Ex.mo Senhor Reitor da Universidade

CONTRIBUÏÇÃO PARA O ESTUDO

DA

TEORIA DAS FUNÇÕES

POR

LUÍS BEDA NETO

TERCEIRA PARTE

CONCEITO DE FUNÇÃO — CONTINUIDADE

COIMBRA
TIPOGRAFIA DA ATLÂNTIDA
1941

Dissertação

CONTRIBUÏÇÃO PARA O ESTUDO

DA

TEORIA DAS FUNÇÕES

POR

LUÍS BEDA NETO

TERCEIRA PARTE

CONCEITO DE FUNÇÃO — CONTINUIDADE

COIMBRA
TIPOGRAFIA DA ATLÂNTIDA
1941

SEPARATA

DA

Revista da Faculdade de Ciências da Universidade de Coimbra

V. VIII, n.º 1; V. IX, n.º 1.

CAPÍTULO VIII

CONCEITO DE FUNÇÃO

I

TEOREMAS GERAIS

84. Vizinhança dum conjunto. — Sejam $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ conjuntos ligados entre si. Damos o nome de *vizinhança de* $\mathbf{B}$ *relativamente a* $\mathbf{A}$, *definida por um número positivo* ε, ao conjunto $\mathbf{U}$ dos elementos $\mathbf{u}$ de $\mathbf{A}$ tais que seja $\underline{\mathbf{u}\,\mathbf{B}} \leqq \varepsilon$. Cada elemento de $\mathbf{U}$ é um elemento de $\mathbf{A}$ que se caracteriza por lhe corresponder um elemento de $[\mathbf{B}]$ cuja distância ao primeiro não excede o número ε [*p.* 49, *l.* 24]. O conjunto $\mathbf{U}$ é a soma dos produtos de $\mathbf{A}$ pelos esferóides de centros nos diversos elementos de $[\mathbf{B}]$ e de raios iguais a ε.

Verifica-se evidentemente a relação $\overrightarrow{\mathbf{U}\mathbf{B}} \leqq \varepsilon$. A vizinhança $\mathbf{U}$ ainda pode definir-se como sendo o maior subconjunto de $\mathbf{A}$ cujo desvio a $\mathbf{B}$ não excede o número ε.

Em particular, vizinhança dum elemento $\mathbf{b}$ de $[\mathbf{A}]$ relativamente a $\mathbf{A}$, definida pelo número positivo ε, é o produto de $\mathbf{A}$ pelo esferóide de centro $\mathbf{b}$ e raio ε.

Entendemos por vizinhança dum conjunto $\mathbf{B}$ definida por um número positivo ε, sem mais indicação, a vizinhança de $\mathbf{B}$ relativamente ao espaçóide de que tratamos e definida por ε, ou seja a soma dos esferóides de centros nos elementos de $[\mathbf{B}]$ e de raios iguais a ε.

Qualquer vizinhança de $\mathbf{B}$ em relação a $\mathbf{A}$ é um conjunto limitado quando $\mathbf{B}$ é limitado [*p.* 55, *l.* 29], e é um conjunto fechado, totalmente ou não, ao mesmo tempo que o conjunto $\mathbf{A}$.

São manifestamente as mesmas as vizinhanças relativas a $\mathbf{A}$

de conjuntos juxtapostos a **B** quando definidas por um mesmo número ε [*p.* 49, *l.* 1].

Dada uma vizinhança **U** *de* **B** *em relação a* **A**, *os termos de qualquer sucessão de subconjuntos de* **A** *(ou de elementos, em particular)*

(1) $$\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_i, \ldots$$

para a qual seja $\lim \overrightarrow{\mathbf{X}_i \mathbf{B}} = 0$ *pertencem a* **U** *a partir da ordem em que temos* $\overrightarrow{\mathbf{X}_i \mathbf{B}} \leqq \overrightarrow{\mathbf{U}\mathbf{B}}$. *Quando* **B** *é limitado, os termos da sucessão precedente, a partir de certa ordem, constituem, pois, um conjunto limitado.*

Concluímos também que, *se o limite integral duma sucessão de subconjuntos de* **A**, *de soma limitada, pertence a* [**B**], *os termos da mesma sucessão pertencem a* **U** *a partir de certa ordem* [*p.* 84, *l.* 17].

Se **U** *e* **U**$'$ *são as vizinhanças de* **B** *em relação a* **A** *definidas respectivamente pelos números* ε *e* ε' $(\varepsilon < \varepsilon')$, *o conjunto* **U**$'$ *contém a vizinhança de* **U** *em relação a* **A** *definida pelo número* $\varepsilon' - \varepsilon$. Na verdade, se **u** é um elemento desta vizinhança de **U**, temos $\underline{\mathbf{u}\mathbf{U}} \leqq \varepsilon' - \varepsilon$, e, como $\overrightarrow{\mathbf{U}\mathbf{B}} \leqq \varepsilon$, vem $\underline{\mathbf{u}\mathbf{B}} \leqq \underline{\mathbf{u}\mathbf{U}} + \overrightarrow{\mathbf{U}\mathbf{B}} \leqq \varepsilon'$ [*p.* 59, $\overline{(6)}$].

Seja **U** *a vizinhança de* **B** *em relação a* **A** *definida pelo número* ε. *A vizinhança* (**V**), *definida pelo mesmo número* ε, *do conjunto dos subconjuntos limitados de* **B** *em relação ao conjunto dos subconjuntos limitados de* **A** *é o conjunto* (**U**$'$) *dos subconjuntos limitados* **U**$'$ *de* **U**. Com efeito, da relação $\overrightarrow{\mathbf{U}\mathbf{B}} \leqq \varepsilon$ conclui-se que a um subconjunto **U**$'$ de **U** corresponde sempre um subconjunto **B**$'$ de [**B**] tal que $\overline{\mathbf{U}'\mathbf{B}'} \leqq \varepsilon$ [*p.* 70, *l.* 24] e por isso **U**$'$ pertence à vizinhança (**V**) [*p.* 120, *l.* 36]. Mas a cada conjunto **V** de (**V**) corresponde um subconjunto **B**$'$ de [**B**] tal que $\overline{\mathbf{V}\mathbf{B}'} \leqq \varepsilon$, sendo pois $\overrightarrow{\mathbf{V}\mathbf{B}} = \overrightarrow{\mathbf{V}[\mathbf{B}]} \leqq \overrightarrow{\mathbf{V}\mathbf{B}'} \leqq \varepsilon$, donde $\overrightarrow{\mathbf{V}\mathbf{B}} \leqq \varepsilon$, razão porque **V** é um subconjunto de **U**. Dá-se pois a coincidência (**U**$'$) | (**V**).

Consideremos o caso particular de **B** ser um subconjunto de [**A**]. A vizinhança **U** de **B** relativamente a **A**, definida pelo número positivo ε, é tal que $\overline{\mathbf{U}\mathbf{B}} \leqq \varepsilon$, pois temos agora $\overrightarrow{\mathbf{B}\mathbf{U}} = 0$. A vizinhança **U** pode então definir-se como sendo o maior subconjunto de **A** que satisfaz àquela condição.

Neste caso os conjuntos **U** e **B** ou são ambos limitados ou ambos ilimitados [*p*. 62, *l*. 10].

Quando é $\mathbf{B} < [\mathbf{A}]$, *converge para* **B** *qualquer sucessão de vizinhanças dêste conjunto relativas a* **A** *e definidas por números positivos que tendam para zero.*

Seja δ *a desconexão do conjunto* **B**. *Quando é* $\mathbf{B} < [\mathbf{A}]$, *a vizinhança* **U** *de* **B** *relativa a* **A** *e definida por* ε *tem uma desconexão que não excede o maior dos números* δ *e* ε. Com efeito, os conjuntos $\mathbf{U} + \mathbf{B}$ e **U** são nesse caso juxtapostos entre si, tendo por isso a mesma desconexão [*p*. 207, *l*. 5], e é evidente que a do primeiro não excede o maior dos números δ e ε. Em particular, *quando* **B** *é conexo, a desconexão de* **U** *não excede* ε.

Seja **A** *um conjunto qualquer (um elemento, em particular). Seja* **C** *um conjunto tal que dois quaisquer dos seus elementos pertençam a um contínuo limitado contido em* **C**. *Suponhamos que existe o produto* $[\mathbf{A}] \times \mathbf{C}$ *e que o conjunto* **C** *não é um subconjunto de* $[\mathbf{A}]$. *Cada vizinhança* **V** *de* **A** *relativa a* **C** *contém um contínuo ligado a* **A** *mas não contido neste conjunto.*

Tomemos dois elementos $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}$ de **C**, sendo o primeiro um elemento de $[\mathbf{A}]$ e o segundo estranho a êste conjunto. Seja **K** um contínuo limitado contido em **C** a que pertençam os elementos $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}$. Unamos estes elementos por uma sucessão de elementos de **K**, em número finito, tais que as distâncias entre cada um e o seguinte sejam inferiores ao número $\frac{1}{i}$. Designemos por $\mathbf{X}_i$ o conjunto dos elementos desta sucessão contidos na vizinhança considerada **V** mas que sejam consecutivos a partir de $\mathbf{x}'$. Ponhamos $i = 1, 2, \ldots$ e designemos por **X** um limite fechado, contido em **K**, da sucessão

$$\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_i, \ldots$$

O conjunto **X** é um contínuo [*p*. 208, *l*. 3]. Êste contínuo, manifestamente ligado a **A**, pertence a **V**; contém o elemento $\mathbf{x}'$ e alguns elementos de **K** distintos dos de $[\mathbf{A}]$.

Seja **C** *um conjunto tal que dois quaisquer dos seus elementos pertençam a um contínuo limitado contido em* **C**. *Consideremos uma colecção constituída por alguns dêsses contínuos. Suponha-*

mos que um contínuo limitado qualquer contido em **C** *que se juxtaponha a uma soma de contínuos da colecção pertence à mesma colecção* [1]. *Admitamos também que um qualquer dos contínuos da colecção determina uma vizinhança* **V** *em relação a* **C** *tal que os contínuos contidos em* **V** *ainda pertencem à mesma colecção. Nestas condições a soma dos contínuos da colecção é o conjunto* **C**.

Demonstremos que um elemento qualquer **c** de **C** pertence a um dos contínuos da colecção a que se refere o enunciado. Seja K_1 um dêstes contínuos. Se nenhum elemento de K_1 se juxtapõe a **c** (no caso afirmativo o elemento **c** pertenceria ao contínuo $c+K_1$ da colecção), unamos **c** a um elemento de K_1 por meio dum contínuo limitado **K** contido em **C**. Efectuemos a soma de todos os contínuos da colecção contidos em K_1+K mas que admitam K_1 por subconjunto. Tal soma, por ser um conjunto conexo, admite por lugar um contínuo. Êste juxtapõe-se elemento a elemento a um contínuo K' contido em K_1+K e que contém aquela soma. Por hipótese K' é um contínuo da colecção; é o maior contido em K_1+K e que contém K_1.

Terminamos a demonstração provando que é $K' \mid > K$, e que por conseguinte o elemento **c** pertence ao contínuo K' da colecção. Consideremos para isso uma vizinhança **V** de K' relativa a **K** tal que os contínuos nela contidos pertençam à colecção. Se o contínuo **K** não fôsse um subconjunto de K', a vizinhança **V** conteria um contínuo K'' ligado a K' mas não contido neste conjunto (como resultaria da proposição precedente pondo nela $A \mid K'$ e $C \mid K$). Existiria pois um contínuo $K'+K''$ da colecção contido em K_1+K e maior do que K'.

85. Demonstração dum lema. — *Consideremos uma sucessão de conjuntos*

$$(2) \qquad A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots,$$

um conjunto limitado **B** [2], *uma família de conjuntos* **F** *e um número não negativo* α. *Representemos em geral por*

$$(3) \qquad x_r, x_s, \ldots, x_u, \ldots$$

[1] Resulta desta condição que uma soma dum número finito de contínuos da colecção ligados entre si é ainda um contínuo da colecção.

[2] *Dispensa-se a hipótese da limitabilidade de* **B** *quando a soma dos conjuntos* (2) *é limitada.*

qualquer sucessão de elementos extraída duma subsucessão da (2) [1], *mas que seja limitada e cujo derivado* [2] *seja um subconjunto de* $[\mathbf{B}]$ *de diâmetro não superior a* α. *Suponhamos que existe uma ordem para cada sucessão* (3) *a partir da qual os seus elementos pertençam a um dos conjuntos* $\mathbf{F}$.

É possível determinar uma vizinhança $\mathbf{U}$ *de* $\mathbf{B}$, *um número* β *superior a* α *e uma ordem* i *tais que: elementos de* $\mathbf{U}$ *em número finito, que determinem um diâmetro inferior a* β [3], *extraídos de termos distintos da sucessão* (2) *de ordens superiores a* i, *pertençam sempre a um dos conjuntos da família.*

Se a família dos conjuntos $\mathbf{F}$ *é finita ou numerável, podemos determinar uma vizinhança* $\mathbf{U}'$ *de* $\mathbf{B}$, *um número* β' *superior a* α *e uma ordem* i' *tais que: um subconjunto de* $\mathbf{U}'$, *de diâmetro inferior a* β', *contido na soma* $\mathbf{A}_{i'} + \mathbf{A}_{i'+1} + \cdots$, *pertença sempre a um dos conjuntos da família.*

Admitamos, com efeito, que não é possível determinar uma vizinhança de $\mathbf{B}$, um número superior a α e uma ordem que verifiquem a primeira parte do enunciado. Existe em tal caso uma sucessão

$$(4) \qquad \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_i, \ldots$$

de conjuntos que fazem $\lim \overrightarrow{\mathbf{X}_i \mathbf{B}} = 0$, cujos diâmetros têm um limite máximo não superior a α, sendo cada um $\mathbf{X}_i$ constituído por elementos em número finito, não contidos num mesmo conjunto $\mathbf{F}$, extraídos de termos distintos da sucessão (2) de ordens crescentes com i [4].

A sucessão (4) é limitada [*p.* 268, *l.* 8]; seja

$$(5) \qquad \mathbf{X}_r, \mathbf{X}_s, \ldots, \mathbf{X}_u, \ldots$$

uma das suas subsucessões convergentes [*p.* 101, *l.* 10], e representemos por $\mathbf{X}$ o respectivo limite totalmente fechado.

Mas $\mathbf{X}$ é um subconjunto de $[\mathbf{B}]$, porque temos $\lim \overrightarrow{\mathbf{X}_u \mathbf{B}} = 0$

---

[1] Recordem-se as definições dadas a *p.* 73, *n.* 33.

[2] Chamamos derivado duma sucessão de elementos ao respectivo limite integral, isto é, ao conjunto dos seus elementos limites [*p.* 15, *n.* 6].

[3] É claro que nos referimos ao diâmetro do conjunto dêsses elementos.

[4] Isto é, tôdas superiores a cada uma das ordens dos termos da (2) que deram origem ao conjunto $\mathbf{X}_{i-1}$.

[*p*. 171, *l*. 12], e o seu diâmetro não excede α [*p*. 118, *l*. 17]. Logo a sucessão que resulta de numerarmos convenientemente a totalidade dos elementos dos termos da sucessão (5), além de ser limitada e extraída duma subsucessão da (2), tem por derivado o subconjunto **X** de [**B**] cujo diâmetro não excede α, e no entanto não há ordem alguma a partir da qual os seus elementos pertençam a um mesmo conjunto da família.

Semelhantemente reconhecemos que, se não é possível determinar uma vizinhança de **B**, um número superior a α e uma ordem que satisfaçam à segunda parte do lema, existe uma sucessão de conjuntos de soma limitada

$$(6) \qquad \mathbf{X}'_r,\ \mathbf{X}'_s,\ \ldots,\ \mathbf{X}'_u,\ \ldots$$

que tende para um subconjunto **X**′ de [**B**] de diâmetro não superior a α, sendo cada um $\mathbf{X}'_u$ um subconjunto duma soma de termos da sucessão (2) nos quais a ordem mínima cresce com u, e não pertencendo cada um dêles a nenhum dos conjuntos **F**.

Depois de numerarmos os conjuntos **F**, determinemos uma sucessão de elementos

$$(7) \qquad x'_{r'},\ x'_{s'},\ \ldots,\ x'_{u'},\ \ldots$$

extraída duma subsucessão da (6) mas de maneira que tais elementos não pertençam aos conjuntos **F** cujas ordens são dadas respectivamente pelos números 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, ... [1] elementos êsses que sejam extraídos de termos da sucessão (2) de ordens sucessivamente crescentes.

A sucessão (7) assim extraída duma subsucessão da (2) é limitada, o seu derivado (contido em **X**′) é um subconjunto de [**B**] de diâmetro não superior a α, mas não existe uma ordem a partir da qual todos os seus elementos pertençam a um mesmo conjunto da família.

---

[1] Quando os conjuntos **F** são em número finito n, suprimimos nesta sucessão os números superiores a n.

Observações. — I) *A família dos conjuntos* **F** *pode ser constituída, em particular, pelos conjuntos dos elementos das diversas sucessões* (3) *tomadas a partir de certas ordens.*

II) *Se a partir de certa ordem para cada sucessão* (3), *quaisquer dos seus elementos em número finito* [*ou apenas em número* k, *para um determinado* k], *e não necessàriamente todos, pertencem a um dos conjuntos* **F**, *é possível deterninar uma vizinhança* **U** *de* **B**, *um número* β *superior a* α *e uma ordem* i *tais que: elementos de* **U** *em número finito* [*ou apenas em número* k], *que determinem um diâmetro inferior a* β, *extraídos de termos distintos da sucessão* (2) *de ordens superiores a* i *pertençam sempre a um dos conjuntos da família.* Efectivamente, considerando a família dos conjuntos **F**$'$ dos elementos de cada sucessão (3) a partir da ordem em que se dá a propriedade expressa neste enunciado, diz a primeira parte do lema, aplicada à nova família de conjuntos **F**$'$, que é possível determinar uma vizinhança **U** de **B**, um número β superior a α e uma ordem i tais que: elementos de **U** em número finito [ou apenas em número k], que determinem um diâmetro inferior a β, extraídos de termos distintos da sucessão (2) de ordens superiores a i pertençam sempre a um dos conjuntos **F**$'$, e por isso a um dos conjuntos **F**.

III) *Quando a soma dos termos da sucessão* (2) *é limitada e quando o limite integral pertence a* [**B**], *podemos simplificar o enunciado do lema, pois não é necessário nêle aludir às vizinhanças* **U** *e* **U**$'$. Em tal caso, com efeito, existem ordens a partir das quais os termos da sucessão (2) pertencem àquelas vizinhanças de **B** [*p*. 268, *l*. 11].

IV) *Quando o produto de* [**B**] *pelo limite integral da sucessão* (2) *pertence ao limite comum da mesma* [1], *basta fazer figurar no enunciado do lema sucessões de elementos extraídas da sucessão* (2) *em vez de sucessões* (3) *extraídas das diversas subsucessões da* (2). Consideremos, com efeito, uma qualquer das sucessões (3). Um elemento do seu derivado é agora limite duma sucessão de elementos

$$\mathbf{x}_1', \mathbf{x}_2', \ldots, \mathbf{x}_i', \ldots$$

[1] O que sucede em particular quando a sucessão é convergente ou quando **B** pertence ao limite comum.

extraída da (2). Substituamos nesta sucessão os elementos de ordens $r, s, \ldots$ respectivamente por $\mathbf{x}_r, \mathbf{x}_s, \ldots$. A nova sucessão assim extraída da (2), que representamos por

$$(8) \qquad \mathbf{x}_1'', \mathbf{x}_2'', \ldots, \mathbf{x}_i'', \ldots,$$

é limitada, e o seu derivado (o mesmo que o da (3)) tem o diametro não superior a α. Logo, se existe, como estamos a supor, uma ordem a partir da qual os termos da sucessão (8) pertençam a um dos conjuntos $\mathbf{F}$, o mesmo podemos dizer relativamente à sucessão (3) donde partimos.

v) É duma grande generalidade o lema de que nos temos ocupado. Obtêm-se casos particulares sucessivos, que mais directamente intervêm em certas proposições, introduzindo uma ou mais das simplificações seguintes: $\alpha = 0$; α igual ao diâmetro de $\mathbf{B}$; $k=1$; existência de $lim\,\mathbf{A}_i \,\|\, \mathbf{A}$; $\mathbf{B} \,|\!< [\mathbf{A}]$; $\mathbf{A}_i \,|\, \mathbf{A}$ $(i=1, 2, \ldots)$; $\mathbf{A} \,|\, \mathbf{P}$ (espaçóide de que tratamos); família constituída por um só conjunto; conjunto $\mathbf{B}$ reduzido a um só elemento; etc.

No caso de $\alpha=0$, as sucessões de elementos (3) são as que, sendo extraídas das diversas subsucessões da (2), convergem para elementos de $[\mathbf{B}]$. No caso de α igual ao diâmetro de $\mathbf{B}$, as sucessões (3) são as extraídas das subsucessões da (2) e tais que seja $lim\, \overline{\mathbf{x}_u \mathbf{B}} = 0$.

Eis alguns dêsses casos particulares, todos relativos à hipótese $\alpha = 0$:

Consideremos uma sucessão convergente (2) *de conjuntos de soma limitada e uma família de conjuntos* $\mathbf{F}$. *Se os elementos de qualquer sucessão convergente, extraída da* (2), *pertencem a partir de certa ordem a um dos conjuntos* $\mathbf{F}$, *é possível determinar um número positivo* ε *e uma ordem* i *tais que: elementos em número finito, que determinem um diâmetro inferior a* ε, *extraídos de termos distintos da sucessão* (2) *de ordens superiores a* i, *pertençam sempre a um dos conjuntos da família.*

Se além disso a família dos conjuntos $\mathbf{F}$ *é finita ou numerável, podemos determinar um número positivo* ε' *e uma ordem* i' *tais que um conjunto de diâmetro inferior a* ε' *contido na soma* $\mathbf{A}_{i'} + \mathbf{A}_{i'+1} + \cdots$, *pertença sempre a um dos conjuntos da família.*

Consideremos uma sucessão de conjuntos (2), *um subconjunto* $\mathbf{B}$ *limitado e fechado do limite comum da mesma e um conjunto* $\mathbf{F}$.

Se, qualquer que seja a sucessão de elementos que tenda para um elemento de **B**, *extraída da sucessão* (2), *êsses elementos pertencem a* **F** *a partir de certa ordem, é possível determinar uma ordem* i *e uma vizinhança* **U** *de* **B** *tais que o produto de* **U** *pela soma* $\mathbf{A}_i + \mathbf{A}_{i+1} + \cdots$ *pertença a* **F**.

Consideremos uma sucessão convergente (2) *de conjuntos de soma limitada e um conjunto* **F**. *Se os elementos de qualquer sucessão convergente, extraída da* (2), *pertencem a partir de certa ordem ao conjunto* **F**, *os termos da sucessão* (2) *pertencem a* **F** *a partir de certa ordem.*

Consideremos dois conjuntos **A** *e* **B** *ligados entre si, sendo êste fechado e um dêles limitado. Consideremos ainda uma família de conjuntos* **F** *e um número inteiro positivo* k. *Se, qualquer que seja a sucessão de elementos de* **A** *que tenda para um elemento de* **B**, *quaisquer* k *dêsses elementos pertencem, a partir de certa ordem, a um dos conjuntos* **F**[1], *é possível determinar um número positivo* ε *e uma vizinhança* **U** *de* **B** *relativa a* **A** *tais que um conjunto de* k *elementos de* **U**, *de diâmetro inferior a* ε, *pertença sempre a um dos conjuntos* **F**[2].

Se os termos de qualquer sucessão de elementos de **A** *que tenda para um de* **B** *pertencem a um dos conjuntos* **F** *a partir de certa ordem e se a família dêstes conjuntos é finita ou numerável, podemos determinar um número positivo* ε' *e uma vizinhança* **U'** *de* **B** *relativa a* **A** *tais que um subconjunto de* **U'** *de diâmetro inferior a* ε' *pertença sempre a um dos conjuntos* **F**[3].

---

[1] Esta condição exige que o produto $\mathsf{A} \times \mathsf{B}$, quando existe, seja coberto pelos conjuntos F.

[2] Não é necessário aludir ao número ε quando B se reduz a um só elemento.

[3] Também não é necessário aludir a ε' quando B se reduz a um único elemento. Se ainda neste caso A se converte no espaçóide de que tratamos, vem a proposição:

Dados um elemento b *e uma família finita ou numerável de conjuntos* F, *se os elementos de qualquer sucessão que tenda para* b *pertencem a um dos conjuntos* F *a partir de certa ordem, existe um esferóide de centro* b *contido num dêsses conjuntos.*

Notemos que o presente enunciado pode deixar de ser verdadeiro para uma infinidade não numerável de conjuntos F, afirmação esta que se transmite ao enunciado da segunda parte do lema. É fácil citar exemplos neste sentido.

A cada sucessão convergente de elementos dum dado conjunto limitado **A** *façamos corresponder o conjunto* **F** *dos elementos da mesma sucessão tomados a partir de certa ordem. Existe um número positivo* ε *tal que: elementos quaisquer de* **A**, *em número finito, de distâncias dois a dois inferiores a* ε *pertencem a um dos conjuntos* **F**.

Sejam **A** *e* **B** *conjuntos ligados entre si, sendo êste fechado e um dêles limitado. Seja* **F** *um conjunto qualquer. Se os termos de cada sucessão de elementos de* **A** *que tenda para um elemento de* **B** *pertencem a* **F** *a partir de certa ordem, existe uma vizinhança de* **B** *relativa a* **A** *contida em* **F**.

Seja **b** *um elemento limite dum dado conjunto* **A**. *A cada sucessão de elementos de* **A** *que tenda para* **b** *façamos corresponder o conjunto* **F** *dos elementos da mesma tomados a partir de certa ordem. Existe uma vizinhança* **U** *de* **b** *relativa a* **A** *tal que: elementos quaisquer de* **U**, *em número finito, pertencem a um dos conjuntos* **F**.

Consideremos um conjunto qualquer **A** *e um subconjunto* **B** *de* [**A**] *limitado e fechado. Associemos a cada elemento de* **B** *uma vizinhança dêste elemento relativa a* **A**. *Existem uma vizinhança* **U** *de* **B** *relativa a* **A** *e um número positivo* ε *tais que um subconjunto qualquer de* **U** *de diâmetro inferior a* ε *pertence a uma dessas vizinhanças.*

Cada elemento de **B** é, com efeito, centro dum esferóide cujo produto por **A** constitui a vizinhança dêsse elemento. Mas como o conjunto **B** é coberto interiormente com uma infinidade numerável dos mesmos esferóides [*lema de* Lindelöf], segue-se que os termos de qualquer sucessão de elementos de **A** que tenda para um elemento de **B** pertencem, a partir de certa ordem, a um dos esferóides dessa infinidade numerável. Existem pois uma vizinhança **U** de **B** relativa a **A** e um número positivo ε tais que um subconjunto qualquer de **U** de diâmetro inferior a ε pertence a um dêsses esferóides, e portanto a uma das vizinhanças consideradas [1].

---

[1] Também serve de justificação a mesma da proposição a *p.* 261, *l.* 4, convenientemente adaptada ao presente caso.

Logo o conjunto **U** *decompõe-se num número finito de partes cada uma das quais pertence a uma das vizinhanças dadas, isto é. o conjunto* **U** *cobre-se apenas com um número finito das mesmas vizinhanças.*

Quando o conjunto **A** coincide com o espaçóide que estamos considerando vem o enunciado seguinte:

Associemos a cada elemento dum conjunto limitado e fechado **B** *um esferóide de centro no mesmo elemento. Existem uma vizinhança* **U** *de* **B** *e um número positivo* ε *tais que um subconjunto qualquer de* **U** *de diâmetro inferior a* ε *seja interior a um dêsses esferóides.*

A vizinhança **U** é pois coberta interiormente apenas com um número finito dos esferóides considerados[1].

Consideremos uma sucessão de conjuntos (2), *um conjunto* **B** *e uma família de conjuntos* **F**. *Seja em geral* (3) *qualquer sucessão de elementos extraída duma subsucessão da* (2) *e tal que se tenha* $\lim \overline{\mathbf{x}_u \mathbf{B}} = 0$. *Suponhamos que existe uma ordem para cada sucessão* (3) *a partir da qual os seus elementos pertençam a um dos conjuntos* **F**.

É possível determinar uma vizinhança **U** *de* **B** *e uma ordem i tais que: elementos quaisquer de* **U**, *em número finito, extraídos de termos distintos da sucessão* (2) *de ordens superiores a i pertençam a um dos conjuntos da família.*

Se a família dos conjuntos **F** *é finita ou numerável, podemos determinar uma vizinhança* **U**' *de* **B** *e uma ordem i' tais que o produto de* **U**' *pela soma* $\mathbf{A}_{i'} + \mathbf{A}_{i'+1} + \cdots$ *pertença a um dos conjuntos da família.*

Quando o conjunto **B** é limitado, esta proposição deduz-se do lema, introduzindo nêle a condição de α representar o diâmetro de **B**. Mas a mesma proposição estende-se para o caso de **B** ser ilimitado, e por conseguinte de α se tornar infinito. A demonstração é mais simples que a do lema, e dela se obtém suprimindo as passagens que resultam das hipóteses das limitabilidades de **B** e do conjunto dos diâmetros dos derivados das diversas sucessões (3).

---

[1] Esta proposição completa o lema de Borel enunciado a *p.* 263, *l.* 25.

Limitamo-nos a enunciar só dois casos particulares:

Sejam $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{B}$ *conjuntos ligados entre si. A cada sucessão* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_i, \ldots$ *de elementos de* $\mathbf{A}$ *para a qual seja* $\lim \underline{\mathbf{x}_i \mathbf{B}} = 0$ *façamos corresponder o conjunto* $\mathbf{F}$ *de todos os elementos da mesma sucessão mas tomados a partir de certa ordem. Existe uma vizinhança* $\mathbf{U}$ *de* $\mathbf{B}$ *relativa a* $\mathbf{A}$ *tal que: elementos quaisquer de* $\mathbf{U}$ *em número finito pertencem a um dos conjuntos* $\mathbf{F}$.

Sejam $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ *e* $\mathbf{F}$ *conjuntos quaisquer, sendo os dois primeiros ligados entre si. Se os termos de qualquer sucessão* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_i, \ldots$ *de elementos de* $\mathbf{A}$, *tal que* $\lim \underline{\mathbf{x}_i \mathbf{B}} = 0$, *pertencem a* $\mathbf{F}$ *a partir de certa ordem, existe uma vizinhança de* $\mathbf{B}$ *relativa a* $\mathbf{A}$ *contida em* $\mathbf{F}$.

Uma outra classe de proposições que se deduz ainda do mesmo lema é a que resulta de supormos que os elementos dos conjuntos $\mathbf{A}_i$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{F}$ nêle figurados são subconjuntos limitados de elementos dum dado espaçóide [*p.* 95, *n.* 44].

São verdadeiras por exemplo as seguintes proposições:

Consideremos uma sucessão de conjuntos (2), *um conjunto limitado* $\mathbf{B}$ *e uma família de conjuntos* $\mathbf{F}$. *Se, qualquer que seja a sucessão de subconjuntos limitados dos termos correspondentes duma subsucessão da* (2), *que tenda para um subconjunto limitado de* $[\mathbf{B}]$, *existe uma ordem a partir da qual êsses conjuntos pertencem a um dos conjuntos* $\mathbf{F}$, *é possível determinar uma vizinhança* $\mathbf{U}$ *de* $\mathbf{B}$, *um número positivo* ε *e uma ordem* i *tais que: subconjuntos quaisquer de* $\mathbf{U}$, *em número finito, de distâncias dois a dois inferiores a* ε, *extraídos de termos distintos da sucessão* (2) *de ordens superiores a* i *pertençam a um dos conjuntos da família* [*p.* 268, *l.* 21].

Consideremos uma sucessão convergente de conjuntos (2) *de soma limitada e uma família de conjuntos* $\mathbf{F}$. *Se, qualquer que seja a sucessão de subconjuntos dos termos correspondentes da* (2), *que tenda para um elemento, cada um dêstes subconjuntos pertence a um dos conjuntos* $\mathbf{F}$ *a partir de certa ordem, é possível determinar um número positivo* ε *e uma ordem* i *tais que um subconjunto de diâmetro inferior a* ε *dum têrmo da sucessão de ordem superior a* i *pertença sempre a um dos conjuntos da família.*

Consideremos uma infinidade de conjuntos **A** *e um conjunto limitado* **B**. *A cada sucessão dêsses conjuntos* **A**, *de soma limitada, que tenda para* **B** [1] *façamos corresponder uma ordem. Existe um número positivo* ε *que satisfaz à seguinte condição: quaisquer dos conjuntos* **A**, *em número finito, cujas distâncias a* **B** *sejam inferiores a* ε *são termos duma das referidas sucessões tomados a partir da correspondente ordem* [2].

Sejam **A** *e* **B** *conjuntos ligados entre si, sendo êste fechado e um dêles limitado. Consideremos uma família de conjuntos* **F**. *Se cada um dos termos de qualquer sucessão de subconjuntos de* **A** *de soma limitada, que tenda para um elemento de* **B**, *pertence a um dos conjuntos* **F** *a partir de certa ordem, existem uma vizinhança* **U** *de* **B** *relativa a* **A** *e um número* ε *tais que um subconjunto de* **U** *de diâmetro inferior a* ε *pertença sempre a um dos conjuntos da família.*

O lema de Borel, há pouco demonstrado com o auxílio do de Lindelöf, apresenta-se também como uma aplicação directa da proposição agora enunciada. Efectivamente, se cada elemento dum conjunto limitado e fechado **B** é centro dum esferóide duma dada família, os termos de qualquer sucessão de conjuntos de soma limitada que tenda para um elemento de **B** pertencem a um dêsses esferóides a partir de certa ordem [*p.* 217, *l.* 15], e por isso existem uma vizinhança **U** de **B** e um número positivo ε tais que um subconjunto de **U** de diâmetro inferior a ε pertença sempre a um dos mesmos esferóides. Pertence pois a um dos esferóides da família, em particular, qualquer subconjunto de **B** de diâmetro inferior a ε.

86. Definição de função. — Sejam **P** e **Q** dois espaçóides quaisquer, distintos ou não. Dado um subconjunto **A** de **P**, façamos corresponder a cada um dos seus elementos **x** um e um só elemento **z** de **Q**. A uma tal correspondência dá-se o nome de *função*, e dizemos que **z** é função de **x** no conjunto **A**.

---

[1] Supomos que existem tais sucessões.

[2] É claro que a proposição generaliza-se para o caso de B ser ilimitado, mas devemos supor que as sucessões $A_1, A_2, \dots A_i, \dots$ de conjuntos A que tendam para B satisfazem à condição $lim\,\overline{A_i\,B}=0$.

