é nulla quatro vezes no anno. O mesmo faz ver a comparação das posições dos tres astros, Sol verdadeiro, Sol medio, e Sol equatorial, das quaes resulta a differença da ascensão recta entre o primeiro e o terceiro, ou a equação do tempo.

Sejam S' o Sol verdadeiro, S'' o Sol medio, e S''' o Sol equatorial, todos projectados no equador.

Desde os equinoccios até os solsticios vai S'' adiante de S'''; e o contrario desde os solsticios até os equinoccios. Desde o perigeu até o apogeu vai S' adiante de S''; e o contrario desde o apogeu até o perigeu.

Temos assim os sóes na ordem seguinte:

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{Perigeu}\ldots\ldots S''S' & \text{Equinoccios}\ldots\ldots S''S''' \\ \text{Apog}\ldots\ldots\ldots S'S'' & \text{Solsticios}\ldots\ldots S'''S'' \end{array}\right\}$$

113. Calculando o maximo valor de $S'''-S''$ (n.º 103) pela formula

$$\tang\,(S'''-S'')=\frac{1-\cos\omega}{2\sqrt{\cos\omega}},$$

e suppondo, $\omega=23^\circ.27'.25''$,

acha-se o maximo afastamento que podem ter os dois sóes,

$$S'''-S''=2^\circ.28'.13''.0,$$

o qual tem logar, quando são

$$\tang S''=\cot S'''=\sqrt{\cos\omega},$$

isto é, quando são

$$S'' = 43°45'53'',5 \text{ e } S''' = 46°14'6'',5.$$

Mas a maxima equação do centro 1°55'18'',3, ainda que tivesse logar em uma epocha tal que 'nella o Sol medio e o Sol verdadeiro ficassem equidistantes do solsticio, apenas daria para o maximo afastamento de S' e S'',

$$\text{tang} \frac{(S' - S'')}{2} = \frac{\text{tang } 57' \, 3''9,2}{\cos \omega}, \quad S' - S'' = 2°5'41'',5$$

menor que o maximo afastamento de S'' e S'''. Logo entre cada equinoccio e o solsticio immediato deve sempre haver algum tempo em que S''' não esteja entre S'' e S'.

114. Attendendo ao que fica dicto nos dois numeros precedentes, vê-se que tem actualmente logar para todo o anno o seguinte quadro, no qual estão collocados os tres sóes segundo a sua ordem de precedencia, e se designam pelos numeros (0) os quatro casos em que S' deve encontrar S''', isto é, em que deve ser nulla a equação do tempo:

Perig.	$S''' S'' S'$	$-$	
Eq. da Prim.	$S'' S''' S'$		
		(0)	15 de abril
	$S'' S' S'''$	$+$	
		(0)	14 de junho
Solst. do Estio	$S''' S'' S'$	$-$	
Apogeu	$S''' S' S''$		
		(0)	31 de agosto
Eq. do Outomno	$S' S'' S'''$	$+$	
Solsticio do Inverno	$S' S''' S''$		
		(0)	24 de dezembro
Perig.	$S''' S'' S'$	$-$	

Temos pois a equação do tempo: negativa e crescente desde 24 de dezembro até 11 de fevereiro seguinte, em que toca o maximo negativo -14^m31^s: negativa e decrescente desde 11 de fevereiro até 15 de abril, em que é nulla: positiva e crescente desde 15 de abril até 13 de maio, em que toca o maximo positivo $+3^m53^s$: positiva e decrescente desde 13 de maio até 14 de junho, em que é nulla pela segunda vez: negativa e crescente desde 14 de junho até 26 de julho, em que toca o maximo negativo -6^m13^s: negativa e decrescente desde 26 de julho até 31 de agosto, em que é nulla pela terceira vez: positiva e decrescente desde 31 de agosto até 3 de novembro, em que toca o maximo positivo, e absoluto, $+16^m18^s$: e finalmente positiva e decrescente desde 3 de novembro até 24 de dezembro, em que é nulla pela quarta vez.

O que dá o seguinte quadro:

Maximo neg.	-14^m31^s	11 de fevereiro
Nulla	(0)	15 de abril
Maximo pos.	$+\ 3\ 53$	13 de maio
Nulla	(0)	14 de junho
Maximo neg.	$-\ 6\ 13$	26 de julho
Nulla	(0)	31 de agosto
Maximo posit., absol.	$+16\ 18$	3 de novembro
Nulla	(0)	24 de dezembro.

CAPITULO XI

Formação das taboas astronomicas

115. A longitude do perigeu no instante da passagem do Sol por este ponto (n.º 93) é a do Sol medio no mesmo tempo, segundo a convenção que definiu o logar d'aquelle astro ficticio (n.º 104).

Se á longitude assim determinada ajunctarmos o movimento medio durante o intervallo de tempo decorrido desde o instante da passagem pelo perigeu até o principio do anno seguinte; e se á longitude do perigeu no mesmo instante accrescentarmos o movimento d'este ponto durante aquelle intervallo; teremos a longitude media do Sol, e a longitude do perigeu, no principio do anno.

Estas longitudes no principio do anno, que são o ponto de partida das taboas astronomicas, chamam-se: as *epochas*.

116. Em algumas taboas astronomicas as epochas correspondem ao instante do meio dia; em outras ao da meia noite: em umas ao dia 31 de dezembro do anno precedente, nos annos communs; e ao 1.º de janeiro do proprio anno, nos bissextos: e na maior parte das que actualmente servem, sempre ao 1.º de janeiro; havendo então duas taboas de movimentos desde a epocha, uma para os annos communs, outra para os bissextos, do mez de fevereiro por diante.

Em quanto á origem das anomalias, contam-se do perigeu em umas taboas, e do apogeu em outras. A primeira d'estas contagens substituiu a segunda, que era geralmente adoptada, para comprehender os cometas.

117. Nas taboas do Sol arranjadas pelo sr. J. Monteiro da Rocha as anomalias contam-se do perigeu; as epochas correspondem ao meio dia medio do 1.º de janeiro no meridiano do Observatorio de Coimbra; e os movimentos medios decompõem-se nos que têem logar desde o 1.º dia de janeiro até o 1.º dia do mez, e desde o 1.º dia do mez até o dia, as horas, os minutos e os segundos, para os quaes se querem a longitude media, a anomalia media, e os argumentos das perturbações.

As taboas que dão estas quantidades medias, isto é, que dão a parte $\varepsilon + nt$ da formula (12) do n.º 23, e os argumentos da equação do centro, do raio vector elliptico, e das perturbações, são as I até VII.

118. Tendo determinado a longitude media, a longitude do perigeu, e os argumentos das perturbações, por meio das taboas que dão as epochas e os movimentos medios, formaremos as taboas da equação do centro Q, da parte elliptica da expressão do raio vector, e das perturbações.

119. As taboas da equação do centro, e do raio vector elliptico, são formadas com o argumento anomalia media $=$ A, pelas formulas (*):

$$Q = \begin{cases} \left(2e - \frac{1}{4}e^3 + \frac{5}{96}e^5\right)\text{sen } A + \left(\frac{5}{4}e^2 - \frac{11}{24}e^4\right)\text{sen } 2A \\ + \left(\frac{13}{12}e^3 - \frac{43}{64}e^5\right)\text{sen } 3A + \frac{103}{96}e^4 \text{ sen } 4A + \frac{1097}{960}e^5 \text{ sen } 5A, \end{cases}$$

$$r = \begin{cases} 1 + \frac{1}{2}e^2 - \left(e - \frac{3}{4}e^3 + \frac{5}{192}e^5\right)\cos A - \left(\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{3}e^4\right)\cos 2A \\ -\left(\frac{3}{8}e^3 - \frac{45}{128}e^5\right)\cos 3A - \frac{1}{3}e^4 \cos 4A - \frac{125}{384}e^5 \cos 5A. \end{cases}$$

Advertindo que, tanto 'nestas taboas, como nas das perturbações, se costumam ajunctar constantes, que tornam sempre positivas as funcções respectivas, e cuja somma se tira, por compensação, no fim do calculo, ou previamente das longitudes medias.

Taes são as taboas IX e X do sr. Monteiro.

120. Da variação secular da excentricidade e, ou da variação secular da maxima equação do centro E, que está ligada com e pela relação

$$e = \frac{1}{2}\left(\frac{E}{R''}\right) - \frac{11}{768}\left(\frac{E}{R''}\right)^3 - \frac{587}{983040}\left(\frac{E}{R''}\right)^5 - \frac{40583}{2642411520}\left(\frac{E}{R''}\right)^7,$$

(*) Nas taboas de Delambre aproveitam-se os termos até o em e^4; nas de Hansen até o em e^5.

resultam as variações seculares de Q e r, que se inscrevem nas respectivas taboas ao lado de cada funcção.

A variação secular de E, para o numero t de annos julianos, desde 1750, dá (Mec. Cel. t. 3.° pag. 157)

$$\delta E = - t . 0'',171793 - t^2 . 0'',0000068194.$$

121. As perturbações da longitude e do raio vector dependem das massas da Lua e dos planetas perturbadores, e das posições d'estes corpos e da terra.

Os planetas, a cuja acção mais importa attender, pela sua massa e pela sua distancia á terra, são Venus, Marte, Jupiter e Saturno.

Nas taboas do sr. Monteiro aproveitam-se unicamente os termos principaes das perturbações que dependem dos argumentos formados por combinações da longitude media da terra com as longitudes medias da Lua, de Venus, de Marte e de Jupiter; argumentos que 'nessas taboas têem os titulos de B, C, D, E, F, G, H, I, K, e dão as perturbações na taboa XI (*).

122. A somma da longitude media (n.° 117) com a equação do centro (n.os 119 e 120), e com as perturbações da longitude (n.° 121), dá a longitude verdadeira referida ao equinoccio medio.

A somma da distancia elliptica (n.os 119 e 120) com as perturbações da distancia (n.° 121) dá a distancia verdadeira.

123. As taboas, em que se acham as coordenadas do Sol com exactidão de segundos, devem ainda conter a sua latitude.

A latitude, que não chega a 0'',9, depende tambem das posições dos planetas e da terra; mas o seu termo mais importante é proporcional ao seno da differença entre as longitudes da Lua e do nodo da orbita lunar.

As taboas solares, que hoje se reputam mais exactas, são as de Leverrier.

As de Hansen, cujos resultados pouco differem dos d'aquellas, têm uma disposição engenhosa que facilita consideravelmente o calculo.

(*) A analyse das taboas solares do Sr. Monteiro, e das modificações que ellas exigem em virtude das correcções indicadas por Bessel para as taboas de Delambre, pode ver-se no *Calculo das Ephemerides de Coimbra*, publicado em 1849.

CAPITULO XII

Do movimento da terra, e das suas consequencias

124. Vimos na primeira parte que o movimento diurno apparente dos astros se podia e devia explicar pelo movimento de rotação da terra.

O movimento annuo do Sol e as suas consequencias egualmente se podem explicar pelo movimento annuo de translação da terra.

Quando suppomos que a terra se move, os phenomenos passam-se como sendo real o movimento do Sol: se a velocidade de translação da terra é egual á apparente do Sol; se o eixo medio dos pólos, conservando a sua inclinação constante sobre a ecliptica, gyra em volta do eixo da ecliptica com uma velocidade egual á precessão dos equinoccios; e se o eixo apparente gyra em torno do medio em uma ellipse, conformemente com as leis da nutação.

125. A illuminação e o aquecimento da terra nas diversas estações serão os mesmos, quer se supponha que a collocação do Sol nas respectivas posições relativamente ao equador é devida ao movimento d'este astro, quer se supponha que é devida ao movimento da terra. É o que mostram claramente as figuras (Fig. 11 e 12).

Com effeito, se o Sol se movesse na ecliptica, achar-se-hia nos dois solticios na direcção dos raios CT, CT′ (Fig. 11); e os seus raios cairiam a prumo nos pontos T, T′ dos tropicos, cujas verticaes o encontrassem.

Na hypothese do movimento da terra, esta, seis mezes depois de estar na posição que indica a figura 11, passará á posição da figura 12, na qual o eixo AB se conserva parallelo, e está no plano ΘAB da figura 11: portanto na figura 12 o raio CT′ ficará opposto a CT; e os pontos T, T′ dos tropicos receberão a luz solar a prumo como acontecia na hypothese da immobilidade da terra (Fig. 11).

Similhantemente se podem comparar nas duas hypotheses as explicações da illuminação e do aquecimento no equador, e nos diversos parallelos.

Como a parte illuminada da terra é separada da escura pelo plano tirado pelo centro d'este corpo perpendicularmente ao seu raio vector, as diversas posições do Sol (n.os 42 e 43), combinadas com o movimento da rotação diurna da terra, mostram como se faz na superficie a distribuição da luz e do calor (Fig. 13 a 18).

126. A precessão dos equinoccios e a differença entre o anno tropico e o anno sideral explicam-se egualmente bem.

Se no equinoccio da Primavera o Sol está na direcção TQS da linha dos equinoccios (Fig. 19); se a terra se move depois na ecliptica no sentido TOO′; e se a linha dos equinoccios vai retrogradando em volta do eixo dos polos, de sorte que no fim do anno tropico tome a direcção T′Q′S, em que torna a acontecer o mesmo equinoccio: o angulo STS′=TST′ será a precessão annua dos equinoccios; e a terra deverá ainda percorrer este angulo, para que se complete o anno sideral; ou antes, deverá percorrer um angulo egual ao movimento de precessão durante o anno sideral.

127. Os dois movimentos de translação e de rotação da terra são uma consequencia muito simples das leis da Mechanica. Para que elles tenham logar basta que a terra recebesse primitivamente uma ou muitas impulsões, cuja resultante não passasse pelo seu centro de gravidade.

Então é sabido que o movimento de translação seria o mesmo que se as forças fossem transportadas ao centro de gravidade parallelamente a si mesmas; e o movimento de rotação o mesmo que se o centro de gravidade estivesse fixo.

128. Em quanto á rotação vimos na primeira parte (n.os 176 a 173) que não só a analogia e as considerações geologicas a tornavam muito verosimil, mas que provas directas demonstram a sua verdade.

Em quanto á translação da terra, não só a analogia, e a consideração da pequenez da terra relativamente ao Sol a tornam verosimil, mas adiante veremos que o phenomeno da aberração da luz estabelece directa e concludentemente a sua realidade.

CAPITULO XIII

Utilidade da theoria do Sol na Chronologia

129. Seja O a medida d'um phenomeno astronomico, dado por uma observação antiga, ou deduzido d'essa observação; e t o tempo, a que elle corresponde. E supponhamos que se conhece a relação analytica

$$O = ft \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (a),$$

que liga o phenomeno com o tempo.

Se for dado o tempo, a que anda attribuida a observação, e quizermos verificar a exactidão d'essa data, calcularemos O pela equação (a), e veremos se o resultado do calculo é conforme com o da observação.

Se for dado o phenomeno observado, e quizermos determinar o tempo da observação, resolveremos em ordem a t a equação (a).

130. Para exemplo do grande auxilio que as provas astronomicas prestam ás investigações chronologicas, extrahiremos do n.º 421 do tomo 4.º da Astronomia de Biot a discussão de duas observações antiquissimas, que os missionarios citam como achadas nos livros chinezes, e feitas na cidade de Lo-yang.

A primeira d'estas observações foi feita por Tcheou-Koung, que, segundo os calculos de Freret e do P. Gaubil, vivia no anno de 1100 antes da era christã. Segundo ella, a sombra projectada ao meio dia, no solsticio de verão, por um gnomon de 8^p era de $1^p,5$.

A segunda observação, feita no solsticio do inverno pelo mesmo principe, e com o mesmo gnomon, deu-lhe a sombra meridiana de 13^p.

Chamando pois z_1, z'_1 as distancias zenithaes do bordo superior do Sol dadas pelas duas observações; d, d', os semidiametros do Sol; $r-p$

$r'-p'$, as refracções menos as parallaxes; z, z' as distancias zenithaes verdadeiras do centro: e suppondo que $0^m,76$ e $+25°$ são a pressão e a temperatura que convém mais provavelmente ao nivel de Lo-yang e ao solsticio: teremos

$$\operatorname{tg} z_1 = \frac{1,5}{8},\ \operatorname{tg} z'_1 = \frac{13}{8}.$$

Logo

$$\begin{array}{lr@{\qquad}lr}
z_1 \ldots = & 10°.37'.10'',77 & z'_1 \ldots = & 58°.23'.33'',00 \\
r-p = & 9\ ,04 & r'-p' = & 1\ 26\ ,78 \\
d \ldots = & 15\ .47\ ,70 & d' \ldots = & 16.14\ ,03 \\
\hline
z \ldots = & 10\ .53\ .\ 7\ ,51 & z' \ldots = & 58\ .41\ .13\ .81
\end{array}$$

D'onde resultam

Latitude de Loy-ang . . . . $\dfrac{z+z'}{2} = 34°.47'.10'',66,$

Obliquidade da ecliptica em 1100. . . . . $\dfrac{z'-z}{2} = 23°.54.\ 3\ ,15.$

131. Em quanto á latitude, tres observações feitas pelos missionarios em Ho-non-fou, que, segundo todos elles, era antes Lo-yang, deram-lhes:

$$\begin{array}{r}
\left\{\begin{array}{l} 34°.52'.\ 8'' \\ 34\ .46.15 \\ 34\ .43.15 \end{array}\right. \\
\hline
\text{Meio} \ldots\ 34\ .47.13
\end{array}$$

que differe menos de 3'' da que dão as duas observações do gnomon.

Em quanto á obliquidade, a expressão de (ω) do n.º 52 dá, para

$t = -(1750 + 1100) = -2850$, o valor $(\omega) = 23°.51'.58'',03$, que differe menos de $2'.6''$ do que dão as duas observações do gnomon.

Esta coincidencia prova a veracidade das duas observações referidas pelos missionarios, que alguns auctores quizeram pôr em duvida. Com effeito, se os missionarios podiam arranjar falsas observações chinezas de modo que $\frac{z+z'}{2}$ fosse a latitude que lhes deram as suas proprias observações, não podiam forjal-as de modo que dessem a obliquidade $\frac{z'-z}{2}$ na epocha anterior de 2850 annos ao anno 1750; porque em 1712, quando estes missionarios observaram a latitude de Lo-yang, nem ainda se tinha por bem averiguado se a obliquidade era variavel, ou se era constante.

CAPITULO XIV

Da rotação do Sol

132. Observam-se muitas vezes no Sol manchas escuras de forma irregular, que, depois de se mostrarem como filetes no bordo oriental do astro, parecem percorrer o seu disco, com um periodo de arredondamento e outro de achatamento gradual, até que, no fim de quasi 14 dias, desapparecem do bordo occidental, tendo voltado á primeira figura de filetes.

Estes phenomenos explicam-se pela esphericidade do Sol e pela sua rotação de occidente para oriente, cujas circumstancias vamos estudar.

133. Na primeira parte vimos como, ou por observações absolutas, ou por observações differenciaes, se podem determinar as ascensões rectas e as declinações do centro do Sol e das manchas; e tambem como d'estas coordenadas se podem deduzir as longitudes e as latitudes geocentricas.

A fim de tornar mais facil o estudo de que tractamos, passemos das coordenadas geocentricas das manchas para as heliocentricas, isto é, referidas ao centro do Sol. A circumstancia de ser a distancia das manchas ao centro do Sol egual ao raio d'este astro facilita a passagem.

134. Sejam T, S, M, m os centros da terra e do Sol, a mancha, e a projecção d'esta na ecliptica.

E chamemos (Fig. 20):

$$\gamma TS = \Theta \text{ a longitude do Sol,}$$

$$\gamma Tm = l \text{ a longitude geocentrica da mancha,}$$

$$MTm = \lambda \text{ a latitude geocentrica da mancha,}$$

$$\gamma' ST = \eth \text{ a longitude heliocentrica da terra,}$$

$\gamma' \mathrm{S}m = l'$ a longitude heliocentrica da mancha,

$\mathrm{MS}m = \lambda'$ a latitude heliocentrica da mancha,

$\mathrm{ST} = \mathrm{R}$ a distancia do Sol á terra,

Semid. apparente do Sol $= \Delta$,

$\mathrm{SM} = r = \mathrm{R} \operatorname{sen} \Delta$ o raio do Sol.

