

$$\operatorname{sen}(D-k)=\frac{\operatorname{sen}x}{\cos\varphi},\ \operatorname{sen}(D-k')=\frac{\operatorname{sen}x}{\cos\varphi'};$$

e por isso

$$\operatorname{tang}\left(D-\frac{k+k'}{2}\right)=\operatorname{tang}\frac{k'-k}{2}\cot\frac{\varphi+\varphi'}{2}\cot\frac{\varphi-\varphi'}{2}\ldots.(6).$$

144. Como a passagem meridiana é intermedia entre as duas passagens pelo primeiro vertical, póde orientar-se este instrumento de um modo similhante ao empregado no n.º 99, quando ha o oculo meridiano para observar as passagens meridianas.

Assim este instrumento, pelo qual se resolvem facilmente os problemas indicados no n.º 142, póde collocar-se com muita exactidão pelas correcções de horizontalidade, collimação, e orientação, que se obtêm com tanto escrupulo como no oculo meridiano.

E, além d'esta vantagem, tem a importantissima: de não influirem nas observações feitas com elle as refracções, que alteram as distancias zenithaes e não os azimuths; nem a equação pessoal, que anticipa ou retarda egualmente as duas epochas nas quaes a estrella atravessa o primeiro vertical.

Correcções do instrumento de passagens no primeiro vertical

145. *Erro de collimação.* Seja ξ o erro de collimação do oculo para o norte. As ultimas equações do n.° **143** dão

$$\operatorname{sen}(D-k)=\frac{\operatorname{sen}\xi}{\cos\varphi},\ \operatorname{sen}(D-k')=\frac{\operatorname{sen}\xi}{\cos\varphi'}\ldots.(7);$$

e (6);

nas quaes se mudará φ' em $180°-\varphi'$, se na segunda observação se trocarem as extremidades do eixo de rotação.

Achado D, dará o erro de collimação a formula

$$\operatorname{sen}\xi=\operatorname{sen}(D-k)\cos\varphi=\operatorname{sen}(D-k')\cos\varphi'.$$

Se o erro ξ for para o sul, será negativo; e a correcção subtractiva.

146. *Erro de orientação.* Se ha um erro de orientação ν, o plano do instrumento, em logar de ser sZs', é SZS' (Fig. **44**).

Para duas estrellas S, S', os triangulos ZPS, ZPS', nos quaes são $PZS=90°-\nu$, $PZS'=90°+\nu$, dão

$$\cos D\cos P=\operatorname{sen}D\cot\Delta-\operatorname{sen}P\operatorname{tang}\nu\ldots.(a),$$

$$\cos D\cos P'=\operatorname{sen}D\cot\Delta'+\operatorname{sen}P'\operatorname{tang}\nu\ldots.(b).$$

As expressões de tang k e tang φ do n.° **143** transformam estas equações em

$$\operatorname{sen}(D-k)=\operatorname{tang}\varphi\operatorname{tang}\nu,\ \operatorname{sen}(D-k')=\operatorname{tang}\varphi'\operatorname{tang}\nu\ldots.(8),$$

que dão $$\operatorname{tang}\left(D-\frac{k+k'}{2}\right)=\operatorname{tang}\frac{k'-k}{2}\,\frac{\operatorname{sen}(\varphi-\varphi')}{\operatorname{sen}(\varphi+\varphi')}\ldots.(9);$$

mudando nesta equação φ' em $-\varphi'$, se a segunda observação se fizer para a mesma parte que a primeira.

E, achado D, dará o azimuth ν qualquer das equações

$$\operatorname{tang}\nu = \frac{\operatorname{sen}(D-k)}{\operatorname{tang}\varphi}, \quad \operatorname{tang}\nu = \frac{\operatorname{sen}(k'-D)}{\operatorname{tang}\varphi'}.$$

Nestas formulas, sendo P um angulo horario oriental e P' um occidental, ν é positivo quando a extremidade sul do braço de rotação se desvia para oriente.

Se, durante uma serie de observações, não ha desconfiança de variação azimuthal, basta que por duas d'ellas se determine ν; e depois as formulas (8) darão D por todas.

Póde fazer-se um uso analogo das equações do n.º 145.

Se se observa a mesma estrella, é $\Delta = \Delta'$; e a eliminação de $\operatorname{tang}\nu$ entre (a) e (b) dá logo

$$\operatorname{tang} D \cos\tfrac{1}{2}(P-P') = \operatorname{tang}\Delta \cos\tfrac{1}{2}(P+P').$$

147. Differenciando (2) ou (2') do n.º 143, e (a) ou (b) do n.º 146, em ordem a ξ e P, e a ν e P, respectivamente, e fazendo depois $\xi = 0$ e $\nu = 0$, acham-se tambem ξ e ν, quando se suppõem existir só um d'elles, pelas formulas

$$\xi = \pm \cos D \operatorname{sen}\Delta \operatorname{sen} P\, \delta P, \quad \nu = \pm \cos D\, \delta P;$$

nas quaes se póde suppor $\delta P = AR - \frac{t+t'}{2}$, sendo t e t' os tempos sideraes das duas passagens observadas d'uma estrella.

148. *Erro de nivel.* Se ha erro i de nivel, o zenith apparente não coincide com o verdadeiro. Suppondo pois que a extremidade sul do eixo de rotação está elevada a quantidade angular i, isto é, que o falso zenith está ao norte do verdadeiro, será necessario ajunctar i ao valor de D dado pela formula (1).

149. Se existirem simultaneamente os erros ξ, ν, i; e se estes erros, já muito pequenos, se determinarem por uma marca a oriente ou ao occidente, e por um nivel, cada observação dará D pelas formulas

$$\operatorname{tang} k = \cos P \operatorname{tang} \Delta,\ D = k + \xi \frac{\cos k}{\cos \Delta} + \nu \operatorname{sen} k \operatorname{tang} P + i \ldots . \ (10);$$

nas quaes se desprezam as potencias superiores dos erros, e será P negativo quando for occidental.

Mas, se não se conhecerem ξ e ν, poderão antes determinar-se por tres observações; porque, substituidas estas em (10), e eliminado $D - i$, as duas equações resultantes darão ξ, ν.

Methodo de Struve

Como o signal do termo em ξ muda com a inversão do instrumento, e o do termo em ν com a mudança da observação oriental para a occidental, vê-se que se deve inverter o oculo no meio das passagens tanto orientaes como occidentaes, de modo que se tomem sempre nos mesmos fios physicos; e ler o nivel antes e depois das passagens tanto orientaes como occidentaes. Então, escrevendo as passagens orientaes consecutivas em uma columna, e as occidentaes em outra columna em ordem inversa, e chamando P_1, P_2, as semidifferenças dos tempos correspondentes das passagens oriental e occidental por um fio ao norte, e pelo mesmo fio ao sul, a formula (3) dará D, sensivelmente correcto; com tanto que no fim se applique i.

150. Se a distancia polar precisa da correcção $\delta\Delta$, a differenciação de (1) mostra que D precisará da correcção $\delta D = \dfrac{\operatorname{sen} 2D}{\operatorname{sen} 2\Delta}\,\delta\Delta$.

Se D é conhecido e se quer Δ, as equações $\operatorname{tg} \Delta = \dfrac{\operatorname{tg} k}{\cos P}$, $\operatorname{tg} \Delta_1 = \dfrac{\operatorname{tg} D}{\cos P}$, dão

$$\frac{\Delta - \Delta_{\prime}}{\cos^2 \Delta} = \frac{1}{\cos P} \cdot \frac{k - D}{\cos^2 D} = -\frac{\operatorname{tang} \Delta \cot D}{\cos^2 D}\left(\xi \frac{\cos D}{\cos \Delta_{\prime}} + \nu \operatorname{sen} D \operatorname{tang} P + i\right),$$

isto é, $$\Delta = \Delta_{\prime} - \left(\xi \frac{\cos D}{\cos \Delta_{\prime}} + \nu \operatorname{sen} D \operatorname{tang} P + i\right) \cdot \frac{\operatorname{sen} 2\Delta}{\operatorname{sen} 2D}.$$

O mesmo se acharia, por dar (1) $\operatorname{tg} D\ \delta\Delta = \delta P . \operatorname{sen} P \operatorname{sen}^2 \Delta$; e ser a *correcção* δP (n.º 147 e (1)) $= -\left(\dfrac{\xi}{\cos D \operatorname{sen} \Delta \operatorname{sen} P} + \dfrac{\nu}{\cos D} + \dfrac{i \cot \Delta}{\operatorname{sen} P \cos^2 D}\right)$.

CAPITULO VII

Das ascensões rectas e declinações das estrellas; e do tempo sideral

151. Os processos, que ficam ensinados nos artigos precedentes, fazem conhecer a posição do meridiano em cada logar, e a altura do polo; e fornecem os meios mais exactos de observar o tempo da passagem de um astro pelo meridiano, a sua distancia zenithal meridiana, e a sua distancia zenithal em qualquer azimuth.

Estamos assim preparados para assignar as direcções visuaes dos astros, e as suas relações angulares, por qualquer dos dois systemas de coordenadas: *distancias zenithaes* e *azimuths,* ou *declinações* e *ascensões rectas.* Mas o exame attento dos meios d'observação empregados nos dois systemas faz ver que no primeiro não se póde usar d'instrumentos tão simples, tão estaveis, e tão appropriados á exactidão de cada uma das coordenadas, como no segundo; e demais, as observações feitas em pontos differentes da superficie terrestre não se podem comparar entre si, sem as reduzir primeiramente, por calculos não pouco trabalhosos, a um só logar. Por isso, sem desprezar o primeiro systema, que em alguns casos é vantajoso e até necessario, o segundo é o mais ordinariamente usado.

152. Se tomarmos por origem das ascensões rectas o plano horario d'uma estrella conhecida, ou, em geral, d'um ponto do qual se possa determinar o instante da passagem pelo meridiano, a differença entre esse tempo e o observado da passagem meridiana de qualquer outra estrella será a ascensão recta d'esta estrella.

O valor absoluto da somma da distancia zenithal meridiana com a colatitude, ou da sua differença, segundo ficar a estrella ao sul ou ao norte do zenith, dará a distancia polar. E o complemento da distancia polar será a declinação; positiva se o astro estiver ao norte do equador, negativa se estiver ao sul.

153. O ponto cujo plano horario os astronomos costumam tomar para origem das ascensões rectas, é aquelle onde o sol atravessa o equador, quando as suas declinações passam de austraes a boreaes, e que é por conseguinte um dos da intersecção da ecliptica com o equador. Este ponto, que determinaremos quando tractarmos da theoria do sol, chama-se *Aries*, e costuma designar-se pelo signal ♈.

As ascensões rectas contam-se seguidamente de ♈, no sentido de occidente para oriente, desde 0° até 360°, ou de 0^h a 24^h; e as distancias polares contam-se seguidamente, do polo do norte para o do sul, desde 0° até 180°. Por estas duas coordenadas fica completamente definida a projecção d'um astro na esphera celeste, ou a direcção do seu raio visual.

154. A regra que se deu no n.º 100 para tomar o tempo da passagem pelo fio central d'um oculo meridiano suppõe que são equidistantes d'esta as passagens pelo primeiro e pelo último fio, pelo segundo e pelo penultimo, etc. Mas, quando não se póde tomar algumas d'estas passagens, ou quando não se dá a equidistancia supposta, é necessario determinar os intervallos de tempo que decorrem entre as passagens pelos fios consecutivos, ou entre as passagens por cada um dos fios lateraes e pelo do meio, a fim de reduzir tudo a este.

Para isso consideremos as duas posições S, S′, da estrella (Fig. 45), quando os seus raios visuaes passam por dois fios do reticulo equidistantes do medio; e o polo P. Chamando 2θ o angulo visual subtendido pelos dois fios, o qual é medido pelo arco de círculo maximo SS′; e 2P o angulo horario que elles comprehendem: o triangulo PSS′ dá

$$\cos 2P = \frac{\cos 2\theta - \cos^2\Delta}{\operatorname{sen}^2\Delta}, \text{ ou } \operatorname{sen} P = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\Delta}.$$

155. Se a estrella for equatorial, e chamarmos $P_{(e)}$ o angulo horario descripto por ella, entre os mesmos fios, será

$$\operatorname{sen} P_e = \operatorname{sen}\theta;$$

por conseguinte

$$\operatorname{sen} P_{(e)} = \operatorname{sen} P \operatorname{sen} \Delta \ldots . (1).$$

Quando P é muito pequeno, esta equação dá

$$\frac{P}{15} = \frac{P_e}{15 \operatorname{sen} \Delta} \ldots . (2).$$

Quando P não for muito pequeno, usaremos, em logar de (2), da equação rigorosa (1), ou da mais approximada

$$\frac{P}{15} = \frac{P_e}{15 \operatorname{sen} \Delta}\left(1 + \frac{1}{6} P_e^2 \operatorname{sen}^2 1'' \cot^2 \Delta\right) \ldots . (2').$$

Suppondo, por exemplo, $\frac{P_e}{15} = 14^s,3$, e $\Delta = 1^\circ.25'.15'',1$, a fórmula (2) dá $\frac{P}{15} = 9^m.36^s,70$; e as fórmulas (1) e (2') dão $\frac{P}{15} = 9^m.36^s,87$.

156. Chamando pois i_1, i_2, i_3, 0, i_5, i_6, i_7 os intervallos equatoriaes entre as passagens por cada fio e pelo fio do meio, o tempo da passagem pelo fio do meio terá qualquer das expressões

$$T = T + \frac{i_1}{\operatorname{sen} \Delta}, \; T = T_2 + \frac{i_2}{\operatorname{sen} \Delta}, \; T = T_3 + \frac{i_3}{\operatorname{sen} \Delta}, \; T = T_4,$$

$$T = T_5 - \frac{i_5}{\operatorname{sen} \Delta}, \; T = T_6 - \frac{i_6}{\operatorname{sen} \Delta}, \; T = T_7 - \frac{i_7}{\operatorname{sen} \Delta},$$

cujo meio dá

$$T=\frac{(T_1+T_2+T_3+T_4+T_5+T_6+T_7)+(i_1-i_7+i_2-i_6+i_3-i_5)\operatorname{cosec}\Delta}{7}..(3)$$

Em virtude da equação (2'), deverá cada termo i_m de (3) multiplicar-se por

$$1+\frac{1}{6}(15i_m)^2 \operatorname{sen}^2 1'' \cot^2 \Delta,$$

quando a estrella for muito proxima do polo.

157. A determinação dos intervallos equatoriaes dos fios é assim um dos elementos necessarios para usar dos resultados das observações feitas com um oculo meridiano. São muito convenientes para os obter as estrellas proximas do polo, como a *polar;* porque, observando o intervallo $\frac{P}{15}$ relativo a uma d'estas estrellas, a equação (2) dá o intervallo equatorial correspondente

$$i=\frac{P}{15}\operatorname{sen}\Delta,$$

no qual o erro de $\frac{P}{15}$ é muito attenuado pelo factor sen Δ.

Na verdade a incerteza das observações é maior nas passagens de taes estrellas; mas póde diminuir-se a sua influencia tomando em cada fio dois ou tres toques, externos e central, e reunindo um grande número de observações; porque o meio d'estas se deve suppor menos affectado pelos erros fortuitos, e subsiste sempre a vantagem da multiplicação pelo pequeno factor sen Δ. Assim um número n de observações, relativas á mesma estrella e ao mesmo intervallo de dois fios, dará

$$i = \frac{\Sigma P}{15\,n} \operatorname{sen} \Delta.$$

Para se apreciar a vantagem da observação das estrellas circumpolares na determinação dos intervallos equatoriaes basta dizer que 4^s de erro no intervallo da passagem da polar dão apenas $0^s,1$ de erro no intervallo equatorial.

