

as quais serão sempre as mesmas, ou se tome o final $+$, ou $-$ nos valores de $a + c$, e $a - c$.

203 He facil de vêr, que as raizes achadas não mudaõ, ou se substitua $+ b$, ou $- b$. Agora mostraremos, que cada hum dos tres valores de b que tiverem o final $+$, tambem não dará mais que as mesmas quatro raizes.

Tirando da primeira das tres equações $- 4ac - 2b^2 = p$, $4a^2b + 4bc^2 = q$, $e - a^4 - c^4 + b^4 + 2a^2c^2 - 4ab^2c = r$, o valor de $b^2 = \frac{-p - 4ac}{2}$,

e substituindo-o na segunda elevada ao quadrado, e na terceira, teremos $qq = -8(p + 4ac)(a^2 + c^2)^2$, e $r = -a^4 - c^4 + \frac{pp}{4} + 4pac + 14a^2c^2$; valores que sendo substituidos na reduzida $64b^6 + 32pb^4 + \&c.$ daõ

$$\begin{aligned} 8b^6 + 4pb^4 + 2a^4b^2 + (p + 4ac)(a^2 + c^2)^2 &= 0 \\ + 2c^4b^2 & \\ - 8pacb^2 & \\ - 28a^2c^2b^2 & \end{aligned}$$

Esta equação, pois que he $2b^2 = -p - 4ac$, tem (187) o divisor $2b^2 + p + 4ac$. Fazendo a divisão, e igualando o quociente a nada, para ter os outros dois valores de b^2 , acharemos $4b^4 - 8acb^2 + a^4 + c^4 + 2a^2c^2 = 0$; donde se tira (173) $2b^2 = 2ac \pm (a + c)(a - c)\sqrt{-1}$, ou, multiplicando por 2, $4b^2 = 4ac \pm 2(a + c)(a - c)\sqrt{-1} = [(a + c) \pm (a - c)\sqrt{-1}]^2$, como se pôde

verificar pela multiplicação; e conseguintemente
 $b = \frac{1}{2}(a + c) + \frac{1}{2}(a - c)\sqrt{-1}$, tomando sómente
 o valor positivo, pois que o negativo conduz
 ás mesmas conclusões: logo os tres valores positi-
 vos de b são $b = +\sqrt{\frac{-p - 4ac}{2}}$, $b = \frac{1}{2}(a + c)$
 $+ \frac{1}{2}(a - c)\sqrt{-1}$, e $b = \frac{1}{2}(a + c) - \frac{1}{2}(a - c)$
 $\cdot \sqrt{-1}$.

Representando o segundo por b' , e o terceiro
 por b'' , teremos $a + c = b' + b''$, e $(a - c)\sqrt{-1}$
 $= b' - b''$; e substituindo estes valores nos qua-
 tro de x , acharemos $x = -b - b' - b''$, $x = b$
 $+ b' + b'' - 2b$, $x = b + b' + b'' - 2b''$,
 $x = b + b' + b'' - 2b'$. Aqui se vê, que se mu-
 dardmos, por exemplo, b em b' , será necessario
 mudar ao mesmo tempo b' em b , pois que em cada
 hum dos valores de x entraõ simultaneamente as tres
 raizes b , b' , b'' ; logo esta mudança dá os mesmos
 quatro valores de x , e por consequencia a equação
 do quarto grão não pôde ter mais que quatro raizes.

204 Reparando bem nos valores $x = -b$
 $\pm (a + c)$, e $x = +b \pm (a - c)\sqrt{-1}$, offe-
 recem-se tres casos: ou as expressões $a + c$, e
 $(a - c)\sqrt{-1}$, são ambas reais, ou ambas ima-
 ginarias, ou huma he real, e a outra imaginaria.
 No caso de serem ambas imaginarias, podem re-
 duzir-se sempre á fórma $\sqrt{-m}$, ou $\sqrt{m} \cdot \sqrt{-1}$,
 sendo m huma quantidade real; por quanto he

$$a + c = \sqrt{\left(\frac{q}{4b} - \frac{1}{2}p - b^2\right)}, \text{ e } (a - c)\sqrt{-1}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{-q}{4b} - \frac{1}{2}p - b^2\right)}; \text{ e tendo sempre } b$$

(201) 20 menos hum valor real do qual se pôde fazer uso, he evidente que as mesmas quantidades só poderaõ ser imaginarias, quando for negativa a quantidade que está debaixo do radical actual. Naõ aconteceria assim, se b naõ tivesse algum valor real; porque sendo b imaginario da fórma $\sqrt{-k}$, as quantidades $a + c$ e $(a - c)\sqrt{-1}$ poderaõ ser imaginarias da fórma $\sqrt{\left(-\frac{m}{\sqrt{-k}} - b\right)}$.

205 Isto posto, se $a + c$ e $(a - c)\sqrt{-1}$ forem ambas reais, caso em que tambem os quatro valores de x seraõ reais, os outros dous valores de $4b^2$, a saber $[(a + c) \pm (a - c)\sqrt{-1}]^2$, seraõ reais e positivos.

206 Se pelo contrario as duas quantidades $a + c$, e $(a - c)\sqrt{-1}$ forem ambas imaginarias, ou, que vem a ser o mesmo, se os quatro valores de x forem imaginarios, os outros dous valores de b^2 seraõ reais, mas negativos; porque suppondo $a + c = k\sqrt{-1}$, e $(a - c)\sqrt{-1} = l\sqrt{-1}$ (204), teremos $4b^2 = -(k \pm l)^2$.

207 Finalmente se das mesmas quantidades sómente huma for real, ou se dos quatro valores de x dous forem reais e dous imaginarios, he evidente que os dous valores de $4b^2$ seraõ imaginarios.

208 Logo: 1º Se a reduzida, considerada como equação do terceiro gráo, tiver as suas tres raizes reais e positivas, a equação do quarto gráo terá todas as quatro raizes reais.

2º Se tiver todas reais, e sómente huma positiva, a equação do quarto gráo terá todas as suas quatro imaginarias.

3º Finalmente se tiver sómente huma raiz real , das quatro da equação do quarto gráo duas serão reais , e duas imaginarias.

209 Por quanto , em geral , a fórmula das raizes de huma equação do terceiro gráo não as dá em forma real (197) ; senão quando só huma dellas he real ; concluiremos que nenhuma das raizes do quarto gráo se deduzirá em forma real , senão no caso unico de duas serem reais ; e conseguintemente as fórmulas tanto do terceiro , como do quarto gráo sómente tem applicação nas equações , em que ha duas raizes imaginarias.

210 Exemplo I. *Achar as raizes da equação*

$$x^4 + 3x^2 - 52x + 48 = 0.$$

Temos $p = 3$, $q = -52$, $r = 48$; logo a reduzida será $64b^6 + 96b^4 - 732b^2 - 2704 = 0$, ou fazendo $4b^2 = u$ para simplificar , $u^3 + 6u^2 - 183u - 2704 = 0$, ou fazendo $u = z - 2$, $z^3 - 195z - 2322 = 0$, sem segundo termo.

Vê-se (197) que z não tem mais que hum valor real $z = -\sqrt[3]{(-1161 + \sqrt{1073296})}$

$-\sqrt[3]{(-1161 - \sqrt{1073296})} = \dots\dots\dots$

$-\sqrt[3]{(-1161 + 1036)} - \sqrt[3]{(-1161 - 1036)}$

$= \sqrt[3]{125} + \sqrt[3]{2197} = 5 + 13 = 18$; e como

he $4b^2 = z - 2$, será $b = 2$. Substituindo pois nas fórmulas (202) este valor de b , e os de p , q , r , teremos $x = -2 \pm \sqrt{-12}$, $x = +2 \pm 1$; logo os dous valores reais são $x = 3$, e $x = 1$.

Os numeros deste exemplo foraõ tais , que cada hum dos radicais pode avaliar-se exactamente. Porém estes casos são rarissimos ; o ordinario he

avaliar por aproximação, quando queremos ter o valor numerico sem radicais.

Exemplo II. *Achar as raizes da equação* $y^4 + 4y^3 + 9y^2 + 12y + 3 = 0$.

Fazendo (192) $y = x - 1$, virá $x^4 + 3x^2 + 2x - 3 = 0$. Temos pois $p = 3$, $q = 2$, $r = -3$; logo a reduzida será $64b^6 + 96b^4 + 84b^2 - 4 = 0$, ou fazendo (199) immediatamente $4b^2 = z - 2$, $z^3 + 9z - 30 = 0$.

Esta equação (197), não tem mais que huma raiz real, e por tanto (208) a proposta não tem mais que duas raizes reais.

Applicando as fórmulas (195), teremos $z = \sqrt[3]{15 - \sqrt{252}} + \sqrt[3]{15 + \sqrt{252}}$, e conseguintemente $b = \frac{1}{2} \sqrt{(z - 2) = \dots}$

$\frac{1}{2} \sqrt{[-2 + \sqrt[3]{15 - \sqrt{252}} + \sqrt[3]{15 + \sqrt{252}}]}$.

Logo os dous valores reais de x se comprehendem nesta equação

$x = -\frac{1}{2} \sqrt{[-2 + \sqrt[3]{15 - \sqrt{252}} + \sqrt[3]{15 + \sqrt{252}}]} \pm$

$\sqrt{\frac{1}{\sqrt{[-2 + \sqrt[3]{15 - \sqrt{252}} + \sqrt[3]{15 + \sqrt{252}}]}}$

$-\frac{1}{4} \sqrt[3]{15 - \sqrt{252}} - \frac{1}{4} \sqrt[3]{15 + \sqrt{252}}]$

Reflexões sobre o Methodo precedente, e sobre a sua applicação ás Equações dos grãos superiores ao quarto.

211 **A** Equação que no quarto grão deo b , não passou do sexto; porém se procurássemos directamente a ou c , chegaríamos a huma equação do 24º grão. Para nos convenceremos disto, das duas equações $- 8(p + 4ac)(a^2 + c^2)^2 = qq$, e $- a^4 - c^4 + \frac{p^2}{4} + 4pac + 14a^2c^2 = r$, que achámos (203) na transformação da reduzida, multiplique-se a ultima por $8(p + 4ac)$, e do producto tire-se a primeira; virá a equação

$$512a^3c^3 + 256pa^2c^2 + 40p^2ac + 2p^3 = 0 \\ - 32rac - 8pr \\ + qq$$

a qual sendo combinada com a segunda $- a^4 - c^4 + \&c = r$, a fim de eliminar c , dará (163) huma equação do 24º grão. Mas independentemente deste calculo, podemos mostrar a mesma cousa pelo modo seguinte.

A equação $- 8(p + 4ac)(a^2 + c^2)^2 = qq$

dá $a^4 + c^4 = - \frac{qq}{8(p+4ac)} - 2a^2c^2$. Substitua-se no segundo membro o valor de ac , tirado da equação do terceiro grão $512a^3c^3 + \&c$.; teremos $a^4 + c^4 = A$, chamando A á totalidade das quantidades conhecidas que formarem o segundo membro. Agora se

se representarmos por B o valor achado de ac , tere-

mos $a^4 + \frac{B^4}{a^4} = A$, ou $a^8 - Aa^4 = -B^4$.

Esta equação dará oito valores de a ; mas ac tem tres; logo virão tres equações do oitavo grão, e conseguintemente a terá 24 valores: logo a equação em a será do 24º grão.

212 He porém manifesto, que os expoentes de todas as potencias de a que entrarem nesta equação, serão multiplos de 4, visto ser ella (183) o producto de tres quantidades da fôrma

$a^8 - Aa^4 + B^4$. Se fizermos pois $a^4 = u$, a equação transformada em u , que será do 6º grão, não incluirá de radicais mais que os quadrados e os cubos; porque a equação $a^8 - Aa^4 = -B^4$ dá

$a^4 = \frac{1}{2} A \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4} A^2 - B^4\right)}$, quantidade

na qual A e B , que dependem sômente de huma equação do terceiro grão, não podem constar senão de radicais quadrados e cubos.

213 Tambem está claro, que a^3 no terceiro grão, onde a reduzida he $a^6 - qa^3 = \frac{1}{27} p^3$,

inclue taõ sômente radicais quadrados. Finalmente na equação do segundo grão sem segundo termo $x^2 + p = 0$, fazendo conforme o nosso methodo $y^2 - 1 = 0$, e $ay + x = 0$, a reduzida $a^2 + p = 0$, dá para a^2 hum valor sômente, ou hum radical do primeiro grão, isto he, huma quantidade sem radical.

Logo concluiremos por analogia, que se a reduzida do quinto grão incluir de expoentes de a taõ

taõ sómente os multiplos de 5, o valor de a^5 incluirá taõ sómente radicais quartos, cubos, e quadrados. Se demonstrarmos pois que pelo methodo actual esta reduzida naõ pôde incluir de potencias de a , senaõ aquellas cujos expoentes forem multiplos de 5, seguir-se-ha que o nosso methodo reduz a difficuldade das equações do quinto grão á dos grãos inferiores: isso he o que vamos a fazer.

214 Seja $x^5 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ huma equação geral do quinto grão. Fazendo $y^5 - 1 = 0$, $ay^4 + by^3 + cy^2 + dy + x = 0$, e praticando como no terceiro e quarto grão, acharemos

$$\begin{aligned}
 x^5 - 5adx^3 + 5bd^2x^2 - 5cd^3x + a^5 &= 0 \\
 - 5bcx^3 + 5a^2cx^2 - 5a^3bx + b^5 & \\
 + 5c^2dx^2 - 5b^3dx + c^5 & \\
 + 5ab^2x^2 - 5ac^3x + d^5 & \\
 + 5a^2d^2x - 5a^3cd & \\
 + 5b^2c^2x - 5ab^3c & \\
 - 5abcdx - 5abd^3 & \\
 - 5bc^3d & \\
 + 5a^2bc^2 & \\
 + 5a^2b^2d & \\
 + 5b^2cd^2 & \\
 + 5ac^2d^2 &
 \end{aligned}$$

Suppondo o coeſſiciente de $x^3 = p$ (entendemos por coeſſiciente a totalidade das quantidades que multiplicaõ huma meſma potencia de x), o de x^2

$x^2 = q$, o de $x = r$, e a totalidade dos termos constantes $= s$, teremos quatro equações, as quais, fazendo $b = ga^2$, $c = ba^3$, $d = ka^4$, como he licito, se mudaraõ em outras quatro, que incluirãõ g , b , k , e sómente a^5 , a^{10} , &c. Logo, eliminando g , b , e k , a equação final não incluirá de a outras potencias mais, que as de expoentes multiplos de 5.

215 De tudo o precedente pois se segue, que em ordem ao primeiro coeſſiciente a da equação $ay^m - 1 + by^{m-2} + \&c. = 0$, a reduzida no ſegundo grão he do grão 1. 2; no terceiro he do grão 1. 2. 3; no quarto, do grão 1. 2. 3. 4: logo por inducção, no quinto ſerá do grão 1. 2. 3. 4. 5, ou do 120° ; do 720° no ſexto grão; e aſſim por diante.

E advirta-ſe, que o achar-ſe no quarto grão huma reduzida que não paſſa do ſexto, he huma ſimplificação accidental, a qual provavelmente terá lugar por hum modo analogo nas equações, cujo expoente for numero compoſto, mas não naquellas em que for numero primo. Porque no quarto grão vê-ſe claramente, que eſta ſimplificação procede de b ter em todas as equações, em que entra, relações ſemelhantes para a e c ; ao meſmo tempo que a não tem para b as meſmas, que tem para c . Mas no quinto grão a nenhuma das quantidades a , b , c , d ſe pôde applicar o meſmo que acabamos de dizer de b no quarto grão, como he facil de vêr pelos coeſſicientes da equação $x^5 - 5(ad + bc)x^3 + \&c. = 0$.

216 Como todos os expoentes de a (214) que en-

entraõ na reduzida do quinto grão , são multiplos de 5 , se fizermos $a^5 = u$, a equaçãõ do 24^o grão , que entãõ teremos , incluirã taõ sómente $\sqrt[4]{}$, $\sqrt[3]{}$, e $\sqrt{}$; devendo entrar na proposta os $\sqrt[5]{}$, que mostra a equaçãõ $a = \sqrt[5]{u}$.

Bem se vê agora de que modo devemos discorrer sobre os grãos superiores. Quem dezejar maiores individuações nesta materia , consulte as *Mem. da Acad. das Scienc. ann. 1762 e 1765* , onde se achãõ muitas classes de equações susceptiveis de huma resoluçãõ algebraica facil , e outro methodo deduzido do nosso , o qual simplifica o trabalho nas equações , cujo expoente não for numero primo.

217 Não pôde haver difficuldade em achar sempre todas as raizes da equaçãõ a dous termos $y^n - 1 = 0$, que requer o nosso methodo. Porque deduzindo-se ao menos huma pela simples extracçãõ da raiz do grão n , isto he , tendo sempre $y = 1$, quando n he impar , e $y = 1$, $y = -1$, quando n he par , a difficuldade de achar as outras reduz-se , quando muito , a resolver huma equaçãõ do grão $n - 1$, o que se reputa sabido , quando se passa á resoluçãõ de huma equaçãõ geral do grão n . Mas a difficuldade nem ainda chega a ser desse grão ; he taõ sómente do grão $\frac{n-1}{2}$, quando n he impar , e do grão $\frac{n-2}{2}$, quando n he par.

Porque , dividindo a equaçãõ $y^n - 1$ pela raiz $y - 1$, quando n he impar , ou por $y^2 - 1$, quando n he par , o quociente , ou a equaçãõ que deve

ve dar as outras raizes , será sempre da fórma $y^k + y^{k-1} + y^{k-2} + y^{k-3} + \&c. . . + 1 = 0$, sendo k hum numero par ; esta poderá sempre resolver-se em $\frac{k}{2}$ factores do segundo gráo da fórma $y^2 + hy + i$; e a equação de que se ha-de deduzir h , não passará do gráo $\frac{k}{2}$. Não me demoro em demonstrar a ultima proposição, a qual se pôde ver no *Tom. VI das Mem. de Petersburgs*.

Dos Divisores commensuraveis das Equações.

218 **Q**Uando huma equação tem raizes commensuraveis , podemos achallas pelo methodo seguinte , com maior facilidade do que pela resolução geral.

Como o ultimo termo (180) tem a propriedade de ser o producto de todas as raizes , nenhum numero será valor commensuravel de x , se não for divisor exacto do ultimo termo. Poderiamos pois tomar successivamente todos os divisores do ultimo termo , e substituillos em $+$ e em $-$ na equação em lugar de x , pois que as raizes igualmente podem ser positivas e negativas : o divisor que reduzisse a equação a nada , seria o valor de x .

Porém , para não tentar tantas divisões , vamos a dar o caracter , pelo qual se distinguem os divisores uteis dos inuteis , ensinando primeiramente o modo de achar todos os divisores de hum numero.

219 Divida-se successivamente o numero proposto pelos numeros primos , por que for divisivel ,

começando pelos mais simples, e continuando a dividir em quanto puder ser. Escrevaõ-se á parte, e em linha todos estes numeros primos, repetidos tantas vezes quantas serviraõ de divisores; e multipliquem-se depois dous a dous, tres a tres, quatro a quatro, &c.: elles productos, os numeros primos que se acháraõ, e a unidade formaõ todos os divisores procurados.

Proponha-se, por exemplo, achar todos os divisores de 60.

Divido 60 por 2, tenho 30; 30 por 2, tenho 15; 15 por 3, tenho 5; 5 por 5, tenho 1. Assim os divisores primos saõ

2, 2, 3, 5.

Multiplicando-os 2 a 2, tenho 4, 6, 10, 6, 10, 15.

Multiplicando-os 3 a 3, tenho 12, 20, 30, 30.

Multiplicando-os 4 a 4, tenho 60.

Logo, todos os divisores de 60, entrando a unidade que he divisor de todo o numero, saõ

1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60.

220 Isto polto, para termos os divisores commensuraveis de huma equaçã (havendo-os), por exemplo, da geral do quarto grão

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + f = 0,$$

supponhamos hum delles igual a $x + a$: a equaçã proposta pôde entãõ considerar-se (183) como produzida pela multiplicaçã de $x + a$ por hum factor do 3º grão, como $x^3 + kx^2 + mx + n$. Multiplicando pois, teremos

$$x^4 + kx^3 + mx^2 + nx + an = 0$$

$$+ ax^3 + akx^2 + amx$$

a qual, devendo ser igual á proposta, dá

$$k + a = p \dots m + ak = q \dots n + am = r \dots$$

an

$$an = s, \text{ ou } n = \frac{s}{a} \dots m = \frac{r-n}{a} \dots$$

$$k = \frac{q-m}{a} \dots 1 = \frac{p-k}{a}.$$

Logo para saber se hum divisor a do ultimo termo he admissivel, divida-se o ultimo termo da equaçã por esse divisor; tire-se o quociente do coeſſiciente de x , e divida-se o resto pelo mesmo divisor; tire-se este segundo quociente do coeſſiciente de x^2 , e divida-se tambem o resto pelo mesmo divisor; e continue-se assim, até que se chegue ao coeſſiciente do segundo termo da equaçã, o qual deve dar 1 por quociente. Se o divisor satisfizer a todas estas divisões, poderá seguramente tomar-se por a ; mas para se conhecer a inutilidade do numero, basta que huma das divisões não se possa fazer exactamente.

Está claro, que a unidade deve tambem entrar neste exame, tanto em $+$, como em $-$; porém he mais commodo substituir $+1$ e -1 na equaçã em lugar de x : se de nenhuma destas substituições resultar o, não póde ser $a = 1$, nem $a = -1$.

Exemplo I. Pergunta-se se a equaçã $x^4 - 9x^3 + 23x^2 - 20x + 15 = 0$ tem algum divisor commensuravel.

Tendo achado os divisores do ultimo termo 15, escrevo-os por ordem de grandeza, tomando-os em $+$ e em $-$, como aqui se vê na primeira linha dos numeros.

$$x^4 - 9x^3 + 23x^2 - 20x + 15 = 0$$

Divisores de 15 . . . + 15, + 5, + 3, - 3, - 5, - 15
 + 1, + 3, + 5, - 5, - 3, - 1
 - 21, - 23, - 25, - 15, - 17, - 19
 + 5
 + 18
 - 6
 - 3
 + 1

Divido o ultimo termo + 15 por cada hum dos numeros da primeira linha, e escrevo os quocientes em segunda linha.

Tiro cada termo da segunda linha do coeſſiciente - 20 de x , e com os restos fôrmo terceira linha.

Divido cada termo desta pelo correspondente da primeira linha, e vou escrevendo os quocientes exactos, que se forem achando. Como neste exemplo ha sômente hum, + 5, a equação não pôde ter mais que hum divisor commensuravel. Porém ou se ache hum só divisor exacto, ou se achem muitos, continue-se por esta maneira.

Tiro cada quociente do coeſſiciente 23 de x^2 , e escrevo os restos em quinta linha; aqui he + 18.

Divido, como precedentemente, cada resto pelo termo correspondente da primeira linha, e escrevo os quocientes por baixo; aqui he - 6.

Tirando estes do coeſſiciente - 9 de x^3 , fôrmo nova linha com os restos; aqui he - 3.

Finalmente, divido estes restos pelo termo correspondente da primeira linha. No exemplo achamos + 1; donde concluo, que o termo correspondente - 3 da primeira linha he a , e que $x - 3$ divide a equação: logo $x = 3$ he o valor commensuravel de x na equação proposta. Se

Se quizermos ter ao mesmo tempo o quociente da equação, na columna que houver satisfeito, tomaremos os numeros que se acharem nas linhas de numero par, contando desde a primeira; estes formarão o ultimo termo, e os coefficients successivos de x , x^2 , x^3 , &c. no segundo factor da equação. Applicando ao nosso exemplo, temos -5 , $+5$, -6 , $+1$; logo concluímos, que o segundo factor he $1x^3 - 6x^2 + 5x - 5$, de maneira que a equação proposta he igual ao producto de $x - 3$ por $x^3 - 6x^2 + 5x - 5$.

Exemplo II. *Achar os divisores commensuraveis de . . . $x^3 + 2x^2 - 33x + 14 = 0$*

Divisores de 14 $+14, +7, +2, -2, -7, -14$
 $+1, +2, +7, -7, -2, -1$
 $-34, -35, -40, -26, -31, -32$
 $-5, -20, +13$
 $+7, +22, -11$
 $+1, +11$

Os divisores 7 e 2 são os unicos que sustentão a prova até a ultima linha; mas o segundo não satisfaz, porque dá 11 por ultimo quociente, devendo dar 1: logo o unico divisor commensuravel he $x + 7$.

221 Este methodo se applica do mesmo modo ás equações litterais. Se ellas são *homogeneas*, isto he, se tem o mesmo numero de dimensões em cada hum dos seus termos, escreveremos na primeira linha sómente os divisores do ultimo termo que forem de huma dimensão. Não sendo porém homogeneas, deverá supprir-se a homogeneidade, introduzindo huma letra, cujas potencias completam o numero de dimensões.

222 Se o primeiro termo tiver coefficiente , o divisor , em lugar de ser simplesmente $x + a$, será em geral $mx + a$, sendo m hum dos factores do dito coefficiente. Querendo praticar neste caso o methodo precedente , para cada factor em lugar da segunda linha , quarta &c. , usaremos dellas multiplicadas por m , e admittiremos taõ sómente por a os termos da primeira , a que corresponder na ultima o segundo factor do primeiro termo da equação proposta : porém basta tomar em $+$ os m , em que se fizer a tentativa. Por outra parte este caso pôde reduzir-se ao precedente , fazendo desaparecer o coefficiente (191).

223 Huma equação pôde naõ ter divisor commensuravel do primeiro grão , e com tudo tello do segundo. Achaõ-se estes por hum methodo analogo ao exposto , porém como os calculos saõ compridos , abbreviaremos desta maneira. O factor trinomio , representado por $x^2 + mx + n$ multiplique-se por outro factor tal , que produza huma quantidade do grão da equação proposta , por exemplo , por hum do terceiro , como $x^3 + ax^2 + bx + c$, se a equação proposta for do quinto ; e formando tantas equações quantas saõ as indeterminadas a , b , c , m , n , &c. eliminaremos a , b , c , m , e virá huma equação em n , de que se buscarão os divisores commensuraveis : assim ficará determinado o factor $x^2 + mx + n$.

He manifesto o que devemos fazer , para achar os factores commensuraveis dos grãos superiores.

Da extracção das raizes das quantidades parte commensuraveis, e parte incommensuraveis.

224 **A**S quantidades da fôrma $\sqrt{C + \sqrt{D}}$, a que nos conduz a resoluçãõ de algumas equações (173), pôdem muitas vezes reduzir-se a outras expressões mais simples, que constem de quantidades racionais, e simples radicais quadrados; ou sômente de radicais quadrados; ou destes multiplicados, ou divididos por hum radical simples do mesmo grãõ do radical superior. Começemos pela reducçãõ das quantidades da fôrma $\sqrt{C + \sqrt{D}}$.

Seja $\sqrt{C + \sqrt{D}} = \sqrt{m} + \sqrt{n}$, sendo m , e n duas incognitas; teremos $C + \sqrt{D} = m + 2\sqrt{mn} + n$. Como podemos determinar huma das incognitas pela condiçãõ que quizermos, visto haver tão sômente huma equaçãõ, supponhamos $2\sqrt{mn} = \sqrt{D}$; será $C = m + n$, e conseguintemente $C^2 - D = m^2 - 2mn + n^2 = (m - n)^2$. Logo $C^2 - D$ deve ser hum quadrado perfeito, para que m e n sejaõ commensuraveis. As duas equações $(m - n)^2 = C^2 - D$, e $m + n = C$ daõ $m = \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}\sqrt{C^2 - D}$, e $n = \frac{1}{2}C - \frac{1}{2}\sqrt{C^2 - D}$; logo $\sqrt{C + \sqrt{D}} = \dots$
 $\sqrt{[\frac{1}{2}C + \frac{1}{2}\sqrt{C^2 - D}] + \sqrt{[\frac{1}{2}C - \frac{1}{2}\sqrt{C^2 - D}]}}$.

Exemplo I. *Pede-se a raiz quadrada de $7 + \sqrt{48}$.*

Temos aqui $C = 7$, $D = 48$, e $C^2 - D = 1$, que he hum quadrado perfeito; logo a expressãõ pôde simplificar-se. Fazendo pois as substi-

tuições na formula achada, teremos $\sqrt{7 + \sqrt{48}}$
 $= \sqrt{\left(\frac{7}{2} + \frac{1}{2}\right)} + \sqrt{\left(\frac{7}{2} - \frac{1}{2}\right)} = 2 + \sqrt{3}$.

Se nos dessem $\sqrt{11 + 6\sqrt{2}}$, reduziríamos (112) esta expressão a $\sqrt{11 + \sqrt{72}}$, e acharíamos do mesmo modo, que a sua raiz he $3 + \sqrt{2}$.

Exemplo II. *Pede-se o valor de*
 $\sqrt{[4ac + 2(a+c)(a-c)\sqrt{-1}]}$.

Reduzindo esta expressão a $\sqrt{[4ac + \sqrt{(-4(a+c)^2(a-c)^2)}]}$, temos $C = 4ac$, $D = -4a^4 + 8a^2c^2 - 4c^4$, e conseguintemente $\sqrt{C^2 - D} = 2(a^2 + c^2)$; logo o valor pedido será $\sqrt{(a+c)^2} + \sqrt{[-(a-c)^2]} = a + c + (a-c)\sqrt{-1}$, como supuzemos (203). Assim a mesma formula serve para extrahir a raiz quadrada das quantidades parte racionais, e parte imaginarias.

Se em lugar de $\sqrt{C + \sqrt{D}}$ tivéssimos $\sqrt{C - \sqrt{D}}$, a formula seria $\sqrt{[\frac{1}{2}C + \frac{1}{2}\sqrt{C^2 - D}]} - \sqrt{[\frac{1}{2}C - \sqrt{C^2 - D}]}$.

Pelo mesmo methodo se achará, que em geral a quantidade imaginaria monomia $A\sqrt{-1}$, sendo A huma quantidade real, tem a raiz binomia $(1 + \sqrt{-1})\sqrt{\frac{1}{2}A}$. Por exemplo $\sqrt{2}\sqrt{-1} = 1 + \sqrt{-1}$.

225. Vejamos agora as quantidades da fórma $\sqrt[3]{C + \sqrt{D}}$. Se $C + \sqrt{D}$ tem raiz cubica exacta, deverá esta ser huma quantidade da fórma $m\sqrt[3]{k} + \sqrt[3]{k} \cdot \sqrt{n}$; porque se na raiz entrassem dous radicais quadrados, no cubo tambem entraria dous, como se póde vêr, elevando $\sqrt{g} + \sqrt{b}$ ao cubo. Isto posto, supponhamos $\sqrt[3]{C + \sqrt{D}}$

$= m \sqrt[3]{k} + \sqrt[3]{k} \cdot \sqrt{n}$; teremos $C + \sqrt{D}$
 $= m^3 k + 3mkn + (3m^2 k + kn) \sqrt{n}$, e igua-
 lando a parte racional á parte racional, e a irra-
 cional á irracional, deduziremos $\sqrt{D} = (3m^2 k$
 $+ kn) \sqrt{n}$, e $C = m^3 k + 3mkn$, donde vem
 $(C^2 - D)k = (m^2 k - nk)^2$, ou $m^2 - n =$
 $\frac{\sqrt[3]{k}(C^2 - D)}{k}$. Logo para que $m^2 - n$ seja ra-

cional, ou para que $C + \sqrt{D}$ tenha huma raiz
 cubica, deve tomar-se pela quantidade arbitra-
 ria k hum numero tal, que faça $(C^2 - D)k$
 hum cubo perfeito. Supponhamos por abbreviar

$\frac{\sqrt[3]{k}(C^2 - D)}{k} = p$, teremos $m^2 - n = p$,

ou $n = m^2 - p$; e substituindo este valor na equa-
 ção $C = m^3 k + 3mkn$, virá $4km^3 - 3pkm - C$
 $= 0$. Logo para que m , e n sejaõ racionais, o
 valor de m , que se deduzir desta equação, deve ser
 racional. Buscaremos pois os seus divisores com-
 mensuraveis (220), que acharemos todas as vezes
 que a quantidade proposta for susceptivel de huma

raiz cubica da fórmula $m \sqrt[3]{k} + \sqrt[3]{k} \cdot \sqrt{n}$. As duas
 outras raizes cubicas se acharaõ, buscando todas
 as raizes da equação $4km^3 - \&c.$

Exemplo I. *Pede-se o valor de* $\sqrt[3]{(20 + 14\sqrt{2})}$.