Pelo símbolo $f(\mathbf{x})$, no qual a letra f pode substituir-se por qualquer outra, convencionamos representar então o elemento $\mathbf{z}$ correspondente a $\mathbf{x}$, ou *elemento da função f no elemento* $\mathbf{x}$. Podemos pois escrever $\mathbf{z} \mid f(\mathbf{x})$ para indicar que a variável $\mathbf{z}$, ou variável dependente, é função de $\mathbf{x}$, também chamada variável independente [1].

Diremos que a função $f(\mathbf{x})$ é *definida* no conjunto $\mathbf{A}$ e em cada um dos seus elementos.

A própria função faz corresponder a cada subconjunto $\mathbf{X}$ de $\mathbf{A}$ o conjunto $\mathbf{Z}$ dos elementos de $f(\mathbf{x})$ nos diversos elementos de $\mathbf{X}$. A função de conjuntos assim definida será representada por $\mathbf{Z} \mid f(\mathbf{X})$ (com a mesma letra f). Em virtude desta notação, o conjunto dos elementos de $f(\mathbf{x})$ em todos os elementos de $\mathbf{A}$ pode representar-se por $f(\mathbf{A})$ [2].

A correspondência unívoca que estabelece a função $\mathbf{z} \mid f(\mathbf{x})$ pode ser também *biunívoca*, isto é, recíproca, o que sucede quando cada elemento $f(\mathbf{x})$ de $f(\mathbf{A})$ corresponde a um só elemento $\mathbf{x}$ de $\mathbf{A}$. Em tal caso a função determinada por essa correspondência recíproca chama-se *inversa* da primeira.

Seja $\varphi(\mathbf{z})$ uma segunda função mas definida no conjunto $f(\mathbf{A})$. À função $\varphi\big(f(\mathbf{x})\big)$, que faz corresponder a cada elemento $\mathbf{x}$ de $\mathbf{A}$ o elemento $\varphi(\mathbf{z})$ correspondente a $\mathbf{z} \mid f(\mathbf{x})$, damos o nome de *função de função*. A $\mathbf{z}$ chama-se então variável intermédia.

Dadas n funções

$$f_1(\mathbf{x}),\, f_2(\mathbf{x}),\, \ldots,\, f_n(\mathbf{x})$$

---

[1] Recordemos que, relativamente às estruturas dos espaçóides P e Q, cada um dêles pode considerar-se simples ou composto, ou constituído pelos subconjuntos limitados de certo espaçóide, e pode considerar-se mixto [*p.* 97, *n.* 45].

A exposição que vamos desenvolver aplica-se em particular às funções que relacionam elementos de dois espaçóides numéricos [*p.* 99, *l.* 3]; tais são as que põem em correspondência pontos de dois espaços ordinários, com o mesmo ou diferente número de dimensões, de coordenadas tôdas reais ou não, e as funções que fazem corresponder a subconjuntos limitados de um dêsses espaços subconjuntos limitados dum outro.

[2] Quando fôr necessário supor que $f(\mathsf{X})$ estabeleça correspondência entre elementos de dois espaçóides, teremos de considerar apenas os subconjuntos limitados X de A e de supor que os correspondentes conjuntos Z também são limitados [*p.* 125, *l.* 13].

definidas num mesmo conjunto **A**, considera-se muitas vezes a função

(9) $$\big(f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \ldots, f_n(\mathbf{x})\big),$$

ainda definida no conjunto **A**, e que faz corresponder a cada elemento **x** de **A** o elemento composto representado em (9) [*p.* 27, *n.* 11]. Dizemos que tal função é *composta,* e as funções dadas chamam-se então *componentes* [1].

Se uma função $\varphi(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_n)$ é definida no conjunto dos elementos da função (9), a função

$$\varphi\big(f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \ldots, f_n(\mathbf{x})\big),$$

definida em **A** e denominada ordinàriamente função composta, será considerada como função de função, sendo a representada em (9) a intermédia; é uma função do elemento composto $(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_n)$ que por sua vez é função de **x** em **A**.

Diremos que duas funções $f(\mathbf{x})$ e $j(\mathbf{x})$, definidas respectivamente nos conjuntos **A** e **A**′, são *juxtapostas* entre si quando forem juxtapostos os conjuntos dos elementos de segunda ordem $\big(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})\big)$ e $\big(\mathbf{x}, j(\mathbf{x})\big)$ correspondentes aos diversos elementos **x** de **A** e de **A**′ respectivamente. Tais funções caracte-

---

[1] Se as funções dadas, distintas ou não, são definidas em conjuntos quaisquer

$$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n,$$

distintos ou não, pertencentes ou não ao mesmo espaçóide, a função

(1) $$\big(f_1(\mathbf{x}_1), f_2(\mathbf{x}_2), \ldots, f_n(\mathbf{x}_n)\big),$$

definida no conjunto composto [*p.* 28, *l.* 19]

(2) $$(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n)$$

e que faz corresponder a cada elemento $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n)$ dêste conjunto o elemento composto (1), tem uma construção que não é distinta da precedente; na verdade, podemos considerar tôdas as funções $f_i(\mathbf{x})$ como sendo definidas no mesmo conjunto composto (2).

Note-se que o conjunto dos elementos da função (1) assim obtida resulta da composição dos conjuntos dos elementos das funções dadas, isto é, pode designar-se por $\big(f_1(\mathbf{A}_1), f_2(\mathbf{A}_2), \ldots, f_n(\mathbf{A}_n)\big)$.

rizam-se pela seguinte propriedade: dado um número positivo δ, a cada elemento $\mathbf{x}$ de $\mathbf{A}$ corresponde um elemento $\mathbf{x}'$ de $\mathbf{A}'$ que faz $\overline{\mathbf{x}\mathbf{x}'}<\delta$ e $\overline{f(\mathbf{x})\,j(\mathbf{x}')}<\delta$; a cada elemento $\mathbf{x}'$ de $\mathbf{A}'$ corresponde um $\mathbf{x}$ de $\mathbf{A}$ que verifica as mesmas desigualdades.

Duas funções juxtapostas a uma terceira são juxtapostas entre si.

Se $f(\mathbf{x})$ e $j(\mathbf{x})$, definidas em $\mathbf{A}$ e $\mathbf{A}'$, são juxtapostas entre si, verificam-se as seguintes juxtaposições:

$$\mathbf{A} \parallel \mathbf{A}' \quad \text{e} \quad f(\mathbf{A}) \parallel j(\mathbf{A}') \qquad [p.\ 122,\ l.\ 12].$$

87. Funções limitadas. — A função $f(\mathbf{x})$, definida em $\mathbf{A}$, diz-se limitada num subconjunto $\mathbf{X}$ de $\mathbf{A}$, por definição, quando é limitado o conjunto $f(\mathbf{X})$. Sempre que falarmos em função limitada $f(\mathbf{x})$, sem mais designação, entenderemos que $f(\mathbf{x})$ é limitada no conjunto $\mathbf{A}$ onde a definimos.

Duas funções juxtapostas entre si ou são ambas limitadas ou ambas ilimitadas.

Fàcilmente se reconhece que, dado um subconjunto $\mathbf{B}$ de $[\mathbf{A}]$, se $f(\mathbf{x})$ é ilimitada nas diversas vizinhanças de $\mathbf{B}$ em relação a $\mathbf{A}$, existe uma sucessão $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_i, \ldots$ de elementos de $\mathbf{A}$ que faz $lim\,\overline{\mathbf{x}_i\mathbf{B}} = 0$ e ao longo da qual os elementos de $f(\mathbf{x})$ divergem para infinito [*p.* 128, *l.* 24]. Em particular, se $f(\mathbf{x})$ é ilimitada nas vizinhanças dum elemento $\mathbf{b}$ de $[\mathbf{A}]$, existe uma sucessão de elementos de $\mathbf{A}$ que tende para $\mathbf{b}$ ao longo da qual os elementos de $f(\mathbf{x})$ divergem para infinito.

Seja $\mathbf{B}$ *um subconjunto de* $[\mathbf{A}]$ *limitado e fechado. Se* $f(\mathbf{x})$ *é limitada numa vizinhança de cada elemento de* $\mathbf{B}$, *existe uma vizinhança de* $\mathbf{B}$ *onde* $f(\mathbf{x})$ *é igualmente limitada*[1].

Existe, com efeito, uma vizinhança $\mathbf{U}$ de $\mathbf{B}$ em relação a $\mathbf{A}$ que é coberta apenas com um número finito das vizinhanças a que se refere o presente enunciado [*p.* 277, *l.* 1]. Logo $f(\mathbf{x})$ é limitada em $\mathbf{U}$.

Por conseguinte, *se* $f(\mathbf{x})$ *é ilimitada nas vizinhanças dum subconjunto* $\mathbf{B}$ *de* $[\mathbf{A}]$, *limitado e fechado, existe um elemento de* $\mathbf{B}$ *nas vizinhanças do qual* $f(\mathbf{x})$ *é ilimitada.*

---

[1] É claro que estas vizinhanças referem-se ao conjunto $\mathbf{A}$.

Em particular:

Uma função $f(\mathbf{x})$ definida num conjunto limitado $\mathbf{A}$ é limitada neste conjunto sempre que o seja numa vizinhança de cada elemento de $[\mathbf{A}]$.

Sejam $f(\mathbf{x})$ e $j(\mathbf{x})$ funções juxtapostas entre si definidas nos conjuntos $\mathbf{A}$ e $\mathbf{A}'$. Consideremos um subconjunto $\mathbf{B}$ de $[\mathbf{A}]$. Se $f(\mathbf{x})$ é ilimitada nas vizinhanças de $\mathbf{B}$ relativas a $\mathbf{A}$, o mesmo sucede a $j(\mathbf{x})$ nas vizinhanças de $\mathbf{B}$ relativas a $\mathbf{A}'$.

Suponhamos, com efeito, que $f(\mathbf{x})$ é ilimitada em qualquer vizinhança de $\mathbf{B}$. Existe nesse caso uma sucessão $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots \mathbf{x}_i, \dots$ de elementos de $\mathbf{A}$ que faz $lim\, \underline{\mathbf{x}_i \mathbf{B}} = 0$ e ao longo da qual os elementos de $f(\mathbf{x})$ divergem para infinito. Mas a cada elemento $\mathbf{x}_i$ corresponde um elemento $\mathbf{x}_i'$ de $\mathbf{A}'$ que verifica as desigualdades $\overline{\mathbf{x}_i \mathbf{x}_i'} < \frac{1}{i}$ e $\overline{f(\mathbf{x}_i)\, j(\mathbf{x}_i')} < \frac{1}{i}$. Temos ainda $lim\, \underline{\mathbf{x}_i' \mathbf{B}} = 0$, como mostra a relação $\underline{\mathbf{x}_i' \mathbf{B}} \leqq \underline{\mathbf{x}_i' \mathbf{x}_i} + \underline{\mathbf{x}_i \mathbf{B}}$ [*p.* 50, (1)]. Os elementos de $j(\mathbf{x})$ ao longo da sucessão $\mathbf{x}_1', \mathbf{x}_2', \dots, \mathbf{x}_i', \dots$ divergem para infinito. Logo $j(\mathbf{x})$ também é ilimitada em qualquer vizinhança de $\mathbf{B}$.

Se em particular $f(\mathbf{x})$ é ilimitada nas vizinhanças dum elemento $\mathbf{b}$ de $[\mathbf{A}]$ relativas a $\mathbf{A}$, também $j(\mathbf{x})$ é ilimitada nas vizinhanças de $\mathbf{b}$ em relação a $\mathbf{A}'$.

88. Limites de funções. — Seja $f(\mathbf{x})$ uma função definida em certo conjunto $\mathbf{A}$. Designemos em geral por

$$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_i, \dots \tag{10}$$

uma sucessão de elementos de $\mathbf{A}$. Consideremos a correspondente sucessão

$$f(\mathbf{x}_1), f(\mathbf{x}_2), \dots, f(\mathbf{x}_i), \dots \tag{11}$$

Chamamos *elemento limite de $f(\mathbf{x})$* num elemento $\mathbf{y}$ do lugar $[\mathbf{A}]$ a qualquer limite duma sucessão (11) correspondente a uma sucessão (10) que tenda para $\mathbf{y}$. O conjunto de todos os elementos limites de $f(\mathbf{x})$ no elemento $\mathbf{y}$ toma o nome de *conjunto limite em $\mathbf{y}$ de $f(\mathbf{x})$* e é representado por $\lambda(\mathbf{y})$, ou por $lim_{\mathbf{y}} f(\mathbf{x})$. Tal conjunto existirá tôdas as vezes que a função fôr limitada numa vizinhança de $\mathbf{y}$.

O conjunto $\lambda(\mathsf{y})$ é o mesmo que em qualquer elemento juxtaposto a y [1].

Mais geralmente, *conjunto limite de* $f(\mathsf{x})$ *num subconjunto* Y *de* $[\mathsf{A}]$ é o conjunto dos elementos limites de tôdas as sucessões (11) correspondentes às diversas sucessões (10) para as quais seja $\overline{lim}\, \mathsf{x}_i\, \mathsf{Y} = 0$. Tal conjunto limite será designado por $\lambda(\mathsf{Y})$, ou por $\overline{lim}_{\mathsf{Y}} f(\mathsf{x})$, e existirá sempre que $f(\mathsf{x})$ fôr limitada numa vizinhança de Y.

Consideremos uma classe de sucessões

$$(12) \qquad \mathsf{x}'_1, \mathsf{x}'_2, \ldots, \mathsf{x}'_i, \ldots$$

para cada uma das quais seja $\overline{lim}\, \mathsf{x}'_i\, \mathsf{Y} = 0$. *Admitamos que, dada uma sucessão qualquer* (10) *tal que* $\overline{lim}\, \mathsf{x}_i\, \mathsf{Y} = 0$, *dela podemos sempre extrair uma sucessão da classe. O conjunto* $\lambda(\mathsf{Y})$ *é constituído pelos limites das sucessões*

$$(13) \qquad f(\mathsf{x}'_1), f(\mathsf{x}'_2), \ldots, f(\mathsf{x}'_i), \ldots$$

correspondentes às diversas sucessões da classe.

Com efeito, os limites das diversas sucessões (13) pertencem a $\lambda(\mathsf{Y})$; por outro lado, qualquer elemento z de $\lambda(\mathsf{Y})$ é limite duma sucessão convergente (11) correspondente a uma sucessão (10) tal que $\overline{lim}\, \mathsf{x}_i\, \mathsf{Y} = 0$, e, como da (10) podemos extrair uma sucessão (12) da classe, o mesmo elemento z é também limite da correspondente sucessão (13).

Na definição de $\lambda(\mathsf{Y})$ basta pois considerar as sucessões da referida classe [2].

---

[1] O elemento y, quando pertence a A, pode figurar na sucessão (10). Neste caso o elemento correspondente $f(\mathsf{y})$ e os que lhe são juxtapostos consideram-se limites de $f(\mathsf{x})$ em y.

Observemos também que, na definição de $\overline{lim}_{\mathsf{y}} f(\mathsf{x})$, interessa principalmente o caso de y ser elemento limite de A. Não sendo assim, y juxtapõe-se a um elemento de A, no qual o elemento correspondente para a função e os juxtapostos a êste constituem o conjunto $\overline{lim}_{\mathsf{y}} f(\mathsf{x})$.

[2] Se por exemplo a variável independente é constituída por números ou por pontos, de coordenadas tôdas reais ou não, basta considerar, para o cálculo de $\lambda(Y)$, as sucéssões monótonas $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots$ tais que $\overline{lim}\, x_i\, Y = 0$ (dizemos que uma sucessão de números imaginários é monótona quando são monótonas as

Em particular:

Seja $f(\mathbf{x})$ *limitada numa vizinhança de* $\mathbf{Y}$. *Para que* $\lambda(\mathbf{Y})$ *se reduza a elementos juxtapostos a um certo elemento* $\mathbf{z}$, *é necessário e suficiente que tendam para* $\mathbf{z}$ *tôdas as sucessões* (13) *correspondentes às diversas sucessões da classe.*

Em virtude da definição de $\lambda(\mathbf{Y})$, qualquer dos seus elementos $\mathbf{z}$ caracteriza-se pela propriedade seguinte: a cada número positivo δ corresponde um elemento $\mathbf{x}$ de $\mathbf{A}$ tal que $\overline{\mathbf{x}\mathbf{Y}}<\delta$ e $\overline{f(\mathbf{x})\,\mathbf{z}}<\delta$.

É claro que $[f(\mathbf{A})] \mid > \lambda(\mathbf{Y})$ e $[f(\mathbf{A})] \mid \lambda(\mathbf{A})$.

Se $\mathbf{U}$ é uma vizinhança de $\mathbf{Y}$ em relação a $\mathbf{A}$, temos $[f(\mathbf{U})] \mid > \lambda(\mathbf{Y})$, porque os elementos de qualquer sucessão (10) que faça $lim\,\overline{\mathbf{x}_i\mathbf{Y}}=0$ pertencem a $\mathbf{U}$ a partir de certa ordem.

Se $\mathbf{X}$ é um subconjunto de $\mathbf{A}$, vem $\lambda(\mathbf{X}) \mid > [f(\mathbf{X})]$.

Se $\mathbf{Y}$ e $\mathbf{Y}'$ são subconjuntos de $[\mathbf{A}]$ juxtapostos entre si, temos $\lambda(\mathbf{Y}) \mid \lambda(\mathbf{Y}')$. Mais geralmente:

São os mesmos os conjuntos limites em conjuntos juxtapostos de duas funções juxtapostas entre si [1].

Consideremos duas funções juxtapostas entre si, $f(\mathbf{x})$ e $j(\mathbf{x})$, definidas nos conjuntos $\mathbf{A}$ e $\mathbf{A}'$. Basta demonstrar que são os mesmos os conjuntos limites destas funções num dado subconjunto $\mathbf{Y}$ de $[\mathbf{A}]$. Designemos estes conjuntos limites por $\mathbf{Z}$ e

---

sucessões das partes reais e das partes imaginárias dos termos; dizemos que uma sucessão de pontos é monótona quando são monótonas as sucessões das primeiras coordenadas, das segundas, etc. As sucessões monótonas de números reais, ou de imaginários puros, são as nunca crescentes e as nunca decrescentes).

[1] A definição já apresentada de funções juxtapostas pode enunciar-se agora do seguinte modo: duas funções $f(\mathbf{x})$ e $j(\mathbf{x})$, definidas respectivamente nos conjuntos $\mathbf{A}$ e $\mathbf{A}'$, são juxtapostas entre si quando, seja qual fôr o elemento $\mathbf{x}'$ de qualquer dos conjuntos $\mathbf{A}$ ou $\mathbf{A}'$, o elemento correspondente $f(\mathbf{x}')$ ou $j(\mathbf{x}')$ é um dos limites em $\mathbf{x}'$ de $j(\mathbf{x})$ ou de $f(\mathbf{x})$ [*p.* 122, *l.* 17].

Com o fim de citarmos um exemplo de funções juxtapostas, consideremos uma função $f(\mathbf{x})$ definida num conjunto $\mathbf{A}$ não totalmente fechado. Seja $\mathbf{B}$ um conjunto de elementos de $[\mathbf{A}]$ estranhos a $\mathbf{A}$, como por exemplo o conjunto $\mathbf{B} \mid [\mathbf{A}]-\mathbf{A}$. Designemos por $j(\mathbf{x})$ uma função definida em $\mathbf{A}+\mathbf{B}$, que em $\mathbf{A}$ coincida com $f(\mathbf{x})$ e que faça corresponder a cada elemento de $\mathbf{B}$ um dos limites de $f(\mathbf{x})$ no mesmo elemento, limite êste que supomos existir. As funções $f(\mathbf{x})$ e $j(\mathbf{x})$, a segunda das quais resultou de *prolongarmos* a primeira para o conjunto $\mathbf{B}$, juxtapõem-se entre si.

por $\mathbf{Z}'$. Qualquer elemento $\mathbf{z}$ de $\mathbf{Z}$ caracteriza-se pela condição de a cada número positivo δ lhe corresponder um elemento x de $\mathbf{A}$ tal que $\overline{\mathsf{x}\mathbf{Y}}<\delta$ e $\overline{f(\mathsf{x})\,\mathbf{z}}<\delta$. Mas como o elemento $f(\mathsf{x})$ é um dos limites em x de $j(\mathsf{x})$, vem da mesma maneira, para um certo x' de $\mathbf{A}'$, $\overline{\mathsf{x}'\mathsf{x}}<\delta$ e $\overline{j(\mathsf{x}')\,f(\mathsf{x})}<\delta$. Temos pois $\overline{\mathsf{x}'\mathbf{Y}}<2\delta$ e $\overline{j(\mathsf{x}')\,\mathbf{z}}<2\delta$, isto é, o elemento $\mathbf{z}$ pertence a $\mathbf{Z}'$.

Pelas mesmas razões um elemento qualquer de $\mathbf{Z}'$ também é elemento de $\mathbf{Z}$.

Se um dos conjuntos limites é desprovido de elementos, o mesmo sucede ao outro.

O conjunto limite $\lambda(\mathbf{Y})$ é totalmente fechado.

Seja $\mathbf{z}'$ um elemento limite do conjunto $\lambda(\mathbf{Y})$. Dado um número positivo δ, existe um elemento $\mathbf{z}$ dêste conjunto tal que $\overline{\mathbf{z}\mathbf{z}'}<\delta$, e a $\mathbf{z}$ corresponde um elemento x de $\mathbf{A}$ tal que $\overline{\mathsf{x}\mathbf{Y}}<\delta$ e $\overline{f(\mathsf{x})\,\mathbf{z}}<\delta$. Temos pois $\overline{\mathsf{x}\mathbf{Y}}<\delta$ e $\overline{f(\mathsf{x})\,\mathbf{z}'}<2\delta$, quere dizer, $\mathbf{z}'$ é um elemento de $\lambda(\mathbf{Y})$.

O conjunto $\lambda(\mathbf{Y})$ contém os conjuntos limites de $f(\mathsf{x})$ nos diversos elementos de $[\mathbf{Y}]$. Quando $\mathbf{Y}$ é limitado, o primeiro conjunto limite coincide com a soma dos segundos.

É evidente que $\lambda(\mathbf{Y})$ contém os conjuntos limites de $f(\mathsf{x})$ nos diversos elementos de $[\mathbf{Y}]$. Suponhamos que $\mathbf{Y}$ é limitado. Um elemento $\mathbf{z}$ de $\lambda(\mathbf{Y})$ é limite duma sucessão (11) correspondente a uma sucessão (10) tal que $lim\,\overline{\mathsf{x}_i\mathbf{Y}}=0$. Mas a (10) é limitada [*p.* 268, *l.* 8], e qualquer dos seus elementos limites $\mathbf{y}$ pertence a $[\mathbf{Y}]$ [*p.* 83, *l.* 6]. Logo $\mathbf{z}$ é elemento do conjunto $\lambda(\mathbf{y})$.

A função $\lambda(\mathbf{Y})$ é aditiva para um número finito de parcelas, e ainda para uma infinidade de parcelas quando a soma destas é um conjunto fechado.

A propriedade aditiva, expressa por

$$\lambda(\mathbf{Y}_1+\mathbf{Y}_2+\ldots)\mid\lambda(\mathbf{Y}_1)+\lambda(\mathbf{Y}_2)+\cdots,$$

é evidentemente verdadeira para qualquer número finito de parcelas. A propriedade aditiva generalizada para uma infinidade de parcelas verifica-se quando a soma destas é limitada e fechada, como resulta da proposição precedente. Pode porém deixar de ser verdadeira quando tal soma não é limitada e fechada.

Se $f(\mathsf{x})$ é limitada e se $\mathbf{Y}$ e $\mathbf{Y}'$ são subconjuntos de $[\mathbf{A}]$ ligados entre si, os conjuntos $\lambda(\mathbf{Y})$ e $\lambda(\mathbf{Y}')$ possuem um elemento comum.

Na verdade, se $\mathbf{Y}$ e $\mathbf{Y}'$ são subconjuntos de $[\mathbf{A}]$ ligados um ao outro, podemos determinar uma sucessão (10) de elementos de $\mathbf{A}$ tal que seja $lim\,\overline{\mathsf{x}_i\mathbf{Y}}=0$ e $lim\,\overline{\mathsf{x}_i\mathbf{Y}'}=0$. Os limites da correspondente sucessão (11) são elementos comuns a $\lambda(\mathbf{Y})$ e a $\lambda(\mathbf{Y}')$.

Por conseguinte, se diversos subconjuntos $\mathbf{Y}$ de $[\mathbf{A}]$, em número finito, são ligados entre si, o mesmo sucede aos correspondentes conjuntos $\lambda(\mathbf{Y})$, que se podem dispor por uma certa ordem, com repetições se fôr necessário, de tal maneira que dois conjuntos consecutivos quaisquer possuam um elemento comum [*p.* 192, *l.* 32].

Seja $\mathbf{B}$ um subconjunto de $[\mathbf{A}]$. Consideremos duas sucessões de vizinhanças de $\mathbf{B}$ que tendam para $\mathbf{B}$,

$$(14)\qquad \mathbf{U}_1,\ \mathbf{U}_2,\ \ldots,\ \mathbf{U}_i,\ \ldots$$
$$(15)\qquad \mathbf{V}_1,\ \mathbf{V}_2,\ \ldots,\ \mathbf{V}_i,\ \ldots,$$

sendo as primeiras relativas a $\mathbf{A}$ e as segundas a $[\mathbf{A}]$. As sucessões

$$(16)\qquad f(\mathbf{U}_1),\ f(\mathbf{U}_2),\ \ldots,\ f(\mathbf{U}_i),\ \ldots$$
$$(17)\qquad \lambda(\mathbf{U}_1),\ \lambda(\mathbf{U}_2),\ \ldots,\ \lambda(\mathbf{U}_i),\ \ldots$$
$$(18)\qquad \lambda(\mathbf{V}_1),\ \lambda(\mathbf{V}_2),\ \ldots,\ \lambda(\mathbf{V}_i),\ \ldots$$

convergem para $\lambda(\mathbf{B})$ [1].

Suponhamos que existe o conjunto $\lambda(\mathbf{B})$. A sucessão (16) é então quási-limitada, pois temos $[f(\mathbf{U}_i)]\,|\!>\lambda(\mathbf{B})$ [*p.* 285, *l.* 11], e é convergente porquanto cada um dos seus termos contém os termos seguintes a partir de certa ordem [*p.* 166, *l.* 6]. O seu limite totalmente fechado $\mathbf{Z}$ satisfaz à condição $\mathbf{Z}\,|\!>\lambda(\mathbf{B})$, e como por outro lado qualquer elemento de $\mathbf{Z}$ pertence evidentemente a $\lambda(\mathbf{B})$, dá-se a coincidência $\mathbf{Z}\,|\,\lambda(\mathbf{B})$.

Tomemos um têrmo qualquer $\mathbf{U}_k$ da sucessão (14). A partir da ordem em que os valores de i fazem $\mathbf{U}_k>\mathbf{U}_i$, o têrmo $\mathbf{U}_k$ con-

---

[1] Notemos que, em todo êste assunto, os conjuntos B, X, Y, X', Y', X_i e Y_i podem converter-se em simples elementos. Assim, na proposição que acabamos de enunciar podemos supor que B se reduz a um elemento b de $[\mathsf{A}]$.

têm uma vizinhança de cada têrmo $\mathbf{U}_i$ [*p.* 268, *l.* 15], sendo por isso $[f(\mathbf{U}_k)] | > \lambda(\mathbf{U}_i)$. A partir da mesma ordem também temos $\lambda(\mathbf{U}_k) | > [f(\mathbf{U}_i)]$ [*p.* 285, *l.* 14]. O lugar de cada têrmo de qualquer das sucessões (16) ou (17) contém pois os termos da outra a partir de certa ordem, razão porque a (17) tende para o mesmo limite $\lambda(\mathbf{B})$ que a (16) [*p.* 172, *l.* 27].

Demonstremos que a sucessão (18) também converge para $\lambda(\mathbf{B})$. Consideremos para isso uma função $j(\mathbf{x})$ juxtaposta a $f(\mathbf{x})$ que resulte de *prolongarmos* $f(\mathbf{x})$ para o conjunto $[\mathbf{A}] - \mathbf{A}$. Os conjuntos $\lambda(\mathbf{B})$ e $\lambda(\mathbf{V}_i)$ relativos a $f(\mathbf{x})$ não se alteram quando esta função se substitui por $j(\mathbf{x})$ [*p.* 285, *l.* 17]. Logo a sucessão (18) — que se encontra relativamente a $j(\mathbf{x})$ nas mesmas condições que a (17) a respeito de $f(\mathbf{x})$ — tende ainda para $\lambda(\mathbf{B})$.

Se $\lambda(\mathbf{B})$ é desprovido de elementos, fàcilmente se reconhece que a sucessão (16) não é quási-limitada, e que por isso diverge para infinito [*p.* 166, *l.* 15]. Nesse caso as sucessões (17) e (18) também divergem para infinito.

Quando $f(\mathbf{x})$ é limitada numa vizinhança de $\mathbf{B}$, existe $\lambda(\mathbf{B})$ e temos

$$lim\, \overline{f(\mathbf{U}_i)\ \lambda(\mathbf{B})} = lim\, \overline{\lambda(\mathbf{U}_i)\ \lambda(\mathbf{B})} = lim\, \overline{\lambda(\mathbf{V}_i)\ \lambda(\mathbf{B})} = 0\,.$$

Seja $\mathbf{B}$ *um subconjunto de* $[\mathbf{A}]$. *Consideremos duas sucessões*

$$\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_i, \ldots$$
$$\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_i, \ldots$$

de subconjuntos de $\mathbf{A}$ *e de* $[\mathbf{A}]$ *respectivamente tais que seja* $lim\, \overrightarrow{\mathbf{X}_i \mathbf{B}} = lim\, \overrightarrow{\mathbf{Y}_i \mathbf{B}} = 0$. *O conjunto* $\lambda(\mathbf{B})$ *contém os limites integrais das sucessões*

$$(19) \qquad f(\mathbf{X}_1), f(\mathbf{X}_2), \ldots, f(\mathbf{X}_i), \ldots$$
$$(20) \qquad \lambda(\mathbf{Y}_1), \lambda(\mathbf{Y}_2), \ldots, \lambda(\mathbf{Y}_i), \ldots$$

Quando $f(\mathbf{x})$ *é limitada numa vizinhança de* $\mathbf{B}$, *temos*

$$(21) \qquad lim\, \overrightarrow{f(\mathbf{X}_i)\ \lambda(\mathbf{B})} = 0 \quad e \quad lim\, \overrightarrow{\lambda(\mathbf{Y}_i)\ \lambda(\mathbf{B})} = 0\,.$$

Podemos considerar, com efeito, os termos das sucessões (19) e (20) como sendo subconjuntos dos correspondentes termos de sucessões construídas como a (16) e a (18) da proposição precedente.

Quando as somas dos termos das (19) e (20) são limitadas verificam-se os limites (21) [*p*. 84, *l*. 17].

Em particular: *se* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_i, \ldots$ *é uma sucessão de elementos de* **A** *tais que* $\lim \underline{\mathbf{x}_i \mathbf{B}} = 0$, *temos também* $\lim \underline{f(\mathbf{x}_i)\ \lambda(\mathbf{B})} = 0$.

Suponhamos que $f(\mathbf{x})$ *é limitada numa vizinhança de* **B**. *A cada número positivo* ∂ *corresponde um número positivo* ε *de maneira que se verificam as desigualdades*

$$\overline{f(\mathbf{U})\ \lambda(\mathbf{B})} < \partial \ ,\quad \overline{\lambda(\mathbf{U})\ \lambda(\mathbf{B})} < \partial \ ,\quad \overline{\lambda(\mathbf{V})\ \lambda(\mathbf{B})} < \partial$$
$$\overline{f(\mathbf{U})\, f(\mathbf{U}')} < \partial \ ,\quad \overline{\lambda(\mathbf{U})\ \lambda(\mathbf{U}')} < \partial \ ,\quad \overline{\lambda(\mathbf{V})\ \lambda(\mathbf{V}')} < \partial$$

para quaisquer vizinhanças **U**, **U**′, **V** *e* **V**′, *de* **B**, *sendo as duas primeiras relativas a* **A** *e as outras a* [**A**], *que distem de* **B** *menos de* ε.

Consideremos a infinidade das vizinhanças **U** de **B** relativas a **A**. Dado um número positivo ∂, a cada sucessão (14) de vizinhanças **U** que tenda para **B** corresponde uma ordem a partir da qual é $\overline{f(\mathbf{U}_i)\ \lambda(\mathbf{B})} < \partial$. Logo existe um número positivo ε tal que seja $\overline{f(\mathbf{U})\ \lambda(\mathbf{B})} < \partial$ sempre que se tenha $\overline{\mathbf{U}\mathbf{B}} < \varepsilon$ [*p*. 279, *l*. 1].

Da mesma maneira se justificam as outras desigualdades que figuram no enunciado.

Se $f(\mathbf{x})$ *é limitada numa vizinhança de* **B**, *a cada número positivo* ∂ *corresponde um número* ε *de maneira que se verificam as desigualdades*

$$\overrightarrow{f(\mathbf{X})\ \lambda}(\mathbf{B}) < \partial \quad \text{e} \quad \overrightarrow{\lambda(\mathbf{Y})\ \lambda}(\mathbf{B}) < \partial$$

para quaisquer subconjuntos **X** *e* **Y** *de* **A** *e de* [**A**] *tais que* $\mathbf{X}\overrightarrow{\mathbf{B}} < \varepsilon$ *e* $\overrightarrow{\mathbf{Y}\mathbf{B}} < \varepsilon$.

É um corolário da proposição precedente. Em particular:

Se $f(\mathbf{x})$ *é limitada numa vizinhança de* **B**, *a cada* ∂ *corresponde um* ε *de maneira que seja* $\underline{f(\mathbf{x})\ \lambda(\mathbf{B})} < \partial$ *sempre que se tenha* $\underline{\mathbf{x}\mathbf{B}} < \varepsilon$.

Para que seja $\mathbf{Z} \parallel \lambda(\mathbf{B})$, *sendo* $f(\mathbf{x})$ *qualquer, é suficiente que a todo o número positivo* ∂ *corresponda um positivo* ε *de maneira que se verifique uma das desigualdades*

$$\overline{f(\mathbf{U})\,\mathbf{Z}} < \partial \ ,\quad \overline{\lambda(\mathbf{U})\,\mathbf{Z}} < \partial \ ,\quad \overline{\lambda(\mathbf{V})\,\mathbf{Z}} < \partial$$

para quaisquer vizinhanças $\mathbf{U}$ *e* $\mathbf{V}$ *de* $\mathbf{B}$ *relativas a* $\mathbf{A}$ *e a* $[\mathbf{A}]$ *tais que* $\overline{\mathbf{UB}}<\varepsilon$ *e* $\overline{\mathbf{VB}}<\varepsilon$.

Uma qualquer destas condições é, com efeito, suficiente para que uma das sucessões (16), (17) ou (18) tenda para $\mathbf{Z}$ [*p.* 165, *l.* 11].