Exemplo: Mais de setenta observações de intervallos de passagens da polar pelos fios verticaes do circular meridiano de Coimbra, que serviram desde 3 de junho de 1857, deram os seguintes resultados:

$$\frac{P_1}{15} - \frac{P_2}{15}, \quad \frac{P_2}{15} - \frac{P_3}{15} \qquad \frac{P_3}{15} \qquad \frac{P_5}{15} \qquad \frac{P_6}{15} - \frac{P_5}{15} \quad \frac{P_7}{15} - \frac{P_6}{15}$$

$$9.^m 26^s,473;\, 9^m.29^s,705;\, 9^m.26^s,397;\, 9^m.27^s,774;\, 9^m.24^s,878;\, 9^m.23^s,070;$$

dos quaes, suppondo $\Delta = 1°27'$, se tiram, pela fórmula $Pe = P \operatorname{sen} \Delta$,

$$i_1 \qquad i_2 \qquad i_3 \qquad i_5 \qquad i_6 \qquad i_7$$

$$43^s,07;\; 28^s,74;\; 14^s,33;\; 14^s,35;\; 28^s,64;\; 42^s,89.$$

E applicando á fórmula (3), resulta

$$T = \frac{T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 + T_6 + T_7 + 0^s,26 \operatorname{cosec} \Delta}{7}.$$

158. A equação (1) tambem se póde achar do modo seguinte:

Sejam (Fig. 46) F,F′ dois fios do reticulo. Quando o astro está em S, a sua direcção SAO passa pelo ponto A do fio F; e quando está em S′, depois de ter descripto a parte SS′ do seu parallelo, a sua direcção S′A′O passa pelo ponto A′ do fio F′. Cortando pois o cone SOS′ pelo plano AmA' parallelo á base, os raios visuaes do astro, S,S′, passarão pelos pontos do arco AmA'. O arco AMA′ descripto com o raio OA seria aquelle pelo qual passariam os raios visuaes do astro, se o arco SS′ fôsse equatorial. Assim, chamando $2E$, 2π, os arcos, equatorial e do parallelo, cujos raios extremos passariam por A, A′, e R, r os seus respectivos raios, teremos, por ser commum a corda AA′, e por ser $\frac{r}{R} = \operatorname{sen} \Delta$,

$$R \operatorname{sen} E = r \operatorname{sen} \pi, \quad \operatorname{sen} E = \operatorname{sen} \pi \operatorname{sen} \Delta;$$

e, no caso de ser π um pequeno arco,

$$E = \pi \operatorname{sen} \Delta.$$

Portanto: *para achar o número de graus d'um pequeno arco do equador, cujo comprimento é egual ao d'um arco de parallelo que tem o número de graus* π, *deveremos multiplicar* π *pelo seno da distancia polar*. E inversamente: para passar do primeiro para o segundo é necessario dividir pelo seno da distancia polar.

159. Se por observações convenientemente reduzidas determinarmos assim as ascensões rectas e as declinações das estrellas, poderemos fazer um *catalogo de estrellas*, no qual se achem, ao lado d'uma columna onde se inscrevam os nomes d'ellas, outras columnas onde se inscrevam as suas ascensões rectas e declinações, ou as suas ascensões rectas e distancias polares.

As variações das coordenadas durante um anno costumam tambem inscrever-se em outras columnas com o titulo de *variações annuas* em declinação, ou em distancia polar. Inscrevem-se além d'isso as variações seculares d'estas; e os *movimentos proprios*, se as estrellas o têm.

160. Se com as declinações e com as differenças das ascensões rectas determinarmos as distancias angulares das estrellas umas ás outras pela fórmula

$$\cos\delta = \cos P \operatorname{sen}\Delta \operatorname{sen}\Delta' + \cos\Delta \cos\Delta',$$

ou
$$\operatorname{sen}^2\tfrac{1}{2}\delta = \operatorname{sen}^2\tfrac{1}{2}(\Delta - \Delta') + \operatorname{sen}\Delta \operatorname{sen}\Delta' \operatorname{sen}^2\tfrac{1}{2}P,$$

acharemos que estas distancias são constantes; prescindindo das variações de ordem inferior devidas aos movimentos proprios.

D'onde resulta que ou as variações principaes das ascensões rectas e declinações são devidas a movimentos de todas as estrellas, de tal sorte combinados que as distancias mutuas d'ellas ficam invariaveis; ou a mudanças na origem d'onde se contam aquellas coordenadas, isto é, a mudanças de posição do ponto de aries e do polo. Adiante veremos que d'estas duas hypotheses a segunda, que é incomparavelmente mais simples, tambem é a verdadeira; e que os movimentos do ponto de aries e do polo constituem a *precessão* e a *nutação*, de que já temos fallado.

A mesma invariabilidade das distancias angulares das estrellas, de qualquer ponto da terra que sejam vistas, é uma nova prova de que as distancias entre os pontos da superficie terrestre são insensiveis quando se comparam com as distancias das estrellas á terra.

161. Formado o catalogo de estrellas: se observarmos a distancia zenithal ZS (Fig. 47) d'uma estrella, em um logar cuja latitude seja conhecida, teremos no triangulo ZPS os lados $ZP = D$, $ZS = z$, $SP = \Delta$; o que fará conhecer o angulo horario pela fórmula:

$$\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}P = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(z + \Delta - D)\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(z + D - \Delta)}{\operatorname{sen}\Delta \operatorname{sen} D}}.$$

E o tempo sideral, que é a *ascensão recta do meridiano convertida em tempo*, será, no instante da observação,

$$\frac{\Upsilon PE}{15} = \frac{P}{15} + \frac{\Upsilon PS}{15},$$

isto é, $$t = \frac{P}{15} + \frac{AR\star}{15} \ldots\ldots (4).$$

Esta fórmula é geral, se os angulos horarios P se contam sempre seguidamente de oriente para occidente desde 0° até 360°; mas, se alguns se contarem de occidente para oriente, será para esses negativo o primeiro termo $\frac{P}{15}$.

Comparando o tempo sideral assim calculado com aquelle que o relogio marcar no instante da observação, conheceremos 'nesse instante o estado absoluto do relogio relativamente ao tempo sideral (n.° 106).

CAPITULO VIII

Aspectos da esphera celeste para os differentes logares da terra. Latitudes e Longitudes terrestres. Rotação da terra.

I

Definições dos circulos celestes e terrestres.

162. Com referencia ao movimento circular e uniforme das estrellas em volta do eixo de rotação, definem-se os circulos principaes da esphera celeste, e as linhas correspondentes da superficie terrestre, de um modo independente da figura da terra. Assim:

Os circulos da esphera celeste nos quaes se projectam as estrellas pelos seus raios visuaes, durante o movimento diurno, são os *parallelos celestes*.

E d'estes parallelos aquelle, que é circulo maximo, chama-se *equador*.

Os pontos onde o eixo de rotação da esphera celeste a encontra, são os *polos celestes*.

Os circulos maximos, que passam pelo eixo de rotação, são os *meridianos celestes*.

163. Os pontos da superficie terrestre, cujas verticaes são parallelas ao equador celeste, formam o *equador terrestre*.

Os pontos da superficie terrestre, cujas verticaes são parallelas ao plano d'um meridiano celeste, formam o correspondente *meridiano terrestre*.

Os pontos da superficie terrestre, cujas verticaes são parallelas ao eixo de rotação, chamam-se, por analogia, *polos terrestres.*

Finalmente os pontos da superficie terrestre, cujas verticaes são parallelas ás arestas do cone, que têm por vertice o centro da esphera celeste e por base um parallelo celeste, formam o correspondente *parallelo terrestre.*

D'estas definições facilmente se vê que as linhas terrestres, de que temos tractado, são aquellas cujos pontos têm os seus zeniths nos circulos celestes correspondentes.

164. No caso de se considerar a terra como espherica, ou como um ellipsoide de revolução, estas linhas são curvas planas; o equador terrestre, e os parallelos terrestres, são intersecções circulares do plano do equador celeste, e dos cones formados pelas normaes parallelas ás arestas dos cones celestes, com a superficie terrestre; os meridianos terrestres são as intersecções dos planos dos meridianos celestes com a mesma superficie; e os polos terrestres são os pontos onde o eixo dos polos celestes, passando pelo centro da terra, atravessa a superficie d'ella.

II

Posições dos logares terrestres

165. A posição d'um logar terrestre costuma definir-se pela sua *longitude geographica*, isto é, pelo angulo que o seu meridiano celeste faz com um meridiano celeste dado; e pela sua *latitude geographica*, ou declinação do zenith, isto é, pelo angulo que a sua vertical faz com o equador celeste; angulo que é egual á *altura do polo sôbre o horizonte*, e complemento da *colatitude*.

Segundo é o horizonte d'um logar parallelo, perpendicular, ou obliquo ao equador celeste, assim costuma chamar-se, para esse logar, a esphera *parallela*, *recta* ou *obliqua*.

166. Nos calculos astronomicos, em vez de se empregar a *latitude geographica* ou *astronomica*, que é, como acabamos de ver, o angulo da vertical com o equador, emprega-se muitas vezes a *latitude geocentrica*.

Considerando a terra como um ellipsoide de revolução achatado nos polos; e chamando D a colatitude geographica, D_1 a geocentrica, a e b os eixos maior e menor da ellipse meridiana terrestre, e $\alpha = \frac{a-b}{a}$ o *achatamento:* mostra-se na geodesia que é, até os termos da primeira ordem em α,

$$D_1 = D + \alpha \operatorname{sen} 2D$$

(vej. *Calc. das eph. astr.* n.° 128 e *Geod. de* Francoeur n.° 178).

167. A latitude geographica d'um logar terrestre acha-se pelos processos ensinados nos n.^{os} 118 e 142.

A longitude geographica d'um logar acha-se tomando a differença dos tempos, em que acontece um phenomeno instantaneo, contados em dois meridianos, um dos quaes é o do logar de que se tracta, e o outro é aquelle que serve d'origem ás longitudes terrestres.

Supponhamos, por exemplo, que tendo regulado um bom chronometro pelo tempo sideral do meridiano, que serve de origem, como é para nós o do Observatorio de Coimbra, o transportâmos a outro logar, onde se observa a distancia zenithal d'uma estrella conhecida.

Se conhecermos, pelos methodos proprios para determinar a latitude, a distancia do polo ao zenith, as equações do n.º 161 darão o instante da observação, em tempo sideral do logar,

$$t = \frac{P}{15} + \frac{A R_{*}}{15};$$

e este tempo, comparado com o t', que no mesmo instante mostra o chronometro, dará a differença de longitudes, ou a longitude do logar contada do meridiano de Coimbra de oriente para occidente,

$$L = 15\,(t' - t).$$

168. Se não fôr dada a latitude do logar, poderemos observar duas distancias zenithaes ZA, ZA′ d'uma estrella, e contar pelo chronometro o intervallo sideral $\frac{\theta}{15}$ das observações.

Então os triangulos ZPA, ZPA′, darão

$$\cos z = \cos P \operatorname{sen} D \operatorname{sen} \Delta + \cos D \cos \Delta,$$

$$\cos z' = \cos (P + \theta) \operatorname{sen} D \operatorname{sen} \Delta + \cos D \cos \Delta,$$

das quaes se tirarão os valores de D e P.

Em logar proprio tractaremos dos outros meios de determinar as longitudes, que fornecem as distancias da lua ao sol, aos planetas e ás estrellas, os eclipses, e outros phenomenos celestes.

169. No mar não se podem observar as distancias zenithaes, nem as distancias dos astros entre si, com os mesmos instrumentos de que nos costumamos servir em terra, por não o permittirem as oscillações do navio; e por isso os navegantes usam para esse fim dos *instrumentos de reflexão.*

'Nestes instrumentos, de que apenas fallaremos rapidamente, ha dois espelhos, um todo estanhado, e movel em torno de um eixo que é perpendicular ao plano d'um arco de circulo e passa pelo centro do mesmo arco; outro collocado fixamente, sôbre um raio do arco, e separado por uma linha perpendicular ao plano d'este, em duas partes, uma estanhada e outra transparente. O primeiro espelho ou *grande espelho,* é acompanhado no seu movimento por uma alidade, cuja extremidade percorre o arco; este arco é dividido em semigráus, que se lêem como se fôssem gráus; e um oculo está collocado de modo que o seu eixo optico atravessa a linha que separa as duas partes do *pequeno espelho.*

Suppondo que os dois espelhos estão collocados de tal modo que a alidade corresponda ao *zero* da graduação quando elles são parallelos, deverá 'nesta posição a imagem directa de um objecto vista pela parte não estanhada do pequeno espelho coincidir com a reflectida vista pela parte estanhada. Depois, se dirigirmos o instrumento de modo que vejamos a imagem directa de um objecto, e movermos a alidade até coincidir com essa imagem a reflectida de outro objecto, a leitura da graduação correspondente do limbo, que será dupla do arco percorrido pela alidade, mostrará a distancia angular dos dois objectos. Por exemplo, se collocando o instrumento verticalmente, o primeiro objecto fôr o horizonte apparente e o segundo fôr um astro, a leitura mostrará a altura do astro acima do horizonte apparente, da qual se tirará a depressão do horizonte apparente para ter a altura sôbre o horizonte (n.º 13).

Estes instrumentos, sendo sectores de 45°, 60°, ou circulos inteiros, podem mostrar angulos de 0 até 90°, de 0 até 120°, ou todos os angulos, e estão divididos em 90, 120, ou 720 partes. Mas o circulo inteiro tem além d'isso a vantagem *da repetição,* pela qual mostra angulos multiplos do que se procura; como se verá quando tractarmos d'uma vantagem similhante dos *circulares repetidores.*

170. O fundamento d'esta construcção é o theorema seguinte de optica: *Se um raio luminoso se reflectir successivamente em dois espelhos planos, o angulo feito pela direcção primitiva com a direcção final será duplo do angulo dos dois espelhos.*

Sejam EH, EH′ os dois espelhos (Fig. 48); SM o raio incidente; e MM′, M′S′ as suas direcções successivas. Os triangulos MS′M′, MEM′, dão

$$MM'K = 2i' = \theta + 2i, \quad MM'H' = i' = E + i;$$

logo

$$2E = \theta,$$

que é o theorema enunciado.

171. Suppondo a terra espherica é facil achar a distancia entre dois pontos d'ella, quando se conhecem as suas latitudes e a differença das suas longitudes. Porque, chamando L a differença das longitudes, D, e D′, as colatitudes, e d a graduação do arco de distancia, será

$$\cos d = \cos L \operatorname{sen} D \operatorname{sen} D' + \cos D \cos D';$$

ou $$\cos L \operatorname{tang} D = \operatorname{tang} \varphi, \quad \cos d = \frac{\cos D \cos (D' - \varphi)}{\cos \varphi};$$

e o arco d convertido em metros, sendo $n = 111,11111$ kilometros, será nd.

Por exemplo, entre París e Coimbra, suppondo

$$L = 10^\circ.42'30'', \quad D = 49^\circ.47'.34'', \quad D' = 41^\circ.9'.47'',$$

será $$nd = 1277^{kil},8.$$

III

Rotação da terra

172. No, que até aqui temos dicto, acham-se algumas razões, que devem inclinar-nos a attribuir o movimento diurno dos astros antes á rotação da terra do que á rotação da esphera celeste.

Com effeito o movimento diurno póde explicar-se tanto por um, como por outro modo; e as variações mais consideraveis das coordenadas das estrellas podem explicar-se tanto por movimentos proprios d'ellas, como pelas mudanças da intersecção da ecliptica com o equador e do eixo dos polos. Mas é muito mais simples, e por isso muito mais natural, attribuir estes phenomenos aos movimentos da terra, do que a movimentos das estrellas, que deveriam ser extremamente rapidos e differentes.

173. As medições geodesicas mostram, que a figura da terra differe muito pouco d'um ellipsoide de revolução achatado nos polos; e sabe-se pela Mechanica dos fluidos, que, se a terra foi primitivamente fluida, como provam os vestigios que 'nella se encontram dos tempos mais remotos, aquella figura devia resultar da combinação da fôrça attractiva das suas moleculas com a fôrça centrifuga devida ao movimento de rotação.

Mostra-se na Mechanica celeste, que, em virtude da figura ellipsoidal da terra, e da fôrça centrifuga, chamando G a gravidade no equador, g a gravidade em um parallelo cuja colatitude é D, e H uma constante, é

$$g = G + H \cos^2 D.$$

E como da formula conhecida

$$T = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}$$

resulta, que o comprimento do pendulo de segundos é proporcional á gravidade: chamando A e a este comprimento no equador e nos parallelos de colatitude D, temos

$$a = A\frac{g}{G} = A + \frac{AH}{G}\cos^2 D = A + B\cos^2 D.$$

Ora determinando experimentalmente os comprimentos do pendulo de segundos em differentes latitudes, acha-se, que satisfazem a esta lei; por conseguinte vê-se por ella confirmada a hypothese da rotação da terra (Castro, *Mec.* n.° 155; Poiss., *Mec.* n.° 193; Franc. *Math. Pur.* p. III, n.° 165).

Além d'isso a analogia com os outros corpos celestes, nos quaes se tem conhecido a mesma figura e o movimento de rotação, são mais um motivo para admittir na terra esse movimento.

174. Mas a estas razões, que tornam muito provavel a rotação da terra, podemos já accrescentar outras, que a confirmam directamente.

Se não houvesse rotação da terra, um grave, que descesse de um ponto muito elevado acima da superficie terrestre, caíria no pé da vertical que passa por esse ponto; mas, havendo a rotação da terra, como a velocidade, proporcional á distancia ao eixo de rotação, é maior na região da atmosphera d'onde o corpo parte, do que na superficie terrestre, o grave deve caír para o oriente do pé da vertical. Ora as experiencias feitas, principalmente em Italia e Allemanha, não só mostraram este facto, mas deram desvios, tão conformes, quanto nellas se podia esperar, com a theoria da quéda dos graves. Esta theoria mostra (*Mech. Cel.* liv. x, cap. v, n.° 15), que, desprezando a resistencia do ar, o desvio é dado pela formula

$$\delta = \frac{2nh}{3}\sqrt{\frac{2h}{g}}.\operatorname{sen} D,$$

sendo n e g o movimento de rotação da terra e a quéda d'um grave em 1ˢ, e h altura dada.