Temos neste caso $C = 20$, $D = 392$; logo
 $C^2 - D = 8$, que he cubo perfeito, e por tanto
 posso fazer $k = 1$. Será pois $p = 2$, e a equação

$4km^3$

$4km^3 - 3pkm - C = 0$ se torna em $2m^3 - 3m - 10 = 0$, ou fazendo (191) $m = \frac{y}{2}$, em $y^3 - 6y - 40 = 0$. Esta equação tem $y - 4$ por divisor commensuravel (220); será pois $y = 4$, $m = 2$, e conseguintemente $n = 2$; logo $\sqrt[3]{(20 + 14\sqrt{2})} = 2 + \sqrt{2}$.

Exemplo II. *Pede-se a raiz cubica de $52 + 30\sqrt{3}$.*

Como temos $C = 52$, $D = 2700$, será $C^2 - D = 4$, que não he cubo perfeito. Façamos pois $k = 2$, será $p = 1$, e $4km^3 - 3pkm - C = 0$ se reduzirá a $8m^3 - 6m - 52 = 0$, ou fazendo $2m = y$, a $y^3 - 3y - 52 = 0$, cujo divisor commensuravel $y - 4$ dá $y = 4$, $m = 2$, $n = 3$, e ultimamente $\sqrt[3]{(52 + 30\sqrt{3})} = 2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2}\sqrt{3}$.

Do mesmo modo extrahiremos as raizes cubicas das quantidades parte racionais, e parte imaginarias.

Donde vem, que não obstante a fórmula imaginaria que tem as raizes do terceiro gráo (198) no caso irreduzivel, com tudo quando x he numero inteiro, com facilidade se acha exactamente o seu valor: não he necessario mais do que tomar o dobro da parte real da raiz cubica de $\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}$. Porque x , ou (195)

$$\sqrt[3]{[-\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}]} + \sqrt[3]{[-\frac{1}{2}q - \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}]}$$

$\sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}$] não poderá ser inteiro se $-\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}$ não for hum cubo perfeito, cuja raiz conste de huma parte real, que representaremos por A , e de outra imaginaria B . Será pois $\sqrt[3]{[-\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}]} = A + B$, e conseguintemente $\sqrt[3]{[-\frac{1}{2}q - \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}]} = A - B$; logo $x = 2A$.

Por exemplo, na equação (198) . . . $x^3 - 9x - 10 = 0$ temos $\sqrt[3]{[-\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}]} = \sqrt[3]{(5 + \sqrt{-2})} = -1 + \sqrt{-2}$; logo será $x = -2$. Se achassemos as outras duas raizes cubicas de $5 + \sqrt{-2}$, teriamos semelhantemente as outras duas raizes da equação.

Na extracção das raizes mais elevadas discorreremos do mesmo modo, que havemos feito nos dous casos precedentes.

Do modo de acabar as raizes approximadas das Equações compostas.

226 **O** Methodo que vamos a expôr, supõe que se conhece hum valor da incognita approximado até a sua decima parte. Vejamos pois como se acha este primeiro valor, tomando para exemplo a equação $x^3 - 5x + 6 = 0$.

Sub-

Substituaõ-se em lugar de x muitos numeros , tanto positivos , como negativos , até que duas substituições consecutivas dem dous resultados de finais contrarios. Se os dous numeros que satisfizerem a esta condiçaõ , tiverem entre si de differença a decima parte de hum delles , ou menos , qualquer dos dous , ou hum meio entre elles , será o valor approximado que se procura. Se a differença porém for maior , praticaremos da maneira seguinte.

Substituiremos na equaçã $x^2 - 5x + 6 = 0$ os numeros $0, 1, 2, 3, 4, \&c.$; porém reparando que todos elles daõ resultados positivos , e que isto continuaria assim até o infinito , passaremos a substituir $-1, -2, -3, \&c.$, o que nos dá os resultados seguintes.

Substituições.	Resultados.
0	+ 6
-1	+ 10
-2	+ 8
-3	- 6

Concluiremos pois , que a raiz está entre -2 e -3 . Mas como a differença entre estes numeros he 1 , quantidade maior que a decima parte de cada hum , tomaremos o meio $-2,5$ entre elles , e substituindo-o na equaçã em lugar de x , acharemos $+2,875$, isto he , huma quantidade positiva ; logo a raiz está entre $-2,5$, e -3 .

Tomaremos o meio $-2,7$ entre $-2,5$, e -3 , desprezando o que passar das decimas , e pela substituição teremos $-0,183$, isto he , huma quan-

quantidade negativa. Logo o valor de x está entre $-2,5$, e $-2,7$; e como a differença $0,2$ entre elles he menor que a decima parte de cada hum, tomando o meio, será $-2,6$ o valor de x sem erro de huma decima.

Supponha-se agora x igual ao numero achado mais huma nova incognita z , isto he, no nosso exemplo, $x = -2,6 + z$, e substitua-se na equação, desprezando z^2 , z^3 , &c. como quantidades muito pequenas; teremos $(-2,6)^3 + 3(-2,6)^2 z - 5(-2,6) - 5z + 6 = 0$, ou $15,28z + 1,424 = 0$; logo $z = -\frac{1,424}{15,28} =$

$-0,09$, levando a divisaõ taõ sómente até o primeiro algarismo significativo. Em geral, pára-se com a divisaõ em tendo tantos algarismos significativos, entrando o primeiro que se acha, quantas são as casas que medeiaõ entre este, e o primeiro algarismo do primeiro valor approximado de x : no nosso exemplo entre 9 (primeiro algarismo significativo do quociente $0,09$) e 2 , que he o primeiro algarismo de $2,6$, primeiro valor approximado de x , ha huma casa unica, e por isso pára-se na primeira letra significativa 9 . Logo $x = -2,6 - 0,09 = -2,69$.

Se quizermos o valor de x mais approximado, suppremos actualmente $x = -2,69 + t$, e substituindo na equação, acharemos $-0,015109 + 16,7083t = 0$, donde se tira $t = 0,000904$, e conseguintemente $x = -2,69 + 0,000904 = -2,689096$.

Se quizermos ainda maior exactidaõ, faremos $x = -2,689096 + u$, e continuaremos o calculo do mesmo modo.

To-

Tomemos por segundo exemplo a equaçãõ

$$x^4 - 4x^3 - 3x + 27 = 0.$$

O valor de x approximado até as decimas he 2,3. Faremos pois $x = 2,3 + z$, e acharemos $z = -\frac{0,5839}{17,812} = -0,03$, parando nas centesimas pela razão dada; logo $x = 2,27$.

Para maior approximaçãõ, faremos $x = 2,27 + t$, e substituindo acharemos $t = -0,0025$; logo $x = 2,2675$.

Reflexões sobre o methodo precedente.

227 **N**O methodo de Newton, que acabamos de expôr, suppozemos, que a raiz de huma equaçãõ se acha entre aquelles numeros, que sendo nella substituidos daõ dous resultados de sinal contrario. Isto he facil de demonstrar. Porque, representando o menor valor de x por a , e o proximamente maior por b , de maneira que $x - a$, e $x - b$ sejaõ dous factores da equaçãõ, he claro, que se em lugar de x substituirmos hum numero positivo menor que a , $x - a$ se tornará negativo; e se substituirmos outro tambem positivo, mas maior que a , e menor que b , $x - a$ se tornará positivo, e o producto dos outros factores terá o mesmo final, que tinha no primeiro caso: logo como o factor $x - a$ he o unico que muda de sinal, tambem o producto total mudará. O mesmo se demonstraria, se o menor factor em lugar de $x - a$ fosse $x + a$; mas deve entãõ fazer-se substituiçãõ de numeros negativos. Pó-

Póde porém ser, que se substituaõ por x todos os valores reais, tanto positivos, como negativos, comprehendidos entre o e o ultimo termo, e nem por isso venhaõ dous resultados de final contrario. Acontece isto em tres casos: 1º Quando as raizes são iguais duas a duas, quatro a quatro, &c.

2º Quando todas as raizes são imaginarias.

3º Quando são parte imaginarias, parte iguais duas a duas.

Por exemplo: a equação formada pelos quatro factores $x - a$, $x - a$, $x - b$, $x - b$, isto he, a equação $(x - a)^2 (x - b)^2 = 0$ não muda nunca de final, seja qual for o numero positivo, ou negativo, que se substitua em lugar de x ; porque ou $x - a$ seja positivo, ou negativo, o seu quadrado sempre he positivo. O mesmo acontece a $x - b$.

Quando as raizes são imaginarias, os finais tambem não podem mudar; porque se mudassem, o valor de x estaria entre os dous numeros reais, que dessem os dous resultados de final contrario, e por tanto não seriaõ imaginarios.

Finalmente o terceiro caso segue-se dos dous que havemos examinado.

Vejamos como entaõ se pôdem achar as raizes.

Do modo de achar as raizes iguais das Equações.

228 **M** *Multiplique-se cada termo da equação pelo expoente que a incognita tiver no mesmo termo, e diminuindo este expoente de huma unidade, se forma-*

mará huma nova equaçãõ ; o maior divisor commum entre ella e a propoſta ſe comporá das raizes iguais , mas elevadas a huma potencia diminuida de huma unidade.

Exemplo. Pedem-fe as raizes iguais da equaçãõ formada pelo producto de $(x - a)^2$ por $(x - b)^2$, isto he , da equaçãõ

$$\begin{aligned} x^4 - 2ax^3 + a^2x^2 - 2a^2bx + a^2b^2 &= 0 \\ - 2bx^3 + 4abx^2 - 2ab^2x & \\ + b^2x^2 & \end{aligned}$$

Multiplicando cada termo pelo expoente de x , e diminuindo o ſeu expoente de huma unidade , teremos

$$\begin{aligned} 4x^3 - 6ax^2 + 2a^2x - 2a^2b &= 0 \\ - 6bx^2 + 8abx - 2ab^2 & \\ + 2b^2x & \end{aligned}$$

cujo divisor commum com a propoſta he $x^2 - ax - bx + ab = (x - a)(x - b)$, o qual tem os meſmos factores que $(x - a)^2(x - b)^2$, mas diminuidos de huma unidade. Eis-aqui a demonſtraçãõ da regra.

Como (149) temos

$$\begin{aligned} (x + b)^m &= x^m + mx^{m-1}b + m \cdot \frac{m-1}{2} x^{m-2}b^2 \\ + m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} x^{m-3}b^3 + \&c. \end{aligned}$$

ſe multiplicarmos cada termo do ſegundo membro pelo expoente de x , e diminuirmos eſte expoente de huma unidade , acharemos

$$\begin{aligned}
 & m \left(x^{m-1} + (m-1) x^{m-2} b + (m-1) \frac{m-2}{2} \right. \\
 & \left. x^{m-3} b^2 + (m-1) \frac{m-2}{2} \cdot \frac{m-3}{3} x^{m-4} b^3 + \&c. \right) \\
 & = m (x + b)^{m-1}.
 \end{aligned}$$

Logo, quando assim se multiplicaõ os termos de que se compõe a potencia m do binomio $x + b$, cada hum pelo expoente do seu x , o producto he a potencia immediatamente inferior, multiplicada pelo expoente da potencia actual. Está pois demonstrada a regra no caso de serem todas as raizes iguais.

Se as raizes porém não forem todas iguais, isto he, se tivermos $(x + b)^m (x + d)^n$, multiplicaremos primeiramente os binomios desenvolvidos hum pelo outro, e depois cada termo do producto pelo expoente do seu x ; o resultado será $m(x + b)^{m-1}(x + d)^n + n(x + b)^m(x + d)^{n-1}$, cujo divisor commum com $(x + b)^m(x + d)^n$ he $(x + b)^{m-1}(x + d)^{n-1}$; e assim por diante, qualquer que seja o numero dos factores $x + b$, $x + d$, &c.

Do modo de acabar as raizes imaginarias das Equações.

229 **A** Inda que as raizes imaginarias sejaõ susceptiveis de diferentes fórmãs, conforme o grão das equações, com tudo podemos reduzillas todas á fórmula $x = a + b\sqrt{-1}$, sendo a e b quan-

quantidades reais, positivas, ou negativas. Veja-se a demonstração nas *Mem. da Acad. de Berlin*, ann. 1746, onde Mr. d'Alembert mostra, que podendo sempre hum dos valores de x representar-se por $a + b\sqrt{-1}$, haverá outro da fórmula $a - b\sqrt{-1}$. Donde se segue:

1^o O numero das raizes imaginarias he sempre par.

2^o As equações de grãos pares são as unicas, que podem ter todas as suas raizes imaginarias.

3^o As raizes imaginarias, que dá a resolução de huma equação, tem duas a duas a mesma quantidade debaixo do radical.

4^o Toda a equação de grão par, cujo ultimo termo he negativo, tem ao menos duas raizes reais.

5^o Huma equação, que tem todas as raizes imaginarias, pôde resolver-se em factores do segundo grão da fórmula $(x - a - b\sqrt{-1})(x - a + b\sqrt{-1})$, isto he, em factores reais do segundo grão $x^2 - 2ax + aa + bb$.

Logo resolvendo huma equação, que tiver todas as raizes imaginarias, em factores do segundo grão (223) da fórmula $x^2 + gx + b$, a equação em b terá seguramente algumas raizes reais, e conseguintemente poderemos achallas ao menos por approximação. Concluamos pois, que seja qual for a equação, poderemos sempre achar as suas raizes ou reais, ou imaginarias, ao menos por approximação.



SECCÃO II.

DA APPLICAÇÃO DA ALGEBRA A' ARITHMETICA E GEOMETRIA.

230 **T**EMOS visto nas applicações da Secção precedente, que a resolução de hum problema, depois de formada a sua equação, se reduz a desembaraçar a incognita, ou incognitas; e que as regras porque isto se executa, ainda que sejam muito differentes as questões, e as quantidades que nellas se consideraõ, são as mesmas para todos os problemas do mesmo gráo.

Mostrámos em alguns exemplos, que estas regras dispensaõ de multiplicidade de raciocinios, que necessariamente se deviaõ fazer, senaõ recorressemos ás equações, e que independentemente do seu numero, muitas vezes pela sua natureza seriaõ superiores ás forças ordinarias da razaõ. Vimos tambem, quanto era vantajoso representar por finais gerais as quantidades que entraõ nos problemas, e as operações que sobre ellas se praticaõ. Além destas vantagens a Analyse tem muitas outras de que vamos a tractar, considerando as equações em hum ponto de vista mais extenso do que temos feito até aqui.

As equações que exprimem de hum modo geral todas as condições de qualquer problema, são como outros tantos livros, em que se pôdem ler com muita facilidade as differentes relações, que tem humas quantidades com as outras. A razaõ aban-

abandona o problema, e occupa-se unicamente com as equações, para applicar-lhes as regras que ensinámos, e dar-lhes novas fórmulas, que melhor deixão perceber as relações. Em huma palavra, são as equações o depolito das propriedades das quantidades que nellas entraõ, e das resoluções gerais de hum grande numero de problemas, que não lembravaõ, nem se suspeitava que dependessem do problema principal.

Com effeito, como o fim das regras porque se achão os valores das incognitas, he reduzir as equações a terem por primeiro membro cada huma das incognitas, e por segundo todas as outras quantidades; e como estas regras são applicaveis a qualquer das quantidades que entraõ nas equações, está claro, que podemos sempre chegar a ter qualquer dellas no primeiro membro, e todas as outras no segundo. Então estamos reduzidos ao caso, em que houvessemos de resolver o problema, no qual se dessem estas ultimas, e aquella sómente fosse a incognita. Logo huma equação resolve tantos problemas differentes, quantas são as quantidades que nelle entraõ. Mostremos isto em alguns exemplos.

*Propriedades gerais das Progreções
Arithmeticas.*

231 **S** Eja o valor numerico do primeiro termo de huma progressão arithmetica $= a$, o do ultimo $= u$, a differença commua, ou a razão $= d$, o numero total dos termos $= n$; o numero dos termos que precedem o termo u será $n-1$; logo

logo (Arith. 206) . . . $u = a + (n - 1) d$. Esta equação resolve o problema, em que sendo dada a razão de huma progressão, com o numero dos termos, e o valor do primeiro, se procura qual deve ser o ultimo termo. Mas como contém quatro quantidades, resolve quatro problemas gerais. Porque,

1º Considerando a como incognita, temos $a = u - (n - 1) d$, a qual ensina, que o primeiro termo de huma progressão arithmetica crescente se acha, tirando do ultimo termo a razão tomada tantas vezes menos huma, quantos são os termos todos.

2º Considerando n como incognita, temos $n = \frac{u - a}{d} + 1$, a qual mostra, que para achar o numero dos termos, dividiremos a differença entre o primeiro e o ultimo pela razão, e juntaremos huma unidade ao quociente. Por exemplo, se o primeiro termo for 5, o ultimo 37, e a razão 2, constará a progressão de 17 termos. Se o quociente não for numero inteiro, a questão será absurda.

3º Considerando d como incognita, temos $d = \frac{u - a}{n - 1}$, a qual ensina, que para achar a razão, tiraremos o primeiro termo do ultimo, e dividiremos o resto pelo numero dos termos menos hum; o que concorda com a regra que demos (Arith. 209).

Assim a equação $u = a + (n - 1) d$ dá a resolução de quatro problemas gerais, que se comprehendem neste: *Das quatro causas, o primeiro*

termo, o ultimo, o numero dos termos, e a razão de huma progressão arithmetica, sendo dadas tres, achar a quarta.

232 Toda a progressão arithmetica póde representar-se por $\div a . a \pm d . a \pm 2d . a \pm 3d . a \pm 4d , \&c .$ que sendo igual a $\div a \pm 4d . a \pm 3d . a \pm 2d . a \pm d . a$

a soma s dos termos de huma será igual á ametade da soma de ambas juntas. Mas a soma de dous termos correspondentes nas duas progressões deve sempre ser a mesma, e igual á do primeiro e ultimo de huma dellas reunidos; logo a totalidade das duas se achará somando os extremos de huma, e multiplicando o resultado pelo numero dos termos. Logo para acharmos a soma de todos os termos de huma progressão arithmetica, multiplicaremos a soma dos extremos pela ametade do numero dos termos. Por exemplo, a soma dos cem primeiros termos da progressão dos numeros impares $\div 1 . 3 . 5 . 7 \&c ,$ cujo centesimo termo $= 199$, he $(199 + 1) \frac{100}{2} = 10000 .$

A traducção algebrica desta propriedade, conferendo as denominações precedentes, dá a equação

$s = (a + u) \frac{n}{2}$, a qual resolve este problema geral, que comprehende quatro: *Das quatro cousas, primeiro termo, ultimo, a soma, e numero dos termos de huma progressão arithmetica, sendo dadas tres, achar a quarta.*

Porque 1º conhecendo a, u , e n , a equação dá o valor de s . 2º Conhecendo a, u , e s , teremos

$n = \frac{2s}{a + u}$. 3º e 4º Conhecendo a , s , e n , ou u , s , e n , teremos $u = \frac{2s}{n} - a$, ou $a = \frac{2s}{n} - u$.

233 Os oito problemas gerais que acabámos de resolver por meio das duas equações, em que se traduzirão duas propriedades das progressões, mostrão como a Algebra ensina a deduzir de hum principio todas as verdades que d'elle dependem. Não obstante a pouca utilidade de algumas, continuaremos a tractar dellas, pois que pela sua simplicidade são muito proprias para servirem de exemplo do uso das equações.

Até aqui havemos considerado sómente huma equação de huma vez. Porém se duas, ou mais equações contiverem algumas quantidades commuas, poderemos com summa facilidade derivar maior numero de propriedades. Por exemplo, as duas equações fundamentais das progressões arithmeticas

$$u = a + (n - 1) d, \text{ e } s = (a + u) \frac{n}{2}$$

tem tres quantidades commuas a , u , e n . Tome-mos successivamente em cada huma o valor de qualquer das tres quantidades, e igualando os dous valores, teremos novas equações, as quais exprimirão a relação, que tem entre si as outras quatro quantidades independentemente da eliminada. Assim, considerando a como incognita, teremos . . .

$$s = \frac{2nu - n(n-1)d}{2}, \text{ a qual resolve quatro pro-}$$

blemas. Se eliminarmos ou u , ou n , teremos ou

$$s = an + \frac{dn^2}{2} - \frac{dn}{2}, \text{ ou } s = \frac{a+u}{2} + \frac{u^2 - a^2}{2d},$$

das quais nos serviremos para resolver oito problemas, conforme forem conhecidas tais, ou tais quantidades.

Concluamos pois, que as duas equações fundamentais contem a resolução de vinte problemas, que se podem propôr sobre as progressões arithmeticas, ou ensinaõ a achar qualquer das cinco quantidades a, u, n, d, s , huma vez que sejaõ dadas tres. Para fazermos algumas applicações,

234 Supponhamos que se pergunta, quantas balas inclue a base de hum monte triangular, a qual tem n balas por lado.

He claro que cada fileira parallelas a qualquer dos lados tem huma bala de menos que a precedente, e que o numero das fileiras he igual a n . Reduz-se pois o problema a achar a soma dos termos de huma progressão arithmetica, cujo primeiro termo = 1, o ultimo = n , e o numero dos termos

= n . Logo a soma será $\frac{(n+1)n}{2}$; formula dos

numeros triangulares, que sempre dará hum numero inteiro, quer n seja par, quer impar. Se o lado AB (Fig. 2) constar de 6 balas, a base ABC terá 21.

235 O mesmo principio pôde servir para achar a superficie de qualquer trapezio, ou de hum triangulo. Com effeito, imaginando a altura dividida em huma infinidade de partes iguais por linhas rectas parallelas á base, ter-se-ha o trapezio total ABDC (Fig. 3) dividido em infinitos trapezios $bcib, cdki$ infinitamente pequenos. E como todos elles

elles tem a mesma altura, tirando *ce* e *bf* paralelas a *bk*, a differença entre qualquer delles e o seu vezinho será huma mesma quantidade *cefg*. Logo para acharmos a sua totalidade, (232) multiplicaremos a soma dos extremos pela ametade do numero dos termos. Porém sendo os trapezios infinitamente pequenos, pôde cada hum suppôr-se igual á sua base multiplicada pela sua altura. Logo será a superficie do trapezio

$$= (CD. b + AB. b) \frac{n}{2} = \left(\frac{CD + AB}{2} \right) nb = \left(\frac{CD + AB}{2} \right) IH = \text{á semisoma dos lados paral-}$$

lelos multiplicada pela altura. Donde se segue, que se *AB* for nada, ou se o trapezio se converter em triangulo, multiplicaremos a base pela ametade da altura; o que tudo concorda com o que se demonstra na Geometria.

Da soma das potencias dos termos de qualquer Progressão Aritbmética.

236 **A** Soma de muitas quantidades que crescem, ou diminuem por huma lei, determina-se pelo conhecimento de algumas dellas, do seu numero, e da lei do augmento, ou diminuição que observaõ.

Sejaõ *a, b, c, d, &c.* muitos numeros em progressão arithmetica, cuja differença seja *r*. Teremos 1º $b = a + r$, $c = b + r$, $d = c + r$, $e = d + r$.

2º Quadrando, teremos

$$b^2 = a^2 + 2ar + r^2$$

$$c^2 = b^2 + 2br + r^2$$

$$d^2 = c^2 + 2cr + r^2$$

$$e^2 = d^2 + 2dr + r^2$$

3º Elevando ao cubo, teremos

$$b^3 = a^3 + 3a^2r + 3ar^2 + r^3$$

$$c^3 = b^3 + 3b^2r + 3br^2 + r^3$$

$$d^3 = c^3 + 3c^2r + 3cr^2 + r^3$$

$$e^3 = d^3 + 3d^2r + 3dr^2 + r^3$$

Se somarmos as equações dos quadrados, acharemos $e^2 = a^2 + 2r(a + b + c + d) + 4r^2$. Logo em geral, se o numero das quantidades $a, b, c, d, \&c.$ se representar por n , a ultima por u , e a soma por s' , teremos $u^2 = a^2 + 2r(s' - u) + (n - 1)r^2$, donde vem a soma de todos os termos de huma progressão arithmetica

$$s^2 = \frac{u^2 - a^2 - (n - 1)r^2}{2r} + u.$$

Do mesmo modo a soma dos cubos dará $e^3 = a^3 + 3r(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 3r^2(a + b + c + d) + 4r^3$, e em geral, sendo s'' a soma dos quadrados, $u^3 = a^3 + 3r(s'' - u^2) + 3r^2(s' - u) + (n - 1)r^3 = a^3 + 3r(s'' - u^2) + 3r \frac{u^2 - a^2 - (n - 1)r^2}{2} + (n - 1)r^3$.

Lo-

Logo será a soma dos quadrados, ou

$$s'' = \frac{2u^3 - 2a^3 + 3ru^2 + 3ra^2 + (n-1)r^3}{6r}$$

Semelhantemente acharemos a soma das potencias mais elevadas.

237 Se a progressão for a serie dos numeros naturais 1, 2, 3, &c. será $a = 1$, $r = 1$, $u = a + (n-1)r = n$, e conseguintemente $s'' = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{n \cdot (n+1) (2n+1)}{6}$.

Supponhamos que se pertende saber quantas balas inclue hum monte dellas quadrado, sendo conhecido o numero que tem hum lado da base. Como todas as camadas parallelas á base são quadrados que vão diminuindo de huma bala por lado desde a base, está claro que a totalidade será a soma dos quadrados da serie natural dos numeros, continuados até o numero n das balas do lado da base, e conseguintemente terá por expressão $\frac{n \cdot (n+1) (2n+1)}{6}$.

Praticaremos pois conforme esta regra . . . Ao numero das balas de hum lado da base, e ao seu dobro ajunte-se a unidade; multiplique-se huma soma pela outra, e o producto pelo mesmo numero de balas do lado da base; e tome-se a sexta parte deste ultimo producto. Por exemplo, se o monte quadrangular tiver na base 6 balas por lado, a este numero e ao seu dobro 12 juntaremos 1, do que resultará 7, e 13; o producto 91 multiplicado por 6 dará 546, cuja sexta parte 91 será o numero de balas do monte proposto.

Se

Se o monte (*Fig. 4.*) tiver por base hum parallelogrammo DFGI, imagine-se dividido em hum monte quadrando DEAIH que ja se sabe somar, e em hum prisma CBFEGH, cuja totalidade se achará, multiplicando o numero das balas do triangulo FBG (234) pelo numero das balas de BC, ou de AB — 1. Assim, se AB tiver m balas, o monte terá

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)(m-1)}{2}$$

$$= n \cdot \frac{n+1}{2} \cdot \left(\frac{m+2(n-1)}{3} \right).$$

238 Suppondo que o numero dos termos he infinito, a formula $s'' = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ se reduz

$$a s'' = \frac{n^3}{3} = n^2 \cdot \frac{n}{3};$$

porque suppôr n infinito,

he suppôr que n não pôde ser augmentado por quantidade alguma finita; hypothese que se exprime no nosso calculo, desprezando 1 em comparação de n e de $2n$. Isto posto, imagine-se huma pyramide composta de secções parallelas á base, e a altura ST (*Fig. 5*) dividida em huma infinidade de partes iguais. Como consta da Geometria, que todas as secções são proporcionais aos quadrados das suas distancias respectivas St ao vertice S, estas formaraõ a progressão natural, e as secções a dos seus qua-

drados. Logo, pela formula $s'' = u^2 \frac{n}{3}$, para

achar a soma das secções, isto he, a solidez da pyramide, deve multiplicar-se o ultimo quadrado, isto

isto he , a base , pela terça parte da altura , como se demonstra na Geometria.

239 Em geral: Por quanto temos

$$a^m = a^m + m a^{m-1} r + m \cdot \frac{m-1}{2} a^{m-2} r^2 + m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} a^{m-3} r^3 + \&c.$$

$$c^m = c^m + m c^{m-1} r + m \cdot \frac{m-1}{2} c^{m-2} r^2 + m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} c^{m-3} r^3 + \&c.$$

$$b^m = b^m + m b^{m-1} r + m \cdot \frac{m-1}{2} b^{m-2} r^2 + m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} b^{m-3} r^3 + \&c.$$

$$d^m = a^m + m a^{m-1} r + m \cdot \frac{m-1}{2} a^{m-2} r^2 + m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} a^{m-3} r^3 + \&c.$$

se ajuntarmos estas quantidades , e representarmos por st^{m-1} , st^{m-2} , st^{m-3} , &c. , a soma das potencias $m-1$, $m-2$, $m-3$, &c. de todos os termos , e por u o ultimo , acharemos $u^m = a^m +$. . .

$$mr (st^{m-1} - u^{m-1}) + m \cdot \frac{m-1}{2} r^2 (st^{m-2} - u^{m-2})$$

+ &c. da qual se deduzem formulas da soma de todas as potencias de huma progressão , pondo successivamente $m = 1$, $m = 2$, $m = 3$, &c. e advertindo que em lugar de $st^0 = u^0$ pôde tomar-se $n-1$.

240 Agora he facil de achar a soma de muitas outras especies de progressões. Por exemplo , os termos da progressão $\div 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 15 \cdot 19$ &c. formados successivamente formão a serie 3 , 10 , 21 , 36 , 55 , &c. a qual se pôde somar. Ajuntando do mesmo modo os termos desta , teremos huma segunda serie 3 , 13 , 34 , 70 , 125 , &c. que tambem he somavel , como igualmente a que se fôrma pela addição dos termos da ultima , e assim por diante até o infinito.

Com

Com effeito, sendo (233) a foma dos termos de huma progressão arithmetica $s = an + \frac{r}{2} n^2 - \frac{r}{2} n$, e exprimindo s hum termo qualquer da primeira serie, reduz-se a questaõ a formar a serie das quantidades que resultariaõ da

expressão $an + \frac{r}{2} n^2 - \frac{r}{2} n$, se substituissimos

succeffivamente por n todos os termos da progressão natural 1, 2, 3, &c. E como a e r , seja n qual for, saõ sempre as mesmas, para achar a foma das quantidades representadas por an , basta multiplicar a pela foma das quantidades representadas por n , isto he, pela foma da progressão dos numeros naturais; logo an será a foma das quantidades

$a \cdot \frac{(n+1)n}{2}$. Do mesmo modo a foma das quan-

tidades $\frac{r}{2} n = \frac{r}{2} \frac{(n+1)n}{2}$, e a das quantidades

$\frac{r}{2} n^2 = \frac{r}{2} \left(\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} \right)$. Logo a foma das

quantidades $an + \frac{r}{2} n^2 - \frac{r}{2} n$, isto he, a foma dos

termos da primeira serie será $a \cdot \frac{(n+1)n}{2} +$

$\frac{r}{2} \left(\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} \right) - \frac{r}{2} \frac{(n+1)n}{2} = \dots$

$a \frac{(n+1)n}{2} + r \frac{(n-1)n(n+1)}{6}$. Somando

tambem as differentes partes deste resultado, para

o que não se requer mais do que somar as potencias da serie natural dos numeros, acharemos a somma dos termos da segunda serie; e assim até o infinito.