Para que exista o conjunto $\lambda(\mathbf{B})$ *duma função qualquer* $f(\mathbf{x})$ *é suficiente que a todo o número positivo* δ *se oponha um positivo* ε *de maneira que seja*

$$\overline{f(\mathbf{U})\,f(\mathbf{U}')}<\delta$$

para tôdas as vizinhanças $\mathbf{U}$ *e* $\mathbf{U}'$ *de* $\mathbf{B}$ *tais que* $\overline{\mathbf{UB}}<\varepsilon$ *e* $\overline{\mathbf{U}'\mathbf{B}}<\varepsilon$.

Esta condição é na verdade suficiente para que se dê a convergência da sucessão (16).

Para que duas funções limitadas $f(\mathbf{x})$ *e* $g(\mathbf{x})$, *definidas no conjunto* $\mathbf{A}$, *admitam o mesmo conjunto limite em* $\mathbf{B}$ *é necessário e suficiente que a todo o número positivo* δ *corresponda um positivo* ε *de maneira que se verifique a desigualdade*

$$\overline{f(\mathbf{U})\,g(\mathbf{U}')}<\delta$$

para quaisquer vizinhanças $\mathbf{U}$ *e* $\mathbf{U}'$ *de* $\mathbf{B}$ *tais que* $\overline{\mathbf{UB}}<\varepsilon$ *e* $\overline{\mathbf{U}'\mathbf{B}}<\varepsilon$. *Se* $f(\mathbf{x})$ *e* $g(\mathbf{x})$ *são ilimitadas, a condição é suficiente para que existam e sejam os mesmos os limites em* $\mathbf{B}$ *dessas funções.*

Se as funções limitadas $f(\mathbf{x})$ e $g(\mathbf{x})$ admitem em $\mathbf{B}$ o mesmo conjunto limite, a sucessão (16) e a correspondente a $g(\mathbf{x})$ convergem para os mesmos limites. Temos por isso, a partir de certa ordem,

$$\overline{f(\mathbf{U}_i)\,g(\mathbf{U}_{i'})}<\delta \quad [p.\ 18,\ l.\ 22].$$

A primeira parte da proposição pode pois justificar-se aplicando o já citado lema [*p.* 279, *l.* 1] à infinidade das vizinhanças $\mathbf{U}$, ao conjunto $\mathbf{B}$ e à família dos conjuntos dos termos de cada sucessão (14) a partir da ordem em que se verifica a desigualdade precedente.

A condição é suficiente, embora $f(\mathbf{x})$ e $g(\mathbf{x})$ possam representar funções ilimitadas nas vizinhanças de $\mathbf{B}$. Considerando, com efeito, uma sucessão (14) de vizinhanças de $\mathbf{U}$ que tenda para $\mathbf{B}$, temos, por fôrça da referida condição,

$$lim\, \overline{f(\mathbf{U}_i)\ g(\mathbf{U}_{i'})} = 0 .$$

Logo existem e são os mesmos os limites $[lim\, f(\mathbf{U}_i)]$ e $[lim\ g(\mathbf{U}_i)]$ [1].

Para que as funções $f(\mathrm{x})$ *e* $g(\mathrm{x})$, *definidas no conjunto* $\mathbf{A}$, *admitam o mesmo conjunto limite em* $\mathbf{B}$ *é suficiente que a todo o número positivo* δ *se oponha um positivo* ε *de maneira que seja*

$$\overline{f(\mathbf{U})\ g(\mathbf{U})} < \delta$$

para qualquer vizinhança $\mathbf{U}$ *de* $\mathbf{B}$ *tal que* $\overline{\mathbf{U}\mathbf{B}} < \varepsilon$. *Se uma das funções não admite conjunto limite em* $\mathbf{B}$, *o mesmo sucede à outra.*

Efectivamente, considerando a sucessão (16) e a correspondente para $g(\mathrm{x})$, temos

$$lim\, \overline{f(\mathbf{U}_i)\ g(\mathbf{U}_i)} = 0 ,$$

e as duas sucessões, quando convergentes, tendem para o mesmo limite totalmente fechado $\lambda(\mathbf{B})$; quando uma das sucessões diverge para infinito, o mesmo acontece à outra [*p.* 170, *l.* 26].

---

[1] Baseamo-nos na seguinte proposição:
Para que duas sucessões de conjuntos quaisquer

$$\mathrm{A}_1,\ \mathrm{A}_2,\ \ldots\ \mathrm{A}_i,\ \ldots$$
$$\mathrm{B}_1,\ \mathrm{B}_2,\ \ldots\ \mathrm{B}_i,\ \ldots$$

convirjam para os mesmos limites é suficiente que se verifique a condição $lim\ \overline{\mathrm{A}_i\,\mathrm{B}_{i'}} = 0$.

Na verdade, esta mesma condição dá em particular $lim\ \overline{\mathrm{A}_i\,\mathrm{B}_i} = 0$, e por isso também temos

$$lim\ \overline{\mathrm{A}_i\,\mathrm{A}_{i'}} \lesssim lim\, (\overline{\mathrm{A}_i\,\mathrm{B}_{i'}} + \overline{\mathrm{A}_{i'}\,\mathrm{B}_{i'}}) = 0 .$$

A primeira das sucessões dadas é pois convergente, e, em virtude da condição $lim\ \overline{\mathrm{A}_i\,\mathrm{B}_i} = 0$, a segunda converge para o mesmo limite totalmente fechado que a primeira [*p.* 170, *l.* 19].

Dado um subconjunto $\mathbf{B}$ *de* $[\mathbf{A}]$, *suponhamos que existe uma sucessão de subconjuntos conexos de* $\mathbf{A}$,

$$\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \ldots, \mathbf{C}_i, \ldots,$$

cada um dos quais contenha uma vizinhança de $\mathbf{B}$ *e tais que seja* $\lim \overrightarrow{\mathbf{C}_i \mathbf{B}} = 0$. *Se* $f(\mathsf{x})$ *é uma função limitada, definida em* $\mathbf{A}$, *que faça corresponder aos conjuntos conexos* $\mathbf{C}_i$ *novos conjuntos conexos* $f(\mathbf{C}_i)$, *o conjunto* $\lambda(\mathbf{B})$ *é um contínuo* [1].

Efectivamente, por ser $\lim \overrightarrow{\mathbf{C}_i \mathbf{B}} = 0$, os termos da sucessão

$$f(\mathbf{C}_1), f(\mathbf{C}_2), \ldots, f(\mathbf{C}_i), \ldots \tag{22}$$

podem considerar-se subconjuntos dos termos correspondentes duma sucessão do tipo (16), e como por outro lado cada um dos conjuntos $\mathbf{C}_i$ contém uma vizinhança de $\mathbf{B}$, existe também uma sucessão do tipo (16) cujos termos são subconjuntos dos termos correspondentes da (22). Logo temos

$$\lim \overline{f(\mathbf{C}_i)\, \lambda(\mathbf{B})} = 0 \quad [p.\ 170,\ l.\ 6],$$

e por isso o conjunto fechado $\lambda(\mathbf{B})$ é um contínuo [*p.* 213, *l.* 7] [2].

Em particular: *se a função limitada* $f(\mathsf{x})$, *definida em* $\mathbf{A}$, *faz corresponder a conjuntos conexos novos conjuntos conexos, e se as diversas vizinhanças do subconjunto* $\mathbf{B}$ *de* $[\mathbf{A}]$, *em relação a* $\mathbf{A}$, *são conjuntos conexos, o conjunto* $\lambda(\mathbf{B})$ *é um contínuo.*

Suponhamos que o subconjunto $\mathbf{B}$ *de* $[\mathbf{A}]$ *verifica a seguinte propriedade: seja qual fôr a sucessão* $\mathsf{x}_1, \mathsf{x}_2, \ldots, \mathsf{x}_i, \ldots$ *de elementos de* $\mathbf{A}$ *que faça* $\lim \overline{\mathsf{x}_i \mathbf{B}} = 0$, *há uma ordem a partir da qual dois elementos quaisquer* x_i *e* $\mathsf{x}_{i'}$ *pertencem a um subconjunto conexo* $\mathbf{C}_{i,i'}$ *de* $\mathbf{A}$ *de tal modo que se tenha* $\lim \overrightarrow{\mathbf{C}_{i,i'} \mathbf{B}} = 0$. *Se* $f(\mathsf{x})$ *é uma função limitada, definida em* $\mathbf{A}$, *que faça corresponder aos*

---

[1] Êste contínuo pode degenerar num só elemento ou em elementos justapostos entre si.

[2] Nas condições do enunciado o conjunto $\mathbf{B}$ é conexo, pois temos $\lim \overline{\mathbf{C}_i \mathbf{B}} = 0$.

conjuntos conexos $\mathbf{C}_{i,i'}$ *novos conjuntos conexos* $f(\mathbf{C}_{i,i'})$, *o conjunto* $\lambda(\mathbf{B})$ *é um contínuo.*

A cada número $\frac{1}{i}$ façamos corresponder uma vizinhança $\mathbf{U}_i$ de $\mathbf{B}$ relativa a $\mathbf{A}$ de maneira que dois elementos quaisquer de $\mathbf{U}_i$ pertençam a um subconjunto conexo $\mathbf{C}$ de $\mathbf{A}$ tal que $\overrightarrow{\mathbf{C}\mathbf{B}} < \frac{1}{i}$ [*p.* 278, *l.* 2]. A soma $\mathbf{C}_i$ de todos os conjuntos $\mathbf{C}$ correspondentes aos diversos pares de elementos de $\mathbf{U}_i$ é manifestamente um conjunto conexo a que pertence $\mathbf{U}_i$. Verifica-se a relação $\overrightarrow{\mathbf{C}_i\mathbf{B}} \leqq \frac{1}{i}$. A sucessão

$$\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \ldots, \mathbf{C}_i, \ldots,$$

que resulta de pormos $i = 1, 2, \ldots$, satisfaz ao enunciado da proposição precedente, razão porque $\lambda(\mathbf{B})$ é um contínuo. Êste pode reduzir-se a um elemento apenas, ou a elementos juxtapostos entre si [1].

---

[1] Demonstrámos de passagem a seguinte proposição:

É conexo um subconjunto B *de* [A] *que verifique a seguinte propriedade: a qualquer sucessão* $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots$, *de elementos de* A *que faça* $lim\, \underline{x_i \mathsf{B}} = 0$ *corresponde uma ordem a partir da qual dois elementos* x_i *e* $x_{i'}$ *unem-se sempre por um subconjunto conexo* $\mathsf{C}_{i,i'}$ *de* A *de maneira que seja* $lim\, \overrightarrow{\mathsf{C}_{i,i'}\mathsf{B}} = 0$.

Transformando esta proposição por meio do lema já citado a *p.* 278, *l.* 2, damos-lhe o seguinte enunciado:

É conexo um subconjunto B *de* [A] *que verifique a seguinte propriedade: a qualquer vizinhança* U *de* B *relativa a* A *corresponde uma outra* U′ *tal que: dois elementos de* U′ *unem-se sempre por um subconjunto conexo de* U.

Fàcilmente reconhecemos que a mesma proposição também pode deduzir-se como um corolário da seguinte:

É conexo um conjunto B *que satisfaça à seguinte propriedade: a cada par dos seus elementos* b *e* b′ *corresponde uma sucessão de conjuntos conexos* $\mathsf{C}_1, \mathsf{C}_2, \ldots, \mathsf{C}_i, \ldots$ *tal que*

$$lim\, \underline{\mathsf{C}_i \mathsf{b}} = lim\, \underline{\mathsf{C}_i \mathsf{b}'} = lim\, \overrightarrow{\mathsf{C}_i \mathsf{B}} = 0.$$

Por outras palavras, é conexo um conjunto B *que satisfaça à seguinte condição: a cada par dos seus elementos* b *e* b′ *e a cada número positivo* ε *corresponde um conjunto conexo* C *tal que*

$$\underline{\mathsf{C}\,\mathsf{b}} < \varepsilon\ ,\quad \underline{\mathsf{C}\,\mathsf{b}'} < \varepsilon\ ,\quad \overrightarrow{\mathsf{C}\mathsf{B}} < \varepsilon.$$

Basta notar que a soma S de todos os conjuntos conexos C que verificam as

Observação. — *Quando os elementos da função $f(\mathbf{X})$ considerada nas duas proposições precedentes são números reais, dispensa-se a hipótese da limitabilidade da mesma função.*

De facto, o limite fechado duma sucessão convergente de conjuntos conexos de números reais é sempre um intervalo [1] porque o lugar dum conjunto conexo linear é um intervalo e o limite fechado duma sucessão convergente de intervalos é ainda um intervalo. No caso de os termos da sucessão (22) serem constituídos por números reais, o limite fechado, quando existe, é pois um intervalo [2].

89. Oscilação duma função. — Seja $f(\mathbf{x})$ uma função definida no conjunto $\mathbf{A}$. Chamamos *oscilação* de $f(\mathbf{x})$ num dado subconjunto $\mathbf{X}$ de $\mathbf{A}$ ao diâmetro do correspondente conjunto $f(\mathbf{X})$, e será representado por $\omega(\mathbf{X})$. Para qualquer elemento $\mathbf{X}$ de $\mathbf{A}$ vem, em particular, $\omega(\mathbf{x}) = 0$. A oscilação de $f(\mathbf{X})$ em $\mathbf{X}$ torna-se infinita quando $f(\mathbf{X})$ é ilimitado.

Consideremos agora um subconjunto $\mathbf{Y}$ de $[\mathbf{A}]$ (um elemento $\mathbf{y}$, em particular). Quando $f(\mathbf{x})$ é limitada numa vizinhança de $\mathbf{Y}$, damos o nome de *oscilação limite de* $f(\mathbf{X})$ *no conjunto* $\mathbf{Y}$ ao diâmetro do respectivo conjunto limite $\lambda(\mathbf{Y})$.

---

desigualdades anteriores para os diversos pares de elementos $\mathbf{b}$ e $\mathbf{b}'$ de $\mathbf{B}$ é um conjunto cuja desconexão não excede 2ε e tal que $\overline{\mathbf{S}\,\mathbf{B}} \leqq \varepsilon$ [*p.* 208, *l.* 3].

É conexo, em particular, um conjunto $\mathbf{B}$ que satisfaça à seguinte condição: dados um número positivo ε e dois dos seus elementos, estes pertencem a um conjunto conexo $\mathbf{C}$ tal que $\overrightarrow{\mathbf{C}\,\mathbf{B}} < \varepsilon$.

Observemos que a última proposição desta nota dá-nos uma condição não só suficiente mas também necessária para que $\mathbf{B}$ seja conexo. A primeira dá-nos uma condição que pode deixar de ser necessária; é fácil imaginar um exemplo dum espaçóide cujos subconjuntos conexos não obedeçam todos a tal condição.

[1] Chamamos intervalo, em geral, a qualquer contínuo linear. Pode reduzir-se a um só ponto, e as suas extremidades podem ser ambas finitas ou não.

[2] Seja por exemplo $f(x)$ uma função real de variável real, definida nos pontos dum intervalo (α, β), de centro a, à excepção possível dêste ponto. Suponhamos que $f(x)$ faz corresponder a qualquer intervalo I interior ao primeiro (excluindo em I o ponto a quando $f(x)$ não é nêle definida) um conjunto conexo $f(I)$ (como sucede com uma função derivada em (α, β); recorde-se para isso o teorema de DARBOUX sôbre funções derivadas, por exemplo nas *Lições de Cálculo e Geometria* de J. VICENTE GONÇALVES, *p.* 209). O conjunto $\lambda(a)$, quando existe, é um intervalo. Os conjuntos limites de $f(x)$ à esquerda e à direita de a também são intervalos.

A oscilação de $f(\mathbf{x})$ em $\mathbf{Y}$ será designada por $\Omega(\mathbf{Y})$, e diremos que é infinita quando $f(\mathbf{x})$ fôr ilimitada nas vizinhanças de $\mathbf{Y}$.

À função $\Omega(\mathbf{y})$, definida em todos os elementos de $[\mathbf{A}]$, excepto naqueles em que a oscilação limite se torna infinita, chamaremos *oscilação elementar limite de* $f(\mathbf{x})$.

É evidente a relação $\omega(\mathbf{X}) \overline{\lesseqgtr} \Omega(\mathbf{X})$, pois também temos $f(\mathbf{X}) | < \lambda(\mathbf{X})$.

A oscilação $\Omega(\mathbf{Y})$ tem o mesmo valor que em qualquer conjunto juxtaposto a $\mathbf{Y}$ [*p.* 285, *l.* 15]. Mais geralmente:

São as mesmas as oscilações limites em conjuntos juxtapostos de funções juxtapostas entre si.

São de facto os mesmos os conjuntos limites em conjuntos juxtapostos de duas funções juxtapostas entre si [*p.* 285, *l.* 17]. Quando nas vizinhanças de um dos conjuntos a correspondente função é ilimitada, o mesmo sucede relativamente à outra [*p.* 283, *l.* 5]; as oscilações limites são nesse caso infinitas.

Seja $\mathbf{B}$ *um subconjunto de* $[\mathbf{A}]$. *Se*

$$\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \ldots, \mathbf{U}_i, \ldots$$

e

$$\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \ldots, \mathbf{V}_i, \ldots$$

são duas sucessões de vizinhanças de $\mathbf{B}$, *sendo as primeiras relativas a* $\mathbf{A}$ *e as segundas a* $[\mathbf{A}]$, *tais que seja* $lim\, \overline{\mathbf{U}_i \mathbf{B}} = lim\, \overline{\mathbf{V}_i \mathbf{B}} = 0$, *temos*

$$lim\, \omega(\mathbf{U}_i) = lim\, \Omega(\mathbf{U}_i) = lim\, \Omega(\mathbf{V}_i) = \Omega(\mathbf{B}).$$

É uma conseqüência da proposição a *p.* 287, *l.* 13. Com efeito, quando $f(\mathbf{x})$ é limitada numa vizinhança de $\mathbf{B}$, os diâmetros dos termos das sucessões (16), (17) e (18) tendem para o diâmetro do respectivo limite $\lambda(\mathbf{B})$ [*p.* 118, *l.* 17]; quando $f(\mathbf{x})$ é ilimitada nas vizinhanças de $\mathbf{B}$, também são ilimitados os diversos termos das mesmas sucessões e os respectivos diâmetros são infinitos.

Por conseguinte, a um dado número α superior a $\Omega(\mathbf{B})$ correspondem sempre vizinhanças $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ de $\mathbf{B}$ relativas a $\mathbf{A}$ e a $[\mathbf{A}]$ para as quais é $\omega(\mathbf{U}) < \alpha$, $\Omega(\mathbf{U}) < \alpha$ e $\Omega(\mathbf{V}) < \alpha$[1].

---

[1] É claro que da terceira destas desigualdades se deduzem as duas primeiras quando as vizinhanças $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ são definidas por um mesmo número positivo.

A cada sucessão $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_i, \ldots$ de elementos de $\mathbf{A}$ que faça $lim\, \overline{\mathbf{x}_i \mathbf{B}} = 0$ corresponde pois uma ordem a partir da qual temos $\overline{f(\mathbf{x}_i)\; f(\mathbf{x}_{i'})} < \alpha$.

Se as funções $f_1(\mathbf{x})$ e $f_2(\mathbf{x})$, definidas no mesmo conjunto $\mathbf{A}$, satisfazem à condição $\overline{f_1(\mathbf{x})\; f_2(\mathbf{x})} \lesseqgtr \beta$ para um certo número β e para qualquer elemento $\mathbf{x}$ de $\mathbf{A}$, as suas oscilações $\omega_1(\mathbf{X})$ e $\omega_2(\mathbf{X})$ e as suas oscilações limites $\Omega_1(\mathbf{Y})$ e $\Omega_2(\mathbf{Y})$ satisfazem às condições

$$|\omega_1(\mathbf{X}) - \omega_2(\mathbf{X})| \lesseqgtr 2\beta \tag{23}$$

e

$$|\Omega_1(\mathbf{Y}) - \Omega_2(\mathbf{Y})| \lesseqgtr 2\beta. \tag{24}$$

Dada a hipótese $\overline{f_1(\mathbf{x})\; f_2(\mathbf{x})} \lesseqgtr \beta$, temos evidentemente $\overline{f_1(\mathbf{X})\; f_2(\mathbf{X})} \lesseqgtr \beta$, donde se deduz a relação (23) [*p.* 65, (3)]. Quando uma das oscilações $\omega_1(\mathbf{X})$ ou $\omega_2(\mathbf{X})$ se torna infinita, o mesmo acontece à outra [*p.* 62, *l.* 10].

Tendo em vista a proposição precedente, da relação (23) deduz-se a (24), sendo também as oscilações $\Omega_1(\mathbf{Y})$ e $\Omega_2(\mathbf{Y})$ ou ambas finitas ou ambas infinitas.

Suponhamos que num dado subconjunto $\mathbf{B}$ de $[\mathbf{A}]$ é $\Omega(\mathbf{B}) < \alpha$. Se a sucessão de subconjuntos de $[\mathbf{A}]$

$$\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_i, \ldots$$

é tal que $lim\, \overrightarrow{\mathbf{Y}_i \mathbf{B}} = 0$, temos a partir de certa ordem $\Omega(\mathbf{Y}_i) < \alpha$.

Determinemos uma vizinhança $\mathbf{V}$ de $\mathbf{B}$ relativa a $[\mathbf{A}]$ na qual seja $\Omega(\mathbf{V}) < \alpha$. A partir da ordem em que é $\mathbf{Y}_i | < \mathbf{V}$ temos $\Omega(\mathbf{Y}_i) < \alpha$.

Se em particular é $\Omega(\mathbf{b}) < \alpha$ num dado elemento $\mathbf{b}$ de $[\mathbf{A}]$ e se a sucessão $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_i, \ldots$ de elementos de $[\mathbf{A}]$ tende para $\mathbf{b}$, vem a partir de certa ordem $\Omega(\mathbf{y}_i) < \alpha$[1].

[1] Exprimimos esta propriedade dizendo que $\Omega(\mathbf{y})$ é uma função semicontínua superiormente.

Seja $\mathbf{B}$ *um subconjunto fechado de* $[\mathbf{A}]$. *É fechado o conjunto dos subconjuntos limitados* $\mathbf{Y}$ *de* $\mathbf{B}$ *onde* $\Omega(\mathbf{Y})$ *iguala ou excede um dado número* γ.

Consideremos uma sucessão convergente

$$\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_i, \ldots$$

de subconjuntos de $\mathbf{B}$, de soma limitada, tais que $\Omega(\mathbf{Y}_i) \geqq \gamma$. Seja $\mathbf{Y}$ um limite da mesma sucessão mas contido em $\mathbf{B}$ [*p.* 121, *l.* 18]. Dado um número positivo δ, verifica-se a desigualdade $\Omega(\mathbf{Y}_i) < \Omega(\mathbf{Y}) + \delta$ a partir de certa ordem [*p.* 296, *l.* 18], sendo por conseguinte $\gamma < \Omega(\mathbf{Y}) + \delta$. Temos pois $\gamma \leqq \Omega(\mathbf{Y})$, o que demonstra a proposição.

Notemos que a oscilação $\Omega(\mathbf{Y})$ pode ser infinita[1].

Em particular:

Se $\mathbf{B}$ *é um subconjunto fechado de* $[\mathbf{A}]$, *também é fechado o conjunto dos elementos* $\mathbf{y}$ *de* $\mathbf{B}$ *onde* $\Omega(\mathbf{y})$ *iguala ou excede um dado número* γ.

Seja $\mathbf{B}$ *um subconjunto de* $[\mathbf{A}]$ *limitado e fechado. Se* $f(\mathbf{x})$ *é limitada numa vizinhança de* $\mathbf{B}$, *a função* $\Omega(\mathbf{y})$ *atinge um valor máximo em* $\mathbf{B}$; *se* $f(\mathbf{x})$ *é ilimitada nas vizinhanças de* $\mathbf{B}$, *existe um elemento dêste conjunto onde* $\Omega(\mathbf{y})$ *se torna infinita. É fechado o conjunto dos elementos de* $\mathbf{B}$ *onde* $\Omega(\mathbf{y})$ *atinge o seu valor máximo ou onde se torna infinita.*

Suponhamos, primeiro, que $f(\mathbf{x})$ é limitada numa vizinhança de $\mathbf{B}$. Seja Ω o limite superior da oscilação $\Omega(\mathbf{y})$ nos diversos elementos de $\mathbf{B}$. Em virtude da proposição anterior é fechado o conjunto $\mathbf{Y}_i$ dos elementos $\mathbf{y}_i$ de $\mathbf{B}$ onde temos

$$\Omega(\mathbf{y}_i) \geqq \Omega - \frac{1}{i}.$$

Mas existe e é fechado o produto dos conjuntos $\mathbf{Y}_i$ $(i=1, 2, \ldots)$, produto êste que é constituído pelos elementos $\mathbf{y}$ de $\mathbf{B}$, um pelo menos, onde se verifica a igualdade $\Omega(\mathbf{y}) = \Omega$.

---

[1] De idêntica maneira reconhecemos que, se $\mathbf{B}$ é totalmente fechado, o mesmo acontece ao conjunto dos subconjuntos limitados $\mathbf{Y}$ de $\mathbf{B}$ que fazem $\Omega(\mathbf{Y}) \geqq \gamma$ [*p.* 121, *l.* 30].

É pois fechado superiormente o conjunto dos valores da função $\Omega(\mathbf{y})$ nos diversos elementos de $\mathbf{B}$ [1].

Se $f(\mathbf{x})$ é ilimitada nas vizinhanças de $\mathbf{B}$, existe um elemento dêste conjunto onde a oscilação limite de $f(\mathbf{x})$ se torna infinita [*p.* 282, *l.* 32]. O conjunto de todos estes elementos de $\mathbf{B}$ é fechado.

Seja $\mathbf{B}$ *um subconjunto limitado e fechado do lugar do conjunto* $\mathbf{A}$ *onde se entende definida a função* $f(\mathbf{x})$. *Se esta função é limitada numa vizinhança de* $\mathbf{B}$, *a cada número* α *superior ao máximo de* $\Omega(\mathbf{y})$ *em* $\mathbf{B}$ *correspondem vizinhanças* $\mathbf{U}$ *e* $\mathbf{V}$ *de* $\mathbf{B}$, *relativas a* $\mathbf{A}$ *e a* $[\mathbf{A}]$, *e um número positivo* ε *tais que seja*

$$\omega(\mathbf{X})<\alpha \quad \text{e} \quad \Omega(\mathbf{Y})<\alpha$$

para subconjuntos quaisquer $\mathbf{X}$ *e* $\mathbf{Y}$ *de* $\mathbf{U}$ *e de* $\mathbf{V}$ *cujos diâmetros sejam inferiores a* ε.

Dada a hipótese $\Omega(\mathbf{y})<\alpha$ em $\mathbf{B}$, a cada elemento $\mathbf{y}$ dêste conjunto corresponde uma vizinhança de $\mathbf{y}$ relativa a $[\mathbf{A}]$ na qual a oscilação limite de $f(\mathbf{x})$ é inferior a α [*p.* 295, *l.* 31]. Mas podemos determinar uma vizinhança $\mathbf{V}$ de $\mathbf{B}$ em relação a $[\mathbf{A}]$ e um número positivo ε tais que um subconjunto $\mathbf{Y}$ de $\mathbf{V}$ de diâmetro inferior a ε pertença sempre a uma dessas vizinhanças [*p.* 276, *l.* 17]. Qualquer dos mesmos subconjuntos $\mathbf{Y}$ satisfaz pois à desigualdade $\Omega(\mathbf{Y})<\alpha$.

Verifica-se em particular a desigualdade $\Omega(\mathbf{y})<\alpha$ *em qualquer elemento* $\mathbf{y}$ *da vizinhança* $\mathbf{V}$.

Consideremos agora a vizinhança $\mathbf{U}$ de $\mathbf{B}$ relativa a $\mathbf{A}$ definida pelo mesmo número que define $\mathbf{V}$. Temos $\mathbf{U} \mid< \mathbf{V}$, e, para qualquer subconjunto $\mathbf{X}$ de $\mathbf{U}$ de diâmetro inferior ao já determinado número ε, vem $\Omega(\mathbf{X})<\alpha$ e portanto $\omega(\mathbf{X})<\alpha$.

A vizinhança $\mathbf{V}$ *divide-se num número finito de partes em cada uma das quais a oscilação limite de* $f(\mathbf{x})$ *é inferior a* α.

Podemos afirmar, nas condições do enunciado, que *existem uma vizinhança* $\mathbf{V}$ *de* $\mathbf{B}$ *relativa a* $[\mathbf{A}]$ *e um número positivo* ε *tais*

[1] Em geral: *uma função de elementos numéricos e reais, semicontínua superiormente, definida num conjunto limitado e fechado, admite um valor máximo.*

que se mantém inferior a α a distância entre dois elementos limites quaisquer de $f(\mathbf{x})$ tomados em elementos de $\mathbf{V}$ cuja distância seja inferior a ε.

Como corolário evidente deduz-se o seguinte teorema de BAIRE:

Seja $f(\mathbf{x})$ uma função definida num conjunto limitado $\mathbf{A}$. A cada número α superior ao máximo de $\Omega(\mathbf{y})$ em $[\mathbf{A}]$ corresponde um número positivo ε tal que seja $\omega(\mathbf{X})<\alpha$ para qualquer subconjunto $\mathbf{X}$ de $\mathbf{A}$ de diâmetro inferior a ε [1].

Verifica-se pois a desigualdade $\overline{f(\mathbf{x})\,f(\mathbf{x}')}<\alpha$ para elementos quaisquer $\mathbf{x}$ e $\mathbf{x}'$ de $\mathbf{A}$ tais que seja $\overline{\mathbf{x}\,\mathbf{x}'}<\varepsilon$ [2].

Seja $\mathbf{B}$ um subconjunto de $[\mathbf{A}]$ limitado e fechado. Se $f(\mathbf{x})$ é limitada numa vizinhança de $\mathbf{B}$, a cada número α superior ao máximo de $\Omega(\mathbf{y})$ em $\mathbf{B}$ correspondem vizinhanças $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ de $\mathbf{B}$, relativas a $\mathbf{A}$ e a $[\mathbf{A}]$, e um número positivo ε de maneira que seja

$$(25)\qquad \overline{f(\mathbf{X})\,f(\mathbf{X}')}<\alpha \quad \text{e} \quad \overline{\lambda(\mathbf{Y})\,\lambda(\mathbf{Y}')}<\alpha$$

para subconjuntos quaisquer $\mathbf{X}$, $\mathbf{X}'$, $\mathbf{Y}$ e $\mathbf{Y}'$, os dois primeiros de $\mathbf{U}$ e os outros de $\mathbf{V}$, tais que se tenha $\overline{\mathbf{X}\,\mathbf{X}'}<\varepsilon$ e $\overline{\mathbf{Y}\,\mathbf{Y}'}<\varepsilon$.

Consideremos, com efeito, a vizinhança $\mathbf{U}$ e o número positivo ε dados pela proposição a *p.* 298, *l.* 7. Sejam $\mathbf{X}$ e $\mathbf{X}'$ dois subconjuntos de $\mathbf{U}$ que façam $\overline{\mathbf{X}\,\mathbf{X}'}<\varepsilon$. A cada elemento de qualquer dêstes subconjuntos corresponde um elemento do outro a uma distância do primeiro inferior ε. Logo a cada elemento $f(\mathbf{x})$ de $f(\mathbf{X})$ corresponde um elemento $f(\mathbf{x}')$ de $f(\mathbf{X}')$ tal que $\overline{f(\mathbf{x})\,f(\mathbf{x}')}<\alpha$ e inversamente. Verifica-se pois a relação $\overline{f(\mathbf{X})\,f(\mathbf{X}')}\lesseqgtr\alpha$.

Anàlogamente se demonstra a segunda das desigualdades (25).

---

[1] No enunciado do teorema de BAIRE supõe-se que $\mathbf{A}$ é um conjunto fechado.

[2] Também podemos deduzir directamente o teorema de BAIRE do lema exposto a *p.* 276, *l.* 1. Suponhamos que é $\Omega(\mathbf{y})<\alpha$ em $[\mathbf{A}]$. A cada sucessão convergente de elementos de $\mathbf{A}$ corresponde uma ordem a partir da qual dois elementos quaisquer têm por correspondentes para $f(\mathbf{x})$ elementos a uma distância um do outro inferior a α [*p.* 296, *l.* 1]. Existe pois um número positivo ε tal que seja $\overline{f(\mathbf{x})\,f(\mathbf{x}')}<\alpha$ sempre que se tenha $\overline{\mathbf{x}\,\mathbf{x}'}<\varepsilon$.

Resulta por evidência que, se $\mathbf{X}$ e $\mathbf{X}'$ são subconjuntos de $\mathbf{B}$, contidos em $\mathbf{A}$, juxtapostos entre si, a distância $\overline{f(\mathbf{X})\, f(\mathbf{X}')}$ não excede o máximo de $\Omega(\mathbf{y})$ em $\mathbf{B}$.

Seja $\mathbf{B}$ um subconjunto de $[\mathbf{A}]$ limitado e fechado. Suponhamos que $f(\mathbf{x})$ é limitada numa vizinhança de $\mathbf{B}$ e designemos por Ω o valor máximo de $\Omega(\mathbf{y})$ em $\mathbf{B}$. A cada número positivo δ, correspondem vizinhanças $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ de $\mathbf{B}$, relativas a $\mathbf{A}$ e a $[\mathbf{A}]$, e um número positivo ε de maneira que seja

$$(26) \qquad |\omega(\mathbf{X})-\omega(\mathbf{X}')|<2\Omega+\delta$$

e

$$(27) \qquad |\Omega(\mathbf{Y})-\Omega(\mathbf{Y}')|<2\Omega+\delta$$

para quaisquer subconjuntos $\mathbf{X}$, $\mathbf{X}'$, $\mathbf{Y}$ e $\mathbf{Y}'$, os dois primeiros de $\mathbf{U}$ e os outros de $\mathbf{V}$, tais que se tenha $\overline{\mathbf{X}\mathbf{X}'}<\varepsilon$ e $\overline{\mathbf{Y}\mathbf{Y}'}<\varepsilon$.

Ponhamos $\alpha=\Omega+\frac{\delta}{2}$. Verificam-se as hipóteses que deram origem à proposição a *p.* 299, *l.* 12, donde, por intermédio da relação

$$|\omega(\mathbf{X})-\omega(\mathbf{X}')|\leqq 2\overline{f(\mathbf{X})\, f(\mathbf{X}')} \quad [p.\ 65,\ (3)],$$

se deduz a desigualdade (26) para todos os pares de subconjuntos $\mathbf{X}$ e $\mathbf{X}'$ de $\mathbf{U}$ tais que $\overline{\mathbf{X}\mathbf{X}'}<\varepsilon$.

De modo análogo se demonstra a desigualdade (27).

Seja $\mathbf{K}$ um contínuo limitado contido em $[\mathbf{A}]$. Se $f(\mathbf{x})$ é limitada numa vizinhança de $\mathbf{K}$, a desconexão do conjunto $\lambda(\mathbf{K})$ não excede o máximo Ω de $\Omega(\mathbf{y})$ em $\mathbf{K}$.