175. Ultimamente M. Foucault achou que, fazendo oscillar o pendulo em um plano livre, a sua velocidade se compõe com a de rotação da terra de maneira que o plano de oscillação se desvia da posição inicial. Os geometras, cuja attenção sôbre aquelle objecto chamou a experiencia, acharam pelo calculo, e a observação confirmou, que o movimento angular, pelo qual varía o azimuth do plano de oscialção, é $15''\cos D$ em cada segundo sideral.

Com effeito, considerando as tres rectas, meridiana, vertical e eixo de rotação da terra, que todas estão no plano do meridiano, e das quaes as duas primeiras se cortam rectangularmente, se decompozermos a velocidade angular de rotação da terra, que tem logar em um plano perpendicular ao eixo, nas que têm logar em planos perpendiculares á meridiana e á vertical, a última, que é azimuthal, será egual á resultante multiplicada pelo coseno do angulo que fazem entre si os planos respectivos ou os eixos que lhes são perpendiculares; angulo que é a colatitude. Sendo pois $15''$ o movimento angular da terra em 1^s de tempo sideral, será $15''\cos D$ o movimento azimuthal apparente do plano de oscillação do pendulo no mesmo tempo.

176. O mesmo sabio, por um apparelho engenhoso do genero do systema de suspensão de Cardans, que chamou *gyroscopio*, conseguiu fixar no espaço a direcção do eixo livre de rotação d'um corpo symetrico, tornando-a independente da gravidade.

Assim, movendo-se o observador em volta da linha dos pólos, a sua mudança de posição relativamente ao mesmo eixo lhe parecerá um movimento d'este, do qual perceberá uma componente pela variação de azimuth do circulo vertical do apparelho.

CAPITULO IX

Refracções atmosphericas

177. Quando um raio luminoso passa d'um meio para outro, inflecte-se approximando-se ou afastando-se da normal á superficie commum, segundo é a passagem do meio menos denso para o mais denso, ou inversamente, e segundo a differença de natureza d'estes meios. Os angulos feitos pelo raio primitivo e pelo inflectido com a normal chamam-se respectivamente de *incidencia* e de *refracção*.

178. A experiencia mostra que, em meios não crystallizados: 1.° a inflexão se faz no plano que contém a normal e o raio incidente; 2.° a razão do seno do angulo de incidencia para o de refracção é constante; 3.° chamando *indice de refracção* a razão n d'aquelles dois senos, na passagem do vacuo para um meio, e ρ a densidade d'este, a quantidade $P=\frac{n^2-1}{\rho}$ fica constante, ainda que se sujeite o meio a differentes estados de condensação; 4.° se o raio atravessa muitos meios, a razão do seno de incidencia para o de refracção, que teria logar na passagem immediata do primeiro meio para o último, é egual á composta das que têm logar nas passagens do primeiro para o segundo, do segundo para o terceiro, e assim por diante até a do penultimo para o último; 5.° se um meio, que tem a densidade ρ e o poder refrangente P, é a mistura de differentes fluidos que têm as densidades ρ_1, ρ_2,.... e os poderes refrangentes P_1, P_2,...., é $P\rho=P_1\rho_1+P_2\rho_2+....$

179. Qualquer que seja o estado de condensação do ar, indicado pelo barometro e pelo thermometro, P é constante; mas não acontece o mesmo quando as camadas de ar estão desegualmente carregadas de hu-

midade; e por isso convem examinar a influencia que esta póde ter no effeito do poder refrangente.

Seja 1 um volume de ar humido que sustenta a pressão p; e ϖ a parte d'esta pressão que é sustentada pelo vapor aquoso contido no mesmo ar. Se o ar sêcco e o vapor se separassem de modo que o primeiro reduzido ao volume v sustentasse a pressão especifica p, o segundo reduzido ao resto $1-v$ do volume sustentaria egual pressão. Chamando pois $[\rho]$ a densidade do ar sêcco, $c\,[\rho]$ a do vapor, e ρ a densidade da mistura quando estes dois gazes se diffundem pelo espaço 1 para formar o ar humido, teremos o quadro seguinte:

	Ar sêcco	Vapor	Mixto	Ar diffundido	Vapor diffundido
Volumes	v	$1-v$	1	1	1
Densidades	$[\rho]$	$c[\rho]$	ρ	$v[\rho]$	$(1-v)\,c[\rho]$
Pressões especificas	p	p	p	$p-\varpi$	ϖ
Poderes refrangentes	P	P″	P′	P	P″

Por serem respectivamente $v[\rho]$, $(1-v)\,c[\rho]$, $1.\rho$, as massas do ar sêcco, do vapor, e do mixto, temos

$$v[\rho]+(1-v)\,c[\rho]=\rho.$$

E porque as pressões do mesmo fluido são inversamente proporcionaes aos volumes, temos

$$p-\varpi=pv,$$

que transforma a precedente em

$$\rho=[\rho]\frac{p-(1-c)\,\varpi}{p}\ldots\ldots(1).$$

180. Os poderes refrangentes do ar sêcco diffundido, do vapor diffundido, e do mixto multiplicados pelas respectivas densidades dão $Pv\,[\rho]$, $P''c\,(1-v)[\rho]$, $P'\rho$; e por isso (n.º 178,5º) é

$$P'\rho = Pv[\rho] + P''c\,(1-v)\,[\rho].$$

Mas as experiencias mostram que, debaixo da mesma pressão, as densidades do vapor e do ar sêcco são entre si na razão de 10:16, e que os poderes refrangentes dos mesmos fluidos são sensivelmente entre si na razão 16:10; isto é $\frac{10}{16} = c = \frac{P}{P''}$. Teremos pois

$$1 - c = \frac{3}{8},\ P'\rho = P[\rho].$$

Assim, em quanto ao producto do poder refrangente pela densidade, podemos substituir P em logar de P′, com tanto que, em vez da densidade ρ do ar humido, substituamos

$$[\rho] = \frac{p}{p-(1-c)\,\bar{\omega}}\,\rho = \frac{\rho}{1-\frac{3}{8}\frac{\bar{\omega}}{p}} \ldots\ldots (2).$$

181. Posto isto, seja (Fig. 49) TT′ a camada atmospherica que passa pelo observador; e VV′ a primeira camada atmospherica onde começam a refrangir-se os raios luminosos emittidos por um objecto. Entre os differentes raios luminosos, que provêm do ponto S, um, entrando na atmosphera em N pela direcção SNI, soffrerá refracções nas camadas successivas, até chegar ao observador O pela direcção OIS′; e a trajectoria descripta entre os pontos N, O, será uma curva, se as camadas atmosphericas variarem contínua e gradualmente de densidade.

Como a terra e as camadas atmosphericas são proximamente esphericas e concentricas, o raio luminoso no seu trajecto conserva-se no plano vertical ZOS (n.º 178, 1.º). O angulo SOS'$=\theta$, que deve ajunctar-se á distancia *zenithal apparente* ZOS'$=z'$ para ter *a verdadeira* ZOS$=z$, é a refracção; e esta chama-se *astronomica* ou *terrestre*, segundo é o objecto exterior á atmosphera ou terrestre.

182. Sejam (Fig. 50) AA', BB', DD', EE'.... as superficies de separação das camadas atmosphericas. E chamemos:

$$z, z', z'', \ldots\ldots\ldots\ldots z^{(i)},$$

os angulos de incidencia d'um raio luminoso nos pontos O, M', M''...M$^{(i)}$;

$$\omega', \omega'', \ldots\ldots\ldots\ldots \omega^{(i)}$$

os angulos de refracção nos pontos M', M'', ...M$^{(i)}$;

$$n, n', n'', \ldots\ldots\ldots\ldots n^{(i)},$$

os indices de refracção, que teriam logar nas passagens do vacuo para as camadas superiores aos pontos O, M', M'', ... M$^{(i)}$.

Será (n.º 178, 4.º) $\quad \dfrac{\text{sen}\,\omega^{(i)}}{\text{sen}\,z^{(i)}} = \dfrac{n^{(i)}}{n^{(i-1)}}.$

Mas, suppondo a terra espherica, e chamando

$$a, r', r'', \ldots\ldots\ldots\ldots r^{(i)}$$

as distancias de O, M', M'', ... M$_i$ ao centro C, o triangulo M$^{(i-1)}$CM$^{(i)}$ dá

$$\frac{\text{sen}\,z^{(i-1)}}{\text{sen}\,\omega^{(i)}} = \frac{r^{(i)}}{r^{(i-1)}}.$$

Eliminando pois sen $\omega^{(i)}$ entre esta equação e a precedente, resultará

$$n^{(i-1)}\, r^{(i-1)} \operatorname{sen} z^{(i-1)} = n^{(i)} r^{(i)} \operatorname{sen} z^{(i)} = \text{const};$$

que, applicada aos pontos O e $M^{(i)}$, dará finalmente

$$n\, a \operatorname{sen} z = n^{(i)} r^{(i)} \operatorname{sen} z^{(i)} \ldots\ldots (3).$$

Esta equação é independente do número finito ou infinito das camadas interpostas entre O e $M^{(i)}$; envolve a condição da esphericidade das camadas atmosphericas de egual densidade; e depende dos poderes refrangentes e da lei das densidades.

183. Seja agora M (Fig. 51) um ponto da trajectoria NMO, e P′MP o angulo de contingencia. É claro que a somma de todos os angulos de contingencia desde M até outro ponto da curva será a variação total das posições da tangente entre estes dois pontos, isto é, será o angulo das duas tangentes; por conseguinte o integral do angulo de contingencia, tomado desde O até N será a refracção astronomica (Vid. nota I).

Para ter a expressão do angulo de contingencia abaixemos de C a perpendicular CP sôbre MP; e sejam $CP = x$, $MP = y$, $CM = r$.

O triangulo CMP dá

$$y^2 = r^2 - x^2,\ x = r \operatorname{sen} \omega = \frac{a\sqrt{1 + P(\rho)}}{\sqrt{1 + P\rho}} \operatorname{sen} z';$$

e por conseguinte

$$y = \frac{r\sqrt{1 + P\rho - \frac{a^2}{r^2}(1 + P(\rho)) \operatorname{sen}^2 z'}}{\sqrt{1 + P\rho}},\ dx = -\frac{aP\sqrt{1 + P(\rho)} . \operatorname{sen} z'}{2(1 + P\rho)^{\frac{3}{2}}}\, d\rho,$$

que substituidos na equação

$$d\theta = \frac{dx}{y},$$

tirada do triangulo differencial P'MP, reduzem em fim a equação differencial das refracções astronomicas a

$$d\theta = -\frac{a\,\mathrm{P}\,d\rho\sqrt{1+\mathrm{P}(\rho)}\,.\,\mathrm{sen}\,z'}{2r(1+\mathrm{P}\rho)\sqrt{1+\mathrm{P}\rho-\frac{a^2}{r^2}(1+\mathrm{P}(\rho))\,\mathrm{sen}^2 z'}} \ldots (4).$$

184. Para integrar completamente a equação (4) seria necessario exprimir ρ em funcção de r, isto é, seria necessario conhecer a lei que segue a densidade das camadas atmosphericas nas diversas alturas acima da superficie terrestre. No entretanto, quando z' não é proximo de 90°, a parte principal da expressão de θ é independente d'aquella lei: como vamos ver.

Fazendo $$\frac{\mathrm{P}(\rho)}{2(1+\mathrm{P}(\rho))} = \alpha,\ \frac{a}{r} = 1 - s,$$

a equação (4) transforma-se em

$$d\theta = -\frac{\alpha(1-s)\frac{d\rho}{(\rho)}\mathrm{sen}\,z'}{\left[1-2\alpha\left(1-\frac{\rho}{(\rho)}\right)\right].\sqrt{1-2\alpha\left(1-\frac{\rho}{(\rho)}\right)-(1-s)^2\,\mathrm{sen}^2 z'}},$$

que, desenvolvida em serie, até os termos da segunda ordem relativamente a α e s, dá

$$d\theta = -\alpha \frac{d\rho}{(\rho)} \operatorname{tang} z' \left[1 + \alpha\left(1 - \frac{\rho}{(\rho)}\right)\frac{2\cos^2 z' + 1}{\cos^2 z'} - \frac{s}{\cos^2 z'}\right] \ldots (5).$$

Mas cumpre notar que entre os termos da terceira ordem ha um,

$$-\frac{3}{2}\alpha \operatorname{tang}^3 z' \frac{s^2 d\rho}{(\rho)},$$

que se torna consideravel quando z' é muito grande; e por isso a approximação, de que se tracta, não tem logar se não em quanto este termo da serie convergente se póde desprezar.

185. Integrando a equação (5), vem

$$\theta = -\alpha \operatorname{tang} z' \left\{\frac{\rho}{(\rho)} + \alpha \frac{2\cos^2 z' + 1}{\cos^2 z'}\left[\frac{\rho}{(\rho)} - \frac{1}{2}\left(\frac{\rho}{(\rho)}\right)^2\right] - \frac{\int \frac{s\,d\rho}{(\rho)}}{\cos^2 z'}\right\},$$

que, tomado desde $\rho = (\rho)$, ou $s = o$, até $\rho = o$, dá

$$\theta = \alpha \operatorname{tang} z' \left\{1 + \alpha \frac{2\cos^2 z' + 1}{2\cos^2 z'} + \frac{\int_{(\rho)}^{o}\left(\frac{s\,d\rho}{(\rho)}\right)}{\cos^2 z'}\right\};$$

onde falta achar o integral indicado no último termo;

ou achar
$$\int_{(\rho)}^{o}\left(\frac{\rho\, d s}{(\rho)}\right),$$

por ser
$$\int \frac{s d\rho}{(\rho)}=\frac{s\rho}{(\rho)}-\int \frac{\rho ds}{(\rho)},$$

e conseguintemente
$$\int_{(\rho)}^{o} \frac{s\, d\rho}{(\rho)}=-\int_{(\rho)}^{o} \frac{\rho\, d s}{(\rho)}.$$

186. A equação do equilibrio da atmosphera é

$$dp=-g\,\rho\, dr;$$

que, designando g e (g) a gravidade correspondente aos raios r e a, na latitude a que se referem as observações, isto é, sendo $g=(g)\frac{a^2}{r^2}$, se transforma em

$$dp=-(g)\, a\, \rho\, ds.$$

Esta equação integrada desde $p=(p)$ ou $\rho=(\rho)$, até $p=o$ ou $\rho=o$, dá

$$\int_{(\rho)}^{o}\left(\frac{\rho d s}{(\rho)}\right)=\frac{(p)}{(g)\,(\rho)\,a}=-\int_{(\rho)}^{o}\left(\frac{s\, d \rho}{(\rho)}\right);$$

e por isso, designando l a altura d'uma columna fluida, de densidade constante (ρ), que sustentasse a pressão (p), temos

$$(p)=(g)(\rho)\,l,\int_{(\rho)}^{o}\left(\frac{s\,d\rho}{(\rho)}\right)=-\frac{l}{a}.$$

Substituindo este integral na expressão de θ, e exprimindo θ em segundos, resulta em fim a expressão da parte da refracção astronomica independente da lei das densidades das camadas atmosphericas,

$$\theta=\frac{\alpha}{\operatorname{sen} 1''}\operatorname{tang} z'\left(1+\frac{\frac{1}{2}\alpha\left(2\cos^2 z'+1\right)-\frac{l}{a}}{\cos^2 z'}\right)\ldots\ldots(6)$$

187. Determinemos as constantes α e l.

Como $P(\rho)$ é uma quantidade muito pequena, teremos, desprezando o seu quadrado,

$$\alpha=\frac{1}{2}P(\rho),$$

isto é, α proporcional á densidade da camada de ar onde está o observador. Supponhamos que se conhecem os valores de α e l correspondentes á temperatura 0 indicada no thermometro centigrado e á pressão p dada pelo barometro; e sejam t, p', $(\rho)'$, a temperatura, a pressão e a densidade actuaes. Como as densidades estão na razão composta da directa das pressões e da inversa dos volumes, e como um volume v de ar, na temperatura 0° e debaixo d'uma dada pressão, se torna, na temperatura t e debaixo da mesma pressão, em $v'=v(1+mt)$, temos

$$\frac{(\rho)'}{(\rho)}=\frac{p'}{p}\cdot\frac{1}{1+mt};$$

sendo, pelas experiencias de Mr. Regnault, $m=0{,}003665$.

Suponhamos que o mercurio do barometro, cuja altura h' corresponde á pressão p', está na temperatura t'. Como as pressões, por serem medidas pelo peso da columna de mercurio, estão na razão composta da directa das alturas e da directa das densidades, isto é, da directa das alturas e da inversa dos volumes, e como o volume u d'uma dada massa de mercurio a 0° se torna em $u(1+nt)$ a $t°$, temos

$$\frac{p'}{p}=\frac{h'}{h}\cdot\frac{1}{1+nt};$$

sendo, pelas experiencias de Laplace e Lavoisier, $n=\frac{1}{5550}$.