Nos triangulos MTS, MT*m*, ST*m*, SM*m*, dos quaes o segundo e o quarto são rectangulos, conhecem-se, ou primitivamente, ou por deducção successiva, as partes: MS, ST, MTS; MT, MT*m*; *m*T, TS, *m*TS; S*m* ou M*m*, SM. E deduzem-se d'elles as equações que servem para resolver o problema:

SMm STM

$$\cos \mathrm{T} = \cos(l - \Theta) \cos \lambda, \ \operatorname{sen}(\mathrm{S} + \mathrm{T}) = \frac{\mathrm{R}}{r} \operatorname{sen} \mathrm{T},$$

STM MSm MTm

$$\mathrm{MT} = \frac{r \operatorname{sen} \mathrm{S}}{\operatorname{sen} \mathrm{T}}, \ \mathrm{MT} \operatorname{sen} \lambda = r \operatorname{sen} \lambda',$$

TSm mST

$$\operatorname{sen}(\text{☊} - l') = \frac{\mathrm{MT} \cos \lambda}{r \cos \lambda'} \operatorname{sen}(l - \Theta), \ \cos(\text{☊} - l') = \frac{\cos \mathrm{S}}{\cos \lambda'},$$

que dão as formulas:

$$\left\{\begin{array}{l} \cos \mathrm{T} = \cos(l - \Theta) \cos \lambda, \ \operatorname{sen}(\mathrm{S} + \mathrm{T}) = \dfrac{\operatorname{sen} \mathrm{T}}{\operatorname{sen} \Delta}, \\[2ex] \operatorname{sen} \lambda' = \dfrac{\operatorname{sen} \mathrm{S} \operatorname{sen} \lambda}{\operatorname{sen} \mathrm{T}}, \ \operatorname{sen}(\text{☊} - l') = \dfrac{\operatorname{sen} \mathrm{S} \operatorname{sen}(l - \Theta) \cos \lambda}{\operatorname{sen} \mathrm{T} \cos \lambda'}, \\[2ex] \cos(\text{☊} - l') = \dfrac{\cos \mathrm{S}}{\cos \lambda'}, \ l' = \text{☊} - (\text{☊} - l') = 180° + \Theta - (\text{☊} - l') \end{array}\right.$$

Mas, como $l-\Theta$ e λ são angulos muito pequenos, que não passam de $16'$, estas formulas podem ainda simplificar-se na practica, e reduzir-se a:

$$\begin{cases} T^2=(l-\Theta)^2+\lambda^2, \ \operatorname{sen}(S+T)=\dfrac{T \operatorname{sen} 1''}{\operatorname{sen}\Delta}, \\ \operatorname{sen}\lambda'=\dfrac{\lambda \operatorname{sen} S}{T}, \ \operatorname{sen}(\mathring{\sigma}-l')=\dfrac{(l-\Theta)\operatorname{sen} S}{T\cos\lambda'}, \\ \cos(\mathring{\sigma}-l')=\dfrac{\cos S}{\cos\lambda'}, \ l'=180^\circ+\Theta-(\mathring{\sigma}-l'). \end{cases}$$

O ponto onde está a mancha deve ser mais proximo de nós que o opposto na superficie do Sol; e porisso, d'entre os dois valores de $S+T$ que dá a segunda equação, devemos escolher o que fizer mais pequeno o valor de $\operatorname{sen} S$.

135. Calculadas as longitudes e latitudes heliocentricas das manchas, podemos deduzir d'ellas as coordenadas angulares referidas ao eixo de rotação do Sol, ao seu equador, e ao nodo ascendente d'este sobre a ecliptica, do qual chamaremos Ω a longitude heliocentrica.

A segunda das formulas (2) do n.º 18 da primeira Parte, suppondo 'nella:

$a=l'-\Omega$
$b=\lambda'$
$i=$ inclinação do equador solar sobre a ecliptica,
$\alpha=$ AR da mancha contada do nodo sobre o equador solar,
$\beta=$ a sua declinação relativamente ao mesmo equador, a qual é constante para todas as posições de cada mancha:

dá

$$\operatorname{sen}\beta=\operatorname{sen}\lambda'\cos i-\operatorname{sen}(l'-\Omega)\cos\lambda'\operatorname{sen} i$$

$$=\operatorname{sen}\lambda'\cos i+\cos\lambda'\cos l'\operatorname{sen}\Omega\operatorname{sen} i-\cos\lambda'\operatorname{sen} l'\cos\Omega\operatorname{sen} i,$$

que, fazendo

$$\frac{r \operatorname{sen} \beta}{\cos i} = \mathrm{C}, -\operatorname{tang} i \operatorname{sen} \Omega = \mathrm{A}, \operatorname{tang} i \cos \Omega = \mathrm{B},$$

$$r \operatorname{sen} \lambda' = z,\ r \cos l' \cos \lambda' = x,\ r \operatorname{sen} l' \cos \lambda' = y,$$

toma a forma

$$z = \mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C}.$$

Esta equação é a do plano do parallelo da mancha; e x, y, z são as coordenadas rectangulares da mancha referidas á linha dos equinoccios, á dos solsticios, e ao eixo da ecliptica, que se cortam no centro do Sol.

136. Reunindo muitas observações da mesma mancha, para cada uma das quaes se calcularão l', λ', como fica dicto, poderemos applicar-lhes o methodo das equações de condição, ou o dos menores quadrados, na determinação de A, B, C.

Depois as equações

$$\operatorname{tang} \Omega = -\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}, \operatorname{tang} i = \sqrt{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2},$$

darão Ω e i, isto é, a posição do equador solar.

Para cada mancha, o valor de C é a distancia do centro do Sol ao ponto onde o seu parallelo corta o eixo da ecliptica, e β é a declinação do parallelo.

Para cada posição da mancha, a primeira das equações (18) do n.° 2 da primeira parte,

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{\operatorname{sen}(l' - \Omega) \cos i + \operatorname{tang} \lambda' \operatorname{sen} i}{\cos(l' - \Omega)},$$

dará a sua AR referida ao equador solar e ao nodo.

137. Sejam α, α', duas d'estas ascensões rectas d'uma mancha, e t, t', os tempos correspondentes.

Suppondo o movimento de rotação uniforme, a formula

$$\Theta = (t' - t) . \frac{360^\circ}{\alpha' - \alpha}$$

dará o tempo periodico da rotação do Sol.

Mas, porque os movimentos de translação da terra e de rotação do Sol são ambos de occidente para oriente, a revolução apparente ou synodica das manchas resulta da differença d'aquelles movimentos, e porisso é maior que a revolução periodica.

Uma mancha projectada na direcção do centro do Sol tornaria a projectar-se na mesma direcção no fim do seu tempo periodico, se a terra não tivesse movimento em longitude. Seja $\delta l = 360^\circ . \frac{\Theta}{365{,}25637}$ o movimento da terra em longitude siderica durante o tempo periodico. O movimento synodico da mancha no tempo Θ, foi $360^\circ - \delta l$; conseguintemente, se chamarmos Θ' a revolução synodica, será

$$\Theta' = \Theta . \frac{360^\circ}{360^\circ - \delta l}.$$

138. Combinando muitas observações de 29 manchas, M. Laugier concluiu que o periodo da rotação do Sol é $25^d{,}34$; e que em 1840 a inclinação do equador solar sobre a ecliptica era $i = 7^\circ 9' 12''$, e a longitude do nodo $\Omega = 75^\circ . 8'$. Donde a revolução synodica de $27^d{,}23$.

Pela discussão de onze observações referidas por Lalande, achou Delambre numeros não muito differentes d'estes; e tambem não differem consideravelmente d'elles os que M. Faye recentemente deduziu das observações de M. Carrington e H. Spoerer.

Constituição physica do Sol

139. Alem da sombra que constitue a parte interna das manchas, ha algumas vezes em volta d'ella uma penumbra menos carregada, e outras vezes a penumbra sómente; ao lado d'estas umas porções mais luminosas, a que se deu o nome de *faculas;* e em outras regiões uma especie de rugas brilhantes, que se chamaram *luculos.*

Outro phenomeno notavel é que nos eclipses totaes do Sol, além da coroa luminosa que cerca este astro, se apresentam protuberancias coradas de differentes formas, e ás vezes como nuvens destacadas do disco solar.

Tem-se proposto diversas explicações d'estes phenomenos, as quaes não passam de hypotheses mais ou menos plausiveis. Diremos qual é hoje a mais seguida.

Suppõem-se o nucleo do Sol um corpo espherico escuro, solido ou liquido; e em volta d'elle tres atmospheras: a mais interior opaca e reflectora; a media gazosa e luminosa, chamada *photosphera;* a externa transparente.

As aberturas feitas nas duas primeiras explicam, por sua grandeza relativa e pela condensação dos bordos, a sombra, a penumbra e as faculas; os movimentos na segunda explicam os luculos; e finalmente as nuvens fluctuantes na terceira explicam o phenomeno, de que acabamos de fallar, observado nos eclipses totaes do Sol.

Luz Zodiacal

140. Observa-se, principalmente depois do occaso do Sol na proximidade do equinoccio da primavera, e antes do nascimento do Sol na proximidade do equinoccio do outomno, um fuso luminoso, chamado luz *zodiacal*, que semelha em intensidade a da via lactea, mas tirante na base a rosea-amarellada, e que se extende de sobre o horizonte, figurando um triangulo cujo vertice está a grande distancia.

O eixo da luz zodiacal parece passar pelo centro do Sol; e o seu plano coincidir, exacta ou proximamente, com a ecliptica.

Se esta luz provém d'uma zona de vapores abandonados primitivamente pelo Sol quando se condensou, se de corpos que circulam em volta do Sol, não se pode ainda saber; mas o que parece averiguado é que o phenomeno tem uma relação necessaria com a posição do Sol.

NOTA 1.ª

Sobre os climas

141. Quando o Sol está no horizonte, é

$$\cos P = -\cot D \cot \Delta.$$

No maior dia, que tem logar quando é $\Delta = 90° - \omega$, será

$$\cot D = -\cos P \cot \omega.$$

Se quizermos pois que a duração d'elle seja $12^h + 2k$, isto é, que seja então

$$P = 15\,(6^h + k) = 90° + 15k,$$

deverá ser $$\cot D = \cot \omega \operatorname{sen} 15k.$$

142. Quando $D = 90$, é $k = 0$, ou o dia de 12^h.
Quando o Sol toca o horizonte na sua passagem inferior, é $P = 180°$, ou $\frac{P}{15} = 12$, e por conseguinte o dia de 24^h. E no parallelo, onde isso

tem logar, é

$$15k = 90^\circ, \text{ ou } D = \omega.$$

Assim, entre $D = 90^\circ$ e $D = \omega$, a duração do maior dia fica entre 12^h e 24^h.

143. Os parallelos, em que os maiores dias variam meia hora, dividem este intervallo em 24 *climas*.

Portanto, fazendo

$$k = 15^m.i \text{ ou } 15k = 3^\circ 45'.i = hi,$$

o parallelo, que termina o clima i, será dado pelas formulas:

$$h = 3^\circ 45', \cot D = \cot \omega \operatorname{sen} hi.$$

144. Desde $D = \omega$ até $D = 0$, o Sol deixa por algum tempo de mergulhar-se no horizonte na passagem inferior.

Quando está no horizonte na passagem inferior, é (Fig. 21)

$$ZB = D + \Delta = 90^\circ.$$

No parallelo $D = \omega$ tem isto logar, como vimos no (n.º 142), no maior dia do anno, isto é, quando é $\Delta = 90^\circ - \omega$, ou $\Upsilon\Theta = l = 90^\circ$ (Fig. 22).

Nos outros dias do anno serão eguaes os dias correspondentes a $l = 90^\circ \pm p$. E como a mesma figura dá

$$\cos \Delta = \operatorname{sen} \omega \operatorname{sen} l = \operatorname{sen} \omega \cos p,$$

vê-se que, estando o Sol no horizonte, é

$$\operatorname{sen} D = \operatorname{sen} \omega \cos p.$$

145. Desde $l = 90° - p$ até $l = 90° + p$

o Sol estará sempre sobre o horizonte.

No polo, onde $D = 0$, e por conseguinte $p = 90°$, o Sol estará seis mezes sobre o horizonte, desde $l = 0$ até $l = 180°$.

Assim a duração da presença do Sol sobre o horizonte varia de um dia a seis mezes entre $D = \omega$ e $D = 0$.

146. Se dividirmos este intervallo em seis partes, e chamarmos m o movimento diurno do Sol, será no fim de cada uma d'ellas

$$p = 15mi',$$

e porisso $$\operatorname{sen} D = \operatorname{sen} \omega \cos 15mi',$$

onde m se pode tomar por 1°.

147. Dividindo pois o hemispherio boreal em 24 climas desde $D = 90°$ até $D = \omega$, e em 6 desde $D = \omega$ até $D = 0$, a primeira das formulas

$$\cot D = \cot \omega \operatorname{sen} (3°45'.i) \ldots\ldots (1),$$

$$\operatorname{sen} D = \operatorname{sen} \omega \cos (15mi') \ldots\ldots (2),$$

dará os parallelos que terminam os primeiros, desde $i = 1$ até $i = 24$; e a segunda dará os parallelos que terminam os segundos, desde $i' = 1$ até $i' = 6$.

Nos primeiros o maior dia variará de meia hora de clima para clima. Nos segundos a duração da presença do Sol sobre o horizonte variará de um mez de clima para clima.

148. Fazendo o mesmo no hemispherio austral, ficará a terra dividida em 60 climas, dos quaes 12 são entre os polos e os circulos polares; e os outros 48 entre os circulos polares e o equador.

NOTA 2.ª

Sobre o minimo crepusculo

149. A grandeza e as circumstancias do crepusculo dependem da equação

$$4(\cos^2\Delta\cos^2 D+\cos\Delta\cos D \operatorname{sen} a)\operatorname{sen}^2\tfrac{1}{2}c+\operatorname{sen}^2 a-\operatorname{sen}^2\Delta\operatorname{sen}^2 D\operatorname{sen}^2 c=0,$$

que resulta da eliminação de P entre as duas do n.º 48.

150. Quando na passagem pelo meridiano inferior a distancia do Sol ao horizonte é menor que o abaixamento crepuscular a, o crepusculo abrange toda a noite, de sorte que não ha intervallo de trevas entre os crepusculos da tarde e da manhan. Mas quando o crepusculo diminue, toca um minimo que vamos determinar.

151. Para evitar a resolução de equações, differenciemos em ordem a Δ as duas do n.º 48,

$$\cos P=\cot\Delta\cot D,\ \cos(P+c)=-\frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen}\Delta\operatorname{sen} D}-\cot\Delta\cot D,$$

tomando P e c por variaveis dependentes; façamos $\delta c=0$; e dividamos a segunda equação differencial pela primeira. Resultará

$$\frac{\operatorname{sen}(P+c)}{\operatorname{sen} P}=\frac{\operatorname{sen} a\cos\Delta+\cos D}{\cos D}.$$

Tirando das mesmas equações do n.° 48 as expressões de

$$2\,\mathrm{sen}^2\tfrac{1}{2}\,P,\ 2\cos^2\tfrac{1}{2}\,P,\ 2\,\mathrm{sen}^2\tfrac{1}{2}\,(P+c),\ 2\cos^2\tfrac{1}{2}\,(P+c),$$

e substituindo em

$$\frac{4\,\mathrm{sen}^2\frac{1}{2}(P+c)\cos^2\frac{1}{2}(P+c)}{4\,\mathrm{sen}^2\frac{1}{2}P\cos^2\frac{1}{2}P}=\frac{\mathrm{sen}^2(P+c)}{\mathrm{sen}^2 P},$$

vem

$$\frac{\mathrm{sen}^2(P+c)}{\mathrm{sen}^2 P}=\frac{[\mathrm{sen}\,a+\cos(\Delta-D)][\mathrm{sen}\,a+\cos(\Delta+D)]}{\cos(\Delta-D)\cos(\Delta+D)}.$$

Finalmente, egualando as duas expressões de $\dfrac{\mathrm{sen}^2(P+c)}{\mathrm{sen}^2 P}$, resulta

$$\frac{\mathrm{sen}^2 a+2\,\mathrm{sen}\,a\cos\Delta\cos D}{\cos^2 D-\mathrm{sen}^2\Delta}=\frac{\mathrm{sen}^2 a\cos^2\Delta+2\,\mathrm{sen}\,a\cos\Delta\cos D}{\cos^2 D},$$

ou $$\mathrm{sen}\,a\cos^2 D+\mathrm{sen}\,a\cos^2\Delta+2\cos\Delta\cos D=0,$$

que dá $$\cos\Delta=\frac{\cos D}{\mathrm{sen}\,a}(-1\pm\cos a):$$

isto é, $$\cos\Delta=-\cos D\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}a;$$

e $$\cos\Delta=-\cos D\cot\tfrac{1}{2}a,\ \text{ou}\ \cos D=-\cos\Delta\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}a.$$

152. Se differenciassemos em ordem a D, e fizessemos $\delta c=0$, achariamos os mesmos resultados.

Vê-se pois que, procurando o minimo crepusculo em ordem a Δ ou em ordem a D, se chega, em ambos os casos, á mesma equação do segundo grau, cujas raizes são

$$\cos\Delta = -\cos D \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}a,\ \cos\Delta = -\cos D \cot\tfrac{1}{2}a;$$

o que procede da symetria das equações propostas relativamente a Δ e D.

153. Da primeira e segunda, e da terceira, das equações do n.º 151 tiram-se:

$$\frac{\cos P - \cos(P+c)}{\cos P + \cos(P+c)} = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}c \operatorname{tang}(P+\tfrac{1}{2}c) = -\frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} a + 2\cos\Delta\cos D},$$

$$\frac{\operatorname{sen}(P+c) - \operatorname{sen} P}{\operatorname{sen}(P+c) + \operatorname{sen} P} = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}c \cot(P+\tfrac{1}{2}c) = \frac{\operatorname{sen} a\cos\Delta}{\operatorname{sen} a\cos\Delta + 2\cos D};$$

e por conseguinte

$$\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}c = -\frac{\operatorname{sen}^2 a\cos\Delta}{(\operatorname{sen} a + 2\cos\Delta\cos D)(\operatorname{sen} a\cos\Delta + 2\cos D)},$$

que, em virtude de $\cos\Delta = -\cos D \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}a$, dá

$$\operatorname{cosec}^2\tfrac{1}{2}c = \frac{2(\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} a \operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}a\cos^2 D - 2\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}a\cos^2 D)}{\operatorname{sen}^2 a \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}a}$$

$$= \frac{2(\operatorname{sen} a - \cos^2 D \operatorname{sen} a)}{\operatorname{sen}^2 a \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}a},$$

ou
$$\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}c = \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}a}{\operatorname{sen} D}.$$

Este valor tambem se deduz d'uma construcção geometrica muito simples, como se pode ver na Astr. de Schubert, t. 1.°, n.° 119.

154. Portanto ambos os systemas

$$\cos\Delta = -\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}a\cos D,\quad \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}c = \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}a}{\operatorname{sen} D},$$

$$\cos D = -\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}a\cos\Delta,\quad \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}c = \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}a}{\operatorname{sen}\Delta},$$

satisfazem ás condições $\frac{\delta c}{\delta\Delta}=0$, $\frac{\delta c}{\delta D}=0$.

Mas, em ordem a Δ, a primeira equação do segundo systema daria

$$\cos^2 D < \cos^2\Delta,\quad \text{ou}\quad \operatorname{sen}^2 D > \operatorname{sen}^2\Delta,\quad \text{e}\quad \frac{\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}a}{\operatorname{sen}^2\Delta} > \frac{\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}a}{\operatorname{sen}^2 D};$$

além de que, deveria ser

$$\cos^2 D\cot^2\tfrac{1}{2}a < \cos^2 66°32',5,$$

isto é, D entre 86°23′ e 93°37′.

Em ordem a D, a primeira equação do primeiro systema daria

$$\cos^2\Delta < \cos^2 D,\quad \text{ou}\quad \operatorname{sen}^2\Delta > \operatorname{sen}^2 D,\quad \text{e}\quad \frac{\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}a}{\operatorname{sen}^2 D} > \frac{\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}a}{\operatorname{sen}^2\Delta};$$

além de que deveria ser

$$\cos^2 \Delta < \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} a,$$

isto é, Δ entre $80°53'$ e $99°7'$.

Por conseguinte, quando se procura o minimo em ordem a Δ, o menor valor é dado pelo primeiro systema; e quando se procura o minimo em ordem a D, o menor valor é dado pelo segundo systema.

Em todo o caso a solução do problema exige que no logar e na occasião, de que se tracta, haja dia e noite (n.° 45).

Finalmente a segunda das formulas relativas ao minimo em ordem a Δ mostra que, no logar cuja colatitude é $D = 90°$, este minimo é menor que em todos os outros logares; e a primeira dá $\Delta = 90°$ para $D = 90°$. O mesmo mostram as formulas do minimo em ordem a D, com a mudança de Δ em D e D em Δ.

Portanto o minimo absoluto do crepusculo tem logar no equador nos dias dos equinoccios; e o seu valor é

$$\frac{c}{15} = \frac{a}{15}.$$

Sobre o problema do minimo crepusculo podem consultar-se a Astronomia de Schubert, t. 1.°, n.os 118 e 119, e a Astronomia de Delambre, t. 1.°, cap 4.°

SECÇÃO SEGUNDA

THEORIA DOS PLANETAS

CAPITULO I

155. O que dissemos na secção primeira predispõe a suppor que os movimentos dos planetas são regulados por leis similhantes ás que presidem ao movimento relativo do Sol. Vamos em seguida estudal-os.

Os planetas, vistos da terra, aparentam, como já notámos, tal irregularidade de movimentos, que umas vezes parecem dirigir-se de occidente para oriente, outras em sentido contrario, e outras emfim não mudar de posição entre as estrellas; isto é, que umas vezes parecem *directos*, outras *retrogrados*, e outras *estacionarios*.

Mas, além d'estas apparencias communs a todos os planetas, ha outras, parte das quaes pertence exclusivamente ao grupo dos que se chamam *inferiores*, e parte ao dos chamados *superiores*. Começaremos por tractar separadamente de cada um d'estes grupos.

I

Planetas inferiores

156. Se, tendo observado pouco depois do pôr do Sol o occaso de Venus, que alguns dias antes não se via, repetirmos a observação nos dias seguintes, vel-o-hemos afastar-se successivamente do Sol, tornando-se mais e mais tempo visivel sobre o horizonte; mas a velocidade do afastamento, depois de crescer por muitos dias, começará a diminuir, e chegará por fim a ser insensivel. Partamos d'esse instante.

Depois de tocar assim o seu maximo desvio e parecer immovel relativamente ao Sol, o planeta começará a approximar-se d'este, até que, passado algum tempo, ficará envolvido nos raios solares, tornando-se invisivel. Mas, decorridos alguns dias, apparecerá de manhã no oriente um pouco antes do Sol; e successivamente antecipará o seu nascimento, até que, no fim d'um intervallo egual ao precedente, se tornará outra vez immovel: apresentando d'este modo entre as duas digressões o movimento synodico regressivo, isto é, de oriente para occidente em relação ao Sol.