Consideremos, com efeito, um número α superior a Ω. Decomponhamos $\mathbf{K}$ num número finito de partes $\mathbf{Y}$ que façam $\Omega(\mathbf{Y})<\alpha$ [*p.* 298, *l.* 29]. Os conjuntos $\mathbf{Y}$ são ligados entre si [*p.* 212, *l.* 17]. O mesmo sucede aos respectivos conjuntos limites $\lambda(\mathbf{Y})$ [*p.* 287, *l.* 7], que constituem uma decomposição de $\lambda(\mathbf{K})$ em partes [*p.* 286, *l.* 26] de diâmetros inferiores a α. A desconexão de $\lambda(\mathbf{K})$ é pois inferior a α [*p.* 204, *l.* 26], e por conseguinte não excede Ω.

Se $f(\mathbf{x})$ *é definida num conjunto* $\mathbf{C}$ *perfeitamente conexo* [1], *a desconexão de* $f(\mathbf{C})$ *não excede o limite superior de* $\Omega(\mathbf{x})$ *em* $\mathbf{C}$ [2].

Demonstremos que, seja qual fôr o modo de divisão de $f(\mathbf{C})$ em duas partes $\mathbf{Z}$ e $\mathbf{Z}'$, a distância reduzida $\overline{\mathbf{Z}\mathbf{Z}'}$ não excede o limite superior Ω, que supomos finito, de $\Omega(\mathbf{x})$ em $\mathbf{C}$ [*p.* 203, *l.* 26].

Os maiores subconjuntos $\mathbf{X}$ e $\mathbf{X}'$ de $\mathbf{C}$ que fazem $\mathbf{Z} \mid f(\mathbf{X})$ e $\mathbf{Z}' \mid f(\mathbf{X}')$ constituem uma divisão de $\mathbf{C}$ em duas partes. Mas existe um elemento $\mathbf{x}'$ de um dêsses subconjuntos, suponhamos de $\mathbf{X}'$, que é limite duma sucessão $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_i, \ldots$ de elementos do outro. A cada número positivo δ corresponde um elemento $\mathbf{x}_i$ da mesma sucessão tal que $\overline{f(\mathbf{x}')\, f(\mathbf{x}_i)} < \Omega + \delta$ [*p.* 296, *l.* 1], sendo por conseguinte $\overline{\mathbf{Z}\mathbf{Z}'} < \Omega + \delta$. Verifica-se pois a condição $\overline{\mathbf{Z}\mathbf{Z}'} \leqq \Omega$ que desejávamos demonstrar.

Da presente proposição se conclui que, dado um número α superior a Ω e dados dois subconjuntos limitados de $f(\mathbf{C})$, podemos unir estes por uma sucessão dum número finito de subconjuntos de $f(\mathbf{C})$ tais que as distâncias entre conjuntos consecutivos sejam inferiores a α [*p.* 210, *l.* 10].

Se $f(\mathbf{x})$ *é definida num conjunto conexo* $\mathbf{C}$ *tal que, para qualquer divisão dêste em duas partes* $\mathbf{X}$ *e* $\mathbf{X}'$, *exista o produto* $[\mathbf{X}] \times [\mathbf{X}']$, *a desconexão de* $f(\mathbf{C})$ *não excede o limite superior de* $\Omega(\mathbf{y})$ *em* $[\mathbf{C}]$.

Seja $j(\mathbf{x})$ uma função juxtaposta a $f(\mathbf{x})$ que resulte de prolongarmos $f(\mathbf{x})$ para o conjunto $[\mathbf{C}] - \mathbf{C}$. Por ser $f(\mathbf{C}) \parallel j([\mathbf{C}])$ [*p.* 282, *l.* 7], a desconexão de $f(\mathbf{C})$ é a mesma de $j([\mathbf{C}])$ [*p.* 207, *l.* 5], e esta, em virtude da proposição precedente, não excede o limite superior de $\Omega(\mathbf{y})$ em $[\mathbf{C}]$.

---

[1] Dizemos que o conjunto $\mathbf{C}$ é *perfeitamente conexo* quando, seja qual fôr a maneira de o dividirmos em duas partes $\mathbf{X}$ e $\mathbf{X}'$, o produto $\mathbf{C} \times [\mathbf{X}] \times [\mathbf{X}']$ seja provido de um elemento pelo menos, isto é, quando exista um elemento duma das partes que seja limite de elementos da outra. Pertencem à classe dos conjuntos perfeitamente conexos os contínuos limitados, os domínios elementares [*p.* 234, *l.* 17] e qualquer conjunto no qual dois elementos arbitrários se unam sempre por meio dum contínuo limitado nêle contido.

[2] Quando o limite superior de $\Omega(\mathbf{x})$ é infinito, a desconexão de $f(\mathbf{C})$ pode tornar-se também infinita.

Em particular:

Se uma função limitada $f(\mathbf{x})$ é definida num conjunto **C** *limitado e conexo, a desconexão de $f(\mathbf{C})$ não excede o máximo de $\Omega(\mathbf{y})$ em* $[\mathbf{C}]$.

Tal proposição também pode deduzir-se da enunciada a *p.* 300, *l.* 21, pondo $\mathbf{A} \mid \mathbf{C}$ e $\mathbf{K} \mid [\mathbf{C}]$. Como é então $\lambda(\mathbf{K}) \mid \lambda(\mathbf{C}) \mid [f(\mathbf{C})]$, concluímos que a desconexão de $[f(\mathbf{C})]$, ou seja a de $f(\mathbf{C})$, não excede o valor máximo de $\Omega(\mathbf{y})$ em $[\mathbf{C}]$.

A mesma proposição ainda pode justificar-se recorrendo ao já demonstrado teorema de BAIRE, e admite o seguinte caso particular:

Se a função limitada $f(\mathbf{x})$ é definida num contínuo limitado **K**, *a desconexão de $f(\mathbf{K})$ não excede o máximo de $\Omega(\mathbf{x})$ em* **K**.

Seja **K** *um contínuo limitado contido em* $[\mathbf{A}]$. *Se $f(\mathbf{x})$ é limitada numa vizinhança de* **K**, *a cada número α superior ao máximo de $\Omega(\mathbf{y})$ em* **K** *corresponde um número positivo ε tal que, para quaisquer vizinhanças* **U** *e* **V** *de* **K**, *relativas a* **A** *e a* $[\mathbf{A}]$, *que distem de* **K** *menos de ε, as desconexões dos conjuntos $f(\mathbf{U})$, $\lambda(\mathbf{U})$ e $\lambda(\mathbf{V})$ sejam inferiores a α.*

Consideremos a infinidade das vizinhanças **U** de **K** relativas a **A**. Em virtude da proposição a *p.* 287, *l.* 13, a cada sucessão (14) de vizinhanças **U** que tenda para **K** corresponde uma ordem a partir da qual as desconexões dos termos $f(\mathbf{U}_i)$ da correspondente sucessão (16) são inferiores ao número α [*p.* 208, *l.* 13], que, por fôrça das hipóteses, é superior à desconexão de $\lambda(\mathbf{K})$. Logo é possível determinar um número positivo ε tal que, para qualquer dos conjuntos **U** que diste de **K** menos de ε, a desconexão de $f(\mathbf{U})$ seja inferior a α [*p.* 279, *l.* 1].

Da mesma maneira se demonstram as partes da proposição relativas aos conjuntos $\lambda(\mathbf{U})$ e $\lambda(\mathbf{V})$.

90. Noção de continuïdade. — Seja $f(\mathbf{x})$ uma função definida no conjunto **A** e consideremos um elemento **y** de $[\mathbf{A}]$. Dizemos que $f(\mathbf{x})$ é *contínua* no elemento **y** quando a respectiva oscilação limite $\Omega(\mathbf{y})$ se reduz a zero. A função é nesse caso limitada numa vizinhança de **y**, e o conjunto limite $\lambda(\mathbf{y})$ compõe-se de elementos juxtapostos uns aos outros entre os quais figura $f(\mathbf{y})$ quando $\mathbf{y}$ pertence a $\mathbf{A}$ [1].

A função é contínua em todos os elementos juxtapostos a $\mathbf{y}$ uma vez que seja contínua neste elemento [*p.* 295, *l.* 8].

Elementos da função correspondentes a elementos de continuïdade juxtapostos entre si são também juxtapostos uns aos outros.

Uma função não contínua num elemento chama-se *descontínua* no mesmo elemento [2].

Dizemos que $f(\mathbf{x})$ é contínua num dado subconjunto de $[\mathbf{A}]$ quando é contínua em todos os elementos dêsse subconjunto. Quando falarmos em função contínua, sem mais referência, entenderemos que a mesma é contínua no conjunto $\mathbf{A}$ onde a supomos definida.

Se $f(\mathbf{x})$ é contínua num subconjunto $\mathbf{X}$ de $\mathbf{A}$, limitado e fechado, os conjuntos $\lambda(\mathbf{X})$ e $f(\mathbf{X})$ juxtapõem-se elemento a elemento [*p.* 286, *l.* 18].

Dada a continuïdade de $f(\mathbf{x})$ em $\mathbf{y}$, é convergente qualquer sucessão $f(\mathbf{x}_1), f(\mathbf{x}_2) \ldots, f(\mathbf{x}_i), \ldots$ que resulte duma sucessão de elementos de $\mathbf{A}$ que tenda para $\mathbf{y}$ [*p.* 16, *l.* 8], e reciprocamente. Podemos então escrever $\lim f(\mathbf{x}_i) \parallel \lambda(\mathbf{y})$, e, quando $f(\mathbf{x})$ é definida em $\mathbf{y}$, $\lim f(\mathbf{x}_i) \parallel f(\mathbf{y})$, seja qual fôr a suces-

---

1 Na definição habitual de continuïdade supõe-se que a função é definida no elemento $\mathbf{y}$ e que êste é elemento limite de $\mathbf{A}$.

2 Um caso simples de descontinuïdade de $f(\mathbf{x})$ num elemento $\mathbf{x}$ de $\mathbf{A}$ é o que se apresenta quando a função se torna contínua pela supressão de $\mathbf{x}$ do conjunto $\mathbf{A}$ (para simplificar a exposição desta nota admitimos que dois elementos distintos de $\mathbf{A}$ nunca são juxtapostos um ao outro). A descontinuïdade chama-se então *artificial*.

Se a função só admite em $[\mathbf{A}]$ descontinuïdades que sejam artificiais, o conjunto dos elementos (necessàriamente de $\mathbf{A}$) onde tal facto se verifica é finito ou numerável, como vamos ver.

Consideremos primeiro o caso de $\mathbf{A}$ ser limitado. Basta demonstrar que é finito o conjunto dos elementos $\mathbf{x}$ de $\mathbf{A}$ onde $\Omega(\mathbf{x})$ excede um dado número positivo ε. Se tal não acontecesse, o conjunto dêsses elementos $\mathbf{x}$ de $\mathbf{A}$ admitiria um elemento limite $\mathbf{x}'$, no qual seria $\Omega(\mathbf{x}') \gtreqless \varepsilon$ mesmo depois de suprimirmos o elemento $\mathbf{x}'$ ao conjunto $\mathbf{A}$ [*p* 296, *l.* 25]. A descontinuïdade em $\mathbf{x}'$ não seria pois artificial.

Se $\mathbf{A}$ é ilimitado, consideramos uma sucessão de esferóides concêntricos cujos raios cresçam para infinito e notamos que os elementos de $\mathbf{A}$ onde $f(\mathbf{x})$ se torna descontínua, situados em cada um dêsses esferóides, são em número finito ou formam uma infinidade numerável.

são $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots$ de elementos de A que tenda para y. Qualquer destas condições exprime a continuïdade de $f(x)$ no elemento y.

Se $f(x)$ é limitada numa vizinhança de y, para que se dê a continuïdade neste elemento é suficiente que exista uma sucessão $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots$ que faça $\lim \overline{f(x_i)\,\lambda(y)} = 0$, pois em tal caso $\lambda(y)$ reduz-se a elementos juxtapostos entre si.

Para que $f(x)$ seja contínua no conjunto $[A]$ é necessário e suficiente que a qualquer sucessão convergente $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots$ de elementos de A corresponda uma sucessão também convergente $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_i), \ldots$ de elementos de $f(A)$.

Consideremos uma classe de sucessões de elementos de A

$$x_1', x_2', \ldots, x_i', \ldots$$

que tendam para um mesmo elemento y. *Suponhamos que, dada uma sucessão qualquer de elementos de* A *que tenda para* y, *dela podemos sempre extrair uma sucessão da classe. Para que* $f(x)$, *definida em* A, *seja contínua em* y *é suficiente que tôdas as sucessões*

$$f(x_1'), f(x_2'), \ldots, f(x_i'), \ldots$$

correspondentes às diversas sucessões da classe tendam para limites juxtapostos entre si [*p.* 284, *l.* 9] [1].

Seja $f(x)$ *contínua em* y. *Consideremos um elemento* c *do espaçóide a que pertence* $f(A)$. *Dados dois números que compreendam a distância* $\overline{\lambda(y)\,c}$, *existe uma vizinhança de* y *relativa a* A *tal que em todos os seus elementos* x *a distância* $\overline{f(x)\,c}$ *se encontra entre os mesmos números.*

Efectivamente, se $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots$ é uma sucessão de elementos de A que tenda y, temos $\lim \overline{f(x_i)\,c} = \overline{\lambda(y)\,c}$, e por isso existe uma ordem a partir da qual a distância $\overline{f(x_i)\,c}$ se encontra entre os números dados. Podemos pois determinar uma vizi-

[1] Se por exemplo A é constituído por números ou por pontos, para que $f(x)$, definida em A, seja contínua num ponto x' dêste conjunto é suficiente que tendam para $f(x')$ tôdas as sucessões de elementos de $f(x)$ correspondentes às sucessões monótonas de pontos de A que tendam para x'.

nhança de $\mathbf{y}$ em relação a $\mathbf{A}$ tal que em todos os seus elementos $\mathbf{x}$ a distância $\overline{f(\mathbf{x})\,\mathbf{c}}$ se encontre entre os mesmos números [*p.* 276, *l.* 12] [1].

Se $f(\mathbf{x})$ *é contínua no elemento* $\mathbf{y}$, *o mesmo sucede a qualquer função juxtaposta à primeira* [*p.* 295, *l.* 10].

Logo, quando $f(\mathbf{x})$ é contínua num elemento $\mathbf{y}$ de $[\mathbf{A}]$ que não pertença a $\mathbf{A}$, a definição de $f(\mathbf{x})$ nesse elemento conforme dissemos a *p.* 285, *nota*, mantém a continuïdade em $\mathbf{y}$. Tal *prolongamento* de $f(\mathbf{x})$ para um ou mais elementos do conjunto $[\mathbf{A}]-\mathbf{A}$ não introduz pois descontinuïdades.

Se $f(\mathbf{x})$, definida em $\mathbf{A}$ mas não em todos os elementos de $[\mathbf{A}]$, é contínua no conjunto $[\mathbf{A}]$, qualquer função $j(\mathbf{x})$ que resulte de *prolongarmos* a primeira para o conjunto $[\mathbf{A}]-\mathbf{A}$ é ainda contínua. Logo a uma função definida em $\mathbf{A}$ e contínua em $[\mathbf{A}]$ corresponde sempre uma função definida e contínua em $[\mathbf{A}]$ e que em $\mathbf{A}$ coincide com $f(\mathbf{x})$.

Se $f(\mathbf{x})$ é contínua em $[\mathbf{A}]$, uma função juxtaposta à primeira e definida em $[\mathbf{A}]$ é qualquer função que resulte de atribuirmos um só elemento à função limite $\lambda(\mathbf{y})$ em cada elemento de $[\mathbf{A}]$.

Se dois elementos distintos de $[f(\mathbf{A})]$ nunca são juxtapostos entre si, existe uma única função definida em $[\mathbf{A}]$ e juxtaposta a $f(\mathbf{x})$: é a função $\lambda(\mathbf{y})$ que se obtém *prolongando* $f(\mathbf{x})$ para o conjunto $[\mathbf{A}]-\mathbf{A}$ [2].

---

[1] Para dar uma aplicação simples admitamos que $f(\mathbf{A})$ é numérico e que $f(\mathbf{x})$ é diferente de zero e contínua num elemento $\mathbf{x}'$ de $\mathbf{A}$. A um dado número positivo ε inferior à distância de $f(\mathbf{x}')$ ao ponto zero, isto é, ao módulo de $f(\mathbf{x}')$, corresponde um esferóide de centro $\mathbf{x}'$ tal que em todos os seus elementos $\mathbf{x}$ se mantém a mesma relação $\varepsilon < |f(\mathbf{x})|$.

[2] Como exemplos de funções contínuas recordemos os seguintes casos:

A distância $\overline{\mathbf{x}\,\mathbf{x}'}$ entre dois elementos dum dado espaçóide $\mathbf{P}$ é uma função contínua do elemento $(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ definida no espaçóide composto $(\mathbf{P}, \mathbf{P})$ [*p.* 18, *l.* 16]. As projecções dum elemento composto são funções contínuas dêsse elemento [*p.* 37, *l.* 12]. A distância reduzida entre um elemento e um conjunto é uma função contínua dêsse elemento [*p.* 53, *l.* 20]. O diâmetro dum conjunto é uma função contínua do mesmo conjunto [*p.* 118, *l.* 23]. A distância reduzida $\underline{\mathbf{A}\,\mathbf{B}}$, o desvio $\mathbf{A}\,\overrightarrow{\mathbf{B}}$ e a distância $\overline{\mathbf{A}\,\mathbf{B}}$ entre conjuntos limitados são funções contínuas do elemento composto $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ [*p.* 119, *l.* 14 e 17]. As projecções dum conjunto limitado de ordem *n* são funções contínuas do mesmo conjunto [*p.* 120, *l.* 17]. As separações máxima e mínima de *n* conjuntos

Seja $\mathbf{y}$ *um elemento de continuïdade da função* $f(\mathbf{x})$. *Se*

$$\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_i, \ldots$$

e

$$\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_i, \ldots$$

são sucessões de subconjuntos respectivamente de $\mathbf{A}$ *e de* $[\mathbf{A}]$ *tais que* $\lim \overline{\mathbf{X}_i\,\mathbf{y}} = \lim \overline{\mathbf{Y}_i\,\mathbf{y}} = 0$, *temos* [*p.* 288, *l.* 29].

$$\lim \overline{f(\mathbf{X}_i)\;\lambda(\mathbf{y})} = \lim \overline{\lambda(\mathbf{Y}_i)\;\lambda(\mathbf{y})} = 0$$

e

$$\lim \omega(\mathbf{X}_i) = \lim \Omega(\mathbf{Y}_i) = 0\,.$$

Por conseguinte, se $f(\mathbf{x})$ é contínua em $\mathbf{y}$, a cada número positivo δ correspondem vizinhanças $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ de $\mathbf{y}$ relativas a $\mathbf{A}$ e a $[\mathbf{A}]$ tais que seja $\omega(\mathbf{U}) < \delta$ e $\Omega(\mathbf{V}) < \delta$. Reciprocamente, uma qualquer destas condições basta para a continuïdade de $f(\mathbf{x})$ em $\mathbf{y}$, pois em virtude dela é convergente qualquer sucessão de elementos de $f(\mathbf{x})$ que resulte duma sucessão de elementos de $\mathbf{A}$ que tenda para $\mathbf{y}$.

Se $f(\mathbf{x})$ é contínua em $\mathbf{y}$, a cada número positivo δ corresponde um número positivo ε de maneira que se verifiquem as desigualdades

$$\overline{f(\mathbf{X})\;\lambda(\mathbf{y})} < \delta \quad , \quad \overline{f(\mathbf{X})\;f(\mathbf{X}')} < \delta$$

e

$$\overline{\lambda(\mathbf{Y})\;\lambda(\mathbf{y})} < \delta \quad , \quad \overline{\lambda(\mathbf{Y})\;\lambda(\mathbf{Y}')} < \delta$$

para quaisquer subconjuntos $\mathbf{X}$, $\mathbf{X}'$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Y}'$, os dois primeiros de $\mathbf{A}$ e os outros de $[\mathbf{A}]$, que distem de $\mathbf{y}$ menos de ε [*p.* 289, *l.* 20].

Temos em particular

$$\overline{f(\mathbf{x})\;\lambda(\mathbf{y})} < \delta \quad \text{e} \quad \overline{f(\mathbf{x})\;f(\mathbf{x}')} < \delta$$

sempre que seja $\overline{\mathbf{x}\,\mathbf{y}} < \varepsilon$ e $\overline{\mathbf{x}'\,\mathbf{y}} < \varepsilon$.

$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$ são funções contínuas do elemento composto $(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n)$ [*p.* 189, *l.* 9, e *p.* 191, *l.* 11]. A desconexão dum conjunto é uma função contínua do mesmo conjunto [*p.* 208, *l.* 3].

Qualquer destas condições também é suficiente de continuïdade em $\mathbf{y}$, porque, dada uma sucessão de elementos de $\mathbf{A}$ que tenda para $\mathbf{y}$, da primeira se conclui que a sucessão dos elementos correspondentes de $f(\mathbf{x})$ tende para $\lambda(\mathbf{y})$, e da segunda resulta também a convergência da mesma sucessão.

Seja $\mathbf{y}$ *um elemento de continuïdade de* $f(\mathbf{x})$. *Se a função* $\varphi(\mathbf{z})$, *definida no conjunto* $f(\mathbf{A})$, *é contínua no conjunto* $\lambda(\mathbf{y})$ *relativo a* $f(\mathbf{x})$, *a função de função* $\varphi(f(\mathbf{x}))$ *é contínua em* $\mathbf{y}$.

Efectivamente, dada uma sucessão $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_i, \dots$ de elementos de $\mathbf{A}$ que tenda para $\mathbf{y}$, temos $\lim f(\mathbf{x}_i) \,\|\, \lambda(\mathbf{y})$, e por isso existe $\lim \varphi(f(\mathbf{x}_i))$.

Se as funções $f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x})$, *definidas no mesmo conjunto* $\mathbf{A}$, *são contínuas no elemento* $\mathbf{y}$ *de* $[\mathbf{A}]$, *a função composta* [*p*. 280, *l*. 24]

$$(f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x})) \tag{28}$$

também é contínua em $\mathbf{y}$ *e recìprocamente.*

Na verdade, se, qualquer que seja a sucessão de elementos de $\mathbf{A}$ que tenda para $\mathbf{y}$, as correspondentes sucessões dos elementos das funções dadas são convergentes, o mesmo sucede à sucessão dos elementos da função composta e recìprocamente [*p*. 36, *l*. 29].

Seja $\varphi(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_n)$ *uma função definida no conjunto dos elementos da função composta* (28). *Se as funções componentes são contínuas em* $\mathbf{y}$ *e se a função dada* φ *é contínua num elemento limite da* (28) *em* $\mathbf{y}$, *a função*

$$\varphi(f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x}))$$

é contínua no mesmo elemento $\mathbf{y}$.

Trata-se efectivamente duma função φ contínua no conjunto $\lambda(\mathbf{y})$ relativo a uma função (28) contínua em $\mathbf{y}$.

Seja $\mathbf{X}$ *um subconjunto limitado de* $\mathbf{A}$. *Se* $f(\mathbf{x})$ *é contínua em* $[\mathbf{X}]$, *temos* $\lambda(\mathbf{X}) \mid [f(\mathbf{X})]$.

Com efeito, sendo $\mathbf{X}$ limitado e tratando-se duma função contínua em $[X]$, o conjunto $\lambda(X)$ não se altera quando se considera a função definida exclusivamente sôbre X, pois $\lambda(X)$ é a soma dos limites $\lambda(y)$ relativos aos diversos elementos y de $[X]$. Logo vem $\lambda(X) \mid [f(X)]$ [*p.* 285, *l.* 10].

São juxtapostos os conjuntos dos elementos duma função contínua em conjuntos juxtapostos.

Sejam X e X' subconjuntos de A juxtapostos entre si. Se $f(x)$ é contínua em X e em X', cada elemento dum qualquer dos conjuntos $f(X)$ e $f(X')$ é limite duma sucessão de elementos do outro, e por isso também temos $f(X) \parallel f(X')$.

Numa função contínua a conjuntos juxtapostos correspondem pois conjuntos juxtapostos[1].

Se a função $f(x)$, definida em A, é contínua em $[A]$, a conjuntos limitados e ligados correspondem para a função conjuntos ligados.

Em geral, se X e X' são subconjuntos de A cujos lugares possuam um elemento comum e se $f(x)$ é contínua nesse elemento, os conjuntos $f(X)$ e $f(X')$ são ligados entre si.

Se $f(x)$ é contínua num subconjunto Y de $[A]$, limitado e fechado, existe uma vizinhança de Y relativa a A onde $f(x)$ é limitada.

Basta notar que a função é limitada numa vizinhança de cada elemento de Y [*p.* 282, *l.* 25].

Em particular:

Se $f(x)$ é contínua no lugar $[X]$ dum subconjunto limitado X de A, o conjunto $f(X)$ é limitado.

---

[1] Por êste motivo são juxtapostos por exemplo: correspondentes projecções de conjuntos juxtapostos de ordem n; o conjunto das distâncias entre as coordenadas de cada elemento dum conjunto de segunda ordem e o conjunto que se obtém da mesma maneira a partir dum conjunto juxtaposto ao primeiro; o conjunto das distâncias entre cada elemento de A e cada elemento de B e o que se obtém da mesma maneira a partir de conjuntos juxtapostos aos primeiros; o conjunto das distâncias entre os elementos de A e o das distâncias entre os elementos dum conjunto juxtaposto ao primeiro.

Note-se que estas afirmações já tinham sido demonstradas directamente [*p.* 39, *l.* 23; *p.* 42, *l.* 5; *p.* 43, *l.* 25; *p.* 44, *l.* 21].

Logo, se $f(\mathbf{x})$ é contínua em $[\mathbf{A}]$, a conjuntos limitados correspondem para a função conjuntos limitados.

Se $f(\mathbf{x})$ é contínua no conjunto fechado $\mathbf{A}$, o conjunto de todos os elementos de segunda ordem $(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))$ é igualmente fechado.

Considerando, com efeito, uma sucessão convergente

$$(29) \qquad (\mathbf{x}_1, f(\mathbf{x}_1)),\ (\mathbf{x}_2, f(\mathbf{x}_2)),\ \ldots,\ (\mathbf{x}_i, f(\mathbf{x}_i)),\ \ldots$$

de elementos dêsse conjunto de segunda ordem, são também convergentes a sucessão das primeiras coordenadas e a das segundas dos mesmos elementos. A primeira tende para um elemento $\mathbf{a}$ de $\mathbf{A}$, e, em virtude da continuïdade, a segunda tende para $f(\mathbf{a})$. Logo a sucessão (29) tende para $(\mathbf{a}, f(\mathbf{a}))$ [*p.* 37, *l.* 8], que é um elemento do referido conjunto de segunda ordem.

Deduz-se como corolário a proposição seguinte:

É fechado o conjunto dos elementos duma função contínua num conjunto $\mathbf{A}$ limitado e fechado.

O conjunto $f(\mathbf{A})$ é limitado. O conjunto dos elementos $(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))$ é pois limitado e fechado, e por isso $f(\mathbf{A})$ também é fechado [*p.* 40, *l.* 10].

Também reconhecemos que $f(\mathbf{A})$ é fechado notando que os conjuntos $f(\mathbf{A})$ e $\lambda(\mathbf{A})$ juxtapõem-se elemento a elemento quando $\mathbf{A}$ é limitado e fechado [*p.* 303, *l.* 14].

Dado o caso de $f(\mathbf{A})$ ser numérico e real, a função atinge pois um valor máximo e um valor mínimo quando é contínua no conjunto limitado e fechado $\mathbf{A}$ [1].

---

[1] Mais uma vez reconhecemos as seguintes proposições [*p.* 46, *l.* 29]:

É limitado e fechado o conjunto das distâncias entre as coordenadas de cada elemento dum conjunto limitado e fechado de segunda ordem (supomos, é claro, que as projecções dêsse conjunto fazem parte dum mesmo espaçóide).

É limitado e fechado o conjunto das distâncias entre cada elemento de A e cada elemento de B quando estes conjuntos são limitados e fechados, pois tal distância é uma função contínua no conjunto limitado e fechado (A, B) [*p.* 41, *l.* 3]. A distância reduzida $\overline{\underline{\mathsf{A}\ \mathsf{B}}}$ é nesse caso a distância entre um elemento de A e um elemento de B convenientemente determinados. O diâmetro dum conjunto limitado e fechado é a distância entre dois determinados dos seus elementos.

É limitado e fechado o conjunto das distâncias reduzidas $\underline{\mathsf{a}\ \mathsf{B}}$ entre cada

É condição suficiente de continuïdade em $[\mathbf{A}]$ *duma função* $f(\mathbf{x})$ *limitada em* $\mathbf{A}$ *que o conjunto* $\big(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})\big)$ *seja fechado* [1] *(supõe-se que a elementos juxtapostos de* $\mathbf{A}$ *correspondem elementos juxtapostos de* $f(\mathbf{A})$*).*

Basta demonstrar que dada uma sucessão convergente $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_i, \ldots$ de elementos de $\mathbf{A}$ a correspondente sucessão

$$(30) \qquad f(\mathbf{x}_1), f(\mathbf{x}_2), \ldots, f(\mathbf{x}_i), \ldots$$

também é convergente [*p.* 304, *l.* 7]. Consideremos um limite $\mathbf{y}$ da primeira sucessão, e dois limites $\mathbf{z}$ e $\mathbf{z}'$ da segunda. Os elementos de segunda ordem $(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ e $(\mathbf{y}, \mathbf{z}')$ são limites da sucessão

$$\big(\mathbf{x}_1, f(\mathbf{x}_1)\big), \big(\mathbf{x}_2, f(\mathbf{x}_2)\big), \ldots, \big(\mathbf{x}_i, f(\mathbf{x}_i)\big), \ldots,$$

e, como o conjunto dos elementos $\big(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})\big)$ é fechado, existem elementos $\big(\mathbf{a}, f(\mathbf{a})\big)$ e $\big(\mathbf{a}', f(\mathbf{a}')\big)$ juxtapostos a $(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ e $(\mathbf{y}, \mathbf{z}')$. Temos pois $\mathbf{a} \parallel \mathbf{a}'$ e, por hipótese, $f(\mathbf{a}) \parallel f(\mathbf{a}')$. Logo $\mathbf{z} \parallel \mathbf{z}'$. Todos os limites da sucessão limitada (30) são justapostos entre si, razão porque a mesma é convergente [*p.* 16, *l.* 8].

Podemos afirmar, por conseguinte, que:

É condição necessária e suficiente de continuïdade duma função limitada $f(\mathbf{x})$ *num conjunto fechado que o correspondente conjunto* $\big(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})\big)$ *seja fechado (supõe-se que a elementos juxtapostos de* $\mathbf{A}$ *correspondem elementos juxtapostos de* $f(\mathbf{A})$*).*

Como corolário evidente vem a seguinte proposição, também fácil de justificar directamente:

A função inversa duma função contínua nnm conjunto limitado e fechado, quando existe, é contínua (supomos que elementos juxtapostos de $f(\mathbf{A})$ *são correspondentes a elementos iuxtapostos de* $\mathbf{A}$*).*

---

elemento $\mathbf{a}$ dum conjunto limitado e fechado $\mathbf{A}$ e um conjunto $\mathbf{B}$. Logo o desvio $\overrightarrow{\mathbf{A}\,\mathbf{B}}$ representa a distância reduzida entre um determinado elemento de $\mathbf{A}$ e o conjunto $\mathbf{B}$.

[1] Em tais condições o conjunto $\mathbf{A}$ é necessàriamente fechado. Em geral: *É fechada uma projecção dum conjunto fechado de ordem n sempre que a projecção complementar seja limitada.*

Se $f(\mathsf{x})$ *é contínua e se* $\mathbf{A}$ *e* $f(\mathbf{A})$ *são totalmente fechados, temos* $[f(\mathbf{X})] \mid f([\mathbf{X}])$ *para qualquer subconjunto limitado* X *de* $\mathbf{A}$ *(supomos que elementos juxtapostos de* $f(\mathbf{A})$ *são correspondentes a elementos juxtapostos de* $\mathbf{A}$*).*

Por outras palavras, se $\mathbf{Z}$ é correspondente a $\mathbf{X}$, também $[\mathbf{Z}]$ é correspondente a $[\mathbf{X}]$. Na verdade, os conjuntos $f(\mathbf{X})$ e $f([\mathbf{X}])$ são juxtapostos [*p*. 308, *l*. 11], e como $f([\mathbf{X}])$ é totalmente fechado, temos $[f(\mathbf{X})] \mid f([\mathbf{X}])$.

As operações representadas pelos símbolos $[\ ]$ e f são permutáveis dadas as condições do enunciado [1].

Seia $f(\mathbf{X})$ *uma função definida e contínua num conjunto fechado* $\mathbf{A}$. *Dado um subconjunto* $\mathbf{Z}$ *de* $f(\mathbf{A})$, *façamos-lhe corresponder o maior subconjunto* $\mathbf{X}'$ *de* $\mathbf{A}$ *tal que* $\mathbf{Z} \parallel f(\mathbf{X}')$ [2]. *Se*

$$(31) \qquad \mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2, \ldots, \mathbf{Z}_i, \ldots$$

é uma sucessão que tenda para $\mathbf{Z}$ *de vizinhanças de* $\mathbf{Z}$ *relativas a* $f(\mathbf{A})$, *a correspondente sucessão*

$$(32) \qquad \mathbf{X}'_1, \mathbf{X}'_2, \ldots, \mathbf{X}'_i, \ldots$$

tende para $\mathbf{X}'$.

É claro que $\mathbf{X}'$ é um subconjunto de qualquer dos conjuntos $\mathbf{X}'_i$. Basta pois demonstrar que o limite integral $\ddot{\mathbf{X}}'$ da

---

[1] Como aplicação deduzimos as seguintes proposições, já directamente justificadas a *p.* 39, *n.º* 16 *e segs.*, e resumidamente enunciadas a *p.* 46, *l.* 31:

O lugar duma projecção dum conjunto limitado de ordem n é a correspondente projecção do lugar do mesmo conjunto. O lugar do conjunto das distâncias entre as coordenadas de cada elemento dum conjunto limitado de segunda ordem é o conjunto das distâncias entre as coordenadas de cada elemento do lugar do mesmo conjunto. Em particular, o lugar do conjunto das distâncias entre cada elemento dum conjunto limitado A e cada elemento dum conjunto limitado B é o conjunto que se obtém da mesma maneira a partir de $[\mathsf{A}]$ e de $[\mathsf{B}]$. O lugar do conjunto das distâncias entre os elementos de A é o conjunto das distâncias entre os elementos de $[\mathsf{A}]$. [veja-se *p.* 47, *l.* 3].

[2] O conjunto X' é constituído pelos elementos de A que têm por correspondentes para $f(\mathsf{x})$ elementos de $[\mathsf{Z}]$.