Quando $a = 1$, e $r = 1$, isto he, quando a progressão primitiva he a serie dos numeros naturais, as series cujos termos se formão pela addição dos termos da precedente, chamaõ-se *numeros figurados*: estes são *triangulares* ou da terceira ordem, *pyramidais* ou da quarta ordem, conforme pertencem á primeira, ou á segunda serie &c.

Se for $a = 1$, e fizermos r igual a 1, 2, 3, &c. resultará muitas progressões arithmeticas; as series que se formão pela addição dos termos consecutivos de cada huma dessas progressões, chamaõ-se *numeros polygonos*, os quais seraõ *triangulares*, *quadrados*, *pentagonos*, *hexagonos*, &c. conforme a differença da progressão for 1, 2, 3, 4, &c.

Pela ultima formula pôde achar-se o numero de balas de hum monte triangular; porque suppon-

do $a = 1$, e $r = 1$, teremos $n \cdot \frac{n+1}{2} \cdot \frac{n+2}{3}$,

donde se deduz huma regra muito simples. Se for dado o numero total m das balas, será n a raiz cubica do maior cubo que se contiver em $6m$.

Do mesmo modo acharemos a somma das series que se formão ajuntando a serie dos quadrados, a dos cubos &c., e em geral daquellas series, cujos termos se exprimem por quaisquer potencias perfectas de hum mesmo numero n , multiplicadas por quaisquer numeros.

Das

Das propriedades, e uso das Progressões Geometricas.

241 **S**Ejaõ $a, b, c, d, e, \&c.$ os termos consecutivos de huma progressão geometrica crescente, cuja razão $= q$. Como pela propriedade destas progressões (Arith. 211) he $b = aq, c = bq, d = cq, e = dq$, teremos $b + c + d + e = (a + b + c + d)q$, ou em geral, sendo s a soma de todos os termos, e u o ultimo, $s - a = (s - u)q$, a qual dá $s = \frac{qu - a}{q - 1}$. Se a progressão for descendente, a representará o ultimo termo, e u o primeiro.

Logo: *A soma de todos os termos de huma progressão geometrica acha-se, multiplicando o maior termo pela razão, tirando do producto o menor, e dividindo o resto pela razão diminuida de huma unidade.* Entendemos em geral pela palavra *razão* o numero de vezes que cada termo da progressão contem o immediatamente menor, de maneira que o nosso enunciado convem tanto ás progressões crescentes, como ás decrescentes.

Se a progressão for decrescente até o infinito, o ultimo termo será infinitamente pequeno, e a formula se tornará em $s = \frac{qu}{q - 1}$. Logo neste caso o producto da razão multiplicada pelo maior termo, sendo dividido pela razão diminuida da unidade, dará a soma dos termos da progressão. Assim a soma dos termos desta progressão

$$\div \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \frac{1}{16} \&c. \text{ continuada até o}$$

in-

infinito he $\frac{\frac{1}{2} \cdot 2}{2-1} = 1$. Em geral, toda a progressão geometrica decrescente até o infinito da fórmula

$\therefore \frac{n}{n+1} : \frac{n}{(n+1)^2} : \frac{n}{(n+1)^3} \&c.$ sendo n hum numero qualquer, tem por valor a unidade.

Naõ parecerá extranha esta conclusão a quem advertir, que tomando, por exemplo, os $\frac{2}{3}$ da linha AB (*Fig. 6*) que supponho ser de 1 pé, depois $\frac{2}{3}$ do resto CB, depois $\frac{2}{3}$ do resto dB, e assim por diante até o infinito, como exprime a progressão $\therefore \frac{2}{3} : \frac{2}{9} : \frac{2}{27} \&c.$, isto

he, $\therefore \frac{2}{3} : \frac{2}{3} \text{ de } \frac{1}{3} : \frac{2}{3} \text{ de } \frac{1}{3} \&c.$, naõ se absorbe mais que a linha AB.

242 Seja o primeiro termo de huma progressão geometrica = a , qualquer termo della = u , a razão = q , o numero dos termos = n , será (*Arith. 213*) $u = aq^{n-1}$. Esta equação resolve este problema geral: Das quatro cousas, primeiro termo, ultimo, razão e numero dos termos de qualquer progressão geometrica, sendo dadas tres, achar a quarta. Porque da formula $u = aq^{n-1}$, a qual dá immediatamente o valor de u , se deduz

$a = \frac{u}{q^{n-1}}$, e $q = \sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}$. Note-se que esta ultima

concorda com a regra que demos na Arithmetica, para meter muitos meios proporcionais entre duas quantidades a e u . Quanto a n , a Algebra naõ dá meios directos para o achar; mas facilmente se resolverá a equação por meio dos logarithmos,

advertindo que se l representar as palavras *logarithmo de*, será (Arith. 227) $lab = la + lb$, e (Arith. 229) $la^n = nla$. Logo na equação $u = aq^{n-1}$ teremos $lu = la + (n-1)lq$, donde vem

$$n = 1 + \frac{lu - la}{lq}.$$

Para fazermos algumas applicações, supponhamos que se deraõ 60000 libras a juro de 5 por 100, com a condição de se reputarem os interesses todos os annos como hum capital que igualmente vençe juro: pergunta-se quantos annos são necessarios para que o capital chegue a 1000000 libras.

Como o interesse he $\frac{1}{20}$ do capital do anno precedente, representando por a, b, c, d, e , os fundos successivos de cada anno, teremos

$$b = a + \frac{1}{20}a = \frac{21}{20}a, c = \frac{21}{20}b, d = \frac{21}{20}c, e =$$

$\frac{21}{20}d$. Logo os fundos annuos formão huma progressão geometrica, cujo primeiro termo $a = 60000$, o ultimo $u = 1000000$, a razão $q = \frac{21}{20}$, e procura-se o tempo, isto he, $n-1$. Neste caso

$$\text{he } n = \frac{1000000 - 160000}{121 - 120} + 1 = \frac{1,2218487}{0,0211893}$$

+ 1 pelas Taboas, ou $n-1 = 57,7$ proximate. Logo o capital 60000 lib. chegará a ser de 1000000 lib. no fim de 57 annos 8 mezes $\frac{1}{2}$, com pouca differença.

A equação $q = \sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}$ se resolve facilmente

por

por logarithmos; porque (Arith. 230, e 231) teremos $lq = \frac{lu-la}{n-1}$. Applicando ao caso prece-

dente, acharemos $lq = \frac{1,2218487}{57,7} = 0,0211757$,

logarithmo a que nas taboas corresponde o numero 1,0500 muito proximate; donde concluiremos,

que o interesse he $\frac{1}{20}$ proximate.

Supponhamos por segundo exemplo, que a populaçãõ n de huma provincia tem de augmento successivo todos os annos huma sua parte designada por $\frac{1}{p}$; pergunta-se, em quantos annos virá

a populaçãõ a constar de m pessoas.

Sendo x o numero de annos que se procura, e discorrendo como no exemplo antecedente, vê-se claramente que a serie da populaçãõ annua fórma huma progressãõ geometrica, cujo primeiro termo he n , o ultimo m , a razãõ $\frac{1+p}{p}$, e o numero

dos termos $x+1$; logo teremos $n \left(\frac{1+p}{p} \right)^x = m$,

e por conseguinte $x = \frac{lm - ln}{l(1+p) - lp}$.

Se for $p = 100$ e $m = 10n$, acharemos $x =$

$\frac{110}{1101 - 1100} = \frac{10000000}{43214} = 231$. Logo ainda

que a populaçãõ cresça em cada anno sômente huma sua centesima parte, passados 231 annos estará dez vezes maior; passados 462 annos, se fará cem

ve-

vezes maior; e mil vezes, passados 693 annos.

Com igual facilidade se achará o augmento annuo da populaçãõ. Se em cada seculo, por exemplo, o numero n de habitantes se fizer o duplo, teremos $(\frac{1+p}{p})^{100} = 2$, e conseguintemente

$1 \frac{1+p}{p} = \frac{1}{100} l 2 = 0,0030103$; logo $p = 144$ poximamente: basta pois que a populaçãõ cresça em cada anno a sua $\frac{1}{144}$ parte.

No caso de $n = 6$, como aconteceu na propagaçãõ da Terra depois do Diluvio, para que no fim de 200 annos houvesse hum milhaõ de pessoas, devia ser

$1 \frac{1+p}{p} = \frac{1}{200} . l \frac{1000000}{6} = 0,0261092$,

donde se tira $\frac{1+p}{p} = \frac{1061963}{1000000}$, e $p = 16$ poximamente. Se a progressãõ crescesse deste modo por espaço de 400 annos, o numero de almas chegaria a $1000000 . \frac{1000000}{6} = 166666666666$.

243 A equaçãõ $s = \frac{qu-a}{q-1}$ dará tambem quatro formulas, as quais resolverãõ este problema geral: Das quatro cousas, toma, razaõ, primeiro e ultimo termo de huma progressãõ geometrica, sendo dadas tres, achar a quarta.

Finalmente, se combinarmos entre si as duas equações $s = \frac{qu-a}{q-1}$, e $u = aq^{n-1}$, resolveremos este

este

Estoutro problema mais geral: Das cinco cousas, primeiro e ultimo termo, razão, soma e numero dos termos de huma progressão geometrica, sendo dadas tres, achar as outras duas.

Da soma das Series Recurrentes.

244 **D**AMOS o nome de *recurrentes* áquellas series, em que hum termo qualquer se fórma de certo numero de termos precedentes, multiplicados, ou divididos por numeros determinados, positivos, ou negativos. Por exemplo, a serie 2, 3, 19, 101, 543, &c. he recorrente, porque para se formar hum termo, recorre-se aos dous precedentes, multiplicando o primeiro por 2, o segundo por 5, e somando os productos; assim $543 = 19 \cdot 2 + 101 \cdot 5$, e $101 = 3 \cdot 2 + 19 \cdot 5$.

Somaõ-se estas series pelo methodo de que acima fizemos uso, como vamos a mostrar, applicando-o áquellas series, cuja lei depende de duas quantidades sómente, á maneira do exemplo proposto.

Sejaõ a, b, c, d, e, f , &c. os termos consecutivos de huma serie desta especie, m e p os numeros determinados de que depende a sua formação. Logo teremos $c = ma + pb$, $d = mb + pc$, $e = mc + pd$, $f = md + pe$, e conseguintemente $c + d + e + f = m(a + b + c + d) + p(b + c + d + e)$, ou designando s a soma de todos os termos, $s - a - b = m(s - e - f) + p(s - a - b)$; a qual dá

$$s = \frac{me + mf + pa + pf - a - b}{m + p - 1}$$
, dependente

O

dos

dos dous primeiros termos, dos dous ultimos, e das quantidades m e p . Se for $m = 0$, teremos $s = \frac{pf-b}{p-1} + a$, como deve fer, porque entã a serie torna-se em progressão geometrica.

Póde introduzir-se o numero dos termos, procurando a expressã geral de hum termo qualquer em quantidades a , b , m , p , e no numero dos termos n .

Da Construcção Geometrica das Quantidades Algebricas.

245 **A**S linhas, as superficies, e os solidos, como sã quantidades, admitem as mesmas operações, que se fazem sobre os numeros, e sobre as quantidades algebricas. Os resultados porém de dous modos se podem avaliar, ou em numeros, ou em linhas. O primeiro modo, que tem lugar, quando as quantidades dadas se exprimem em numeros, presentemente não tem difficuldade: substituem-se em lugar das letras as quantidades numericas que ellas representaõ, e fazem-se as operações indicadas pela disposiçã dos finais, e das mesmas letras.

O segundo modo, o qual se chama *construcção* das quantidades algebricas, ou do problema que as produzio, depende de se entender a significação de certas expressões fundamentais, a que se referem todas as outras. Trataremos das primeiras, e enfi-naremos ao mesmo tempo o modo de reportar-lhes quaisquer outras expressões.

246 Para construir $\frac{ab}{c}$, he necessario achar huma quarta proporcional ás tres linhas conhecidas a , b , c . Isto se faz, formando (Fig. 7) hum angulo qualquer com duas linhas indefinidas AX, AZ, e tomando sobre AX a parte AB igual á linha representada por c , a parte AD igual a huma das duas a e b , a a por exemplo, e sobre AZ a parte AC igual a b ; entáo se tirarmos BC, e conduzirmos por D a parallela DE, esta (2. 6. Eucl.) determinará $AE = \frac{ab}{c}$. O mesmo se fará para

construir $\frac{aa}{c}$, com a differença de tomar a em lugar de b :

Se tivermos $\frac{abc}{de} = \frac{ab}{d} \times \frac{c}{e}$, construiremos primeiramente $\frac{ab}{d}$, que chamaremos m , e depois $\frac{mc}{e}$. Praticar-se-há do mesmo modo para

construir $\frac{a^2b}{c^2}$, $\frac{a^4}{b^3}$, &c.

Se a expressáo for $\frac{ab + bd}{c + d} = \frac{(a + d)b}{c + d}$, consideraremos $a + d$ como huma linha m , $c + d$ como outra n , e assim a expressáo se reduz a $\frac{mb}{n}$. Do mesmo modo construiremos

$$\frac{a^2 - b^2}{c} = \frac{(a + b)(a - b)}{c}.$$

Confiste pois o artificio em resolver a quantidade

dade em porções da fôrma $\frac{ab}{c}$, ou $\frac{a^2}{c}$. Ainda que isto pareça difficiloso em algumas expressões que tem numeradores, ou denominadores complexos, com tudo facilmente se conseguirá por meio das transformações.

Por exemplo, para construir $\frac{a^i + b^i}{a^2 + c^2}$, supponhamos $b^i = a^2 m$, e $c^2 = an$; então a expressão se transformará em $\frac{(a + m)a}{a + n}$, que he facil de construir, havendo determinado m e n pelas duas hypothefes.

Quando as expressões não são *homogeneas*, isto he, quando os termos do numerador, ou do denominador não tem o mesmo numero de factores, como na expressão $\frac{a^i + b}{c^2 + d}$, parece que são inuteis as transformações. Porém como tais resultados sómente apparecem, quando o calculador por simplificar suppõe alguma quantidade igual á unidade; se esta se restituir em cada termo com expoente sufficiente para completar o numero das dimensões, a expressão se fará homogenea, e não haverá embaraço na sua construeção. Assim, para construir $\frac{a^i + b + c^2}{a + b^2}$, suppondo que d he a linha que se tomou por unidade, escreveremos $\frac{a^i + bd^2 + c^2 d}{ad + b^2}$, e faremos $b^2 = dm$, $c^2 = dn$, e $a^i = d^2 p$, o que mudará a expressão dada em $\frac{(p + b + n)d}{a + m}$.

De tudo isto se segue, que a construcção das quantidades racionais, quando o numero das dimensões do numerador não exceder as do denominador em mais de huma unidade, se reduz a achar huma quarta proporcional a tres linhas dadas. Passemos agora ás quantidades, em que a differença das dimensões he de duas, e tres unidades: nunca o excesso pôde ser maior, excepto quando se houver tomado alguma linha para unidade, ou quando alguns factores representarem numeros.

247 Quando a differença das dimensões he de duas unidades, a quantidade exprime huma superficie, e a sua construcção se pôde reduzir á de hum parallelogrammo, ou á de hum quadrado.

Por exemplo, para construir $\frac{a^2 + a^2b}{a + c} =$
 $a \cdot \frac{a^2 + ab}{a + c}$, acharemos a linha $m = \frac{a^2 + ab}{a + c}$,
 e a expressão se tornará em $a.m$, que he a superficie de hum parallelogrammo que tem a por base, e m por altura: logo reciprocamente, esta superficie representará $a.m$, ou $\frac{a^2 + a^2b}{a + c}$. Da mesma forte $\frac{a^2 + bc^2 + d^2}{a + c}$, fazendo $bc = am$, e $d^2 = an$, se muda em $\frac{a(a^2 + mc + nd)}{a + c}$.

248 Se a differença entre as dimensões do numerador e do denominador for de tres unidades, a quantidade exprimirá hum solido e se construirá como hum parallelepipedo. Por exemplo,
 a^3

$\frac{a^3b + a^2b^2}{a + c}$ póde considerar-se como $\frac{ab(a^2 + ab)}{a + c}$
 $= abm$, sendo m a linha que der a construcção de
 $\frac{a^2 + ab}{a + c}$. E como ab representa hum parallelo-
 grammo, se concebermos hum parallelepipedo, que
 tenha ab por base e m por altura, a sua solidez
 representará $\frac{a^3b + a^2b^2}{a + c}$.

249 Quanto ás quantidades radicais do segun-
 do grão, podem construir-se, ou por huma meia
 proporcional entre duas linhas dadas, ou pela hy-
 potenufa, ou por algum dos outros lados de hum
 triangulo rectangulo.

Por exemplo, para construir \sqrt{ab} , tira-se
 (Fig. 8) a linha indefinida AB, na qual se toma
 AC igual á linha a , CB igual a b , e sobre a to-
 talidade AB como diametro forma-se hum semi-
 circulo, que cortando em D a perpendicular le-
 vantada em C, dará CD (31. 3, e Cor. 8. 6. Eucl.)
 por valor de \sqrt{ab} .

Donde vem, que para transformar hum paralle-
 logrammo em quadrado, tomaremos huma meia
 proporcional entre a base e a altura; para os tri-
 angulos, tomaremos huma meia proporcional en-
 tre a base e ametade da altura; para os circulos,
 tomaremos huma meia proporcional entre o raio
 e a semicircumferencia; e para qualquer figura re-
 ctilinea, reduzilla-hemos a rectangulo (45. 1.
 Eucl.), ao qual applicaremos o que acabámos de
 dizer dos parallelogrammos.

Para construir $\sqrt{(3ab + b^2)} = \sqrt{b(3a + b)}$,
 acharemos huma meia proporcional entre $3a + b$
 e

e b . Do mesmo modo, se tivermos $\sqrt{(a^2 - b^2)} = \sqrt{(a + b)(a - b)}$, buscaremos a meia proporcional entre $a + b$ e $a - b$. Se a expressão for $\sqrt{(a^2 + bc)}$, fazendo $bc = am$, teremos $\sqrt{(a + m)a}$, que se construirá como temos dito.

Podemos construir do mesmo modo a quantidade $\sqrt{(a^2 + b^2)}$; porém he mais simples descrever hum triangulo rectangulo (*Fig. 9.*), cujos lados AB, AC sejaõ a e b ; será (47. 1. Eucl.) a hypotenusa $BC = \sqrt{(a^2 + b^2)}$. A mesma construcção pôde ter $\sqrt{(a^2 + bc)}$, fazendo $bc = m^2$.

A expressão $\sqrt{(a^2 - b^2)}$ pôde construir-se tambem de outra sorte; porque descrevendo (*Fig. 11.*) sobre $AB = a$ como diametro hum semicirculo, e tirando de A a corda $AC = b$, será (31. 3., e 47. 1. Eucl.) $BC = \sqrt{(a^2 - b^2)}$.

Se a quantidade tiver mais de dous termos de baixo do radical, reduziremos a sua construcção a algum dos methodos precedentes por meio das transformações. Tendo, por exemplo, $\sqrt{(a^2 + bc + ef)}$, faremos $bc = am, f = an$, e construiremos a transformada $\sqrt{(a + m + n)a}$; ou de outra sorte, faremos $bc = m^2, ef = n^2$, e construiremos $\sqrt{(a^2 + m^2 + n^2)}$, o que se consegue, pondo $\sqrt{(a^2 + m^2)} = b$, e $\sqrt{(b^2 + n^2)} = i$.

O modo porém mais simples de construir os radicais, que contém huma serie de quadrados positivos, como por exemplo $\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \&c.)}$, consiste em considerar successivamente cada hypotenusa como hum lado. Assim, to-
ma-

ma-se (*Fig. 10.*) $AB = a$, e levantando a perpendicular $AC = b$, será $BC^2 = a^2 + b^2$; levantando a perpendicular $CD = c$, teremos $BD^2 = a^2 + b^2 + c^2$; na extremidade de BD levantando a perpendicular $DE = d$, teremos $BE^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$; e continuando assim por diante, a ultima hypoténusa será o valor de $\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \&c.)}$.

Se em semelhantes expressões entrarem quadrados negativos, formar-se-ha hum quadrado m igual á soma dos quadrados positivos, outro n igual á soma dos negativos, e assim teremos para construir $\sqrt{(m^2 - n^2)}$.

Finalmente, havendo fracções debaixo do radical, multiplicaremos ambos os termos dellas pelo denominador. Assim $a \sqrt{\frac{b+c}{d+e}}$ muda-se em $\frac{a\sqrt{(b+c)(d+e)}}{d+e}$, que he facil de construir.

Por estes mesmos principios podemos muitas vezes simplificar as construcções nos casos particulares, attendendo ao que for proprio de cada problema. Esta materia não admite regras gerais; sómente advertiremos, que sem embargo de que a construcção das quantidades radicais do segundo grão se reduz a achar quartas proporcionais, meias proporcionais, e a construir triangulos re-
ctangulos; com tudo algumas vezes se conseguem construcções mais ou menos simples e elegantes, conforme o methodo de que usarmos para achar as meias proporcionais; por tanto ensinaremos mais
dous

dois modos de tomar huma meia proporcional entre duas linhas dadas.

Consiste o primeiro em descrever sobre a maior AB (*Fig. 11.*) hum semicirculo , e tomando huma parte AD igual á menor , levanta-se a perpendicular DC , e tira-se AC , que será (31. 3, e Cor. 8. 6. Eucl.) meia proporcional entre AB e AD.

O segundo consiste em tirar (*Fig. 12.*) huma linha AB igual á maior , e tomando nella huma parte AC igual á menor , descreve-se sobre o resto BC hum semicirculo , cuja tangente AD (36. 3, e 17.6. Eucl.) he meia proporcional entre AB e AC.

Concluamos pois , que as quantidades racionais se constroem sempre por linhas rectas , e as radicais do segundo gráo pelo circulo e pela linha recta juntamente.

Quanto aos radicais de grãos superiores , a sua construcção depende da combinaçãõ de differentes linhas curvas , das quais havemos de tratar , occupando-nos primeiramente com alguns problemas , cuja resoluçãõ depende de quantidades ou racionais , ou radicais do segundo gráo.

Problemas de Geometria , e reflexões tanto sobre o modo de os pôr em equaçãõ , como sobre as differentes soluções que dão as equações.

250 **P** Ara pôr os problemas de Geometria em equaçãõ , serve o mesmo principio que havemos dado (67) . Porém a Analyse nesta parte , ou os raciocinios que se fazem para verificar a incognita , e deduzir assim a equaçãõ , dependem de serem conhecidas algumas propriedades da quantidade

de desconhecida. Nas questões numéricas ordinariamente basta traduzir em linguagem algebrica o enunciado do problema; mas na applicação da Algebra á Geometria he necessario fazer uso de outros meios, que iremos ensinando pouco a pouco. Por ora basta dizer, que para verificar huma quantidade, nem sempre he necessario examinar se ella satisfaz immediatamente ás condições do problema; faz-se muitas vezes esta verificação commodamente, averiguando se a quantidade tem certas propriedades, que são essencialmente conexas com as ditas condições. Passemos aos exemplos, que se percebem melhor do que os preceitos gerais.

251 Probl. I. *Inscrever hum quadrado ABCD (Fig. 13.) no triangulo dado EHI.*

Por *triangulo dado* entendemos hum triangulo, em que tudo he conhecido, lados, angulos, altura, &c.

Examinando o problema, vê-se que não se trata de mais, que de achar na altura EF hum ponto G, pelo qual conduzindo AB parallela a HI, seja $AB = GF$.

Supponhamos a altura conhecida $EF = a$, a base $HI = b$, e $GF = x$; será $EG = a - x$. Sendo pois AB parallela a HI, teremos (2.6. Eucl.) $EF : EG :: FI : GB :: HI : AB$; isto he,

$a : a - x :: b : AB = \frac{ab - bx}{a}$; e como AB de-

ve ser igual a GF, teremos $\frac{ab - bx}{a} = x$, da

qual se tira $x = \frac{ab}{a + b}$.

Para construir esta quantidade (246), conduza-se de F para O huma linha $FO = a + b = EF + HI$, e tire-se EO; tomando depois $FM = HI = b$, tire-se parallelamente a EO a linha MG, a qual encontrando EF no ponto G, determinará GF, ou x ; pois que os triangulos semelhantes EFO, GFM daõ $FO (a + b) : FM (b) ::$

$$FE (a) : FG = \frac{ab}{a + b}.$$

252 Probl. II. Sendo dado o comprimento da linha BC (Fig. 14.) com os angulos B e C, que formão com ella as duas BA e CA, determinar a altura AD, em que estas ultimas linhas se haõ de encontrar.

Por angulo dado entende-se dado o valor do seu seno, tangente, &c. que saõ as linhas, por meio das quais entraõ os angulos no calculo algebrico.

Seja $BC = a$, $AD = y$. No triangulo rectangulo ADC (Trig. 164.) temos $CD : DA (y) :: 1 : m$, sendo m a tangente do angulo ACD, e suppondo o raio igual á unidade; logo $CD = \frac{y}{m}$.

Pela mesma razaõ $BD = \frac{y}{n}$, sendo a tangente de $ABD = n$. Mas he $BD + DC = BC = a$; logo $\frac{y}{m} + \frac{y}{n} = a$, donde vem $y = \frac{amn}{m + n}$.

Esta expressaõ póde simplificar-se, introduzindo em lugar das tangentes de C e B as suas cotangentes, que chamaremos p e q . Porque sendo (Trig. 26. III.) $m = \frac{1}{p}$, e $n = \frac{1}{q}$, teremos

$y = \frac{a}{p+q}$, que he muito facil de construir.

253 Se havendo pois revolido hum problema com certas quantidades dadas, não chegarmos a hum resultado taõ simples como se desejar, he escusado começar o calculo de novo com outras quantidades, a fim de tentar a simplificação: basta, como no exemplo precedente, exprimir em equações as relações, que tem as quantidades em que está resolvido o problema, com aquellas que de novo se introduzem, e fazer substituições.

254 Probl. III. Sendo dados os tres lados de hum triangulo ABC (Fig. 15.), achar a perpendicular BD, e os segmentos AD, DC.

Se conhecessemos estas linhas, e as quizessemos verificar, no triangulo rectangulo BDC somariamos os quadrados de BD, DC, e veriamos se a soma era igual ao quadrado de BC (47. 1. Eucl.). O mesmo se praticaria no triangulo ABD.

Seja pois $BD = y$, $CD = x$, $BC = a$, $AB = b$, $AC = c$; será $AD = c - x$. Logo teremos $x^2 + y^2 = a^2$, e $c^2 - 2cx + x^2 + y^2 = b^2$, as quais daõ $2cx - c^2 = a^2 - b^2$, e por conseguinte

$$x = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c} = \frac{1}{2} \frac{(a+b)(a-b)}{c} + \frac{1}{2}c, \text{ que he muito facil de construir (246).}$$

Das muitas conclusões, que se podem tirar destas equações, exporemos algumas para exercitar os principiantes a ler em huma equação o que ella contém.

255 1º A equação $2cx - c^2 = a^2 - b^2$, ou
 $e(2x - c) = (a + b)(a - b)$ dá (Arith. 180.)
 $e : a + b :: a - b : x - (c - x)$, isto he,
 $AC : BC + AB :: BC - AB : CD - AD$,
 como achámos (Trig. 181).

256 2º Se do ponto C com o raio BC descrevermos o arco BO, e tirarmos a corda BO, teremos $BO^2 = BD^2 + DO^2$, ou, por ser $DO = a - x$, $BO^2 = y^2 + a^2 - 2ax + x^2$; mas he $y^2 + x^2 = a^2$; logo será $BO^2 = 2a(a - x) = 2a\left(a + \frac{b^2 - a^2 - c^2}{2c}\right) = \frac{a}{c}(b^2 - (c - a)^2) = \frac{a}{c}(b + c - a)(b - c + a) = \frac{a}{c}(a + b + c - 2a)(a + b + c - 2c) = \frac{4a}{c}(s - a)(s - c)$,

representando por $2s$ a soma dos tres lados. Tire-se de C para OB a perpendicular CI; no triangulo CIO teremos (Trig. 162.) $CO(a) : OI(\frac{1}{2}BO) :: R : \text{sen OCI}$, e por conseguinte $BO^2 = \frac{4a^2}{R^2}(\text{sen OCI})^2$. Igualando os dous valores de BO^2 , acharemos $ac(\text{sen OCI})^2 = R^2(s - a)(s - c)$, ou $ac : (s - a)(s - c) :: R^2 : (\text{sen OCI})^2$, como se achou (Trig. 183).

257 3º Por quanto he $y^2 = (a + x)(a - x) = \left(a + \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c}\right)\left(a + \frac{b^2 - a^2 - c^2}{2c}\right)$

=

$$= \left(\frac{(a+c+b)(a+c-b)}{2c} \right) \left(\frac{(b+a-c)(b-a+c)}{2c} \right),$$

será $4c^2y^2 = 2s(2s-2b)(2s-2a)(2s-2c)$, a qual dá a superfície do triangulo ABC $= \frac{cy}{2} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \dots$ (Trig. 189. Caso III.)

258 4º Da equação $2cx - c^2 = a^2 - b^2$ se tira $b^2 = a^2 + c^2 - 2cx$; porém se a perpendicular cahir fóra, teremos (Fig. 16.), conservando as mesmas denominações, $y^2 + x^2 = a^2$, e $y^2 + c^2 + 2cx + x^2 = b^2$, das quais se deduz $b^2 - a^2 = c^2 + 2cx$, ou $c : b + a :: b - a : c + 2x$, isto he, $AC : AB + BC :: AB - BC : CD + AD \dots$ (Trig. 181).

259 5º Pelas equações $b^2 = a^2 + c^2 + 2cx$ (258), e $b^2 = a^2 + c^2 - 2cx$ (254) se mostra, que em hum triangulo o quadrado do lado opposto a hum dos angulos he maior, ou menor que a somma dos quadrados dos outros dous lados, conforme o angulo he agudo, ou obtuso; e tambem como calculando os angulos de hum triangulo pelos lados, se vem no conhecimento da especie do angulo que se procura.

260 6º Estas mesmas equações confirmão o que havemos dito a respeito das quantidades negativas. O segmento CD tem situações contrarias, conforme a perpendicular cahe dentro ou fóra do triangulo (Fig. 15. e 16.); e com effeito o termo

260 acha-se com finais contrarios nas duas equações. Logo reciprocamente, sejaõ quais forem os calculos que se fizerem para hum destes triangulos, teremos os que convém aos casos analogos do outro, mudando os finais ás partes, que em huma mesma linha tiverem situações oppostas.

261 Ainda que em geral a facilidade, e os recursos, que ha para pôr em equação os problemas de Geometria, cresçaõ á proporção do numero de propriedades, que conhecermos das linhas; com tudo, como a Algebra dá meios para achar estas mesmas propriedades, o numero das proposições verdadeiramente necessarias vem a ser muito limitado: pôde dizer-se, que a 47 do 1º, e a 4 do 6º Livro de Euclides, saõ a base da applicação da Algebra á Geometria. O modo porém, porque se deve fazer uso destas duas proposições, varia muito conforme a natureza dos problemas, e não lembra de repente. Humas vezes devem produzir-se linhas até que se encontrem; outras vezes devem tirar-se linhas parallelas, ou que fação hum angulo dado com outra linha. Em huma palavra, nesta parte, como em qualquer outra, requer-se no Analysta hum certo discernimento para a escolha e uso dos meios. Como elle se adquire em parte com o exercicio, he conveniente que applicuemos estas observações a differentes exemplos.