O que transforma a expressão de $\frac{(\rho)'}{(\rho)}$ em

$$\frac{(\rho)'}{(\rho)}=\frac{h'}{h}\cdot\frac{1}{(1+mt)\,(1+nt')}.$$

Finalmente, se o comprimento 1 do metal da escala a 0° de temperatura se tornar em $1+ct''$ na temperatura t'', a unidade 1, que media h, tornar-se-ha em $1+ct''$ quando medir h', que por isso valerá $h'(1+ct'')$ das unidades de h. A expressão de $\frac{(\rho)'}{(\rho)}$ será pois

$$\frac{(\rho)'}{(\rho)}=\frac{h'}{h}\cdot\frac{1+ct''}{(1+mt)\,(1+nt')}\cdots\cdots(7).$$

Suppondo $c=\frac{n}{10}$, que é proximamente o meio entre os coefficientes das dilatações do latão e do cobre, e $t'=t''$, e fazendo $n'=n-\frac{1}{10}n$, será

$$\frac{(\rho')}{(\rho)}=\frac{h'}{h}\cdot\frac{1}{(1+mt)(1+n't')}\ldots\ldots(8);$$

onde se póde ainda suppor ordinariamente $t'=t$.

Em quanto a l, as equações

$$p=(g)(\rho)\,l,\ p'=(g)(\rho)\frac{p'}{p(1+mt)}\,l',$$

dão

$$\frac{l'}{l}=1+mt\ldots\ldots(9).$$

188. As experiencias feitas em París por Biot e Arago sôbre a velocidade da luz e sôbre a densidade do ar atmospherico dão

$$\alpha=0{,}000294212,\ \frac{l}{a}=0{,}00124896.$$

Os valores adoptados pelo auctor da Mechanica Celeste são

$$\alpha=0{,}000293876,\ \frac{l}{a}=0{,}00125255.$$

Com estes valores e com as formulas (8) e (9) teremos

$$\alpha' = \alpha \, . \, \frac{h'}{0{,}76} \, . \, \frac{1}{(1+mt)\,(1+n't')}, \quad l' = (1+mt)\, l.$$

189. Para attender á humidade, a equação do equilibrio (n.º 186) dá verdadeiramente

$$\int_{(p)}^{o} (\rho' ds) = \frac{(p)}{a(g)}, \text{ ou } \frac{\int_{(p)}^{o} (\rho' ds)}{(\rho)'} = \frac{(p)}{a(g)\,(\rho)'},$$

que, no caso de ser $\frac{\varpi}{p}$ constante, se reduz, dividindo os termos da pri-

$\frac{3}{8}$ meira fracção por $1 - \frac{(\varpi)}{(p)}$ [n.º 180, eq (2)], a

$$\frac{\int_{(p)}^{o} (\rho ds)}{(\rho)} = \frac{(p)}{a(g)(\rho)'} = \frac{l''}{a};$$

sendo
$$l'' = \frac{(p)}{(g)(\rho)'} = \frac{l'}{1 - \frac{3}{8}\frac{(\varpi)}{(p)}}.$$

Por tanto, supposta $\frac{\varpi}{p}$ constante, attenderemos na equação (6) ás indicações do barometro, do thermometro, e do hygrometro, das quaes são principalmente importantes as duas primeiras, e mais a segunda, substituindo, em logar de α e l, as expressões:

$$\alpha' = \alpha . \frac{h'}{h(1+mt)(1+n't')}, \; l' = l . \frac{1+mt}{1-\frac{3}{8}\frac{(\varpi)}{(p)}}.$$

190. Sejam θ_0, θ, θ', as refracções, que respectivamente correspondem ás indicações do barometro $0^m,76$, $0^m,76$, h^m, e ás indicações do thermometro $0°$, $10°$, $t°$. Desprezando as variações de α e l dentro do parenthesis da fórmula (6), isto é, suppondo θ proporcional a α, e suppondo $t=t'$, teremos, em virtude de (8),

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{1}{(1+10m)(1+10n')}, \; \frac{\theta'}{\theta_0} = \frac{h}{0,76} . \frac{1}{(1+mt)(1+n't)},$$

$$\theta' = \theta . \frac{h}{0,76} . \frac{(1+10m)(1+10n')}{(1+mt)(1+n't)}.$$

No *Connaissance des Temps* acham-se tres taboas: a primeira dá θ, com o argumento z'; a segunda dá $\frac{h}{0,76} = f$, com o argumento h; e a terceira dá $\frac{(1+10m)(1+10n')}{(1+mt)(1+n't)}$, com o argumento t. A refracção actual, correspondente á distancia zenithal apparente z', e ás indicações h e t do barometro e do thermometro, é pois

$$\theta' = \theta . f . f'.$$

Querendo attender á differença $t-t'$ das indicações dos thermometros exterior e interior, basta tomar

$$\theta''=\theta'+n\theta'(t-t')=\theta'+\frac{\theta'}{1000}.0,18\,(t-t').$$

191. Se quizessemos integrar mais approximadamente a equação (4), seria necessario conhecer a relação $f(r,\rho)=0$ entre r e ρ, para eliminar r. Essa relação, dependente da constituição atmospherica, que é definida principalmente pelos dados p, ϖ, t, deve resultar de quatro relações entre as quantidades r, p, ϖ, t, ρ. Duas d'estas são as leis *de dilatabilidade* e *de equilibrio*, dadas nos n.os 187 e 186,

$$\frac{\rho}{(\rho)}=\frac{p}{(p)(1+mt)},\ dp=-(g)\frac{a^2}{r^2}\rho'\,dr.$$

Para as outras duas, entre p e ρ e entre p e ϖ, têm os geometras adoptado diversas hypotheses, e taes que, satisfazendo ás observações meteorologicas feitas a diversas alturas, nas ascensões terrestres e aerostaticas, se prestassem ao mesmo tempo ao emprêgo dos methodos conhecidos para integrar a equação (4).

'Nestas equações é ρ ligado com ρ' (n.º 180) pela relação

$$\rho'=\frac{\rho}{1-\frac{3}{8}\frac{\varpi}{p}}.$$

Mas cumpre advertir que, ainda quando as hypotheses adoptadas representassem satisfactoriamente o estado normal da atmosphera, tantas vezes é este perturbado, que conviria evitar o mais possivel as observações de grandes distancias zenithaes, porque 'nellas têm essas perturbações maior influencia.

Contentando-nos por isso com a exposição feita para achar a equação (6), a qual, nos limites em que tem logar, é independente de taes anomalias, só daremos no fim a taboa das refracções em todos os casos, extrahida do *Connaissance des Temps.*

E cumpre ainda notar que, fóra do limite de z em que é applicavel a formula (6), poderiamos usar sem grande inconveniente da formula de Bradley (n.° 26_a), cujos valores perto do horizonte não differem muito dos dados pelas melhores formulas.

192. Da formula (6) póde facilmente deduzir-se a de Bradley (n.° 26_a)

$$\theta = \mathrm{A} \operatorname{tang}(z' - \nu\,\theta) \ldots\ldots (10).$$

Com effeito a formula (6) póde escrever-se assim:

$$\theta = \frac{\alpha}{\operatorname{sen} 1''}(\mathrm{M} \operatorname{tang} z' - \mathrm{N} \operatorname{tang}^3 z'),$$

sendo
$$\mathrm{M} = 1 + \frac{3}{2}\alpha - \frac{l}{a},\ \mathrm{N} = -\frac{1}{2}\alpha + \frac{l}{a};$$

ou
$$\mathrm{M} = 0{,}9991246,\ \mathrm{N} = 0{,}00115815,$$

tomados em M e N por α e l os seus valores correspondentes á temperatura 10°, que segundo Laplace (n.° 188), são

$$\alpha = 0{,}00028275,\ \frac{l}{a} = 0{,}00129925.$$

Para comparar as duas equações, desenvolvamos (10), ou

$$\nu\theta = \nu A^{\prime} \frac{\text{tang } z' - \text{tg } \nu\theta}{1 + \text{tang } z' \text{ tang } \nu\theta},$$

pela formula de Maclaurim, em serie ordenada segundo as potencias de tg z',

$$\nu\theta = f + f'.\text{tang } z' + \frac{1}{2}f'' \text{tang}^2 z' + \frac{1}{6}f''' \text{tang}^3 z' \ldots$$

Teremos:

$$f = 0,\ f' = \nu A(1 - f'),\ f'' = 0,\ f''' = -6f'^2\left(1 - f' + \frac{1}{3}f'^2\right).$$

E a comparação com (6) dará

$$\alpha M\nu = f',\ \alpha N\nu = -\frac{1}{6}f''' = f'^2\left(1 - f' + \frac{1}{3}f'^2\right);$$

d'onde se deduzem

$$f' = \frac{\frac{N}{M}}{1 - f' + \frac{1}{3}f'^2},\ \nu = \frac{f'}{\alpha M},\ A = \frac{\alpha M}{1 - f'}.$$

Effectuando os calculos numericos, acham-se

$$\nu = 3{,}952;\ A = 61'',274.$$

Para achar o valor Θ da refracção horizontal, a formula (10) dá

$$\Theta = A \cot \nu\,\Theta,$$

e por conseguinte

$$\nu\,\Theta \operatorname{sen}^2 1'' \left(\nu\,\Theta + \frac{1}{3}(\nu\,\Theta)^3 \operatorname{sen}^2 1''\right) = \nu A \operatorname{sen} 1'' = \frac{f'}{1-f'},$$

ou

$$\Theta \operatorname{sen} 1'' = \frac{\sqrt{\left(\frac{f'}{1-f'}\right)}}{\nu}\left(1 - \frac{1}{6}\nu^2\Theta^2 \operatorname{sen}^2 1''\right)$$

$$= \sqrt{\left(\frac{A \operatorname{sen} 1''}{\nu}\right)} \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\nu^2\Theta^2 \operatorname{sen}^2 1''\right).$$

E effectuando os calculos numericos, teremos

$$\Theta = 29'46'',9.$$

Os valores de A e ν achados por Delambre são os referidos no fim do n.º 26_a, os quaes substituidos na expressão de Θ dão $\Theta = 32'.41'',9$, mais conforme com as observações.

193. Da formula

$$\nu\theta = \nu\Theta \operatorname{tang} \nu\Theta \operatorname{tang}(z' - \nu\theta),$$

ou, substituindo a razão $\dfrac{\operatorname{tg}\nu\theta}{\operatorname{tg}\nu\Theta}$ á dos arcos,

$$\operatorname{tang}\nu\theta = \operatorname{tang}^2\nu\Theta \operatorname{tang}(z' - \nu\theta),$$

tiram-se $\quad \operatorname{tg}\nu\theta\,(1 \pm \operatorname{tg}^2\nu\Theta) = \operatorname{tg}^2\nu\Theta\,[\operatorname{tang}(z' - \nu\theta) \pm \operatorname{tg}\nu\theta],$

e por conseguinte

$$\frac{1 + \operatorname{tg}^2\nu\Theta}{1 - \operatorname{tg}^2\nu\Theta} = \frac{\operatorname{tg}(z' - \nu\theta) + \operatorname{tg}\nu\theta}{\operatorname{tg}(z' - \nu\theta) - \operatorname{tg}\nu\theta},$$

ou $\quad \operatorname{sen}(z' - 2\nu\theta) = \cos 2\nu\Theta \operatorname{sen} z' \ldots\ldots (11),$

que é a fórmula de Simpson.

Esta fórmula tem sôbre a (10) a vantagem de dar directamente θ, sem recorrer a approximações successivas; mas tem o inconveniente, quando z' é grande, de exigir que se calcule com muita approximação o segundo membro d'ella (*a*).

(*a*) Com effeito, chamando Q o segundo membro, e M o modulo, a differenciação dá, em segundos,

$$\delta\theta = -\frac{\delta Q}{2\nu \operatorname{sen} 1'' \cos(z' - 2\nu\theta)},\quad \delta\theta = -\frac{\operatorname{tang}(z' - 2\nu\theta)\,.\,\delta \log Q}{2\nu M \operatorname{sen} 1''},$$

expressões pelas quaes se vê que influe muito em θ o erro de Q ou o de log Q, quando z' é grande.

194. O coefficiente α da formula (6) tambem se determina por observações das estrellas circumpolares, ou do Sol.

Com effeito, se observarmos as distancias zenithaes d'uma estrella circumpolar nas suas passagens meridianas superior e inferior, e dérmos a (6) a fórma

$$\theta = A\alpha_1 + B\alpha_1^2,$$

teremos para cada uma das passagens, respectivamente,

$$z + A\alpha_1 + B\alpha_1^2 + \Delta = D, \quad z' + A'\alpha_1 + B'\alpha_1^2 - \Delta' = D;$$

e por conseguinte

$$z + z' + (A + A')\alpha_1 + (B + B')\alpha_1^2 + \Delta - \Delta' = 2D \ldots\ldots (12),$$

sendo Δ e Δ' as distancias polares da estrella, e D a distancia do polo ao zenith.

As distancias Δ e Δ' seriam eguaes, se no intervallo das passagens não variassem as causas chamadas *aberração* e *nutação*, que alteram a posição apparente da estrella, e as posições do polo celeste e do zenith: mas para calcular a differença $\Delta - \Delta'$ basta, como adiante veremos, que a distancia polar se conheça approximadamente.

Os coefficientes A, B, A', B', são funcções das respectivas distancias zenithaes apparentes z e z' e das indicações t e t', h e h', do thermometro e do barometro (n.os 186 e 187).

Portanto, se tivermos observações de muitas circumpolares nas duas passagens, formaremos muitas equações (12); e combinando-as pelo methodo das equações de condição, obteremos duas, por meio das quaes determinaremos α e D.

195. Mas como por uma parte as equações mais proprias para dar α são aquellas em que a estrella, distando mais do polo, passa mais perto do horizonte, por ser então maior o coefficiente $A + A'$; e por outra

••

parte a equação (6) é menos exacta, e as refracções são mais incertas, para as estrellas que satisfazem a essa condição: vê-se que de taes observações não se tira tanta vantagem como á primeira vista pareceria; e por isso tambem se usa para a mesma determinação das observações do Sol na épocha do solsticio do estio.

Supponhamos que 'nesta épocha se observam duas distancias zenithaes do Sol, uma ZS_1 (Fig. 52) na sua passagem meridiana, outra, ZS'' longe do meridiano, por exemplo a 45° de distancia zenithal. Como então a distancia meridiana do Sol ao zenith de Coimbra é $< 17°$, podemos usar sem inconveniente para ella da refracção calculada com um valor imperfeito de α; e porque na mesma épocha a distancia polar vista do centro da terra se póde tomar por constante durante o intervallo de seis a sete horas, teremos, attendendo ás *parallaxes* (*a*),

$$S'P = ZS_{,} + \theta_{,} + D.$$

Conheceremos pois no triangulo $ZS'P$ os lados ZP, PS', e o angulo horario ZPS' dado pelo relogio; d'onde deduziremos ZS'. E como ZS'' é dada pela observação, teremos a refracção actual $\theta = ZS' - ZS''$; conseguintemente, substituindo em (6), acharemos α.

(*a*) Sendo S e S' os logares geocentricos, ϖ e ϖ' as parallaxes d'altura, Δ a distancia polar verdadeira: será

$$\Delta = ZS_{,} + \theta_{,} - \varpi + D;$$

o triangulo ZPS' entre Δ, D, ZS' dará ZS'; e depois teremos

$$\theta = ZS' - ZS'' + \varpi'.$$

Influencia da refracção nos diametros apparentes

196. Seja (Fig. 53) AA′ o diametro apparente d'um astro, ou em geral a distancia angular de dois pontos A e A′. Em virtude da refracção estes pontos elevam-se para B e B′ nos verticaes AZ, A′Z. Fazendo pois

$$ZB = z,\ ZB' = z',\ ZA = z + \theta,\ ZA' = z' + \theta',\ BZB' = a,$$

$$AA' = d,\ BB' = d';$$

e egualando as expressões de $\cos a$ tiradas dos triangulos AZA′, BZB′; teremos

$$\frac{\cos d - \cos(z+\theta)\cos(z'+\theta')}{\operatorname{sen}(z+\theta)\operatorname{sen}(z'+\theta')} = \frac{\cos d' - \cos z \cos z'}{\operatorname{sen} z \operatorname{sen} z'} \ldots . (13).$$

Esta equação, que se póde simplificar e adaptar melhor á commodidade e exactidão dos calculos, dá o diametro verdadeiro d, quando se conhece o apparente d', ou inversamente. Mas como os diametros apparentes dos astros conhecidos não passam de limites pouco differentes de 32′, podemos para elles achar directamente formulas mais simples que resolvam o mesmo problema, sem passar pelas transformações da precedente.