De novo se approximará então do Sol, antecipando cada vez menos o nascimento; e, passado algum tempo, envolver-se-ha outra vez nos raios solares. Depois desembaraçar-se-ha d'estes, e continuará, por outro intervallo egual, a apparecer no occidente, retardando cada vez mais o seu occaso sobre o occaso do Sol, até se tornar immovel relativamente a elle: apresentando-se assim como progressivo o seu movimento synodico entre as duas ultimas digressões, isto é, como de occidente para oriente em relação ao Sol.

As maximas elongações, isto é, os maximos desvios angulares relativamente ao Sol, variam de 44°57′ a 47°48′.

157. Na primeira metade do movimento regressivo synodico o planeta, que, visto por um telescopio, começa por apresentar-se quasi semi-

circular, vai cada vez brilhando menos, até se reduzir a um pequeno filete luminoso, e tornar-se por fim invisivel. Na outra metade do mesmo movimento reproduzem-se eguaes circumstancias, mas em ordem inversa.

Na primeira metade do movimento synodico progressivo o planeta, começando por apparecer meio illuminado, como fica dicto, torna-se cada vez mais brilhante, até se apresentar como um circulo em todo o seu explendor. Na outra metade do mesmo movimento repetem-se eguaes apparencias, mas em ordem inversa.

Em todas estas phases, que apresenta o disco do planeta, a convexidade do segmento illuminado fica voltada para a região onde está o Sol, e as pontas do crescente ficam voltadas para a região opposta. Assim, quando o planeta é visivel de tarde, as pontas ficam voltadas para o oriente; e quando é visivel de madrugada, ficam voltadas para o occidente.

158. O semidiametro apparente do planeta cresce na primeira metade do seu movimento regressivo, até se tornar maximo; e diminue, em ordem inversa, na outra metade. Continua a diminuir na primeira metade do movimento progressivo, até ser minimo; e cresce, em ordem inversa, na outra metade.

Os seus valores maximo e minimo tocam os limites $32'',4$ e $4'',7$.

159. As circumstancias do movimento de Venus que ficam descriptas, passam-se como gyrando este corpo em volta do Sol em uma orbita interior á que descreve a terra em volta do mesmo centro. Mas as apparencias seriam as mesmas se o planeta gyrasse em volta do Sol em uma orbita de raio menor que o da orbita solar, e o systema d'elle e do Sol fosse transportado 'nesta ultima orbita.

160. Na segunda supposição o planeta descreveria em volta do Sol S (Fig. 23) a orbita $PP'P''P'''$, e esta orbita seria transportada na ecliptica com o Sol em volta da terra T.

Em P seria maxima a elongação occidental PTS; desde P o planeta approximar-se-ia do Sol, até a conjuncção superior em P'; desde P' afastar-se-ia, até a maxima digressão oriental STP''; depois tornaria a approximar-se até a conjuncção inferior em P'''; e finalmente tornaria a afastar-se até voltar á maxima digressão occidental PTS.

161. Comparando os nascimentos e os occasos do planeta com os das estrellas; ou, mais exactamente, determinando as suas posições successivas no ceu, vistas da terra, por meio das ascensões rectas e declinações, reconhece-se que ha tambem retrogradações, estações, e movimentos directos relativamente ás estrellas.

O periodo da retrogradação de Venus relativamente ás estrellas é 42 dias, parte antes e parte depois da conjuncção inferior; e a elongação, no principio e no fim d'elle, é $28°51'$. O periodo do seu movimento directo relativamente ás estrellas é de 542 dias, parte antes e parte depois da conjuncção superior. Com effeito ha duas posições nas quaes o planeta fica estacionario, para se tornar depois o seu movimento geocentrico de directo em retrogrado e inversamente. É o que mostra a mesma figura, onde se representaram os logares consecutivos P_2 e P_2' do planeta na sua orbita, e os correspondentes S e S' do Sol, na epocha em que o angulo P_2TP_2', nullo em P'' e maximo $>$ STS' em P''' (n.° 185), é egual a STS'; de sorte que o movimento geral em volta de T, que transporta S a S', repõem TP_2' em TP_2, isto é, dá o movimento geocentrico nullo: e o mesmo se pode representar em P_2'', á esquerda de TP'''.

Em quanto ao movimento synodico, de que tractámos no n.° precedente, é: *mov. geoc. pl.* — *mov. sol*, desde P_2'' até P_2; e —(*mov. geoc. pl.* + *mov. sol*), desde P_2 até P_2''. Mas, como a primeira d'estas expressões é negativa desde P_2'' até P e desde P'' até P_2, a digressão synodica é d'occidente para oriente desde P até P'', e d'oriente para occidente desde P'' até P; o que tudo concorda com o que se disse no mesmo numero precedente.

162. Os phenomenos que referimos a Venus, como typo dos planetas inferiores, têm logar para Mercurio, e poderiam explicar-se do mesmo modo. Só ha differença nos numeros que os medem.

Assim, os diametros apparentes d'este planeta tocam o maximo $5'',64$ e o minimo $2'',49$.

A sua maxima elongação varía de $17°36'$ até $28°20'$.

O tempo da sua retrogradação relativamente ás estrellas é 22 dias; e a elongação no principio e no fim d'elle é 18°. O tempo do seu movimento directo é 94 dias.

Em virtude da pequenez das suas elongações, e da inferioridade da sua distancia ao Sol, este astro observa-se com difficuldade; e raras vezes sem auxilio de telescopio.

163. Suppondo as orbitas circulares, podem determinar-se com facilidade os raios d'ellas pelas maximas elongações, e tambem pelos maximos e minimos diametros apparentes.

Sejam (Fig. 23) ρ', ρ, os raios SP,ST, das orbitas de Mercurio ou Venus, e do Sol; E a maxima elongação STP, ou STP''; D' o minimo diametro apparente em P'; e D''' o maximo em P'''.

Das equações

$$\rho'=\rho \operatorname{sen} E,\ \rho' = \rho - TP''',\ \rho' = TP'''.\frac{D'''}{D'} - \rho,$$

resultam as formulas:

$$\rho' = \rho \operatorname{sen} E, \ \rho' = \rho \frac{D''' - D'}{D''' + D'},$$

que determinam ρ', quando se conhece E, ou quando se conhecem D' e D'''.

Applicando estas formulas aos dados precedentes, temos:

$$\text{Mercurio}\begin{cases} E = 22°58', \ D''' = 11'',28, \ D' = 4'',99, \\ \dfrac{\rho'}{\rho} = \operatorname{sen} 22°58' = \dfrac{6,29}{16,27} = 0,39, \end{cases}$$

$$\text{Venus}\begin{cases} E = 46°22', \ D''' = 59'',84 \ D' = 9'',62. \\ \dfrac{\rho'}{\rho} = \operatorname{sen} 46°22' = \dfrac{50,22}{69,46} = 0,72. \end{cases}$$

164. A concordancia d'estes resultados nos quatro pontos P, P', P'', P''' justifica 'nelles a hypothese, que admittimos, de circularidade ou quasi circularidade da orbita.

Para comparar nos outros pontos os diametros apparentes, que dá a observação, com aquelles que se deduzem da hypothese de circularidade da orbita, o triangulo STP_1, fazendo $STP_1 = E_1$, $P_1 T = R_1$, dá

$$\rho'^2 = \rho^2 + R_1^2 - 2\rho R_1 \cos E_1,$$

ou

$$R_1 = \rho \cos E_1 \pm \sqrt{\rho'^2 - \rho^2 \operatorname{sen}^2 E_1}.$$

E porque, chamando R', R''', as distancias TP', TP''', maxima e minima, são

$$\rho = \frac{R' + R''}{2},\ \rho' = \frac{R' - R''}{2},$$

ou

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{R' - R''}{R' + R''} = \frac{D'' - D'}{D'' + D'};$$

e, chamando D_1 o diametro apparente que corresponde á distancia R_1, é

$$\frac{R_1}{\rho - \rho'} = \frac{D''}{D_1}:$$

a eliminação de R_1 dará

$$D_1 = \frac{2D''D'}{(D' + D'')\cos E_1 \pm \sqrt{(D'' - D')^2 - (D'' + D')^2 \operatorname{sen}^2 E_1}}.$$

Para cada elongação E_1, o valor de D_1, calculado por esta formula, deve concordar com aquelle que dá a observação, no caso de ser sensivelmente exacta a hypothese de circularidade da orbita.

Ainda que seja difficil a medição dos diametros apparentes, por causa da sua pequenez, e a da elongação, esta concordancia verifica-se com approximação sufficiente para justificar aquella hypothese.

II

Planetas superiores

165. Observando Marte desde que de madrugada começa a desembaraçar-se dos raios solares, vê-se que de dia para dia se vai antecipando o seu nascimento ao do Sol; e que a antecipação diaria umas vezes é maior, outras menor que a dos nascimentos das estrellas.

O exame attento das circumstancias d'esta antecipação faz conhecer que o planeta umas vezes tem movimento directo, outras movimento retrogrado, e outras é estacionario, relativamente ás estrellas; phenomenos que concordam com os que se observam nos planetas inferiores.

A duração do movimento retrogrado é de 73 dias, e a do movimento directo de 707 dias.

O movimento é directo entre a conjuncção e a distancia angular 136°, tanto para occidente como para oriente d'ella; e é retrogrado no resto da revolução synodica, para oriente e occidente da opposição.

Relativamente ao Sol, o movimento do planeta é sempre regressivo, e por isso o seu nascimento, a sua passagem meridiana, e o seu occaso sempre se antecipam aos do Sol, umas vezes mais, outras menos.

166. Na hypothese do movimento do Sol em torno da terra, explicar-se-iam (Fig. 24) as circumstancias analogas áquellas que similhantemente se explicaram para os planetas inferiores, pelo systema de Tycho-Brahe, suppondo que o planeta se move em volta do Sol 'numa orbita de raio maior que a distancia do Sol á terra, e que esta orbita é transportada com o Sol na orbita solar.

Como o angulo SPT sempre é pequeno em Marte $\left[< \text{arc}\left(\text{sen} = \frac{\rho}{\rho'}\right)\right]$,

e ainda menor nos outros planetas superiores, uma grande parte do hemispherio illuminado pertence sempre ao hemispherio visivel. Por isso o disco de Marte apenas se apresenta ovado quando o angulo P é mais consideravel, o que acontece nas quadraturas; em Jupiter esta deformação é pequenissima; e nos outros é insensivel: como logo melhor se verá.

Veremos que todas as apparencias, que ficam descriptas, se explicam egualmente, e com maior simplicidade, suppondo que tanto os planetas, como a terra, circulam em volta do Sol.

167. Os diametros apparentes dos planetas superiores, minimos na conjuncção e maximos na opposição, são os seguintes (Astr. de Biot, 2.ª ed., § 3.º, pag. 9):

	Minimo	Maximo
De Marte	3″,56	17″,07
De Jupiter	30″,13	44″,485
De Saturno	16,30	20,12
De Urano	3,69	4,11
De Neptuno	2″,7	

168. Com os valores dos diametros apparentes minimo e maximo podemos calcular os raios das orbitas planetarias, suppostas circulares. Porque, usando das denominações precedentes, é (Fig. 24) em P′ e P‴,

$$\frac{TP'}{TP'''}=\frac{D''}{D'}=\frac{\rho'+\rho}{\rho'-\rho},$$

ou

$$\frac{\rho'}{\rho}=\frac{D''+D'}{D''-D'}.$$

Applicando esta formula aos dados do numero precedente, acharemos:

$$\text{Marte}\quad \frac{\rho'}{\rho}=\frac{2063}{1351}=1,53$$

$$\text{Jupiter} \qquad \frac{\rho'}{\rho} = \frac{74{,}615}{14{,}355} = 5{,}20$$

$$\text{Saturno} \qquad \frac{\rho'}{\rho} = \frac{36{,}42}{3{,}82} = 9{,}53$$

$$\text{Urano} \qquad \frac{\rho'}{\rho} = \frac{7{,}80}{0{,}42} = 18{,}57.$$

169. No que dissemos relativamente aos planetas superiores, quando fallámos dos seus movimentos, se vê que as conjuncções e as opposições correspondem respectivamente ás conjuncções superiores e ás conjuncções inferiores dos planetas inferiores; e que todos estes corpos são opacos, tornando-se visiveis pela luz solar que reflectem para a terra.

III

Phases e brilho dos planetas

170. *Phases.* As phases explicam-se suppondo que o planeta é opaco, e que o illumina a luz do Sol.

'Nesta hypothese a parte do disco, que se vê, deve pertencer a ambas as regiões, illuminada e visivel.

A curva de contacto do planeta com o cone circumscripto a elle e ao Sol separa a região illuminada da escura: e a curva do contacto do planeta com o cone circumscripto ao mesmo corpo e á terra separa a região visivel da invisivel. Mas, como os diametros do planeta, do Sol e da Terra são muito pequenos relativamente ás distancias do primeiro d'estes corpos aos outros dois, os cones circumscriptos podem tomar-se por cylindros, sendo então as porções illuminada e visivel separadas respectivamente da escura e da invisivel pelos planos perpendiculares no centro do planeta ás rectas que unem este ponto com os centros do Sol e da Terra.

Todos os phenomenos das phases passam-se de modo que esta explicação lhes é applicavel. Assim, em P''' (Fig. 23) é o planeta invisivel; em P apresenta-se em semicirculo; em P' em circulo inteiro; e em P'' outra vez em semicirculo.

Só ha que descontar os effeitos da irradiação, que faz parecer um pouco maior a parte illuminada, e tanto mais, quanto maior é a porção de luz que recebe.

171. O plano tirado por P (Fig. 25) perpendicularmente a SP separa a parte illuminada *prq* da escura; e o perpendicular a TP separa a parte visivel *rqs* da invisivel. Da terra T sómente se vê a parte *rq*, illuminada e visivel, pelo angulo optico *r*T*q*, que vamos determinar.

É
$$\operatorname{tang} PTq = \frac{qk}{PT - kP} = \frac{r \cos p}{R - r \operatorname{sen} p};$$

designando r o raio do planeta, R a distancia á terra, e p a parallaxe annua SPT.

É tambem $$\operatorname{tang} \mathrm{PT}r = \frac{r}{\mathrm{R}};$$

e finalmente $$r\mathrm{T}q = \mathrm{PT}q + \mathrm{PT}r.$$

Por serem $\mathrm{PT}q$, $\mathrm{PT}r$ pequenos angulos, nunca maiores que o semidiametro apparente do astro $\frac{\mathrm{D}}{2}$, podemos tomal-os pelas suas tangentes:

será pois $$r\mathrm{T}q = \frac{\mathrm{D}}{2}\left(1 + \frac{\cos p}{1 - \operatorname{sen}\frac{\mathrm{D}}{2} \operatorname{sen} p}\right);$$

ou $$r\mathrm{T}q = \frac{\mathrm{D}}{2}(1 + \cos p),$$

desprezando os quadrados de sen $\frac{\mathrm{D}}{2}$.

Nas conjuncções superiores dos planetas inferiores, e nas conjuncções e opposições dos planetas superiores, é $\cos p = 1$; por conseguinte a terra recebe raios luminosos de todo o disco D. Nas conjuncções inferiores dos planetas inferiores é $\cos p = -1$; e por isso o disco todo escuro.

Nos planetas inferiores cresce p desde o na conjuncção superior, até 180° na inferior, e d'ahi até 360° na superior. D'onde resultam as phases respectivas, desde a completa illuminação até á inteira obscuração.

Nos planetas superiores a minima phase é dada pela maxima parallaxe annua,

$$\operatorname{sen} p = \frac{\rho}{\rho'}.$$

D'estas a maior é a relativa a Marte,

$$\operatorname{sen} p = \frac{1}{1{,}52}, \text{ ou } \cos p = 0{,}75,$$

que dá $$q\mathrm{T}r = 1{,}75 \times \frac{1}{2}\,\mathrm{D} = \mathrm{D} - \frac{1}{8}\,\mathrm{D}.$$

Por isso 'neste planeta percebe-se a pequena ellipticidade do disco; mas nos outros superiores, para os quaes é $\cos p$ bem mais proximo da unidade, a ellipticidade é insensivel.

Com effeito o observador vê o semicirculo limite externo (projectado na figura em rP) sobre o plano perpendicular em P a PT; e projecta sobre o mesmo plano o semicirculo limite interno (projectado na figura em Pq). Por conseguinte o contorno exterior apparente é um semicirculo; e o interior é uma semi-ellipse, que tem $r \cos p$ por eixo menor. Quando $\cos p = 1$, esta semi-ellipse é um semicirculo, que com o primeiro completa o circulo; quando $\cos p$ é positivo e < 1, a concavidade da semi-ellipse fica voltada para a do semicirculo; quando $\cos p = o$, a semi-ellipse reduz-se ao semi-eixo maior; quando $\cos p$ é negativo e < 1, a convexidade da semi-ellipse fica voltada para a concavidade do semi-circulo; e finalmente quando $\cos p = -1$, a semi-ellipse torna-se em um semicirculo, que coincide com o exterior, ficando escuro todo o disco.

172. *Brilho.* O maior brilho do planeta não tem logar na conjuncção superior, onde a phase é maxima; porque, se a quantidade de luz

recebida pelo observador é directamente proporcional á phase, tambem é inversamente proporcional ao quadrado da distancia á terra. Esta quantidade é assim proporcional a

$$\frac{1+\cos p}{R^2}=\frac{1+\dfrac{\rho'^2+R^2-\rho^2}{2R\rho'}}{R^2}=\frac{\rho'^2+R^2-\rho^2+2\rho' R}{2\rho' R^3}.$$

A condição do maximo relativamente a R dá

$$R=-2\rho'+\sqrt{3\rho^2+\rho'^2}.$$

Por exemplo, para Venus é $\rho'=0{,}723$, sendo $\rho=1$; o que dá $R=0{,}43$. E a elongação T, dada pela formula

$$\cos T=\frac{R^2+1-\rho'^2}{2R}, \text{ ou } \cos\tfrac{1}{2}T=\sqrt{\frac{(R+1+\rho')(R+1-\rho')}{4R}},$$

é $T=39^\circ\,39'$, para este valor de R correspondente ao maximo brilho do planeta.

IV

Lei de Bode

173. Comparando entre si as distancias de Mercurio, Venus, Terra, Marte, Jupiter e Saturno ao Sol, suspeitou Kepler que existia algum planeta entre Marte e Jupiter; e Bode achou uma lei que sensivelmente as ligava.

Esta lei, desde a distancia de Venus inclusivamente, póde exprimir-se pela formula

$$4 + 3 \, . \, 2^{n-1};$$

devendo n tomar-se desde 1, e sendo unidade a decima parte do raio da orbita terrestre. A distancia do primeiro planeta, Mercurio, é 4.

Por esta formula as distancias seriam as seguintes:

4	7	10	16	28	52	100	196	388.

Ora os raios das orbitas de Mercurio, Venus, Terra, Marte, Ceres, Jupiter, Saturno, Urano, e Neptuno são:

3,9	7,2	10	15,2	27,7	52	95,4	191,8	300,4;

por conseguinte vê-se que os seis primeiros satisfazem á lei quasi exactamente, e o septimo e oitavo com pouca differença.

O nono afasta-se d'ella consideravelmente; mas, se notarmos que o illustre geometra Leverrier, descobridor da existencia d'este planeta, lhe assignara o semi-eixo maior 361,5 bem mais conforme com a lei de Bode, e que é possivel que as perturbações de Urano, attribuidas exclusivamente a Neptuno, não sejam porventura devidas só a elle, abster-nos-hemos de excluir desde já com segurança aquella distancia do numero das que se conformam com a mesma lei.

174. Como acabamos de dizer, o pequeno planeta Ceres, descuberto por Piazzi no principio do anno de 1801, satisfaz á lei de Bode. E tambem a não contradizem os outros 77 planetas telescopicos, que successivamente se têm descuberto até hoje na mesma região.

Adiante daremos a lista d'estes planetas, e faremos conhecer os elementos d'elles que se têm determinado.

175. No estado actual dos nossos conhecimentos sobre o systema do mundo devemos considerar como empirica e fortuita a lei de Bode; mas é possivel que ella seja o resultado de leis harmonicas do universo, para nós ainda incomprehensiveis.

CAPITULO II

Revoluções periodicas dos planetas

176. Sejam, em dias: T a revolução tropica da terra á roda do Sol; T′ a revolução tropica do planeta á roda do Sol, e S a sua revolução synodica. Os movimentos diurnos respectivos serão:

$$\frac{360^\circ}{T},\quad \frac{360^\circ}{T'},\quad \frac{360^\circ}{S}.$$

Nos planetas inferiores é $\frac{360}{T'} > \frac{360^\circ}{T}$,

e $$\frac{360^\circ}{S} = \frac{360^\circ}{T'} - \frac{360^\circ}{T}.$$

Nos planetas superiores é $\frac{360^\circ}{T} > \frac{360^\circ}{T'}$,

e
$$\frac{360°}{S}=\frac{360°}{T}-\frac{360°}{T'}.$$

Por conseguinte:

$$\frac{360°}{T'}=\frac{360°}{T}\mp\frac{360°}{S};$$

tendo logar o signal superior para os planetas superiores, e o signal inferior para os planetas inferiores. D'onde resulta

$$T'=\frac{TS}{S\mp T}\dots\dots(1).$$

177. Sejam: l, l' as longitudes heliocentricas do planeta nas epochas de duas conjuncções ou de duas opposições muito afastadas uma da outra; i o numero de revoluções tropicas, que têm decorrido entre ellas; e t o tempo que separa as duas observações. O movimento em longitude neste intervallo foi $360°.\,i+l'-l$; e por isso é

$$\frac{T'}{t}=\frac{360°}{360°.\,i+l'-l},$$

que dá

$$T'=\frac{360°.\,t}{360°.\,i+l'-l}\dots\dots(2).$$

178. As longitudes l, l' podem obter-se pela observação; ou tambem pelas taboas do Sol, porque nas conjuncções e nas opposições as longitudes heliocentricas do planeta ou coincidem com as da terra ou differem d'ellas 180°.