262 Probl. IV. *Pelo ponto A (Fig. 17.) dado de posição a respeito de duas linhas HD, DI, que formão o angulo conhecido HDI, tirar huma recta AEG de maneira, que o triangulo intercepto EDG tenha huma superficie dada, isto he, huma superficie igual á do quadrado conhecido c^2 .*

Conduzamos por A a linha AB parallela a
DH,

DH, e a linha AC perpendicular a DG produzida; do ponto E onde AEG deve cortar DH, imaginemos tirada a perpendicular EF. Se DG e EF fossem conhecidas, ametade do seu producto deveria ser igual a c^2 .

Supponhamos pois $DG = x$, e vejamos se EF pôde exprimir-se em x , e quantidades dadas do problema.

Como a posição de A he dada, seraõ conhecidas as linhas BD e AC, que chamaremos a e b ; e pois que os triangulos semelhantes ABG, EDG daõ $BG : DG :: AG : EG$, e os dous tambem semelhantes ACG, EFG daõ $AG : EG :: AC :$

EF, seraõ $EF = \frac{AC \cdot DG}{BG} = \frac{bx}{a+x}$. Deven-

do pois ser $EDG = c^2$, teremos $\frac{bx}{a+x} \cdot \frac{x}{2} = c^2$, donde se tiraõ (100) para x estes dous valores $x = \frac{c^2}{b} \pm \sqrt{\left(\frac{c^4}{b^2} + \frac{2ac^2}{b}\right)}$; mas o segundo he inutil no caso presente.

Para construir o primeiro, isto he $\frac{c^2}{b} + \sqrt{\left[\left(\frac{c^2}{b} + 2a\right)\frac{c^2}{b}\right]}$, levanto em qualquer ponto C da linha indefinida PQ a perpendicular $AC = b$; tomo sobre CA e CP as duas CO e CM, cada huma igual a c , e tiro AM; a sua parallela ON dá $CN = \frac{c^2}{b}$, e por conseguinte $x = CN + \sqrt{[(CN+2a).CN]}$. Para achar $\sqrt{[(CN+2a).CN]}$, ou huma meia proporcional, sobre NC produzida

temo $CQ = 2a$, e com o diametro NQ descreveo hum semicirculo, que encontrará CA em V ; fazendo entao NP igual á corda NV , será $CP = CN + \sqrt{[(CN + 2a).CN]} = x$. Se tomarmos pois (*Fig. 17.*) $DG = CP$, acharemos o ponto G , pelo qual e por A tirando AG , será $EDG = c^2$.

263 Em quanto á significação do segundo valor de $x = \frac{c^2}{b} - \sqrt{[(\frac{c^2}{b} + 2a) \cdot \frac{c^2}{b}]}$, note-se,

que os dados da questao tanto pertencem ao angulo EDG (*Fig. 17.*), como ao seu igual $E'DG'$, formado pelas linhas GD , ED produzidas; e por tanto este valor resolve o problema, em que se propuzesse fazer no angulo $E'DG'$ o mesmo que fizemos no angulo EDG . Com effeito, chamando x a DG' , e conservando as outras denominações, os triangulos ABG' , $E'DG'$ daõ $BG' : DG' :: AG' : G'E'$; e abaixando a perpendicular $E'F'$ os triangulos ACG' , $E'F'G'$ daõ $AG' : G'E' :: AC : F'E'$; logo será $F'E' = \frac{AC \cdot DG'}{BG'} = \frac{bx}{a-x}$,

e pelas condições $\frac{bx}{a-x} \cdot \frac{1}{2} x = c^2$, a qual dá

$x = -\frac{c^2}{b} \pm \sqrt{(\frac{c^4}{b^2} + \frac{2ac^2}{b})}$; valores iguais abs do caso precedente, com a differença unica dos sinais, como deve ser.

A construcção do caso precedente tem tambem aqui lugar; a unica mudança que se deve fazer he por $NK = NV$ para a parte de Q , e será $x =$
P
CK,

CK, porque no caso presente $x = \frac{c^2}{b} \pm \sqrt{\left[\left(\frac{c^2}{b} + 2a\right)\frac{c^2}{b}\right]} = -CN \pm NV = -CN \pm NK = CK$. Logo, fazendo DG' igual a CK, e tirando por A e G' a linha AG'(E'), teremos o triangulo E'DG' = c^2 , isto he, acharemos a segunda soluçao do problema.

264 Se o ponto A estiver por baixo de BG (Fig. 19.), a linha AC = b sera negativa, e os dous primeiros valores de x seraõ $x = -\frac{c^2}{b} \pm$

$\sqrt{\left[\left(\frac{c^2}{b} - 2a\right)\frac{c^2}{b}\right]}$. Vê-se pois que o problema sera impossivel (98), quando for $2a > \frac{c^2}{b}$, e que os

dous valores de x seraõ negativos, se for $2a < \frac{c^2}{b}$;

ou por outras palavras, o problema he impossivel a respeito do angulo HDI, mas a respeito do angulo E'DG' tem duas soluções. Para as achar, ou para

construir $x = -\frac{c^2}{b} \pm \sqrt{\left[\left(\frac{c^2}{b} - 2a\right)\frac{c^2}{b}\right]}$, havendo determinado (Fig. 20.) como acima CN = $\frac{c^2}{b}$, descreveremos com o diametro NQ = $2a$

hum semicirculo NVQ, ao qual tiraremos a tangente CV; e tomando de ambas as partes de C as linhas CP, e CK, cada huma igual a CV, as linhas NP e NK seraõ os dous valores de x ; porque

que sendo $CP = CK = CV = \sqrt{(CQ \cdot CN)} =$
 $\sqrt{\left[\left(\frac{c^2}{b} - 2a\right)\frac{c^2}{b}\right]}$, teremos $NP = \frac{c^2}{b} -$
 $\sqrt{\left[\left(\frac{c^2}{b} - 2a\right)\frac{c^2}{b}\right]}$, e $NK = \frac{c^2}{b} + \dots$
 $\sqrt{\left[\left(\frac{c^2}{b} - 2a\right)\frac{c^2}{b}\right]}$. Como estas quantidades

saõ os valores de x com sinais contrarios, devemos tomallos de D para a parte de G (*Fig. 19.*), fazendo DG , e DG' iguais respectivamente a NP , e NK . Feito isto, se tirarmos pelo ponto A , e pelos pontos G e G' as rectas EG , $E'G'$, cada hum dos triangulos EDG , $E'DG'$ será igual a c^2 .

265 Se o ponto A (*Fig. 21.*) estiver dentro do angulo HDI , BD cahirá para a parte opposta, e os dous valores primitivos de x se tornarão em $x = \frac{c^2}{b} \pm$

$\sqrt{\left(\frac{c^4}{b^2} - \frac{2ac^2}{b}\right)}$, os quais saõ os mesmos (mudando os finais) que acabámos de construir. Devemos pois fazer a mesma construcção (*Fig. 20.*), tomando porém (*Fig. 21.*) NP e NK de D para I .

266 Finalmente, se o ponto A (*Fig. 22.*) estiver por baixo de BD , e dentro do angulo BDE' , a e b seraõ negativos, o que dará $x = -\frac{c^2}{b} \pm$

$\sqrt{\left(\frac{c^4}{b^2} + \frac{2ac^2}{b}\right)}$, com final contrario dos primeiros valores achados para x . Construindo-os pois

como fizemos (*Fig. 18.*), será CK o valor positivo de x , e CP o negativo; pelo que tomaremos DG (*Fig. 22.*) igual a CK para a parte de B, e DG' igual a CP para a parte opposta.

Demoramo-nos neste problema, para mostrar como huma equação comprehende todos os casos de hum problema, como estes se deduzem pela simples mudança dos finais, e como as situações oppostas das linhas se designaõ por finais contrarios, e reciprocamente.

267 Para mostrarmos ainda alguns usos destas soluções, supponhamos que se propõe este problema: *Pelo ponto dado A (Fig. 23.) fóra ou dentro do triangulo dado DHI, tirar huma linha AF, que divida o triangulo em duas partes DEF, EFH, as quais tenham entre si a razão conhecida de $m : n$.* A resolução deste problema incluye-se na do precedente. Com effeito, como he dado o triangulo DHI, saberemos que parte delle deve ser o triangulo DEF, achando o quarto termo da proporção $m + n : m :: DHI : DEF = \frac{m \cdot DHI}{m + n}$;

Visto pois poder-se achar hum quadrado c^2 igual a esta superficie (249), reduz-se a questaõ a tirar por A huma linha AEF, que com os lados DH, DI forme hum triangulo igual ao quadrado c^2 , que he o problema precedente.

268 Ao mesmo problema se reduz este: *Dividir em duas partes huma figura retilinea (Fig. 24.) pela recta tirada por qualquer ponto A, de sorte que tenham entre si huma razão dada.* Com effeito, sendo dada a figura BCDHK, saõ conhecidos todos

os seus angulos e lados ; logo com facilidade (Trig. 189. Caso I.) acharemos a superficie do triangulo BLC formado pelos lados KB , DC produzidos , como tambem a porção determinada EBCF da superficie total. Pelo que reduz-se a questão a tirar AEF de maneira , que forme com KL e DL hum triangulo igual a hum quadrado. Finalmente, pôde-se por este modo dividir huma figura em muitas partes , que tenhaõ entre si razões dadas.

269 Se huma equação não se alterar pela mudança , que fizemos nos finais de algumas quantidades conhecidas que nella entrarem ; ou se da mudança de posição na linha , ou linhas procuradas da figura não resultar mudança , nem de posição , nem de grandeza nas linhas dadas ; entãõ entre os differentes valores de x , que der a equação , haverá sempre hum que resolverá particularmente o caso indicado pela dita mudança. Vio-se por exemplo no Problema IV , que hum dos dous valores de x resolvia directamente o caso , em que a linha AEG (Fig. 17.) atravessasse o angulo HDI , como se havia supposto no calculo ; mas vio-se ao mesmo tempo , que o segundo valor de x resolvia o caso , em que se considerasse , não o angulo HDI , mas o seu verticalmente opposto. A razão disto he , porque devendo-se empregar em cada caso os mesmos dados , e fazer os mesmos raciocinios , chegaremos necessariamente a ter sempre a mesma equação ; logo a mesma equação deve resolver ambos os casos.

270 Probl. V. Do ponto dado A (Fig. 25.) fóra do circulo BDC tirar a recta AE , de sorte que a parte DE intercepta no circulo seja igual a huma linha dada c .

Pa-

Para saber de que modo se deve tirar AE, não he necessario mais do que buscar, que grandeza deve ter AD, para que seja $DE = c$. Suppondo pois $AD = x$, $AB = a$, $AC = b$, teremos $AE \cdot AD = AC \cdot AB$ (Corol. 36. 3. Eucl.), ou $(x + c)x = ab$; logo $x = -\frac{1}{2}c \pm \sqrt{(\frac{1}{4}cc + ab)}$.

Para construir sem transformações o primeiro valor, que he o que satisfaz ao problema actual, tiraremos do ponto A a tangente AT, e o raio TO, que será perpendicular a AT; então tomando $TI = \frac{1}{2}c$, teremos $AI = \sqrt{(\frac{1}{4}c^2 + AT^2)} = \sqrt{(\frac{1}{4}cc + ab)}$. . (36. 3. Eucl.). Logo para ter x , tomaremos $IR = TI$, e o arco RD descrito do ponto A com o raio AR determinará o ponto procurado D.

O segundo valor de $x = -\frac{1}{2}c - \sqrt{\frac{1}{4}cc + ab}$ cahe para a parte contraria a AD. Para achar a questaõ que elle resolve, noto, que suppondo a e b negativos, a equaçãõ $x^2 + cx = ab$ não padece mudança alguma; logo esta equaçãõ resolve tambem o caso de ser dado o circulo $B'D'E'C'$, e a elle pertence o segundo valor de x . Na construcção precedente pois se produzirmos AI de maneira, que seja $IR' = IT$, o arco descrito do ponto A com o raio AR' marcará o ponto E' tal, que a parte intercepta $E'D'$ será igual a c .

Como os dous circulos são iguais, e estão situados da mesma maneira, ambas as soluções podem pertencer ao mesmo circulo, de sorte que descrevendo do ponto A com o raio AR' o arco $R'E$, a linha AE tambem resolverá o problema. Porém
das

das duas soluções que dá o calculo, a primeira cahe da direita de A, e pertence ao ponto D da circumferencia convexa; a segunda cahe da esquerda, e pertence ao ponto E' da circumferencia concava.

271 Probl. VI. *Achar na direcção da linha dada AB (Fig. 26.) hum ponto C tal, que a sua distancia ao ponto A seja meia proporcional entre a sua distancia ao ponto B, e a linha toda AB.*

Seja $AB = a$, e $AC = x$; será $BC = a - x$; e como deve ser $AB : AC :: AC : CB$, teremos $x^2 + ax = a^2$; logo $x = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + a^2)}$.

Para construímos o primeiro valor de x , levantaremos (249) em B a perpendicular $BD = \frac{1}{2}a$, e tirando AD, diminuiremos desta a linha BD, e teremos $AO = x$. Levando pois AO de A para a parte de B, determinaremos o ponto procurado C.

Se produzirmos AD até O', de forte que seja $DO' = DB$, teremos AO' por segundo valor de x ; e levando esta linha sobre AB desde A para a parte opposta áquella para que x tendia por supposição, teremos o ponto C', que tambem satisfaz á questáo.

Este problema he o que se resolveu na Geometria (30. 6. Eucl.) pelo methodo synthetico.

272 Nos problemas precedentes havemos tomado para incognita huma linha, a qual depois de ser conhecida podeffe determinar todas as outras pelas condições da questáo; e isto he o que devemos sempre praticar. Como porém muitas linhas podem ter a dita prerogativa, sem que de todas ellas resultem equações igualmente simples, de-

deve preferir-se huma dellas. Para nos dirigirmos nesta escolha serve a regra seguinte.

273 *Se entre as linhas ou quantidades, cada huma das quais sendo tomada por incognita pôde determinar todas as outras, se acharem duas que conduzão á mesma equação, ainda que esta tenha finais diferentes; escolheremos para incognita outra quantidade, que dependa igualmente de ambas; por exemplo, a sua semisoma, ou a sua semidifferença, ou huma meia proporcional, &c. Assim teremos huma equação mais simples, como se verá no problema seguinte.*

274 *Probl. VII. Pelo ponto D (Fig. 27.) situado dentro do angulo reſto IAE, e em igual distancia dos lados IA, AE, tirar huma reſta DB, de maneira que a parte CB comprehendida dentro do angulo EAB seja igual a huma linha dada c.*

Tendo abaixado as perpendiculares DE, DI, qualquer das linhas CE ou AB, AC ou IB, CD ou DB pôde servir indifferentemente para incognita. Se tomarmos, por exemplo CE, então suppondo $CE = x$, e $DE = DI = a$, será $AC = a - x$, e pelos triangulos semelhantes DEC, CAB teremos $AB = \frac{aa - ax}{x}$; mas he $AB^2 +$

$AC^2 = BC^2$, isto he $(a - x)^2 + \left(\frac{aa - ax}{x}\right)^2 = cc$; logo virá a equação do quarto gráo $x^4 - 2ax^3 + 2aaxx - ccxx - 2a^3x + a^4 = 0$.

Se em lugar de CE tomarmos IB por incognita, teremos a mesma equação, como se pôde vêr fazendo $CE = x$, e imitando a solução precedente. Se tomarmos AB ou AC, acharemos huma

ma

ma mesma equação, exceptuando os finais; o mesmo acontece, tomando BD ou DC.

Tomemos pois (273) para incognita a soma das duas linhas BD e DC, a qual seja designada por $2x$; será (Trig. 177.) $DB = x + \frac{1}{2}c$, e $DC = x - \frac{1}{2}c$; e como as paralelas DI, CA dão

$$AB = \frac{ac}{x - \frac{1}{2}c}, \text{ e } AC = \frac{ac}{x + \frac{1}{2}c}, \text{ teremos}$$

$$\frac{a^2c^2}{(x - \frac{1}{2}c)^2} + \frac{a^2c^2}{(x + \frac{1}{2}c)^2} = cc, \text{ isto he } x^4 -$$

$$\left(\frac{1}{2}cc + 2aa\right)x^2 = \frac{1}{2}aacc - \frac{1}{16}c^4, \text{ equa-}$$

ção, que sendo ainda do quarto grão, he com tudo mais facil de resolver (173) do que a precedente. Se empregarmos duas incognitas, suppondo $AB + AC = 2x$, e $AB - AC = 2y$, isto he, $AB = x + y$, e $AC = x - y$, teremos equações bem simples, que os principiantes acharão com facilidade.

$$\text{A equação } x^4 - \left(\frac{1}{2}cc + 2aa\right)x^2 = \frac{1}{2}aacc$$

$$- \frac{1}{16}c^4 \text{ dá } x = \pm \sqrt{\left[\frac{1}{4}cc + aa \dots \dots\right]}$$

$\pm a\sqrt{cc + aa}$]; porém destes quatro valores o

que unicamente pertence ao problema, considerado do modo porque foi proposto, he $x = +$

$$\sqrt{\left[\frac{1}{4}cc + aa + a\sqrt{cc + aa}\right]}. \text{ O valor}$$

$$x = + \sqrt{\left[\frac{1}{4}cc + aa - a\sqrt{cc + ac}\right]} \text{ re-}$$

fol-

solve o problema, no caso de se pedir que a linha CB (*Fig. 28.*) esteja dentro do mesmo angulo EAI, em que está o ponto D; e neste caso x representa a semidifferença das linhas BD, DC. Com effeito, sendo $2x$ esta differença, será $DB = \frac{1}{2}c + x$,

e $CD = \frac{1}{2}c - x$; logo, continuando como aci-

ma, teremos $x^4 - \left(\frac{1}{2}cc + 2aa\right)x^2 = \frac{1}{2}aacc$

$-\frac{1}{16}c^4$, isto he, a mesma equação que achá-

mos para a soma das linhas BD e CD (*Fig. 27.*).

Como pois a mesma equação satisfaz aos dous casos, huma das suas raizes deve dar a soma das ditas linhas, e outra a differença; bem entendido, que estas duas raizes são as mesmas que havemos indicado, porque as outras duas são negativas, e por tanto pertencem a casos inteiramente oppostos, que passamos agora a considerar.

No problema presente, ou ao menos na equação, não se determina se o ponto D (*Fig. 27.*) está por baixo de AI, e á esquerda de AE, como se suppoz primeiramente, ou se está pelo contrario por cima da primeira, e á direita da segunda, como se vê relativamente a A'I' e A'E'. E porque neste ultimo caso a quantidade a se torna negativa, teremos a solução competente, pondo $-a$

em lugar de $+a$ na equação achada $x^4 - \left(\frac{1}{2}cc + 2aa\right)x^2$ &c.; mas esta com isso não padece

mu-

mudança ; logo a mesma equação resolve estes dous casos novos , e por conseguinte dos outros dous valores de x hum dá a soma das linhas DB' , DC' (*Fig.27.*) , e o outro a sua differença (*Fig.28.*) . Com effeito , cahindo nesta nova posição os pontos B e C para partes oppostas , a respeito daquellas para que antecedentemente cahiaõ , tanto a soma , como a differença das linhas DB' e DC' devem ser negativas , e assim as dá a equação.

Para construir a equação $x = \sqrt{aa + \frac{1}{2}cc \pm a\sqrt{aa + cc}}$, tome-se na linha EA produzida (*Fig. 27* , e *28.*) a parte $AN = c$, e tirando IN , tome-se sobre DI produzida a parte $IK = IN$, e sobre DK como diametro descrevia-se o semicirculo KLD , que encontra em L a recta AI produzida , se for necessario. Pelo meio H de AN tire-se IH , e tomando de IK (*Fig. 27.*) a parte $IM = IH$, será LM o primeiro valor de x . Na *Figura 28* porém descreveremos do ponto L como centro , e com o intervallo IH hum arco , o qual cortando IK em M , dará IM pelo segundo valor de x . E como $BD = x + \frac{1}{2}c$, será $BD = LM + AH$ (*Fig. 27.*) , e $BD = IM + AH$ (*Fig. 28.*) ; descrevendo pois do ponto D como centro , e com o intervallo BD assim determinado hum arco , que corte IA produzida em hum ponto B , a recta BD terá as condições dadas.

A construcção do segundo valor de x suppõe que IH (*Fig. 28.*) não he menor que LI ; se o fosse , o problema seria impossivel : isto mesmo se deduz tambem da equação.

A soma das linhas DB , e DC (*Fig.27.*) , ou a sua differença deu huma equação mais simples , do que CE , ou AC , ou AB , ou IB . A razão he ,
por-

porque a relação, que DB e DC tem com IB e AB, he semelhante áquella que as mesmas linhas DB e DC tem com AC e CE; isto he, DB e DC podem determinar-se por operações semelhantes, quer se faça uso de IB e AB, quer de AC e CE. Em geral, as equações, como incluem todas as relações que as incognitas tem com as quantidades de que dependem, serão tanto mais simples, quanto for menor o numero de relações, que a quantidade escolhida para incognita tiver com as outras. Eis-aqui hum exemplo na resolução seguinte do mesmo problema.

275 Por quanto o angulo CAB (*Fig. 29.*) he recto, o circulo descrito sobre CB passará por A; e se tirarmos DA até encontrar a circumferencia em M, o angulo BAM = DAI = 45° (5.1. Eucl.) terá por medida ametade de MB (20.3. Eucl.), e por conseguinte será o arco MB de 90°; logo tirando o raio LM, o triangulo DLM será rectangulo, e conseguintemente abaixando sobre DM a perpendicular LN, será LM (Corol. 8. 6. Eucl.) meia proporcional entre DM e MN, ou (3. 3. Eucl.) entre DM e AN. Tomando pois AN para incognita, supponhamos AN = x, DA = d; será DM = d + 2x, e conseguintemente d + 2x:

$$\frac{1}{2} c :: \frac{1}{2} c : x ; \text{ logo } xx + \frac{1}{2} dx = \frac{1}{8} cc , \text{ a}$$

$$\text{qual dá } x = -\frac{1}{4} d \pm \sqrt{\left(\frac{1}{16} dd + \frac{1}{8} cc\right)} .$$

Para construirmos esta quantidade, tomemos nos lados AO, AI do angulo recto IAO as partes Am, An iguais cada huma a $\frac{1}{4} c$, e acabando o quadrado Ampn, tiremos a diagonal Ap que será perpen-

pendicular a DA, e igual a $\sqrt{\left(\frac{1}{16}c^2 + \frac{1}{16}c^2\right)}$; logo tomando na linha AD a parte Ar igual a $\frac{1}{4}d$, ou $\frac{1}{4}AD$, teremos $pr = \sqrt{\left(\frac{1}{16}d^2 + \frac{1}{16}c^2 + \frac{1}{16}c^2\right)}$. Para ter pois o primeiro valor de x , descrever-se-há do ponto r como centro, e com intervallo rp hum arco, o qual cortando DM em N, dará $AN = -\frac{1}{4}d + \sqrt{\left(\frac{1}{16}d^2 + \frac{1}{8}c^2\right)}$; de maneira que levantando no ponto N a perpendicular NL, a qual seja cortada em L por hum arco descrito do ponto A como centro com o intervallo $\frac{1}{2}c$, determinará o ponto L, pelo qual e por D tirando DCB, teremos resolvido o problema.

Se conduzirmos (*Fig. 30*) rp de r para N, será AN o segundo valor de x , e executando a respeito de N o mesmo que se fez para o ponto N na *Fig. 29* se achará o ponto L, o qual juntamente com D determinará BLD. Com effeito, chamando a $An x$ (*Fig. 30*), e conservando as outras denominações, se applicarmos a esta figura o que dissemos da 29, teremos $2x - d : \frac{1}{2}c :: \frac{1}{2}c : x$, e ultimamente $x = \frac{1}{4}d \pm \sqrt{\left(\frac{1}{16}d^2 + \frac{1}{8}c^2\right)}$. Aqui se vê que hum dos valores de x he o mesmo que acima achámos, á excepção dos finais, como deve ser.

Póde acontecer que o arco descrito do ponto A (*Fig. 30*) não encontre a perpendicular NL, porque póde ser $\frac{1}{2}c < AN$; e isso não obstante, a Algebra não mostra caso algum de impossibilidade,

de, porque todos os termos debaixo do radical são positivos. Deve-se porém advertir, que a Algebra sómente declara a impossibilidade, quando ou explicita, ou implicitamente se exprime tudo o que o problema suppõe, e isso he o que não se fez neste caso; porque suppondo o problema tacitamente, que os tres pontos D, A, L não estão na mesma linha recta, sómente se exprimio que LM era meia proporcional entre DM, e NM, propriedade que tambem pôde ter lugar, quando os tres pontos estão em linha recta. Com effeito se se propuzer este problema: *Achar na direcção DL (Fig. 31) o intervallo que deve haver entre duas rectas dadas DA e ML, para que ML seja meia proporcional entre DM e MN, sendo N o meio de AM;* he facil de vêr, que acharemos a mesma equação de cima, e que esta tem duas soluções, huma para o caso de estarem os pontos A e M entre D e L, e outra para o caso contrario. Não he pois de admirar, que a Algebra não declare em que caso o primeiro problema he impossivel, por quanto deve dar a solução do segundo problema, o qual he sempre possivel.

276 Pelo que devemos distinguir duas especies de problemas, a saber: *concretos*, e *abstractos*. Por problemas concretos entendemos aquelles, nos quais, como no penultimo, a quantidade procurada tem de particular alguma propriedade, condição, ou construção, que a equação não exprime. Os problemas abstractos pelo contrario são aquelles, em que as quantidades são consideradas unicamente como quantidades, e cuja equação exprime quanto nelles se contem; desta natureza he o ultimo problema. Os abstractos tem tantas solu-

luções, quantas são as raízes reais da equação; nos concretos porém o numero das soluções he em muitos casos ainda menor que o numero das raízes positivas da equação, como se verá no exemplo seguinte.

277 Probl. VIII. *Resolvendo-se todo o sector esferico CBAD (Fig. 32) em duas partes, das quais huma he o segmento esferico ABD, e outra a pyramide conica recta CBD; pergunta-se em que lugar será o segmento igual á pyramide.*

Sabemos pela Geometria, que o sector esferico he igual ao producto da superficie do segmento esferico BAD pelo terço do raio AC, e que a superficie do segmento se acha multiplicando a circumferencia ABED pela altura AP. Suppondo pois a razão do diametro para a circumferencia $= 1 : c$, $AC = a$, e $AP = x$, teremos $ABED = 2ca$; logo será a superficie do segmento esferico $= 2ca \cdot x$, e a solidez do sector $= \frac{2}{3} ca^2x$.

Para ter a solidez da pyramide, deve-se multiplicar a superficie do circulo cujo raio he BP pelo terço da altura CP. Mas $BP = \sqrt{CB^2 - CP^2} = \sqrt{2ax - xx}$; logo será a solidez da pyramide $= 2c \sqrt{2ax - xx} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2ax - xx} \cdot \frac{1}{3} (a - x) = \frac{c}{3} (a - x) (2ax - xx)$. Para que pois as duas partes do sector sejaõ iguais entre si, he necessario que este seja o dobro de huma daquellas; por tanto teremos $\frac{2}{3} caax = \frac{2}{3} c (a - x) (2ax - xx)$, ou $x^2 - 3ax = -a^2$, da qual se tira $x = \frac{1}{2} a (3 \pm \sqrt{5})$.

Para

Para construir o segundo valor, ou $x = \frac{3}{2}a$
 $-\sqrt{\left(\frac{9}{4}aa - aa\right)}$, que he o que convem ao
 problema actual, descreveremos sobre $AM = \frac{3}{2}a$

o semicirculo AOM , e inscrevendo nelle a re-
 cta $AO = a$, se tirará OM , a qual sendo leva-
 da de M até P para a parte de A , determinará
 $AP = x$.

A outra soluçãõ $x = \frac{1}{2}a(3 + \sqrt{5})$ dá x maior
 que $2a$, e por tanto não pertence á esfera, mas a
 este problema abstracto: Sendo dividida a linha AN
 (Fig. 33) em tres partes iguais nos pontos B e D ,
 achar na sua direcção hum ponto P tal, que a parte
 AD seja meia proporcional entre as distancias AP e
 PN . Porque, seja $AD = a$, $AP = x$, teremos
 $PN = 3a - x$; e dando as condições $x : a :: a : a - x$,
 acharemos $x = \frac{1}{2}a(3 \pm \sqrt{5})$; valores que
 se construirãõ como acima, á excepção de que
 se levará MO de M até P' para a parte de N , a
 fim de ter $AP' = \frac{1}{2}a(3 + \sqrt{5}) = x$.

Outras applicações da Algebra.

278 **S**Eja c o numero 3,1415 &c, ou a cir-
 cumferencia do circulo que tem a unidade por di-
 ametro; a circumferencia do circulo do raio a será
 $= 2ca$, e a superficie $= ca^2$. Donde se segue que
 as superficies dos circulos estão entre si como os
 quadrados dos seus diametros; porque tendo sem-
 pre

pre c o mesmo valor, ca^2 sómente crescerá como crescer a^2 .

Suppondo que he b a altura de hum cylindro, cujo raio da base he a , ferá a sua solidez $= ca^2b$. Segue-se pois que os cylindros estaõ entre si como os productos das alturas pelos quadrados dos raios das bases. Se as alturas forem proporcionais aos raios das bases, ou se for $b = ma$, sendo m constante, ferá a solidez $= cma^3$; isto he, os cylindros estaraõ entre si como os cubos dos raios das bases.

Em geral, se huma quantidade se exprimir por hum numero qualquer n de factores, os quais sejaõ proporcionais huns aos outros, crescerá a quantidade do mesmo modo que crescer hum factor, elevado á potencia n . Seja, por exemplo, a quantidade $A = abcd$; se for $b = ma$, $c = pa$, e $d = qa$, ferá $A = mpqa^4$, isto he, proporcional a a^4 . Isto mesmo tem tambem lugar, quando as quantidades naõ se exprimem por monomios. Logo: 1º Todas as figuras semelhantes, pois que se podem considerar como compostas de triangulos semelhantes, saõ entre si como os quadrados de qualquer das suas duas dimensões homologas. 2º Os solidos semelhantes, pois que se podem considerar como compostos de pyramides semelhantes, saõ entre si como os cubos de qualquer das suas tres dimensões homologas.

Naõ pôde agora haver difficuldade em comparar as quantidades expressas algebricamente, ou ellas sejaõ da mesma, ou de differente especie, com tanto que sejaõ da mesma natureza. Por exemplo, sendo V e v os volumes de dous corpos semelhantes, S e s as suas superficies, L e l as li-

Q

nhas

nhas homologas; teremos $\sqrt[3]{V} : \sqrt[3]{v} :: L : l$; e $\sqrt{S} : \sqrt{s} :: L : l$; logo será $\sqrt[3]{V^2} : \sqrt[3]{v^2} :: S : s$, o que mostra que as superficies crescem em razão menor do que os volumes.