A subconjuntos juxtapostos de $f(\mathsf{A})$ correspondem assim para A subconjuntos também juxtapostos.

sucessão (32) pertence a $[\mathsf{X}']$ [*p.* 127, *l.* 28]. Cada elemento de $\ddot{\mathsf{X}}'$ juxtapõe-se a um elemento a de A e é limite duma sucessão $\mathsf{x}_r, \mathsf{x}_s, \cdots, \mathsf{x}_u, \cdots$ extraída duma subsucessão da (32). Por continuïdade vem $\lim f(\mathsf{x}_u) \parallel f(\mathsf{a})$, e, como a sucessão (31) tende para Z, o elemento $f(\mathsf{a})$ pertence a $[\mathsf{Z}]$. Logo a pertence a X'.

Qualquer elemento de $\ddot{\mathsf{X}}'$ juxtapõe-se a um elemento de X', e por isso $\ddot{\mathsf{X}}'$ pertence a $[\mathsf{X}']$.

Seja $f(\mathsf{x})$ uma função definida e contínua num conjunto fechado A. Dado um subconjunto Z de $f(\mathsf{A})$, é fechado o maior subconjunto X' de A tal que $\mathsf{Z} \parallel f(\mathsf{X}')$.

É fechado, com efeito, o conjunto $\ddot{\mathsf{X}}'$ que figura na demonstração precedente, e acabámos de ver que $\ddot{\mathsf{X}}'$ e X' se juxtapõem elemento a elemento.

Por conseguinte, a um subconjunto fechado Z de $f(\mathsf{A})$ no qual figurem todos os elementos de $f(\mathsf{A})$ que se juxtapõem a elementos de Z (como sucede por exemplo quando Z é totalmente fechado) corresponde sempre um conjunto fechado X tal que $\mathsf{Z} \mid f(\mathsf{X})$.

Dado em particular um elemento z de $f(\mathsf{A})$, é fechado o conjunto de todos os elementos de A que têm por correspondentes para $f(\mathsf{x})$ elementos juxtapostos a z.

Seja $f(\mathsf{x})$ uma função definida e contínua num conjunto fechado A. Dado um subconjunto Z de $f(\mathsf{A})$, designemos por X' o maior subconjunto de A tal que $\mathsf{Z} \parallel f(\mathsf{X}')$. Se o limite integral da sucessão

$$f(\mathsf{X}_1), f(\mathsf{X}_2), \cdots, f(\mathsf{X}_i), \cdots$$

pertence a $[\mathsf{Z}]$, também o limite integral da sucessão

$$\mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2, \cdots, \mathsf{X}_i, \cdots$$

pertence a $[\mathsf{X}']$.

Tal qual como se procedeu há pouco, demonstra-se que um elemento qualquer do limite integral $\ddot{\mathsf{X}}$ da sucessão precedente juxtapõe-se a um elemento de X'.

Quando a soma dos termos da mesma sucessão é limitada, podemos escrever $\lim \overrightarrow{\mathsf{X}_i \mathsf{X}'} = 0$.

Se em particular a sucessão limitada $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_i, \dots$ é tal que $lim\ \overline{f(\mathbf{x}_i)\,\mathbf{Z}} = 0$, também temos $lim\ \overline{\mathbf{x}_i \mathbf{X}'} = 0$ [1].

Se a função $f(\mathbf{x})$, definida em $\mathbf{A}$, é contínua no subconjunto $\mathbf{B}$ de $[\mathbf{A}]$, limitado e fechado, a cada número positivo δ correspondem vizinhanças $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ de $\mathbf{B}$ relativas a $\mathbf{A}$ e a $[\mathbf{A}]$ e um número positivo ε tais que seja

$$\omega(\mathbf{X}) < \delta \quad \text{e} \quad \Omega(\mathbf{Y}) < \delta$$

para subconjuntos quaisquer $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ de $\mathbf{U}$ e de $\mathbf{V}$ cujos diâmetros sejam inferiores a ε [p. 298, l. 7, e p. 308, l. 19].

Podemos pois dividir a vizinhança $\mathbf{V}$ num número finito de partes em cada uma das quais a oscilação limite de $f(\mathbf{x})$ seja inferior a δ.

As desigualdades

$$\overline{f(\mathbf{x})\, f(\mathbf{x}')} < \delta \quad \text{e} \quad \overline{\lambda(\mathbf{y})\, \lambda(\mathbf{y}')} < \delta$$

verificam-se sempre que os elementos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{x}'$ de $\mathbf{U}$ e os elementos $\mathbf{y}$ e $\mathbf{y}'$ de $\mathbf{V}$ satisfaçam às condições $\overline{\mathbf{x}\mathbf{x}'} < \varepsilon$ e $\overline{\mathbf{y}\mathbf{y}'} < \varepsilon$.

Supondo que é $\mathbf{B} \mid [\mathbf{A}]$, vem a proposição seguinte:

Se $f(\mathbf{x})$, definida no conjunto limitado $\mathbf{A}$, é contínua em $[\mathbf{A}]$, a cada número positivo δ corresponde um número positivo ε tal que seja $\omega(\mathbf{X}) < \delta$ para qualquer subconjunto $\mathbf{X}$ de $\mathbf{A}$ de diâmetro inferior a ε [Cantor].

Temos pois $\overline{f(\mathbf{x})\, f(\mathbf{x}')} < \delta$ sempre que seja $\overline{\mathbf{x}\mathbf{x}'} < \varepsilon$ [2].

---

[1] Como corolário encontramos mais uma vez a proposição que diz:

A função inversa duma função contínua num conjunto limitado e fechado, quando existe, é contínua (supomos que elementos justapostos de $f(\mathbf{A})$ só podem resultar de elementos justapostos de $\mathbf{A}$).

Efectivamente considerando uma sucessão $f(\mathbf{x}_1), f(\mathbf{x}_2), \dots, f(\mathbf{x}_i), \dots$ que tenda para um dado elemento $f(\mathbf{a})$ de $f(\mathbf{A})$, a sucessão $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_i \dots$ tende para $\mathbf{a}$.

[2] Se $f(\mathbf{x})$ é contínua num conjunto $\mathbf{A}$ limitado e fechado, a possibilidade da divisão de $\mathbf{A}$ num número finito de partes $\mathbf{X}$ em cada uma das quais seja $\omega(\mathbf{X}) < \delta$ não traduz o teorema de Cantor nem sequer é característica das funções contínuas. Qualquer função limitada $f(\mathbf{x})$ definida num conjunto limitado $\mathbf{A}$ satisfaz a tal condição. Efectivamente, uma divisão do conjunto de todos os elementos $\big(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})\big)$

Se $f(\mathbf{x})$ é contínua no subconjunto **B** *de* [**A**], *limitado e fechado, a cada número positivo δ correspondem vizinhanças* **U** *e* **V** *de* **B**, *relativas a* **A** *e a* [**A**], *e um número positivo ε de maneira que seja*

$$\overline{f(\mathbf{X})\,f(\mathbf{X}')} < \delta \quad \text{e} \quad \overline{\lambda(\mathbf{Y})\,\lambda(\mathbf{Y}')} < \delta$$

para subconjuntos quaisquer **X**, **X′**, **Y** *e* **Y′**, *os dois primeiros de* **U** *e os outros de* **V**, *tais que se tenha* $\mathbf{X}\mathbf{X}' < \varepsilon$ *e* $\overline{\mathbf{Y}\mathbf{Y}'} < \varepsilon$ [p. 299, l. 12].

Como corolário afirmamos que:

Se $f(\mathbf{x})$ é contínua no subconjunto **B** *de* [**A**], *limitado e fechado, as funções $f(\mathbf{X})$ e $\lambda(\mathbf{Y})$, sendo a primeira definida nos subconjuntos limitados* **X** *de* **A** *e a segunda nos subconjuntos limitados* **Y** *de* [**A**], *são contínuas no conjunto* **B** *e em todos os seus subconjuntos* [p. 121, l. 1, e p. 268, l. 21].

Por conseguinte, dado um subconjunto limitado **X** de **A**, se $f(\mathbf{x})$ é contínua em [**X**] e se a sucessão $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_i, \ldots$, de subconjuntos de **A**, de soma limitada, tende para **X**, a correspondente sucessão $f(\mathbf{X}_1), f(\mathbf{X}_2) \ldots, f(\mathbf{X}_i), \ldots$ tende para $f(\mathbf{X})$.

Quando em particular $f(\mathbf{x})$ é definida e contínua em todo o espaçóide a que pertence a variável **x**, a correspondente função $f(\mathbf{X})$ é contínua em qualquer conjunto limitado **X** [1].

Se $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_i, \ldots$ satisfaz apenas á condição $\lim \overrightarrow{\mathbf{X}_i\mathbf{X}} = 0$, também temos $\lim \overrightarrow{f(\mathbf{X}_i)\,f(\mathbf{X})} = 0$ quando **X** é limitado e $f(\mathbf{x})$ contínua em [**X**]. Na verdade, os termos da sucessão precedente

---

num número finito de partes de diâmetros inferiores a um dado número positivo δ determina uma divisão de **A** no mesmo número de partes, sendo manifesto que em cada uma delas a oscilação de $f(\mathbf{x})$ é inferior a δ. No caso geral duma função qualquer definida num conjunto qualquer, podemos dividir êste numa infinidade numerável de partes em cada uma das quais a oscilação da função seja inferior a δ.

[1] Os limites superior e inferior dum conjunto limitado de números reais são manifestamente funções contínuas dêsse conjunto. Por conseguinte, se a função $f(\mathbf{x})$, definida em **A**, é contínua num dado subconjunto **B** de [**A**], limitado e fechado, e se $f(\mathbf{A})$ é numérico e real, os limites superior e inferior do conjunto $f(\mathbf{X})$, quando limitado, são funções contínuas no conjunto **B** e nos seus diversos subconjuntos [p. 307, l. 6].

Por exemplo, como a distância reduzida $\underline{\mathbf{x}\mathbf{Y}}$ é uma função contínua de **x** concluímos que a distância reduzida $\underline{\mathbf{X}\mathbf{Y}}$ e o desvio $\overrightarrow{\mathbf{X}\mathbf{Y}}$ (respectivamente o limite inferior e o superior do conjunto das distâncias $\underline{\mathbf{x}\mathbf{Y}}$ correspondentes aos diversos elementos **x** de **X**) são funções contínuas do conjunto limitado **X**.

podem considerar-se subconjuntos dos termos correspondentes duma sucessão de subconjuntos de $\mathbf{A}$, de soma limitada, que tenda para $\mathbf{X}$.

Se em particular a sucessão $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_i, \ldots$ de elementos de $\mathbf{A}$ é tal que $lim\, \overline{\mathbf{x}_i \mathbf{X}} = 0$, vem $lim\, \overline{f(\mathbf{x}_i) f(\mathbf{X})} = 0$, supondo ainda que $f(\mathbf{x})$ é contínua no conjunto limitado $[\mathbf{X}]$.

Se $f(\mathbf{x})$ é contínua no subconjunto $\mathbf{B}$ de $[\mathbf{A}]$, limitado e fechado, a cada número positivo δ correspondem vizinhanças $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ de $\mathbf{B}$ relativas a $\mathbf{A}$ e a $[\mathbf{A}]$ e um nómero positivo ε de maneira que seja

$$|\omega(\mathbf{X}) - \omega(\mathbf{X}')| < \delta \quad e \quad |\Omega(\mathbf{Y}) - \Omega(\mathbf{Y}')| < \delta$$

para subconjuntos quaisquer $\mathbf{X}$, $\mathbf{X}'$, $\mathbf{Y}$ e $\mathbf{Y}'$, os dois primeiros de $\mathbf{U}$ e os outros de $\mathbf{V}$, tais que se tenha $\overline{\mathbf{X}\mathbf{X}'} < \varepsilon$ e $\overline{\mathbf{Y}\mathbf{Y}'} < \varepsilon$ [p. 300, l. 4].

Logo, se $f(\mathbf{x})$ é contínua no subconjunto $\mathbf{B}$ de $[\mathbf{A}]$, limitado e fechado, as oscilações $\omega(\mathbf{X})$ e $\Omega(\mathbf{Y})$, a primeira das quais é definida nos subconjuntos limitados de $\mathbf{A}$ e a segunda nos de $[\mathbf{A}]$, são contínuas no conjunto $\mathbf{B}$ e nos seus diversos subconjuntos [1]. A função $\Omega(\mathbf{y})$, em particular, é contínua nos elementos $\mathbf{y}$ de continuïdade de $f(\mathbf{x})$.

Seja $\mathbf{z} \mid f(\mathbf{x})$ uma função contínua num conjunto limitado e fechado $\mathbf{A}$. Consideremos uma função $\varphi(\mathbf{z})$ definida no conjunto $f(\mathbf{A})$. Dado um elemento $\mathbf{z}'$ de $f(\mathbf{A})$, designemos por $\mathbf{X}'$ o maior subconjunto de $\mathbf{A}$ tal que seja $\mathbf{z}' \| f(\mathbf{X}')$. É condição necessária e suficiente de continuïdade da função de função $\varphi(f(\mathbf{x}))$ no conjunto $\mathbf{X}'$ que $\varphi(\mathbf{z})$ seja contínua no elemento $\mathbf{z}'$ (supomos que a elementos juxtapostos a $\mathbf{z}'$ correspondem para $\varphi(\mathbf{z})$ elementos juxtapostos a $\varphi(\mathbf{z}')$.

Demonstremos que a condição é necessária. Sendo $f(\mathbf{x})$ contínua no conjunto fechado $\mathbf{A}$, dada qualquer sucessão de elementos de $f(\mathbf{A})$

$$\mathbf{z}_1 \mid f(\mathbf{x}_1),\ \mathbf{z}_2 \mid f(\mathbf{x}_2),\ \ldots,\ \mathbf{z}_i \mid f(\mathbf{x}_i),\ \ldots$$

---

[1] Ao mesmo resultado também podemos chegar notando que $\omega(\mathbf{X})$ e $\Omega(\mathbf{Y})$ são funções contínuas de $f(\mathbf{X})$ e de $\lambda(\mathbf{Y})$ [p. 118, l. 23] e que estas últimas são contínuas em $\mathbf{B}$ e nos seus diversos subconjuntos, como atrás dissemos. É uma aplicação do teorema de continuïdade da função de função.

que tenda para o limite $\mathbf{z}'$, temos $\lim \overline{\mathbf{x}_i \mathbf{X}'} = 0$ [p. 313, l. 1]. Se $\varphi(f(\mathbf{x}))$ é contínua no conjunto $\mathbf{X}'$, que é limitado e fechado [p. 312, l. 9], temos também

$$\lim \underline{\varphi(f(\mathbf{x}_i))\ \varphi(f(\mathbf{X}'))} = 0 \quad [\text{p. } 315, \text{l. } 4],$$

ou $\lim \underline{\varphi(\mathbf{z}_i)\ \varphi(\mathbf{z}')} = 0$. A função $\varphi(\mathbf{z})$ é pois contínua em $\mathbf{z}'$.

A condição é suficiente como atrás se demonstrou [p. 307, l. 6].

Por conseguinte afirmamos que:

Sendo $f(\mathbf{x})$ definida e contínua num conjunto limitado e fechado $\mathbf{A}$, é condição necessária e suficiente de continuïdade da função de função $\varphi(f(\mathbf{x}))$ em $\mathbf{A}$ que $\varphi(\mathbf{z})$ seja contínua em $f(\mathbf{A})$ (supomos que a elementos de $f(\mathbf{A})$ juxtapostos entre si correspondem para $\varphi(\mathbf{z})$ elementos também juxtapostos) [1].

Seja $\mathbf{K}$ um contínuo limitado contido em $[\mathbf{A}]$. Se $f(\mathbf{x})$, definida em $\mathbf{A}$, é contínua em $\mathbf{K}$, o conjunto limite $\lambda(\mathbf{K})$ é um contínuo [p. 300, l. 21] [2].

Como corolário deduzimos que:

Se $f(\mathbf{x})$ é definida e contínua num contínuo limitado $\mathbf{K}$, o conjunto $f(\mathbf{K})$ também é um contínuo [CAUCHY].

Se $f(\mathbf{x})$ é contínua num conjunto $\mathbf{C}$ tal que dois quaisquer dos seus elementos se unam por um contínuo limitado nêle contido, o conjunto $f(\mathbf{C})$ satisfaz à mesma condição [3].

---

[1] Outro modo de provar a condição necessária consiste em demonstrar que é fechado o conjunto dos elementos de segunda ordem $(\mathbf{z}, \varphi(\mathbf{z}))$ [p. 310, l. 19] (recordemos que o conjunto $\mathbf{A}$, e por conseguinte os conjuntos $f(\mathbf{A})$ e $\varphi(f(\mathbf{A}))$, são limitados e fechados). Basta para isso notar que é fechado o conjunto dos elementos de terceira ordem $(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}), \varphi(f(\mathbf{x})))$ [p. 310, nota] o que se torna evidente em virtude da suposta continuïdade das funções $f(\mathbf{x})$ e $\varphi(f(\mathbf{x}))$ no conjunto limitado e fechado $\mathbf{A}$.

[2] Êste contínuo pode degenerar num só elemento ou em elementos juxtapostos entre si.

[3] Do teorema de CAUCHY e da proposição a p. 301, l. 1, deduz-se o seguinte

É contínua a função inversa, caso exista, duma função de elementos numéricos reais definida e contínua num conjunto tal que dois quaisquer dos elementos se unam por um contínuo limitado nêle contido.

Seja $\mathbf{z} \mid f(\mathbf{x})$ a função considerada, definida em $\mathbf{A}$. O conjunto $f(\mathbf{A})$ é um

Se a função $f(\mathbf{x})$ *é definida e contínua num conjunto* $\mathbf{C}$ *perfeitamente conexo* [p. 301, 1.ª nota], *o conjunto* $f(\mathbf{C})$ *também é perfeitamente conexo* (1).

Consideremos, com efeito, uma divisão de $f(\mathbf{C})$ em duas partes $\mathbf{Z}$ e $\mathbf{Z}'$. Sejam $\mathbf{X}$ e $\mathbf{X}'$ os maiores subconjuntos de $\mathbf{C}$ que façam $\mathbf{Z} \mid f(\mathbf{X})$ e $\mathbf{Z}' \mid f(\mathbf{X}')$. Existe por hipótese um elemento $\mathbf{c}$ do produto $\mathbf{C} \times [\mathbf{X}] \times [\mathbf{X}']$, e, como $f(\mathbf{x})$ é contínua em $\mathbf{c}$, o elemento correspondente $f(\mathbf{c})$ pertence a $[\mathbf{Z}]$ e a $[\mathbf{Z}']$. O produto $f(\mathbf{C}) \times [\mathbf{Z}] \times [\mathbf{Z}']$ é por conseguinte provido de elementos.

De idêntica maneira se demonstra a seguinte proposição:

Seja $f(\mathbf{x})$ *uma função definida num conjunto* $\mathbf{C}$ *tal que, para qualquer divisão dêste em duas partes* $\mathbf{X}$ *e* $\mathbf{X}'$, *exista o produto* $[\mathbf{X}] \times [\mathbf{X}']$. *Se* $f(\mathbf{x})$ *é contínua em* $[\mathbf{C}]$, *o conjunto* $f(\mathbf{C})$ *satisfaz à mesma condição: seja qual fôr a maneira de o dividirmos em duas partes* $\mathbf{Z}$ *e* $\mathbf{Z}'$, *existe o produto* $[\mathbf{Z}] \times [\mathbf{Z}']$.

Em particular:

Se $f(\mathbf{x})$, *definida num conjunto limitado e conexo* $\mathbf{C}$, *é contínua em* $[\mathbf{C}]$, *o conjunto* $f(\mathbf{C})$ *é conexo.*

Supondo fechado o conjunto $\mathbf{C}$ que figura nesta proposição, obtemos mais uma vez o teorema de Cauchy acima enunciado.

Seja $\mathbf{K}$ *um contínuo limitado contido em* $[\mathbf{A}]$. *Se* $f(\mathbf{x})$, *definida em* $\mathbf{A}$, *é contínua em* $\mathbf{K}$, *a cada número positivo* δ *corresponde um positivo* ε *tal que, para quaisquer vizinhanças* $\mathbf{U}$ *e* $\mathbf{V}$ *de* $\mathbf{K}$, *relativas a* $\mathbf{A}$ *e a* $[\mathbf{A}]$, *que distem de* $\mathbf{K}$ *menos de* ε, *as desconexões dos conjuntos* $f(\mathbf{U})$, $\lambda(\mathbf{U})$ *e* $\lambda(\mathbf{V})$ *sejam inferiores a* δ [p. 302, l. 14].

---

intervalo porque dois quaisquer dos seus elementos unem-se por meio dum intervalo contido em $f(\mathbf{A})$. Tomemos um elemento $\mathbf{z}_0 \mid f(\mathbf{x}_0)$ e consideremos um intervalo de centro $\mathbf{z}_0$ tal que a parte contida em $f(\mathbf{A})$ seja um intervalo fechado I. Sejam $f(\mathbf{x}')$ e $f(\mathbf{x}'')$ os extremos de I. Os elementos $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ unem-se por meio dum contínuo limitado $\mathbf{K}$ contido em $\mathbf{A}$. O conjunto $f(\mathbf{K})$ é um intervalo; a êle pertence I. Ficamos assim reduzidos ao caso já considerado duma função contínua sôbre um conjunto limitado e fechado $\mathbf{K}$. Logo a uma sucessão de elementos de $f(\mathbf{A})$ que tenda para $\mathbf{z}_0$ corresponde uma sucessão de elementos de $\mathbf{A}$ que tende para $\mathbf{x}_0$.

(1) Da proposição a p. 301, l. 1, conclui-se imediatamente que $f(\mathbf{C})$ é um conjunto conexo.

Seja $f(\mathbf{x})$ *uma função definida, limitada e contínua num conjunto* $\mathbf{A}$. *Consideremos um subconjunto conexo* $\mathbf{C}$ *de* $[\mathbf{A}]$. *Se existe uma sucessão de subconjuntos de* $\mathbf{A}$ *perfeitamente conexos*

$$\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \ldots, \mathbf{C}_i, \ldots$$

cada um dos quais contenha uma vizinhança de $\mathbf{C}$ *e tais que seja* $\lim \overrightarrow{\mathbf{C}_i \mathbf{C}} = 0$, *o conjunto limite* $\lambda(\mathbf{C})$ *é um contínuo* (1).

Na verdade, demonstrámos há pouco que os conjuntos $f(\mathbf{C}_i)$ são conexos [p. 292, l. 1] (2).

---

(1) Dispensa-se a hipótese da limitabilidade de $f(\mathbf{x})$ quando o conjunto $f(\mathbf{A})$ é numérico e real [p. 294, obs.].

(2) Considerando, por exemplo, uma função definida, limitada e contínua, num intervalo aberto, o conjunto limite numa das extremidades é um contínuo.

Se uma função $f(x)$, definida num intervalo incluindo uma das extremidades x', é contínua nos pontos interiores, o conjunto limite em x', caso exista, da razão

$$\frac{\overline{f(x)\, f(x')}}{x - x'}$$

é um intervalo [p. 294, nota (1)].

Se uma função $f(p)$ do ponto p dum espaço ordinário de mais de uma dimensão é limitada e contínua nos pontos duma esfera de centro p', à excepção dêste ponto onde não a definimos, o respectivo conjunto limite em p' é um contínuo.

Supondo esta função definida em p', o conjunto limite da razão

$$\frac{\overline{f(p)\, f(p')}}{\overline{p\, p'}}$$

quando existe, é um intervalo, mesmo que $f(p)$ não seja limitada na referida esfera.

Seja $f(z)$ uma função de variável imaginária z definida no conjunto A dos pontos de certo círculo do qual excluímos o centro z' e a circunferência C que o limita. Se $f(z)$ é limitada e contínua em A, os respectivos conjuntos limites $\lambda(z')$ e $\lambda(\mathrm{C})$ são contínnuos.

Se $f(z)$ é contínua em z' e se a razão incremental

$$\frac{f(z) - \lambda(z')}{z - z'}$$

se mantém limitada em A, o conjunto limite em z' da mesma razão é um contínuo.

Seja $f(\mathbf{x})$ *uma função definida, limitada e contínua no conjunto* $\mathbf{A}$ (¹). *Suponhamos que o subconjunto* $\mathbf{C}$ *de* $[\mathbf{A}]$ *verifica a seguinte propriedade: seja qual fôr a sucessão* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots \mathbf{x}_i, \ldots$ *de elementos de* $\mathbf{A}$ *que faça lim* $\overline{\mathbf{x}_i \mathbf{C}}=0$, *há uma ordem a partir da qual dois elementos quaisquer* $\mathbf{x}_i$ *e* $\mathbf{x}_{i'}$ *pertencem a um conjunto perfeitamente conexo* $\mathbf{C}_{i,i'}$ *contido em* $\mathbf{A}$ *de tal modo que se tenha lim* $\overrightarrow{\mathbf{C}_{i,i'}\mathbf{C}}=0$. *Nestas condições o conjunto limite* $\lambda(\mathbf{C})$ *é um contínuo* [p. 292, l. 22].

Seja $f(\mathbf{x})$ *uma função definida e contínua num conjunto* $\mathbf{C}$ *no qual dois quaisquer dos elementos pertençam a um contínuo limitado contido em* $\mathbf{C}$. *Admitamos que, para um certo elemento* $\mathbf{z}$ *de* $f(\mathbf{x})$, *existem em* $\mathbf{C}$ *contínuos* $\mathbf{K}$ *que façam* $f(\mathbf{K}) \parallel \mathbf{z}$. *Se cada elemento de qualquer dêsses contínuos determina uma vizinhança* $\mathbf{U}$ *do mesmo elemento relativa a* $\mathbf{C}$ *que faça ainda* $f(\mathbf{U}) \parallel \mathbf{z}$, *temos também* $f(\mathbf{C}) \parallel \mathbf{z}$.

Consideremos a colecção dos contínuos $\mathbf{K}$ a que se refere o enunciado. Por ser $f(\mathbf{x})$ uma função contínua em $\mathbf{C}$, qualquer contínuo contido em $\mathbf{C}$ que se juxtaponha a uma soma de contínuos da colecção é um contínuo da mesma colecção. Além disso, por fôrça das condições impostas no enunciado, seja qual fôr a sucessão $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_i, \ldots$ de elementos de $\mathbf{C}$ que tenda para um elemento de um dêsses contínuos, temos, a partir de certa ordem, $f(\mathbf{x}_i) \parallel \mathbf{z}$. Por êste motivo, cada contínuo limitado da colecção determina uma vizinhança $\mathbf{V}$ relativa a $\mathbf{C}$ na qual é $f(\mathbf{V}) \parallel \mathbf{z}$ [p. 276, l. 7]. Qualquer contínuo contido em $\mathbf{V}$ é pois um dos da colecção considerada. A proposição enunciada a p. 269, l. 33, diz então que a soma dos contínuos limitados da colecção é o conjunto $\mathbf{C}$, sendo por isso $f(\mathbf{C}) \parallel \mathbf{z}$ (²).

Sejam $h(\mathbf{x})$ *e* $k(\mathbf{x})$ *funções definidas e contínuas num conjunto* $\mathbf{C}$ *no qual dois quaisquer dos elementos pertençam a um*

(¹) Primeira nota da página precedente.

(²) Se por exemplo uma função numérica de variável independente imaginária, holomorfa num domínio elementar aberto, é constante sôbre um contínuo nêle contido (basta para isso que se mantenha constante sôbre um conjunto que admita um derivado de ordem ω contido nesse domínio) a mesma função é constante em todo o domínio.

contínuo limitado contido em $\mathbf{C}$. *Admitamos que existem em* $\mathbf{C}$ *contínuos* $\mathbf{K}$ *tais que seja* $h(\mathbf{x}) \parallel k(\mathbf{x})$ *em cada um dos seus elementos* $\mathbf{x}$. *Se qualquer dêstes elementos determina uma vizinhança relativa a* $\mathbf{C}$ *em cujos elementos teuha ainda lugar a mesma juxtaposição, esta vevifica-se em todos os elementos de* $\mathbf{C}$.

Efectivamente, a função $\overline{h(\mathbf{x})\, k(\mathbf{x})}$ encontra-se nas condições da função $f(\mathbf{x})$ considerada na proposição anterior.

CONTRIBUIÇÃO PARA O ESTUDO

DA

TEORIA DAS FUNÇÕES

POR

LUÍS BEDA NETO

TERCEIRA PARTE

(CONTINUAÇÃO)

CONVERGÊNCIA
DETERMINAÇÃO IMPLÍCITA

COIMBRA
TIPOGRAFIA DA ATLÂNTIDA
1948

SEPARATA

DA

Revista da Faculdade de Ciências da Universidade de Coimbra

Volume XVII

II

CONVERGÊNCIA DAS FUNÇÕES

91. Convergência simples. — Uma função $F(\mathbf{x},\mathbf{y})$ definida num conjunto composto $(\mathbf{A},\mathbf{B})$ determina, para cada $\mathbf{y}$ em $\mathbf{B}$, uma função da variável $\mathbf{x}$ definida em $\mathbf{A}$; representemo-la por $f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$. Seja $\mathbf{b}$ um elemento limite de $\mathbf{B}$. Dado um elemento $\mathbf{a}$ de $\mathbf{A}$, dizemos que as funções $f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$ são *simplesmente convergentes* em $\mathbf{a}$ ao tender $\mathbf{y}$ para $\mathbf{b}$ quando a função $F(\mathbf{a},\mathbf{y})$ é contínua no elemento $\mathbf{b}$. Neste caso o conjunto limite da função $F(\mathbf{a},\mathbf{y})$ em $\mathbf{b}$ consta de elementos juxtapostos entre si e constitui o *limite simples* das funções $f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$ em $\mathbf{a}$ $(\mathbf{y}\rightarrow\mathbf{b})$[1]. Dizemos que estas funções convergem simplesmente para $\mathbf{c}$ em $\mathbf{a}$ $(\mathbf{y}\rightarrow\mathbf{b})$ quando $\mathbf{c}$ pertence ao limite simples das mesmas funções em $\mathbf{a}$. Para que $\mathbf{c}$ seja elemento do limite simples de $f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$ em $\mathbf{a}$ $(\mathbf{y}\rightarrow\mathbf{b})$ é pois necessário e suficiente que se tenha

$$\lim_{\mathbf{y}\rightarrow\mathbf{b}} \overline{f_{\mathbf{y}}(\mathbf{a})\ \mathbf{c}} = 0,$$

ou que a um arbitrário $\delta > 0$ se oponha um $\varepsilon > 0$ tal que se tenha

$$\overline{f_{\mathbf{y}}(\mathbf{a})\ \mathbf{c}} < \delta$$

sempre que $\overline{\mathbf{y}\,\mathbf{b}} < \varepsilon$.

É condição necessária e suficiente para que as funções $f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$ *sejam convergentes em* $\mathbf{a}$ $(\mathbf{y}\rightarrow\mathbf{b})$ *que se tenha*

$$\lim_{\mathbf{y}\rightarrow\mathbf{b},\ \mathbf{y}'\rightarrow\mathbf{b}.} \overline{f_{\mathbf{y}}(\mathbf{a})\ f_{\mathbf{y}'}(\mathbf{a})} = 0$$

---

[1] O símbolo $\mathbf{y}\rightarrow\mathbf{b}$ substitui a frase: *ao tender* $\mathbf{y}$ *para* $\mathbf{b}$.

É condição necessária e suficiente para que as funções $f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$ *sejam convergentes em* $\mathbf{a}$ $(\mathbf{y} \to \mathbf{b})$ *que a um arbitrário* $\delta > 0$ *se oponha um* $\varepsilon > 0$ *tal que se tenha*

$$\overline{f_{\mathbf{y}}(\mathbf{a})\ f_{\mathbf{y}'}(\mathbf{a})} < \delta$$

sempre que $\overline{\mathbf{y}\,\mathbf{b}} < \varepsilon$ e $\overline{\mathbf{y}'\,\mathbf{b}} < \varepsilon$.

Seja $\mathbf{c}$ *um elemento do limite das funções* $f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$ *em* $\mathbf{a}$ $(\mathbf{y} \to \mathbf{b})$. *Consideremos uma função* $\varphi(\mathbf{u})$ *definida no conjunto dos elementos de todas as funções* $f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$, *contínua no elemento* $\mathbf{c}$. *As funções* $\varphi(f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}))$ *são convergentes em* $\mathbf{a}$ $(\mathbf{y} \to \mathbf{b})$.

É uma aplicação do teorema da continuidade duma função de função [*p.* 307, *l.* 6].

Sejam

$$(1) \qquad f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}),\ g_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}),\ \cdots$$

n famílias de funções definidas num mesmo conjunto $\mathbf{A}$ *com* $\mathbf{y}$ *qualquer em* $\mathbf{B}$. *Se estas funções convergem em* $\mathbf{a}$ *para os elementos* $\mathbf{c}, \mathbf{d}, \cdots$ $(\mathbf{y} \to \mathbf{b})$ *as funções compostas*

$$(2) \qquad \big(f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}),\ g_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}),\ \cdots\big)$$

convergem em $\mathbf{a}$ *para o elemento* $(\mathbf{c}, \mathbf{d}, \ldots)$, *e recìprocamente* [*p.* 307, *l.* 12].

Combinando estas duas proposições vem a seguinte:

Se n famílias de funções (1) *convergem em* $\mathbf{a}$ *para os elementos* $\mathbf{c}, \mathbf{d}, \cdots$ $(\mathbf{y} \to \mathbf{b})$ *e se* $\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \cdots)$ *é uma função definida no conjunto dos elementos da função composta* (2), *contínua no elemento* $(\mathbf{c}, \mathbf{d}, \ldots)$, *as funções*

$$(3) \qquad \varphi\big(f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}),\ g_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}),\ \cdots\big)$$

são convergentes em $\mathbf{a}$ $(\mathbf{y} \to \mathbf{b})$.

Dizemos que as funções $f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$ são simplesmente convergentes em $\mathbf{A}$ $(\mathbf{y} \to \mathbf{b})$ quando a simples convergência se verifica em cada elemento deste conjunto. A função $f(\mathbf{x})$ que faz corresponder a cada elemento $\mathbf{x}$ de $\mathbf{A}$ o limite das funções $f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$ $(\mathbf{y} \to \mathbf{b})$ chamamos *limite simples* das mesmas funções em $\mathbf{A}$ $(\mathbf{y} \to \mathbf{b})$.