O numero i acha-se facilmente, suppondo conhecida já com alguma approximação a revolução periodica do planeta.

179. Por exemplo, segundo as observações de Marte na opposição, feitas por Cassini em 1683, e por Santini em 1809, temos:

$$\begin{array}{lr}
1683 \text{ abril, } 11^d0^h11^m \text{ t. m. Paris} & l = 201^\circ 41' 30'' \\
1809 \text{ abril, } 8^d13^h12^m25^s & l' = 198\ 45\ 54{,}9 \\
 & l' - l = -\quad 2\ 55\ 35{,}1
\end{array}$$

O intervallo das observações em dias é $46017^d,54265$; e como a revolução synodica do planeta é proximamente 780^d, o numero de revoluções synodicas neste intervallo é 59. D'onde resulta mais exactamente

$$S = \frac{46017^d,54265}{59} = 779^d,95835.$$

E com este valor de S acha-se (eq. 1)

$$T = \frac{365{,}24225 \times 779{,}95835}{779{,}95835 - 365{,}24225} = 686^d,91267.$$

Dividindo por este valor de T' o intervallo de tempo decorrido entre as duas observações $46017^d,54265$, vê-se que é $i = 67$; e a equação (2) dá

$$T' = \frac{360 \times 46017{,}54265}{360 \times 67 - 2{,}92642} = 686^d,91234.$$

180. Se quizermos a revolução sideral, Θ, e chamarmos p a preces-

são diurna, $p=\dfrac{50'',25}{365}=\dfrac{50^{\circ},25}{365.3600}$, teremos

$$\frac{360^{\circ}}{T'}=\frac{360^{\circ}}{\Theta}+p;$$

o que 'neste exemplo dá

$$\Theta=\frac{360\times T'}{360-pT'}=686^{d},96247$$

(Astron. de Santini, n.^{os} 219 e 220).

181. Advertiremos, como fizemos relativamente ao Sol, que, na determinação dos tempos periodicos e dos movimentos proprios, se devem comparar observações muito distantes, para que os erros d'ellas e os procedentes das desegualdades periodicas não influam sensivelmente nos resultados.

A comparação dos tempos periodicos, assim determinados em epochas muito distantes, mostrará se ha 'nelles variações attendiveis.

182. Se ha taboas do planeta de que se tracta, devem por ellas reduzir-se as longitudes observadas ás medias l, l'. Se não ha taboas de que se possa usar, convirá, quanto for possivel, escolher occasiões em que a reducção seria commum. O que se consegue nas conjuncções e opposições que comprehendem um numero inteiro de annos.

Para isto, e para prever muitos phenomenos astronomicos importantes, convem achar periodos que estabeleçam a concordancia entre os movimentos da terra e dos planetas; isto é, periodos, depois dos quaes a terra e o planeta voltem á mesma posição relativa, e á mesma posição nas suas orbitas.

O que tudo se reduz a exprimir pela razão de dois numeros inteiros a razão dos movimentos annuos do planeta e da terra.

183. Sejam p, s, estes movimentos annuos; e supponhamos que, pelo processo do maior divisor commum, temos as seguintes operações:

$$s\left|\frac{p}{q}\right|\frac{r}{q'}\left|\frac{r'}{q''}\right|\frac{r''}{q'''}\left|\frac{r'''}{q^{IV}}\right|\frac{r^{IV}}{q^{V}}\left|\frac{r^{V}}{\quad}\right.\ldots\ldots$$

Serão:

$$s=pq+r,\ p=rq'+r',\ r=r'q''+r'',\ r'=r''q'''+r''',\ \ldots\ldots$$

Eliminando successivamente r, depois r', depois r''.... resultam:

$$s=pq+r,\ sq'=p\,(qq'+1)-r',$$

$$s\,(q'q''+1)=p\,(qq'q''+q+q'')+r'',$$

$$s\,(q'q''q'''+q'+q''')=p\,(qq'q''q'''+q''q'''+qq'+1)-r''',$$

$$s\left\{\begin{matrix}q'q'q'''q^{\mathrm{IV}}+q'q''+q'q^{\mathrm{IV}}\\ +q'''q^{\mathrm{IV}}+1\end{matrix}\right\}=p\left\{\begin{matrix}qq'q''q'''q^{\mathrm{IV}}+qq'q''+qq'q^{\mathrm{IV}}+qq'''q^{\mathrm{IV}}\\ +q''q'''q^{\mathrm{IV}}+q+q''+q^{\mathrm{IV}}\end{matrix}\right\}+r^{\mathrm{IV}}$$

$$s\left\{\begin{matrix}q'q''q'''q^{\mathrm{IV}}q^{\mathrm{V}}+q'q''q'''\\ +q'q''q^{\mathrm{IV}}+q'q^{\mathrm{IV}}q^{\mathrm{V}}+q''q^{\mathrm{IV}}q^{\mathrm{V}}\\ +q'+q'''+q^{\mathrm{V}}\end{matrix}\right\}=p\left\{\begin{matrix}qq'q''q'''q^{\mathrm{IV}}q^{\mathrm{V}}+qq'q''q'''+qq'q''q^{\mathrm{V}}\\ +qq'q^{\mathrm{IV}}q^{\mathrm{V}}+qq'''q^{\mathrm{IV}}q^{\mathrm{V}}+q''q'''q^{\mathrm{IV}}q^{\mathrm{V}}\\ +qq'+qq'''+qq^{\mathrm{V}}+q''q'''+q''q^{\mathrm{V}}\\ +q^{\mathrm{IV}}q^{\mathrm{V}}+1\end{matrix}\right\}-r^{\mathrm{V}}.$$

Por exemplo, a razão $\dfrac{1660823115}{400008472}$

dos movimentos tropicos de Mercurio e da terra durante um anno juliano dá:

(s)	(p)	(r)	(r')	(r'')	(r''')	(r^{IV})
1660823115	400008472	60789225	35273122	25516103	9757019	6002065
	4	6	1	1	2	
	(q)	(q')	(q'')	(q''')	(q^{IV})	

E teremos:

$$s = 4p + 60789225,$$

$$6s = 25p - 35273122,$$

$$7s = 29p + 25516103,$$

$$13s = 54p - 9757019,$$

$$33s = 137p + 6002065.$$

Assim os numeros 13 e 54 dão

$$\frac{s}{p} = \frac{54}{13} - \frac{9757019}{13p};$$

e porisso, em quanto Mercurio descreve no seu movimento tropico 54 vezes a orbita, a terra pouco mais descreve de 13 vezes a sua, e volta proximamente á conjuncção com Mercurio, de que tinha partido.

184. Para achar exactamente o tempo em que os dois corpos voltam á mesma posição relativa, faremos o seguinte:

Sejam n' e n os medios movimentos diurnos de Mercurio e da terra. A terra em 13 annos julianos descreverá o arco $13c + 356'',84$, e Mercurio o arco $54c - 30098'',05$. Portanto, depois de mais t dias, terão os dois corpos descripto respectivamente os arcos

$$13c + 356'',84 + nt, \quad 54c - 30098'',05 + n't;$$

de sorte que tornarão á mesma conjuncção, ou, em geral, á mesma posição relativa, quando fôr

$$356'',84 + nt = -30098'',05 + n't,$$

isto é, depois do tempo

$$t=\frac{30098,05+356,84}{14732,56-3548,32}=2^{d},723.$$

Passados pois 13 annos julianos e $2^{d},723$, Mercurio e a terra voltarão á mesma posição relativa, e quasi aos mesmos pontos das suas orbitas.

185. A comparação dos tempos periodicos com os raios das orbitas planetarias dá a equação

$$\frac{T'^2}{T^2}=\frac{a'^3}{a^3},$$

que é uma das leis geraes do movimento dos corpos celestes.

D'esta equação, combinada com $\frac{n'}{n}=\frac{T}{T'}$, resultam

$$\frac{n'}{n}=\frac{a\sqrt{a}}{a'\sqrt{a'}},\ \frac{n'a'}{na}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a'}}.$$

Por onde se vê que as velocidades angulares medias n', e as effectivas $n'a'$, são tanto maiores quanto mais proximos do Sol estão os planetas.

II

Estações dos planetas

186. O movimento da terra, de que os phenomenos da aberração nos mostrará a realidade, é já para nós muito provavel; e porisso continuaremos a adoptar esta hypothese, explicando 'nella as apparencias das estações e retrogradações, que os planetas apresentam, quando se comparam as suas projecções no ceu com as das estrellas.

187. *Planetas inferiores.* Consideremos (Fig. 26 e 27) um planeta inferior nas suas conjuncções V, superior e inferior; projectando-se 'nellas na esphera celeste em v.

Um pouco antes, e um pouco depois da conjuncção superior (Fig. 26), as suas posições serão V', V'', e as da terra serão T', T''; por conseguinte os movimentos apparentes geocentricos $v'T'v_{,}$, $v_{,,}T''v''$, que se projectam em $v'v_{,}$, $v_{,,}v''$ na esphera celeste, são *directos.*

Um pouco antes, e um pouco depois da conjuncção inferior (Fig. 27), por serem os arcos $V'V$, VV'', maiores que $T'T$, TT'' (n.º 185), os movimentos apparentes geocentricos $v'T'v_{,}$, $v_{,,}T''v''$, que se projectam na esphera celeste em $v'v_{,}$, $v_{,,}v''$, são *retrogrados.*

Na passagem dos movimentos de retrogrados para directos, e de directos para retrogrados, quando as posições do planeta são taes que, em duas consecutivas muito proximas, as rectas $V'T'$ ou $V''T''$ se conservam pararellas a si mesmas, tem logar as *estações.*

188. *Planetas superiores.* Consideremos agora um planeta superior na conjuncção, e na opposição, projectando-se em m na esphera celeste (Fig. 28 e 29).

Discorrendo como para os planetas inferiores, e attendendo na Fig. 29 a que (n.º 183) os arcos $M'M$, MM'' são menores que $T'T$, TT'': veremos que, um pouco antes, e um pouco depois da conjuncção (Fig. 28), os movimentos geocentricos $m'T'm_{,}$, $m_{,,}T''m''$, são directos; que um pouco antes, e um pouco depois da opposição (Fig. 29) os movimentos geocentricos $m'Tm_{,}$, $m_{,,}T''m''$ são retrogrados; e que, na separação entre os movimentos retrogrados e os directos, conservando-se parallelas a si mesmas as linhas $m'T'$, $m''T''$, em duas posições consecutivas muito proximas, terão logar as *estações*.

189. Procuremos resolver analyticamente o problema de determinar as epochas das estações, e os arcos de retrogradação e de movimento directo. Para facilitar esta resolução, que não é necessario obter muito exactamente, supporemos a orbita do planeta circular, assim como a da terra, e no plano da ecliptica.

Tomemos para eixo dos x (Fig. 30) a linha SX da opposição d'um planeta superior M, e para eixo dos y a perpendicular a ella, SY.

Chamando: ρ, ρ', os raios das orbitas da terra e do planeta; n, n', os movimentos medios d'estes corpos; t o tempo decorrido desde a opposição até a estação; e φ o semi-arco de retrogradação $m'T'm_{,}$: serão

$$x' = \rho' \cos n't, \quad x = \rho \cos nt, \quad y' = \rho' \operatorname{sen} n't, \quad y = \rho \operatorname{sen} nt,$$

e
$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{\rho \operatorname{sen} nt - \rho' \operatorname{sen} n't}{\rho' \cos n't - \rho \cos nt}.$$

A condição $\dfrac{d\varphi}{dt} = 0$, que caracteriza o parallelismo da direcção de T'M' em dois tempos consecutivos extremamente proximos, e por conseguinte a epocha da estação, dará

$$\cos (n - n')\, t = \frac{n\rho^2 + n'\rho'^2}{(n + n')\rho\rho'};$$

ou, por ser (n.º 185)
$$\frac{n}{n'} = \frac{T'}{T} = \frac{\rho'^{\frac{3}{2}}}{\rho^{\frac{3}{2}}},$$

$$\cos (n - n')t = \frac{\rho\sqrt{\rho'} + \rho'\sqrt{\rho}}{\rho\sqrt{\rho} + \rho'\sqrt{\rho'}} = \frac{\sqrt{\rho\rho'}}{\rho + \rho' - \sqrt{\rho\rho'}}.$$

Como t pode ser positivo ou negativo, para o mesmo coseno, vê-se que ha duas estações equidistantes da opposição, uma a oriente, outra a occidente d'ella.

190. No triangulo ST'M', cujos angulos S, T', M', se chamam, respectivamente, *commutação*, *elongação*, e *parallaxe annua*, temos:

$$\operatorname{tang}\frac{T'-M'}{2}=\cot\frac{S}{2}\cdot\frac{\rho'-\rho}{\rho'+\rho};$$

e conseguintemente:

$$\operatorname{tang}T'=\operatorname{tang}\left(\frac{T'+M'}{2}+\frac{T'-M'}{2}\right)=\frac{\left(1+\frac{\rho'-\rho}{\rho'+\rho}\right)\cot\frac{1}{2}S}{1-\frac{\rho'-\rho}{\rho'+\rho}\cot^2\frac{1}{2}S},$$

$$\operatorname{tang}M'=\operatorname{tang}\left(\frac{T'+M'}{2}-\frac{T'-M'}{2}\right)=\frac{\left(1-\frac{\rho'-\rho}{\rho'+\rho}\right)\cot\frac{1}{2}S}{1+\frac{\rho'-\rho}{\rho'+\rho}\cot^2\frac{1}{2}S};$$

e porque é

$$\cot^2\tfrac{1}{2}S=\frac{1+\cos S}{1-\cos S}=\frac{1+\cos(n-n')t}{1-\cos(n-n')t}=\frac{(\rho'+\rho)(\sqrt{\rho'}+\sqrt{\rho})}{(\rho'-\rho)(\sqrt{\rho'}-\sqrt{\rho})},$$

estas expressões reduzem-se a

$$\operatorname{tang}T'=-\frac{\rho'}{\sqrt{\rho(\rho'+\rho)}},\quad \operatorname{tang}M'=\frac{\rho}{\sqrt{\rho'(\rho'+\rho)}}.$$

Achados os angulos T', M', é facil obter o semi-arco de retrogradação φ, pelas formulas:

$$\varphi = m'T'G - m_{\prime}T'G = 180^\circ - T' - nt,$$

ou $$\varphi = H = M' - n't;$$

ou tambem substituindo o valor achado de t na expressão de tang φ do numero precedente.

191. Nos planetas inferiores acham-se similhantemente (Fig. 31), depois da conjuncção inferior,

$$\cos(n'-n)t = \frac{\rho'\sqrt{\rho} + \rho\sqrt{\rho'}}{\rho'\sqrt{\rho'} + \rho\sqrt{\rho}} = \frac{\sqrt{\rho\rho'}}{\rho' + \rho - \sqrt{\rho\rho'}},$$

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\rho' \operatorname{sen} n't - \rho \operatorname{sen} nt}{\rho \cos nt - \rho' \cos n't},$$

$$\operatorname{tang}\frac{V'-T'}{2} = \frac{\rho - \rho'}{\rho' + \rho}\cot\frac{n'-n}{2}t,$$

$$\operatorname{tang} V' = -\frac{\rho}{\sqrt{\rho'(\rho+\rho')}},\ \operatorname{tang} T' = \frac{\rho'}{\sqrt{\rho(\rho+\rho')}};$$

$$\varphi = 180^\circ - V' - n't,$$

ou $$\varphi = T' - nt.$$

192. Applicando estas formulas aos diversos planetas, e usando dos respectivos movimentos medios e eixos maiores das orbitas, achamse para elles os valores medios de $2t$ e 2φ:

Assim, com

$$n = 1295972'',38, \quad n' = 5381016'',20,$$
$$\rho = 1 \quad , \quad \rho' = 0,3870987,$$

sendo n, n' os movimentos medios da terra e de Mercurio em um anno juliano, as formulas do n.° 189 dão

$$2t = 22^{d},90, \ T' = 18°12', \ 2\varphi = 13°49'.$$

O quadro, que se acha na astronomia de Delambre, relativo aos diversos planetas, é o seguinte:

PLANETA	$2t$	T'	2φ
Mercurio	$22^{d},90$	18°12′	13°24′
Venus	42 ,16	28 51	15 22
Marte	72 ,76	136 12	14 41
Ceres	97 ,45	126 7	10 30
Jupiter	120 ,70	115 35	9 55
Saturno	137 ,61	108 47	6 47
Urano	151 ,70	103 15	3 45

Ao qual, suppondo $7872'',774$ o movimento medio de Neptuno em um anno juliano, e $\rho' = 30,03696$, podemos accrescentar

Neptuno	158,46	100 30	2 48

193. Como a expressão de tang T′ do n.° 190 dá

$$\frac{\rho'}{\rho}=\tfrac{1}{2}\operatorname{tang}^2 T'\left(1+\sqrt{1+4\cot^2 T'}\right),$$

e o triangulo SM′T′ dá

$$\frac{M'T'}{\rho'}=\frac{\operatorname{sen}(n-n')t}{\operatorname{sen} T'},$$

vê-se que da observação das elongações na epocha das estações se podem deduzir por estas formulas, como primeira approximação, o raio ρ' da orbita d'um planeta superior, e a sua distancia á terra M′T′.

Similhantemente, para os planetas inferiores, teremos

$$\frac{\rho'}{\rho}=\tfrac{1}{2}\operatorname{tang}^2 T'\left(1+\sqrt{1+4\cot^2 T'}\right),$$

$$\frac{V'T'}{\rho'}=\frac{\operatorname{sen}(n'-n)t}{\operatorname{sen} T'}.$$

Por exemplo, no dia 12 de janeiro de 1801, em que Ceres se tornou estacionario, a sua elongação observada por Piazzi, que o descubrira no 1.° do mesmo mez, era

$$T'=122^\circ 37' 48'',$$

que substituido na expressão de $\frac{\rho'}{\rho}$ dá

$$\frac{\rho'}{\rho}=3{,}2013.$$

Esta avaliação, ainda que inexacta, por causa da latitude do planeta e da ellipticidade da orbita, é bastante approximada do verdadeiro valor 2,76724 para servir de base a investigações mais perfeitas (Astr. de Biot, 3.ª edic., tom. v, pag. 325).

Do mesmo modo, suppondo para Mercurio $T' = 18°12'$, acha-se

$$\frac{\rho'}{\rho} = 0{,}3872.$$

CAPITULO III

I

Transformação de coordenadas

194. Para applicar as observações á determinação dos elementos das orbitas planetarias; para investigar as leis do movimento 'nestas orbitas; e para comparar os resultados das observações com os das taboas astronomicas: cumpre transformar as coordenadas geocentricas em heliocentricas; e reciprocamente.

Tomemos para plano dos xy o da ecliptica; para origem das coordenadas rectangulares o centro da terra; e para eixo dos x uma parallela á linha dos nodos tirada por este centro.

Chamemos X, Y as coordenadas geocentricas do Sol; x, y, z, as coordenadas geocentricas do planeta; L, R, a longitude geocentrica do Sol, e a sua distancia á terra; l, λ, a longitude e a latitude geocentricas do planeta; r, ρ, a distancia do planeta á terra, e a projecção d'esta distancia no plano da ecliptica; N a longitude do nodo ascendente da orbita. E designemos similhantemente pelas letras accentuadas x', y', z', l', λ', r', ρ', as coordenadas e distancias heliocentricas do planeta.

Teremos as seguintes equações:

$$(1)\ldots\begin{cases} x'=x-\mathrm{X}, \quad y'=y-\mathrm{Y}, \quad z'=z, \\ \mathrm{X}=\mathrm{R}\cos(\mathrm{L}-\mathrm{N}), \quad \mathrm{Y}=\mathrm{R}\,\mathrm{sen}\,(\mathrm{L}-\mathrm{N}), \\ x'=\rho'\cos(l'-\mathrm{N}), y'=\rho'\,\mathrm{sen}\,(l'-\mathrm{N}), z'=\rho'\,\mathrm{tg}\,\lambda', \rho'=r'\cos\lambda', \\ x=\rho\cos(l-\mathrm{N}), \quad y=\rho\,\mathrm{sen}\,(l-\mathrm{N}), \quad z=\rho\,\mathrm{tg}\,\lambda, \quad \rho=r\cos\lambda. \end{cases}$$

195. **Para fazer a transformação das coordenadas, de que se tracta, estas equações dão as seguintes:**

$$\rho' \cos(l' - N) = \rho \cos(l - N) - R \cos(L - N),$$

$$\rho' \operatorname{sen}(l' - N) = \rho \operatorname{sen}(l - N) - R \operatorname{sen}(L - N),$$

$$\rho' \operatorname{tang} \lambda' = \rho \operatorname{tang} \lambda.$$

Eliminando ρ entre as duas primeiras d'ellas, vem

$$\rho' \operatorname{sen}(l - l') = \rho' \operatorname{sen}[l - L - (l' - L)] = R \operatorname{sen}(L - l);$$

que dá $$\operatorname{tang}(l - L) = \frac{\rho' \operatorname{sen}(l' - L)}{R + \rho' \cos(l' - L)}.$$

Eliminando ρ' entre as mesmas equações, acha-se similhantemente

$$\operatorname{tang}(l' - L) = \frac{\rho \operatorname{sen}(l - L)}{\rho \cos(l - L) - R}.$$

E eliminando R, acha-se

$$\rho' \operatorname{sen}(l' - L) = \rho \operatorname{sen}(l - L).$$

Em quanto á parallaxe horizontal do planeta, é

$$\frac{\pi}{\operatorname{par} \Theta} = \frac{R}{r}, \text{ ou } \pi = \frac{R}{r} \operatorname{par} \Theta.$$

Portanto a transformação das coordenadas póde fazer-se, respectivamente, pelos systemas seguintes:

$$(2)\ldots\left\{\begin{aligned}
&\rho = r\cos\lambda,\\
&\tang(l - L) = \frac{\rho\,\mathrm{sen}\,(l - L)}{\rho\cos(l - L) - R'},\\
&\rho' = \frac{\rho\,\mathrm{sen}\,(l - L)}{\mathrm{sen}\,(l' - L)},\\
&\mathrm{tang}\,\lambda' = \frac{\rho\,\mathrm{tang}\,\lambda}{\rho'},\\
&r' = \frac{\rho'}{\cos\lambda'},
\end{aligned}\right.$$

$$(3)\ldots\left\{\begin{aligned}
&\rho' = r'\cos\lambda',\\
&\mathrm{tang}\,(l - L) = \frac{\rho'\,\mathrm{sen}\,(l' - L)}{\rho'\cos(l' - L) + R'},\\
&\rho = \frac{\rho'\,\mathrm{sen}\,(l' - L)}{\mathrm{sen}\,(l - L)},\\
&\mathrm{tang}\,\lambda = \frac{\rho'\,\mathrm{tang}\,\lambda'}{\rho},\\
&r = \frac{\rho}{\cos\lambda};
\end{aligned}\right.$$

$$\pi = \mathrm{par}\,\Theta\,.\,\frac{R\,\mathrm{sen}\,(l - L)\cos\lambda}{\rho'\,\mathrm{sen}\,(l' - L)}.$$

O primeiro transforma successivamente as coordenadas geocentricas em heliocentricas; o segundo transforma as heliocentricas em geocentricas.