279 Supponhamos a altura de huma pyramide conica truncada $= k$, a da pyramide inteira $= b$, e a da pyramide separada $= b'$, a superficie da base inferior $= s$, e a da superior $= s'$; será a solidez do tronco $= \frac{sb}{3} - \frac{s'b'}{3}$; mas he $b' = b\sqrt{\frac{s'}{s}}$ e $k = b - b' = b - b\sqrt{\frac{s'}{s}}$, ou $b = \frac{k\sqrt{s}}{\sqrt{s} - \sqrt{s'}}$;

logo será a solidez do tronco $= \frac{k}{3} \cdot \frac{s\sqrt{s} - s'\sqrt{s'}}{\sqrt{s} - \sqrt{s'}}$
 $= \frac{k}{3} (s + \sqrt{ss'} + s')$. Donde se segue, que

toda a pyramide conica truncada se compõe de tres pyramides igualmente altas, das quais huma tem por base a base inferior s , a outra a base superior s' , e a terceira huma meia proporcional $\sqrt{ss'}$ entre as duas bases.

280 Suppondo o raio de huma esfera $= a$, será a superficie de hum dos seus circulos maximos $= ca^2$, a superficie da esfera $= 4ca^2$, e a sua solidez $= 4ca^2 \cdot \frac{1}{3}a = \frac{4}{3}ca^3$.

Vio-se (277) que a solidez do sector, cujo segmento tinha a altura x , era $= \frac{2}{3}ca^2x$, e que a

da

da pyramide conica = $\frac{c(2ax - xx)(a - x)}{3}$; logo

a solidez do segmento = $\frac{2}{3}ca^2x - \frac{c}{3}(a - x)(2ax - xx) = cx^2(a - \frac{1}{3}x)$. He pois a solidez do segmento igual ao circulo, que tem por semidiametro a altura do segmento, multiplicado pelo raio menos o terço da dita altura.

Tendo as expressões algebricas das quantidades, com muita facilidade se resolvem os problemas, que sobre ellas se podem propôr, como mostraremos em dous exemplos.

Pertende-se formar huma pyramide conica que seja igual a huma esfera dada, e que tenha por base hum circulo maximo da mesma esfera: pergunta-se que altura se lhe deve dar. Seja x esta altura, e a o raio da base, será a solidez da pyramide = $\frac{ca^2}{3}x$; e como deve ser igual á esfera do raio a ,

teremos $\frac{c}{3}a^2x = \frac{4}{3}ca^3$, donde se deduz $x = 4a$;

Logo he necessario que a altura da pyramide seja o dobro do diametro da esfera, como consta tambem pela Geometria.

281 *Achar o raio de huma esfera, cujo pezo he dado tanto no ar, como na agua.*

Demonstra-se na Hydrostatica, que todo o corpo mergulhado em hum fluido perde huma parte do seu pezo, igual ao pezo do volume do fluido deslocado. Isto supposto, seja o pezo de huma pollegada cubica de agua = p , o pezo da esfera no ar = P , o pezo da mesma na agua = P' , o raio = x ;

Q 2

será

será a solidez $= \frac{4}{3} cx^3$, e o pezo de igual volume de agua $= \frac{4}{3} cpx^3$; logo conforme o principio exposto $P - \frac{4}{3} cpx^3 = P'$, donde se tira $x = \sqrt[3]{\frac{3(P - P')}{4cp}}$.

Se o globo no ar pezar 5 onças, e na agua 2; pezando hum pé cubico de agua 72 libras, ou sendo $p = \frac{2}{3}$ de onça, teremos $x = \sqrt[3]{\frac{3(5 - 2)}{\frac{2}{3} \cdot 4 \cdot c}} =$

$\sqrt[3]{\frac{27}{8c}}$, que posto em calculo por logarithmos dará

c	. . .	CL.	9,5028501
8	. . .	CL.	9,0969100
27	. . .	L.	1,4313638
lx^3	. . .		0,0311239
lx	. . .		0,0103746

Logarithmo a que corresponde o numero 1,0242; logo o raio da esfera será de 1,0242 pollegadas.

Havemos supposto tacitamente que o globo entra todo na agua em virtude do proprio pezo; se porém for necessario carregallo com algum pezo, para o mergulhar inteiramente, entãõ esse pezo additivo será a quantidade que devemos tomar por P' , o qual se fará negativo; isto he, teremos $x = \sqrt[3]{\frac{3(P + P')}{4cp}}$. Com effeito, sendo neste

caso

caso o pezo da esfera no ar menor que o pezo $\frac{4}{3} \rho x^3$ de hum igual volume de agua, a differença, ou $\frac{4}{3} \rho x^3 - P$ será o pezo P' que se deve ajuntar para a mergulhar totalmente; logo teremos $\frac{4}{3} \rho x^3 - P = P'$, da qual se tira $x = \sqrt[3]{\frac{3(P+P')}{4\rho}}$.

Das Linhas curvas em geral, e em particular das Secções Conicas.

282 **D**As linhas curvas que a Geometria considera, em razão do grande uso que têm na construcção das equações, e nas sciencias Físico-Mathematicas, humas são tais que cada hum dos seus pontos se pôde determinar pela mesma lei, isto he, por calculos e operações semelhantes; em outras porém cada ponto se determina por lei differente; ainda que esta mesma differença he sujeita a huma lei.

As linhas traçadas ao acaso, como, por exemplo, os rasgos de huma pena sobre o papel, não podem ser objecto de huma Geometria rigorosa. Sem embargo, a theoria das curvas conduz a imitar delineamentos rebeldes; e a arte de achar approximadamente o nexo entre quantidades, cuja lei he ou desconhecida, ou muito composta, não he a applicação menos util da Algebra á Geometria, como adiante veremos.

Para poder descrever as curvas de que trata a Geometria, he necessario conhecer a lei, a que estão

taõ sujeitos os differentes pontos de feu perimetro. De muitos modos pôde ella fer dada, ou indicando-se o meio para descrever as curvas por movimento continuo, como v. g. a respeito do circulo se faz girar huma linha ao redor de hum ponto; ou antes ensinando-se huma propriedade que pertença constantemente a cada ponto da curva, como por exemplo, sabendo-se que todo o angulo do semicirculo he recto (31. 3. Eucl.), podemos descrever o circulo do diametro dado AB (*Fig. 34*), tirando da extremidade A huma infinidade de linhas AC, AD, AE, &c., e conduzindo pela outra extremidade B as perpendiculares BC, BD, BE, &c., entã os pontos C, D, E, &c. pertenceraõ ao circulo que tem AB por diametro.

Finalmente a lei tambem pôde fer dada por huma equaçã, e assim o suppremos sempre, porque os dous primeiros modos servem para achar a equaçã que exprime a lei. Reduz-se pois esta theoria a representar a natureza de qualquer curva por huma equaçã, a qual serve para descrever a curva, e mostrar os seus usos e propriedades. De tudo isto vamos a dar hum exemplo no circulo, que ja conhecemos pela Geometria elementar.

283 Supponhamos que da curva AMB (*Fig. 35*) sabemos taõ sómente, que a perpendicular PM tirada de qualquer ponto M sobre a linha AB he meia proporcional entre as duas partes AP e PB.

Para exprimir esta propriedade em equaçã, seja $AB = a$, $AP = x$, $PM = y$; e teremos $AP(x) : PM(y) :: PM(y) : PB(a - x)$, isto he $yy = ax - xx$.

Para

Para descrever agora a curva, concebamos AB dividida, por exemplo, em 10 partes iguais, e tiremos por cada ponto de divisaõ as perpendiculares pm , pm , &c. Está claro, que se na equaçõ supuzermos successivamente x igual a cada huma das linhas Ap , Ap , &c., será y igual a cada huma das linhas correspondentes pm , pm , &c.; porque a equaçõ exprime, que para qualquer valor de x he sempre y meia proporcional entre x e $a - x$, e esta he a propriedade que supomos a cada huma das perpendiculares pm . Logo pela equaçõ acharemos successivamente cada ponto da curva, dando a x muitos valores, e calculando os correspondentes de y . Por exemplo, na hypothese de $a = 10$, a nossa equaçõ torna-se em $yy = 10x - xx$, e teremos

$$x = 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10$$

$$y = 0; \pm 3; \pm 4; \pm 4,5; \pm 4,9; \pm 5; \pm 4,9; \pm 4,5; \pm 4; \pm 3; 0$$

Tomando pois estes valores de y sobre as perpendiculares correspondentes aos valores 1, 2, 3, &c. de x , e fazendo o mesmo para a parte debaixo sobre as perpendiculares pm' , pm' , &c., determinaremos os pontos m , m , m' , m' , &c. pertencentes á curva que tem a propriedade dada.

Querendo ter maior numero de pontos, supporremos AB dividida em maior numero de partes, em 100, por exemplo, isto he, poremos $a = 100$; ou conservando o mesmo valor de $a = 10$, daremos a x os valores intermedios entre 1, 2, 3, &c., e calcularemos os correspondentes de y .

Os dous valores de $y = 0$ mostraõ que a curva encontra AB nos dous pontos de A e B, em hum

hum dos quais he $x = 0$, e no outro he $x = 10$. A equação tambem mostra o mesmo; porque nos lugares em que acontece o dito encontro, he $y = 0$, e metendo este valor na equação, teremos $0 = x(a - x)$: logo como este producto he nada, quando $x = 0$, e quando $x = a$, segue-se que y será nada nestes mesmos casos; isto he, a curva encontrará a linha AB no ponto A em que $x = 0$, e no ponto B em que $x = 10$.

284 Assim, para exprimir em equação a natureza de qualquer curva, reporta-se cada hum dos seus pontos m , m (Fig. 35) a duas rectas fixas AB, AOA que fação entre si hum angulo conhecido; porque he claro, que imaginando conduzidas pelos pontos m , m as linhas mp , e mp' parallelas a OAO, e AB, será determinada a posição de cada ponto, se forem conhecidos os valores das distancias mp' e pm , isto he, de Ap e pm , ou o valor de huma, e a razão entre ella e a outra. A expressão analytica da razão que tem entre si as linhas Ap e pm para cada hum dos pontos m , dá a equação da curva, a qual que será mais ou menos composta conforme o gráo mais ou menos elevado da equação.

As linhas Ap ou mp' chamaõ-se *abscissas*, e as linhas mp ou $p'A$ chamaõ-se *ordenadas*; humas e outras tem o nome commum de *coordenadas da curva*. E como pertencem indifferentemente a qualquer ponto da curva, o seu comprimento varia a cada instante, pelo que tanto ellas, como as letras x , y , z , &c. que as representaõ, se chamaõ *indeterminadas*. O ponto A donde se começã a contar as abscissas chama se a *origem das abscissas*, e o ponto donde se começã a contar as ordenadas Ap' ou pm , *origem das ordenadas*. Ainda que estes
dous

dous pontos na *Fig. 35.* não são diferentes, com tudo não ha outra razão para contar as abscissas do mesmo ponto, de que se contaõ as ordenadas, mais que a da simplicidade. Como as abscissas se podem tomar de huma e de outra parte da origem, seraõ negativas aquellas que estiverem na parte do eixo contraria á que se considerar como positiva. Na posição das ordenadas nada ha de essencial, se não o serem parallelas entre si; podem ser perpendiculares, ou obliquas ao eixo das abscissas. As ordenadas tambem se distinguem em positivas e negativas, conforme estaõ para huma, ou para outra parte do eixo das abscissas.

285 Mostremos agora como por meio da equação de huma curva se achaõ as suas propriedades.

1º Do meio C de AB tire se para qualquer ponto M a recta CM; o triangulo CPM sera sempre rectangulo, e por consequencia teremos $CM^2 = MP^2 + PC^2 = y^2 + \frac{1}{4}a^2 - ax + x^2$; e como $yy = ax - xx$ (283), acharemos $CM = \frac{1}{2}a$, isto he, todos os pontos M, m estaõ em igual distancia do ponto C; propriedade distinctiva da circumferencia do circulo.

2º Se conduzirmos por qualquer ponto M, e pelas extremidades A e B do diametro as rectas MA, MB, teremos $AM^2 = AP^2 + PM^2 = x^2 + y^2 = ax$, e $MB^2 = PM^2 + BP^2 = y^2 + a^2 - 2ax + x^2 = -ax + a^2$. Estas equações formadas daõ $AM^2 + MB^2 = a^2 = AB^2$, que he a propriedade do triangulo rectangulo; logo todos os angulos AMB são rectos.

3º A equação $AM^2 = ax$ dá $x : AM :: AM : a$; logo na curva de que se trata, todas as cordas AM são meias proporcionais entre o diametro AD e o segmento correspondente AP. Semelhantemente se acharão as outras propriedades.

Se contássemos as abscissas do centro, isto he se tomássemos CP, Cp, &c. por abscissas, está claro que representando cada huma por z, teriamos $x = \frac{1}{2}a - z$, e conseguintemente a equação do circulo ás coordenadas perpendiculares, contadas do centro, será $yy = \frac{1}{4}aa - zz$.

Outra qualquer propriedade pertencente a todos os pontos da curva, sendo traduzida algebricamente, dará a mesma equação ás mesmas coordenados. Se houver porém mudança na origem, ou na direcção dellas, ou em ambas as cousas juntamente, poderá apparecer huma equação diferente, ainda que será sempre do mesmo gráo. Havemos visto, que pela mudança das abscissas, em lugar de $yy = ax - xx$ tivemos a equação $yy = \frac{1}{4}aa - zz$ do mesmo gráo, a qual, como foi deduzida da primeira, tem a mesma propriedade por base. Porém se traduzissemos a propriedade que tem MC de ser sempre a mesma, e igual a $\frac{1}{2}a$, então conservando as mesmas denominações, teriamos (47. I. Eucl.) $yy + zz = \frac{1}{4}aa$, isto he $yy = \frac{1}{4}aa - zz$, como deduzimos de outra propriedade.

Da Ellipse.

286 **C**onsideremos agora a curva que tem a propriedade de ser a soma $MF + Mf$. (Fig. 36.) das distancias de qualquer dos seus pontos M aos pontos fixos F e f, igual a huma linha dada a. Esta curva tem o nome de *Ellipse*, as distancias MF e Mf chamaõ-se *raios vectores*, e os pontos F e f, os *focos*.

Para deduzir a equação, tome-se huma linha determinada, por exemplo Ff, para eixo das abscissas, cuja origem seja em A na distancia $CA = \frac{1}{2}a$ do meio C de Ff. Tire-se a ordenada MP, e faça-se $CB = CA$: seja $AP = x$, $PM = y$, $AF = c$, $FM = z$; será $FP = \pm(x - c)$, conforme P cahir entre F e B, ou entre F e A; $fP = a - x - c$; e pela propriedade da curva, $Mf = a - z$.

Isto posto, os triangulos rectangulos FPM, fMP daõ $FM^2 = PM^2 + FP^2$, e $Mf^2 = PM^2 + fP^2$; ou $z^2 = y^2 + x^2 - 2cx + c^2$, e $a^2 - 2az + z^2 = y^2 + a^2 - 2ax + x^2 - 2ac + 2cx + c^2$, das quais se deduz $z = \frac{ax + ac - 2cx}{a}$; logo substituindo este valor na primeira equação, teremos . . . $yy = \frac{4ac - 4cc}{aa}(ax - xx)$.

287 Por esta equação podemos descrever a curva por pontos, como havemos feito (283) a respeito

peito do circulo. Alem deste methodo temos o seguinte.

288 Tomando $CA = CB = \frac{1}{2}a$, do ponto f como centro com o intervallo arbitrario Br descreve-se hum arco, e executa-se o mesmo do ponto F com o intervallo Ar ; os pontos de intersecção M e M' dos dous arcos pertencerao á ellipse.

289 A propriedade fundamental de que deduzimos a equação da curva, dá hum meio muito simples para a descrever por movimento continuo. Fixem-se em dous pontos F e f as extremidades de hum fio FMf maior que Ff , o qual se estenda por meio de hum ponteiro M ; entao o ponteiro movendo-se ao redor dos focos, de maneira que o fio se conserve sempre estendido, irá marcando os pontos da ellipse; porque em todos os pontos que elle descrever, a soma das distancias FM e fM será a mesma.

290 Donde se segue, que tomando o fio FMf igual a AB , a curva passará pelos pontos A e B ; porque $AF = Bf$; logo $AF + Af = AB$, e $BF + Bf = AB$. A equação mostra isto mesmo, porque, pondo-se $y = 0$, dá $x(a - x) = 0$, que quer dizer que a curva encontra a linha Ff produzida, quando $x = 0$, ou no ponto A , e quando $x = a$, ou no ponto B .

$$291 \text{ A equação } y = \pm \sqrt{\frac{4ac - 4cc}{aa}}(ax - xx)$$

dá a cada abscissa duas ordenadas iguais com sinais contrarios, e por tanto mostra que a curva tem dous ramos iguais, hum de huma parte do eixo AB , e outro da outra parte; e que a perpendicular DD' (*Fig. 37*) conduzida por C divide a curva em duas partes iguais e semelhantes.

292 A linha AB he o eixo maior da ellipse, DD' o eixo menor, e o dobro mm' da ordenada que passa pelo fôco, o parametro. Os pontos A, B, D, D' são os vertices dos eixos, e o ponto C he o centro da ellipse.

293 Se supuzermos $x = AF = c$, teremos $y = \pm \frac{2(ac - cc)}{a}$, e por consequencia $mm' = \frac{4(ac - cc)}{a}$. Logo o parametro he menor que o quadruplo da distancia c do vertice ao fôco.

Seja $\frac{4ac - 4cc}{a} = p$; a equação da ellipse se mudará então nesta mais simples $yy = \frac{p}{a}(ax - xx)$.

294 Se supuzermos $x = AC = \frac{1}{2}a$, teremos $yy = CD^2 = ac - cc = AF \times BF$; donde se tira $AF : CD :: CD : BF$. Logo o semieixo menor he meio proporcional entre as distancias de hum dos fôcos aos dous vertices.

Seja $DD' = b$, será $\frac{bb}{4} = ac - cc$, e a equação se mudará nesta de que se faz muito uso . . . $yy = \frac{bb}{aa}(ax - xx)$.

Dos valores de p e b se deduz $pa = bb$, e conseguintemente $a : b :: b : p$. Logo o parametro he huma terceira proporcional aos eixos maior e menor.

295 A equação $yy = \frac{bb}{aa}(ax - xx)$ dá $yy : x(a - x) :: bb : aa$; logo os quadrados das ordenadas ao eixo maior são para os productos das suas abscissas, como o quadrado do eixo menor he para o quadrado do eixo maior; e conseguintemente os quadrados das ordenadas estão entre si como os productos das abscissas correspondentes.

296 Se sobre AB (Fig. 38.) descrevermos o circulo AEBE' teremos $PN^2 = ax - xx$; logo será $yy = \frac{bb}{aa}PN^2$, a qual dá $y : PN :: b : a$, isto he $PM : PN :: CD : AC$ ou CE ; logo as ordenadas da ellipse são proporcionais ás do circulo descrito sobre o eixo maior. Podemos pois descrever a ellipse com muita facilidade por meio do circulo.

Donde se segue, que o circulo he huma ellipse, cujos eixos a e b são iguais, ou cuja distancia do vertice ao fóco he igual á ametade do eixo maior, ou tambem cujo parametro he igual ao diametro; porque suppondo $b = a$, $c = \frac{1}{2}a$, e $p = a$, todas as tres equações da ellipse se tornão na do circulo $yy = ax - xx$.

297 Vê-se pois claramente, que huma linha unica, isto he o diametro, determina o circulo; mas não basta o eixo maior AB (Fig. 37.) para determinar a ellipse; he necessario alem dilló conhecer ou o eixo menor b , ou o parametro p , ou a distancia c do vertice ao fóco. Havemos visto como se descreve a ellipse no caso de ser dado o

ei-

eixo maior com a distancia do vertice ao fóco. Quando porém se derem os dous eixos, para descrever a curva por movimento continuo, he necessario determinar os fócos. Isto he facil de fazer, descrevendõ do ponto D como centro com o intervallo $AC = \frac{1}{2}a$ dous arcos, os quais cortaraõ o eixo maior nos pontos procurados F e f. Se for dado o eixo maior com o parametro', determinaremos o eixo menor, tomando huma meia proporcional (294) entrè as duas linhas dadas, e assim reduziremos este caso ao precedente.

298 Para tirarmos huma tangente a qualquer ponto M (Fig. 39.) da ellipse, produziremos o raio vector fM até G, de sorte que seja $MG = MF$; e tirando GF, conduziremos sobre ella por M a perpendicular MT, a qual será a tangente, isto he, encontrará a curva unicamente no ponto M.

Porque se a encontra em outro ponto, por exemplo em N, entaõ tirando Nf e NF, pela propriedade fundamental da ellipse será $FN + Nf = FM + Mf$, ou (4. e 5. 1. Eucl.) $NG + Nf = Gf$; mas isto he absurdo (20. 1. Eucl.); logo o ponto N não pertence á ellipse.

299 O angulo $FMO = GMO = fMN$. Logo na ellipse os raios vectores formão angulos iguais com a tangente Como se sabe por experiencia, que hum raio de luz, quando encontra huma superficie, se reflecte fazendo o angulo de reflexaõ igual ao angulo da incidencia; os raios que partirem do fóco luminoso F, e encontrarem a ellipse, irãõ reunir-se no outro fóco f; e reciprocamente.

Se

Se conduzirmos por M (Fig. 40.) sobre a tangente MT a perpendicular MI, esta linha que será tambem perpendicular á curva, dividirá o angulo FMf em duas partes iguais; porque sendo $IMT = IMT'$, se tirarmos os angulos iguais FMT, fMT', restará $FMI = IMf$.

300 A linha PI chama-se a *Subnormal*, MI a *Normal*, PT a *Subtangente*.

Por quanto temos $FMI = IMf$, será $Mf : MF :: fI : FI$ (3. 6. Eucl.), e conseguintemente $Mf + MF (a) : Mf - MF (a - 2z) :: fI + FI (a - 2c) : fI - FI (a - 2c - 2FI)$ da qual se tira

$$FI = \frac{az - 2cz}{a} = \frac{a^2c - 2ac^2 + a^2x - 4acx + 4c^2x}{a^2};$$

$$\text{logo } PI = FI - (x - c) = \frac{2a - 4x}{a^2} (ac - cx) =$$

$$\frac{bb}{aa} \left(\frac{1}{2}a - x\right) (294).$$

$$301 \text{ A subtangente } PT = \frac{PM^2}{PI} = \frac{a^2 y^2}{b^2 \left(\frac{1}{2}a - x\right)}$$

$$= \frac{ax - xx}{\frac{1}{2}a - x}.$$

As expressões de PI e PT podem servir para tirar huma perpendicular, e huma tangente a qualquer ponto M da ellipse.

302 Como PT não depende de b , todas as tangentes a pontos correspondentes de todas as ellipses, descritas sobre AB como eixo maior, se encontram no mesmo ponto T do eixo. Pelo que a tangente ao ponto N do circulo descrito sobre AB como

como diametro (*Fig. 38.*) encontrará no mesmo ponto do eixo T a tangente ao ponto correspondente M da ellipse.

Porque he $CP = \frac{1}{2}a - x$ (*Fig. 40.*), será CT

$$= CP + PT = \frac{\frac{1}{4}aa}{\frac{1}{2}a - x} = \frac{AC^2}{CP}; \text{ logo } CP :$$

AC :: AC : CT ; proporção , pela qual se determina com summa facilidade o ponto T , por onde passa a tangente MT.

303 O triangulo rectangulo TPM dá TM

$$= \sqrt{\left[(ax - xx + \frac{bb}{aa} (\frac{1}{2}a - x)^2) \frac{ax - xx}{(\frac{1}{2}a - x)^2} \right]}.$$

304 A ellipse tem grande uso na Architectura Naval. A curvatura , por exemplo , da superficie exterior dos mastros , he a de huma porção de ellipsoide , isto he , de hum solido gerado pela revolução da ametade de huma ellipse ao redor do seu eixo maior.

305 Se de qualquer ponto M tirarmos sobre o eixo menor a perpendicular ou ordenada MP' , e supuzermos DP' = x' , MP' = y' , teremos $y = \frac{1}{2}b - x'$, e $x = \frac{1}{2}a - y'$. Substituindo estes valores na equação $yy = \frac{bb}{aa} (ax$

$- xx)$, acharemos $y'y' = \frac{aa}{bb} (bx' - x'x')$; equação semelhante a que se deduzio para o eixo maior ; por tanto tiraremos conclusões analogas (295 , 296) .

306 Para termos as linhas P'I' , P'T' , CT' , MT' pertencentes ao eixo menor , imitaremos o que fizemos a respeito do eixo maior , usando

R

das

das linhas correspondentes, e dos triangulos semelhantes, que se reconhecem na Figura. Deste modo acharemos valores em x' semelhantes aos deduzidos em x relativamente ao eixo maior.

Tambem damos hum *parametro* ao eixo menor, entendendo por esta linha naõ o dobro da ordenada, que passa pelo fõco do eixo menor, porque naõ o ha; mas huma terceira proporcional aos dous eixos menor e maior (294).

307 Se quizermos contar as abscissas do centro C, poremos $CP = z$, e substituindo $\frac{1}{2}a - z$ em

lugar de x na equaçõ $yy = \frac{bb}{aa}(ax - xx)$, e nos

valores de PI, PT, CI, e TM, acharemos $yy = \frac{bb}{aa}(\frac{1}{4}aa - zz)$, $PI = \frac{bbz}{aa}$, $PT = \frac{\frac{1}{4}aa - zz}{z}$,

$CT = \frac{\frac{1}{4}aa}{z}$, e $TM = \sqrt{\left[\left(\frac{1}{4}aa - zz + \frac{bbzz}{aa}\right) \frac{\frac{1}{4}aa - zz}{zz}\right]}$.

Como os valores de z começã em C, e acabaõ em A, parece que a equaçõ $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{(\frac{1}{4}aa - zz)}$ dá sõmente ametade DAD' da ellipse. Porém como devemos dar a z tanto valores positivos, como negativos, está claro, que estes ultimos daraõ as ordenadas pm , que determinaõ a outra ametade DBD'; a qual he igual e semelhante á primeira DAD', porque a quantidade $\pm \frac{b}{a} \sqrt{(\frac{1}{4}aa - zz)}$ naõ muda de valor pela substituiçã de $-z$ em lugar de $+z$.

308 Dá-se o nome de *diametro* a toda a recta MCM' (Fig. 41.), que passa pelo centro da ellipse, e termina nos dous pontos oppostos da curva. Se conduzirmos pelo centro a recta NCN' parallelá á tangente em M, seráo NCN' e MCM' os *diametros conjugados*. As linhas mO parallelas á tangente em M são *ordenadas* ao diametro MCM', e as partes MO são as *abscissas*. O paramétró de qualquer diametro he huma terceira proporcional ao mesmo diametro e ao seu conjugado.

309 Para mostrarmos que as ordenadas a hum diametro tem propriedades semelhantes ás das ordenadas aos eixos, tirem-se as perpendiculares mp, OQ ao eixo AB, e a recta ms perpendicular a OQ. Seja AB = a, PM = y, CP = z, Qp = g, CQ = k; teremos AP = $\frac{1}{2}a - z$, PB = $\frac{1}{2}a + z$, Ap = $\frac{1}{2}a - k - g$, pB = $\frac{1}{2}a + k + g$.

Os triangulos semelhantes TPM, mSO daó SO = $\frac{gzy}{\frac{1}{2}aa - zz}$, e outros dous CPM, COQ

tambem semelhantes daó QO = $\frac{ky}{z}$; logo pm = QO - SO = $\frac{ky}{z} - \frac{gzy}{\frac{1}{2}aa - zz}$. Mas pela

propriedade da ellipse (295) pm² × AP. PB = PM² × Ap. pB; logo substituindo, e reduzindo, teremos $\frac{\frac{1}{2}aak}{zz} + \frac{ggzz}{\frac{1}{2}aa - zz} = \frac{1}{2}aa - gg$.

Notemos de passagem, que quando a linha mO passa pelo centro, isto he, quando o ponto O cahe

fobre C, he $k = 0$, e $g = CR$; logo substituindo estes valores na equação achada, virá $CR^2 = \frac{1}{4}aa - zz = AP \cdot PB$.

Fazendo agora $CM = \frac{1}{2}a'$, $CN = \frac{1}{2}b'$, $mO = y'$, $CO = z'$, os triangulos semelhantes CPM, CQO dão $k = \frac{zz'}{\frac{1}{4}a'}$, e os dous CNR,

mSO tambem semelhantes dão $CR = \frac{\frac{1}{2}gb'}{y'}$; logo

$CR^2 = \frac{\frac{1}{4}gg'b'b'}{y'y'}$; donde, igualando entre si os

dous valores de CR^2 , resultará $gg = \frac{y'y'(\frac{1}{4}aa - zz)}{\frac{1}{4}b'b'}$.

Substituindo pois os valores de gg e kk na equação $\frac{\frac{1}{4}aakk}{zz} + \frac{ggzz}{\frac{1}{4}aa - zz} = \frac{1}{4}aa - gg$, teremos

$y'y' = \frac{b'b'}{a'a'} (\frac{1}{4}a'a' - z'z')$, semelhante a que achámos a respeito dos eixos.

310 Pondo $y' = 0$, teremos $z' = \pm \frac{1}{2}a'$. Logo a curva encontra a linha MM' em dous pontos M e M' equidistantes do centro, e por consequencia todos os diametros da ellipse são cortados no centro em duas partes iguais.

311 A equação $y = \pm \frac{b'}{a'} \sqrt{\frac{1}{4}a'a' - z'z'}$ mostra que qualquer diametro MCM' divide em duas partes iguais as suas ordenadas mm' , ou as parallelas á tangente em M , e consequentemente tambem a ellipse inteira.

312 Donde se segue, 1º que a tangente em N

N he parallela ao diametro MM' ; 2º que as ordenadas Om ao diametro MM' são as ordenadas ao circulo do diametro MM' , diminuidas porém ou augmentadas na razão de $a' : b'$, e inclinadas debaixo de hum angulo igual ao comprehendido pelos diametros conjugados.

Para sabermos em que lugar $a' = b'$, ou onde as ordenadas são iguais ás do circulo, substituiremos $CP (z)$ em lugar de CR na equação $CR^2 = \frac{1}{4}aa - zz$, e teremos $z = \frac{1}{2}a \sqrt{\frac{1}{2}}$, quantidade real e independente de b , a qual mostra, que cada ellipse tem dous diametros conjugados iguais, e que estes se determinão do mesmo modo em todas as ellipses que tiverem o mesmo eixo. Para os achar, descreva-se sobre o eixo maior como diametro (*Fig. 38.*) o semicirculo $ANEB$, e dividindo em duas partes iguais no ponto N o arco AE determinado pelo eixo menor CD produzido, abaxe-se NP , que corta a ellipse em M e M' ; serão CM e CM' os dous diametros conjugados iguais, pois que o triangulo rectangulo isosceles PCN dá $CP = CN \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}a \sqrt{\frac{1}{2}}$.

313 Se conduzirmos do centro C (*Fig. 42.*) a perpendicular CF sobre a tangente, será $CF = \frac{PM \cdot CT}{TM}$, e $CN = \frac{TM \cdot CR}{PT}$; logo

$$CF \cdot CN = \frac{PM \cdot CT \cdot CR}{PT} = \frac{1}{4}ab \text{ (307, 309);}$$

isto he (tirando a tangente NT' até encontrar TM em I) $CMIN = \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2}b$. Logo *todos os parallelogrammos formados pelas tangentes nas extre-*

tremidades dos diametros conjugados são iguaes entre si, e ao rectangulo formado pelos eixos.