Se as n famílias de funções (1) *convergem em* $\mathbf{A}$ *para as funções*

$$f(\mathbf{x}),\ g(\mathbf{x}),\ \ldots,$$

e se $\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \ldots)$ *é uma função definida e contínua no lugar do conjunto dos elementos da função composta* (2), *as funções* (3) *convergem em* $\mathbf{A}$ *para a função*

$$\varphi\big(f(\mathbf{x}),\ g(\mathbf{x}),\ \ldots\big).$$

Consideremos agora o caso particular em que $\mathbf{B}$ consta dos números inteiros positivos, ou seja o caso duma sucessão de funções

$$(4) \qquad f_1(\mathbf{x}),\ f_2(\mathbf{x}),\ \ldots,\ f_i(\mathbf{x}),\ \ldots$$

definidas num mesmo conjunto $\mathbf{A}$. Os conjuntos $f_i(\mathbf{A})$ pertencem a um mesmo espaçóide. O termo geral $f_i(\mathbf{x})$ representa uma função da variável abstracta $\mathbf{x}$ e depende da variável inteira i. Dizemos que a sucessão (4) é simplesmente convergente num elemento $\mathbf{a}$ de $\mathbf{A}$ quando as funções $f_i(\mathbf{x})$ são simplesmente convergentes em $\mathbf{a}$ ao tender i para infinito $\left(\text{ou } u = \frac{1}{i} \text{ para zero}\right)$, isto é, quando se dá a convergência da sucessão

$$f_1(\mathbf{a}),\ f_2(\mathbf{a}),\ \ldots,\ f_i(\mathbf{a}),\ \ldots$$

Os respectivos limites, juxtapostos entre si, constituem o limite simples da sucessão (4) no elemento $\mathbf{a}$.

Quando a propriedade se verifica em cada elemento de $\mathbf{A}$, dizemos que a sucessão é simplesmente convergente neste conjunto, e que tende ou converge para o respectivo limite $f(\mathbf{x})$.

Suponhamos que n sucessões de funções, de termos gerais

$$(5) \qquad f_i(\mathbf{x}),\ g_i(\mathbf{x}),\ \ldots,$$

definidas num mesmo conjunto $\mathbf{A}$, *convergem em* $\mathbf{a}$ *para os elementos* $\mathbf{c}, \mathbf{d}, \ldots$ *Se* $\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \ldots)$ *é uma função definida no conjunto dos elementos das funções compostas*

$$(6) \qquad \left(f_i(\mathbf{x}),\ g_i(\mathbf{x}),\ \ldots\right)_{i=1,2,\ldots,}$$

contínua no elemento $(\mathbf{c}, \mathbf{d}, \ldots)$, *a sucessão de termo geral*

$$(7) \qquad \varphi\left(f_i(\mathbf{x}),\ g_i(\mathbf{x}),\ \ldots\right)$$

é convergente em $\mathbf{a}$.

Suponhamos que as n sucessões de termos gerais (5) *convergem em* $\mathbf{A}$ *respectivamente para* $f(\mathbf{x})$, $g(\mathbf{x})$, $\ldots$ *Se* $\varphi(\mathbf{n}, \mathbf{v}, \ldots)$ *é uma função definida e contínua no lugar do conjunto dos elementos das funções compostas* (6), *a sucessão de termo geral* (7) *converge para*

$$\varphi\left(f(\mathbf{x}),\ g(\mathbf{x}),\ \ldots\right).$$

Nota. — As duas proposições precedentes abrangem os casos particulares de $n = 1$ e de

$$\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \ldots) \mid (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \ldots).$$

92. Convergência quase-uniforme. Consideremos uma família de funções $f_{\mathrm{y}}(\mathbf{x})$ definidas e conjuntamente limitadas num conjunto $\mathbf{A}$ com $\mathbf{y}$ qualquer em $\mathbf{B}$. Seja $\mathbf{b}$ um elemento limite de $\mathbf{B}$. Suponhamos que as funções $f_{\mathrm{y}}(\mathbf{x})$ admitem um limite simples $f(\mathbf{x})$ em $\mathbf{A}$ $(\mathbf{y} \to \mathbf{b})$.

Seja $\mathbf{a}$ um elemento limite de $\mathbf{A}$; designemos por $\lambda_{\mathrm{y}}(\mathbf{a})$ e $\lambda(\mathbf{a})$ os conjuntos limites em $\mathbf{a}$ de $f_{\mathrm{y}}(\mathbf{x})$ e de $f(\mathbf{x})$, e por $\Omega_{\mathrm{y}}(\mathbf{a})$ e $\Omega(\mathbf{a})$ as respectivas oscilações limites nesse elemento.

I — *A condição*

$$(1) \qquad \lim_{\mathrm{y} \to \mathrm{b}} \lambda_{\mathrm{y}}(\mathbf{a}) \parallel \lambda(\mathbf{a})$$

é suficiente para que seja [*p.* 118, *l.* 17]

$$(2) \qquad \lim \Omega_{\mathrm{y}}(\mathbf{a}) = \Omega(\mathbf{a}).$$

Como corolário vem:

II — *Quando as funções* $f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$ *são contínuas em* $\mathbf{a}$, *a condição* (1) *é suficiente de continuidade de* $f(\mathbf{x})$ *em* $\mathbf{a}$.

III — *Quando as funções* $f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$ *são definidas e contínuas em* $\mathbf{a}$, *a condição* (1) *é necessária e suficiente de continuidade de* $f(\mathbf{x})$ *em* $\mathbf{a}$.

É necessária, pois a condição de convergência simples

$$\lim_{\mathbf{y}\to\mathbf{b}} f_{\mathbf{y}}(\mathbf{a}) \parallel f(\mathbf{a})$$

toma a forma (1) quando as funções $f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$ e $f(\mathbf{x})$ são contínuas em $\mathbf{a}$. A mesma condição é suficiente como dissemos precedentemente.

Continuemos a considerar um elemento limite $\mathbf{a}$ de $\mathbf{A}$, pertencente ou não a este conjunto. Generalizando uma definição de Arzela, dizemos que as funções $f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$ são *quase-uniformemente convergentes* em $\mathbf{a}$ ao tender $\mathbf{y}$ para $\mathbf{b}$ quando a um arbitrário $\delta > 0$ se opõe um $\varepsilon > 0$ que verifique a seguinte propriedade: sempre que seja $\overline{\mathbf{y}\,\mathbf{b}} < \varepsilon$ existe uma vizinhança $\mathbf{U}_{\mathbf{y}}$ de $\mathbf{a}$ onde se dá a desigualdade

$$\overline{f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})\; f(\mathbf{x})} < \delta.$$

IV — *A convergência quase-uniforme das funções* $f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$ *no elemento* $\mathbf{a}$ ($\mathbf{y}\to\mathbf{b}$) *é suficiente para que se verifique a condição* (1).

Com efeito, mostra a condição precedente que a um elemento qualquer de $\lambda_{\mathbf{y}}(\mathbf{a})$, com $\overline{\mathbf{y}\,\mathbf{b}} < \varepsilon$, corresponde um elemento de $\lambda(\mathbf{a})$ a uma distância do primeiro não superior a δ, e inversamente. Logo temos

$$\overline{\lambda_{\mathbf{y}}(\mathbf{a})\; \lambda(\mathbf{a})} \leqq \delta$$

sempre que $\overline{\mathbf{y}\,\mathbf{b}} < \varepsilon$, isto é, verifica-se a condição (1).

V — *A convergência quase-uniforme das funções* $f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$ *em* $\mathbf{a}$ *é suficiente para que se verifique a condição* (2).

Resulta das proposições IV e I.

VI — *Se as funções* $f_y(\mathbf{x})$ *são contínuas em* $\mathbf{a}$, *a convergência quase-uniforme em* $\mathbf{a}$ *é condição suficiente de continuidade de* $f(\mathbf{x})$ *nesse elemento.*

Resulta das proposições IV e II.

VII — *Se as funções* $f_y(\mathbf{x})$ *são definidas e contínuas em* $\mathbf{a}$, *a convergência quase-uniforme em* $\mathbf{a}$ *é necessária e suficiente para que se verifique a condição* (1) *nesse elemento.*

Com efeito, quando as funções $f_y(\mathbf{x})$ são contínuas em $\mathbf{a}$, e dada a condição (1), resulta a continuidade de $f(\mathbf{x})$ em $\mathbf{a}$ (*prop.* II). Segue-se que a distância $\overline{f_y(\mathbf{x})\ f(\mathbf{x})}$ é uma função contínua em $\mathbf{a}$. Dado $\delta > 0$ corresponde-lhe um $\varepsilon > 0$ tal que seja

$$\overline{f_y(\mathbf{a})\ f(\mathbf{a})} < \delta$$

sempre que $\overline{\mathbf{y}\mathbf{b}} < \varepsilon$. Logo a cada um destes $\mathbf{y}$ opõe-se uma vizinhança $\mathbf{U}_y$ de $\mathbf{a}$ na qual se verifica a desigualdade

$$\overline{f_y(\mathbf{x})\ f(\mathbf{x})} < \delta.$$

Tem pois lugar, necessàriamente, a convergência quase-uniforme em $\mathbf{a}$.

Já se provou que a condição é suficiente.

VIII — *Se as funções* $f_y(\mathbf{x})$ *são definidas e contínuas em* $\mathbf{a}$, *a convergência quase-uniforme em* $\mathbf{a}$ *é necessária e suficiente de continuidade de* $f(\mathbf{x})$ *nesse elemento.*

Resulta das proposições VII e III.

Obs. — Quando as funções $f_y(\mathbf{x})$ são definidas e contínuas em $\mathbf{a}$, podemos dizer que se verifica a convergência quase-uniforme neste elemento ($\mathbf{y} \to \mathbf{b}$) quando a cada $\delta > 0$ corresponde uma função $f_y(\mathbf{x})$, com $\overline{\mathbf{y}\mathbf{b}}$ tão pequena quanto quisermos, à qual se oponha um vizinhança de $\mathbf{a}$ onde seja

$$\overline{f_y(\mathbf{x})\ f(\mathbf{x})} < \delta.$$

Efectivamente, nestas condições podemos extrair das funções $f_y(\mathbf{x})$ uma família de funções numeráveis

$$f_{y_i}(\mathbf{x}) \quad (i = 1, 2, \ldots)$$

tais que $lim\ \overline{\mathbf{y}_i \mathbf{b}} = 0$, funções que sejam quase-uniformemente convergentes em $\mathbf{a}$ $(\mathbf{y}_i \to \mathbf{b})$. As funções $f_{\mathbf{y}_i}(\mathbf{x})$ são contínuas em $\mathbf{a}$, e o mesmo sucede à função limite $f(\mathbf{x})$ (*prop.* VIII). Logo as funções dadas $f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$ convergem quase-uniformemente em $\mathbf{a}$ $(\mathbf{y} \to \mathbf{b})$, como resulta da mesma *prop.* VIII.

CASO DUMA SUCESSÃO DE FUNÇÕES. — Quando o conjunto $\mathbf{B}$ é constituído pelos números inteiros positivos, as funções $f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$ dispõem-se numa sucessão

$$f_1(\mathbf{x}),\ f_2(\mathbf{x}),\ \ldots,\ f_i(\mathbf{x}),\ \ldots$$

Seja $f(\mathbf{x})$ limite simples desta sucessão no conjunto $\mathbf{A}$. Dado um elemento limite $\mathbf{a}$ de $\mathbf{A}$, dizemos que a sucessão é quase-uniformemente convergente em $\mathbf{a}$ quando as funções $f_i(\mathbf{x})$ são quase-uniformemente convergentes em $\mathbf{a}$ ao tender i para infinito $\left(\text{ou } \frac{1}{i} \text{ para zero}\right)$.

Como casos particulares das proposições precedentes veem os seguintes enunciados:

I′ — *A condição*

$$(1') \qquad lim\ \overline{\lambda_i(\mathbf{a})\ \lambda(\mathbf{a})} = 0$$

é suficiente para que seja

$$(2') \qquad lim\ \Omega_i(\mathbf{a}) = \Omega(\mathbf{a}).$$

II′ — *Quando as funções $f_i(\mathbf{x})$ são contínuas em $\mathbf{a}$, a condição (1′) é suficiente de continuidade de $f(\mathbf{x})$ nesse elemento.*

III′ — *Quando as funções $f_i(\mathbf{x})$ são definidas e contínuas em $\mathbf{a}$, a condição (1′) é necessária e suficiente de continuidade de $f(\mathbf{x})$ nesse elemento.*

IV′ — *A convergência quase-uniforme da sucessão em $\mathbf{a}$ é suficiente para que se verifique a condição (1′).*

V′ — *A convergência quase-uniforme da sucessão em $\mathbf{a}$ é suficiente para que se verifique a condição (2′).*

VI$'$ — *Se as funções* $f_i(\mathbf{x})$ *são contínuas em* $\mathbf{a}$, *a convergência quase-uniforme da sucessão em* $\mathbf{a}$ *é suficiente de continuidade de* $f(\mathbf{x})$ *nesse elemento.*

VII$'$ — *Se as funções* $f_i(\mathbf{x})$ *são definidas e contínuas em* $\mathbf{a}$, *a convergência quase-uniforme da sucessão em* $\mathbf{a}$ *é necessária e suficiente para que se verifique a condição* (1$'$) *nesse elemento.*

VIII$'$ — *Se as funções* $f_i(\mathbf{x})$ *são definidas e contínuas em* $\mathbf{a}$, *a convergência quase-uniforme da sucessão em* $\mathbf{a}$ *é necessária e suficiente de continuidade de* $f(\mathbf{x})$ *nesse elemento* (ARZELA).

93. Convergência uniforme. — Continuemos a considerar uma função $F(\mathbf{x},\mathbf{y})$ definida num conjunto composto $(\mathbf{A},\mathbf{B})$ e a correspondente família de funções $f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$. Sejam $\mathbf{b}$ um elemento limite de $\mathbf{B}$, e $\mathbf{a}$ um elemento de $[\mathbf{A}]$. Dizemos que as funções $f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$ são *uniformemente convergentes* em $\mathbf{a}$ ao tender $\mathbf{y}$ para $\mathbf{b}$ quando a distância

$$\overline{F(\mathbf{x},\mathbf{y})\;F(\mathbf{x},\mathbf{y}')}$$

é uma função contínua de $(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{y}')$ no elemento $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{b})$ (e portanto nula neste elemento), ou seja quando

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a},\ \mathbf{y}\to\mathbf{b},\ \mathbf{y}'\to\mathbf{b}.} \overline{f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})\;f_{\mathbf{y}'}(\mathbf{x})}=0$$

A convergência uniforme em $\mathbf{a}$ $(\mathbf{y}\to\mathbf{b})$ continua a verificar-se quando $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ se substituem por elementos que lhes sejam juxtapostos.

Dada a convergência uniforme em $\mathbf{a}$ $(\mathbf{y}\to\mathbf{b})$, se o elemento $\mathbf{a}$ pertence a $\mathbf{A}$ vem, em particular,

$$\lim_{\mathbf{y}\to\mathbf{b},\ \mathbf{y}'\to\mathbf{b},} \overline{f_{\mathbf{y}}(\mathbf{a})\;f_{\mathbf{y}'}(\mathbf{a})}=0$$

isto é, as funções $f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$ são simplesmente convergentes em $\mathbf{a}$ $(\mathbf{y}\to\mathbf{b})$. O limite simples em $\mathbf{a}$ chama-se agora *limite uniforme* $(\mathbf{y}\to\mathbf{b})$.

Para que as funções $f_y(\mathbf{x})$ *sejam uniformemente convergentes em* $\mathbf{a}$ $(\mathbf{y} \to \mathbf{b})$ *é necessário e suficiente que a um arbitrário* $\delta > 0$ *se oponha um* $\varepsilon > 0$ *tal que seja*

$$(1) \qquad \overline{f_y(\mathbf{x})\ f_{y'}(\mathbf{x})} < \delta$$

sempre que $\overline{\mathbf{x}\mathbf{a}} < \varepsilon$, $\overline{\mathbf{y}\mathbf{b}} < \varepsilon$, $\overline{\mathbf{y}'\mathbf{b}} < \varepsilon$.

Se $f(\mathbf{x})$ *é limite simples das funções* $f_y(\mathbf{x})$ *em* $\mathbf{a}$ $(\mathbf{y} \to \mathbf{b})$, *para que no elemento* $\mathbf{a}$ *a convergência seja uniforme é necessário e suficiente que a distância* $\overline{f_y(\mathbf{x})\ f(\mathbf{x})}$ *seja contínua e nula no elemento* $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Com efeito, dada a convergência uniforme das funções $f_y(\mathbf{x})$ em $\mathbf{a}$ $(\mathbf{y} \to \mathbf{b})$, ao arbitrário $\delta > 0$ opõe-se um $\varepsilon > 0$ nas condições do enunciado precedente. Fazendo tender $\mathbf{y}'$ para $\mathbf{b}$ na desigualdade (1) vem

$$\overline{f_y(\mathbf{x})\ f(\mathbf{x})} \leqq \delta$$

sempre que $\overline{\mathbf{x}\mathbf{a}} < \varepsilon$, $\overline{\mathbf{y}\mathbf{b}} < \varepsilon$. A condição é, pois, necessária.

E é suficiente porque, verificada ela, temos

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a},\ \mathbf{y} \to \mathbf{b},\ \mathbf{y}' \to \mathbf{b}} \overline{f_y(\mathbf{x})\ f_{y'}(\mathbf{x})} \leqq \lim \left(\overline{f_y(\mathbf{x})\ f(\mathbf{x})} + \overline{f(\mathbf{x})\ f_{y'}(\mathbf{x})} \right) = 0$$

É pois condição necessária e suficiente de convergência uniforme em $\mathbf{a}$ $(\mathbf{y} \to \mathbf{b})$ que ao arbitrário $\delta > 0$ se oponha um $\varepsilon > 0$ tal que seja

$$\overline{f_y(\mathbf{x})\ f(\mathbf{x})} < \delta$$

logo que se tenha $\overline{\mathbf{x}\mathbf{a}} < \varepsilon$, $\overline{\mathbf{y}\mathbf{b}} < \varepsilon$.

Mostra esta condição que:

A convergência uniforme é um caso particular de convergência quase-uniforme.

Por conseguinte:

Se as funções $f_y(\mathbf{x})$ *são contínuas em* $\mathbf{a}$ *e se a convergência neste elemento é uniforme* $(\mathbf{y} \to \mathbf{b})$, *o limite simples é uma função contiuua no mesmo elemento.*

Sejam $\lambda_y(\mathbf{x})$ e $\lambda(\mathbf{x})$ os conjuntos limites de $f_y(\mathbf{x})$ e de $f(\mathbf{x})$ no elemento $\mathbf{x}$ de $[\mathbf{A}]$.

Se as funções $f_y(\mathbf{x})$ *são uniformemente convergentes em* $\mathbf{a}$ $(\mathbf{y} \to \mathbf{b})$, *temos*

$$\lim_{y \to b,\ y' \to b} \overline{\lambda_y(\mathbf{a})\ \lambda_{y'}(\mathbf{a})} = 0 \ , \quad \lim_{y \to b} \overline{\lambda_y(\mathbf{a})\ \lambda(\mathbf{a})} = 0 \, .$$

Na verdade, da condição de convergência uniforme em $\mathbf{a}$,

$$\underset{\overline{\mathbf{x}\mathbf{a}} < \varepsilon,\ \overline{\mathbf{y}\mathbf{b}} < \varepsilon,\ \overline{\mathbf{y}'\mathbf{b}} < \varepsilon,}{\overline{f_y(\mathbf{x})\ f_{y'}(\mathbf{x})} < \delta}$$

resulta

$$\underset{\overline{\mathbf{y}\mathbf{b}} < \varepsilon,\ \overline{\mathbf{y}'\mathbf{b}} < \varepsilon,}{\overline{\lambda_y(\mathbf{a})\ \lambda_{y'}(\mathbf{a})} \lesseqgtr \delta}$$

e da condição

$$\underset{\overline{\mathbf{x}\mathbf{a}} < \varepsilon,\ \overline{\mathbf{y}\mathbf{b}} < \varepsilon,}{\overline{f_y(\mathbf{x})\ f(\mathbf{x})} < \delta}$$

resulta

$$\underset{\overline{\mathbf{y}\mathbf{b}} < \varepsilon\,.}{\overline{\lambda_y(\mathbf{a})\ \lambda(\mathbf{a})} \lesseqgtr \delta}$$

Sejam $\omega_y(\mathbf{X})$ e $\omega(\mathbf{X})$ as oscilações, que supomos finitas, de $f_y(\mathbf{x})$ e de $f(\mathbf{x})$ num subconjunto $\mathbf{X}$ de $\mathbf{A}$.

Se a convergência das funções $f_y(\mathbf{x})$ *é uniforme em* $\mathbf{a}$ $(\mathbf{y} \to \mathbf{b})$ *ao arbitrário* $\delta > 0$ *opõe-se um* $\varepsilon > 0$ *tal que seja*

$$(2) \qquad \left| \omega_y(\mathbf{X}) - \omega(\mathbf{X}) \right| < \delta$$

sempre que $\overline{\mathbf{X}\mathbf{a}} < \varepsilon$ *e* $\overline{\mathbf{y}\mathbf{b}} < \varepsilon$.

Com efeito, a cada $\frac{\delta}{2} > 0$ opõe-se um $\varepsilon > 0$ tal que

$$\overline{f_y(\mathbf{x})\ f(\mathbf{x})} < \frac{\delta}{2}$$

logo que seja $\overline{\mathbf{x}\mathbf{a}} < \varepsilon$, $\overline{\mathbf{y}\mathbf{b}} < \varepsilon$. Verifica-se, pois, a condição (2) (podendo figurar $=$ em vez de $<$) sempre que se tenha $\overline{\mathbf{X}\mathbf{a}} < \varepsilon$, $\overline{\mathbf{y}\mathbf{b}} < \varepsilon$ [*p.* 296, (23)].

Se a convergência das funções $f_y(\mathbf{x})$ *é uniforme em* $\mathbf{a}$ $(\mathbf{y} \to \mathbf{b})$, *ao arbitrário* $\delta > 0$ *opõe-se um* $\varepsilon > 0$ *tal que seja*

$$\left| \omega_y(\mathbf{X}) - \omega_{y'}(\mathbf{X}) \right| < \delta$$

sempre que $\overline{\mathbf{X}\,\mathbf{a}} < \varepsilon$, $\overline{\mathbf{y}\,\mathbf{b}} < \varepsilon$, $\overline{\mathbf{y}'\mathbf{b}} < \varepsilon$.

Resulta da proposição precedente.

Se a convergência das funções $f_y(\mathbf{x})$ *é uniforme em* $\mathbf{a}$ $(\mathbf{y} \to \mathbf{b})$ *as funções* $\Omega_y(\mathbf{x})$ *convergem uniformemente para* $\Omega(\mathbf{a})$ *em* $\mathbf{a}$ $(\mathbf{y} \to \mathbf{b})$ *(continuamos a supor que estas oscilações são finitas).*

Partamos da condição expressa na penúltima proposição. Tomemos um elemento $\mathbf{x}$ de $[\mathbf{A}]$ tal que $\overline{\mathbf{x}\,\mathbf{a}} < \varepsilon$. Para qualquer vizinhança $\mathbf{U}$ de $\mathbf{x}$ que faça $\overline{\mathbf{U}\,\mathbf{a}} < \varepsilon$ verifica-se a condição

$$\left| \omega_y(\mathbf{U}) - \omega(\mathbf{U}) \right| < \delta.$$

Quando $\mathbf{U}$ tende para $\mathbf{x}$ esta desigualdade transforma-se na seguinte [*p*. 295, *l*. 17]:

$$\left| \Omega_y(\mathbf{x}) - \Omega(\mathbf{x}) \right| \leqq \delta \atop \overline{\mathbf{x}\,\mathbf{a}} < \varepsilon, \ \overline{\mathbf{y}\,\mathbf{b}} < \varepsilon.$$

Esta condição exprime que as funções $\Omega_y(\mathbf{x})$ são uniformemente convergentes em $\mathbf{a}$ $(\mathbf{y} \to \mathbf{b})$.

Se a convergência das funções $f_y(\mathbf{x})$ *é uniforme em* $\mathbf{a}$ $(\mathbf{y} \to \mathbf{b})$, *temos*

$$\lim_{\mathbf{y} \to \mathbf{b}} \Omega_y(\mathbf{a}) = \Omega(\mathbf{a}),$$

isto é, as funções $\Omega_y(\mathbf{x})$ *convergem simplesmente em* $\mathbf{a}$ $(\mathbf{y} \to \mathbf{b})$ *para* $\Omega(\mathbf{a})$.

Na verdade, vimos que as funções $\Omega_y(\mathbf{x})$ convergem uniformemente em $\mathbf{a}$ para $\Omega(\mathbf{a})$, e portanto dá-se a simples convergência nesse elemento.

Mais uma vez se verifica que, se as funções $f_y(\mathbf{x})$ são contínuas em $\mathbf{a}$ e se a convergência neste elemento é uniforme, o limite é uma função contínua em $\mathbf{a}$.

Seja $\varphi(\mathbf{u})$ *uma função definida e uniformemente contínua no conjunto dos elementos das funções* $f_y(\mathbf{x})$. *Se estas funções são uniformemente convergentes em* $\mathbf{a}$ $(\mathbf{y} \to \mathbf{b})$, *o mesmo sucede às funções* $\varphi(f_y(\mathbf{x}))$.

Efectivamente, das condições

$$\lim_{\overline{\mathbf{u}\mathbf{u}'} \to 0} \overline{\varphi(\mathbf{u})\ \varphi(\mathbf{u}')} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a},\ \mathbf{y} \to \mathbf{b},\ \mathbf{y}' \to \mathbf{b}} \overline{f_y(\mathbf{x})\ f_{y'}(\mathbf{x})} = 0$$

resulta

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a},\ \mathbf{y} \to \mathbf{b},\ \mathbf{y}' \to \mathbf{b}.} \overline{\varphi(f_y(\mathbf{x}))\ \varphi(f_{y'}(\mathbf{x}))} = 0 \quad .$$

Se n famílias de funções

$$(3) \qquad f_y(\mathbf{x}),\ g_y(\mathbf{x}), \ldots$$

definidas num mesmo conjunto $\mathbf{A}$, *com* $\mathbf{y}$ *qualquer em* $\mathbf{B}$, *são uniformemente convergentes em* $\mathbf{a}$ $(\mathbf{y} \to \mathbf{b})$, *o mesmo sucede à função composta*

$$(4) \qquad \psi_y(\mathbf{x}) \mid (f_y(\mathbf{x}),\ g_y(\mathbf{x}), \ldots),$$

e recìprocamente.

Esta proposição resulta imediatamente das relações seguintes:

$$\overline{f_y(\mathbf{x})\ f_{y'}(\mathbf{x})},\ \overline{g_y(\mathbf{x})\ g_{y'}(\mathbf{x})}, \ldots \leqq \overline{\psi_y(\mathbf{x})\ \psi_{y'}(\mathbf{x})}$$

e

$$\overline{\psi_y(\mathbf{x})\ \psi_{y'}(\mathbf{x})} \leqq \overline{f_y(\mathbf{x})\ f_{y'}(\mathbf{x})} + \overline{g_y(\mathbf{x})\ g_{y'}(\mathbf{x})} + \ldots$$

Combinando esta proposição com a precedente, vem:

Seja $\varphi(\mathbf{u})$ *uma função definida e uniformemente contínua no conjunto dos elementos das funções* (4). *Se as famílias de funções* (3) *são uniformemente convergentes em* $\mathbf{a}$ $(\mathbf{y} \to \mathbf{b})$, *o mesmo sucede às funções*

$$\varphi(f_y(\mathbf{x}),\ g_y(\mathbf{x}), \ldots).$$

Dizemos que as funções $f_y(\mathbf{x})$ são uniformemente convergentes num subconjunto de $[\mathbf{A}]$ ao tender $\mathbf{y}$ para $\mathbf{b}$, quando a convergência uniforme se verifica em cada elemento desse subconjunto $(\mathbf{y} \to \mathbf{b})$.

Para que as funções $f_y(\mathbf{x})$ *sejam uniformemente convergentes em* $\mathbf{A}$ $(\mathbf{y} \to \mathbf{b})$ *é suficiente que se tenha*

$$(5) \qquad \lim_{\mathbf{y} \to \mathbf{b},\ \mathbf{y}' \to \mathbf{b}} \overline{f_y(\mathbf{x})\ f_{y'}(\mathbf{x})} = 0$$

independentemente de $\mathbf{x}$ *em* $\mathbf{A}$.

Porque, se $\mathbf{a}$ é um elemento de $[\mathbf{A}]$, desta condição deduz-se, em particular,

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a},\ \mathbf{y} \to \mathbf{b},\ \mathbf{y}' \to \mathbf{b}.} \overline{f_y(\mathbf{x})\ f_{y'}(\mathbf{x})} = 0$$

Logo:

Para que as funções $f_y(\mathbf{x})$ *sejam uniformemente convergentes em* $[\mathbf{A}]$ $(\mathbf{y} \to \mathbf{b})$ *é suficiente que a um arbitrário* $\delta > 0$ *se oponha um* $\varepsilon > 0$ *tal que seja*

$$\overline{f_y(\mathbf{x})\ f_{y'}(\mathbf{x})} < \delta.$$

sempre que $\overline{\mathbf{y}\,\mathbf{b}} < \varepsilon$, $\overline{\mathbf{y}'\mathbf{b}} < \varepsilon$.

Se $\mathbf{A}$ *é limitado, para que as funções* $f_y(\mathbf{x})$ *sejam uniformemente convergentes em* $[\mathbf{A}]$ $(\mathbf{y} \to \mathbf{b})$ *é necessário e suficiente que se verifique o limite* (5) *independentemente de* $\mathbf{x}$ *em* $\mathbf{A}$.

A condição é necessária porque, se a convergência uniforme se verifica em cada elemento de $[\mathbf{A}]$, a distância $\overline{f_y(\mathbf{x})\ f_{y'}(\mathbf{x})}$ é, por definição de convergência uniforme, uma função contínua (e portanto nula) em todos os elementos $(\mathbf{x}, \mathbf{b}, \mathbf{b})$, ou seja no conjunto composto $\big([\mathbf{A}], \mathbf{b}, \mathbf{b}\big)$. Como este conjunto é limitado e fechado, segue-se que a um arbitrário $\delta > 0$ opõe-se um $\varepsilon > 0$ tal que

$$\overline{f_y(\mathbf{x})\ f_{y'}(\mathbf{x})} < \delta$$

sempre que $\overline{\mathbf{y}\,\mathbf{b}} < \varepsilon$, $\overline{\mathbf{y}'\mathbf{b}} < \varepsilon$, [*p*. 313, *l*. 13].

Verifica-se, pois, o limite (5) independentemente de $\mathbf{x}$ em $\mathbf{A}$.

Já dissemos que a condição é suficiente.

Designemos por $\mathbf{C}(\mathbf{y})$ o conjunto dos elementos duplos $\big(\mathbf{x}, f_y(\mathbf{x})\big)$, com $\mathbf{y}$ constante e $\mathbf{x}$ variável em $\mathbf{A}$, e por $\mathbf{C}$ o conjunto dos elementos $\big(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})\big)$.

Se as funções $f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$ *são uniformemente convergentes em* $[\mathbf{A}]$ $(\mathbf{y}\rightarrow\mathbf{b})$, temos

$$\lim_{\mathbf{y}\rightarrow\mathbf{b}.} \mathbf{C}(\mathbf{y}) \parallel \mathbf{C}$$

Para a demonstração suponhamos, primeiro, que $\mathbf{A}$ é limitado. A cada $\delta>0$ corresponde então um $\varepsilon>0$ tal que seja

$$\overline{f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})\ f(\mathbf{x})}<\delta$$

sempre que $\overline{\mathbf{y}\,\mathbf{b}}<\varepsilon$ independentemente de $\mathbf{x}$ em $\mathbf{A}$. Logo, se $\mathbf{y}$ satisfaz a esta desigualdade, a cada elemento $(\mathbf{x}, f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}))$ de $\mathbf{C}(\mathbf{y})$ corresponde o elemento $(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))$ de $\mathbf{C}$ a uma distância do primeiro inferior a δ, e inversamente. Temos pois

$$\overline{\mathbf{C}(\mathbf{y})\ \mathbf{C}}\leqq\delta$$

para $\overline{\mathbf{y}\,\mathbf{b}}<\varepsilon$, ou seja

$$\lim_{\mathbf{y}\rightarrow\mathbf{b}.} \mathbf{C}(\mathbf{y}) \parallel \mathbf{C}.$$

Seja agora $\mathbf{A}$ ilimitado. Temos em vista demonstrar que, dada uma sucessão

$$\mathbf{y}_1,\ \mathbf{y}_2, \ldots,\ \mathbf{y}_i, \ldots$$

de elementos de $\mathbf{B}$ que tenda para $\mathbf{b}$, os correspondentes conjuntos

$$\mathbf{C}(\mathbf{y}_1),\ \mathbf{C}(\mathbf{y}_2), \ldots,\ \mathbf{C}(\mathbf{y}_i), \ldots \tag{6}$$

tendem para $\mathbf{C}$. Comecemos por decompor $\mathbf{A}$ numa infinidade numerada de conjuntos limitados que divirjam para infinito, recorrendo para isso a uma sucessão de esferóides concêntricos cujos raios cresçam para infinito. A esta divisão de $\mathbf{A}$ corresponde uma divisão de cada conjunto $\mathbf{C}(\mathbf{y}_i)$ em partes

$$\mathbf{C}_1(\mathbf{y}_i),\ \mathbf{C}_2(\mathbf{y}_i), \ldots,\ \mathbf{C}_j(\mathbf{y}_i), \ldots$$

e de $\mathbf{C}$ também em partes

$$\mathbf{C}_1,\ \mathbf{C}_2, \ldots,\ \mathbf{C}_j, \ldots$$

A sucessão (6) decompõe-se assim numa infinidade numerada de sucessões

$$\mathbf{C}_j(\mathbf{y}_1),\ \mathbf{C}_j(\mathbf{y}_2), \ldots,\ \mathbf{C}_j(\mathbf{y}_i), \ldots$$
$$(j=1,2,\ldots).$$

Mas, pelo que já demonstrámos, vem

$$\lim_{i\to\infty} \mathbf{C}_j(\mathbf{y}_i) \parallel \mathbf{C}_j \quad (j=1,2,\ldots)$$

Logo também temos [*p.* 136, *l.* 27]

$$\lim \mathbf{C}(\mathbf{y}_i) \parallel \mathbf{C}.$$

Dada a convergência uniforme, se as funções $f_y(\mathbf{x})$ representam curvas ou superfícies, podemos dizer que estas são funções contínuas do parâmetro $\mathbf{y}$ no elemento $\mathbf{b}$.

Obs. — Notemos que, se a convergência uniforme das funções $f_y(\mathbf{x})$ é tal que

$$\overline{f_y(\mathbf{x})\ f(\mathbf{x})} < \delta$$

com $\overline{\mathbf{y}\,\mathbf{b}} < \varepsilon$ independentemente de $\mathbf{x}$ em $\mathbf{A}$, vem

$$\lim \overline{\mathbf{C}(\mathbf{y}_i)\ \mathbf{C}} = 0,$$

e portanto

$$\lim_{\mathbf{y}\to\mathbf{b}} \overline{\mathbf{C}(\mathbf{y})\ \mathbf{C}} = 0.$$

Ainda no mesmo caso temos

$$\lim_{\mathbf{y}\to\mathbf{b}} \overline{f_y(\mathbf{A})\ f(\mathbf{A})} = 0,$$

condição esta que resulta do limite precedente [*p.* 64, *l.* 7].