As formulas (3) são as do *calculo das Ephemerides*, n.° 36. Podem vêr-se outras para o mesmo fim nos n.os 37 e 38 do mesmo livro.

196. Em logar da relação entre ρ e ρ', que dão as terceiras equações dos systemas (2) e (3), podem empregar-se as seguintes, que se deduzem immediatamente do triangulo rectilineo comprehendido entre a terra, o Sol, e a projecção do planeta,

$$\left.\begin{aligned} \rho'^2 &= \rho^2 + R^2 - 2R\rho\cos(l - L), \\ \rho^2 &= \rho'^2 + R^2 + 2R\rho'\cos(l' - L). \end{aligned}\right\}\ldots\ldots (4).$$

197. Tendo as coordenadas heliocentricas referidas ao plano da ecliptica, facilmente passaremos d'ellas para as referidas ao plano da orbita.

Sejam SP, SQ, SN, S♈ (Fig. 32), as direcções do raio vector do planeta, da sua projecção na ecliptica, da linha dos nodos, e da linha dos equinoccios; sendo P, Q, N, ♈, as intersecções d'estas rectas com a esphera celeste.

No triangulo espherico PNQ, rectangulo em Q, são

$$PQ = \lambda',\ QN = l' - N,\ PN = v - N,\ PNQ = I:$$

sendo v contado no plano da orbita, a partir d'uma recta que faz com a linha dos nodos um angulo egual á longitude N do nodo; e I a inclinação da orbita.

Este triangulo dá

$$(5)\ldots\ldots\left\{\begin{aligned} &\tang\lambda' = \tang I \operatorname{sen}(l' - N), \\ &\cot(v - N) = \cos I \cot(l' - N). \end{aligned}\right.$$

Da segunda facilmente se tira, como no n.º 108 da primeira secção,

$$\operatorname{sen}(v-l') = \operatorname{tang}^2 I \operatorname{sen}[v-l'+2(l'-N)],$$

ou $$\operatorname{sen}(v-l') = -\operatorname{tang}^2 I \operatorname{sen}[v-l'-2(v-N)].$$

Por conseguinte a reducção da ecliptica á orbita, e a da orbita á ecliptica, são:

$$\left.\begin{aligned} v-l' &= \Sigma\left(\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} I\right)^i \frac{\operatorname{sen} 2i(l'-N)}{i}, \\ l'-v &= \Sigma\left(-\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} I\right)^i \frac{\operatorname{sen} 2i(v-N)}{i}. \end{aligned}\right\} \ldots (6).$$

198. A supposição de ser plana a orbita do planeta dispensa a observação d'uma das tres coordenadas, quando se conhece a posição do plano. Com effeito a observação da longitude e da latitude geocentricas dá a direcção da recta que une o centro da terra com o do planeta; e depois a intersecção d'esta recta com o plano da orbita deve assignar a posição do astro.

Para verificar isto, substituamos as expressões de y' e z' na equação do plano da orbita

$$z' = y' \operatorname{tang} I.$$

Resultará:

$$\rho \operatorname{tang} \lambda = [\rho \operatorname{sen}(l-N) - R \operatorname{sen}(L-N)] \operatorname{tang} I \ldots (7),$$

que dará ρ, e por conseguinte r, quando se conhecerem l, λ; L, R, N, I.

199. O valor de ρ tirado da equação (7) podia dispensar a obser-

vação dos diametros apparentes, como acabamos de ver; mas nas orbitas muito pouco inclinadas á ecliptica é perigoso o uso d'esta formula para esse fim.

Póde porem determinar-se ρ com mais segurança observando outra vez o planeta depois de voltar á mesma posição, ou reduzindo a esta as observações feitas na sua proximidade; porque, sendo então os valores de ρ' e l' eguaes aos da primeira observação, as duas primeiras equações do n.º 195 darão

$$\rho \cos(l-\mathrm{N}) - \mathrm{R}\cos(\mathrm{L}-\mathrm{N}) = \rho_1 \cos(l_1-\mathrm{N}) - \mathrm{R}_1 \cos(\mathrm{L}_1-\mathrm{N}),$$

$$\rho \,\mathrm{sen}(l-\mathrm{N}) - \mathrm{R}\,\mathrm{sen}(\mathrm{L}-\mathrm{N}) = \rho_1 \,\mathrm{sen}(l_1-\mathrm{N}) - \mathrm{R}_1 \,\mathrm{sen}(\mathrm{L}_1-\mathrm{N});$$

e por conseguinte

$$\rho = \frac{\mathrm{R}\,\mathrm{sen}(l_1-\mathrm{L}) - \mathrm{R}_1\,\mathrm{sen}(l_1-\mathrm{L}_1)}{\mathrm{sen}(l_1-l)},$$

$$\rho_1 = \frac{\mathrm{R}\,\mathrm{sen}(l-\mathrm{L}) - \mathrm{R}_1\,\mathrm{sen}(l-\mathrm{L}_1)}{\mathrm{sen}(l_1-l)}.$$

Se no intervallo t das observações o nodo tiver o movimento nt, poderemos ainda usar d'estas formulas, pondo 'nellas $l_1 - nt$ e $\mathrm{L}_1 - nt$ em logar de l_1 e de L_1.

200. No caso de se observar o planeta quando está em conjuncção superior com o Sol, é $l = \mathrm{L} = l'$; e por conseguinte

$$\rho = \frac{\mathrm{R}\,\mathrm{sen}(l'-\mathrm{N})\,\mathrm{tang}\,\mathrm{I}}{\mathrm{sen}(l'-\mathrm{N})\,\mathrm{tang}\,\mathrm{I} - \mathrm{tang}\,\lambda} = \frac{\mathrm{R}\,\mathrm{sen}\,\lambda'\cos\lambda}{\mathrm{sen}(\lambda'-\lambda)}.$$

ou
$$r = R\frac{\text{sen}\,\lambda'}{\text{sen}\,(\lambda'-\lambda)};$$

e
$$\rho' = \rho\frac{\text{tang}\,\lambda}{\text{tang}\,\lambda'} = \frac{R\,\text{sen}\,\lambda\,\cos\lambda'}{\text{sen}\,(\lambda'-\lambda)},$$

ou
$$r' = R\frac{\text{sen}\,\lambda}{\text{sen}\,(\lambda'-\lambda)}$$

Estas formulas applicam-se á conjuncção inferior, mudando no denominador λ em $-\lambda$; e á opposição, mudando R em $-R$ (Fig. 33, 34, 35).

Por onde se vê que, observando nas syzigias, e tendo determinado N e I, o calculo de r' e de v se fará com muita facilidade pela ultima formula e pelas formulas (5).

201. Se na equação do plano substituissemos por z', y', as suas expressões em coordenadas angulares heliocentricas, $\rho'\,\text{tang}\,\lambda'$, $\rho'\,\text{sen}\,(l'-N)$, desappareceria ρ'. E assim devia ser; porque l' e λ' assignam a direcção do raio vector do planeta, deixando indeterminada a grandeza d'este raio, quer seja dado, quer não o seja, a posição do plano da orbita no qual elle está.

II

Posição do plano da orbita

202. Duas observações completas, convertidas as coordenadas em heliocentricas, dariam

$$\operatorname{tang}\lambda' = \operatorname{tang} I \operatorname{sen}(l' - N),$$

$$\operatorname{tang}\lambda'' = \operatorname{tang} I \operatorname{sen}(l'' - N);$$

das quaes se tiram, como no n.° 11 da primeira secção:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tang} k &= \operatorname{tang}\frac{l'' - l'}{2}\cdot\frac{\operatorname{sen}(\lambda' + \lambda)}{\operatorname{sen}(\lambda' - \lambda'')}, \\ N &= \frac{l' + l''}{2} + k, \\ \operatorname{tang}\varphi &= \frac{\operatorname{tang}\lambda'}{\operatorname{sen}(l' - N)} = \frac{\operatorname{tang}\lambda''}{\operatorname{sen}(l'' - N)}: \end{aligned}\right\} \ldots (8)$$

tendo o cuidado de pôr $l'' - \nu t$ em logar de l'', no caso de ser attendivel o movimento proprio νt do nodo da orbita em longitude.

Mas convem determinar separadamente N, I, por observações feitas nas epochas respectivamente favoraveis; como fizemos para o Sol.

203. *Determinação dos nodos.* Se na equação (7) fizermos $\lambda = o$, e substituirmos

$$\rho = \frac{R \operatorname{sen} (L - N)}{\operatorname{sen} (l - N)}$$

na terceira das equações (3), virá

$$r' \operatorname{sen} (l - N) = R \operatorname{sen} (L - l).$$

Quando o planeta voltar ao mesmo nodo, suppondo a orbita a mesma e fixo o nodo, teremos

$$r' \operatorname{sen} (l_1 - N) = R_1 \operatorname{sen} (L_1 - l_1);$$

e eliminando r' entre estas equações, acharemos

$$\frac{\operatorname{sen} (l_1 - N)}{\operatorname{sen} (l - N)} = \frac{R_1 \operatorname{sen} (L_1 - l_1)}{R \operatorname{sen} (L - l)},$$

que se resolve commodamente no systema

$$\left.\begin{aligned} &\frac{R_1 \operatorname{sen} (L_1 - l_1)}{R \operatorname{sen} (L - l)} = \operatorname{tang} \varphi, \\ &\operatorname{tang} \left(N - \frac{l_1 + l}{2} \right) = \operatorname{tang} (45 + \varphi) \,.\, \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} (l_1 - l) \end{aligned}\right\} \ldots (9).$$

A condição de ser r' positivo, applicada a

$$r' = R_1 \frac{\operatorname{sen}(L_1 - l_1)}{\operatorname{sen}(l_1 - N)} = R \frac{\operatorname{sen}(L - l)}{\operatorname{sen}(l - N)},$$

que depois pode dar r', tiraria a ambiguidade dos dois valores N e $180 + N$, ambos correspondentes a tang N.

Se no intervallo t das duas observações fosse necessario attender ao movimento νt do nodo, bastaria para isso substituir $l_1 - \nu t$ em logar de l_1, e $L_1 - \nu t$ em logar de L_1.

O valor de ν determinar-se-ha comparando dois valores de N determinados em epochas muito distantes uma da outra, e repartindo a differença d'elles pelo intervallo.

204. Se nos servissemos de passagens por dois nodos diversos, um ascendente, outro descendente, e suppozessemos eguaes os dois raios vectores, deveriamos substituir $180 + N$, em logar de N, na segunda das equações que nos deram tang N; d'onde resultaria a mesma expressão de tang N, só com a mudança de R_1 em $-R_1$.

205. Differenciando a equação

$$r' \operatorname{sen}(l - N) = R \operatorname{sen}(L - l)$$

em ordem a r' e N, resulta

$$\delta N = \operatorname{tang}(l - N) \, . \, \delta r'.$$

Por onde se vê que o erro de r', ou da supposição de serem eguaes nas duas passagens os valores de r', influirá tanto menos em N, quanto menor for $(l - N)$; e por conseguinte quanto menor for $\operatorname{sen}(L - N)$, em virtude da equação (7).

Portanto as observações, feitas quando a epocha da passagem do planeta pelo nodo coincide com a da conjuncção ou com a da opposição, são as mais vantajosas para determinar a longitude do nodo N, que dão immediatamente.

206. Supponhamos que, determinando pela observação a latitude

do planeta na epocha da conjuncção ou da opposição, a achamos muito pequena

Se ha muitas observações vizinhas d'esta epocha, calcularemos pela interpolação o tempo correspondente á latitude nulla, que é o da passagem pelo nodo; e accrescentaremos á longitude heliocentrica do planeta na epocha da observação, isto é, á longitude do Sol na conjuncção, ou á longitude do Sol + 180° na opposição, o movimento heliocentrico do planeta em longitude durante o intervallo decorrido desde a conjuncção ou opposição até á passagem pelo nodo: sendo este movimento tirado das taboas; ou, pelo menos, calculado pelo medio movimento que dá a revolução sideral do planeta.

Teremos assim a longitude heliocentrica do planeta na occasião da passagem pelo nodo. E, se fizermos o mesmo em mais d'uma passagem, poderemos tambem verificar a opposição dos dois nodos, vistos do Sol, que deve dar-se, se a orbita do planeta é plana, como suppomos.

207. As passagens de Mercurio e de Venus pelo disco do Sol são especialmente proprias para determinar os instantes em que estes planetas atravessam a ecliptica.

Supponhamos que de observações feitas com um reticulo bem orientado se deduzem, na occasião da passagem: os tempos t, t', da entrada e da sahida, em e, s (Fig. 36); as latitudes ep, sq; e o movimento relativo em longitude pq. Com estes dados resolver-se-hão os triangulos rectangulos Nep, Nsq; e determinar-se-hão Sp, o tempo da conjuncção Θ, e o da passagem pelo nodo T, suppondo o movimento uniforme.

Com effeito estes triangulos dão:

$$\overline{Np} = \frac{\overline{ep}\cdot\overline{pq}}{\overline{ep}-\overline{sq}},\ \overline{Nq} = \overline{Np}-\overline{pq},\ \overline{Ne} = \sqrt{\overline{Np}^2+\overline{pe}^2},$$

$$\overline{se} = \frac{\overline{pq}\cdot\overline{Ne}}{\overline{Np}},\ \operatorname{tang} eNp = \frac{\overline{pe}}{\overline{Np}},\ NS = \frac{\overline{Ne}-\frac{1}{2}\overline{se}}{\cos eNp},$$

$$\Theta = t + (t'-t)\cdot\frac{\overline{Sp}}{\overline{pq}},\ T = t + (t'-t)\cdot\frac{\overline{Np}}{\overline{pq}},$$

$$T - \Theta = (t'-t)\cdot\frac{\overline{NS}}{\overline{pq}}.$$

Conheceremos assim o tempo $T - \Theta$ decorrido desde a conjuncção até a passagem pelo nodo; e, ajunctando á longitude heliocentrica da terra, ou a $180^\circ + \text{long}\,\Theta$, o movimento heliocentrico do planeta em longitude, durante este tempo, teremos a longitude heliocentrica do nodo.

208. ***Inclinação da orbita.*** Se na equação (7) fizermos $L = N$, teremos

$$\operatorname{tang} I = \frac{\operatorname{tang} \lambda}{\operatorname{sen}(l - L)}.$$

Esta formula dará pois a inclinação da orbita, quando se observar o planeta no instante em que a longitude do Sol é egual á do nodo.

Se ha um pequeno erro na longitude do nodo, a differenciação da formula precedente dá o erro de I,

$$\delta I = \tfrac{1}{2} \operatorname{sen} 2I \cot(l - L) \,.\, \delta L.$$

Portanto, se o planeta se observar quando a sua elongação for proxima de 90°, um pequeno erro da longitude do nodo não influirá sensivelmente na inclinação da orbita.

Em quanto aos erros de latitude, a equação

$$\delta I = \frac{\operatorname{sen} 2I}{\operatorname{sen} 2\lambda}\,\delta\lambda = \frac{\cos^2 I}{\cos^2 \lambda \operatorname{sen}(l - L)}\,\delta\lambda,$$

mostra que a sua influencia será tambem menos sensivel quando a elongação se approximar de 90°.

Raras vezes acontecerá que o planeta se observe no momento de ser $L = N$; mas, feitas muitas observações nos tempos das quaes L diffira pouco de N, a interpolação dará o instante em que é $L = N$, e depois os valores de l e λ correspondentes a esse instante.

III

Determinação dos outros elementos da orbita

209. Conhecidos N e I, se calcularmos muitos raios vectores r' do planeta, e as longitudes correspondentes na orbita, pelas formulas (2) e (5) dos n.os 195 e 197, e construirmos graphicamente os logares geometricos determinados por estas coordenadas, acharemos que a orbita parece ser uma ellipse.

210. Procurando entre essas observações aquellas em que o movimento do astro é mais rapido ou mais vagaroso; e determinando pela interpolação as epochas do maximo e do minimo, e os valores correspondentes de v: teremos os instantes das passagens pelo perihelio e pelo aphelio, e as posições d'estes pontos; assim como a relação da excentricidade para o semi-eixo, $e=\frac{r''-r'}{r''+r'}$, chamando r', r'' os raios vectores perihelio e aphelio.

Determinados assim os elementos d'esta ellipse por algumas das observações, acharemos que a curva representa todas as outras observações. E formando taboas dos planetas, poderemos ulteriormente aperfeiçoar os mesmos elementos por meio de processos analogos aos empregados na primeira secção.

211. Se tivermos somente algumas observações feitas em uma porção restricta da orbita, como acontece no apparecimento de um astro novo, podemos determinar por quatro observações os quatro elementos n, ϖ, e, ε; porque aquellas observações, comparadas com a segunda das equações do movimento elliptico, dão quatro equações de condição, entre as quaes se podem eliminar as quantidades, n, ϖ, e, ε.

A difficuldade está em fazer a eliminação; e por isso transcrevemos da Astronomia de Francoeur pag. 425 o processo empregado por Bouvard.

A segunda das equações do movimento elliptico, ou

$$v - \varpi = \varepsilon + nt - \varpi + 2e \operatorname{sen}(nt + \varepsilon - \varpi) + \frac{5}{4}e^2 \operatorname{sen} 2(nt + \varepsilon - \varpi),$$

resolvida pelo methodo inverso das series em ordem a $\varepsilon + nt - \varpi$, dá

$$\varepsilon + nt = v - [2e \operatorname{sen}(v - \varpi) - \frac{3}{4} e^2 \operatorname{sen} 2(v - \varpi)] \frac{1}{\operatorname{sen} 1''},$$

ou, desprezando para o planeta o termo em e^2,

$$\varepsilon + nt = v - \frac{2e}{\operatorname{sen} 1''} \operatorname{sen}(v - \varpi).$$

Portanto quatro observações do planeta darão as quatro equações de condição:

$$\varepsilon + nt_1 = v_1 - \frac{2e}{\operatorname{sen} 1''} \operatorname{sen}(v_1 - \varpi),$$

$$\varepsilon + nt = v - \frac{2e}{\operatorname{sen} 1''} \operatorname{sen}(v - \varpi),$$

$$\varepsilon + nt' = v' - \frac{2e}{\operatorname{sen} 1''} \operatorname{sen}(v' - \varpi),$$

$$\varepsilon + nt'' = v'' - \frac{2e}{\operatorname{sen} 1''} \operatorname{sen}(v'' - \varpi),$$

entre as quaes se tracta de eliminar n, ϖ, e, ε.