314 Os triangulos semelhantes TPM, CRN daõ $RN = \frac{CR \cdot PM}{PT} = \frac{bz}{a}$; mas pelos dous triangulos rectangulos CRN, CPM temos $CR^2 + RN^2 + CP^2 + PM^2 = CN^2 + CM^2$, logo substituindo nesta as expressões algebricas das linhas, será $CN^2 + CM^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2$. Donde se segue, que *na ellipse a soma dos quadrados de dous quaisquer diametros conjugados he igual á soma dos quadrados dos dous eixos.*

315 Por quanto temos $CN^2 = CR^2 + RN^2 = \frac{1}{4}a^2 - z^2 + \frac{b^2z^2}{a^2}$, será (307) $TM^2 = CN^2 \left(\frac{\frac{1}{4}a^2 - z^2}{z^2} \right)$. Porém os triangulos semelhantes TPM, MP'T' daõ $MT' = \frac{P'M \times TM}{PT}$; logo $MT'^2 = \frac{CN^2 \times z^2}{\frac{1}{4}a^2 - z^2}$, e conseguintemente $TM \times MT' = CN^2 = \frac{1}{2}p' \times CM$ (308), sendo p' o parametro do diametro MM' ; donde se tira $CM : TM :: MT' : \frac{1}{2}p'$.

O circulo descrito sobre TT' como diametro (*Fig. 43.*) passará pelo ponto C, porque o angulo TCT' he recto; se produzirmos pois CM até encontrar a circumferencia em V, teremos (35.3. Eucl.) $CM : TM :: MT' : MV$; logo $MV = \frac{1}{2}p'$.

316 Daqui se inferé, que para descrever a ellipse, quando são dados os dous diametros conjugados MM' , NN' , com o angulo que formão entre si, produziremos CM até V , de sorte que MV seja igual á ametade do parametro, e do meio X de CV levantaremos a perpendicular XZ , que encontra em Z a linha TT' conduzida por M parallelamente a NN' ; descrevendo então do ponto Z como centro e com o intervallo ZC hum circulo, que cortará TT' em dous pontos T e T' , as rectas TC , $T'C$ conduzidas por elles para o centro seraõ as direcções dos dous eixos. A sua grandeza se determinará abaixando as perpendiculares MP , MP' , e tomando CA (302) igual a huma meia proporcional entre CT e CP ; e CD igual a huma meia proporcional entre CT' e CP' , como se deduz dos triangulos semelhantes TPM , TCT' .

317 Para resolvermos analyticamente este problema, seja $MM' = m$, $NN' = n$, e o angulo $MCN = a$, teremos (314) $m^2 + n^2 = a^2 + b^2$, e (313) $mn \text{ sen } a = ab$, porque (Trig. 174.) $CF = m \text{ sen } a$ (Fig. 42.); logo $a = \frac{1}{2} \sqrt{(m^2 + n^2 + 2mn \text{ sen } a) + \frac{1}{2} \sqrt{(m^2 + n^2 - 2mn \text{ sen } a)}}$, e $b = \frac{1}{2} \sqrt{(m^2 + n^2 + 2mn \text{ sen } a) - \frac{1}{2} \sqrt{(m^2 + n^2 - 2mn \text{ sen } a)}}$.

Para acharmos a direcção dos eixos, ou o angulo MCT , que representaremos por ϕ , temos no triangulo CMT (Trig. 173.) $\text{sen } T$ ou $\text{sen}(a - \phi)$: $CM (\frac{1}{2}m) :: \text{sen } TMC (\text{sen } a) : CT (\frac{1}{2} \frac{aa}{CP})$;
 lo-

logo $CP = \frac{a^2 \operatorname{sen}(a - \phi)}{2m \operatorname{sen} a}$. Mas o triangulo re-
 ctangulo CMP (Trig. 162) dá $1 : \frac{1}{2}m :: \operatorname{cos} \phi :$
 CP ou $\frac{a^2 \operatorname{sen}(a - \phi)}{2m \operatorname{sen} a}$; logo teremos $m^2 \operatorname{sen} a \operatorname{cos} \phi$
 $= a^2 (\operatorname{sen} a \operatorname{cos} \phi - \operatorname{cos} a \operatorname{sen} \phi)$ (Trig. 34), e di-
 vidindo por $\operatorname{cos} \phi$, virá $\operatorname{tang} \phi = \frac{a^2 - m^2}{a^2} \operatorname{tang} a$,
 que se pôde exprimir em m e n , substituindo por
 a o valor achado.

Da Hyperbola,

318 **S**E a curva (Fig. 44.) tiver a proprieda-
 de de que a differença $Mf - MF$ das distancias de
 cada hum dos seus pontos M a dous fixos F, f , seja
 sempre a mesma, e igual a huma linha dada a ; pa-
 ra acharmos a sua equaçãõ, tomaremos huma li-
 nha Ff , por exemplo, para eixo das abscissas,
 cuja origem seja v. g. no ponto A em distancia
 $CA = \frac{1}{2}a$ do ponto C meio de Ff , e faremos
 $CB = CA$. Supponhamos $AP = x$, $PM = y$,
 $AF = c$, $FM = z$; será $FP = \pm(c - x)$, fP
 $= c + a + x$, e pela propriedade da curva, Mf
 $= a + z$.

Os triangulos rectangulos FPM , fPM dão
 $c^2 - 2cx + x^2 + y^2 = z^2$, e $c^2 + 2ac + a^2$
 $+ 2cx + 2ax + x^2 + y^2 = a^2 + 2az + z^2$, das
 quais

quais se tira $z = \frac{2cx + ac + ax}{a}$; logo substituindo este valor na primeira equação, teremos

$$yy = \frac{4ac + 4cc}{aa} (ax + xx).$$

319 Esta equação pôde servir para descrever a curva por pontos, dando a x muitos valores. Também se podem achar successivamente os mesmos pontos, tomando arbitrariamente huma parte Br maior que BF , e descrevendo do ponto f como centro, e com o intervallo Br hum arco, o qual seja cortado em M por outro arco descrito do ponto F como centro, e com o intervallo Ar .

Se quizermos porém descrever a curva por movimento continuo, fixaremos no ponto f huma regoa indefinida, que possa girar ao redor d'elle: em F , e em hum dos pontos Q da regoa ataremos as extremidades de hum fio FMQ , que seja igual a $fQ - a$. Depois, por meio de hum ponteiro applicaremos á regoa huma parte MQ do fio, e movendo o ponteiro de M para A , de sorte que o fio se conserve sempre estendido, a regoa irá abaixando, a parte FM diminuindo, e o ponteiro descreverá a nossa curva, á qual se dá o nome de *Hyperbola*. Com effeito, $fM - FM$ será sempre igual a a .

320 A equação $yy = \frac{4ac + 4cc}{aa} (ax + xx)$

mostra que a curva tem dous ramos AM , AM' iguais e infinitos, hum de huma, e outro da outra parte da linha AB produzida; a qual se chama o *primeiro eixo*.

321 Se fizermos x negativo, ou se suppuzermos que P cahe porcima de A , $y =$

$$\pm \sqrt{\frac{4ac + 4cc}{aa}} (xx - ax)$$

será imaginario em quanto for $x < a$, e por consequencia não haverá curva desde A até B ; mas começando a ser $x > a$, as ordenadas tornaõ a ser reais, e assim começa em B huma nova porção de curva mBm' , a qual tambem tem como a primeira dous ramos infinitos, hum de huma, e outro da outra parte de AB produzida; e he perfeitamente igual á hyperbola *positiva*, pois que tomando $Bp = AP$, $xx - ax$ ou $Ap \times pB$ vem a ser igual a $AP \times PB$, logo $pm = PM$.

322 Se na equação puzermos $y = 0$, acharemos que a curva encontra o eixo nos dous pontos A e B , em que $x = 0$, e $x = -a$.

323 Para termos o valor da ordenada Fm'' , que passa por F (este ponto chama-se *foco*, como tambem o ponto f) faremos $x = c$, e virá $y = \pm 2 \left(\frac{ac + cc}{a} \right)$; logo será o dobro desta

quantidade, ou $m''m''' = 4 \left(\frac{ac + cc}{a} \right)$. Esta linha chama-se o *parametro* da hyperbola. Se a representarmos por p , teremos huma equação mais simples da curva . . . $yy = \frac{p}{a} (ax + xx)$.

$$\text{Da equação } p = \frac{4ac + 4cc}{a} = 4c + \frac{4cc}{a} \text{ se}$$

de-

deduz que o parametro do primeiro eixo da hyperbola he maior, que o quadruplo da distancia do vertice A ao foco F.

324 Se do ponto C meio de AB se levantar a perpendicular $DD' = 2CD$, tal que seja $CD^2 = Af \times FA = ac + cc$, sera DD' o segundo eixo da hyperbola. Represente-se este por b , teremos $bb = 4ac + 4cc$; e substituindo na equação da curva, virá . . . $yy = \frac{bb}{aa} (ax + xx)$.

Vê-se pois que as tres equações da hyperbola são differem das tres correspondentes da ellipse nos finais de cc e xx .

Da ultima equação achada se tira $yy (PM^2)$: $ax + xx (AP \times PB) :: bb (DD'^2) : aa (AB^2)$
Logo: Na hyperbola os quadrados das ordenadas ao primeiro eixo são para os productos das suas abscissas, como o quadrado do segundo eixo he para o quadrado do primeiro; e consequentemente os quadrados das ordenadas estão entre si como os productos das abscissas correspondentes.

Quando $a = b$, a curva chama-se hyperbola equilatera, e a equação se torna em $yy = ax + xx$, a qual não differe da equação do circulo, senão no final de xx .

Por quanto he $p = \frac{4ac + 4cc}{a}$, e $bb = 4ac + 4cc$, sera $ap = bb$, isto he $a : b :: b : p$. Logo o parametro do primeiro eixo he huma terceira proporcional ao primeiro e ao segundo eixo.

325 Se tirarmos por D a recta DA, no triangulo rectangulo DAC teremos $DA = \sqrt{(\frac{1}{4}bb + \frac{1}{4}aa)} = \sqrt{(cc + ac + \frac{1}{4}aa)} = c + \frac{1}{2}a = CF$. Logo, para acharmos os fôcos quando forem dados os eixos, tomaremos $CF = DA$; e pelo contrario para acharmos o segundo eixo quando for dado o primeiro com os fôcos, descreveremos do ponto A como centro, e com o intervallo CF hum arco, que cortará a perpendicular DD' no ponto procurado D.

326 A descripção da hyperbola depende pois de duas quantidades, a saber: ou dos dous eixos; ou do eixo maior e dos fôcos; ou do eixo maior e do parametro; e pelo que havemos dito pôde sempre effectuar-se por algum dos methodos indicados. Se fosse dado, por exemplo, o eixo maior com o parametro, procuraríamos huma meia proporcional entre estas linhas, e teríamos o segundo eixo, o qual serviria para achar os fôcos.

327 Se sobre Mf (Fig. 45.) tomarmos a parte $MG = Mf$, a perpendicular MT tirada de M sobre FG será tangente da hyperbola, isto he, não encontrará a curva senão em hum só ponto M.

Porque se a encontra em algum outro ponto N de TM, tirando NF, Nf, e NG, será $NF = NG$. Mas he $Nf < NG + Gf$, logo será $Nf - NF < Gf$, isto he, $Nf - NF < Mf - MF$; logo o ponto N não pertence á hyperbola.

Pela construcção $FMO = OMG = NMQ$. Logo se F for hum ponto luminoso, os raios que delle sahirem, e encontrarem a concavidade MAM', se reflectirão como se partissem de f. 328

328 Por quanto temos (3. 6. Eucl.) fM
 $(z + a) : MF (z) :: fT (a + 2c - FT) :$
 FT ; será $FT = \frac{2c + a}{2z + a} z = \dots$

$$\frac{(2c + a) \frac{2cx + ac + ax}{a}}{(2c + a) \frac{2x + a}{a}} = \frac{2cx + ac + ax}{2x + a} : \text{logo}$$

$$PT = FT - c + x = \frac{ax + xx}{x + \frac{1}{2}a} ; \text{valor da sub-}$$

tangente da hyperbola, a qual differe sómente nos
 finaes da que se achou para a ellipse.

329 He pois a distancia do vertice ao ponto
 em que a tangente encontra o eixo, ou $AT =$

$$PT - AP = \frac{ax + xx}{\frac{1}{2}a + x} - x = \frac{\frac{1}{2}ax}{\frac{1}{2}a + x}.$$

330 Esta expressão mostra, que sem embargo
 de que os ramos da hyperbola se estendem até o in-
 finito, com tudo as tangentes a cada hum dos
 seus pontos cortão o eixo em pontos T situados
 entre A e C . Porque se substituirmos em lugar de
 x todas as quantidades imaginaveis desde o até o
 infinito, o valor de AT cresce sómente desde o
 até $\frac{1}{2}a$. Logo a tangente na extremidade infinita
 de cada hum dos ramos AM , AM' passa pelo cen-
 tro C ; e como os ramos oppostos Bm , Bm' são
 perfeitamente iguais áquelles, e os pontos A e B
 estão em igual distancia de C , segue-se que as di-
 tas tangentes tambem o são nas extremidades in-
 finitas dos ramos Bm , Bm' , como se representa
 (Fig. 46.) nas linhas CX , CY .

331 Dá-se a estas tangentes o nome de *Asymptotas*, as quais, como se vê, são humas linhas, que partindo do centro se avezinhaõ cada vez mais da hyperbola, sem que possaõ encontralla senaõ em huma distancia infinita, e por tanto são os limites das tangentes.

Se pelo vertice A conduzirmos At parallelamente a PM, os triangulos semelhantes TAt, TPM da-

raõ $PT \left(\frac{ax + xx}{\frac{1}{2}a + x} \right) : PM (y) :: AT \left(\frac{\frac{1}{2}ax}{\frac{1}{2}a + x} \right) :$

$AT = \frac{\frac{1}{2}ay}{a + x} = \frac{\frac{1}{2}b \sqrt{(ax + xx)}}{a + x}$; onde se vê,

que fazendo x infinito, he $At = \frac{1}{2}b = CD$. Logo, para determinar a posição das asymptotas, conduziremos por A as rectas AL, AL', perpendiculares a CA, e iguais cada huma a CD; as linhas CL, CL', conduzidas pelos pontos L, L' e pelo centro C, seraõ as asymptotas da hyperbola, as quais se forem produzidas para a parte contraria, seraõ tambem as asymptotas da hyperbola opposta. Está claro, que na hyperbola equilatera o angulo LCL' formado pelas asymptotas he recto.

332 Poisque he $CT = CA - AT = \frac{\frac{1}{2}aa}{\frac{1}{2}a + x}$, teremos esta proporção $CP : CA :: CA : CT$, a qual pôde servir para tirar huma tangente MT.

333 O triangulo rectangulo TPM dá $MT = \sqrt{(PM^2 + PT^2)} = \sqrt{\left[\left(\frac{bb}{aa} \left(\frac{1}{2}a + x \right)^2 + ax + xx \right) \frac{ax + xx}{\left(\frac{1}{2}a + x \right)^2} \right]}$.

334 Se tirarmos a normal MI (*Fig. 47.*), teremos TP $\left(\frac{ax + xx}{\frac{1}{2}a + x}\right) : PM (y) :: PM (y) : PI$;

logo a subnormal PI $= \frac{bb}{aa} \left(\frac{1}{2}a + x\right)$.

335 Para acharmos agora a equação ás coordenadas do segundo eixo DD', conduzamos a perpendicular MP', e fazendo MP' = y', DP' = x', teremos y = $\frac{1}{2}b - x'$, e x = y' - $\frac{1}{2}a$. Substituindo estes valores na equação yy = $\frac{bb}{aa} (ax + xx)$,

virá y'y' = $\frac{aa}{bb} \left(\frac{1}{2}bb - bx' + x'x'\right)$, a qual não he semelhante á relativa ao primeiro eixo.

336 Se quizermos ter a equação em ordem a AB, contando as obscissas do centro, supporemos CP = z, e substituindo z - $\frac{1}{2}a$ em lugar de x, acharemos yy = $\frac{bb}{aa} (zz - \frac{1}{4}aa)$.

Se referirmos a curva ao segundo eixo DD', fazendo CP' = z', teremos x' = $\frac{1}{2}b - z'$, e substituindo na equação respectiva (335), virá y'y' = $\frac{aa}{bb} (z'z' + \frac{1}{4}bb)$.

337 Reportando da mesma sorte ao centro as expressões de PT, CT, PI, e MT, teremos

$$PT = \frac{zz - \frac{1}{4}aa}{z}, CT = \frac{\frac{1}{4}aa}{z}, PI = \frac{bbz}{aa}, e$$

$$MT = \sqrt{\left[\left(\frac{bbzz}{aa} + zz - \frac{1}{4}aa\right) \frac{zz - \frac{1}{4}aa}{zz}\right]}.$$

Se

Se produzirmos MT até encontrar o segundo eixo em T', os triangulos semelhantes TPM,

$$TCT' \text{ darão } CT' = \frac{CT \times PM}{PT} = \frac{\frac{1}{4}bb}{y} = \frac{CD^2}{CP'}; \text{ logo } CP': CD :: CD : CT'.$$

338 Toda a recta MCM' (Fig. 48.) que passa pelo centro, e termina de huma e outra parte na hyperbola, chama-se *diametro*. As rectas Om parallelas á tangente em M são ordenadas ao diametro; MO e OM' são as suas abscissas.

Para mostrarmos que as ordenadas mO tem as mesmas propriedades que tem as ordenadas MP, tirem-se mp, OQ perpendiculares ao eixo AB, e conduza-se mS parallela a AP. Seja PM = y, CP = z, Qp = g, CQ = k; será AP = z - $\frac{1}{2}a$, BP = z + $\frac{1}{2}a$, Ap = k - g - $\frac{1}{2}a$, Bp = k - g + $\frac{1}{2}a$.

Os triangulos semelhantes CPM, CQO dão $QO = \frac{ky}{z}$; e os outros dous TPM, mSO dão $SO = \frac{gzy}{zz - \frac{1}{4}aa}$; logo mp = QO - SO = $\frac{ky}{z} - \frac{gzy}{zz - \frac{1}{4}aa}$. Porém (324) pm² × AP . PB = PM² × Ap . pB; logo substituindo, e reduzindo, teremos $-\frac{\frac{1}{4}aakk}{zz} + \frac{ggzz}{zz - \frac{1}{4}aa} = gg - \frac{1}{4}aa$.

No-

Notemos antes de passar adiante, que se tomarmos sobre AB a parte CR tal que seja $CR^2 = AP \times PB = zz - \frac{1}{4}aa$, e levantando a perpendicular RN' terminada em N' pela linha NN' conduzida pelo centro parallelamente a TM, se fizermos $CN = CN'$; entãõ NN' he o *diametro conjugado* de MM', e huma terceira proporcional a MM' e NN' he o *parametro* do mesmo diametro MM'.

Supponhamos agora $CM = \frac{1}{2}a'$, $CN = \frac{1}{2}b'$, $CO = z'$, $Om = y'$; os triangulos semelhantes CPM, CQO daõ $k = \frac{zz'}{\frac{1}{2}a'}$, e os outros dous tambem semelhantes mSO, CN'R daõ $g^2 = y'y' \frac{(zz - \frac{1}{4}aa)}{\frac{1}{2}b'b'}$; logo substituindo os valores de g^2

e k' na equaçãõ — $\frac{\frac{1}{4}aakk}{zz} + \frac{ggzz}{zz - \frac{1}{4}aa} = gg - \frac{1}{4}aa$,

teremos $y'y' = \frac{b'b'}{a'a'} (z'z' - \frac{1}{4}a'a')$, equaçãõ semelhante á das coordenadas do primeiro eixo.

339 Fazendo $y' = 0$, acharemos $z' = \pm \frac{1}{2}a'$; logo a curva encontra a linha MM' nos dous pontos oppostos M e M' em distancia do centro igual a $\frac{1}{2}a'$; e assim todos os diametros se cortaõ no centro em duas partes iguais.

340 A equaçãõ $y' = \pm \frac{b'}{a'} \sqrt{(z'z' - \frac{1}{4}a'a')}$ mostra, que se produzirmos mO de maneira que $Om' = Om$, o ponto m' pertencerá á curva; por
S tan-

tanto cada diametro divide em duas partes iguaes as rectas parallelas á tangente que passa pela origem do mesmo diametro.

$$341 \text{ Da equação } y'y' = \frac{b'b'}{a'a'} (z'z' - \frac{1}{4}a'a')$$

se tira $y'y' (mO^2) : z'z' - \frac{1}{4}a'a' (MO \times OM')$
 $\therefore b'b' (NN'^2) : a'a' (MM'^2)$; logo o quadrado de huma ordenada a qualquer diametro terminado na curva está para o producto das suas abscissas, como o quadrado do diametro conjugado está para o quadrado do primeiro diametro.

342 Se do centro C (Fig. 49) abaixarmos sobre TM a perpendicular CF, os triangulos semelhantes CFT, TPM darão $CF = \frac{PM \times CT}{TM}$,

e os dous tambem semelhantes CRN', TPM darão $CN' \text{ ou } CN = \frac{TM \times CR}{PT}$; logo $CF \times CN$

$= \frac{PM \times CT \times CR}{PT}$; e substituindo os valores

achados (336, 337, e 338) teremos $CF \times CN = \frac{1}{4}ab$. Se produzirmos agora MT até a asymptota em I, será $MI = CN$, como abaixo se mostrará, e conseguintemente CIMN será hum parallelogrammo, cuja superficie $= CF \times MI = CF \times CN$; logo o parallelogrammo construido sobre os diametros he igual ao rectangulo dos eixos.

343 Os triangulos semelhantes TPM, CRN' dão $RN' = \frac{PM \times CR}{PT} = \frac{bz}{a}$; e os dous trian-

gulos rectangulos CPM, CRN' daó $CM^2 - CN'^2 = CP^2 + PM^2 - CR^2 - RN'^2$; substituindo pois os valores achados, teremos $CM^2 - CN'^2 = \frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb$. Logo a differença dos quadrados de dous diametros conjugados he sempre a mesma, e igual á differença dos quadrados dos dous eixos. Donde se segue, que na hyperbola equilatera hum diametro qualquer he igual ao seu conjugado.

344 Por quanto temos $CN^2 = CR^2 + RN'^2 = zz - \frac{1}{4}aa + \frac{bbzz}{aa}$, substituindo no valor de

TM (337), acharemos $TM = CN \sqrt{\left(\frac{zz - \frac{1}{4}aa}{zz}\right)}$.

Mas (Fig. 47) os triangulos MPT, MP'T' daó

$$T'M = \frac{P'M \times TM}{PT} = \frac{CN \times z}{\sqrt{(zz - \frac{1}{4}aa)}}; \text{ logo}$$

teremos $TM \times T'M = CN^2 = \frac{1}{2}p' \times CM$, sendo p' o parametro do diametro MM' , e consequentemente $CM : TM :: T'M : \frac{1}{2}p'$.

345 Donde se segue, que para achar os eixos a fim de descrever a hyperbola, quando são dados os diametros conjugados com o angulo por elles comprehendido; tomaremos sobre MC (Fig. 50) a linha $MH = \frac{1}{2}p'$, e no meio I de CH levantaremos huma perpendicular IK, a qual cortará em K a linha MT' conduzida por M parallelamente ao conjugado NN' . Do ponto K como centro e com o intervallo KC descreveremos hum circulo, o qual encontrará MT nos dous pontos T e T'; entáo as linhas TC, CT' tiradas por elles e pelo

centro, serão as direcções dos eixos; porque o angulo $T'CT$ he recto, e temos (Cor. 36.3. Eucl.) $CM : TM :: T'M : MH$ ou $\frac{1}{2}p'$.

A grandeza dos eixos se determinará abaixando de M as perpendiculares MP , MP' , e tomando huma meia proporcional CA (337) entre CP e CT , e outra CD entre CP' e CT' .

Naõ pôde haver difficuldade em achar a solução analytica deste problema, depois do que havemos dito (317) a respeito da ellipse.

Da Hyperbola entre as Asymptotas.

346 **A** Hyperbola considerada em ordem ás asymptotas tem propriedades importantes, de que exporemos as principais, lembrando-nos primeiramente do que fica dito (331) sobre o modo de determinar as asymptotas.

Para referirmos cada hum dos pontos E da curva (Fig. 51) ás asymptotas CLO , $CL'o$, tiremos por E a linha EQ paralela a huma dellas; OE_2 paralela ao segundo eixo DD' ; ES paralela a CLO ; e pelo vertice A a linha AG paralela a $CL'o$. Seja $CA = \frac{1}{2}a$, $CD = AL = AL' = \frac{1}{2}b$, $CP = z$, $PE = y$, $AG = m$, $GL = n$, $CQ = t$, $QE = u$.

Os triangulos semelhantes CPO , CAL dão $PO = P_0 = \frac{bz}{a}$; logo $EO = \frac{bz}{a} - y$, E_2

$$= \frac{bz}{a} + y; \text{ donde vem } EO \times Eo = \frac{bbzz}{aa} - yy$$

$$= \frac{bbzz}{aa} - \frac{bb}{aa} (zz - \frac{1}{4}aa) = \frac{1}{4}bb, \text{ isto he,}$$

$EO \times Eo = CD^2 = AL^2$; propriedade que pertence a qualquer ponto E da hyperbola.

347 Os triangulos semelhantes QEO, ES_o, e AGL daõ $AL : EO :: AG : EQ$, e $AL : Eo :: GL : ES$; logo $AL^2 : EO \times Eo :: AG \times GL : EQ \times ES$; mas $EO \times Eo = AL^2$; logo $ut = mn$, equação da hyperbola entre as asymptotas.

Donde se vê, que para o ponto A teremos $AG \times CG = AG \times GL$; logo $CG = GL$. Mas por causa do angulo recto A, o circulo descrito sobre CL ha de passar pelo ponto A; logo $CG = AG = GL$, isto he, $m = n$, e conseguintemente $ut = m^2$.

Este quadrado constante m^2 , ou CG^2 , ou $\frac{1}{4}(\frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}bb)$, a que o producto ut sempre he igual, chama-se a *potencia* da hyperbola.

348 Se pelo ponto E tirarmos de qualquer maneira huma recta REr terminada nas asymptotas, as partes RE, mr, interceptas entre a curva e as asymptotas, seraõ iguais entre si.

Porque, tirando por m a linha hmH parallela a OE_o, os triangulos semelhantes REO, RmH daõ $ER : Rm :: EO : Hm$, e os dous tambem semelhantes rhm, roE daõ $Er : mr :: Eo : mh$; logo $ER \times Er : Rm \times mr :: EO \times Eo : Hm \times mh$. Mas (347) $EO \times Eo = CD^2 = Hm \times mh$; logo $ER \times Er = Rm \times mr$, ou $ER (Em + mr) = (ER + Em)mr$, e reduzindo, $ER = mr$.

349 Donde se segue, que huma tangente Tt , (*Fig. 52*) terminada nas asymptotas, he dividida em duas partes iguais no ponto do contacto M . —

350 Se por M conduzirmos MI paralela a DD' , e tirarmos por qualquer ponto E a linha REr paralela á tangente Tt , e OEo paralela a DD' ; os triangulos semelhantes TMI , REO darão $TM : MI :: RE : EO$, e os outros dois Mit , Eor darão Mt ou $TM : Mi :: Er : Eo$; logo $TM^2 : MI \times Mi :: RE \times Er : EO \times Eo$, e por conseguinte (347) $TM^2 = RE \times Er$.

351 Tire-se pelo centro C o diametro CMV , o qual dividirá em duas partes iguais a linha Rr paralela a Tt , porque (349) passa pelo meio M de Tt ; e seja $CM = \frac{1}{2}a'$, $TM = \frac{1}{2}q$, $CV = z'$, $VE = y'$. Os triangulos semelhantes CMT , CVR darão $VR = Vr = \frac{qz'}{a'}$; logo $RE = \frac{qz'}{a'}$ — y' , e $Er = \frac{qz'}{a'} + y'$. Substituindo estes valo-

res na equação $RE \times Er = TM^2 = \frac{1}{4}qq$, como tambem o valor de $y'y'$ (338), teremos $q = b'$, e conseguintemente $\frac{1}{2}q = \frac{1}{2}b'$, ou, $MT = CN$, sendo CN o semidiametro conjugado de CM ; logo (*Fig. 49.*) $MI = CN$, que he o que prometemos (342) demonstrar.

352 Para todas as rectas pois REr (*Fig. 52*) paralelas ao conjugado CN , temos $RE \times Er = CN^2$.

353 Donde se mostra, que muito facilmente podemos descrever a hyperbola por pontos, quando forem dados os dous semidiametros conjugados CM ,

CM, CN (*Fig. 53*) com o angulo por elles comprehendido. Porque, tirando pela origem **M** do semi-diametro **CM** a linha **TMt** parallela a **CN**, e tomando de huma e outra parte de **M** as partes **MT**, **Mt** iguais cada huma a **CN**, as linhas **CT**, **Ct** (349, 351) seraõ as asymptotas. E se pelo ponto **M** tirarmos arbitrariamente as rectas **EMQ**, **PMQ** que quizermos, e em cada huma tomarmos **PO** = **MQ**, todos os pontos **O** assim achados pertencerãõ (348) á hyperbola. Cada hum dos pontos **O** pôde depois servir para acharmos outros como **V**, **V**, &c., tirando as rectas **ROS**, **ROS**, &c., e fazendo **SV** = **RO**.

354 Com igual facilidade se deduz o methodo de descrever entre duas linhas dadas para asymptotas huma hyperbola, que passe por hum ponto dado dentro dellas.

355 Finalmente, dividindo tanto o angulo das asymptotas, como o seu supplemento, em duas partes iguais, acharemos as direcções dos dous eixos, cuja grandeza se determinará como se disse (345); e assim temos outro meio para resolver a questaõ proposta no mesmo lugar.

Da Parabola.

356 **C**onsideremos agora a curva, em que a distancia **FM** (*Fig. 54*) de cada hum dos seus pontos **M** ao ponto fixo **F** he igual á distancia **MH** do mesmo ponto a huma recta **XZ** dada de posiçaõ.

Para acharmos a equaçãõ desta curva, que se chama *Parabola*, tiremos sobre **XZ** a perpendicular **FV**, e dividindo esta em duas partes iguais

no

no ponto A, será A hum ponto da parabola, porque $AV = AF$. Sirva este ponto, que se chama *o vertice*, de origem das abscissas, e seja AV ou $AF = c$, $AP = x$, $PM = y$; teremos $MF = MH = PV = c + x$, e $FP = \pm (x - c)$.

O triangulo rectangulo FPM dá $FP^2 + PM^2 = MF^2$, isto he, $xx - 2cx + cc + yy = cc + 2cx + xx$; logo a equação da curva he $yy = 4cx$, a qual nos mostra o seguinte.

1º Como temos $y = \pm \sqrt{4cx}$, segue-se que a curva tem dous ramos AM, AM' perfeitamente iguais e semelhantes, hum de huma, e outro de outra parte da linha AFP, a qual se chama *o eixo*; e que os mesmos ramos se estendem até o infinito, porque crescendo x , tambem cresce y .

2º Fazendo x negativo, temos $y = \pm \sqrt{-4cx}$, valor imaginario; logo a curva não passa para cima do ponto A.

3º Pondo $x = c$, temos $y = \pm 2c$, isto he, o valor da ordenada que passa pelo foco F, ou $Fm = 2c$; logo $mm' = 4c$: esta linha chama-se o *parametro* do eixo da parabola. Assim o *parametro do eixo da parabola he quadruplo da distancia AF do vertice ao foco*.