197. Chamando (d) o semi-diametro horizontal, e considerando o arco AA′ como uma linha recta, sôbre a qual se contam os x a partir do centro, a equação do círculo AEA′ será

$$x^2 + y^2 = (d)^2.$$

Em virtude da refracção o diametro $AA'=2(d)$ passa para $BB'=2(d')$; e temos nos triangulos AZA', BZB',

$$\operatorname{sen}(d)=\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}a\operatorname{sen}(z+\theta),\ \operatorname{sen}(d')=\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}a\operatorname{sen} z,$$

que, desprezando as quantidades de terceira ordem relativamente a sen (d) e sen (d'), dão

$$(d)=(d')\frac{\operatorname{sen}(z+\theta)}{\operatorname{sen} z}=k(d');$$

e todas as abscissas se modificarão proporcionalmente, de sorte que será

$$x=kx'.$$

Para as ordenadas, chamando z e z' as distancias zenithaes correspondentes aos extremos de y', temos

$$z+\theta-(z'+\theta')=y;\ \text{ou}\ y'+\theta-\theta'=y.$$

E fazendo $\dfrac{\theta-\theta'}{z-z'}=c$, que podemos suppôr constante para todos os pontos do disco, como se vê nas taboas de refracção, vem

$$(1+c)y'=y.$$

Estas expressões de y e x substituidas na equação do circulo dão

$$(1+c)^2y'^2+k^2x'^2=(d)^2,\ \text{ou}\ y'^2=\frac{(d)^2}{(1+c)^2}-\frac{k^2}{(1+c)^2}x'^2;$$

equação, que pertence á ellipse, e que sendo comparada com

$$a^2 y'^2 + b^2 x'^2 = a^2 b^2, \text{ ou } y'^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2} x'^2,$$

dá

$$b = \frac{(d)}{1+c},\ a = \frac{(d)}{k}.$$

198. Se chamarmos $CM = d$ um dos semi-diametros inclinados da ellipse, e i o angulo que elle faz com BB', teremos

$$x' = d \cos i,\ y' = d \operatorname{sen} i;$$

logo

$$d^2 = y'^2 + x'^2 = b^2 + \frac{a^2 - b^2}{a^2} x'^2 = b^2 + \frac{a^2 - b^2}{a^2} d^2 \cos^2 i,$$

ou

$$d^2\left(1 + \frac{a^2 - b^2}{b^2} \operatorname{sen}^2 i\right) = a^2.$$

E substituindo 'nesta equação, em logar de a e b, os seus valores, teremos

$$d^2\left[1 + \left(\frac{(1+c)^2}{k^2} - 1\right)\operatorname{sen}^2 i\right] = \frac{(d^2)}{k^2} \ldots\ (14),$$

que dá a relação entre o semi-diametro horizontal verdadeiro (d) e o inclinado apparente d.

199. Differenciando a expressão

$$\theta = \alpha(\text{M} \operatorname{tang} z - \text{N} \operatorname{tang}^3 z)$$

do n.º 192, vem

$$\frac{\delta \theta}{\delta z} = c = \frac{\alpha \operatorname{sen} 1''}{\cos^2 z}(\mathrm{M} - 3\,\mathrm{N} \operatorname{tang}^2 z)$$

$$= \mathrm{M} \operatorname{sen} \alpha \left[1 + \left(1 - 3\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{M}}\right) \operatorname{tang}^2 z - 3\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{M}} \operatorname{tang}^4 z \right].$$

E differenciando a última, vem

$$\frac{\delta c}{\delta z \operatorname{sen} 1''} = \frac{2\,\mathrm{M} \operatorname{sen} \alpha \operatorname{tang} z}{\cos^2 z}\left(1 - 3\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{M}}(1 + 2 \operatorname{tang}^2 z)\right).$$

Como esta expressão é positiva para $z = 80°$, e com mais razão para z menor, vê-se que c cresce desde $z = 0$ até $z = 80°$, de sorte que é $\mathrm{M} \operatorname{sen} \alpha$ o seu minimo valor, e para pequenas distancias zenithaes os seus valores pouco differem d'este limite.

Mas a expressão $\frac{\operatorname{sen}(z + \theta)}{\operatorname{sen} z} = k$ dá, dentro dos mesmos limites de z,

$$k < 1 + \theta \operatorname{sen} 1'' \cot z < 1 + \mathrm{M} \operatorname{sen} \alpha;$$

e por isso, mais sensivelmente, $k < 1 + c$:

logo o eixo horizontal a da ellipse é o eixo maior.

200. Fazendo $i = o$, resulta o semi-diametro horizontal $\frac{(d)}{k} = (d')$,

ou proximamente $(d)(1 - \mathrm{M} \operatorname{sen} \alpha)$;

e a equação (14), depois de extrahir a raiz quadrada, póde escrever-se assim:

$$d\left\{1+(c-\mathrm{M}\,\mathrm{sen}\,\alpha)\,\mathrm{sen}^2 i\right\}=(d').$$

Nas taboas da Lua de Delambre, acha-se uma taboa (taboa v, folha 51), calculada pela fórmula precedente, desprezando nella o factor $\mathrm{M}\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}^2 i$, isto é, pela fórmula $d=(d')-(d')\,c\,\mathrm{sen}^2 i$. Para o mesmo fim vem uma taboa na Ephemeride de 1804 (pag. 241).

CAPITULO X

I

Das parallaxes

201. Quando dois observadores O e O′ (Fig. 54), collocados em em dois pontos differentes da superficie terrestre, vêem ao mesmo tempo um astro S, cuja distancia á terra não é tão grande que o angulo OSO′ seja insensivel, projectam este astro em dois pontos differentes s, s' da esphera celeste. Por isso, afim de tornar comparaveis as observações feitas em differentes logares da terra, reduzem-se essas observações ao que seriam se o observador estivesse no centro d'ella.

Sejam (Fig. 55) $SOZ'=s'Z'=z'$ a distancia zenithal, já correcta da refracção, d'um astro visto de O; $SCZ'=s''Z''=z''$ a distancia zenithal que teria o mesmo astro se fôsse visto do centro da terra; e $OSC=s'\,s''=\varpi$ o angulo, pelo qual o raio OC seria visto de S. Então z', z'', ϖ, são a *distancia zenithal apparente*, a *distancia zenithal verdadeira*, e a *parallaxe de altura*.

202. Chamando R a distancia CS do astro ao centro da terra, e r o raio terrestre OC, o triangulo OCS dá

$$\operatorname{sen}\varpi=\frac{r}{R}\operatorname{sen}z',\quad z'=z''+\varpi.$$

Quando $z'=90°$, a parallaxe é maxima; e designando-a por π, temos se $n\pi = \frac{r}{R}$. No caso de se suppôr a terra espherica, tem isto logar quando o astro está no horizonte; e por isso se costuma dar o nome de *parallaxe horizontal* á parallaxe maxima.

Teremos pois as quatro equações:

$$\left.\begin{array}{ll} \operatorname{sen}\pi = \frac{r}{R}, & \operatorname{sen}\varpi = \operatorname{sen}\pi \operatorname{sen} z', \\ \operatorname{sen}\varpi = \operatorname{sen}\pi \operatorname{sen}(z'' + \varpi), & z'' - z' + \varpi = o; \end{array}\right\} \ldots\ldots (1)$$

da terceira das quaes se tira

$$\operatorname{tang}\varpi = \frac{\operatorname{sen}\pi \operatorname{sen} z''}{1 - \operatorname{sen}\pi \cos z''} \ldots\ldots (1)'.$$

A primeira das equações (1) dá a parallaxe horizontal, quando se conhece a distancia do astro em raios terrestes, e inversamente; a segunda e a última dão a parallaxe da altura e a distancia zenithal verdadeira, quando se conhecem a parallaxe horizontal e a distancia zenithal apparente; a terceira e a última dão a parállaxe da altura e a distancia zenithal apparente, quando se conhecem a parallaxe horizontal e a distancia zenithal verdadeira.

A comparação das observações com as taboas astronomicas exige esta passagem d'uma das distancias zenithaes, verdadeira ou apparente, para a outra: porque as observações dão as distancias zenithaes apparentes; e as taboas astronomicas dão as coordenadas dos astros referidas ao centro da terra, das quaes (n.º 21) se deduzem as distancias zenithaes verdadeiras.

203. Como as parallaxes são pequenos angulos, ainda a da Lua que pouco chega a exceder 60′, a segunda e terceira das equações (1) exprimem-se, commoda e mais exactamente para o calculo, em series ordenadas segundo as potencias progressivas de sen π.

A segunda, pela expressão do arco no seno, dá, em segundos,

$$\varpi = \frac{\operatorname{sen}\pi \operatorname{sen} z'}{\operatorname{sen} 1''} + \frac{1}{6}\,\frac{\operatorname{sen}^3\pi \operatorname{sen}^3 z'}{\operatorname{sen} 1''} + \ldots\ldots (2).$$

(formula de Maclaurin.)

A terceira (*Math. Pur. de Franc.* p. IV, pag. 77) dá

$$\varpi = \frac{\operatorname{sen}\pi \operatorname{sen} z''}{\operatorname{sen} 1''} + \frac{\operatorname{sen}^2\pi \operatorname{sen} 2z''}{2\operatorname{sen} 1''} + \frac{\operatorname{sen}^3\pi \operatorname{sen} 3z''}{3\operatorname{sen} 1''} \ldots\ldots (3),$$

ou $$\varpi = \Sigma \frac{\operatorname{sen}^n\pi \operatorname{sen} n z''}{n \operatorname{sen} 1''}.$$

Nas formulas (2) e (3) podem quasi sempre desprezar-se os cubos da parallaxe horizontal, o que as reduz a

$$\varpi = \pi \operatorname{sen} z',\ \varpi = \pi \operatorname{sen} z' + \tfrac{1}{2}\pi^2 \operatorname{sen} 1'' \operatorname{sen} 2z''.$$

204. O zenith, ao qual se referem as observações, é o dado pela direcção da vertical; mas como se mostra na Geodesia, que a figura regular, de que se approxima a da terra, é um ellipsoide de revolução que tem por eixo menor o dos polos, este zenith Z (Fig. 56), chamado *apparente*, differe do zenith *verdadeiro* Z′ determinado pela direcção do raio terrestre, ao qual se referem as formulas precedentes. É necessario pois, quando se querem comparar as observações com as taboas astronomicas, passar das distancias zenithaes *apparentes* referidas ao zenith *apparente*, $ZS = z$, para as distancias zenithaes *verdadeiras* referidas ao zenith *verdadeiro*, $Z'S' = z''$; ou inversamente.

Como $Z'S = z'$, distancia zenithal *apparente* referida ao zenith *verdadeiro*, está ligada com z pelo triangulo Z′ZS, e com z'' pela parallaxe ϖ, deve resultar d'estas relações a de z com z'', que resolve o problema.

1.° No primeiro caso, chamando ω o angulo $Z'OZ$ do raio com a vertical; e A o azimuth *apparente* PZS: o triangulo $Z'ZS$ dá

$$\cos z' = \cos\omega \cos z - \operatorname{sen}\omega \operatorname{sen} z \cos A,$$

ou $$\operatorname{tang}\omega \cos A = \operatorname{tang}\varphi, \cos z' = \frac{\cos\omega \cos(z+\varphi)}{\cos\varphi} \ldots (4),$$

que determinam z'; depois a formula (2) dá ϖ; e finalmente a última das equações (1) dá z''.

Se as observações se fizerem com um instrumento de alturas e azimuths, achar-se-hão por ellas os valores de z e A, que entram nas formulas (4). Mas se nos servirmos das observações de alturas e angulos horarios, o triangulo PZS dará A pelas formulas

$$\cos D \cos A = \operatorname{sen} D \cot z - \operatorname{sen} A \cot P,$$

ou $$\cos D \operatorname{tang} P = \operatorname{tang}\psi, \operatorname{sen}(A+\psi) = \operatorname{tang} D \cot z \operatorname{sen}\psi.$$

2.° No segundo caso, chamando A' o azimuth *verdadeiro* $ZZ'S'$, a formula (3) dá ϖ; depois a última das equações (1) dá z'; e finalmente o triangulo $ZZ'S$ dá

$$\cos z = \cos\omega \cos z' + \operatorname{sen}\omega \operatorname{sen} z' \cos A',$$

ou $$\operatorname{tang}\omega \cos A' = \operatorname{tang}\varphi, \cos z = \frac{\cos\omega \cos(z'-\varphi)}{\cos\varphi} \ldots (5).$$

Se as coordenadas verdadeiras conhecidas forem a ascensão recta a' e declinação d' do astro, o triangulo Z'PS' dará os valores de z'' e A', que entram em (3) e (5), pelas fórmulas

$$\cos z'' = \cos(D + \omega) \operatorname{sen} d' + \operatorname{sen}(D + \omega) \cos d' \cos P',$$

e
$$\cot A' = \frac{\operatorname{sen}(D + \omega) \operatorname{tang} d' - \cos(D + \omega) \cos P'}{\operatorname{sen} P'};$$

ou

$$\cos P' \cot d' = \operatorname{tang} \varphi, \begin{cases} \cot z'' = \dfrac{\operatorname{sen} d' \cos(D + \omega - \varphi)}{\cos \varphi}, \\ \cot A' = \dfrac{\cot P' \operatorname{sen}(D + \omega - \varphi)}{\operatorname{sen} \varphi}. \end{cases}$$

Se com a' e d' tivessemos determinado as parallaxes de ascensão recta e declinação, pelas fórmulas que logo daremos, a distancia apparente z tirar-se-hia immediatamente do triangulo ZPS, no qual se conheceriam então D, P, $90° - d$.

205. Mostra-se na Geodesia que, tomando por unidade o raio do equador, as expressões do raio r, e do angulo ω d'este raio com a vertical, são

$$r = 1 - \tfrac{1}{2}\alpha - \tfrac{1}{2}\alpha \cos 2D,$$

$$\omega \operatorname{sen} 1'' = (\alpha + \tfrac{1}{2}\alpha^2) \operatorname{sen} 2D + \tfrac{1}{2}\alpha^2 \operatorname{sen} 4D,$$

sendo α o achatamento $\dfrac{a - b}{a}$, e desprezando α^2 na primeira.

206. Quando a distancia zenithal z é muito grande relativamente a ω, deve preferir-se ás fórmulas (4) a desenvolução de $z'-z$ em uma serie convergente ordenada segundo as potencias de sen ω.

Para isso, fazendo

$$z'-z=y,\ \operatorname{sen}\omega=x,\ -\operatorname{sen}z\cos A=B,$$

a expressão de $\cos z'$, que então toma a fórma

$$\cos(z+y)=Bx+\cos z.\sqrt{1-x^2},$$

dá (*Math. Pur. de Franc.* p. IV, pag. 79)

$$z'-z=\frac{\cos A}{\operatorname{sen}1''}.\operatorname{sen}\omega+\frac{\cot z\operatorname{sen}^2 A}{2\operatorname{sen}1''}.\operatorname{sen}^2\omega+\ldots$$

Similhantemente, em logar das fórmulas (5), teriamos esta serie, mudando 'nella z em z' e reciprocamente, A em A', ω em $-\omega$.

207. Quando o astro está no meridiano: fazendo $A=0$ ou $A=180°$, segundo está o astro, a respeito do zenith, para a parte do polo ou para a do equador, as fórmulas precedentes dão

$$z'=z+\omega,\ \text{ou}\ z'=z-\omega.$$

Serão pois 'neste caso,

$$\left.\begin{array}{ll}\text{ou} & z'=z\pm\omega,\ \operatorname{sen}\varpi=\operatorname{sen}\pi\operatorname{sen}z',\ z''=z'-\varpi,\\ \text{ou} & \operatorname{sen}\varpi=\operatorname{sen}\pi\operatorname{sen}(z''+\varpi),\ z'=z''+\varpi,\ z=z'\mp\omega\end{array}\right\}\ldots(6),$$

das quaes o primeiro systema serve para passar de z para z'', e o segundo serve para passar de z'' para z.

208. *Parallaxes de ascensão recta e declinação.* A parallaxe de altura influe na ascensão recta e na declinação, e dá as parallaxes d'estas coordenadas; ou as de angulo horario e distancia polar, $S'PS = \delta P'$, $SP - S'P = \delta\Delta'$, que são eguaes áquellas tomadas com signal contrário.

Para ter a parallaxe de angulo horario, os triangulos $Z'PS'$ e $Z'PS$ dão

$$\cot P' = \frac{\cot z'' \operatorname{sen} D' - \cos A' \cos D'}{\operatorname{sen} A'}, \quad \cot(P' + \delta P') = \frac{\cot z' \operatorname{sen} D' - \cos A' \cos D'}{\operatorname{sen} A'},$$

de cuja differença se tira

$$\operatorname{sen} \delta P' = \frac{\operatorname{sen} \varpi \operatorname{sen} D' \operatorname{sen} (P' + \delta P') \operatorname{sen} P'}{\operatorname{sen} A' \operatorname{sen} z' \operatorname{sen} z''};$$

e eliminando z', A', e z'', pelas equações

$$\frac{\operatorname{sen} P'}{\operatorname{sen} A'} = \frac{\operatorname{sen} z''}{\operatorname{sen} \Delta'}, \quad \operatorname{sen} \varpi = \operatorname{sen} \pi \operatorname{sen} z',$$

fica

$$\operatorname{seu} \delta P' = \frac{\operatorname{sen} \pi \operatorname{sen} D' \operatorname{sen} (P' + \delta P')}{\operatorname{sen} \Delta'} \ldots\ldots (7).$$

200. Para resolver esta equação podemos, como nos n.os 202 e 203,

fazendo $$k=\frac{\operatorname{sen}\pi\operatorname{sen}D'}{\operatorname{sen}\Delta'},$$

usar da formula rigorosa

$$\operatorname{tang}\delta P'=\frac{k\operatorname{sen}P'}{1-k\cos P'},$$

ou da serie

$$\delta P'=\frac{k\operatorname{sen}P'}{\operatorname{sen}1''}+\frac{k^2\operatorname{sen}2P'}{2\operatorname{sen}1''}+\frac{k^3\operatorname{sen}3P'}{3\operatorname{sen}1''}+\ldots.(8).$$

Ordinariamente basta o primeiro termo; o que dá a formula approximada

$$\delta P'=\frac{\pi\operatorname{sen}D'\operatorname{sen}P'}{\operatorname{sen}\Delta'}\ldots\ldots(9),$$

que tambem resultaria da differenciação da expressão de $\cot P'$.