Fazendo

$$t - t_1 = \theta,\ t' - t_1 = \theta',\ t'' - t_1 = \theta'',$$

$$v - v_1 = a,\ v' - v_1 = a',\ v'' - v_1 = a'',$$

e subtraindo a primeira equação de cada uma das outras tres, resultam:

$$n\theta - a = \frac{2e}{\operatorname{sen} 1''}\left\{2 \operatorname{sen}(v_1 - \varpi) \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} a - \cos(v_1 - \varpi) \operatorname{sen} a\right\},$$

$$n\theta' - a' = \frac{2e}{\operatorname{sen} 1''}\left\{2 \operatorname{sen}(v_1 - \varpi) \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} a' - \cos(v_1 - \varpi) \operatorname{sen} a'\right\},$$

$$n\theta'' - a'' = \frac{2e}{\operatorname{sen} 1''}\left\{2 \operatorname{sen}(v_1 - \varpi) \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} a'' - \cos(v_1 - \varpi) \operatorname{sen} a''\right\}.$$

Dividindo a primeira d'estas equações por cada uma das outras,

e fazendo $$\mathrm{M} = \frac{n\theta - a}{n\theta' - a'},\ \mathrm{N} = \frac{n\theta - a}{n\theta'' - a''},$$

resultam

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{N} &= \frac{2 \operatorname{tang}(v_1 - \varpi) \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} a - \operatorname{sen} a}{2 \operatorname{tang}(v_1 - \varpi) \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} a'' - \operatorname{sen} a''}, \\ \mathrm{M} &= \frac{2 \operatorname{tang}(v_1 - \varpi) \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} a - \operatorname{sen} a}{2 \operatorname{tang}(v_1 - \varpi) \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} a' - \operatorname{sen} a'} \end{aligned}\right.$$

que, eliminando tang $(v_1 - \varpi)$, dão

$$\frac{\mathrm{M}\,\mathrm{sen}\,a' - \mathrm{sen}\,a}{\mathrm{M}\,\mathrm{sen}^2\frac{1}{2}a' - \mathrm{sen}^2\frac{1}{2}a} = \frac{\mathrm{N}\,\mathrm{sen}\,a'' - \mathrm{sen}\,a}{\mathrm{N}\,\mathrm{sen}^2\frac{1}{2}a'' - \mathrm{sen}^2\frac{1}{2}a}.$$

Reduzindo esta equação ao mesmo denominador; fazendo

$$h = \mathrm{sen}\,a\,\mathrm{sen}^2\tfrac{1}{2}a' - \mathrm{sen}\,a'\,\mathrm{sen}^2\tfrac{1}{2}a = 2\,\mathrm{sen}\,\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{sen}\,\tfrac{1}{2}a'\,\mathrm{sen}\,\tfrac{1}{2}(a' - a),$$

$$i = \mathrm{sen}\,a'\,\mathrm{sen}^2\tfrac{1}{2}a'' - \mathrm{sen}\,a''\,\mathrm{sen}^2\tfrac{1}{2}a' = 2\,\mathrm{sen}\,\tfrac{1}{2}a'\,\mathrm{sen}\,\tfrac{1}{2}a''\,\mathrm{sen}\,\tfrac{1}{2}(a'' - a'),$$

$$k = \mathrm{sen}\,a''\,\mathrm{sen}^2\tfrac{1}{2}a - \mathrm{sen}\,a\,\mathrm{sen}^2\tfrac{1}{2}a'' = -2\,\mathrm{sen}\,\tfrac{1}{2}a''\,\mathrm{sen}\,\tfrac{1}{2}a\,\mathrm{sen}\,\tfrac{1}{2}(a'' - a);$$

e depois substituindo em logar de M e N as suas expressões, resulta

$$(n\theta - a).[n(h\theta'' + k\theta' + i\theta) - ha'' - ka' - ia] = o:$$

e como $n\theta - a$ não é nullo, por não o ser e, o segundo factor egualado a zero dá

$$n = \frac{a'' + \frac{k}{h}a' + \frac{i}{h}a}{\theta'' + \frac{k}{h}\theta' + \frac{i}{h}\theta}.$$

Finalmente este valor de n substituido nas equações precedentes dará successivamente os valores de ϖ, e, ε.

Portanto, sendo

$$\theta = t - t_1,\ \theta' = t' - t_1,\ \theta'' = t'' - t_1,$$

$$a = v - v_1,\ a' = v' - v_1,\ a'' = v'' - v_1;$$

o systema de formulas, que resolve a questão, é:

$$\left.\begin{aligned}
&A = -\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}a''\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a''-a)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}a'\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a'-a)},\quad B = \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}a''\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a''-a')}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}a\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a'-a)},\\
&n = \frac{a'' + Aa' + Ba}{\theta'' + A\theta' + B\theta},\\
&M = \frac{n\theta - a}{n\theta' - a'},\quad N = \frac{n\theta - a}{n\theta'' - a''},\\
&\operatorname{tang}(v_1 - \varpi) = \frac{M\operatorname{sen}a' - \operatorname{sen}a}{2(M\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}a' - \operatorname{sen}^2\frac{1}{2}a)} = \frac{N\operatorname{sen}a'' - \operatorname{sen}a}{2(N\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}a'' - \operatorname{sen}^2\frac{1}{2}a)},\\
&\varpi = v_1 - (v_1 - \varpi),\quad e = -\frac{(n\theta - a)\operatorname{sen}1''}{4\operatorname{sen}\frac{1}{2}a\cos(\frac{1}{2}a + v_1 - \varpi)},\\
&s = v_1 - nt_1 - \frac{2e}{\operatorname{sen}1''}\operatorname{sen}(v_1 - \varpi) + \frac{3}{4}\,\frac{e^2}{\operatorname{sen}1''}\operatorname{sen}2(v_1 - \varpi);
\end{aligned}\right\}\ (10).$$

Depois, se quizermos maior approximação, poderemos renovar o calculo: substituindo, em logar de a, fóra dos signaes periodicos,

$$a + \frac{3}{2}\,\frac{e^2}{\operatorname{sen} 1''}\operatorname{sen} a \cos[a + 2(v_1 - \varpi)],$$

e similhantemente a respeito de a' e a''; e usando 'nestas expressões dos valores de e e $v_1 - \varpi$, que se acharam pela primeira approximação.

212. Mas, suppondo n bem conhecido, bastam tres equações para determinar os outros tres elementos; e as formulas tornam-se mais simples. Temos então:

$$n\theta - a = -\frac{2e}{\operatorname{sen} 1''}[\operatorname{sen}(a + v_1 - \varpi) - \operatorname{sen}(v_1 - \varpi)],$$

$$n\theta' - a' = -\frac{2e}{\operatorname{sen} 1''}[\operatorname{sen}(a' + v_1 - \varpi) - \operatorname{sen}(v_1 - \varpi)],$$

$$\frac{n\theta - a}{n\theta' - a'} = \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}a \cos\left(\frac{1}{2}a + v_1 - \varpi\right)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}a' \cos\left(\frac{1}{2}a' + v_1 - \varpi\right)},$$

ou

$$\frac{(n\theta - a)\operatorname{sen}\frac{1}{2}a' - (n\theta' - a')\operatorname{sen}\frac{1}{2}a}{(n\theta - a)\operatorname{sen}\frac{1}{2}a' + (n\theta' - a')\operatorname{sen}\frac{1}{2}a} = \operatorname{tang}\frac{a' - a}{4}\operatorname{tang}\left(\frac{a' + a}{4} + v_1 - \varpi\right).$$

E ϖ, e, ε serão dados facilmente pelo systema seguinte de formulas:

$$
(11)\ldots\left\{
\begin{aligned}
&\frac{(n\theta'-a')\,\text{sen}\,\frac{1}{2}a}{(n\theta-a)\,\text{sen}\,\frac{1}{2}a'}=\cos\varphi\\
&\text{tang}^2\tfrac{1}{2}\varphi\cot\frac{a'-a}{4}=\text{tang}\left[\frac{a'+a}{4}+v_1-\varpi\right],\\
&e=-\frac{(n\theta-a)\,\text{sen}\,1''}{4\,\text{sen}\,\frac{1}{2}a\cos\left(\frac{1}{2}a+v_1-\varpi\right)}=\frac{(n\theta'-a')\,\text{sen}\,1''}{4\,\text{sen}\,\frac{1}{2}a'\cos\left(\frac{1}{2}a'+v_1-\varpi\right)},\\
&\varepsilon=v_1-nt_1-\frac{2e}{\text{sen}\,1''}\,\text{sen}\,(v_1-\varpi)+\frac{3}{4}\,\frac{e^2}{\text{sen}\,1''}\,\text{sen}\,2\,(v_1-\varpi).
\end{aligned}
\right.
$$

Depois, se for necessario, proceder-se-ha a outra approximação, como se disse no numero precedente.

213. Se a orbita é consideravelmente excentrica, convem empregar o processo seguinte.

Chamando $p=a\,(1-e^2)$ o semi-parametro, tres observações dão

$$\frac{p}{r}-1=q=e\cos(v-\varpi),$$

$$\frac{p}{r'}-1=q'=e\cos(v'-\varpi),$$

$$\frac{p}{r''}-1=q''=e\cos(v''-\varpi).$$

Multiplicando a primeira d'estas equações por sen $(v''-v')$, a segunda por $-$ sen $(v''-v)$, a terceira por sen $(v'-v)$, e sommando, resulta

$$\left(\frac{p}{r}-1\right)\text{sen}\,(v''-v')-\left(\frac{p}{r'}-1\right)\text{sen}\,(v''-v)+\left(\frac{p}{r''}-1\right)\text{sen}\,(v'-v)=0;$$

e por conseguinte:

$$p=\frac{rr'r''[\text{sen}(v''-v')-\text{sen}(v''-v)+\text{sen}(v'-v)]}{r'r''\text{sen}(v''-v')-rr''\text{sen}(v''-v)+rr'\text{sen}(v'-v)}\ldots(12).$$

As mesmas equações dão

$$\frac{q-q'}{q+q'}=\frac{\cos(v-\varpi)-\cos(v'-\varpi)}{\cos(v-\varpi)+\cos(v'-\varpi)};$$

e por conseguinte

$$\text{tang}\left(\varpi-\frac{v'+v}{2}\right)=\frac{q'-q}{q'+q}\cot\frac{v'-v}{2}\ldots(13).$$

Finalmente

$$e=\frac{q}{\cos(v-\varpi)}\ldots(14).$$

A expressão de $\text{tang}\left(\varpi-\frac{v'+v}{2}\right)$ póde applicar-se a qualquer das combinações das observações duas a duas. E a expressão de e póde applicar-se a qualquer das observações.

Teremos depois

$$a=\frac{p}{1-e^2},\ \cos(nt+\varepsilon-\varpi)=\frac{p-r}{er}\ldots(15),$$

das quaes a segunda tambem se póde applicar a qualquer das observações.

214. O denominador da expressão (12) de p é o dobro da área do triangulo comprehendido entre os tres pontos da ellipse. Se este denominador for muito pequeno, a formula

$$\delta\frac{h}{k}=\frac{1}{k}\,\delta h-\frac{h}{k}\cdot\frac{1}{k}\,\delta k$$

mostra que os erros dos dois termos pódem influir muito em p; e porisso devem escolher-se as longitudes de modo que se evite, quanto for possivel, esse inconveniente (Astr. de Santini, n.° 235).

215. Indicaremos aqui um processo, que póde dar ao menos uma primeira approximação da grandeza do eixo maior, por meio da observação das differenças entre as longitudes geocentricas do Sol e as do planeta; suppondo a orbita d'este circular (Astr. de Biot. 3.ª ed. pag. 326).

Sejam S, T, p (Fig. 37) as posições do Sol, da terra, e do planeta; e P a projecção orthogonal de p no plano da ecliptica.

O triangulo STP dá

$$\frac{r'\cos\lambda'}{R}=\frac{\operatorname{sen} T}{\operatorname{sen}(T+S)};$$

e para outra observação, será tambem

$$\frac{R\cos\lambda'}{R_1}=\frac{\operatorname{sen} T_1}{\operatorname{sen}(T_1+S_1)};$$

designando R, $R_{\prime}$ os raios vectores da terra nas duas observações, e r' o raio da orbita do planeta.

Sejam: n' o medio movimento angular do planeta; (n) o movimento angular da terra, na occasião da observação; e t o intervallo de tempo decorrido entre as duas observações.

Será $$S_1 - S = t[(n) - n'];$$

ou, em virtude do n.º 185, que dá $n' = \frac{n}{r'^{\frac{3}{2}}}$, sendo n o medio movimento angular da terra, e tomando por unidade de distancia a media distancia do Sol á terra,

$$S_1 - S = t\left[(n) - \frac{n}{r'^{\frac{3}{2}}}\right].$$

Finalmente os triangulos pTP, pSP dão

$$\frac{\tang \lambda}{\tang \lambda'} = \frac{SP}{TP} = \frac{\operatorname{sen} T}{\operatorname{sen} S'},$$

e para outra observação,

$$\frac{\tang \lambda_{,}}{\tang \lambda'_{,}} = \frac{\operatorname{sen} T_{,}}{\operatorname{sen} S_{,}}.$$

Assim o systema das cinco equações:

$$\begin{cases} \dfrac{r' \cos \lambda'}{R} = \dfrac{\operatorname{sen} T}{\operatorname{sen}(T+S)}, \\[2ex] \dfrac{r' \cos \lambda'_{,}}{R_{,}} = \dfrac{\operatorname{sen} T_{,}}{\operatorname{sen}(T_{,}+S_{,})}, \\[2ex] S_{,} - S = t\left[(n) - \dfrac{n}{r'^{\frac{3}{2}}}\right]. \\[2ex] \tang \lambda' = \tang \lambda \dfrac{\operatorname{sen} T}{\operatorname{sen} S'}, \\[2ex] \tang \lambda'_{,} = \tang \lambda_{,} \dfrac{\operatorname{sen} T_{,}}{\operatorname{sen} S_{,}}, \end{cases}$$

fará conhecer as cinco quantidades S, $S_{,}$, λ', $\lambda_{,}'$, r', se a observação der as differenças T, $T_{,}$, das longitudes geocentricas do Sol e do planeta, e as latitudes geocentricas do planeta λ, $\lambda_{,}$.

Se forem muito pequenas as latitudes heliocentricas, será mais facil usar de approximações successivas, suppondo na primeira $\cos\lambda' = 1$, $\cos\lambda'_1 = 1$, e depois achando novos valores de λ' e λ'_1 pelas duas ultimas.

Finalmente, com $l' = 180° + L - S$, $l'_{,} = 180° + L_1 - S_1$, λ', $\lambda'_{,}$, as formulas do n.º 202 farão conhecer tambem a posição do plano da orbita.

Assim, na hypothese da circularidade, bastarão duas observações para determinar approximadamente o raio e a inclinação da orbita d'um planeta novo.

IV

Leis de Kepler

216. O exame dos movimentos dos planetas nas suas respectivas orbitas, e a comparação das velocidades medias de uns com as dos outros, reproduz as leis de Kepler, cuja verdade já tinhamos reconhecido nos n.os 16 e 18 para o Sol; e dá a outra, de que fallamos no n.º 22.

Assim os movimentos de todos os planetas satisfazem, ao menos proximamente, ás tres leis de Kepler:

1.º *As áreas descriptas pelos raios vectores dos planetas são proporcionaes aos tempos empregados em descrevel-as.*

2.º *Os planetas descrevem ellipses em torno do Sol, que é o foco d'ellas.*

3.º *Os quadradosdos tempos periodicos são proporcionaes aos cubos dos eixos maiores das orbitas dos planetas.*

217. Quando se introduzem nas formulas do movimento as leis de Kepler, acha-se:

Que, em virtude da primeira d'ellas, a força, que retem os planetas nas suas orbitas, é dirigida para o Sol; e que é attractiva, por serem as orbitas concavas para o Sol:

Que, em virtude da segunda, a força attractiva é inversamente proporcional aos quadrados das distancias ao Sol:

E que, em virtude da terceira, esta força é, para a mesma distancia, proporcional á massa; isto é, que é a mesma para todas as moleculas dos planetas, qualquer que seja a sua natureza.

Portanto as tres leis de Kepler são consequencias d'uma só lei, que rege os movimentos planetarios, e que, segundo iremos vendo, tambem rege os movimentos dos outros corpos celestes:

A attracção é directamente proporcional ás massas, e inversamente proporcional aos quadrados das distancias dos corpos que se attrahem.

218. Como o movimento de cada planeta em torno do Sol é perturbado pela acção dos outros corpos celestes, as leis de Kepler não se verificam rigorosamente; mas, quando se descontam nos movimentos observados os effeitos d'essas perturbações, que as formulas da Mechanica Celeste fazem conhecer, o que fica d'elles satisfaz exactamente áquellas leis.

Por onde se vê que, se o movimento de cada planeta não fosse perturbado pela acção dos outros corpos celestes, as leis de Kepler seriam exactas; e que por isso a lei da attracção, consequencia d'ellas, é a unica e rigorosa, pela qual se regulam os movimentos planetarios.

V

Correcção dos elementos da orbita

219. Depois que, pelos meios até aqui expostos, se tiverem determinado com bastante approximação os elementos da orbita d'um planeta, e que, pelas formulas da Mechanica Celeste, se tiverem achado as perturbações das suas coordenadas, convirá aproveitar um grande numero de observações para a correcção simultanea de todos os elementos.

Para isto devem converter-se em longitudes e latitudes geocentricas as ascensões rectas e declinações, achadas pela observação, por meio das formulas de transformação, que se deram na primeira parte; depois as longitudes e latitudes geocentricas em heliocentricas, pelas formulas (2) do n.º 195; e finalmente estas em coordenadas referidas á orbita pelas formulas (5) do n.º 197. Então, discorrendo como no cap. IX da primeira secção, calcular-se-hão as correcções da ellipse planetaria.

220. Mas se, conhecendo por uma Ephemeride as coordenadas tabulares heliocentricas e geocentricas, quizermos estabelecer as equações de condição immediatamente sobre a comparação d'aquellas coordenadas com as geocentricas deduzidas da observação, as formulas (5) do n.º 197 darão:

$$\delta l' = \left[1 - \frac{\operatorname{sen} 2(l'-N)}{\operatorname{sen} 2(v-N)}\right]\delta N + \frac{\operatorname{sen} 2(l'-N)}{\operatorname{sen} 2(v-N)}\left[\delta v - \tfrac{1}{2}\operatorname{tg} I \operatorname{sen} 2(v-N)\,\delta I\right],$$

$$\delta\lambda' = \frac{\operatorname{sen} 2\lambda'}{\operatorname{sen} 2I}\left[\delta I + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2I \cot(l'-N)(\delta l' - \delta N)\right].$$

As equacões do movimento elliptico (n.º 19) dão:

$$\delta u = \frac{t\delta n + n\delta t + \dfrac{\operatorname{sen} u\,\delta e}{\operatorname{sen} 1''}}{1 - e\cos u} = \frac{a\,(t\delta n + n\delta t)}{r'} + \frac{\operatorname{sen}(v - \tilde\omega)}{\sqrt{1 - e^2}}\,\delta e;$$

$$\delta v = \delta\tilde\omega + \frac{\operatorname{sen}(v - \tilde\omega)}{\operatorname{sen} u}\,\delta u + \frac{\operatorname{sen}(v - \tilde\omega)}{1 - e^2}\,\delta e$$

$$= \delta\tilde\omega + \frac{a^2}{r'^2}\sqrt{1 - e^2}\,(t\delta n + n\delta t) + \operatorname{sen}(v - \tilde\omega)\left(\frac{a}{r'} + \frac{1}{1 - e^2}\right)\delta e;$$

$$\delta r' = \frac{r'\delta a}{a} - \frac{2r'e\delta e}{1 - e^2} + \frac{e}{a(1 - e^2)}\,r'^2 \operatorname{sen}(v - \tilde\omega)\,(\delta v - \delta\tilde\omega):$$

contando-se t desde a passagem pelo perihelio; e sendo, em virtude da terceira lei de Kepler, $\dfrac{\delta a}{a} = -\dfrac{2}{3}\,\dfrac{\delta n}{n}$.

Finalmente as formulas (3) do n.º 195 dão:

$$\delta\rho' = \cos\lambda'\,\delta r' - r'\operatorname{sen}\lambda'\,\delta\lambda',$$

$$\delta l = \frac{\operatorname{sen}(l - \mathrm{L})}{\operatorname{sen}(l' - \mathrm{L})}\left[\cos(l' - l)\,.\,\delta l' + \operatorname{sen}(l' - l)\,.\,\frac{\delta\rho'}{\rho'}\right],$$

$$\delta\lambda = \frac{\operatorname{sen} 2\lambda}{\operatorname{sen} 2\lambda'}\,\delta\lambda' + \frac{\operatorname{sen} 2\lambda}{2}\Big[\cot(l - \mathrm{L})\,\delta l - \cot(l' - \mathrm{L})\,\delta l'\Big].$$

221. Portanto as formulas

$$\delta v = \delta\varpi + \frac{a^2\sqrt{1-e^2}}{r'^2}(t\delta n + n\delta t) + \left(\frac{a}{r'} + \frac{1}{1-e^2}\right)\frac{\operatorname{sen}(v-\varpi)}{\operatorname{sen} 1''}\delta e,$$

$$\delta r' = \frac{e}{a(1-e^2)} r'^2 \operatorname{sen}(v-\varpi)(\delta v - \delta\varpi) - \frac{2}{3}\frac{r'\delta n}{n} - \frac{2r'e\delta e}{1-e^2},$$

$$\delta l' = \left(1 - \frac{\operatorname{sen} 2(l'-N)}{\operatorname{sen} 2(v-N)}\right)\delta N + \frac{\operatorname{sen} 2(l'-N)}{\operatorname{sen} 2(v-N)}\left(\delta v - \tfrac{1}{2}\operatorname{tang} I \operatorname{sen} 2(v-N)\delta I\right),$$

$$\delta\lambda' = \frac{\operatorname{sen} 2\lambda'}{\operatorname{sen} 2I}\left[\delta I + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2I \cot(l'-N)(\delta l' - \delta N)\right],$$

$$\delta\rho' = \cos\lambda'\,\delta r' - r'\operatorname{sen}\lambda'\,\delta\lambda'\operatorname{sen} 1'',$$

$$\delta l = \frac{\operatorname{sen}(l-L)}{\operatorname{sen}(l'-L)}\left[\cos(l'-l)\,\delta l' + \operatorname{sen}(l'-l)\frac{\delta\rho'}{\rho'}\right],$$

$$\delta\lambda = \frac{\operatorname{sen} 2\lambda}{\operatorname{sen} 2\lambda'}\delta\lambda' + \frac{\operatorname{sen} 2\lambda}{2}\left[\cot(l-L)\,\delta l - \cot(l'-L)\,\delta l'\right],$$

dão as equações de condição da fórma

$$\delta l = A\delta N + B\delta I + C\delta n + D\delta t + E\delta\varpi + F\delta e,$$

$$\delta\lambda = A'\delta N + B'\delta I + C'\delta n + D'\delta t + E'\delta\varpi + F'\delta e.$$

222. Se houver duvida nas massas dos planetas de que dependem as perturbações, deveremos empregar as coordenadas taes quaes as dá a observação, e ajuntar a δv e $\delta r'$ os termos $\Sigma P\delta m$, nos quaes são P os coefficientes das massas m nas expressões das respectivas perturbações.