4º Seja p o parametro, teremos $4c = p$, e a equação da curva se mudará em . . . $yy = px$.

357 Por meio da equação facilmente se descreve a parabola por pontos, os quais se achão dando successivamente a x muitos valores, e calculando os correspondentes de y .

358 Tambem se pôde descrever por pontos desta maneira. Havendo escolhido o ponto A para vertice, e a linha VP por direcção do eixo, tomem-se as partes AV, AF iguais cada huma a $\frac{1}{4}p$; será F o fóco. Conduzaõ-se por cada ponto do eixo as perpendiculares MM', e descrevendo do ponto F como centro e com o intervallo VP dous arcos, que cortem as perpendiculares em dous pontos M e M', pertencerão estes á parabola; porque sendo VH perpendicular ao eixo, he $FM = VP = MH$. A recta XVH chama-se a *directriz*.

359 Ultimamente a parabola pôde descrever-se por movimento continuo, usando de hum esquadro Vhf, e de hum fio FMf = fH, cujas extremidades se prendem em f, e no fóco F. Então applicando a fH por meio do ponteiro M huma parte Mf do fio, se fizermos mover o outro lado do esquadro sobre a linha ZX, de maneira que o fio se conserve sempre estendido; o ponteiro descreverá a parabola MA.

360 A equação $yy = px$ mostra, que para qualquer ponto M o quadrado da ordenada MP he igual ao producto da abscissa correspondente pelo parametro; ou que os quadrados das ordenadas estão entre si como as suas abscissas.

A equação da ellipse $yy = \frac{4ac - 4cc}{aa} (ax - xx)$, suppondo a infinito, reduz-se a $yy = \frac{4ac \times ax}{aa} = 4cx$, que he a equação da parabola. Logo a parabola he huma ellipse, cujo eixo maior he infinito.

361 Se do ponto M (*Fig. 55*) conduzirmos sobre FH a perpendicular MOT , esta será tangente da parábola.

Porque se encontra a curva em algum outro ponto N , tirando as linhas NF , NH , e NZ perpendicular a XZ , será $NZ = NF$; mas por outra parte he $NZ < NH$, $NH = NF$, e por conseguinte $NZ < NF$; logo o ponto N não pertence à curva.

362 O angulo $FMO = OMH = fMN$; logo os raios luminosos que saírem de F , e encontrarem a concavidade $M'AM$, se reflectirão parallelamente ao eixo; e reciprocamente os parallellos ao eixo se reunirão no fóco F .

363 Por quanto $HO = OF$, os triangulos HOM , TOF feroão iguais; logo $FT = MH = PV = x + c$, e conseguintemente $PT = FT + FP = 2x$. Logo a subtangente PT da parábola he dupla da abscissa.

364 Se por M tirarmos MI perpendicularmente á tangente MT , os triangulos semelhantes

$$TPM, PMI \text{ daraõ } PI = \frac{PM^2}{PT} = \frac{yy}{2x} = \frac{1}{2}p.$$

Logo a subnormal da parábola he a mesma em todos os pontos, e igual á metade do parametro.

365 As propriedades da parábola tem muitas applicações nas Artes e Sciencias. Quem quizer vêr o seu uso na construcção dos navios, pôde consultar o nosso original.

366 Toda a linha MX (*Fig. 56*) parallelá ao eixo QA chama-se hum diametro; o seu parametro

he

he em geral o quadruplo da distancia da origem M ao fóco; as suas *ordenadas* são as rectas mO parallelas á tangente em M; MO são as *abscissas*.

Para achar a equação ás coordenadas do diametro MX , tirem-se dos pontos m , M , O as linhas mp , MP , OQ perpendiculares ao eixo AP , e conduza-se mS parallela ao mesmo eixo. Seja $AP = x$, $PM = y$, $Qp = g$, $AQ = k$; teremos $Ap = k - g$.

Os triangulos semelhantes TPM , mSO darão $SO = \frac{gy}{2x}$; logo $pm = PM - SO = y - \frac{gy}{2x}$.

Mas (360) he $pm^2 \times AP = PM^2 \times Ap$; logo $\frac{gg}{4x} = k - x$.

Fazendo agora $MO = x'$, $mO = y'$, será $x' = k - x = \frac{gg}{4x}$, ou $gg = 4xx'$. Mas o triangulo rectan-

gulo mSO dá $gg + \frac{ggyy}{4xx} = y'y'$; logo $(4x + p)x' = y'y'$. Sendo pois p' o parametro do diametro MX , isto he, $p' = 4FM = 4x + 4c = 4x + p$, teremos $y'y' = p'x'$; equação semelhante á relativa ás coordenadas do eixo. Logo o quadrado da ordenada mo a qualquer diametro MX he igual ao producto da abscissa pelo parametro do mesmo diametro; e conseguintemente os quadrados das ordenadas são entre si como as abscissas correspondentes.

367 Do que havemos dito se segue, que para descrevermos a parabola, quando for dada a linha indefinida MX por diametro, com o seu parametro p' , e o angulo que o mesmo diametro faz com
as

as ordenadas, tiraremos pela origem M huma linha NMT que faça com MX o angulo NMX igual ao angulo dado, e outra MF que faça com MT o angulo FMT = NMX; entao tomando $MF = \frac{1}{4}p'$, o ponto F será o foco (362, e 366). Conduzindo pois por F huma linha TFQ paralela a MX até encontrar TM em T, será TFQ a direcção do eixo, cujo vertice A se determinará abaixando a perpendicular MP, e dividindo PT em duas partes iguais no ponto A (363). Tendo assim achado o foco e o vertice, a curva se descreverá com facilidade (358, e 359).

Para darmos a soluçao analytica deste problema, seja o angulo dado $MOm = MTP = a$; e conferendo as outras denominações, no triangulo rectangulo MTP teremos $1 : \text{tang. } a :: PT (2x) :$

$PM (\sqrt{px})$, e conseguintemente $x = \frac{p}{4 \text{ tang}^2 a}$;

mas $p' = 4x + p$, logo $p = p' \text{ sen}^2 a$, e assim teremos o parametro. A origem A do eixo AL se determinará pelas equações $x = \frac{1}{4} p' \text{ cos}^2 a$, e $y = \pm \frac{1}{4} p' \text{ sen } 2a$.

368 As tres curvas de que havemos tratado, tem o nome de *Secções Conicas*, porque resultão de huma pyramide conica cortada por hum plano. Por exemplo, se a pyramide conica CHI (Fig. 57) for cortada pelo plano AMm, de maneira que este encontre os dous lados CH e CI, temos a ellipse AMmB: deve exceptuar-se unicamente o caso em que o plano faça com CI hum angulo igual aquelle que o outro lado CH forma com a base, porque entao a secção será hum circulo.

Se ao contrario o plano não encontrar hum dos

lados CH (*Fig. 58*), senão no prolongamento deste, teremos a hyperbola.

Finalmente se o plano for paralelo a hum dos lados CH (*Fig. 59*), teremos a parabola.

Para o demonstrar, concebamos a pyramide conica CHI (*Fig. 57, 58*) cortada por hum plano que passe pelo eixo; a secção será hum triangulo. Corte-se tambem a mesma pyramide por tres planos AMm, FMG, HmI perpendiculares ao triangulo, sendo os dous ultimos parallellos á base da pyramide; as duas secções FMG, HmI serão circulos, os quais encontraõ a secção AMm em M e m, e teraõ por diametro as intersecções FG, HI dos seus planos com o triangulo; e as intersecções PM, pm dos circulos com o plano MAm (19. 11. Eucl.) serão perpendiculares ao plano do triangulo, e consequentemente serão ordenadas commuas dos circulos, e da secção AMm.

Isto posto, os triangulos APG, ApI daõ AP : Ap :: PG : pI, e os dous BFP, BHp daõ PB : pB :: FP : Hp; logo AP × PB : Ap × pB :: FP × PG : Hp × pI, ou pela natureza do circulo, AP × PB : Ap × pB :: PM² : pm². Estaõ pois os quadados das ordenadas da secção AMm entre si como os productos das abscissas; e porque estas se achaõ de huma e outra parte da ordenada (*Fig. 57*), e da mesma parte (*Fig. 58*), AMm será na *Fig. 57* huma ellipse, e na *Fig. 58* será huma hyperbola.

Na *Fig. 59* temos pela propriedade do circulo PM² = FP × PG, e pm² = Hp × pI = FP × pI;

pI ; logo $PM^2 : pm^2 :: PG : pI :: AP : Ap$, pelos triangulos semelhantes APG , ApI . Estaõ pois os quadrados das ordenadas entre si como as abscissas, e conseguintemente a curva he huma parabola.

Reflexões sobre as Equações das Secções Conicas.

369 **T** Em-se demonstrado (309) que na ellipse, sendo x a abscissa CO (*Fig. 41*) contada do centro sobre o diametro MM' , e y a ordenada mO parallelá ao conjugado CN , a equação ás coordenadas dos diametros he $yy = \frac{bb}{aa} (\frac{1}{4}aa - xx)$, seja qual for o angulo comprehendido pelos diametros. Logo se por m conduzirmos mO' parallelá a MM' , a qual será huma ordenada ao diametro NN' ; fazendo $CO' = x'$, $mO' = y'$, teremos $y = x'$, e $x = y'$, e por consequencia $yy = \frac{aa}{bb} (\frac{1}{4}bb - x'x')$.

Donde se segue, que contando as abscissas do centro, a equação da ellipse em ordem a qualquer diametro tem sempre a mesma fórma, em quanto as ordenadas se tomarem parallelas ao diametro conjugado.

Se $b = a$, temos $yy = \frac{1}{4}aa - xx$, a qual he a equação do circulo (285), no caso de serem as ordenadas perpendiculares ao diametro; porque se forem obliquas, a equação pertence á ellipse reportada aos diametros conjugados iguais.

Quan-

Quanto á hyperbola, sendo x a abscissa CO (Fig. 48) contada do centro sobre o diametro MM' terminado na curva, e y a ordenada mO paralela ao conjugado NN' , teremos (338) $yy = \frac{bb}{aa}$

$(xx - \frac{1}{2}aa)$ por equação ás coordenadas do primeiro diametro, seja qual for o angulo comprehendido pelos diametros conjugados. Mas se por m' conduzirmos $m'O'$ paralela ao diametro CM , a qual será huma ordenada ao diametro NN' ; fazendo $CO' = x'$, e $m'O' = y'$, teremos $x' = y$,

e $y' = x$, e conseguintemente $y'y' = \frac{aa}{bb} (x'x' + \frac{1}{2}bb)$. Logo na hyperbola a equação ás coordenadas do diametro conjugado NN' não he semelhante áquella que se acha para o diametro MM' terminado na curva.

Na parabola, contando as abscissas da origem de hum diametro sobre elle mesmo, e tomando as ordenadas paralelas á tangente no vertice do mesmo diametro, a equação (366) he sempre $yy = px$, sendo y a ordenada, x a abscissa, e p o parametro do diametro.

Em fim, na hyperbola entre as asymptotas, contando as abscissas x do centro sobre huma das asymptotas, e tomando as ordenadas y paralelas á outra asymptota, a equação he $xy = aa$, sendo a a potencia da hyperbola.

370 He porém de advertir, que se huma das indeterminadas, y por exemplo, não se contar da mesma linha sobre que se contaõ os x , poderemos ter huma equação semelhante ás mencionadas, a qual nem porisso pertença aos diametros conjugados

dos, no caso de ser a curva respectiva huma ellipse, ou huma hyperbola; ou naõ exprima a relaçaõ entre as abscissas e as nossas ordenadas, no caso de ser huma parabola. Sejaõ, por exemplo, CM' , CN (*Fig. 60*) dous semidiametros conjugados da ellipse; suppondo $CM' = \frac{1}{2}a$, $CN = \frac{1}{2}b$, $CQ =$

x , $QM = y$, a equaçãõ he $yy = \frac{bb}{aa} (\frac{1}{4}aa - xx)$.

Tire-se pelo centro C huma recta FCE , e pelo ponto B , tomado na distancia conhecida $BC = m$, conduza-se BF parallela a QM ; suppondo $CE = z$, e $CF = n$, os triangulos semelhantes CBF , CQE

daraõ $x = \frac{mz}{n}$; logo teremos $yy = \frac{bbmm}{aann}$

$\left(\frac{\frac{1}{4} aann}{mm} - zz \right)$. Donde se vê, que esta equaçãõ

ainda que tenha a mesma fórma da relativa aos diametros conjugados, com tudo naõ lhes pertence; porque as abscissas z tomaõ-se sobre CE , e as ordenadas y ou QM contaõ-se do ponto Q , onde a linha QM parallela a CN se encontra com CM' .

371 Segue-se pois, 1º que huma equaçãõ do segundo graõ a duas indeterminadas, contando-se huma dellas da mesma linha sobre que se conta a outra, pertencerá á ellipse reportada aos diametros conjugados, ou ao circulo, quando nella naõ entrarem outras potencias das indeterminadas mais que os quadrados, e estes tiverem diferentes finais em diferentes membros: bem entendido que o termo conhecido deve ter o final $+$ no membro em que estiver o quadrado da indeterminada com o

final — ; porque a equação $yy = \frac{bb}{aa} (-\frac{1}{2}aa - xx)$ não exprime linha possível (98).

372 2º Se os quadrados das indeterminadas tiverem o mesmo final em diferentes membros, e dellas não entrarem outras potências mais que os quadrados, a equação pertencerá sempre á hyperbola reportada ou a hum diametro terminado na curva, ou ao seu conjugado, conforme o termo conhecido tiver o mesmo ou differente final do que tiverem os quadrados das indeterminadas.

373 3º Se a equação constar sómente de dous termos, dos quais hum seja o quadrado de huma indeterminada, e o outro seja o producto da outra indeterminada por huma quantidade conhecida, pertencerá á parabola reportada a hum dos diámetros, quando os dous termos em diferentes membros tiverem o mesmo final; porque se o tiverem differente, a equação não exprimirá linha possível.

374 4º Em fim se a equação constar sómente de dous termos, dos quais hum seja o producto das duas indeterminadas, e o outro seja huma quantidade conhecida, exprimirá a hyperbola reportada ás asymptotas.

375 Quando huma equação a duas indeterminadas tiver as condições expostas, com facilidade se poderá construir a secção conica a que pertencer.

Por exemplo, se tivermos a equação $ncd - qyy = gxx$, escreveremos primeiramente $qy^2 = ncd - gxx = g \left(\frac{ncd}{g} - xx \right)$, e depois $yy = \frac{g}{q} (ncd$

$\left(\frac{ncd}{g} - xx\right)$. Vê-se pois que a equação proposta pertence (309, e 371) a huma ellipse, na qual a razão dos quadrados dos dous diametros conjugados ou $\frac{bb}{aa} = \frac{g}{q}$, e o quadrado do diametro sobre

que se contaõ os x ou $a^2 = \frac{4ncd}{g}$. Destas duas equações se tiraõ os valores dos dous diametros conjugados, a saber $a = \sqrt{\frac{4ncd}{g}}$, e $b = \sqrt{\frac{4ncd}{q}}$.

E como o angulo por elles comprehendido he igual ao comprehendido pelas linhas x e y , o qual se supõe conhecido pelo problema de que se houver deduzido a equação $ncd - qyy = gxx$; temos as tres cousas (316), com as quais podemos descrever a ellipse.

Isto mesmo se praticará nos outros casos. Em geral: Toda a equação do segundo gráo a duas indeterminadas, se exprime huma linha possível, e não he resolvel em dous factores do primeiro gráo da fórma $ax + by + c$, e $dx + fy + g$, pertence a huma secção conica. Para o demonstrar, ensinaremos a reduzir qualquer equação desta natureza á fórma de alguma das equações que havemos considerado. Antes porém de entrarmos nesta materia, faremos para maior clareza as reflexões seguintes.

376 Por quanto os problemas resolvidos por Algebra conduzem sempre a huma ou mais equações, podemos considerar qualquer equação a duas indeterminadas u e t , como procedida de hum problema,

ma, em que as mesmas indeterminadas representassem duas incognitas. E como dando successivamente a huma das incognitas, a u por exemplo, muitos valores, e calculando pela equação os correspondentes de t , não ha embaraço para marcar na linha AR (Fig. 60, 61, 62) os valores AP, AP, &c. que se derem a u , e tirar por P, P, &c. debaixo de hum angulo determinado as linhas PM, PM, &c. parallelas entre si, e iguais aos valores calculados de t ; vindo desta forte os pontos M, M, &c. a formar huma curva, cuja natureza dependerá da razão que houver entre as linhas AP e PM, a qual se exprime pela equação de que ellas se deduzirão: segue-se que a mesma equação exprime a natureza de huma curva, e por tanto seja qual for o problema, póde considerar-se a sua equação como pertencente a huma curva.

Imaginemos que a curva he huma secção conica: está claro que como se ignorava, ou podia ignorar-se, que detal uso da equação resultasse huma secção conica, não se havia tratado de dispor as linhas AP e PM de maneira, que tendo huma a sua direcção sobre o diametro, a outra fosse parallelá á tangente no vertice d'elle, como era necessario para que a equação tivesse alguma das fórmás acima expostas. Pelo que póde a equação não ter nenhuma das mesmas fórmás, e sem embargo pertencer a huma das secções conicas.

377 Vejamos agora como toda a equação do segundo gráo a duas indeterminadas póde reduzir-se a alguma das fórmás que tem as equações das secções conicas em ordem ás linhas, a que as havemos reportado (369).

378 Para praticarmos pelo methodo que vamos a expôr, devemos lembrar-nos (192) de que o segundo termo de huma equação do segundo grão se faz desaparecer, igualando a incognita mais ou menos a ametade do coeſſiciente do segundo termo, conforme for positivo ou negativo, a huma nova incognita, havendo antes desembaraçado o quadrado da incognita.

Aſſim na equação $4x^2 + 12x = 9$, faremos $x + \frac{3}{2} = z$, e teremos a equivalente $zz = \frac{18}{4}$, em que não ha segundo termo. Se tivessemos $x^2 - 4x = 7$, fariamos $x - 2 = z$, e achariamos $zz = 11$.

379 Podemos tambem igualar a incognita augmentada ou diminuida da ametade do coeſſiciente do segundo termo, a huma nova incognita multiplicada ou dividida por huma quantidade arbitraria.

Por exemplo na equação $x^2 - 4x = 7$, fazendo $x - 2 = \frac{k}{n} z$, teremos $\frac{kk}{nn} zz = 11$, a qual dá para x o meſmo valor da operação precedente, seja k e n o que se quizer; porque ſendo $\frac{k}{n} z = \sqrt{11}$, e $x - 2 = \frac{k}{n} z$, teremos como acima $x - 2 = \sqrt{11}$.

Methodo de reduzir ás Secções Conicas toda a equação indeterminada do segundo gráo.

38o **S**upponhamos que a equação geral do segundo gráo a duas indeterminadas $dt + cut + euu + fdt + geu + bd^2 = 0$ pertence a huma curva MM (Fig. 60, 61), cujas coordenadas sejaõ AP e PM. Para mostrarmos que esta curva he sempre huma secção conica, e ensinarmos o methodo de a construir, simplifiquemos a equação, fazendo

(378) $t + \frac{1}{2}f + \frac{cu}{2d} = y$; teremos $4ddy = ffdd - 4bd^3 + (2cfd - 4ged)u + (cc - 4de)uu$. Suppondo para maior facilidade $ffdd - 4bd^3 = r$, $2cfd - 4ged = q$, e $cc - 4de = m$, a equação se reduz á fórma $4ddy = r + qu + muu$, na qual m, q, r podem ser quantidades positivas ou negativas.

Faça-se agora a mesma operação em ordem a u , dando á equação a fórma $uu + \frac{q}{m}u + \frac{r}{m} = \frac{4dd}{m}yy$, e (379) pondo $u + \frac{q}{2m} = \frac{qx}{2mn}$ (*); teremos $\frac{qqxx}{4mnn} - \frac{qq}{4nm} + \frac{r}{m} = \frac{4dd}{m}yy$, da qual se deduz $yy = \frac{qq}{16mn^2d^2} \left(xx - nn + \frac{4mrnn}{qq} \right)$.

Como

(*) Introduzimos a quantidade arbitraria n , a fim de reduzir directamente a equação aos diametros conjugados. Se igualassemos (378) simplesmente a x , a equação final estaria no caso que havemos examinado (370).

Como q , n , e d estão no quadrado, os finais da equação sómente mudarão, quando m ou r se tornarem de positivos em negativos. Porém a mudança de final em r não influe nos finais de xx e yy ; logo della não resulta mudança na curva.

Quanto a m , se for negativo, teremos $yy = \frac{qq}{16mnndd}$

$(nn + \frac{4mrnn}{qq} - xx)$. Logo a curva será huma

hyperbola, quando m for positivo (372); e pelo contrario será huma ellipse, quando m ou $cc - 4de$ for negativo (371), isto he, quando $4de$ for maior que cc , tanto no caso de d e e serem ambos positivos, como no caso de serem ambos negativos.

381 Para sabermos pois em que casos huma equação indeterminada do segundo grão $dt + cut + eu + fdt + geu + hdd = 0$, pertence à ellipse ou à hyperbola, examinaremos se o quadrado cc do coeﬃciente do termo ut menos o quadruplo do producto de dos coeﬃcientes de tt e uu dá huma quantidade positiva ou negativa; no primeiro caso a curva será hyperbola, e no segundo huma ellipse, com tanto que não seja $d = e$, porque então a curva pôde ser hum circulo, como logo mostraremos.

Deve exceptuar-se desta regra o caso da ellipse, em que r for negativo e maior que $\frac{qq}{4m}$; por-

que então $nn + \frac{4mrnn}{qq}$ torna-se em $nn - \frac{4mrnn}{qq}$

ou $nn (1 - \frac{4mr}{qq})$; a qual he negativa quando

for

for $\frac{4mr}{qq} > 1$, ou $r > \frac{qq}{4m}$, e conseguintemente
 (371) a curva será imaginaria.

Resta agora ensinar o modo de construir as curvas reconhecidas. Começemos pella ellipse, construindo as duas equações respectivas $t + \frac{1}{2}f + \frac{cu}{2d} = y$, e $u - \frac{q}{2m} = \frac{qx}{2mn}$, pois que m na supposição actual he negativo, e n póde suppor-se indifferentemente positivo ou negativo.

382 Quanto á primeira, conduza-se pela origem A dos u e t (*Fig. 60*) a linha $AB = \frac{1}{2}f$ parallela ás linhas PM ou t , e tire-se BKI parallelamente á linha AR sobre que se contaõ os u ; será $IM = t + \frac{1}{2}f$. Para termos pois $y = IM + \frac{cu}{2d}$, tome-se sobre BI a linha BK de grandeza arbitraria, e conduzindo $KL = \frac{\frac{1}{2}c \cdot BK}{d}$ parallelamente a AB , se tirarmos pelos pontos B e L huma linha BLQ , teremos dous triangulos semelhantes $BKLeBIQ$, que daõ $IQ = \frac{cu}{2d}$; logo $QM = IM + IQ = t + \frac{1}{2}f + \frac{cu}{2d} = y$. Donde se ve vê (370) que QLB deve ser a direcção de hum dos diametros, para que a equação pertença aos conjugados. Determinemos o centro.

A segunda equação $u - \frac{q}{2m} = \frac{qx}{2mn}$ mostra, que se sobre AP tomarmos $AG = \frac{q}{2m}$, será GP

$= u - \frac{q}{2m} = \frac{qx}{2mn}$; logo tirando por G a linha NGC paralela a PM, o ponto C ferá a origem dos x , e conseguintemente o centro da ellipse. Com effeito, os x devem contar-se sobre LQ, e pela equaçãõ GP $= \frac{qx}{2mn}$, quando GP $= 0$, tambem $x = 0$; logo os x começãõ ao mesmo tempo que as linhas GP; mas isto sómente pôde ter lugar quando os x começarem em C; logo sendo QM os y , as linhas CQ feraõ os x .

Da equaçãõ GP $= \frac{qx}{2mn} = \frac{AG \times CQ}{n}$ se tira $n = \frac{AG \times CQ}{GP}$; mas, pela propriedade das parallelas, BC $= \frac{AG \times CQ}{GP}$; logo $n = BC$; isto he, para que a nossa equaçãõ pertença aos diametros conjugados, cujas direcções saõ QB e CN, deve introduzir-se por n o valor de BC, determinado pelas construcções precedentes.

A grandeza dos diametros determina-se, comparando as duas equações $yy = \frac{qq}{16mddnn}$ $(nn + \frac{4mrnn}{qq} - xx)$ e $yy = \frac{bb}{aa} (\frac{1}{4}aa - xx)$, do que resulta $a = \sqrt{4nn + \frac{16mrnn}{qq}}$, e $b = \sqrt{(\frac{qq}{4mdd} + \frac{r}{dd})}$. E como n, m, q, r , saõ quantidades conhecidas, teremos os valores dos

dos diâmetros, com os quais e com o angulo comprehendido BCN, que se suppõe determinado nas operações precedentes, descreveremos (316) a ellipse a que pertence a nossa equação.

383 Se $a = b$, e o angulo BCN = 90° , a curva será hum circulo. Para determinarmos quando isto tem lugar, 1º na nossa equação suporemos

$$\frac{qq}{16mddnn} = 1, \text{ que dá } mn = \frac{qq}{16mdd} = BC^2; 2^\circ \text{ se}$$

o angulo BCD he recto, temos $BC^2 + CD^2 =$

$$BD^2 = AG^2, \text{ ou } \frac{qq}{16mdd} + \frac{qqcc}{16mddd} = \frac{qq}{4mm}, \text{ por-}$$

que os triangulos semelhantes BCD, BLK daõ

$$CD = \frac{qc}{4md}; \text{ logo he necessario que } m + cc =$$

$$4dd, \text{ isto he, } -cc + 4de + cc = 4dd, \text{ ou } d = e.$$

384 He pois manifesto, que *para saber se a curva he circulo, ellipse, ou hyperbola*, he escusado attender aos tres ultimos termos fdt , geu , e bdd , da equação $dt^2 + cut + eu^2 + fdt + geu + bd^2 = 0$: esta averiguação depende sómente dos tres primeiros termos, de maneira que se d, c , e e forem tais, que $cc - 4de$ seja positivo, a curva será huma hyperbola; se pelo contrario for negativo, a curva será huma ellipse, exceptuando sómente o caso em que seja ao mesmo tempo $d = e$, isto he em que os dous quadrados u^2 e t^2 tenhaõ o mesmo coefficiente, porque entãõ a curva será hum circulo, se for recto o angulo das novas coordenadas.

385 Tudo o que temos dito, á excepção do numero 383, se applica igualmente á hyperbola, isto

isto he, á equaçãõ $yy = \frac{qq}{16mnndd} \left(xx - mn + \frac{4mrnn}{qq} \right)$, fazendo a devida correçãõ nos finais. Assim tornando a ler o precedente, e applicando-o á *Figura 61*, não ha outra mudança a fazer mais do que tirar AG para a parte opposta de AP, como indica a equaçãõ $u + \frac{q}{2m} = \frac{qx}{2mn}$ (380). Quanto ao mais, tudo he o mesmo, mudando a palavra *ellipse* em *hyperbola*.

Nos casos particulares as quantidades AG, BK, AB, KL (*Fig. 60, 61*) podem ter disposiçãõ differente da que havemos representado; porém tais mudanças seraõ sempre indicadas pelos finais das quantidades d, c, f, m, q &c. nas equações $t + \frac{1}{2}f + \frac{cu}{2d} = y$, e $u + \frac{q}{2m} = \frac{qx}{2mn}$, que se formaõ para fazer desaparecer o segundo termo.

386 Passemos a examinar os dous casos que restaõ: a saber 1º quando $cc - 4de = 0$; 2º quando $d = 0$, e $e = 0$.

No primeiro caso, isto he quando $cc - 4de = 0$, ou quando os tres termos tt, ut , e uu formaõ hum quadrado perfeito, faremos desaparecer o segundo

termo em ordem a t , e teremos $yy = \frac{r + qu}{4dd}$.

Se suppuzermos pois este segundo membro igual a huma nova indeterminada x multiplicada por hum numero arbitrario n , virá a equaçãõ $yy = nx$, a qual pertence (369) á parabola reportada a hum dia-

diametro. Para a descrever, construiremos as equações $t + \frac{1}{2}f + \frac{cu}{2d} = y$, e $\frac{r + qu}{4dd} = nx$.

Como ja se construiu a primeira, applicando exactamente á *Figura 62* o que se disse (382) a este respeito para a *Figura 60*, as linhas QM seraõ os y , e teremos BLQ pela direcção do diametro, sobre que devem contar-se os x .

A origem dos x , e conseguintemente o vertice do diametro se determina recorrendo á segunda equação $u + \frac{r}{q} = \frac{4ddnx}{q}$, a qual mostra que se tomarmos para a parte contraria de AP a quantida- de $AG = \frac{r}{q}$, será $GP = u + \frac{r}{q} = \frac{4ddnx}{q}$.

Logo se por G conduzirmos GCD parallela a PM, o ponto de encontro C com QLB será a origem dos x .

O parametro $n = \frac{q \cdot GP}{4d^2 \cdot CQ} = \frac{q \cdot AG}{4d^2 \cdot BC} = \frac{r}{4d^2 \cdot BC}$. Logo sendo conhecido o parametro do diametro, com a origem C do mesmo diametro, e o angulo MQC das coordenadas, facilmente se construirá a parabola (367).

387 Por quanto a equação geral pertence á parabola quando $c^2 = 4de$, segue-se que todas as vezes que faltar o producto ut , deve necessariamente faltar hum dos quadrados u^2 e t^2 , para que a equação pertença á parabola; porque sendo entãõ $c = 0$, a equação $cc = 4de$ mostra, que d ou $e = 0$.

388 Se ambos os quadrados se acharem na equação, e faltar ut , a construcção (382) será mais simples; porque neste caso $c = 0$; logo $KL = 0$ (Fig. 60, 61), e conseguintemente BK será hum diametro, cujas coordenadas serão parallelas aos u e t . Podemos tambem então fazer desaparecer o segundo termo em ordem a u sem usar de n , porque BD ou $AG \left(\frac{q}{2m}\right) = BC (n)$, e por consequencia

$$u + \frac{q}{2m} = x.$$

Donde se segue, que no caso presente, alem das condições expostas (384), o angulo das coordenadas u e t deve ser recto, para que a curva seja hum circulo.

389 Se houver ut na equação primitiva, e não apparecer outra potencia de u senão o quadrado depois de se fazer desvanecer o segundo termo em ordem a t , então não he necessario outra operação semelhante em ordem a u ; mas nem porisso estamos dispensados de huma transformação, a qual consiste em suppor $u = \frac{lx}{n}$, sendo $\frac{l}{n}$ huma fracção, que se determinará de hum modo analogo ao que havemos ensinado (382), como abaixo mostraremos.

390 Se dos tres termos t^2 , ut , e u^2 faltar sómente hum dos quadrados, a equação pertencerá sempre á hyperbola, ou não exprimirá curva alguma; porque se for d ou $e = 0$, a quantidade cc será sempre positiva (384).

391 Finalmente se faltarem ambos os quadrados t^2 e u^2 , isto he, se a equação tiver a fórmula

gut

$gut + ht - ku - l = 0$, pertencerá á hyperbola entre as asymptotas, como se vai a vêr na construcção seguinte.

Faça-se $t - \frac{k}{g} = y$; teremos a transformada $uy + \frac{by}{g} + \frac{hk}{gg} - \frac{l}{g} = 0$. Faça-se $u + \frac{b}{g} = x$; teremos $xy = \frac{l}{g} - \frac{hk}{gg}$, equação que pertence á hyperbola, cuja potencia (347) he $\frac{l}{g} - \frac{hk}{gg}$.