Achado o valor de $\delta P'$, teremos

$$P=P'+\delta P',\ (\text{ÁR})=(\text{AR})'-\delta P'.$$

210. Para ter a parallaxe de declinação, os mesmos triangulos dão

$$\cot\Delta=\frac{\cot A'\operatorname{sen}P+\cos P\cos D'}{\operatorname{sen}D'},\ \cot\Delta'=\frac{\cot A'\operatorname{sen}P'+\cos P'\cos D'}{\operatorname{sen}D'},$$

de cuja differença, eliminando o azimuth por meio da segunda, se tira

$$\operatorname{sen}\delta\Delta'=\left\{\frac{\operatorname{sen}\Delta'\cos D'\operatorname{sen}\delta P'}{\operatorname{sen}D'\operatorname{sen}P'}-\frac{2\cos\Delta'\cos(P'+\frac{1}{2}\delta P')\operatorname{sen}\frac{1}{2}\delta P'}{\operatorname{sen}P'}\right\}\operatorname{sen}(\Delta'+\delta\Delta'),$$

ou

$$\operatorname{sen}\delta\Delta'=\left\{\frac{\operatorname{sen}\pi\cos D'\operatorname{sen}(P'+\delta P')-2\cos\Delta'\cos(P'+\frac{1}{2}\delta P')\operatorname{sen}\frac{1}{2}\delta P'}{\operatorname{sen}P'}\right\}.\operatorname{sen}(\Delta'+\delta\Delta')..(10)$$

$$=Q\operatorname{sen}(\Delta'+\delta\Delta');$$

e conseguintemente $\tan g\,\delta\Delta'=\dfrac{Q\operatorname{sen}\Delta'}{1-Q\cos\Delta'}$,

ou

$$\delta\Delta'=\frac{Q\operatorname{sen}\Delta'}{\operatorname{sen}1''}+\frac{Q^2\operatorname{sen}2\Delta'}{2\operatorname{sen}1''}+\frac{Q^3\operatorname{sen}3\Delta'}{3\operatorname{sen}1''}+\ldots\ldots(11).$$

Para accommodar a expressão de Q ao calculo logarithmico, temos

$$Q=\frac{1}{\operatorname{sen}P'}\cdot\left\{\operatorname{sen}\pi\cos D'\operatorname{sen}(P'+\delta P)-\frac{\cos\Delta'\cos(P'+\frac{1}{2}\delta P')\operatorname{sen}\delta P'}{\cos\frac{1}{2}\delta P'}\right\}$$

$$=\frac{\operatorname{sen}\pi\operatorname{sen}(P'+\delta P')}{\operatorname{sen}P'}.\left\{\cos D'-\frac{\cot\Delta'\cos(P'+\frac{1}{2}\delta P')\operatorname{sen}D'}{\cos\frac{1}{2}\delta P'}\right\},$$

que se decompõe no systema das duas

$$\frac{\cot\Delta'\cos(P'+\frac{1}{2}\delta P')}{\cos\frac{1}{2}\delta P'}=\tan g\,\varphi,\ Q=\frac{\operatorname{sen}\pi\operatorname{sen}(P'+\delta P')\cos(D'+\varphi)}{\operatorname{sen}P'\cos\varphi}.$$

Ordinariamente basta o primeiro termo da formula (11). Então, desprezando as quantidades de segunda ordem relativamente a π, $\delta P'$, $\delta\Delta'$, ficará

$$\delta\Delta' = \pi\,(\cos D' \operatorname{sen}\Delta' - \operatorname{sen} D' \cos\Delta' \cos P') \ldots . (12),$$

que tambem se obteria differenciando a expressão de $\cot\Delta'$.

Achado o valor de $\delta\Delta'$, teremos

$$\Delta = \Delta' + \delta\Delta',\ d = d' - \delta\Delta'.$$

211. Se na differença das expressões de $\cot\Delta$ e $\cot\Delta'$ eliminarmos o azimuth por meio da primeira, acharemos

$$\operatorname{sen}\delta\Delta' = \operatorname{sen}\pi\cos D' \left\{ \operatorname{sen}(\Delta' + \delta\Delta') - \frac{\cos(\Delta' + \delta\Delta')\operatorname{tang} D' \cos(P' + \frac{1}{2}\delta P')}{\cos\frac{1}{2}\delta P'} \right\},$$

que se decompõem no systema das duas:

$$\frac{\operatorname{tang} D' \cos(P' + \frac{1}{2}\delta P')}{\cos\frac{1}{2}\delta P'} = \operatorname{tg}\psi,\ \operatorname{sen}\delta\Delta' = \frac{\operatorname{sen}\pi\cos D' \operatorname{sen}(\Delta' + \delta\Delta' - \psi)}{\cos\psi},$$

ou, pondo $\dfrac{\operatorname{sen}\pi\cos D'}{\cos\psi} = N,$

$$\delta\Delta' = \frac{N \operatorname{sen}(\Delta' - \psi)}{\operatorname{sen} 1''} + \frac{N^2 \operatorname{sen} 2(\Delta' - \psi)}{2 \operatorname{sen} 1''} + \frac{N^3 \operatorname{sen} 3(\Delta' - \psi)}{3 \operatorname{sen} 1''} + \ldots (13).$$

212. *Parallaxes de longitude e latitude.* Se nas formulas das parallaxes de ascensão recta e declinação substituirmos, em logar de P', a differença $L - l'$ entre a longitude L do zenith e a longitude l' do astro; em logar de D', a distancia $90° - \Lambda$ do pólo da ecliptica ao zenith; em logar da distancia polar Δ' do astro, a sua distancia $90° - \lambda'$ ao pólo da ecliptica: teremos, mudando os signaes, as parallaxes de longitude e latitude.

Assim, fazendo

$$k' = \frac{\operatorname{sen}\pi\cos\Lambda}{\cos\lambda'},\ \operatorname{tang}\varphi' = \frac{\operatorname{tang}\lambda'\cos(L - l' - \frac{1}{2}\delta l')}{\cos\frac{1}{2}\delta l'},$$

$$Q' = \frac{\operatorname{sen}\pi\operatorname{sen}(L - l' - \delta l')\operatorname{sen}(\Lambda - \varphi')}{\operatorname{sen}(L - l')\cos\varphi'},$$

$$\frac{\cot\Lambda\cos(L - l' - \frac{1}{2}\delta l')}{\cos\frac{1}{2}\delta l'} = \cot\psi',\ \frac{\operatorname{sen}\pi\operatorname{sen}\Lambda}{\operatorname{sen}\psi'} = N',$$

as parallaxes de $\delta l'$ e $\delta\lambda'$ de longitude e de latitude serão dadas pelas formulas:

$$\delta l' = -\left\{\frac{k'\operatorname{sen}(L - l')}{\operatorname{sen}1''} + \frac{k'^2\operatorname{sen}2(L - l')}{2\operatorname{sen}1''} + \frac{k'^3\operatorname{sen}3(L - l')}{3\operatorname{sen}1''} + \ldots\right\},$$

$$\delta\lambda' = -\left\{\frac{Q'\operatorname{sen}(90° - \lambda')}{\operatorname{sen}1''} + \frac{Q'^2\operatorname{sen}2(90° - \lambda')}{2\operatorname{sen}1''} + \frac{Q'^3\operatorname{sen}3(90° - \lambda')}{3\operatorname{sen}1''} + \ldots\right\},$$

$$\delta\lambda' = -\left\{\frac{N'\operatorname{sen}(\psi' - \lambda')}{\operatorname{sen}1''} + \frac{N'^2\operatorname{sen}2(\psi' - \lambda')}{2\operatorname{sen}1''} + \frac{N'^3\operatorname{sen}3(\psi' - \lambda')}{3\operatorname{sen}1''} + \ldots\right\},$$

213. A longitude L e a latitude Λ do zenith calculam-se, pelas formulas dos n.os 19 e 21, em funcção da sua ascensão recta, que é o tempo sideral reduzido a arco; da sua declinação, que é a altura do pólo sôbre o horizonte; e da obliquidade do equador a respeito da ecliptica.

Formulas de Olbers

214. Chamando M a ascensão recta do zenith; a' e a as ascensões rectas, verdadeira e apparente, do astro; P' e P os angulos horarios, verdadeiro e apparente: temos, pelos numeros precedentes,

$$\delta P' = P - P' = a' - a, \ P' = M - a', \ P = M - a,$$

$$k = \frac{\operatorname{sen} \pi \operatorname{sen} D'}{\operatorname{sen} \Delta'}, \ \operatorname{tang} \delta P' = \frac{k \operatorname{sen} P'}{1 - k \cos P'}.$$

Mas é $\operatorname{tang} a = \operatorname{tang}(a' - \delta P') = \dfrac{\operatorname{tang} a' - \operatorname{tang} \delta P'}{1 + \operatorname{tang} a' \operatorname{tang} \delta P'}$:

$$\left.\begin{aligned} &\text{logo} \quad \operatorname{tang} a = \frac{\operatorname{sen} a' - k \operatorname{sen} M}{\cos a' - k \cos M}, \\ &\text{ou} \quad \operatorname{tang} a = \frac{\operatorname{sen} a' \operatorname{sen} \Delta' - \operatorname{sen} \pi \operatorname{sen} D' \operatorname{sen} M}{\cos a' \operatorname{sen} \Delta' - \operatorname{sen} \pi \operatorname{sen} D' \cos M} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (14).$$

215. Tambem se póde achar a pelas formulas

$$\text{tang}\, P = \frac{\text{sen}\, P'}{\cos P' - k},\quad a = M - P,$$

das quaes a primeira dá o angulo horario apparente em funcção do verdadeiro;

ou
$$\frac{k}{\text{sen}\, P'} = \text{tang}\, \varepsilon,\quad \text{tang}\, P = \frac{\text{sen}\, P' \cos \varepsilon}{\cos (P' + \varepsilon)},\quad a = M - P.$$

216. Em quanto ás declinações, temos (n.° 210)

$$Q = \frac{\text{sen}\, \pi \cos D' \,\text{sen}\, (P' + \delta P') - 2 \cos \Delta' \cos (P' + \tfrac{1}{2} \delta P')\, \text{sen}\, \tfrac{1}{2} \delta P'}{\text{sen}\, P'}$$

$$= \frac{\text{sen}\, \pi \cos D' \,\text{sen}\, P - \cos \Delta' (\text{sen}\, P - \text{sen}\, P')}{\text{sen}\, P'},$$

e
$$\text{tang}\, \delta \Delta' = \frac{Q \,\text{sen}\, \Delta'}{1 - Q \cos \Delta'}.$$

D'onde resulta
$$\text{tang}\, \Delta = \text{tang}\, (\Delta' + \delta \Delta') = \frac{\text{sen}\, \Delta'}{\cos \Delta' - Q}.$$

E porque é
$$\cos \Delta' - Q = \frac{(\cos \Delta' - \text{sen}\, \pi \cos D')\, \text{sen}\, P}{\text{sen}\, P'}$$

$$= \frac{(\cos \Delta' - k \cot D' \,\text{sen}\, \Delta') \cos a\, (\text{sen}\, M - \cos M \,\text{tang}\, a)}{\text{sen}\, (M - a')},$$

ou, em virtude de (14),

$$\frac{(\cot z'' - \cot z')\,\text{sen}\,D'}{\text{sen}\,A'} = \frac{\left[\frac{\cos z''}{\text{sen}\,z''} - \frac{\cos z'}{\text{sen}\,z'}\right]\text{sen}\,D'}{\text{sen}\,A'}$$

resulta

$$= \frac{\cos P'}{\text{sen}\,P'} - \frac{\cos(P'+dP')}{\text{sen}(P'+dP')}$$

ou

$$\frac{\text{sen}\,\pi\;\text{sen}\,D'\,\text{sen}\,P'\,\text{sen}(P'+dP')\quad \text{sen}\,dP'}{\text{sen}\,A'\,\text{sen}\,z'\,\text{sen}\,z''},$$

21

ascens

cta e d

Pa

no sys

tang

21

l, l', 9

milhan

das su

215. Tambem se póde achar a pelas formulas

$-\frac{1}{\sin^2 p_1} \cdot d p_1 =$

ou, em virtude de (14),

$$\cos\Delta' - Q = \frac{(\cos\Delta' - k\cot D'\,\mathrm{sen}\,\Delta')\cos a}{\cos a' - k\cos M},$$

resulta:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{tang}\,\Delta &= \frac{\mathrm{sen}\,\Delta'(\cos a' - k\cos M)}{\cos a(\cos\Delta' - k\cot D'\,\mathrm{sen}\,\Delta')}, \\ &\text{ou} \\ \mathrm{tang}\,\Delta &= \frac{\mathrm{sen}\,\Delta'\cos a' - \mathrm{sen}\,\pi\,\mathrm{sen}\,D'\cos M}{\cos a(\cos\Delta' - \mathrm{sen}\,\pi\cos D')} \end{aligned}\right\}\ldots\ldots(15).$$

217. As formulas (14) e (15) de Olbers dão immediatamente a ascensão recta e a distancia polar apparentes, em funcção da ascensão recta e distancia polar verdadeiras.

Para as accommodar ao calculo logarithmico, podemos transformal-as no systema

$$\mathrm{tang}\,\mu = \frac{\mathrm{sen}\,a'}{k\cos M},\ \mathrm{tang}\,\nu = \frac{\cos a'}{k\,\mathrm{sen}\,M},\ \cot\xi = k\cot D',$$

$$\mathrm{tang}\,a = \frac{\cos\nu\,\mathrm{sen}\,(M-\mu)}{\cos\mu\cos(M+\nu)},\ \mathrm{tang}\,\Delta = \frac{\mathrm{sen}\,\pi\,\mathrm{sen}\,D'\,\mathrm{sen}\,\xi\cos(M+\nu)}{\cos a\cos\nu\,\mathrm{sen}\,(\Delta'-\xi)}.$$

218. Se 'nestes resultados usarmos respectivamente de L, $90°-\Lambda$, l, l', $90°-\lambda$, $90°-\lambda'$, em logar de M, D', a, a', Δ, Δ'; acharemos similhantemente as longitudes e latitudes apparentes dos astros em funcção das suas longitudes e latitudes verdadeiras.

III

Determinação da parallaxe horizontal.

219. Para fazer uso das formulas precedentes falta determinar a parallaxe horizontal π, que 'nellas entra.

Supponhamos que dois observadores O e $O_{,}$ (Fig 57), collocados no mesmo meridiano, observam as distancias zenithaes meridianas $LOZ = z$, $LO_{,}Z_1 = z_{,}$, d'um astro L. Nos triangulos COL, $CO_{,}L$, conhecem-se as quatro partes

$$LOC = 180^\circ - z', \; LO_1C = 180^\circ - z_{,}', \; OC = r, \; O_{,}C = r_{,};$$

e ha as duas condições de ser $CL = R$ commum, e de ser

(Fig. 57) $$OCL + O_{,}CL = c + c_{,} = \varphi,$$

ou (Fig. 58) $$OCL - O_{,}CL = c - c_{,} = \varphi;$$

sendo φ a differença das latitudes geocentricas dos dois observadores.

Teremos pois as seis condições necessarias para resolver estes dois triangulos, que, usando do signal superior para a primeira figura, e do inferior para a segunda, dão

$$\operatorname{sen} \varpi = \operatorname{sen}(z' - c) = \frac{r}{R} \operatorname{sen} z',$$

$$\operatorname{sen} \varpi_{,} = \operatorname{sen}(z_{,}' - c_{,}) = \frac{r_{,}}{R} \operatorname{sen} z_{,}' = \frac{r_{,}}{r} \cdot \frac{r}{R} \operatorname{sen} z_{,}',$$

$$c \pm c_{,} = \varphi;$$

ou, substituindo em logar das razões dos senos das parallaxes de alturas as das mesmas parallaxes,

$$\varpi = z' - c = \pi \operatorname{sen} z', \quad \varpi_{,} = z_{,}' - c_{,} = \frac{r_{,}}{r} \pi \operatorname{sen} z_{,}', \quad c \pm c_{,} = \varphi.$$

E eliminando c e $c_{,}$, acharemos a parallaxe horizontal

$$\pi = \frac{L}{\operatorname{sen} z' \pm \frac{r_{,}}{r} \operatorname{sen} z_{,}'} = \frac{z' \pm z_{,}' - \varphi}{\operatorname{sen} z' \pm \frac{r_{,}}{r} \operatorname{sen} z_{,}'} \quad \ldots\ldots (16):$$

tendo logar, segundo ha pouco dissemos, o signal superior quando o astro está entre os dois zeniths; e o signal inferior, quando o astro está para a mesma parte dos dois zeniths, e mais proximo de Z_1.