CAPITULO IV

Apparencias, e rotação dos planetas

223. A observação do movimento periodico das manchas em alguns planetas, e do achatamento em quasi todos, são provas da rotação d'estes corpos de occidente para oriente, como no Sol e na terra.

Mercurio. A observação do corte que se nota em uma das extremidades do crescente luminoso mostra que a rotação d'este planeta se completa em $24^d 5^m 30^s$; e a direcção das bandas transversaes, suppostas por analogia parallelas ao equador, mostra que o eixo polar faz com a ecliptica o angulo de 70° (Schroeter). O achatamento, isto é, a differença entre os dois eixos dividida pelo equatorial, determinado por medidas micrometricas feitas na passagem por diante do Sol em 1848, é $\frac{1}{28}$ (Daws).

Schroeter suppõe 'neste astro montanhas, das quaes as mais elevadas têm a altura $\frac{1}{126}$ do raio do planeta.

Venus. As manchas d'este planeta mostram que a sua rotação se completa em $23^h 21^m 19^s$; e que o eixo polar faz com a ecliptica o angulo de 75° (Schroeter). Ainda não se verificou nem mediu o seu achatamento; porque obsta a isso o grande brilho do planeta, e não se tem feito medições micrometricas nas raras passagens d'este por diante do Sol.

Schroeter suppõe 'neste astro montanhas, que chegam até a altura $\frac{1}{140}$ do raio do planeta; e uma atmosphera, que produz na superficie d'elle a refracção horizontal $30'34''$.

Marte. As manchas mostraram que a rotação do planeta se completa em $24^h 39^m 21^s,7$ (W. Herschel), ou em $24^h 37^m 23^s$ (Beer e Madler); e o seu eixo polar faz com a ecliptica o angulo de $61°18'$ (W. Herschel). O achatamento é $\frac{1}{39}$ (Arago).

A obliquidade do equador, pouco differente da do equador terrestre, indica a existencia de estações similhantes ás terrestres. As manchas luminosas variaveis, que apparecem alternativamente nos polos e se desvanecem, segundo a posição do Sol, podem ser massas de neve accumuladas no inverno e derretidas no verão, e revelar a existencia d'uma atmosphera vaporosa sujeita a influencias meteorologicas (W. Herschel).

Este planeta distingue-se pela sua cor avermelhada.

Jupiter. As manchas mostram que a sua rotação se completa em $9^h 55^m 33^s,6$ (Schroeter), ou em $9^h 55^m 21^s,3$ (Airy); e o eixo polar, supposto perpendicular ao plano parallelo ás bandas, faz com a ecliptica um angulo de $87°$ a $88°$. O achatamento é $\frac{1}{18}$.

Este planeta tem bandas escuras, sensivelmente parallelas entre si, e quasi parallelas á ecliptica. As bandas são muito variaveis; e a sua variabilidade denuncía, segundo alguns astronomos, a existencia d'uma atmosphera sujeita a grandes convulsões meteorologicas.

Saturno. Pela observação das bandas d'este planeta conheceu W. Herschel que a sua rotação se completa em $10^h 16^m 0^s,4$; e o seu eixo polar faz com a ecliptica o angulo de $61°30'$ (Hind), O achatamento é $\frac{1}{10}$ (Hind).

Este planeta é notavel pelo annel, de que adiante tractaremos.

Urano. Os eixos de Urano são deseguaes, e o polar é parallelo ao plano da ecliptica; o que indica a rotação d'este planeta perpendicularmente á ecliptica.

CAPITULO V

Da aberração

224. Supponhamos que a luz proveniente d'uma estrella S chega á terra T (Fig. 38), sendo T*s* a sua velocidade, e TT_1 a da terra. Decompondo T*s* nas duas T*s'* e TT_1, o raio luminoso só pode chocar a retina em virtude de T*s'*, porque TT_1 não faria mais do que conserval-o na mesma posição relativamente ao observador; e a estrella será vista pela direcção S'T.

Compondo pois a velocidade da luz T*s* com a da terra T*t*, tomada em sentido contrario, a direcção da resultante TS' será aquella pela qual o observador vê a estrella.

O angulo S'TS, feito pela direcção apparente S'T com a verdadeira ST, é a *aberração da luz* da estrella.

225. Supponhamos agora que S é um astro que tem movimento proprio, de sorte que, em quanto o raio luminoso chega a T, elle descreve o espaço S'S (Fig. 39). A velocidade do raio é a resultante da velocidade propria da luz e da velocidade do astro. Assim, compondo a velocidade do astro T*s''* com a propria da luz T*s*, resultará a do raio luminoso T*s'*, na direcção do qual o observador veria o astro, se não tivesse movimento proprio; mas, em virtude d'este movimento, vel-o-ha pela direcção TS', que resulta de compor as velocidades T*s'*, T*t*, como se disse no numero precedente.

Portanto determinar a aberração reduz-se a compor em T a velocidade propria da luz, a do astro, e a da terra tomada em sentido contrario ao do seu movimento.

226. A velocidade da terra resulta das suas velocidades proprias de revolução em volta do Sol, e de rotação em torno do eixo polar; e tambem da velocidade de translação do systema planetario, se este systema se move.

Mas esta ultima velocidade, se existe, não poderá influir na aberração dos corpos do systema planetario, por ser commum aos planetas e á terra; e, em quanto ás estrellas, compor-se-ha com os seus movimentos proprios.

227. Restaria considerar o effeito da mudança que a atmosphera e as lentes dos oculos operam na velocidade da luz que as atravessa.

Porém, attendendo a que, segundo as leis da optica, a alteração da velocidade da luz, na passagem do meio em que esta é emittida para aquelle em que está a retina, deve ser a mesma, quer haja quer não haja outros meios interpostos, parece-nos que aquella mudança não pode influir no valor da aberração. O que confirmam as experiencias de Arago (Astr. de Biot, 2.ª ed. tom. 3.° pag. 91, e 3.ª ed. tom. 5.° pag. 163).

228. Sejam: V' a velocidade da luz; $\frac{ds''}{dt}$ e $\frac{ds'''}{dt}$ as de revolução e de rotação da terra, $\frac{ds^{\text{IV}}}{dt}$ a do astro; e V a resultante.

Chamando X, Y, Z, com os respectivos accentos, os angulos que estas velocidades fazem com os eixos coordenados, teremos:

$$\left.\begin{aligned} V\cos X &= V'\cos X' - \frac{ds''}{dt}\cos X'' - \frac{ds'''}{dt}\cos X''' + \frac{ds^{\text{IV}}}{dt}\cos X^{\text{IV}}, \\ V\cos Y &= V'\cos Y' - \frac{ds''}{dt}\cos Y'' - \frac{ds'''}{dt}\cos Y''' + \frac{ds^{\text{IV}}}{dt}\cos Y^{\text{IV}}, \\ V\cos Z &= V'\cos Z' - \frac{ds''}{dt}\cos Z'' - \frac{ds'''}{dt}\cos Z''' + \frac{ds^{\text{IV}}}{dt}\cos Z^{\text{IV}} \end{aligned}\right\} \ldots (1).$$

229. Suppondo que a luz gasta $493^s,13$ em percorrer a distancia media a do Sol á terra, e tomando o dia por unidade de tempo, é

$$1.^\circ \qquad V' = \frac{86400a}{493,15}.$$

Em quanto a $\frac{ds''}{dt}$, as formulas do movimento elliptico (n.os 19 e 81) doã

$$\frac{d\Theta}{dt}=\frac{\sqrt{1-e^2}}{(1-e\cos u)^2}\cdot\frac{d\,(nt)}{dt}=\frac{n[1+e\cos(\Theta-\tilde{\omega})]^2}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{dr}{dt}=\frac{ae\,(1-e^2)\,\mathrm{sen}\,(\Theta-\tilde{\omega})}{[1+e\cos(\Theta-\tilde{\omega})^1]^2}\cdot\frac{d(\Theta-\tilde{\omega})}{dt}=\frac{nae\,\mathrm{sen}\,(\Theta-\tilde{\omega})}{\sqrt{1-e^2}},$$

e por conseguinte

$$2.^{\text{o}}\qquad \frac{ds''}{dt}=\sqrt{\frac{dr^2}{dt^2}+r^2\frac{d\Theta^2}{dt^2}}=\frac{na\sqrt{1+2\,e\cos(\Theta-\tilde{\omega})+e^2}}{\sqrt{1-e^2}}.$$

Do mesmo modo, para os planetas,

$$3.^{\text{o}}\qquad \frac{ds^{\text{IV}}}{dt}=\frac{n'a'\sqrt{1+2\,e'\cos(v'-\tilde{\omega}')+e'^2}}{\sqrt{1-e'^2}}.$$

E para os cometas, nos quaes é $e'=1$,

$$(3.^{\text{o}})'\qquad \frac{ds^{\text{IV}}}{dt^{\text{IV}}}=\frac{2n'a'^{\frac{3}{2}}\cos\frac{1}{2}(v'-\tilde{\omega}')}{\sqrt{\frac{1}{2}p'}},$$

sendo $p'=2\,a'\,(1-e'^2)$ o parametro, quadruplo da distancia do vertice ao foco na parabola.

Finalmente, chamando ρ o raio terrestre, D' a colatitude geocentrica do logar do observador, e attendendo a que as velocidades effectivas estão na razão composta das angulares e dos raios,

$$é \qquad \frac{ds'''}{dt} = na. \frac{T+1}{1} . \frac{\rho \operatorname{sen} D'}{a},$$

ou

$$4.^\circ \qquad \frac{ds'''}{dt} = n(T+1)\rho \operatorname{sen} D'.$$

Nestas formulas são n, n', os movimentos angulares diurnos sideraes de revolução da terra e do astro, e $T+1$ o anno sideral expresso em dias sideraes, isto é, T o mesmo anno expresso em dias solares.

230. Os angulos $X, Y, Z, X', Y', Z', \ldots$ dependem da escolha dos eixos. Tomemos para eixo dos xx a linha dos equinoccios; para eixo dos yy, no plano da ecliptica, a linha dos solsticios; e para eixo dos zz a perpendicular ao mesmo plano: sendo positivos os x para a parte d'aries, os y para a parte de cancer, e os z para a parte do polo boreal.

Então, chamando l, λ a longitude e a latitude geocentricas apparentes do astro; e l', λ', as suas longitude e latitude geocentricas verdadeiras; e designando pelas mesmas letras subplicadas as longitudes e latitudes de R, s; serão:

$$1.^\circ \begin{cases} \cos X = \cos \lambda_1 \cos l_1, \cos Y = \cos \lambda_1 \operatorname{sen} l_1, \cos Z = \operatorname{sen} \lambda_1, \\ \cos X' = \cos \lambda_1' \cos l_1', \cos Y' = \cos \lambda_1' \operatorname{sen} l_1', \cos Z' = \operatorname{sen} \lambda_1'. \end{cases}$$

Em quanto a X'', Y'', Z'': por se mover a terra no plano da ecliptica, são

$$Y'' = 90^\circ - X'', Z'' = 0.$$

Falta determinar X'', para o que temos (Fig. 40),

$$\operatorname{tang} T = \frac{rdv}{dr} = \frac{1+e\cos(v-\pi)}{e \operatorname{sen}(v-\pi)},$$

sendo v e π as longitudes da terra e do perihelio.

E como T differe pouco de 90°, podemos tomar $90°-T$ por $\cot T$, isto é

$$T = 90° - \frac{R'' e \operatorname{sen}(v-\pi)}{1+e\cos(v-\pi)},$$

ou $$X'' = 90° - \frac{R'' e \operatorname{sen}(v-\pi)}{1+e\cos(v-\pi)} + v = \Theta - 90° - \frac{R'' e \operatorname{sen}(\Theta-\tilde{\omega})}{1+e\cos(\Theta-\tilde{\omega})}.$$

Assim é

$$2.° \quad X'' = \Theta - 90° - \frac{R' e \operatorname{sen}(\Theta-\tilde{\omega})}{1+e\cos(\Theta-\tilde{\omega})},\ Y'' = 90° - X'',\ Z'' = 90.$$

Passemos a X^{IV}, Y^{IV}, Z^{IV}. Se chamarmos v', π', N, os angulos feitos pelo raio vector do planeta, pela distancia perihelia, e pela tangente com a linha dos nodos, o mesmo processo dará

$$N = 90° + v' - \frac{R'' e' \operatorname{sen}(v'-\pi')}{1+e'\cos(v'-\pi')}.$$

Sejam: CN (Fig. 41) a direcção da tangente; CN′ a da sua projecção na ecliptica; CΩ a linha dos nodos; C♈ e Cy os eixos dos xx e dos yy.

Chamando N' o angulo $N'C\Omega$, Ω a longitude $\Upsilon C\Omega$ do nodo, e i a inclinação da orbita acb: dos triangulos esphericos abc, adc, aec tiram-se

$$3.^\circ \quad \begin{cases} \cos Z^{IV} = \operatorname{sen} N \operatorname{sen} i, \\ \cos Y^{IV} = \cos N \operatorname{sen} \Omega + \operatorname{sen} N \cos \Omega \cos i, \\ \cos X^{IV} = \cos N \cos \Omega - \operatorname{sen} N \operatorname{sen} \Omega \cos i, \end{cases}$$

que, junctas com a expressão de N, dão Z^{IV}, Y^{IV}, X^{IV}.

Finalmente, para achar Z''', Y''', X''', basta fazer nestas formulas

$$N = 90^\circ + M, \Omega = 0, i = \omega,$$

sendo M a ascensão recta do meridiano: o que dará

$$4.^\circ \quad \cos X''' = -\operatorname{sen} M, \cos Y''' = \cos M \cos \omega, \cos Z''' = \cos M \operatorname{sen} \omega.$$

231. Dados assim os elementos que entram nas equações (1), tractemos de combinal-as convenientemente.

A somma dos seus quadrados, o quociente da segunda pela primeira, e a terceira, attendendo a serem $l_1 = 180^\circ + l$, $l'_1 = 180^\circ + l'$, $\lambda_1 = -\lambda$, $\lambda'_1 = -\lambda'$, dão:

$$V^2 = \left\{ \begin{aligned} &\left(V' \cos \lambda' \cos l' + \frac{ds''}{dt} \cos X'' + \frac{ds'''}{dt} \cos X''' - \frac{ds^{IV}}{dt} \cos X^{IV}\right)^2 \\ &+ \left(V' \cos \lambda' \operatorname{sen} l' + \frac{ds''}{dt} \cos Y'' + \frac{ds'''}{dt} \cos Y''' - \frac{ds^{IV}}{dt} \cos Y^{IV}\right)^2 \\ &+ \left(V' \operatorname{sen} \lambda' + \frac{ds''}{dt} \cos Z'' + \frac{ds''}{dt} \cos Z''' - \frac{ds^{IV}}{dt} \cos Z^{IV}\right)^2 \end{aligned} \right\},$$

$$\operatorname{tang} l = \frac{\operatorname{tang} l' + \dfrac{ds''}{V'dt} \cdot \dfrac{\cos Y''}{\cos \lambda' \cos l'} \ldots}{1 + \dfrac{ds''}{V'dt} \cdot \dfrac{\cos X''}{\cos \lambda' \cos l'} + \ldots},$$

$$\operatorname{sen} \lambda = \frac{V'}{V} \operatorname{sen} \lambda' + \frac{ds''}{V dt} \cos Z'' \ldots$$

Desprezando os quadrados de $\frac{ds''}{V'dt}$, ... e por conseguinte os de $l - l'$ e $\lambda - \lambda'$, que são da mesma ordem, estas equações reduzem-se a:

$$(2) \ldots \begin{cases} V = V' + \dfrac{ds''}{dt} \left\{ \cos \lambda' (\cos l' \cos X'' + \operatorname{sen} l' \cos Y'') + \operatorname{sen} \lambda' \cos Z'' \right\} \ldots \\[2ex] l - l' = + \dfrac{ds''}{V'dt} \cdot \dfrac{\cos Y'' \cos l' - \cos X'' \operatorname{sen} l'}{\cos \lambda'} \ldots \\[2ex] \lambda - \lambda' = - \dfrac{ds''}{V'dt} \left\{ \operatorname{sen} \lambda' (\cos l' \cos X'' + \operatorname{sen} l' \cos Y'') - \cos \lambda' \cos Z'' \right\} \ldots \end{cases}$$

nas quaes é necessario substituir as expressões relativas a cada um dos termos, que se formaram nos n.os 229 e 230.

232. Comecemos pela aberração devida ao movimento annuo da terra.

Pelo n.° 229, é

$$\frac{ds''}{V'dt} = \frac{493{,}15 \, . \, n}{86400 \sqrt{1 - e^2}} \sqrt{1 + 2 e \cos (\Theta - \varpi) + e^2},$$

ou, por ser

$$\frac{493,15 \,.\, n}{86400\sqrt{1-e^2}} = \frac{483,15}{86400\sqrt{1-e^2}} \cdot \frac{360 \,.\, 3600}{365,25637} = 20'',2522 = k,$$

$$\frac{ds''}{V'dt} = k\sqrt{1+2\,e\cos(\Theta-\tilde{\omega})+e^2};$$

e pelo n.º 230, são:

$$\cos Y'' \cos l' - \cos X'' \operatorname{sen} l' = \operatorname{sen}(X''-l') = -\cos\left(l'-\Theta+\frac{R''\, e \operatorname{sen}(\Theta-\tilde{\omega})}{1+e(\cos(\Theta-\tilde{\omega})}\right),$$

$$\cos Y'' \operatorname{sen} l' + \cos X'' \cos l' = \cos(X''-l') = -\operatorname{sen}\left(l'-\Theta+\frac{R''\, e \operatorname{sen}(\Theta-\tilde{\omega})}{1+e\cos(\Theta-\tilde{\omega})}\right),$$

$$Z'' = 90^\circ.$$

Portanto a aberração, de que se tracta, é

(3)..
Em longitude:

$$\delta'' l = -\frac{k\sqrt{1+2e\cos(\Theta-\tilde{\omega})+e^2}}{\cos\lambda'}\cos\left(\Theta-l'-\frac{R''\, e\operatorname{sen}(\Theta-\tilde{\omega})}{1+e\cos(\Theta-\tilde{\omega})}\right),$$

Em latitude:

$$\delta''\lambda = -k\sqrt{1+2e\cos(\Theta-\tilde{\omega})+e^2}\operatorname{sen}\lambda'\operatorname{sen}\left(\Theta-l'-\frac{R''\, e\operatorname{sen}(\Theta-\tilde{\omega})}{1+e\cos(\Theta-\tilde{\omega})}\right).$$

233. Passemos á aberração devida ao movimento diurno da terra.

Chamando (ρ) o raio do equador, e c a excentricidade dos meridianos terrestres, é (Calc. das Eph. pag. 108)

$$\cot D' = (1 - c^2)\cot D, \text{ ou } \operatorname{sen} D' = \frac{\operatorname{sen} D}{\sqrt{(1-c^4)\cos^2 D + \operatorname{sen}^2 D}},$$

e conseguintemente,

$$\rho \operatorname{sen} D' = \frac{(\rho)\operatorname{sen} D}{\sqrt{1 - c^4\cos^2 D}}.$$

Logo (n.° 229):

$$\frac{ds'''}{V'dt} = \frac{493{,}15\, n\,(T+1)\,\rho}{86400\, a}\operatorname{sen} D'$$

$$= \frac{493{,}15\, n\,(T+1)\operatorname{sen}\Pi}{86400\sqrt{1-c^2\cos^2 D}}\operatorname{sen} D$$

$$= k\,(T+1)\operatorname{sen}\Pi\sqrt{1-e^2}\,\frac{\operatorname{sen} D}{\sqrt{1-c^4\cos^4 D}},$$

onde Π designa a parallaxe horizontal do Sol:

ou, suppondo $\Pi = 8'',5776\,\frac{\rho}{(\rho)}$, $k\,(T+1)\operatorname{sen}\Pi\sqrt{1-e^2} = \chi$,

$$\frac{ds'''}{V'dt} = \chi\frac{\operatorname{sen} D}{\sqrt{1-c^2\cos^2 D}},\ \chi = 0'',30846\,\frac{\rho}{(\rho)}.$$

Em virtude d'isto e do n.º 230, as aberrações diurnas em longitude e latitude serão:

$$(4)..\begin{cases} \delta''' l = \chi \dfrac{\text{sen D}}{\sqrt{1-c^2\cos^2 \text{D}}}\cdot\dfrac{\cos \text{M} \cos\omega \cos l' + \text{sen M sen } l'}{\cos\lambda'}, \\ \\ \delta'''\lambda = -\chi\dfrac{\text{sen D}}{\sqrt{1-c^2\cos^2\text{D}}}\left[\begin{matrix}\text{sen}\,\lambda' (\text{sen } l' \cos \text{M} \cos\omega - \cos l' \text{ sen M}) \\ -\cos\lambda' \cos \text{M sen } \omega\end{matrix}\right]. \end{cases}$$

234. Finalmente occupemos-nos da aberração devida ao movimento dos planetas ou dos cometas.

Para os planetas, em virtude do (n.º 229), e attendendo á terceira lei de Kepler, é

$$\frac{ds^{\text{IV}}}{\text{V}'dt} = \frac{493{,}15 n'a'\sqrt{1+2e'\cos(v'-\varpi)+e'^2}}{86400 \quad a\sqrt{1-e'^2}}$$

$$= k\frac{\sqrt{a(1-e^2)}}{\sqrt{a'(1-e'^2)}}.\sqrt{1+2e'\cos(v'-\varpi')+e'^2}.$$

E para os cometas é:

$$\frac{ds^{\text{IV}}}{\text{V}'dt} = \frac{2k\sqrt{a(1-e^2)}}{\sqrt{\frac{1}{2}p'}}\cos\tfrac{1}{2}(v'-\varpi').$$

Em virtude d'estes valores, e do n.º 230, as aberrações devidas ao movimento do astro serão

$$\delta^{\text{IV}} l = -k\sqrt{\frac{p}{p'}}\frac{\sqrt{1+2e'\cos(v'-\varpi')+e'^2}}{\cos\lambda'}[\operatorname{sen}N\cos i\cos(\Omega-l')+\cos N\operatorname{sen}(\Omega-l')]$$

$$\delta^{\text{IV}}\lambda = -k\sqrt{\frac{p}{p'}}\sqrt{1+2e'\cos(v'-\varpi)+e'^2}\left\{\begin{matrix}\operatorname{sen}\lambda'\left(\begin{matrix}-\cos N\cos(\Omega-l')\\+\operatorname{sen}N\cos i\operatorname{sen}(\Omega-l')\end{matrix}\right)\\+\cos\lambda'\operatorname{sen}N\operatorname{sen}i\end{matrix}\right\}.$$

Basta fazer nestas $e'=1$, quando se tracta dos cometas.