Se

$$\lim_{\mathbf{y}\to\mathbf{b}} \overline{\mathbf{C}(\mathbf{y})\ \mathbf{C}} = 0$$

e se $f(\mathbf{x})$ *é contínua num elemento* $\mathbf{a}$ *de* $[\mathbf{A}]$, *a convergência das funções* $f_y(\mathbf{x})$ $(\mathbf{y}\to\mathbf{b})$ *é uniforme em* $\mathbf{a}$.

Consideremos uma sucessão

$$(7) \qquad \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_i, \ldots$$

de elementos de **A** que tenda para **a**, e uma sucessão

$$(8) \qquad \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_i, \ldots$$

de elementos de **B** que tenda para **b**. Ao elemento $(\mathbf{x}_i, f_{\mathbf{y}_i}(\mathbf{x}_i))$ de $\mathbf{C}(\mathbf{y}_i)$ corresponde um elemento $(\mathbf{x}'_i, f(\mathbf{x}'_i))$ de **C** cuja distância ao primeiro é inferior a

$$\overline{\mathbf{C}(\mathbf{y}_i)\ \mathbf{C}} + \frac{1}{i}.$$

Dando a i os valores $1, 2, \ldots$, como é

$$lim\ \overline{\mathbf{C}(\mathbf{y}_i)\ \mathbf{C}} = 0,$$

temos também

$$lim\ \overline{(\mathbf{x}_i,\ f_{\mathbf{y}_i}(\mathbf{x}_i))\ (\mathbf{x}'_i,\ f(\mathbf{x}'_i))} = 0,$$

e portanto

$$lim\ \overline{\mathbf{x}_i\,\mathbf{x}'_i} = 0 \quad \text{e} \quad lim\ \overline{f_{\mathbf{y}_i}(\mathbf{x}_i)\ f(\mathbf{x}'_i)} = 0.$$

Mas

$$lim\ \overline{\mathbf{x}'_i\,\mathbf{a}} \lesseqgtr lim\,(\overline{\mathbf{x}'_i\,\mathbf{x}_i} + \overline{\mathbf{x}_i\,\mathbf{a}}) = 0,$$

e, por continuidade de $f(\mathbf{x})$ em **a**,

$$lim\ \overline{f(\mathbf{x}_i)\ f(\mathbf{x}'_i)} = 0.$$

Logo

$$lim\ \overline{f_{\mathbf{y}_i}(\mathbf{x}_i)\ f(\mathbf{x}_i)} \lesseqgtr lim\ \overline{f_{\mathbf{y}_i}(\mathbf{x}_i)\ f(\mathbf{x}'_i)} + lim\ \overline{f(\mathbf{x}_i)\ f(\mathbf{x}'_i)} = 0$$

Como as sucessões (7) e (8) são arbitrárias, temos

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a},\ \mathbf{y}\to\mathbf{b},} \overline{f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})\ f(\mathbf{x})} = 0$$

e as funções $f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$ são uniformemente convergentes em **a** $(\mathbf{y}\to\mathbf{b})$.

CASO DE UMA SUCESSÃO DE FUNÇÕES. — A definição de funções $f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$ uniformemente convergentes num elemento $\mathbf{a}$ $(\mathbf{y} \to \mathbf{b})$ aplica-se ao caso particular de uma sucessão de funções

$$(9) \qquad f_1(\mathbf{x}),\ f_2(\mathbf{x}), \ldots,\ f_i(\mathbf{x}), \ldots$$

Entendemos que estas funções são definidas num mesmo conjunto $\mathbf{A}$, e que os conjuntos $f_1(\mathbf{A})$, $f_2(\mathbf{A}), \ldots$ pertencem a um mesmo espaçóide. Dizemos que a sucessão (9) é uniformemente convergente num elemento $\mathbf{a}$ de $[\mathbf{A}]$ quando as funções $f_i(\mathbf{x})$ são uniformemente convergentes em $\mathbf{a}$ $\left(i \to \infty, \text{ou } \frac{1}{i} \to 0\right)$. Temos, pois, a seguinte condição de convergência uniforme da sucessão (9) em $\mathbf{a}$:

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a},\ i \to \infty,\ i' \to \infty.} \overline{f_i(\mathbf{x})\ f_{i'}(\mathbf{x})} = 0$$

Em particular, se $\mathbf{a}$ é elemento de $\mathbf{A}$, vem

$$\lim_{i \to \infty,\ i' \to \infty.} \overline{f_i(\mathbf{a})\ f_{i'}(\mathbf{a})} = 0$$

Logo, da convergência uniforme da sucessão (9) em $\mathbf{a}$ resulta a simples convergência neste elemento.

Para que a sucessão (9) *seja uniformemente convergente em* $\mathbf{a}$ *é necessário e suficiente que ao arbitrário* $\delta > 0$ *corresponda um* $\varepsilon > 0$ *e uma ordem* i_1 *a partir da qual seja*

$$\overline{f_i(\mathbf{x})\ f_{i'}(\mathbf{x})} < \delta$$

sempre que $\overline{\mathbf{x}\,\mathbf{a}} < \varepsilon$.

Se existe o limite simples $f(\mathbf{x})$ *da sucessão* (9) *em* $\mathbf{A}$, *é condição necessária e suficiente de convergência uniforme em* $\mathbf{a}$ *que seja*

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a},\ i \to \infty.} \overline{f_i(\mathbf{x})\ f(\mathbf{x})} = 0$$

Suponhamos que existe o limite simples da sucessão (9) *em* $\mathbf{A}$. *Se a convergência é uniforme num elemento* $\mathbf{a}$ *de* $[\mathbf{A}]$, *e se os* *termos são funções contínuas em* **a**, *a função limite é contínua neste elemento*

Para que a sucessão (9) *seja uniformemente convergente em* **a** *é necessário que*

$$lim\,\overline{\lambda_i(\mathbf{a})\ \lambda_{i'}(\mathbf{a})} = 0,$$

e, no caso de convergência simples em **A**,

$$lim\,\overline{\lambda_i(\mathbf{a})\ \lambda(\mathbf{a})} = 0.$$

Se a convergência da sucessão (9) *em* **a** *é uniforme, a sucessão de termo geral* $\Omega_i(\mathbf{x})$ *converge uniformemente para* $\Omega(\mathbf{a})$ *em* **a**.
Supomos que estas oscilações são finitas.

Para que a sucessão (9) *seja uniformemente convergente em* [**A**] *é suficiente que se tenha*

$$lim\,\overline{f_i(\mathbf{x})\ f_{i'}(\mathbf{x})} = 0$$

independentemente de **x** *em* **A**. *Quando* **A** *é limitado, esta condição também é necessária.*

Se n sucessões de funções, de termos gerais

$$f_i(\mathbf{x}),\ g_i(\mathbf{x}), \ldots, \tag{10}$$

definidas num mesmo conjunto **A**, *são uniformemente convergentes em* **a**, *o mesmo sucede à sucessão de termo geral*

$$\big(f_i(\mathbf{x}),\ g_i(\mathbf{x}), \ldots\big) \tag{11}$$

e recìprocamente

Seja $\varphi(\mathbf{u})$ *uma função definida e uniformemente contínua no conjunto dos elementos das funções* (11) $(i = 1, 2, \ldots)$. *Se as n sucessões de termos gerais* (10) *são uniformemente convergentes em* **a**, *o mesmo acontece à sucessão de termo geral*

$$\varphi\big(f_i(\mathbf{x}),\ g_i(\mathbf{x}), \ldots\big). \tag{12}$$

Se os limites das n sucessões são

$$f(\mathbf{x}),\ g(\mathbf{x}),\ldots$$

e se $\varphi(\mathbf{u})$ *também é definida nos elementos da forma*

$$\big(f(\mathbf{x}),\ g(\mathbf{x}),\ldots\big),$$

a sucessão de termo geral (12) *tende uniformemente para*

$$\varphi\big(f(\mathbf{x}),\ g(\mathbf{x}),\ldots\big).$$

Designemos por $\mathbf{C}_i$ o conjunto dos elementos duplos $\big(\mathbf{x},\ f_i(\mathbf{x})\big)$, e por $\mathbf{C}$ o conjunto dos elementos $\big(\mathbf{x},\ f(\mathbf{x})\big)$ para os diversos elementos $\mathbf{x}$ de $\mathbf{A}$.

Se a sucessão (9) *e uniformemente convergente em* $[\mathbf{A}]$, *temos*

$$lim\ \mathbf{C}_i \parallel \mathbf{C}.$$

Se a convergência uniforme satisfaz à condição

$$lim\ \overline{f_i(\mathbf{x})\ f(\mathbf{x})} = 0$$

independentemente de $\mathbf{x}$ *em* $\mathbf{A}$, *vem*

$$lim\ \overline{\mathbf{C}_i\mathbf{C}} = 0 \quad \text{e} \quad lim\ \overline{f_i(\mathbf{A})\ f(\mathbf{A})} = 0.$$

Se
$$lim\ \overline{\mathbf{C}_i\mathbf{C}} = 0$$

e se $f(\mathbf{x})$ *é contínua num elemento* $\mathbf{a}$ *de* $[\mathbf{A}]$, *a convergência da sucessão é uniforme em* $\mathbf{a}$.

94. Convergência perfeita. — Consideremos um conjunto limitado $\mathbf{D}$ de elementos duplos $(\mathbf{x},\mathbf{y})$; sejam $\mathbf{A}'$ e $\mathbf{B}$ a primeira e a segunda projecções deste conjunto. A cada $\mathbf{y}$ de $\mathbf{B}$ corresponde o conjunto $\mathbf{A}_\mathbf{y}$ dos elementos $\mathbf{x}$ de $\mathbf{A}'$ tais que $(\mathbf{x},\mathbf{y})$ são elementos de $\mathbf{D}$. O conjunto $\mathbf{A}_\mathbf{y}$ é uma função de $\mathbf{y}$ definida em $\mathbf{B}$, que supomos contínua num elemento limite $\mathbf{b}$ de $\mathbf{B}$. O limite da função $\mathbf{A}_\mathbf{y}$ em $\mathbf{b}$ consta de conjuntos juxtapostos entre si [*p.* 302, *n.º* 90]. Seja $\mathbf{A}$ o que é totalmente fechado. É claro que $\mathbf{A} \mid< [\mathbf{A}']$.

Dada uma sucessão de elementos de $\mathbf{B}$ que tenda para $\mathbf{b}$

(1) $$\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_i, \dots,$$

a correspondente sucessão

(2) $$\mathbf{A}_{\mathbf{y}_1}, \mathbf{A}_{\mathbf{y}_2}, \dots, \mathbf{A}_{\mathbf{y}_i}, \dots$$

tende para $\mathbf{A}$. Verifica-se que um elemento qualquer $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, com $\mathbf{a}$ em $\mathbf{A}$, pertence a $[\mathbf{D}]$, porque, se (1) é uma sucessão de elementos de $\mathbf{B}$ que tenda para $\mathbf{b}$, a correspondente sucessão (2) tende para $\mathbf{A}$, e por isso o elemento $\mathbf{a}$ de $\mathbf{A}$ é limite duma sucessão $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2, \dots$ de elementos extraídos dos termos correspondentes da (2), e o elemento $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ é limite da sucessão $(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1), \dots, (\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i), \dots$ de elementos de $\mathbf{D}$.

Consideremos uma função $F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ definida em $\mathbf{D}$. Ponhamos $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mid f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$ para chamar a atenção de que a cada $\mathbf{y}$ de $\mathbf{B}$ corresponde uma função de $\mathbf{x}$ definida em $\mathbf{A}_{\mathbf{y}}$. Dizemos que as funções $f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$ são *perfeitamente convergentes* num elemento $\mathbf{a}$ de $\mathbf{A}$ ao tender $\mathbf{y}$ para $\mathbf{b}$ quando a função $F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ é contínua no elemento $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. O conjunto limite $\lambda(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ de $F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ em $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ (constituído por elementos juxtapostos entre si) será chamado *limite perfeito* das funções $f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$ no elemento $\mathbf{a}$ $(\mathbf{y} \to \mathbf{b})$. Quando o elemento $\mathbf{a}$ pertence a cada um dos conjuntos $\mathbf{A}_{\mathbf{y}}$, da convergência perfeita resulta a simples convergência no mesmo elemento; o limite perfeito em $\mathbf{a}$ coincide então com o limite simples.

É condição necessária e suficiente de convergência perfeita das funções $f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$ no elemento $\mathbf{a}$ $(\mathbf{y} \to \mathbf{b})$ que seja

$$\lim \overline{f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})\ \lambda(\mathbf{a}, \mathbf{b})} = 0$$

ao tender $\mathbf{y}$ para $\mathbf{b}$, e $\mathbf{x}$ (em $\mathbf{A}_{\mathbf{y}}$) para $\mathbf{a}$.

É condição necessária e suficiente de convergência perfeita das funções $f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$ em $\mathbf{a}$ $(\mathbf{y} \to \mathbf{b})$ que a um arbitrário $\delta > 0$ se oponha um $\varepsilon > 0$ tal que seja

$$\overline{f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})\ \lambda(\mathbf{a}, \mathbf{b})} < \delta$$

sempre que $\overline{\mathbf{y}\mathbf{b}} < \varepsilon$ e $\overline{\mathbf{x}\mathbf{a}} < \varepsilon$ [p. 303, l. 17].

É condição necessária e suficiente de convergência perfeita das funções $f_y(\mathbf{x})$ *em* $\mathbf{a}$ $(\mathbf{y}\to\mathbf{b})$ *que seja*

$$\lim_{\mathbf{y}\to\mathbf{b},\,\mathbf{y}'\to\mathbf{b},\,\mathbf{x}\to\mathbf{a},\,\mathbf{x}'\to\mathbf{a}.} \overline{f_y(\mathbf{x})\;f_{y'}(\mathbf{x}')} = 0$$

É condição necessária e suficiente de convergência perfeita das funções $f_y(\mathbf{x})$ *em* $\mathbf{a}$ $(\mathbf{y}\to\mathbf{b})$ *que a um* $\delta>0$ *se oponha um* $\varepsilon>0$ *tal que seja*

$$\overline{f_y(\mathbf{x})\;f_{y'}(\mathbf{x}')} < \delta$$

sempre que $\overline{\mathbf{y}\,\mathbf{b}}<\varepsilon$, $\overline{\mathbf{y}'\mathbf{b}}<\varepsilon$, $\overline{\mathbf{x}\,\mathbf{a}}<\varepsilon$, $\overline{\mathbf{x}'\mathbf{a}}<\varepsilon$.

Se $\mathbf{a}$ *é elemento comum aos conjuntos* $\mathbf{A}_y$, *e dada a simples convergência das funções* $f_y(\mathbf{x})$ *em* $\mathbf{a}$ $(\mathbf{y}\to\mathbf{b})$, *é condição necessária e suficiente de convergência perfeita nesse elemento que seja*

$$\lim_{\mathbf{y}\to\mathbf{b},\,\mathbf{x}\to\mathbf{a}.} \overline{f_y(\mathbf{x})\;f_y(\mathbf{a})} = 0$$

A condição é necessária, como resulta da penúltima condição pondo $\mathbf{y}'|\mathbf{y}$ e $\mathbf{x}'|\mathbf{a}$. E é suficiente porque, designando por $\mathbf{c}$ um elemento do limite simples das funções $f_y(\mathbf{x})$ em $\mathbf{a}$ $(\mathbf{y}\to\mathbf{b})$, temos

$$\overline{f_y(\mathbf{x})\;\mathbf{c}} \gtreqless \overline{f_y(\mathbf{x})\;f_y(\mathbf{a})} + \overline{f_y(\mathbf{a})\;\mathbf{c}},$$

donde vem

$$\lim_{\mathbf{y}\to\mathbf{b},\,\mathbf{x}\to\mathbf{a}.} \overline{f_y(\mathbf{x})\;\mathbf{c}} = 0$$

Seja $\mathbf{a}$ *um elemento comum aos diversos lugares* $[\mathbf{A}_y]$. *Designemos em geral por* $\lambda_y(\mathbf{a})$ *o conjunto limite da função* $f_y(\mathbf{x})$ *em* $\mathbf{a}$. *Se as funções* $f_y(\mathbf{x})$ *convergem perfeitamente em* $\mathbf{a}$ *para* $\mathbf{c}$ $(\mathbf{y}\to\mathbf{b})$, *temos*

$$\lim_{\mathbf{y}\to\mathbf{b}.} \lambda_y(\mathbf{a}) \,\|\, \mathbf{c}$$

Com efeito, para cada $\delta>0$ há um $\varepsilon>0$ tal que as desigualdades $\overline{\mathbf{y}\,\mathbf{b}}<\varepsilon$, $\overline{\mathbf{x}\,\mathbf{a}}<\varepsilon$, arrastam a desigualdade

$$\overline{f_y(\mathbf{x})\;\mathbf{c}} < \delta.$$

Desta deduz-se

$$\overline{\lambda_{\mathbf{y}}(\mathbf{a})\,\mathbf{c}} \gtreqless \delta$$

sempre que $\overline{\mathbf{y}\,\mathbf{b}} < \varepsilon$, o que demonstra a proposição.

Dizemos que as funções $f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$ são perfeitamente convergentes num subconjunto de $\mathbf{A}$ $(\mathbf{y} \to \mathbf{b})$ quando a convergência perfeita se verifica em cada elemento desse subconjunto. Neste caso o limite perfeito é uma função de $\mathbf{x}$ definida no mesmo subconjunto.

Quando existe uma parte comum aos conjuntos $\mathbf{A}_{\mathbf{y}}$, esta pertence a $\mathbf{A}$. Da convergência perfeita nessa parte comum resulta a simples. Os limites simples e perfeito coincidem então.

Suponhamos que se dá a convergência perfeita em $\mathbf{A}$; seja $f(\mathbf{x})$ o limite perfeito. Esta função obtém-se por prolongamento contínuo de $F(\mathbf{x},\mathbf{y})$ para o subconjunto $\mathbf{E}$ de $[\mathbf{D}]$ constituído pelos elementos $(\mathbf{x},\mathbf{b})$, com $\mathbf{x}$ em $\mathbf{A}$, que não pertencem a $\mathbf{D}$ [*p.* 305, *l.* 6]. Por conseguinte têm lugar as seguintes proposições, que resultam imediatamente dos teoremas gerais sobre funções contínuas demonstradas no *n.º* 90:

O limite perfeito $f(\mathbf{x})$ das funções $f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$ em $\mathbf{a}$ $(\mathbf{y} \to \mathbf{b})$ é uma função contínua.

Com efeito, $F(\mathbf{x},\mathbf{y})$ é contínua em todos os elementos $(\mathbf{x},\mathbf{b})$ com $\mathbf{x}$ em $\mathbf{A}$, e o mesmo sucede à função definida em $\mathbf{D}+\mathbf{E}$ que resulta de prolongarmos contìnuamente $F(\mathbf{x},\mathbf{y})$ para o conjunto $\mathbf{E}$. Logo $f(\mathbf{x})$ é, em particular, contínua em $\mathbf{A}$.

Para que $f(\mathbf{x})$ seja limite perfeito das funções $f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$ $(\mathbf{y} \to \mathbf{b})$ é necessário e suficiente que se tenha

$$\lim_{\mathbf{y}\to\mathbf{b},\ \overline{\mathbf{x}\mathbf{x}'}\to 0} \overline{f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})\,f(\mathbf{x}')} = 0$$

Para que $f(\mathbf{x})$ seja limite perfeito das funções $f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$ $(\mathbf{y} \to \mathbf{b})$ é necessário e suficiente que a um arbitrário $\delta > 0$ se oponha um $\varepsilon > 0$ tal que se tenha

$$\underset{\overline{\mathbf{y}\mathbf{b}}<\varepsilon,\ \overline{\mathbf{x}\mathbf{x}'}<\varepsilon}{\overline{f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})\,f(\mathbf{x}')}} < \delta$$

Para que as funções $f_y(\mathbf{x})$ sejam perfeitamente convergentes em $\mathbf{A}$ $(\mathbf{y} \to \mathbf{b})$ é necessário e suficiente que se tenha

$$\lim_{\mathbf{y} \to \mathbf{b},\ \mathbf{y}' \to \mathbf{b},\ \overline{\mathbf{x}\mathbf{x}'} \to 0} \overline{f_y(\mathbf{x})\, f_{y'}(\mathbf{x}')} = 0$$

Para que as funções $f_y(\mathbf{x})$ sejam perfeitamente convergentes em $\mathbf{A}$ $(\mathbf{y} \to \mathbf{b})$ é necessário e suficiente que a um arbitrário $\delta > 0$ se oponha um $\varepsilon > 0$ tal que se tenha

$$\overline{f_y(\mathbf{x})\, f_{y'}(\mathbf{x}')} < \delta \qquad \overline{\mathbf{y}\mathbf{b}} < \varepsilon,\ \overline{\mathbf{y}'\mathbf{b}} < \varepsilon,\ \overline{\mathbf{x}\mathbf{x}'} < \varepsilon.$$

Se $f(\mathbf{x})$ é limite perfeito das funções $f_y(\mathbf{x})$ em $\mathbf{A}$ $(\mathbf{y} \to \mathbf{b})$, temos

$$\lim_{\mathbf{y} \to \mathbf{b}} f_y(\mathbf{A}_y) \parallel f(\mathbf{A}).$$

Se $f(\mathbf{x})$ é limite perfeito das funções $f_y(\mathbf{x})$ em $\mathbf{A}$ $(\mathbf{y} \to \mathbf{b})$, ao arbitrário $\delta > 0$ opõe-se um $\varepsilon > 0$ tal que seja

$$\overline{f_y(\mathbf{x})\, f(\mathbf{x}')} < \delta \qquad \overline{\mathbf{y}\mathbf{b}} < \varepsilon,\ \overline{\mathbf{x}\mathbf{x}'} < \varepsilon. \tag{3}$$

Como supomos de princípio que

$$\lim_{\mathbf{y} \to \mathbf{b}} \overline{\mathbf{A}_y \mathbf{A}} = 0,$$

existe um positivo $\varepsilon' < \varepsilon$ tal que seja

$$\overline{\mathbf{A}_y \mathbf{A}} < \varepsilon$$

sempre que $\overline{\mathbf{y}\mathbf{b}} < \varepsilon'$. Fixemos $\mathbf{y}$ que satisfaça a esta desigualdade e consideremos um elemento $f_y(\mathbf{x})$ de $f_y(\mathbf{A}_y)$. Como $\overline{\mathbf{A}_y \mathbf{A}} < \varepsilon$, a este $\mathbf{x}$ corresponde $\mathbf{x}'$ de $\mathbf{A}$ tal que $\overline{\mathbf{x}\mathbf{x}'} < \varepsilon$, verificando-se portanto a desigualdade (3).

Inversamente, a um elemento $f(\mathbf{x}')$ de $f(\mathbf{A})$ corresponde um elemento $f_y(\mathbf{x})$ de $f_y(\mathbf{A}_y)$ a uma distância do primeiro inferior a δ. Temos pois

$$\overline{f_y(\mathbf{A}_y)\, f(\mathbf{A})} \leqq \delta \qquad \overline{\mathbf{y}\mathbf{b}} < \varepsilon'.$$

Se n famílias de funções

$$(4) \qquad f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}),\ g_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}), \cdots,$$

definidas num conjunto $\mathbf{A}_{\mathbf{y}}$ *função de* $\mathbf{y}$ *em* $\mathbf{B}$, *convergem perfeitamente em* $\mathbf{A}$ $(\mathbf{y} \to \mathbf{b})$ *para*

$$(5) \qquad f(\mathbf{x}),\ g(\mathbf{x}), \cdots,$$

as funções compostas

$$(6) \qquad (f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}),\ g_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}), \ldots)$$

convergem perfeitamente em $\mathbf{A}$ *para*

$$(7) \qquad (f(\mathbf{x}'),\ g(\mathbf{x}'), \ldots)$$

e recìprocamente.

Se as funções (4) convergem perfeitamente em $\mathbf{A}$ para as (5) $(\mathbf{y} \to \mathbf{b})$ ao número $\delta > 0$ opõe-se um $\varepsilon > 0$ tal que seja

$$(8) \qquad \overline{f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})\ f(\mathbf{x}')} < \delta\ ,\ \overline{g_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})\ g(\mathbf{x}')} < \delta\ , \ldots$$

sempre que $\overline{\mathbf{y}\,\mathbf{b}} < \varepsilon$, $\overline{\mathbf{x}\,\mathbf{x}'} < \varepsilon$. Resulta que, para estes elementos $\mathbf{y}, \mathbf{x}$ e $\mathbf{x}'$, a distância dos elementos compostos (6) e (7) é inferior a $\sqrt{n}\,\delta$. Logo também as funções (6) convergem perfeitamente em $\mathbf{A}$ para a (7) $(\mathbf{y} \to \mathbf{b})$.

Recìprocamente, se as funções (6) convergem perfeitamente para a (7) em $\mathbf{A}$ $(\mathbf{y} \to \mathbf{b})$, a um $\delta > 0$ opõe-se um $\varepsilon > 0$ de maneira que a distância entre as funções (6) e (7) seja inferior a δ logo que $\overline{\mathbf{y}\,\mathbf{b}} < \varepsilon$, $\overline{\mathbf{x}\,\mathbf{x}'} < \varepsilon$. Verificam-se à fortiori as desigualdades (8) para estes elementos $\mathbf{y}, \mathbf{x}$ e $\mathbf{x}'$, e as funções (4) convergem perfeitamente em $\mathbf{A}$ para as (5) $(\mathbf{y} \to \mathbf{b})$.

Continuemos a considerar um sistema de n famílias de funções (4) definidas em $\mathbf{A}_{\mathbf{y}}$. Designemos por $\mathbf{C}_{\mathbf{y}}$ o conjunto dos elementos da função composta (6) correspondentes aos diversos elementos $\mathbf{x}$ de $\mathbf{A}_{\mathbf{y}}$. Seja (7) uma função composta, da mesma ordem n, definida e contínua em $\mathbf{A}$. Representemos por $\mathbf{C}$ o conjunto dos elementos dessa função.

Se as funções (4) *convergem perfeitamente para as* (5) *em* $\mathbf{A}$ $(\mathbf{y}\to\mathbf{b})$, *temos*

$$\lim_{\mathbf{y}\to\mathbf{b}} \mathbf{C}_{\mathbf{y}} \parallel \mathbf{C}.$$

Com efeito, como as funções (4) convergem perfeitamente para as (5) $(\mathbf{y}\to\mathbf{b})$, as funções compostas (6) convergem perfeitamente para a (7). Logo os conjuntos $\mathbf{C}_{\mathbf{y}}$ tendem para $\mathbf{C}$ $(\mathbf{y}\to\mathbf{b})$ [*p.* 343, *l.* 10].

Representemos por $\mathbf{C}'_{\mathbf{y}}$ o conjunto dos elementos duplos $(\mathbf{x}, f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}))$ correspondentes aos diversos elementos $\mathbf{x}$ de $\mathbf{A}_{\mathbf{y}}$. Seja $f(\mathbf{x})$ uma função contínua no conjunto $\mathbf{A}$. Representemos por $\mathbf{C}'$ o conjunto dos elementos duplos $(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))$.

Para que seja

(9) $$\lim_{\mathbf{y}\to\mathbf{b}} \mathbf{C}'_{\mathbf{y}} \parallel \mathbf{C}'$$

é necessário e suficiente que as funções $f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$ *convirjam perfeitamente para* $f(\mathbf{x})$ *em* $\mathbf{A}$ $(\mathbf{y}\to\mathbf{b})$.

Sendo $f(\mathbf{x})$ contínua no conjunto limitado e fechado $\mathbf{A}$, a um positivo arbitrário $\delta<0$ corresponde um positivo $2\varepsilon<\delta$ tal que

$$\overline{f(\mathbf{x}')\, f(\mathbf{x}'')}<\delta$$

para elementos quaisquer $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ de $\mathbf{A}$ que façam $\overline{\mathbf{x}'\mathbf{x}''}<2\varepsilon$. Suponhamos que se verifica o limite (9). Ao número ε corresponde um $\varepsilon'<\varepsilon$ tal que

(10) $$\overline{\mathbf{C}'_{\mathbf{y}}\mathbf{C}'}<\varepsilon$$

sempre que $\overline{\mathbf{y}\mathbf{b}}<\varepsilon'$. Fixemos $\mathbf{y}$ que satisfaça a esta desigualdade e tomemos elementos arbitrários $\mathbf{x}$ e $\mathbf{x}'$ em $\mathbf{A}_{\mathbf{y}}$ e $\mathbf{A}$ que façam $\overline{\mathbf{x}\,\mathbf{x}'}<\varepsilon'$. Em virtude da desigualdade (10), ao elemento $(\mathbf{x}, f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}))$ de $\mathbf{C}'_{\mathbf{y}}$ corresponde um elemento $(\mathbf{x}'', f(\mathbf{x}''))$ de $\mathbf{C}'$ a uma distância do primeiro inferior a ε. Vem, pois,

(11) $$\overline{\mathbf{x}\,\mathbf{x}''}<\varepsilon \quad \text{e} \quad \overline{f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})\, f(\mathbf{x}'')}<\varepsilon.$$

Da primeira destas desigualdades e de $\overline{\mathbf{x}\,\mathbf{x}'}<\varepsilon'$ vem

$$\overline{\mathbf{x}'\mathbf{x}''}<\varepsilon'+\varepsilon<2\varepsilon,$$

e portanto

$$\overline{f(\mathbf{x}')\;f(\mathbf{x}'')}<\delta.$$

Combinando esta desigualdade com a segunda (11) obtemos

$$\overline{f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})\;f(\mathbf{x}')}<\varepsilon+\delta<2\delta$$

sempre que $\overline{\mathbf{y}\,\mathbf{b}}<\varepsilon'$ e $\overline{\mathbf{x}\,\mathbf{x}'}<\varepsilon'$. As funções $f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$ convergem perfeitamente para $f(\mathbf{x})$ em $\mathbf{A}$ $(\mathbf{y}\to\mathbf{b})$.

Recìprocamente, suponhamos que as funções $f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$ convergem perfeitamente para $f(\mathbf{x})$ em $\mathbf{A}$ $(\mathbf{y}\to\mathbf{b})$.

A função $\mathbf{x}$ converge perfeitamente para $\mathbf{x}$ em $\mathbf{A}$ $(\mathbf{y}\to\mathbf{b})$. Logo o conjunto $\mathbf{C}'_{\mathbf{y}}$ dos elementos $(\mathbf{x}, f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}))$ converge para o conjunto $\mathbf{C}'$ dos elementos $(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))$ $(\mathbf{y}\to\mathbf{b})$ [*p*. 345, *l*. 1].

CASOS PARTICULARES.

1.° — O CONJUNTO $\mathbf{A}_{\mathbf{y}}$ É INDEPENDENTE DE $\mathbf{y}$.

Neste caso temos $\mathbf{A} \mid [\mathbf{A}_{\mathbf{y}}]$. Da convergência perfeita em $\mathbf{A}$ resulta a simples em $\mathbf{A}_{\mathbf{y}}$. Completando:

Se $\mathbf{A}_{\mathbf{y}}$ é constante de $\mathbf{y}$, para que as funções $f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$ convirjam perfeitamente para $f(\mathbf{x})$ (função contínua em $\mathbf{A}$) $(\mathbf{y}\to\mathbf{b})$ é necessário e suficiente que $f(\mathbf{x})$ seja limite uniforme em $\mathbf{A}$ $(\mathbf{y}\to\mathbf{b})$.

Sendo $\mathbf{A}_{\mathbf{y}}$ constante de $\mathbf{y}$, podemos pôr na condição de convergência perfeita, em particular, $\mathbf{x}' \mid \mathbf{x}$, o que dá

$$\overline{f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})\;f(\mathbf{x})}<\delta \tag{12}$$

para elementos quaisquer $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, o primeiro em $\mathbf{A}_{\mathbf{y}}$ e o segundo tal que $\overline{\mathbf{y}\,\mathbf{b}}<\varepsilon$. A convergência é, pois, uniforme em $\mathbf{A}$.

Recìprocamente, dada esta condição de convergência uniforme, e dada a continuidade de $f(\mathbf{x})$ em $\mathbf{A}$, a convergência é perfeita. Na verdade, àquele $\delta<0$ corresponde um $\varepsilon'<\varepsilon$ tal que seja

$$\overline{f(\mathbf{x})\;f(\mathbf{x}')}<\delta \tag{13}$$

para elementos quaisquer $\mathbf{x}$ e $\mathbf{x}'$ de $\mathbf{A}$ (e em particular com $\mathbf{x}$ em $\mathbf{A}_y$) tais que $\overline{\mathbf{x}\mathbf{x}'}<\varepsilon'$. Vem, pois, combinando as desigualdades (12) e (13),

$$\overline{f_y(\mathbf{x})\,f(\mathbf{x}')}<2\,\delta$$
$$\overline{\mathbf{y}\mathbf{b}}<\varepsilon',\ \overline{\mathbf{x}\mathbf{x}'}<\varepsilon'.$$

A convergência das funções $f_y(\mathbf{x})$ para $f(\mathbf{x})$ é perfeita.

Seja $\mathbf{A}_y$ *constante de* $\mathbf{y}$. *Se as funções* $f_y(\mathbf{x})$ *são contínuas em* $[\mathbf{A}_y]$ *e uniformemente convergentes neste conjunto* $(\mathbf{y}\to\mathbf{b})$, *também são perfeitamente convergentes no mesmo conjunto* $(\mathbf{y}\to\mathbf{b})$.

Resulta da proposição precedente. Na verdade, o limite simples é, neste caso, uma função contínua em $\mathbf{A} \mid [\mathbf{A}_y]$ [*p.* 329, *l.* 28].

2.° — VARIÁVEL $\mathbf{y}$ INTEIRA.

Se $\mathbf{B}$ é formado pelos números inteiros positivos, a família $f_y(\mathbf{x})$ constitui uma sucessão

$$(14) \qquad f_1(\mathbf{x}),\ f_2(\mathbf{x}), \ldots,\ f_i(\mathbf{x}), \ldots$$

de funções definidas respectivamente em conjuntos

$$(15) \qquad \mathbf{A}_1,\ \mathbf{A}_2, \ldots,\ \mathbf{A}_i, \ldots$$

que tendem para $\mathbf{A}$ (limite totalmente fechado). Dizemos que a sucessão (14) é perfeitamente convergente num elemento $\mathbf{a}$ de $\mathbf{A}$ quando as funções $f_i(\mathbf{x})$ são perfeitamente convergentes nesse elemento ao tender i para infinito $\left(\text{ou } \frac{1}{i} \text{ para zero}\right)$, isto é, quando, seja qual fôr a sucessão

$$\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2, \ldots,\ \mathbf{x}_i, \ldots$$

que tenda para $\mathbf{a}$ de elementos extraídos dos termos correspondentes da (15), a correspondente sucessão

$$(16) \qquad f(\mathbf{x}_1), f(\mathbf{x}_2), \ldots, f(\mathbf{x}_i), \ldots$$

seja convergente. Os limites das diversas sucessões (16) (juxtapostas entre si) constituem o limite perfeito da sucessão (14) no elemento $\mathbf{a}$.