220. Chamando λ e $\lambda_{,}$ as latitudes astronomicas ONE e $O_{,}N'E$ dos dois observadores; e ω e $\omega_{,}$ os angulos ZOZ' e $Z_{,}O_{,}Z_{,}'$ das suas verticaes com os raios: temos, no caso de estar o astro entre os dois zeniths,

$$\text{Para latitudes de diversa denominação (Fig. 57)} \left\{ \begin{array}{l} \varphi = \lambda + \lambda_{,} - \omega - \omega_{,}, \\ z' = z - \omega, \; z_{,}' = z_{,} - \omega_{,}; \end{array} \right.$$

Para latitudes da mesma denominação (Fig. 59) $\begin{cases} \varphi = \lambda - \lambda_{,} - \omega + \omega_{,}, \\ z' = z - \omega, z'_{,} = z_{,} + \omega_{,}. \end{cases}$

O que substituido na expressão (16) de π, tomada com o signal superior, dá

$$\pi = \frac{z + z_{,} - \lambda \mp \lambda_{,}}{\operatorname{sen}(z-\omega) + \frac{r_{,}}{r}\operatorname{sen}(z_{,} \mp \omega_{1})} \ldots\ldots (17):$$

tendo logar o signal superior, quando as latitudes são de diversa denominação; e o signal inferior, quando as latitudes são da mesma denominação, e se chama $\lambda_{,}$ a mais pequena d'ellas.

221. No caso de estar o astro para a mesma parte dos dois zeniths, e mais proximo do zenith de $O_{,}$, temos:

Para latitudes de diversa denominação (Fig. 58) $\begin{cases} \varphi = \lambda + \lambda_{,} - \omega - \omega_{,}, \\ z' = z - \omega, z'_{,} = z_{,} + \omega_{,}; \end{cases}$

Para latitudes da mesma denominação (Fig. 60) $\begin{cases} \varphi = \lambda - \lambda_{,} - \omega + \omega_{,}, \\ z' = z - \omega, z'_{,} = z_{,} - \omega_{,}. \end{cases}$

O que substituido na expressão (16) de π, tomada com o signal inferior, dá

$$\pi = \frac{z - z_{,} - \lambda \mp \lambda_{,}}{\operatorname{sen}(z-\omega) - \frac{r_{,}}{r}\operatorname{sen}(z_{,} \pm \omega_{,})} = \frac{z - z_{,} - \lambda \mp \lambda_{,}}{\operatorname{sen}(z-\omega) + \frac{r_{,}}{r}\operatorname{sen}(-z_{,} \mp \omega_{,})} \ldots (18).$$

222. Examinando as fórmulas (17) e (18), vê-se que:

1.º A fórmula

$$\pi = \frac{r(z + z_{,} - \lambda - \lambda_{,})}{r \operatorname{sen}(z - \omega) + r_{,} \operatorname{sen}(z_{,} - \omega_1)}$$

suppõe que um dos observadores está no hemispherio boreal e o outro no hemispherio austral, e que o astro está entre os dois zeniths.

2.º Se ambos os observadores estiverem no mesmo hemispherio, austral ou boreal, deverão mudar-se os signaes de λ e ω relativos áquelle que estiver mais proximo do equador.

3.º Se o astro estiver para a mesma parte dos dois zeniths, deverá mudar-se o signal do z relativo ao zenith mais proximo do astro.

223. No caso de se suppôr a terra espherica,

é $$r = r_{,},\ \omega = o,\ \omega_{,} = o;$$

e reduz-se a fórmula a

$$\pi = \frac{z + z_1 - \varphi}{\operatorname{sen} z + \operatorname{sen} z_1}:$$

na qual se deverá mudar z_1 em $-z_{,}$ quando estiver o astro para a mesma parte dos dois zeniths, e mais proximo de $Z_{,}$; e se deverá tomar por φ a somma arithmetica das duas latitudes, ou a sua differença, segundo estiverem os observadores em hemispherios differentes, ou no mesmo hemispherio.

224. Na expressão de π os erros absolutos, commettidos nas observações das distancias zenithaes, não só se conservam, mas podem avultar pela divisão por $\operatorname{sen} z + \operatorname{sen} z_{,}$ (*a*).

(*a*) Seja E o limite do erro de L; e ε o dos erros de z e $z_{,}$, isto é, $\varepsilon(\cos z + \cos z_{,}) = E'$ o do erro de $\operatorname{sen} z + \operatorname{sen} z_{,}$. Os limites dos erros correspondentes de π serão

$$\delta\pi = \frac{E}{\operatorname{sen} z + \operatorname{sen} z_{,}},\quad \delta'\pi = -\frac{E' \operatorname{sen} \pi}{\operatorname{sen} z + \operatorname{sen} z_{,}}.$$

Os multiplicadores de E e E' mostram que a influencia do primeiro d'estes erros é muito mais para recear que a do segundo.

Por isso é melhor escolher uma estrella, que esteja proxima do astro; e tomar em ambos os logares com bons equatoriaes as differenças das declinações apparentes dos dois astros. As differenças das declinações serão assim independentes dos erros absolutos dos instrumentos; e só influirá 'nellas a variação d'estes erros na passagem da observação d'um astro para a do outro.

Feito isto, por ser para as estrellas insensivel o angulo E (Fig. 61) das rectas $O\star$ e $O_{,}\star$, devem estas rectas considerar-se como parallelas; e, segundo estiver o astro entre as duas projecções da estrella, ou para a mesma parte de ambas, isto é, segundo ficar a estrella a respeito do astro mais boreal para um observador e mais austral para o outro, ou mais boreal ou mais austral para ambos, assim teremos, chamando δ e $\delta_{,}$ as differenças de declinação apparentes observadas nos dois logares:

(Fig. 61) $\begin{cases} \text{angulo L externo ao triangulo OLQ,} \\ L=\delta+Q=\delta+\delta_{,}+E=\delta+\delta_{,}; \end{cases}$

(Fig. 62) $\begin{cases} \text{angulo L interno ao triangulo OLQ,} \\ L=Q-\delta=E+\delta_{,}-\delta=\delta_1-\delta. \end{cases}$

Teremos pois a fórmula

$$\pi=\frac{r(\delta+\delta_1)}{r\,\text{sen}\,(z-\omega)+r_1\,\text{sen}\,(z_{,}-\omega_{,})}\dots\dots(19).$$

1.° Esta fórmula suppõe que para um dos observadores a estrella está no norte, e para outro ao sul, do astro.

2.° Se para ambos os observadores a estrella estiver ao norte ou ao sul do astro, deverá mudar-se o signal da menor das quantidades δ ou δ_1.

225. O que temos dicto suppõe, que os dois observadores estão no mesmo meridiano. Se não estiverem, serão differentes os instantes em que elles tomam as differenças de declinação δ, δ_1, as quaes, no caso de ter o astro movimento sensivel em declinação no intervallo, não serão as mesmas que se fossem observadas simultaneamente. D'onde resulta a necessidade de reduzir uma ao tempo da outra.

Sejam:

$$
\begin{array}{llllll}
i & 6 & & & & \\
 & & \dfrac{6'-6}{i'-i}=\delta 6 & & & \\
i' & 6' & & \dfrac{\delta 6'-\delta 6}{i''-i}=\delta^2 6 & & \\
 & & \dfrac{6''-6'}{i''-i'}=\delta 6' & & \dfrac{\delta^2 6'-\delta^2 6}{i'''-i}=\delta^3 6 \ldots\ldots: & \\
i'' & 6'' & & \dfrac{\delta 6''-\delta 6'}{i'''-i'}=\delta^2 6' & & \\
 & & \dfrac{6'''-6''}{i'''-i''}=\delta 6'' & & & \\
i''' & 6''' & & & &
\end{array}
$$

as raizes i, i', i'',.....; as funcções correspondentes 6, $6'$, $6''$,.... .; e as expressões compostas com as differenças das funcções e das raizes do modo que se vê no quadro precedente.

Para uma raiz t, que não diste muito d'aquellas ás quaes correspondem as funcções dadas, teremos, como se sabe, a funcção correspondente:

$$6_t = 6 + (t-i)\,\delta 6 + (t-i)(t-i')\,\delta^2 6 + (t-i)(t-i')(t-i'')\,\delta^3 6 + \ldots$$

Se conhecermos pois o intervallo θ das passagens do astro pelos dois meridianos; e chamarmos 6, e $6'$, $6''$,... as differenças de declinação da estrella e do astro observadas no tempo i da passagem pelo meridiano mais oriental, e nos tempos i', i'',...; teremos, para o tempo $i+\theta$ da passagem pelo segundo meridiano, immediata á que no primeiro meridiano tem logar no tempo i, o valor 6_t, que devemos tomar por δ. Mas, se 6, $6'$, $6''$,... forem as declinações do astro observadas nas epochas das passagens meridianas, a expressão $6_t - 6 = c$ será a correcção que se deve applicar á differença de declinação do astro e da estrella observada no tempo i da passagem do astro pelo meridiano mais oriental, para ter a differença de declinação correspondente ao tempo $i+\theta$ da passagem pelo meridiano mais occidental, que se deve tomar por δ. Esta correcção reduz assim a differença de declinações observada no primeiro logar á que seria observada no ponto onde o parallello d'esse logar é cortado pelo meridiano do segundo.

Similhantemente corrigiremos a distancia zenital z; mas 'nisso basta empregar menos cuidado.

226. *Exemplo.* No meridiano do Cabo da Boa-Esperança, comparando Marte com a estrella λ de Aquario, achou Lacaille a differença apparente de declinações $26'',7$ entre o bordo boreal do disco do planeta e a estrella, mais austral que elle; sendo $z = 25°2'$ a sua distancia zenithal, com approximação de minutos. No mesmo instante, e no mesmo meridiano, Wargentin achou em Stokolmo a differença apparente de declinações $6'',6$ entre o mesmo bordo septentrional do disco do planeta e a estrella, mais boreal que elle; sendo $z_{,} = 68°14'$.

Por tanto, suppondo a terra espherica, a fórmula (19) dá

$$\pi = \frac{33'',3}{\text{sen}\,25°2' + \text{sen}\,68°14'},$$

ou

$$\pi = \frac{33'',3}{1,3518} = 24'',64.$$

Para achar a distancia de Marte no mesmo instante, temos

$$\log \text{sen}\,24'',64 = \log \text{sen}\,24''.\frac{24'',64}{24''} = 6.0772156,$$

e por conseguinte

$$R = \frac{r}{\text{sen}\,24'',64} = 8371,14\,.\,r.$$

CAPITULO XI

Do circular repetidor

227. Serve de base a este instrumento um circulo ou prato azimuthal, sustentado por tres pés equidistantes munidos de parafusos. O eixo de uma columna vertical, cuja extremidade inferior encaixa no centro d'aquelle prato, póde gyrar azimuthalmente, acompanhando-o um index que na circumferencia do mesmo prato indica a quantidade d'esse movimento.

Um circulo vertical de maior raio gyra na extremidade d'um eixo de rotação horizontal. Serve de contrapêso a este circulo um tambor ligado com a extremidade opposta do mesmo eixo; e no perimetro do tambor, que é dentado, póde entrosar um parafuzo sem fim ligado á columna, á qual prende então o circulo, permittindo-lhe sómente o movimento de rotação que por elle se lhe dá. Gyra á roda do centro do mesmo circulo um oculo, fixo em uma grade; e esta segura quatro nonios equidistantes e os respectivos microscopios, para multiplicar as leituras. Um grande nivel graduado, parallello ao circulo vertical e ligado á columna, accusa e mede os desarranjos d'esta parallelamente ao mesmo circulo. Um pequeno nivel, parallelo ao eixo de rotação horizontal, accusa as perturbações da verticalidade do limbo.

Nos circulares repetidores, que tambem são proprios para as operações geodesicas, ha um sector que prende a columna ao circulo, quando se tem dado a este a inclinação necessaria para aquellas operações. Um parafuso tangencial d'esse sector serve, nas observações em que o circulo deve ser vertical, para corrigir a falta de verticalidade accusada pelo pequeno nivel.

228. Para se observarem as distancias zenithaes com o circular repetidor devem primeiramente verificar-se: a verticalidade da columna; o parallelismo do circulo a ella; e o parallelismo do eixo optico ao mesmo circulo.

A verticalidade da columna verifica-se em duas posições cruzadas do circulo: uma na direcção d'um dos pés; a outra na direcção perpendicular a esta, isto é, na direcção perpendicular ao raio azimuthal, que divide ao meio o angulo dos raios que passam pelos outros dois pés. Em uma d'estas posições nivella-se com o parafuso do pé respectivo; dá-se ao circulo o movimento azimuthal de 180°; corrige-se com o parafuso do pé metade do espaço andado pela bolha 'nesse movimento, e com o parafuso do nivel a outra metade; volta-se depois á primeira posição por outro movimento azimuthal de 180°; e faz-se outra vez, por egual processo, com os parafusos do pé e do nivel a correcção do espaço que a bolha ainda percorreu: e assim até a exhaustão (n.° 52). Na posição perpendicular á primeira obtem-se a verticalidade só pelo movimento dos dois pés, entre os quaes é intermedio o ponto por onde passa o raio azimuthal perpendicular ao circulo; levantando um e abaixando egualmente o outro.

O parallelismo do circulo á columna verifica-se pelo fio de prumo, que se faz pender do ponto marcado em uma chapa applicada perpendicularmente ao limbo, e que deve tocar o ponto, equidistante do limbo, marcado em outra chapa: faz-se esta operação em dois logares differentes do limbo; e, sendo necessario, verificam-se os dois pontos das chapas por outra applicação do prumo, depois de dar ao circulo o movimento de rotação de 180° (n.° 57). Com o parafuso tangencial ao sector, de que fallámos no fim do número precedente, corrige-se o erro que accusar a applicação do prumo: e, feito isto, move-se o parafuso do pequeno nivel, até que a bolha fique entre dois pontos marcados pelo artista, e possa depois indicar facilmente as perturbações de verticalidade do circulo.

O parallelismo do eixo optico ao plano do circulo verifica-se por uma luneta de prova: ou tambem, dirigindo o eixo optico para um ponto distante; dando ao limbo um movimento azimuthal de 180°; movendo o oculo até que o eixo optico se projecte no mesmo ponto, ou em outro proximo; e destruindo, no último caso, a metade da distancia dos dois pontos pelo movimento do reticulo, ou do objectivo.

229. Feitas estas verificações, e fixado o oculo em tal parte do circulo que o zero do nonio da extremidade ocular corresponda ao zero da graduação, demos ao circulo os movimentos azimuthal e vertical necessarios para enfiar um objecto fixo: e supponhamos que 'nesta primeira observação o limbo ficou á direita do observador. Dando depois um movimento azimuthal de 180°, ficará o limbo á esquerda; e o oculo voltado para um ponto, cuja distancia ao zenith será egual á do objecto observado, mas para a parte opposta. Por tanto, se firmando então o circulo, e desprendendo o oculo, movermos este até que o eixo optico torne a en-

fiar o objecto, terá o mesmo eixo descripto um angulo duplo da distancia zenithal.

Trazendo de novo o circulo á primeira posição azimuthal, e procedendo a outro par de observações similhantes ás que acabâmos de indicar, mas sendo agora posição inicial do oculo no circulo a que tomára no fim do primeiro par, o eixo optico descreverá outro arco duplo da distancia zenithal; conseguintemente o arco descripto por elle desde o principio das quatro observações será quadruplo da mesma distancia.

Fazendo d'este modo um número $2n$ de observações, de sorte que se enfie o objecto nas impares pelo movimento do circulo, e nas pares pelo movimento do oculo, e chamando z a distancia zenithal do objecto, o arco percorrido pelo eixo optico do oculo será $2nz$. Portanto se fôr i o número de circumferencias inteiras por elle percorridas, e a o arco lido no fim da última operação, será

$$2nz = 360\,i + a,\quad z = \frac{360\,i + a}{2n}.$$

Evita-se o trabalho de contar o número i das revoluções completas do oculo, lendo tambem o arco no fim do primeiro par de observações, e tomando a sua metade $z_{,}$; porque esta será um valor de z sufficientemente approximado para o fim de achar o número $i = \frac{2nz_1 - a}{360}$.