Então, substituindo o valor de N (n.º 230), que para os cometas é exactamente $N=90^\circ+v'-\frac{1}{2}(v'-\varpi')=90^\circ+\frac{1}{2}(v'+\varpi')$, vem

$$(\delta^{\text{IV}} l) = -\frac{2k}{\cos\lambda'}\sqrt{\frac{p}{p'}}\cos\frac{v'-\varpi'}{2}\left\{\begin{matrix}\cos\left(\Omega-l'+\dfrac{v'+\varpi'}{2}\right)\\-2\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}i\cos(\Omega-l')\cos\dfrac{v'+\varpi'}{2}\end{matrix}\right\}$$

$$(\delta^{\text{IV}}\lambda) = -2k\sqrt{\frac{p}{p'}}\cos\frac{v'-\varpi'}{2}\left\{\begin{matrix}\operatorname{sen}\lambda'\operatorname{sen}\left(\Omega-l'+\dfrac{v'+\varpi'}{2}\right)+\cos\lambda'\operatorname{sen}i\cos\dfrac{v'+\varpi'}{2}\\-2\operatorname{sen}\lambda'\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}i\operatorname{sen}(\Omega-l')\cos\dfrac{v'+\varpi'}{2}\end{matrix}\right\}.$$

Devendo estas aberrações empregar-se com signal contrario quando o movimento heliocentrico do astro for retrogrado.

235. Desprezando os quadrados das excentricidades das orbitas da terra e dos outros planetas, e pondo por N o seu valor (n.º 230), as expressões das aberrações devidas aos movimentos da terra e dos planetas, dos n.ºs 232 e 234, reduzem-se a:

$$(5)\ldots\left\{\begin{aligned}\delta'' l &= -\frac{k}{\cos\lambda'}\left[\cos(\Theta-l')+e\cos(\varpi-l')\right],\\ \delta''\lambda &= -k\operatorname{sen}\lambda'[\operatorname{sen}(\Theta-l')+e\operatorname{sen}(\varpi-l')].\end{aligned}\right.$$

e

$$
(6)\ldots\left\{\begin{array}{l}
\delta^{\text{IV}} l = -\dfrac{k}{\cos\lambda'}\sqrt{\dfrac{a}{a'}}\left\{\begin{array}{l}\cos(\Omega + v' - l') - 2\,\text{sen}^2\tfrac{1}{2} i \cos(\Omega - l')\cos v' \\ + e'[\cos(\Omega + \varpi' - l') - 2\cancel{e}\,\text{sen}^2\tfrac{1}{2} i \cos(\Omega - l')\cos\varpi']\end{array}\right\} \\[3ex]
\delta^{\text{IV}}\lambda = -k\sqrt{\dfrac{a}{a'}}\left\{\begin{array}{l}\text{sen}\,\lambda'\,\text{sen}(\Omega + v' + l') + \cos\lambda'\,\text{sen}\, i \cos v' \\ -2\,\text{sen}\,\lambda'\,\text{sen}^2\tfrac{1}{2} i\,\text{sen}(\Omega - l')\cos v' \\ + e'\left[\begin{array}{l}\text{sen}\,\lambda'\,\text{sen}(\Omega + \varpi' - l') + \cos\lambda'\,\text{sen}\, i \cos\varpi' \\ -2\,\text{sen}\,\lambda'\,\text{sen}^2 i\,\text{sen}(\Omega - l')\cos\varpi'\end{array}\right]\end{array}\right\}
\end{array}\right.
$$

236. Como os catalogos de estrellas costumam dar as suas ascensões rectas e declinações, convem determinar as aberrações d'ellas no sentido d'estas coordenadas.

Para isso basta usar dos angulos X_1'', Y_1'', Z_1'' referidos á linha dos equinoccios, á projecção da linha dos solsticios no equador, e á perpendicular a este plano. Achar-se-hão estes angulos como se acharam X^{IV}, Y^{IV}, Z^{IV}, no n.º 230, fazendo $N = X''$, $\Omega = o$, $i = \omega$. O que dá

$$\cos X_1'' = \cos X'',\quad \cos Y_1'' = \text{sen}\, X'' \cos\omega,\quad \cos Z_1'' = \text{sen}\, X''\,\text{sen}\,\omega.$$

Então o valor de $\dfrac{ds''}{V'dt}$ (n.º 232), e as formulas (2), nas quaes se devem suppor escriptos α, δ em logar de l, λ, e Y_1'', Z_1'', em logar de Y'', Z'', darão

$$
\left\{\begin{array}{l}
\delta a'' = \dfrac{k\sqrt{1 + 2e\cos(\Theta - \varpi) + e^2}}{\cos d'}(\text{sen}\, X''\cos\omega\cos a' - \cos X''\,\text{sen}\, a'), \\[3ex]
\delta d'' = -k\sqrt{1 + 2e\cos(\Theta - \varpi) + e^2}\left\{\begin{array}{l}\text{sen}\, d'(\cos a'\cos X'' + \text{sen}\, a'\,\text{sen}\, X''\cos\omega) \\ -\cos d'\,\text{sen}\, X''\,\text{sen}\,\omega\end{array}\right\}
\end{array}\right.;
$$

e limitando-nos aos termos em e, teremos ....(7)

$$\delta''a = -k\frac{\cos\omega\cos a'\cos\Theta + \operatorname{sen} a'\operatorname{sen}\Theta + e(\cos\omega\cos a'\cos\varpi + \operatorname{sen} a'\operatorname{sen}\varpi)}{\cos d'},$$

$$\delta''d = -k\operatorname{sen} d'\left\{\begin{array}{l}\cos a'\operatorname{sen}\Theta - \operatorname{sen} a'\cos\omega\cos\Theta + \cot d'\operatorname{sen}\omega\cos\Theta \\ + e[\cos a'\operatorname{sen}\varpi - \operatorname{sen} a'\cos\omega\cos\varpi + \cot d'\operatorname{sen}\omega\cos\varpi].\end{array}\right.$$

Estas formulas, reduzem-se a (3), quando se mudam a' e d' em l' e λ', e se faz $\omega = o$; como deve ser.

237. Se quizermos ainda attender aos termos da segunda ordem em $\frac{ds''}{Vdt}$, deveremos accrescentar ás formulas (6) os termos seguintes: (7)

A $\delta''a$:

$$+\frac{k^2}{4\cos^2 d'}[2\cos\omega\cos 2a\operatorname{sen} 2\Theta - (1+\cos^2\omega)\operatorname{sen} 2a\cos 2\Theta].$$

A $\delta''d$:

$$-\frac{k^2}{8}\operatorname{tang} d\left(2\cos\omega\operatorname{sen} 2a\operatorname{sen} 2\Theta + [(1+\cos^2\omega)\cos 2a - \operatorname{sen}^2\omega]\cos 2\Theta\right).$$

Mas nesta ultima só aproveitamos os termos em que $\operatorname{tang} d$ é factor.

238. Para ter a aberração diurna em ascensão recta e declinação, basta fazer $\omega = o$ nas formulas (4), e mudar l', λ' em a', d', o que dá

$$\left.\begin{array}{l}\delta'''a = \chi.\dfrac{\operatorname{sen} D}{\sqrt{1-c^4\cos^4 D}}\cdot\dfrac{\cos(M-a')}{\cos d'}, \\[2ex] \delta'''d = \chi.\dfrac{\operatorname{sen} D}{\sqrt{1-c^4\cos^4 D}}.\operatorname{sen} d'\operatorname{sen}(M-a')\end{array}\right\}\ldots(8).$$

239. Nas passagens meridianas, superiores e inferiores, são

$$\operatorname{sen}(M-a')=0,\ \cos(M-a')=\pm 1.$$

Por isso é nulla a aberração diurna em declinação, e é $\pm\dfrac{0'',30846 \operatorname{sen} D}{\cos d'\sqrt{1-c^2\cos^2 D}}$ a aberração diurna em ascensão recta; pertencendo o signal + á passagem superior, e o signal — á inferior.

O tempo das passagens observado pode logo corrigir-se do effeito d'esta aberração, usando na formula (5) do n.º 113 da 1.ª Parte de $C\mp\dfrac{0'',30846 \operatorname{sen} D}{\cos d'\sqrt{1-c^2\cos^2 D}}$ em logar de C, como se disse no n.º 114 da mesma parte.

240. Para o Sol, fazendo $l'=\Theta$, $\lambda=0$, as formulas (5) reduzem-se a

$$\Theta-\Theta'=-k[1+e\cos(\varpi-\Theta)]\ldots\ldots(9).$$

Se as taboas solares dão, como costumam dar, as longitudes do Sol já affectas da aberração, e as quizermos corrigir d'ella, será necessario ajuntar a Θ o numero $20'',25$, ou o que nas taboas se tirou por conta da aberração. É o que deve fazer-se quando se calculam os logares geocentricos dos planetas.

241. Se fizermos

$$\delta'' l\,.\cos\lambda'+ke\cos(\varpi-l')=X,$$

$$\delta'\lambda \qquad +ke\operatorname{sen}\lambda'\operatorname{sen}(\varpi-l')=Y,$$

as equações (5′) darão

$$X^2+\frac{Y^2}{\operatorname{sen}^2\lambda'}=k^2.$$

Portanto, suppondo projectadas no céu como linhas rectas as differenças $\delta''\lambda$ das latitudes verdadeira e apparente, e as differenças $\delta''l\cos\lambda'$ das longitudes, referidas ao parallelo da estrella; e transportando a origem ao ponto, relativamente ao qual são $k\,e\cos(\varpi - l')$ e $k\,e\operatorname{sen}\lambda'\operatorname{sen}(\varpi - l')$ as coordenadas do logar verdadeiro: a curva descripta pelo logar apparente em volta do verdadeiro é uma ellipse, que tem por centro aquelle ponto, e por eixos k e $k\operatorname{sen}\lambda'$, o primeiro sobre o parallelo á ecliptica, e o segundo sobre o circulo da latitude.

Como $Y=0$, $X=0$ dão (eq. 5) $l'=\Theta+i.180°$, $l'=\Theta+(2i+1).90°$, a estrella está nas extremidades do eixo maior nas epochas das conjuncções e das opposições; e nas extremidades do eixo menor nas epochas das quadraturas.

242. Quando se calculam as coordenadas geocentricas d'um planeta com intervallos taes que se conheça o seu movimento geocentrico, é mais commodo achar a aberração d'elle pelo modo seguinte.

Segundo as leis que ficam expostas (n.º 225), devem compor-se as tres velocidades: a do planeta Tp (Fig. 42), a da luz Ts', e a da terra tomada em sentido opposto Tt'.

Decomponhamos Tp nas duas, Tt egual á da terra, e Tq, que é o movimento geocentrico do planeta. Como Tt e Tt' se destruem, ficam só para compor as duas Ts', Tq; o que dá a resultante dirigida por TS$''$.

Assim a aberração do planeta é o angulo S$''$TS determinado pelo movimento geocentrico, em sentido contrario, SS$''$.

Chamando pois R a distancia do planeta ao observador, tomada por unidade a media do Sol á terra; Θ o tempo que a luz gasta em percorrer a media distancia do Sol á terra; $\Delta a'$, $\Delta d'$, $\Delta l'$, $\Delta\lambda'$, os movimentos geocentricos durante cada unidade de tempo a que se refere Θ; teremos evidentemente:

$$l-l'=-R\Theta.\Delta l',\quad \lambda-\lambda'=-R\Theta.\Delta\lambda'\ldots.(10),$$

$$a-a'=-R\Theta.\Delta a',\quad d-d'=-R\Theta.\Delta d'\ldots.(11).$$

242. Resumindo os resultados precedentes, calculam-se as aberrapelas formulas seguintes:

ESTRELLAS

$$l - l' = \delta'' l + \delta''' l,\ \lambda - \lambda' = \delta'' \lambda + \delta''' \lambda \text{.... form. (3' e 4)};$$

$$a - a' = \delta'' a + \delta''' a,\ d - d' = \delta'' d + \delta''' d \text{.... form. (7 e 8)}$$

PLANETAS

$$l - l' = \delta'' l + \delta''' l + \delta^{\text{IV}} l,\ \lambda - \lambda' = \delta'' \lambda + \delta''' \lambda + \delta^{\text{IV}} \lambda \text{....} \left\{ \begin{matrix} \text{form.}(3', 4, 6) \\ \text{ou form. } (10) \end{matrix} \right\}$$

$$a - a' = \delta a,\ d - d' = \delta d \text{. . . . form. (11).}$$

244. O phenomeno da aberração explica-se tambem do modo seguinte, sem que se faça intervir explicitamente a composição das velocidades.

Supponhamos que a luz proveniente d'uma estrella S (Fig. 43) chega ao eixo do oculo em t, quando o observador está em a; para o que deve ser tal a direcção at, que a razão $\frac{bt}{ab}$ seja a das velocidades da luz e da terra. Se a direcção do oculo se conservar parallela a at, em quanto a luz e o observador chegarem ambos a b, o raio estará sempre no mesmo eixo.

Com effeito, quando o observador estiver em qualquer ponto x, e o oculo na direcção xy, será $\frac{ax}{ab} = \frac{ty}{bt}$; e por isso o raio luminoso achar-se-ha em y.

Assim, quando o observador chegar a b, o eixo do oculo estará na direcção bS'; e o astro, cuja luz o terá percorrido, parecerá achar-se nella, estando realmente na direcção bS.

E é evidente que a composição dos espaços $bt' = bt$ e ab, que podem representar as velocidades da luz, e da terra em sentido opposto ao do seu movimento, dá a direcção apparente bS'.

CAPITULO VI

Logares apparentes das estrellas

245. Se desprezarmos os termos em e das formulas (7), e, chamando α, δ, a ascensão recta e a declinação d'uma estrella, fizermos

$$A = -k \cos\omega \cos\Theta, \qquad B = -k \operatorname{sen}\Theta,$$

$$15\,a = \cos\alpha' \sec\delta', \qquad 15\,b = \operatorname{sen}\alpha' \sec\delta',$$

$$a' = \cos\delta' \operatorname{tang}\omega - \operatorname{sen}\alpha' \operatorname{sen}\delta', \quad b' = \operatorname{sen}\delta' \cos\alpha',$$

estas formulas serão:

$$\text{aberr. ann. em AR} = Aa + Bb$$

$$\text{aberr. ann. em DC} = A'a' + B'b'.$$

246. Seja p a precessão annua em longitude. Segundo o que vimos na segunda parte, n.º 58, as precessões annuas em AR e DC serão

$$p\,(\cos\omega + \operatorname{sen}\omega \operatorname{tang}\delta \operatorname{sen}\alpha), \ p\cos\alpha \operatorname{sen}\omega.$$

Supponhamos que, por meio das AR e DC das estrellas, e das suas variações annuas achadas em um catalogo, se calculam os seus logares medios α', δ' para o principio d'um anno, e se querem os apparentes para um dia d'esse anno, que dista do principio a fracção t de anno tropico. As suas ascensões rectas e declinações medias serão

$$\alpha' + pt\,(\cos\omega + \operatorname{sen}\omega \operatorname{tang}\delta' \operatorname{sen}\alpha'),\ \delta' + pt \cos\alpha' \operatorname{sen}\omega,$$

ou

$$\alpha' + 15\,ct,\ \delta' + c't,$$

fazendo $15\,c = p\cos\omega + p\operatorname{sen}\omega\operatorname{tang}\delta'\operatorname{sen}\alpha',\ c' = p\operatorname{sen}\omega\cos\alpha'$.

247. Usando da mesma notação, e fazendo ainda

$$15\,d = \cos\alpha' \operatorname{tang}\delta',\ d' = -\operatorname{sen}\alpha',$$

as formulas de nutação do n.º 67 da segunda parte serão

$$\text{nut. em AR} = \frac{c}{p}\,\delta\psi - d\,.\,\delta\omega$$

$$\text{nut. em DC} = \frac{c'}{p}\,\delta\psi - d'\,.\,\delta\omega.$$

Portanto, reunindo as duas correcções de precessão e nutação, que se devem applicar aos logares medios do principio do anno a que pertence o dia proposto, para ter neste dia os logares affectos da precessão e da nutação, resulta a total:

$$\text{em AR} \quad c.\left(t+\frac{\delta\psi}{p}\right)-d.\delta\omega,$$

$$\text{em DC} \quad c'.\left(t+\frac{\delta\psi}{p}\right)-d'.\delta\omega;$$

ou, pondo $t+\dfrac{\delta\psi}{p}=\mathrm{C}, -\delta\omega=\mathrm{D}$,

$$\text{em AR} \quad \mathrm{C}c+\mathrm{D}d$$

$$\text{em DC} \quad \mathrm{C}c'+\mathrm{D}d'.$$

248. Finalmente ajuntando as correcções de aberração annua (n.° 245), e de precessão e nutação (n.° 247), temos as formulas

$$(1)\ldots\begin{cases}\dfrac{\alpha}{15}=\dfrac{\alpha'}{15}+\mathrm{A}a+\mathrm{B}b+\mathrm{C}c+\mathrm{D}d+\dfrac{\mu}{15}t,\\[2ex] \delta=\delta'+\mathrm{A}a'+\mathrm{B}b'+\mathrm{C}c'+\mathrm{D}d'+\mu't:\end{cases}$$

sendo

$$(2)\ldots\begin{cases}\mathrm{A}=-k\cos\omega\cos\Theta,\ 15\,a=\cos\alpha'\sec\delta',\ a'=\cos\delta'\operatorname{tang}\omega-\operatorname{sen}\alpha'\operatorname{sen}\delta',\\[1ex] \mathrm{B}=-k\operatorname{sen}\Theta,\ 15\,b=\operatorname{sen}\alpha'\sec\delta',\ b'=\cos\alpha'\operatorname{sen}\delta',\\[1ex] \mathrm{C}=t+\dfrac{\delta\psi}{p},\ 15\,c=p\cos\omega+p\operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}\alpha'\operatorname{tang}\delta',\ c'=p\operatorname{sen}\omega\cos\alpha',\\[1ex] \mathrm{D}=-\delta\omega,\ 15\,d=\cos\alpha'\operatorname{tang}\delta',\ d'=-\operatorname{sen}\alpha';\end{cases}$$

e μ, μ' os movimentos proprios em AR e DC.

Nestas formulas devem substituir-se por $\delta\psi$ e $\delta\omega$ as expressões dadas no n.º 66 da segunda parte, ou as mesmas com os coefficientes numericos que se adoptarem.

Em rigor deveriam empregar-se os senos e cosenos de $\alpha' + 15\,ct$ e $\delta' + c't$, em logar dos de α' e δ', mas a differença dos resultados seria insensivel.

No *Nautical Almanac*, adoptando os coefficientes de aberração e nutação do professor Peters, os factores A, B, C, D, são os seguintes:

$$\left.\begin{aligned}
&A = -20'',4451 \cos\omega \cos\Theta,\\
&B = -20'',4451 \operatorname{sen}\Theta,\\
&C = t - 0{,}02519 \operatorname{sen} 2\Theta - 0{,}34241 \operatorname{sen}\Omega + 0{,}00410 \operatorname{sen} 2\Omega\\
&\qquad\qquad - 0{,}00405 \operatorname{sen} 2\,☾,\\
&D = -0'',5507 \cos 2\Theta - 9'',2237 \cos\Omega + 0{,}0895 \cos 2\Omega\\
&\qquad\qquad - 0'',0885 \cos 2\,☾;
\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(3).$$

nos quaes Θ, ☾, Ω, representam a longitude do Sol, a da Lua, e a longitude media do nodo da orbita lunar.

249. Por meio das formulas (1), e dos valores (2) e (3) dos coefficientes que nellas entram, acham-se os logares das estrellas affectos da precessão, da nutação, e da aberração annua. Se os logares medios forem bem determinados, e estas correcções exactas, deverão as ascensões rectas e declinações das estrellas concordar com o que dão as observações meridianas, depois de despojar estas do effeito da aberração diurna, como se disse no n.º 239.

Para facilitar o calculo das correcções costumam os catalogos de estrellas dar os logarithmos dos numeros a, b, c, d, a', b', c', d'; e o *Nautical Almanac* dá na pagina XX de cada mez os logarithmos dos numeros A, B, C, D.

No *Almanaque Nautico* de S. Fernando acham-se tambem estes ultimos numeros; mas ahi chamam-se A, B, C, D, segundo a nutação de Bessel, o que segundo a notação do catalogo da *British association* temos chamado C, D, A, B.