É condição necessária e suficiente para que **c** *seja elemento do limite perfeito da sucessão* (14) *no elemento* **a** *que ao arbitrário* $\delta > 0$ *se oponha um* $\varepsilon > 0$ *e uma ordem* i_1 *a partir da qual seja*

$$\overline{f_i(\mathbf{x})\,\mathbf{c}} < \delta$$
$$\overline{\mathbf{x}\mathbf{a}} < \varepsilon .$$

É condição necessária e suficiente para que a sucessão (14) *seja perfeitamente convergente no elemento* **a** *que se tenha*

$$\lim \overline{f_i(\mathbf{x})\ f_{i'}(\mathbf{x}')} = 0$$
$$i \to \infty ,\ i' \to \infty ,\ \mathbf{x} \to \mathbf{a} ,\ \mathbf{x}' \to \mathbf{a} .$$

É condição necessária e suficiente de convergência perfeita da sucessão (14) *no elemento* **a** *que a um arbitrário* $\delta > 0$ *se oponha um* $\varepsilon > 0$ *e uma ordem a partir da qual seja*

$$\overline{f_i(\mathbf{x})\ f_{i'}(\mathbf{x}')} < \delta$$
$$\overline{\mathbf{x}\mathbf{a}} < \varepsilon ,\ \overline{\mathbf{x}'\mathbf{a}} < \varepsilon .$$

A sucessão (14) é perfeitamente convergente em **A** quando a convergência perfeita se verifica em cada elemento deste conjunto. O limite perfeito $f(\mathbf{x})$ é uma função definida e *contínua* em **A**.

Para que a sucessão (14) *convirja perfeitamente para* $f(\mathbf{x})$ *em* **A** *é necessário e suficiente que seja*

$$\lim \overline{f_i(\mathbf{x})\ f(\mathbf{x}')} = 0$$
$$i \to \infty ,\ \overline{\mathbf{x}\mathbf{x}'} \to 0 .$$

Para que a sucessão (14) *convirja perfeitamente para* $f(\mathbf{x})$ *em* **A** *é necessário e suficiente que ao arbitrário* $\delta > 0$ *se oponha um* $\varepsilon > 0$ *e uma ordem a partir da qual seja*

$$\overline{f_i(\mathbf{x})\ f(\mathbf{x}')} < \delta$$
$$\overline{\mathbf{x}\mathbf{x}'} < \varepsilon .$$

Para que a sucessão (14) *seja perfeitamente convergente em* **A** *é necessário e suficiente que se tenha*

$$\lim \overline{f_i(\mathbf{x})\ f_{i'}(\mathbf{x}')} = 0$$
$$i \to \infty ,\ i' \to \infty ,\ \overline{\mathbf{x}\mathbf{x}'} \to 0 .$$

Para que a sucessão (14) *seja perfeitamente convergente em* $\mathbf{A}$ *é necessário e suficiente que ao arbitrário* $\delta > 0$ *se oponha um* $\varepsilon > 0$ *e uma ordem a partir da qual seja*

$$\overline{f_i(\mathbf{x})\, f_{i'}(\mathbf{x}')} < \delta$$
$$\overline{\mathbf{x}\mathbf{x}'} < \varepsilon .$$

Se a sucessão (14) *converge perfeitamente para* $f(\mathbf{x})$ *em* $\mathbf{A}$, *temos*

$$lim\, f_i(\mathbf{A}_i) \parallel f(\mathbf{A}) .$$

Se n sucessões de funções

$$(17) \qquad \begin{cases} f_1(\mathbf{x}),\ f_2(\mathbf{x}),\ \ldots \\ g_1(\mathbf{x}),\ g_2(\mathbf{x}),\ \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

convergem perfeitamente em $\mathbf{A}$ *para as funções*

$$(18) \qquad f(\mathbf{x}),\ g(\mathbf{x}),\ \ldots ,$$

a sucessão de termo geral

$$(19) \qquad \big(f_i(\mathbf{x}),\ g_i(\mathbf{x}),\ \ldots\big)$$

converge perfeitamente em $\mathbf{A}$ *para*

$$(20) \qquad \big(f(\mathbf{x}),\ g(\mathbf{x}),\ \ldots\big),$$

e reciprocamente.

Designemos por $\mathbf{C}_i$ o conjunto dos elementos da função composta (19). Seja (20) uma função composta, de ordem n, contínua em $\mathbf{A}$. Designemos por $\mathbf{C}$ o conjunto dos elementos desta função.

Se as n sucessões (17) *convergem perfeitamente para as funções* (18) *em* $\mathbf{A}$, *temos*

$$lim\, \mathbf{C}_i \parallel \mathbf{C} .$$

Representemos por $\mathbf{C}'_i$ o conjunto dos elementos duplos $\big(\mathbf{x}, f_i(\mathbf{x})\big)$. Seja $f(\mathbf{x})$ uma função contínua em $\mathbf{A}$. Designemos por $\mathbf{C}'$ o conjunto dos elementos $\big(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})\big)$.

Para que seja

$$lim\, \mathbf{C}'_i \parallel \mathbf{C}'$$

é necessário e suficiente que a sucessão (14) *convirja perfeitamente para* $f(\mathbf{x})$ *em* $\mathbf{A}$.

3.º — SOBREPOSIÇÃO DOS DOIS PRIMEIROS CASOS.

Quando $\mathbf{A}_y$ é constante de $\mathbf{y}$ e quando esta variável toma os valores $1, 2, \ldots$, obtemos uma sucessão de funções (14) definidas num mesmo conjunto $\mathbf{A}' \mid \mathbf{A}_y$. Da convergência perfeita resulta a simples. O limite perfeito coincide com o limite simples. Mais ainda:

Para que a sucessão convirja perfeitamente para $f(\mathbf{x})$ *(função contínua) em* $\mathbf{A} \mid [\mathbf{A}']$ *é necessário e suficiente que a convergência seja uniforme em* $\mathbf{A}$.

Se as funções $f_i(\mathbf{x})$ *são contínuas em* $\mathbf{A}$ *e se a convergência é uniforme, também se verifica a convergência perfeita da mesma sucessão em* $\mathbf{A}$.

95. Igual continuidade. — Deve-se a ASCOLI a seguinte definição: dada uma sucessão de funções reais

$$f_1(x),\ f_2(x), \ldots,\ f_i(x), \ldots$$

com x variável num intervalo, estas são *igualmente contínuas* num ponto a desse intervalo quando a cada $\delta > 0$ corresponde um $\varepsilon > 0$ tal que seja

$$\left|f_i(x) - f_i(a)\right| < \delta \quad (i = 1, 2, \ldots)$$

sempre que $|x - a| < \varepsilon$. Esta definição, aplicável a funções que estabelecem correspondências entre elementos de espaçóides, pode generalizar-se para o caso de uma família de funções $f_y(\mathbf{x})$, definidas em conjuntos $\mathbf{A}_y$ que constituam uma função contínua de $\mathbf{y}$ num elemento $\mathbf{b}$. Se $\mathbf{A}$ é o limite totalmente fechado de $\mathbf{A}_y$ $(\mathbf{y} \to \mathbf{b})$, dizemos que as funções $f_y(\mathbf{x})$ *tendem a ser igualmente contínuas* num elemento $\mathbf{a}$ de $\mathbf{A}$ $(\mathbf{y} \to \mathbf{b})$ quando temos

$$\underset{\mathbf{y} \to \mathbf{b},\ \mathbf{x} \to \mathbf{a},\ \mathbf{x}' \to \mathbf{a}.}{lim}\ \overline{f_y(\mathbf{x})\ f_y(\mathbf{x}')} = 0$$

Se as funções $f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$ são definidas no elemento $\mathbf{a}$, fàcilmente se reconhece que esta definição pode substituir-se pela que se exprime pelo limite

$$\lim_{\mathbf{y}\to\mathbf{b},\ \mathbf{x}\to\mathbf{a}.} \overline{f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})\ f_{\mathbf{y}}(\mathbf{a})} = 0$$

É claro que as funções $f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$ podem ser descontínuas no elemento $\mathbf{a}$.

As funções $f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$ tendem a ser igualmente contínuas num conjunto $(\mathbf{y}\to\mathbf{b})$ quando a propriedade se verifica em cada um dos seus elementos.

Se $\mathbf{a}$ é elemento comum aos lugares $[\mathbf{A}_{\mathbf{y}}]$, dizemos que as funções $f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$ são igualmente contínuas em $\mathbf{a}$ $(\mathbf{y}\to\mathbf{b})$ quando são contínuas em $\mathbf{a}$ e tendem a ser igualmente contínuas neste elemento.

Se $\mathbf{A}$ *é limitado e se as funções* $f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$ *tendem a ser igualmente contínuas* $(\mathbf{y}\to\mathbf{b})$, *temos*

$$\lim_{\mathbf{y}\to\mathbf{b},\ \overline{\mathbf{x}\mathbf{x}'}\to 0.} \overline{f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})\ f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}')} = 0 \tag{21}$$

Para a demonstração considere-se a distância

$$\overline{f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})\ f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}')}$$

como uma função do elemento composto $(\mathbf{y}, \mathbf{x}, \mathbf{x}')$. Por hipótese esta função é contínua e nula nos elementos da forma $(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{a})$ (com $\mathbf{b}$ constante e $\mathbf{a}$ variável em $\mathbf{A}$), que constituem um conjunto limitado e fechado. Verifica-se, pois, o limite (21) [*p.* 313, *l.* 13].

Se as funções $f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$ *são perfeitamente convergentes em* $\mathbf{a}$ $(\mathbf{y}\to\mathbf{b})$, *as mesmas funções tendem a ser igualmente contínuas nesse elemento* $(\mathbf{y}\to\mathbf{b})$.

Porque da condição

$$\lim_{\mathbf{y}\to\mathbf{b},\ \mathbf{y}'\to\mathbf{b},\ \mathbf{x}\to\mathbf{a},\ \mathbf{x}'\to\mathbf{a}} \overline{f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})\ f_{\mathbf{y}'}(\mathbf{x}')} = 0$$

resulta, em particular, a condição

$$\lim_{\mathbf{y}\to\mathbf{b},\ \mathbf{x}\to\mathbf{a},\ \mathbf{x}'\to\mathbf{a}.} \overline{f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})\ f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}')} = 0$$

Se as funções $f_y(\mathbf{x})$ *são simplesmente convergentes em* $\mathbf{a}$ $(\mathbf{y} \to \mathbf{b})$, *é condição necessária e suficiente de convergência perfeita em* $\mathbf{a}$ *que as funções tendam a ser igualmente contínuas nesse elemento.*

Com efeito, da proposição precedente resulta que a condição é necessária. E é suficiente porque, se $\mathbf{c}$ é elemento do limite simples em $\mathbf{a}$, temos

$$lim\, \overline{f_y(\mathbf{x})\, \mathbf{c}} \leqq lim \left(\overline{f_y(\mathbf{x})\ f_y(\mathbf{a})} + \overline{f_y(\mathbf{a})\, \mathbf{c}} \right) = 0.$$

Resultam as proposições seguintes:

Seja $\mathbf{A}'$ *uma parte comum aos conjuntos* $[\mathbf{A}_y]$. *Se as funções* $f_y(\mathbf{x})$ *são contínuas em* $\mathbf{A}'$, *e se tem lugar a convergência perfeita neste conjunto* $(\mathbf{y} \to \mathbf{b})$, *as mesmas funções são igualmente contínuas em* $\mathbf{A}'$ $(\mathbf{y} \to \mathbf{b})$.

Seja $\mathbf{A}_y$ *independente de* $\mathbf{y}$. *Se as funções* $f_y(\mathbf{x})$ *são contínuas e uniformemente convergentes em* $\mathbf{A} \mid [\mathbf{A}_y]$ $(\mathbf{y} \to \mathbf{b})$, *as mesmas funções são igualmente contínuas em* $\mathbf{A}$ $(\mathbf{y} \to \mathbf{b})$.

Efectivamente, em tal caso a convergência em $\mathbf{A}$ é perfeita [*p.* 346, *l.* 18].

Todas estas definições e teoremas aplicam-se às sucessões de funções. Neste caso, e quando as funções $f_i(\mathbf{x})$ são reais definidas num intervalo fechado, a proposição precedente converte-se num teorema de ARZELA.

III

DETERMINAÇÃO IMPLÍCITA

96. Espaços numéricos. — 1 — Comecemos por enunciar, sumàriamente, algumas definições e propriedades relativas aos *espaços numéricos* simples e compostos. Damos esta designação ao espaçóide dos números reais, ao dos números imaginários, e aos espaçóides que destes resultam pela aplicação sucessiva da operação «*composição de conjuntos*» (espaçóides compostos) [*p.* 351] [1].

2 — Num espaço numérico composto de primeira espécie (espaço ordinário) o *ponto* (elemento) *origem,* ou *ponto nulo,* é o que tem as coordenadas nulas. Num espaço numérico composto de segunda espécie o ponto origem é o que tem as coordenadas nas respectivas origens. Em geral, e por indução, definimos *ponto nulo,* ou *ponto origem,* ou apenas *origem,* num espaço numérico composto de espécie i: é o que tem as coordenadas nas respectivas origens; representamo-lo pela letra o.

3 — Dois pontos dum espaço numérico de primeira espécie são iguais quando as coordenadas correspondentes são iguais. Dois pontos dum espaço numérico de segunda espécie são iguais quando as coordenadas correspondentes são iguais. Em geral, e por indução, definimos igualdade entre dois pontos p e q dum espaço numérico de espécie i: são iguais $(p=q)$ quando se dá a igualdade das coordenadas correspondentes dos mesmos pontos.

Verificam-se as propriedades fundamentais da igualdade.

4 — Considerando primeiro um espaço de primeira espécie, chamamos *soma* de dois dos seus pontos ao ponto cujas coordenadas são as somas das coordenadas correspondentes desses pontos. A *diferença* de dois pontos é o que tem por coordenadas as diferenças das coordenadas dos mesmos pontos. Conhecida a definição de soma e diferença de dois pontos dum espaço de primeira espécie,

---

[1] Num capítulo especial estudaremos certos espaçóides particulares que designaremos por *espaços.* Neles são incluídos os espaçóides numéricos a que nos estamos referindo.

podemos definir da mesma maneira soma e diferença de dois pontos dum espaço de segunda espécie, e assim por diante. Por indução chamamos soma e diferença de dois pontos p e q dum espaço numérico composto de espécie i aos pontos $p+q$ e $p-q$ cujas coordenadas são as somas e as diferenças das coordenadas correspondentes de p e q.

5 — Verificam-se as propriedades fundamentais da soma. Temos também $p=p-p'+p'$, e portanto $p-q=p-p'+p'-q$.

6 — Num espaço de primeira espécie chamamos *módulo* dum ponto à soma dos módulos (valores absolutos) das respectivas coordenadas. Num espaço de segunda espécie definimos da mesma maneira módulo dum ponto. Em geral, e por indução, módulo dum ponto p dum espaço numérico de espécie i é a soma dos módulos das suas coordenadas e será representado por $|p|$.

7 — Verifica-se imediatamente que num espaço de primeira espécie o módulo duma soma ou diferença de pontos não excede a soma dos módulos desses pontos. A mesma propriedade transmite-se para um espaço de segunda espécie, e, em geral, para um espaço de espécie i: se p e q são dois dos seus pontos vem $|p \pm q| \overline{\leq} |p|+|q|$.

8 — *Produto* dum ponto p dum espaço de primeira espécie por um número λ (real se o espaço é real), ou produto de λ por p, é o ponto cujas coordenadas são as de p multiplicadas por λ. A definição aplica-se, em seguida, a um ponto dum espaço de segunda espécie. Em geral, e por indução: o produto dum ponto p dum espaço de espécie i por um número λ (real se o espaço é real), ou produto de λ por p, é o ponto, que representamos por $p\lambda$ ou λp, cujas coordenadas são as de p multiplicadas por λ.

9 — Por indução estabelecem-se fàcilmente as seguintes propriedades:

Para que o produto λp seja nulo é necessário e suficiente que se anule um dos factores.

Verificam-se as igualdades

$$\lambda(p \pm q)=\lambda p \pm \lambda q$$

e

$$|\lambda p|=|\lambda| \cdot |p|.$$

10 — *Dadas duas sucessões de pontos dum mesmo espaço numérico,*

$$p_1, p_2, \ldots, p_i, \ldots$$
$$q_1, q_2, \ldots, q_i, \ldots,$$

para que seja $\lim |p_i - q_i| = 0$ *é necessário e suficiente que* $\lim \overline{p_i q_i} = 0$. Com efeito, a condição $\lim |p_i - q_i| = 0$ exprime que os módulos das diferenças das coordenadas correspondentes de p_i e q_i tendem para zero. Logo, tratando-se dum espaço numérico de primeira espécie, verifica-se logo que a condição $\lim |p_i - q_i| = 0$ é necessária e suficiente para que seja $\lim \overline{p_i q_i} = 0$. Em seguida verifica-se a proposição para um espaço de segunda espécie, e, por indução, estabelece-se para um espaço numérico de qualquer espécie.

Como corolários veem as proposições seguintes:

11 — *Para que a sucessão*

(1) $$p_1, p_2, \ldots, p_i, \ldots$$

seja convergente é necessário e suficiente que $\lim |p_i - p_{i'}| = 0$.

Para que a sucessão (1) *tenda para o limite* p *é necessário e suficiente que* $\lim |p_i - p| = 0$.

Em particular:

Para que a sucessão (1) *tenda para a origem* ($\lim p_i = o$) *é necessário e suficiente que* $\lim |p_i| = 0$.

Se $\lim p_i = p$ *e* $\lim q_i = q$, *temos* $\lim (p_i \pm q_i) = p \pm q$.

Porque

$$\left|(p_i \pm q_i) - (p \pm q)\right| \leqq |p_i - p| + |q_i - q|,$$

donde vem

$$\lim \left|(p_i \pm q_i) - (p \pm q)\right| = 0.$$

Se $\lim p_i = p$, *temos* $\lim \lambda p_i = \lambda p$.

Porque

$$\lim |\lambda p_i - \lambda p| = \lim |\lambda (p_i - p)| = |\lambda| \lim |p_i - p| = 0.$$

12 — *Para que a sucessão* (1) *divirja para infinito é necessário e suficiente que o mesmo aconteça à sucessão dos respectivos módulos.*

Com efeito, a condição $p_i \to \infty$ exprime que a maior das distâncias das coordenadas de p_i às correspondentes origens diverge para infinito, e a condição $|p_i| \to \infty$ exprime que o maior dos módulos das coordenadas de p_i diverge para infinito. Ora, como o enunciado da proposição verifica-se no caso dum espaço de primeira espécie, também se verifica para um espaço de segunda espécie, e, em geral, para um espaço de espécie i.

13 — *É condição necessária e suficiente para que um subconjunto dum espaço numérico seja limitado que o conjunto dos módulos dos seus elementos seja limitado.* Demonstra-se imediatamente por absurdo apoiando-nos na proposição precedente.

14 — Chamemos *proximidade* dum ponto p_0 dum espaço numérico (simples ou composto) definida por um número $\varepsilon > 0$ ao conjunto dos pontos p desse espaço que fazem $|p - p_0| < \varepsilon$.

Em particular, proximidade da origem definida por ε é o conjunto dos pontos p que verificam a condição $|p - o| < \varepsilon$, ou seja $|p| < \varepsilon$.

Podemos dizer que um conjunto é limitado quando pode encerrar-se numa proximidade da origem.

15 — *Cada vizinhança de* p_0 *contém uma proximidade de* p_0; *cada proximidade de* p_0 *contém uma vizinhança deste ponto.* A demonstração obtém-se fàcilmente por absurdo tendo em vista a segunda proposição 11.

Também por absurdo se demonstra que:

Uma proximidade de un elemento composto contém um conjunto composto de proximidades das coordenadas, e inversamente.

16 — Das definições de soma e de limite resulta a de série convergente. Seja

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_i + \cdots \tag{2}$$

uma série de pontos dum espaço numérico. Ponhamos

$$s_i = p_1 + p_2 + \cdots + p_i.$$

Dizemos que a série é convergente e que tem por soma s quando

$$lim\, s_i = s.$$

É condição necessária e suficiente de convergência da série que seja (para $i' > i$)

$$lim\, |s_{i'} - s_i| = lim\, |p_{i+1} + p_{i+2} + \cdots + p_{i'}| = 0.$$

Resulta que, em caso de convergência, é $lim\, |p_i| = 0$.

Quando a série

$$|p_1| + |p_2| + \cdots + |p_i| + \cdots$$

é convergente, o mesmo sucede à série (2).

Com efeito, temos

$$lim\, |p_{i+1} + \cdots + p_{i'}| \lesseqgtr lim\big(|p_{i+1}| + \cdots + |p_{i'}|\big) = 0.$$

Dizemos então que a série (2) é absolutamente convergente.

17 — Sejam $f(\mathrm{x})$ e $g(\mathrm{x})$ funções definidas num mesmo subconjunto dum espaçóide qualquer, mas supomos que os elementos destas funções pertencem a um mesmo espaço numérico, simples ou composto.

Se $f(\mathrm{x})$ e $g(\mathrm{x})$ são limitadas, o mesmo sucede à soma e à diferença destas funções, porque [7]

$$|f(\mathrm{x}) \pm g(\mathrm{x})| \lesseqgtr |f(\mathrm{x})| + |g(\mathrm{x})|,$$

e atendendo à proposição 13.

18 — *Para que a função $f(\mathrm{x})$ seja contínua em x_0 é necessário e suficiente que*

$$\lim_{\mathrm{x} \to \mathrm{x}_0} |f(\mathrm{x}) - f(\mathrm{x}_0)| = 0.$$

Porque esta condição é necessária e suficiente para que seja [11, 2.ª *prop.*]

$$\lim_{\mathrm{x} \to \mathrm{x}_0} f(\mathrm{x}) = f(\mathrm{x}_0).$$

Logo:

É condição necessária e suficiente de continuidade de $f(\mathbf{x})$ *em* $\mathbf{x}_0$ *que, dado* $\delta > 0$, *exista uma vizinhança de* $\mathbf{x}_0$ *onde se verifique a desigualdade*

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)| < \delta.$$

19 — *Se* $f(\mathbf{x})$ *e* $g(\mathbf{x})$ *são contínuas em* $\mathbf{x}_0$, *a soma e diferença* $f(\mathbf{x}) \pm g(\mathbf{x})$ *são contínuas em* $\mathbf{x}_0$.

Se $f(\mathbf{x})$ *é contínua em* $\mathbf{x}_0$, *o produto* $\lambda f(\mathbf{x})$ *também é função contínua em* $\mathbf{x}_0$.

20 — Consideremos uma sucessão de funções

$$f_1(\mathbf{x}),\, f_2(\mathbf{x}),\, \ldots,\, f_i(\mathbf{x}),\, \ldots \tag{3}$$

definidas num subconjunto $\mathbf{A}$ dum espaçóide qualquer. Se os conjuntos $f_1(\mathbf{A}), f_2(\mathbf{A}), \ldots$ pertencem a um mesmo espaço numérico, simples ou composto, as funções (3) constituem uma série

$$f_1(\mathbf{x}) + f_2(\mathbf{x}) + \ldots + f_i(\mathbf{x}) + \ldots \tag{4}$$

Pondo em geral

$$s_i(\mathbf{x}) = f_1(\mathbf{x}) + f_2(\mathbf{x}) + \ldots + f_i(\mathbf{x}), \tag{5}$$

a série é uniformemente convergente em $\mathbf{A}$ quando a sucessão de termo geral (5) é uniformemente convergente nesse conjunto.

21 — Tem lugar o critério de convergência uniforme:

Verifica-se a convergência uniforme da série (4) *em* $\mathbf{A}$ *sempre que os módulos dos seus termos sejam inferiores aos termos correspondentes duma série numérica convergente, independentemente de* $\mathbf{x}$ *em* $\mathbf{A}$.

Com efeito, seja $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_i + \ldots$ a série de números a que se refere o enunciado. Temos

$$\left|s_{i'}(\mathbf{x}) - s_i(\mathbf{x})\right| \leqq \left|f_{i+1}(\mathbf{x})\right| + \ldots + \left|f_{i'}(\mathbf{x})\right| < \varepsilon_{i+1} + \ldots + \varepsilon_{i'}$$

donde resulta

$$\lim \left|s_{i'}(\mathbf{x}) - s_i(\mathbf{x})\right| = 0,$$

e portanto [10]

$$\lim \overline{s_i(\mathbf{x})\ s_{i'}(\mathbf{x})} = 0,$$

independentemente de $\mathbf{x}$ em $\mathbf{A}$. A convergência é, pois, uniforme [*p.* 338, *l.* 11].

22 — *Se* $f_1(\mathbf{x})$ *é limitada, e se o cociente entre os módulos de cada termo da série e o imediatamente anterior se mantém menor que um número* $K < 1$ *para qualquer* $\mathbf{x}$ *em* $\mathbf{A}$, *a série é uniformemente convergente nesse conjunto.*

Com efeito, da desigualdade

$$\frac{|f_i(\mathbf{x})|}{|f_{i-1}(\mathbf{x})|} < K$$

resulta

$$|f_i(\mathbf{x})| < K\,|f_{i-1}(\mathbf{x})|$$
$$|f_{i-1}(\mathbf{x})| < K\,|f_{i-2}(\mathbf{x})|$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$|f_2(\mathbf{x})| < K\,|f_1(\mathbf{x})|,$$

donde se obtém

$$|f_i(\mathbf{x})| < K^{i-1}\,|f_1(\mathbf{x})|.$$

Por hipótese $f_1(\mathbf{x})$ é limitada; logo existe um número positivo M que faz

$$|f_1(\mathbf{x})| < M$$

para qualquer $\mathbf{x}$ em $\mathbf{A}$ [13]. Temos assim

$$|f_i(\mathbf{x})| < M K^{i-1}.$$

Como a série $\sum K^i$ é convergente, e como obtivemos este resultado para qualquer $\mathbf{x}$ em $\mathbf{A}$, segue-se que a série (4) é uniformemente convergente neste conjunto.

23 — *Uma série* (4) *uniformemente convergente de funções contínuas em* $\mathbf{A}$ *tem por soma uma função contínua neste conjunto.*

Com efeito, nestas condições a soma $s_i(\mathbf{x})$ representa uma função contínua em $\mathbf{A}$, e a sucessão que tem este termo geral é uniformemente convergente em $\mathbf{A}$. Logo a função $s(\mathbf{x}) = lim\, s_i(\mathbf{x})$ é contínua em $\mathbf{A}$ [*p.* 337, *l.* 27].

97. Teoremas de existência de funções implícitas. — Consideremos uma função $f(\mathbf{x}, p)$ com a variável $\mathbf{x}$ situada num espaçóide qualquer e a variável p num espaço numérico, simples ou composto. Admitamos que os elementos da função pertencem a este mesmo espaço numérico. Dizemos que a função $f(\mathbf{x}, p)$ satisfaz a respeito de p à condição de LIPSCHITZ num dado conjunto quando é definida neste conjunto e quando existe um número K tal que seja sempre

$$(1) \qquad |f(\mathbf{x},p) - f(\mathbf{x},p')| < \mathrm{K}|p - p'| \qquad (p \neq p').$$

Se n funções $f(\mathbf{x},p)$, $g(\mathbf{x},p)$, ... *satisfazem num conjunto à condição de* LIPSCHITZ *com o coeficiente* K, *a função composta destas satisfaz à mesma condição mas com o coeficiente* $n\mathrm{K}$.

Efectivamente, somando as desigualdades de LIPSCHITZ relativas a essas funções vem

$$|f(\mathbf{x},p) - f(\mathbf{x},p')| + |g(\mathbf{x},p) - g(\mathbf{x},p')| + \dots < n\mathrm{K}|p - p'|,$$

que pode escrever-se [4 e 6]

$$\left|(f(\mathbf{x},p),\, g(\mathbf{x},p), \dots) - (f(\mathbf{x},p'),\, g(\mathbf{x},p'), \dots)\right| < n\mathrm{K}|p - p'|.$$

I — TEOREMA FUNDAMENTAL (método de GOURSAT).

Seja $(\mathbf{x}_0, p_0)$ *uma solução da equação*

$$(2) \qquad p = f(\mathbf{x}, p).$$

Se $f(\mathbf{x},p)$ *é contínua de* $\mathbf{x}$ *no elemento* $(\mathbf{x}_0, p_0)$ *e se numa vizinhança de* $(\mathbf{x}_0, p_0)$ *verifica-se a condição* (1) *de* LIPSCHITZ *com* $\mathrm{K} < 1$, *a equação* (2) *define p como função de* $\mathbf{x}$ *em vizinhanças de* $\mathbf{x}_0$ *e de* p_0*; esta função é contínua em* $\mathbf{x}_0$.

Sejam $\mathbf{X}'$ e P uma vizinhança de $\mathbf{x}_0$ e uma proximidade de p_0 nas quais se verifique a condição (1) de LIPSCHITZ. Comecemos por notar que, por força desta condição, *a função* $f(\mathbf{x}, p)$ *é contínua de p no conjunto* $(\mathbf{X}', P)$, uniformemente a respeito de $\mathbf{x}$. E, como a mesma função é contínua de $\mathbf{x}$ em $(\mathbf{x}_0, p_0)$, *verifica-se a conti-*

nuidade em relação às duas variáveis no elemento (x_0, p_0) pois que [5]

$$f(x, p) - f(x_0, p_0) = f(x, p) - f(x, p_0) + f(x, p_0) - f(x_0, p_0),$$

donde resulta [7]

$$|f(x,p) - f(x_0,p_0)| \leqq |f(x,p) - f(x,p_0)| + |f(x,p_0) - f(x_0,p_0)|$$

e

$$\lim_{x \to x_0, p \to p_0} |f(x, p) - f(x_0, p_0)| = 0.$$

Determinada a proximidade P, demonstremos que é possível fixar uma vizinhança X de x_0 contida em X' de maneira que a igualdade

(3) $$p' = f(x, p)$$

faça corresponder a qualquer elemento (x, p) do conjunto (X, P) um ponto p' que pertença sempre a P. Escrevamos

$$f(x, p) - p_0 = f(x, p) - f(x, p_0) + f(x, p_0) - p_0.$$

Supondo x em X' e p em P, vem

$$|f(x, p) - f(x, p_0)| < K|p - p_0| < K\varepsilon,$$

tendo representado por ε o número que define a proximidade P. Mas por hipótese temos $p_0 = f(x_0, p_0)$, e, por continuidade de $f(x, p)$ em relação a x no elemento (x_0, p_0), existe uma vizinhança X de x_0 onde temos

$$|f(x, p_0) - p_0| < \varepsilon(1 - K).$$

Fixemos X por forma que se contenha em X'. Temos assim, para qualquer elemento (x, p) do conjunto composto (X, P),

$$|f(x, p) - p_0| < \varepsilon K + \varepsilon(1 - K) = \varepsilon.$$

Para estes elementos (x, p) a igualdade (3) dá

$$|p' - p_0| = |f(x, p) - p_0| < \varepsilon,$$

e portanto p' pertence a P.

Dito isto, ponhamos sucessivamente

$$(6) \begin{cases} p_1 = f(x, p_0) & (5) \\ p_2 = f(x, p_1) \\ \dots\dots\dots\dots \\ p_i = f(x, p_{i-1}) & (7) \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Em virtude do que se provou, se considerarmos nestas igualdades só elementos x da vizinhança $\mathbf{X}$, os pontos correspondentes $p_1, p_2, \dots$ pertencem sempre à proximidade P. A lei de recorrência (7) permite, pois, construir uma sucessão de funções (6) todas definidas na vizinhança $\mathbf{X}$ e todas compreendidas na proximidade P.

Vamos provar que *a sucessão de funções* (6) *tende para uma função limite*. Subtraindo à igualdade (7) a imediatamente anterior vem

$$p_i - p_{i-1} = f(x, p_{i-1}) - f(x, p_{i-2}),$$

e, pela condição de LIPSCHITZ (com x em $\mathbf{X}$, e portanto p_i em P),

$$|p_i - p_{i-1}| < K\,|p_{i-1} - p_{i-2}|.$$

Logo, considerando a série

$$(8) \qquad p_0 + (p_1 - p_0) + (p_2 - p_1) + \dots + (p_i - p_{i-1}) + \dots,$$

o cociente dos módulos entre cada termo e o imediatamente anterior (a partir do terceiro) mantém-se menor do que um número $K < 1$ para qualquer x em $\mathbf{X}$. Como os termos são funções limitadas em $\mathbf{X}$ (porque p_i pertence sempre à proximidade P e porque uma diferença de funções limitadas é limitada), a série (8) é uniformemente convergente em $\mathbf{X}$. A soma $\varphi(x)$ desta série é limite uniforme da sucessão (6), pois o termo geral p_i coincide com a soma dos $i+1$ primeiros termos da série. Os termos da sucessão são funções contínuas de x em x_0, pois são funções contínuas de (x, p) em (x_0, p_0) [*p.* 360, *l.* 31] compostas de funções contínuas em x_0. Por conseguinte $\varphi(x)$ *é uma função contínua em* x_0.

A função $\varphi(x)$ *é raíz da equação* (2), porque, fazendo tender i para infinito na igualdade (7), vem, por continuidade de $f(x, p)$ em relação a p [*p.* 360, *l.* 29],

$$\varphi(x) = f(x, \varphi(x)).$$

Para $x \mid x_0$ todas as funções p_i são iguais a p_0; o mesmo sucede à função limite.

Demonstremos que *a solução obtida* $\varphi(x)$ *da equação* (2) *é única* com x em X e p em P, isto é, que a equação faz corresponder a cada elemento x de X um só ponto p de P. Suponhamos que a x de X correspondiam os pontos diferentes p e p' de P. Teríamos

$$p = f(x, p)$$
$$p' = f(x, p'),$$

donde, por subtracção e aplicação da desigualdade de Lipschitz,

$$|p - p'| = |f(x, p) - f(x, p')| < K|p - p'|,$$

resultado este que seria absurdo porque temos $K < 1$.

Dizemos então que a equação (2) define P como função de x na vizinhança X e na proximidade P. Por razões de continuidade, se P_1 é uma vizinhança de p_0 contida em P, existe uma vizinhança X_1 de x_0 contida em X tal que o conjunto $\varphi(X_1)$ pertence a P_1. A equação (2) define pois p como função de x nas vizinhanças X_1 e P_1.

II — *Dada a equação* (2), *se numa vizinhança duma solução* (x_0, p_0) *a função* $f(x, p)$ *é contínua de* x *e se tem lugar a condição de* Lipschitz *com* $K < 1$, *a equação define* p *como função de* x *em vizinhanças de* x_0 *e de* p_0; *esta função é contínua.*

Neste enunciado admitimos, além das hipóteses do teorema precedente que $f(x, p)$ é contínua de x em toda a vizinhança considerada e não só no elemento (x_0, p_0). A condição de Lipschitz

ÍNDICE

CAPÍTULO VIII

CONCEITO DE FUNÇÃO

I

TEOREMAS GERAIS

II

CONVERGÊNCIA

III

DETERMINAÇÃO IMPLÍCITA