Sejam 0, α_1, α_2, α_3, as leituras dos quatro nonios no principio das observações; e A_0, A_1, A_2, A_3, as leituras dos nonios no fim. Os arcos percorridos por elles serão $A_0 - 0$, $A_1 - \alpha_1$, $A_2 - \alpha_2$, $A_3 - \alpha_3$; por conseguinte o angulo descripto pelo eixo optico será mais exactamente $A = \frac{A_0 + A_1 + A_2 + A_3 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3}{4}$; isto é, *a quarta parte da differença entre a somma das leituras finaes e a das leituras iniciaes* (a).

(a) Sejam 0, α_1', α_2', α_3', as leituras de comparação dos nonios no fim da operação. Tambem será $A_0 = \frac{A_0 + A_1 + A_2 + A_3 - \alpha_1' - \alpha_2' - \alpha_3'}{4}$, no caso de ser invariavel a posição de cada nonio relativamente ao eixo optico. Mas supponha-

230. Quando os objectos não são fixos, é necessario attender ao seu movimento no intervallo das observações; porque o arco descripto pelo oculo, durante cada par de observações, não é então duplo da distancia zenithal do objecto no principio d'esse par. Vejamos pois como nas observações da distancia zenithal dos astros se illudem os effeitos do seu movimento diurno.

São dois os usos astronomicos, para os quaes costuma servir o circulo repetidor: determinação da hora; e determinação da distancia zenithal meridiana. Tractaremos separadamente de cada um d'elles.

Supponhamos que se faz com o circular repetidor um par de observações, e que a ellas correspondem os angulos horarios P', P'', e as distancias zenithaes z', z'', cuja somma $z'+z''=\sigma$ se lê no circulo.

231. Se o andamento do relogio relativamente ao astro for proximamente conhecido, de sorte que, em uma serie de alguns minutos de duração, se possa converter com sufficiente exactidão o intervallo de tempo do relogio em intervallo de tempo do astro, as equações tiradas dos triangulos ZPS' e ZPS'',

$$z'+z''=\sigma,\ \cos z'=\cos P' \operatorname{sen} \Delta \operatorname{sen} D+\cos \Delta \cos D,$$

mos que, durante a observação, os nonios se adiantam das quantidades e_0, e_1, e_2, e_3. Serão

$$A=A_0-e_0,\ e_1-e_0=\alpha_1'-\alpha_1,\ e_2-e_0=\alpha_2'-\alpha_2,\ e_3-e_0=\alpha_3'-\alpha_3.$$

O que dará

$$A=\frac{A_0+A_1+A_2+A_3-\alpha_1'-\alpha_2'-\alpha_3'}{4}-e_0,$$

$$A=\frac{A_0+A_1+A_2+A_3-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}{4}-\frac{e_0+e_1+e_2+e_3}{4}.$$

E como, em virtude das compensações, é provavelmente $e_0>\frac{e_0+e_1+e_2+e_3}{4}$, parece preferivel a segunda d'estas expressões, que é a adoptada no texto.

$$\cos z'' = \cos[P' + (P'' - P')] \operatorname{sen} \Delta' \operatorname{sen} D + \cos \Delta' \cos D,$$

nas quaes são desconhecidas z', z'', P', poderão dar estas quantidades. Mas, para mais exactidão e facilidade, reduzamos a uma epocha intermedia, na qual seja P o angulo horario. Se as differenças

$$P' - P = \delta P',\ P'' - P = \delta P'',\ \Delta' - \Delta = \delta\Delta',\ \Delta'' - \Delta = \delta\Delta'',$$

forem tão pequenas que possamos limitar-nos aos quadrados de δP e ás primeiras potencias de $\delta\Delta$, teremos:

$$z = f(P, \Delta),\ z' = z + \frac{dz}{dP}\delta P' + \frac{1}{2}\frac{d^2z}{dP^2}\delta P'^2 + \frac{dz}{d\Delta}\delta\Delta'.$$

E como de se tiram $\cos z = \cos P \operatorname{sen} \Delta \operatorname{sen} D + \cos \Delta \cos D \dots (1)$

$$\frac{dz}{dP} = \frac{\operatorname{sen} D \operatorname{sen} \Delta \operatorname{sen} P}{\operatorname{sen} z} = a,$$

$$\frac{d^2z}{dP^2} = \frac{dz}{dP}\frac{d \log\left(\frac{dz}{dP}\right)}{dP} = a(\cot P - a \cot z) = b,$$

$$\frac{dz}{d\Delta} = \frac{\operatorname{sen}\Delta \cos D - \cos P \cos\Delta \operatorname{sen} D}{\operatorname{sen} z} = \frac{\operatorname{sen}(\Delta - D) + 2\cos\Delta \operatorname{sen} D \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} P}{\operatorname{sen} z} = c,$$

serão:

$$z' = z + a\delta P' + \tfrac{1}{2} b\delta P'^2 + c\delta\Delta', \quad z'' = z + a\delta P'' + \tfrac{1}{2} b\delta P''^2 + c\delta\Delta'',$$

e conseguintemente

$$z = \frac{z' + z''}{2} - \frac{a(\delta P' + \delta P'') + b\left(\dfrac{\delta P'^2 + \delta P''^2}{2}\right) + c(\delta\Delta' + \delta\Delta'')}{2}.$$

E para uma serie de $2n$ d'estas observações será

$$z = \frac{\Sigma z'}{2n} - \frac{a\Sigma\delta P' + b\Sigma\dfrac{2\,\mathrm{sen}^2\frac{1}{2}\delta P'}{\mathrm{sen}\,1''} + c\,\Sigma\delta\Delta'}{2n} \ldots\ldots (2).$$

232. Ordinariamente limita-se uma serie a tão poucas observações que nos intervallos d'ellas sejam insensiveis os dois últimos termos da da correcção de $\frac{\Sigma z'}{2n}$; o que reduz (2) a

$$z = \frac{\Sigma z'}{2n} - \frac{a\Sigma\delta P'}{2n} \ldots\ldots (3).$$

E toma-se para epocha a correspondente ao angulo horario medio

$$\frac{\Sigma P'}{2n} = P + \frac{\Sigma\delta P'}{2n},$$

isto é toma-se $\frac{\Sigma\delta P'}{2n} = 0$: o que reduz (3) a $z = \frac{\Sigma z'}{2n}$.

Basta pois, sem applicar correcção alguma, tomar a distancia zenithal media $\frac{\Sigma z'}{2n}$ como correspondente á epocha media $\frac{\Sigma t'}{2n}$.

E então fazem-se as observações por series consecutivas, cujas durações, ordinariamente de $8'$ a $10'$, sejam taes que em cada uma d'ellas se possa empregar a equação (3).

Mas para verificar se póde empregar-se a equação (3) com segurança, calcula-se pela equação (1) o angulo horario P_1 correspondente á distancia zenithal $\frac{\Sigma z'}{2n}$; depois calcula-se z pela fórmula (1) para o angulo horario $P_1 + \delta P_1$, sendo δP_1 metade da duração da serie convertida em angulo horario; e finalmente comparando $z - \frac{\Sigma z'}{2n}$ com esta mesma differença calculada pela fórmula $a\delta P_1$, vê-se se podem tomar-se como eguaes uma á outra, sem erro attendivel.

233. Supponhamos que, applicando este processo a um número i de series, achamos as seguintes distancias zenithaes, correctas da refracção e da parallaxe, e os tempos do relogio correspondentes:

$$\left\{\begin{array}{lllll}\text{Distancias} & z_1, & z_2, & z_3, \ldots\ldots\ldots & z_i \\ \text{Tempos} & t_1, & t_2, & t_3, \ldots\ldots\ldots & t_i\end{array}\right\}.$$

A fórmula (1), ou

$$\operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} P = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(z + \Delta - D) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(z + D - \Delta)}{\operatorname{sen} D \operatorname{sen} \Delta},$$

dará os angulos horarios respectivos

$$P_1, P_2, P_3, \ldots\ldots\ldots\ldots P_i.$$

Se o astro é uma estrella: ajunctando a estes angulos a ascensão recta d'ella, e repartindo as sommas por 15, teremos os tempos sideraes

$$\theta_1,\ \theta_2,\ \theta_3,\ldots\ldots\ldots\ldots\theta_i.$$

Se o astro é o sol: subtrahindo as equações do tempo respectivas dos angulos horarios repartidos por 15, teremos os tempos medios.

Os atrazos absolutos do relogio serão pois

$$\theta_1-t_1,\ \theta_2-t_2,\ \theta_3-t_3,\ldots\ldots\ldots\ldots\theta_i-t_i.$$

Se estas quantidades differirem pouco entre si, e irregularmente, tomaremos um meio entre ellas para ter com mais exactidão o atrazo do relogio: mas, se differirem entre si consideravelmente, e com regularidade, as suas differenças mostrarão o andamento do relogio.

234. Para que 'nestes resultados influam pouco os erros da distancia zenithal observada, convém que ás variações de z correspondam pequenas variações de P; e como a expressão de $\frac{dz}{dP}=a$ tirada de (1) dá

$$dP=\frac{\operatorname{sen} z}{\operatorname{sen} P \operatorname{sen} \Delta \operatorname{sen} D}\,dz=\frac{1}{\operatorname{sen} D \operatorname{sen} A}\,dz,$$

vê-se que, em quanto á escolha do astro, convém que a sua distancia polar se approxime de 90°; e, em quanto á hora da observação, convém que seja aquella em que o azimuth menos differe de 90°, isto é, em que o astro está mais proximo do primeiro vertical. Por isso costumam estas observações fazer-se sufficientemente longe do meridiano.

235. O uso da fórmula (2) permitte empregar series muito maiores.

Tomando por epocha a media dos tempos das observações, o que dá

$\Sigma(\delta P') = o$, e suppondo uniforme o movimento em declinação durante o intervallo d'ellas, ou $\Sigma(\delta\Delta') = o$, a fórmula (2) ficará reduzida a

$$z = \frac{\Sigma z'}{2n} - \frac{b\Sigma\left(\dfrac{2\,\mathrm{sen}^2\frac{1}{2}\delta P'}{\mathrm{sen}\,1''}\right)}{2n} \ldots\ldots (4).$$

O sommatorio $\Sigma\left(\dfrac{2\,\mathrm{sen}^2\frac{1}{2}\delta P'}{\mathrm{sen}\,1''}\right)$ calcula-se facilmente pela taboa de $\dfrac{2\,\mathrm{sen}^2\frac{1}{2}P'}{\mathrm{sen}\,1''}$, que no fim d'este volume transcrevemos; e $\dfrac{b}{2n}$ calcula-se com facilidade pelas fórmulas seguintes:

$$\frac{\mathrm{sen}\,\Delta\,\mathrm{sen}\,D}{\mathrm{sen}\,z} = Q,\ Q\cot z\,\mathrm{sen}\,P = \mathrm{tang}\,\varphi,\ \frac{Q\cos(\varphi + P)}{2n\cos\varphi} = \frac{b}{2n}.$$

Para ter os angulos $\delta P'$ bastaria multiplicar por 15 os respectivos intervallos de tempo $\delta t'$ reduzidos proximamente a tempo do astro: mas estes intervallos reduzidos são até os argumentos da taboa que dá $\dfrac{2\,\mathrm{sen}^2\frac{1}{2}P'}{\mathrm{sen}\,1''}$.

Em quanto ao valor de z, que entra no calculo de b, basta tomar por elle a distancia media $\dfrac{\Sigma z'}{2n}$; e, quando muito, repetir depois o calculo de b com o primeiro valor de z determinado pela fórmula (4), isto é, calcular a fórmula (4) por duas approximações successivas.

Poderemos d'este modo empregar ordinariamente series de 20′ e mais.

236. *Determinação da distancia zenithal meridiana.* Sejam z a distancia zenithal meridiana; $z' = z + \delta$ a distancia zenithal observada, que se quer reduzir a ella; e $P = o$, P', os angulos horarios correspon-

dentes. A fórmula (1) dá

$$\cos z - \cos(z+\delta) = 2 \operatorname{sen} \Delta \operatorname{sen} D \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} P' = 2k,$$

da qual (Franc. *Math. Pur.* p. IV, n.º 67, 3.º), fazendo

$$m = \frac{2k}{\operatorname{sen} z \operatorname{sen} 1''} = \frac{\operatorname{sen} \Delta \operatorname{sen} D}{\operatorname{sen} z} \cdot \frac{2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} P'}{\operatorname{sen} 1''},$$

se tira, em segundos,

$$\delta = m - \frac{1}{2} m^2 \cot z \operatorname{sen} 1'' + \frac{1}{6} m^3 \operatorname{sen}^2 1'' (1 + 3 \cot^2 z) \ldots\ldots (5).$$

237. Se a quantidade m é muito pequena, podemos limitar-nos ao primeiro termo d'esta serie. Para o Sol póde ser necessario aproveitar os dois primeiros termos; e para a Lua os tres.

Na passagem superior a correcção δ é subtractiva de z'; e é $z = \pm(D - \Delta)$, segundo passa o astro ao norte ou ao sul do zenith. Na passagem inferior o segundo termo de (5) muda de signal; a correcção é additiva; e $z = D + \Delta$: como se vê mudando Δ em $360° - \Delta$; ou achando a correcção das distancias ao nadir pela mudança de z em $180° - z$.

238. A taboa do factor $\dfrac{2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} P'}{\operatorname{sen} 1''}$, que transcrevemos da Astronomia de Biot, serve para todas as latitudes. Mas a de $\dfrac{\operatorname{sen} D \operatorname{sen} \Delta}{\operatorname{sen} z}$ é especial para cada colatitude D. Para a formar póde dar-se a este factor a fórma mais commoda

$$\frac{\operatorname{sen} D \operatorname{sen} \Delta}{\operatorname{sen}(\Delta \pm D)} = \frac{1}{\cot D \pm \cot \Delta}.$$

D'esta maneira se calculou para a latitude de Coimbra a taboa, que tambem ajunctamos, e cujo original achámos em um exemplar da Ephemeride para 1804. O seu argumento é a declinação do astro.

239. Se a distancia polar tambem varia, como acontece para o Sol: desprezando as variações da segunda ordem, acharemos immediatamente a parte da variação devida a $\delta\Delta$ differenciando a equação (1) relativamente a Δ e z', e fazendo $P'=0$; o que dá

$$\delta z=\frac{\operatorname{sen}(\Delta-D)}{\operatorname{sen} z}\,.\,\delta\Delta=\pm\,\delta\Delta;$$

tendo logar o signal $\pm$, segundo está o astro ao sul ou ao norte do zenith. E na passagem inferior é $\delta z=\delta\Delta$.

A fórmula será pois

Nas passagens superiores:

$$z=z'-\left(m\mp\frac{m^2 \operatorname{sen} 1''}{2}\cot(\Delta-D)\pm\delta\Delta\right),$$

segundo está o astro ao sul ou ao norte do zenith.

E nas inferiores:

$$z=z'+\left(m+\frac{m^2 \operatorname{sen} 1''}{2}\cot(\Delta+D)-\delta\Delta\right);$$

sendo $\delta\Delta$ a distancia polar na epocha da observação, menos a distancia polar na epocha da passagem meridiana.

Para applicar esta fórmula a um número $2n$ de observações, sejam: R, R', os factores variaveis $\frac{2\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}P'}{\operatorname{sen} 1''}$, $\frac{2\operatorname{sen}^4\frac{1}{2}P'}{\operatorname{sen} 1''}$; f o factor constante

$\frac{\operatorname{sen} D \operatorname{sen} \Delta}{\operatorname{sen} z}$; M a somma dos angulos horarios anteriores á passagem meridiana, contados em minuto de tempo; S a dos posteriores; e ϖ a variação da distancia polar em um minuto de tempo, contada em segundos de gráu, isto é, $\delta\Delta = P' \varpi$. A distancia zenithal meridiana será, nas passagens superiores,

$$z = \frac{\Sigma z'}{2n} - \frac{f}{2n}\left(\Sigma R - f \cot z \, \Sigma R'\right) \mp \frac{S - M}{2n} \varpi;$$

devendo usar-se do signal superior, ou do inferior, segundo estiver o astro ao sul ou ao norte do zenith. Na passagem inferior mudar-se-ha o signal de f, e usar-se-ha do signal superior do último termo.

A correcção $\frac{M - S}{2n} \varpi$ é importante nas observações do Sol proximas dos equinoccios, por ser então mais rapido o movimento do astro em declinação: mas quando este movimento é vagaroso, como acontece nas visinhanças dos solsticios, ou quando as observações são equidistantes da passagem meridiana, a correcção é pouco consideravel.

240. O, que fica dicto, suppõe o movimento do relogio regulado pelo do astro. Supponhamos porém que r é o retardamento do relogio em 24^h de tempo do astro.

Pondo $\frac{r}{86400 - r} = r'$; chamando p' o angulo horario d'um astro ficticio, cujo movimento fosse conforme com o do relogio; e P' o angulo horario, que no mesmo tempo corresponde ao movimento do astro verdadeiro, teremos

$$\frac{P'}{15} = \frac{p'}{15} \cdot \frac{86400}{86400 - r};$$

ou

$$\tfrac{1}{2} P' = (1 + r') \tfrac{1}{2} p';$$