Conduzamos pois pela origem A (*Fig. 63*) dos u e t parallelamente a PM ou t , a linha AB = $\frac{k}{g}$, e depois por B a linha CBQ parallelamente a AP, teremos $QM = t - \frac{k}{g} = y$.

Produza-se AP para G até que seja $AG = \frac{b}{g}$, e tire-se GS parallelamente a PM, o ponto C de encontro com BQ será o centro da hyperbola, cujas abscissas são as linhas CQ, e asymptotas as linhas CQ, CS. Com estas e com a equação facilmente se descreverá a curva (354).

Se a equação não tiver os tres primeiros termos t^2 , ut e u^2 , pertencerá á linha recta, cuja construcção não tem difficuldade.

392 Assim, recapitulando o que temos dito, 1º toda a equação indeterminada do segundo gráo, se

se não se resolve em dous factores do primeiro, exprime sempre huma secção conica, ou não exprime linha alguma possível. 2º A curva he ellipse, hyperbola, ou parabola, conforme for positivo, negativo, ou cifra o quadrado do coeſiciente do producto *ut* das duas indeterminadas menos o quadruplo do producto dos coeſicientes dos dous quadrados u^2 e t^2 ; e em particular pôde ser circulo no caso de ser negativo o producto, quando os coeſicientes de u^2 e t^2 forem iguais entre si. 3º E para reduzirmos qualquer equação, que pertença a huma secção conica, ás equações que havemos dado quando se tratou destas curvas, devemos praticar pelo modo que se ensinou (380, 386, 388, 389, e 391). Passemos a mostrar o uso das nossas transformações.

Aplicação á resolução de alguns problemas indeterminados.

393 **P** Robl. I. Achar a curva DME (Fig. 64) tal que as distancias de cada hum dos seus pontos M a dous fixos A e B tenham entre si a razão dada de $g : h$.

Tire-se sobre AB a perpendicular MP, e seja $AP = u$, $PM = t$, $AB = c$; será $BP = u - c$.

Isto supposto, os triangulos rectangulos APM BPM dão $AM = \sqrt{(uu + tt)}$, e $BM = \sqrt{(uu - 2cu + cc + tt)}$. E como deve ser $AM : BM :: g : h$, teremos $(g^2 - h^2)u^2 + (g^2 - h^2)tt - 2g^2cu$

$2g^2cu + g^2c^2 = 0$; equação que pertence ao círculo (384).

Para a reduzirmos á fórma $yy = \frac{1}{4}aa - xx$, basta suppor primeiramente $t = y$, e teremos $uu -$

$$\frac{2g^2cu}{g^2 - b^2} = \frac{-g^2c^2}{g^2 - b^2} - yy. \text{ Seja agora } u -$$

$$\frac{g^2c}{g^2 - b^2} = x; \text{ teremos } yy = \frac{b^2g^2c}{(g^2 - b^2)^2} - xx.$$

Comparando pois as duas equações, virá o valor

$$\text{do raio ou } \frac{1}{2}a = \frac{hgc}{g^2 - b^2}. \text{ Quanto á determina-}$$

ção do centro, que está na linha AP, tome-se $AC =$

$$\frac{g^2c}{g^2 - b^2}; \text{ será } CP = u - \frac{g^2c}{g^2 - b^2} = x. \text{ Def-}$$

crevendo pois hum círculo do ponto C como cen-

$$\text{tro e com o intervallo } \frac{hgc}{g^2 - b^2}, \text{ cada hum dos}$$

seus pontos M terá a propriedade de que se trata.

Podemos ainda mais facilmente achar o centro e o raio. Porque fazendo $y = 0$ na equação

$$uu - \frac{2g^2cu}{g^2 - b^2} = \frac{-g^2c^2}{g^2 - b^2} - yy, \text{ teremos } u =$$

$$\frac{g^2c}{g^2 - b^2} \pm \frac{ghc}{g^2 - b^2} = \frac{gc(g \pm h)}{g^2 - b^2}, \text{ a qual dá } u =$$

$$\frac{gc}{g + b} = AD, \text{ e } u = \frac{gc}{g - b} = AE; \text{ logo a se-}$$

$$\text{midiferença ou } \frac{DE}{2} \text{ determinará o centro, e o ra-}$$

io CE.

394 Probl. II. Sendo dada a linha AR (Fig.65) achar fóra della todos os pontos M, tais que as rectas

MA,

MA, MR, tiradas por cada hum delles para A e R, formem sempre hum angulo dado.

Abaixe-se a perpendicular MP, e seja o raio $= r$, $AP = u$, $PM = t$, $AR = b$, a tangente do angulo dado, ou $\text{tang } AMR = m$; teremos $PR = b - u$.

Os triangulos rectangulos APM, RPM daõ $\text{tang } AMP = \frac{u}{t}$, e $\text{tang } PMR = \frac{b-u}{t}$; porẽm (Trig. 41) $\text{tang } (A + B) = \frac{R^2 (\text{tang } A + \text{tang } B)}{R^2 - \text{tang } A \text{ tang } B}$; logo teremos $m =$

$$\frac{\frac{u}{t} + \frac{b-u}{t}}{1 - \frac{u(b-u)}{t^2}}, \text{ ou } mtt + muu - mbu - bt = 0;$$

equaçãõ a hum circulo, cujo raio e centro determinaremos da maneira seguinte.

Faça-se $t - \frac{b}{2m} = y$; virá $yy - \frac{bb}{4mm} - bu + uu = 0$. Seja $u - \frac{b}{2} = x$; teremos $yy = \frac{bb}{4} + \frac{bb}{4mm} - xx$; logo o raio $= \sqrt{\left(\frac{bb}{4} + \frac{bb}{4mm}\right)}$.

Levante-se pois do ponto A a perpendicular $AB = \frac{b}{2m}$, e tire-se BCQ parallela a AR; será $QM = t - \frac{b}{2m} = y$. Tomando agora sobre AR a parte $AG = \frac{b}{2}$, teremos $GP = u - \frac{b}{2} = x$.

Logo se tirarmos por G a linha GC paralela a PM, o ponto C será o centro, e $AC = \sqrt{(AG^2 + GC^2)} = \sqrt{\left(\frac{bb}{4} + \frac{bb}{4mm}\right)}$ será o raio.

Reduz-se pois a construcção a levantar do ponto G meio de AR a perpendicular $GC = \frac{b}{2m}$, e descrever hum circulo do centro C com o raio CA; todo o angulo AMR que tiver o vertice na circumferencia, e passar pelos pontos A e R, será igual ao angulo dado.

Está claro que para construirmos $\frac{b}{2m}$, tiraremos huma recta AO, que faça com AB o angulo BAO igual ao angulo dado; então o ponto do encontro C com a perpendicular GC será o ponto procurado, porque (Trig. 164) no triangulo rectangulo ABC temos AB ou $GC = \frac{b}{2m}$.

Donde se segue, que em huma palavra se reduz tudo a tirar por A a linha AO que faça com AR hum angulo igual ao complemento do angulo dado; esta cortará no ponto procurado C a perpendicular levantada do meio de AR.

395 Agora he facil de resolver a questáo seguinte: Sendo dada a posição de tres pontos R, A, R' (Fig. 66), achar o ponto M, do qual se vejam as linhas RA, AR' por angulos dados.

Dividáo-se as linhas RA, AR' em duas partes iguais nos pontos G e G', dos quais se levantem as perpendiculares GC e G'C'. Tirem-se por A as linhas AC, AC', que façáo com AR e AR'

U

AR'

AR' os angulos RAC, R'AC' iguais cada hum ao complemento do angulo RMA, R'MA, por que se vê a linha correspondente; e descrevendo dous circulos dos centros C e C' com os raios CA, C'A, o ponto M de intersecção será o ponto procurado.

Este problema pôde servir para representar nas Cartas Topograficas a posição de hum ponto, do qual se avistaõ tres objectos conhecidos.

Se os angulos observados RMA, R'MA fossem iguais aos angulos RR'A, R'RA, o problema seria indeterminado; porque confundindo-se entãõ os dous circulos, cada hum dos pontos da circumferencia satisfaria á questãõ.

396 Probl. III. Sendo dado o angulo que fazem entre si duas linhas AZ, AT (Fig. 67), achar as curvas, nas quais a distancia de cada hum dos seus pontos M a hum fixo F de AZ tem sempre para a linha MT, tirada do mesmo ponto M para a recta AT parallelamente a AZ, a razão dada de g: h.

Tiremos MP parallelamente a AT, e MS perpendicular a AZ. Seja AP = u, PM = t, AF = c, sen MPS = p, e cos MPS = q.

Isto posto, o triangulo rectangulo MPS dá MS = pt, e PS = qt; logo teremos FS = qt - u + c, e por consequencia MF = $\sqrt{(MS^2 + FS^2)} = \sqrt{(t^2 - 2qut + uu + 2qct - 2cu + cc)}$, advertindo que $p^2 + q^2 = 1$. Mas deve ser MF : MT :: g : h; logo teremos $h^2t^2 - 2qb^2ut + (h^2 - g^2)u^2 + 2cb^2qt - 2cb^2u + b^2c^2 = 0$. Esta equa-

equação, que comprehende todas as secções conicas (380), pertencerá (392) á ellipse ou á hyperbola, conforme for negativa ou positiva a quantidade $4b^2g^2 - 4p^2b^4$; e pertencerá á parabola, se for $4b^2g^2 - 4p^2b^4 = 0$, ou $g = pb$; e finalmente a curva será hum circulo, quando for $b^2 = b^2 - g^2$, isto he, quando $g = 0$, ou quando $h = \infty$, designando por este final o infinito.

Para construirmos a curva em cada hum destes casos, não temos mais do que imitar o que está feito (380 e seg.), como vamos a mostrar, applicando á hyperbola o que se executou na ellipse, isto he, reduzindo a nossa equação á fôrma $yy = \frac{bb}{aa} (xx - \frac{1}{4}aa)$.

Faça-se pois $t + cq - qu = y$; teremos por primeira transformação $yy + ccpp - 2cqp + ppuu - \frac{gg}{hb} uu = 0$, ou $hb yy + cchb pp - 2chb pp + kkuu = 0$, pondo (por abbreviar) $pphb - gg = kk$.

Fazendo agora $u = \frac{cb^2p^2}{k^2} = \frac{cb^2p^2x}{k^2n}$, virá $y^2 = -\frac{c^2h^2p^4}{k^2n^2} (x^2 + \frac{n^2k^2}{p^2b^2} - n^2)$; mas como na hyperbola $4b^2 (g^2 - p^2b^2)$ deve ser positivo, faremos k^2 negativo, lembrando-nos da hypothese $k^2 = g^2 - p^2b^2$ a todo o tempo que se fizer a substituição; assim teremos $y^2 = \frac{c^2h^2p^4}{k^2n^2} (x^2 - \frac{n^2k^2}{p^2b^2} - n^2)$. Esta equação sendo com-

parada com $y^2 = \frac{b^2}{a^2} (x^2 - \frac{1}{4}a^2)$, dá $\frac{b^2}{a^2} = \frac{c^2 b^2 p^4}{k^2 n^2}$, e $\frac{1}{4}a^2 = \frac{n^2 k^2}{p^2 b^2} + n^2$, donde se tirarão os valores dos diâmetros conjugados a e b , os quais são os mesmos eixos da hyperbola como logo se verá.

Para determinar a direcção dos diâmetros, construiremos primeiramente a equação $t + cq - qu = y$, continuando a imitar o que se fez (382). Conduziremos pois por A parallelamente a PM a linha $AB = cq$, e tirando BI parallelamente a AZ , tomaremos nella a parte BK ; e conduzindo $KL = q$. BK parallelamente a PM , se tirarmos pelos pontos B e L huma linha BQ , será $QM = y$.

Póde porém abbreviar-se esta construcção, conduzindo immediatamente do ponto F a linha FB perpendicular a TA ; porque sendo o angulo $FAB = APM$, no triangulo rectangulo ABF temos $AB = cq$; logo serão os y perpendiculars á linha BQ , a qual por consequencia será a direcção de hum dos eixos, e a do outro será parallelamente a QM .

Quanto á determinação do centro, a segunda equação $u + \frac{cb^2 p^2}{k^2} = \frac{cb^2 p^2 x}{k^2 n}$ na hypothese de k^2 ser negativo, mostra que tomando da parte contraria dos u a quantidade $AG = \frac{cb^2 p^2}{k^2}$, a linha GC parallelamente a PM , ou perpendicular a BQ , determinará a origem C dos x , e por consequencia o centro. Na ellipse seguiremos hum procedimento analogo. Quan-

Quanto á parábola porém, como temos então $g = ph$, e conseguintemente $k^2 = 0$, a equação achada entre y e u se torna em $y^2 + c^2p^2 - 2cp^2u = 0$. Para a reduzirmos á fôrma ordinaria, faça-se (386) $2cp^2u - c^2p^2 = nx$, e teremos $yy = nx$. Agora podemos descrever a curva, construindo, a primeira equação $t + cq - qu = y$, como no caso precedente; e a segunda $2cp^2u - c^2p^2 = nx$, ou $u - \frac{1}{2}c = \frac{nx}{2cp^2}$ de hum modo analogo ao do

§. 386, tomando sobre AP (Fig. 68) a parte $AG = \frac{1}{2}c$: assim a linha GC paralela a PM será a linha dos x , os quais serão CQ, de maneira que CQ será a direcção do diametro, cujo vertice será C, e n o seu parametro. Este se determinará pela se-

segunda equação, que dá $n = \frac{2cp^2 \cdot GP}{CQ} = \frac{2c^2p^2}{BF}$;

expressão que he toda conhecida, e se pôde simplificar, advertindo que no triangulo rectangulo FAB temos $BF = cp$, e conseguintemente $n = 2BF$.

397 Probl. IV. Fazendo-se mover a recta dada OH (Fig. 69) dentro do angulo dado OCH, de maneira que as extremidades O e H se conservem sempre sobre os lados do angulo; achar a curva que neste movimento descreve hum ponto determinado M da mesma recta.

Tiremos de hum ponto qualquer M da curva a linha MP paralela a CH; e seja $CP = u$, $PM = t$, $OM = g$, $MH = h$, sen MPO = p , cos MPO = q .

As

As parallelas CH, PM dão $OP = \frac{gu}{b}$; mas no triangulo OPM temos (Trig. 180) $MO^2 = OP^2 + PM^2 + 2OP \cdot PM \cdot \cos OPM$; logo será $t^2 + \frac{2gq}{b} ut + \frac{g^2}{b^2} u^2 = g^2$, equação que pertence á ellipse (381).

Seja pois $t + \frac{gqu}{b} = y$, e $u = \frac{x}{n}$; teremos $y^2 = \frac{g^2 p^2}{b^2 n^2} \left(\frac{b^2 n^2}{p^2} - x^2 \right)$, a qual sendo comparada com $y^2 = \frac{b^2}{a^2} \left(\frac{1}{4} a^2 - x^2 \right)$, dá $a = \frac{2bn}{p}$, e $b = 2g$.

Para determinar as direcções dos dous diâmetros conjugados, e o valor de n , tome-se arbitrariamente CK, e conduza-se $KL = \frac{gq \cdot CK}{b}$ parallelamente a PM; então tirando CL, será $QM = PM + PQ = t + \frac{gqu}{b} = y$. Como pois os x devem contar-se sobre CQ, e a equação $u = \frac{x}{n}$ mostra que os u e x começam ao mesmo tempo; o ponto C será o centro, e CQ, CH serão as direcções dos diâmetros. Mas he $n = \frac{x}{u} =$

$\frac{CQ}{CP} = \frac{CL}{CK} = CL$, suppondo CK = ao raio; logo temos os valores dos diâmetros conjugados com o ângulo OCH por elles comprehendido, e conseguin-

guintemente não pôde haver difficuldade na descripção da ellipse.

Se o angulo C for recto , teremos $y^2 = \frac{g^2}{b^2}$

($b^2 - x^2$); equação ás coordenadas da ellipse , cujos semieixos são g e b . Assim temos outro methodo de descrever a ellipse por movimento continuo.

Aplicação dos mesmos principios á resolução de alguns problemas determinados.

398 **A** Solução do segundo problema indeterminado (394) servio para resolver outro determinado (395); e neste ultimo tacitamente supuzemos incluidos mais dous indeterminados , cada hum da mesma especie do primeiro , os quais por consequencia se resolvêrao do mesmo modo. A intersecção de duas curvas , ou circulos , que erao nesse caso o lugar de cada hum dos dous problemas parciais , deu a solução do problema determinado. Tal he o procedimento que devemos seguir para resolver as questões , quando a equação final que exprime todas as condições do problema , passar do segundo gráo : Faremos uso de duas incognitas ainda nos casos em que huma basta , isto he , nos casos em que os problemas são determinados , e formaremos duas equações , cada huma das quais sendo construida separadamente com o mesmo vertice , a mesma linha de abscissas , e o mesmo angulo das coordenadas , dará huma curva , cujos pontos satisfaráo todos á equação res-
pe-

pectiva. Então se a queſtaõ he poſſivel, as duas curvas ſe encontrarão em hum ou muitos pontos, conforme ella admitir huma ou muitas ſoluções, ou incluir muitos caſos dependentes dos meſmos dados, e raciocinios; e as coordenadas correſpondentes aos pontos de interſecção feroão os valores das incognitas.

Eſtá claro, que ſe as duas equações a duas indeterminadas não paſſarem do ſegundo grão, a reſolução do problema, não dependerá ſenaõ, quando muito, da interſecção de duas ſecções conicas. Porém neſtes meſmos caſos, ſe uſaſſemos de huma incognita fõmente, ou ſe por meio das duas equações eliminatſemos huma das duas incognitas, a equação ſubiria ao terceiro grão, e ordinariamente ao quarto. Se huma das equações, ou ambas ellas paſſarem do ſegundo grão, a reſolução do problema dependerá de curvas mais elevadas que as ſecções conicas.

Paſſemos a dar exemplos, começando pela reſolução de alguns problemas que não paſſaõ do quarto grão.

399 Probl. I. *Achar duas meias proporcionais t e u entre duas linhas dadas a e b.*

Sendo pela condição $\div\div a : t : u : b$, teremos $au = t^2$, e $bt = u^2$. Para conſtruir eſtas equações tirem-ſe duas linhas AX, AZ (*Fig. 70*), perpendiculares entre ſi para maior ſimplicidade, e ſobre AZ como diametro e pelo vertice A deſcreva-ſe huma parabola (367), cujo parametro ſeja $= a$, e o angulo das coordenadas $= XAZ$; eſta curva ſerá o lugar da equação $au = t^2$, de maneira que ſendo $AP = u$, ſerá $PM = t$. Semelhantemente deſcreva-ſe

va-se pelo vertice A , sobre o diametro AX , com o parametro b , e o angulo de coordenadas XAZ , outra parabola; será esta o lugar da equação $bt = u^2$, de sorte que sendo $AP' = t$, teremos $P'M' = u$. Mas he necessario que as duas equações tenham lugar ao mesmo tempo, isto he, que os valores tanto de u como de t sejam os mesmos em ambas ellas; e isto sómente acontece no ponto de intersecção M , como se vê tirando MP e MP' parallelas a AX e AZ : logo os valores de u e t que satisfazem ao problema são as coordenadas AP e PM , correspondentes ao ponto de encontro M . Ainda que as curvas tambem se encontraõ no ponto A , com tudo he evidente que tal ponto não satisfaz, porque nelle he $u = 0$, e $t = 0$.

400 Estas equações depois de preparadas conduzem muitas vezes a construcções bem simples. Ajuntando, por exemplo, as duas equações $au = t^2$, e $bt = u^2$, temos $au + bt = u^2 + t^2$; equação ao circulo, se as coordenadas u e t forem perpendiculares entre si. E como o circulo he mais facil de descrever que a parabola, construiremos, com preferencia ao que fizemos, huma das primeiras equações, por exemplo $au = t^2$, e a ultima $au + bt = u^2 + t^2$, a qual se reduz a $y^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2 - x^2$, pelas hypotheses de $t - \frac{1}{2}b = y$, e $u - \frac{1}{2}a = x$. Para este effeito, tomaremos $AB = \frac{1}{2}b$, e tirando BQ parallela a AP , será $QM = y$. Tomaremos tambem $AO = \frac{1}{2}a$, e conduzindo OC parallela a AX , teremos $CQ = x$. Se descrevermos pois do ponto C com o raio $\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2)} = AC$ hum circulo que corte a

parabola em hum ponto M, seraõ MP e AP as duas meias proporcionais u e t .

401 Podemos variar muito estas construcções; podemos, por exemplo, ajuntar huma das duas equações com a outra multiplicada por huma quantidade arbitraria $\frac{l}{n}$, positiva, ou negativa, e teremos au

$+ \frac{l}{n} bt = t^2 + \frac{l}{n} u^2$; equação que pertencerá á ellipse, ou á hyperbola, conforme o valor que se der a $\frac{l}{n}$; e assim podemos fazer a construcção com huma destas curvas, como se fez com o circulo. Podemos tambem construir com ambas as curvas juntamente, ou com huma sómente combinada com o circulo, para o que daremos a $\frac{l}{n}$ valores convenientes, os quais se determinão sem difficuldade (392).

402 Probl. II. *Dividir hum angulo ou arco dado EO (Fig. 71) em tres partes iguais.*

Seja EM a terça parte do arco dado, cujo centro he A. Tirem-se as perpendiculares MP, OR sobre o raio AE, e supponha-se $AE = r$, $OR = sen EO = d$, $AR = cos EO = c$, $AP = u$, $PM = t$.

O triangulo rectangulo APM dá $u^2 + t^2 = r^2$; e os dous semelhantes APM, ARS dão $RS = \frac{ct}{u}$. Produza-se MP até encontrar a circumferen-

cia

cia em V, será $OMS = AMP = ASR = OSM$,
e por consequencia $OS = OM = MV = 2t$. Mas

$$OR = OS + SR; \text{ logo teremos } d = 2t + \frac{ct}{u},$$

ou $tu + \frac{1}{2}ct = \frac{1}{2}du$, que pertence (391) á hyperbola. Como a primeira equação $t^2 = r^2 - u^2$ he a mesma do circulo EMO, não resta mais que construir a segunda. Para a reduzirmos pois a forma $xy = aa$, faça-se primeiramente $\frac{1}{2}d - t = y$, e depois $u + \frac{1}{2}c = x$; e teremos $xy = \frac{1}{4}cd$ por equação da hyperbola entre as asymptotas.

Conduza-se por A a linha $AB = \frac{1}{2}d$ parallelamente a PM, e tirando QBC parallelamente a AP, teremos $QM = \frac{1}{2}d - t = y$; logo CQ será a direção de huma asymptota. Produzindo depois AP para G de forte que seja $AG = \frac{1}{2}c$, e tirando GC parallelamente a PM, será $CQ = u + \frac{1}{2}c = x$; logo C será o centro, e CQ, CG serão as asymptotas. A hyperbola descrita (354) entre ellas, a qual deve passar por A, como se deduz da equação $xy = \frac{1}{4}c \cdot \frac{1}{2}d = CB \times AB$, cortará o circulo no ponto procurado M.

Quando o arco EO passar de 90° , faremos c negativo nas equações achadas; e quando o seu valor cahir entre 180° e 270° , como $E O E' O'$, mudaremos os finais de c e d .

Se produzirmos GC e CB até que tenhamos $CG' = CG$, e $CB' = CB$; e tirando $B'A'$ e $G'A'$ parallelamente a CG' e CB' , descrevermos entre as linhas CG' e CB' (produzidas) como asymptotas huma hyperbola que passe por A' ; esta encontrará o circulo em dous pontos A' e M' , do mesmo modo que a primeira o encontra em M

e M'' . Destes quatro pontos o primeiro determina $EM = \frac{1}{3}EO$; o segundo M' determina $E'M' = \frac{1}{3}E'O = \frac{1}{3}(180^\circ - EO)$; o terceiro M'' determina $E'M'' = \frac{1}{3}EOE'O' = \frac{1}{3}(180^\circ + EO)$.

Com effeito, os arcos $E'O$ e EO tem os mesmos seno e coseno com a differença unica de ser negativo o coseno de $E'O$, considerado como maior que 90° ; logo acharemos a soluçãõ para o arco $E'O$, fazendo c negativo na soluçãõ de EO . Porém esta mudança, que altera sòmente a segunda equaçãõ, muda a sua reduzida em $xy = -\frac{1}{4}cd$, que pertence á hyperbola $A'M'$, e mostra por consequencia que a intersecçãõ M' deste ramo da hyperbola com o circulo dá a soluçãõ do caso presente: logo $P'M'$ he o seno do arco procurado no segundo caso, e consequentemente $E'M'$ he este mesmo arco, ou $E'M' = \frac{1}{3}E'O$.

Quanto á terceira soluçãõ, se juntarmos 180° a EO , isto he, se tomarmos $E'O' = EO$, os arcos EO , e $EOE'O$ tem os mesmos seno e coseno, com a differença que os do ultimo sãõ negativos; logo teremos a soluçãõ que convem a este caso, fazendo c e d negativos. Porém esta mudança não altera a equaçãõ $xy = \frac{1}{4}cd$; logo a primeira hyperbola deve dar a soluçãõ deste terceiro caso na intersecçãõ M'' . He pois $P''M''$ o seno do arco procurado neste caso, e consequentemente $E'M''$ he este mesmo arco, ou $E'M'' = \frac{1}{3}EOE'O'$.

Assim a mesma construcçãõ determina $\frac{1}{3}A$, $\frac{1}{3}(180^\circ - A)$, e $\frac{1}{3}(180^\circ + A)$, sendo A o arco dado.

O ponto de intersecçãõ A' , pelo qual a hyperbola se sujeita a passar, como he conhecido, não dá huma soluçãõ nova.

403 Se das duas equações a u e t eliminarmos t , virá a equação do terceiro gráo no caso irreduzível $u^3 - \frac{3}{4} r^2 u - \frac{1}{4} cr^2 = 0$, a qual deve comprehender os tres casos que havemos examinado; logo a mesma equação deve ter tres raizes, a saber $u = AP = \cos \frac{EO}{3}$, $u = AP' = \cos \frac{180^\circ - EO}{3}$, e $u = AP'' = \cos \frac{180^\circ + EO}{3}$.

404 Donde se segue, que podemos por meio das Taboas dos senos achar as tres raizes de huma equação do terceiro gráo no caso irreduzível com huma approximação sufficiente e muito prompta. Porque, comparando a equação geral deste caso $u^3 - pu + q = 0$ com a do nosso problema, temos $\frac{3}{4} r^2 = p$, e $-\frac{1}{4} cr^2 = q$, as quais daõ $r = \sqrt{\frac{4}{3} p}$, e $c = \frac{-3q}{p}$. Se procurarmos pois nas Taboas o numero de grãos correspondente a $\text{sen} \frac{3q}{p \sqrt{\frac{4}{3} p}}$, suppondo o raio dellas igual á

unidade, acharemos o complemento do arco EO ; e ajuntando 90° ao mesmo numero de grãos, ou tirando este mesmo numero de 90° , conforme for q positivo ou negativo na equação, teremos o arco EO , que chamaremos A . Buscaremos logo nas Taboas os cosenos dos tres arcos $\frac{A}{3}$, $\frac{180^\circ - A}{3}$, e $\frac{180^\circ + A}{3}$.

$\frac{180^\circ + A}{3}$, os quais sendo multiplicados por r

ou $\sqrt{\frac{4}{3}}p$, para se reduzir cada hum ao coseno do arco correspondente no circulo cujo raio he r , daraõ

$$AP \text{ ou } u = \sqrt{\frac{4}{3}}p \cdot \cos \frac{A}{3}, \quad u = \sqrt{\frac{4}{3}}p \cdot$$

$$\cos \frac{180^\circ - A}{3}, \quad \text{e } u = \sqrt{\frac{4}{3}}p \cdot \cos \frac{180^\circ + A}{3};$$

bem entendido que se deve dar o sinal — áquelles em que o arco passar de 90° . Estas operações podem facilitar-se por meio dos logarithmos.

405. Probl. III. Sendo dada a posição do ponto D (Fig. 72) a respeito de duas linhas AR , AP , que comprehendem hum angulo conhecido, tirar pelo dito ponto a recta DP , de maneira que a parte intercepta RP seja igual a huma linha dada c .

Tiremos DS e RN perpendiculares a AP produzida, e DO parallela a AR . Seja $DO = r$, $DS = p$, $OS = q$, $AO = d$, $AP = u$, $AR = t$.

OS triangulos semelhantes DSO , RNA daõ $RN = \frac{pt}{r}$, $AN = \frac{qt}{r}$, e conseguintemente NP

$$= \frac{qt}{r} + u. \text{ Mas no triangulo rectangulo } RNP$$

temos $RN^2 + NP^2 = RP^2$; logo será $\frac{q^2}{r^2} t^2 +$

$$\frac{2q}{r} ut + u^2 + \frac{p^2}{r^2} t^2 = c^2, \text{ isto he } t^2 + \frac{2q}{r} ut$$

$$+ u^2 = c^2.$$

Alem

Alem disso, os triangulos semelhantes DOP, RAP daõ DO (r):RA (t):: OP ($d+u$):AP (u), ou $ru = td + ut$. Temos pois duas equações, huma á ellipse, e a outra á hyperbola, que ambas se devem construir para resolver o problema.

Quanto á primeira, faça-se como nos exemplos precedentes, $t + \frac{qu}{r} = y$, e $u = \frac{rx}{n}$; teremos

$y^2 = \frac{p^2}{n^2} \left(\frac{c^2 n^2}{p^2} - x^2 \right)$, e por consequencia os valores dos dous diametros conjugados a , e b seraõ

$a = \frac{2cn}{p}$, e $b = 2c$. Tome-se pois sobre AP a

linha arbitraria AK, e tire-se $KL = \frac{q \cdot AK}{r}$ parallelamente a PM; teremos $QM = y$, e será AQ a direcção do diametro sobre que devem contar-se os x ; logo $AQ = x$. E como a equação $u = \frac{rx}{n}$ se torna em $AP = \frac{r \cdot AQ}{n}$, teremos $n =$

$\frac{r \cdot AQ}{AP} = \frac{r \cdot AL}{AK} = AL$, suppondo $AK = r$.

Affim construindo huma ellipse com os dous diametros conjugados $a = \frac{2cn}{p}$, e $b = 2c$, que com-

prehendaõ hum angulo igual a AQM, acharemos o lugar da primeira equação. Esta ellipse he a mesma que descreveria o meio de huma linha igual a $2RP$, a qual se moveffe sem que as suas extremidades sahissẽ dos lados AP, AR, como se pôde ver, fazendo comparaçãõ com a soluçãõ da-

dada (397), e suppondo $g = b = c$. Quando o angulo RAP he recto, a ellipse se torna em hum circulo descrito com o raio c .

Para construir a segunda equação $ru - ut = dt$, faça-se $r - t = y'$, e $u + d = x'$; virá $x'y' = rd$. Tire-se por D a linha DTV parallela a AP ; será $VM = y'$. Conduza-se pelo mesmo ponto D a linha DO parallela a AT ; será $DV = x'$. Descrever-se-ha pois entre as linhas DO e DV como asymptotas huma hyperbola que passe pelo ponto A , por ser $x'y' = rd = AO \times AT$; ella encontrará a ellipse em dous pontos M e M' ; logo conduzindo por estes e por D as linhas MR , MR' parallelas a AP , e tirando DRP e $DP'R'$, as partes PR e $P'R'$ interceptas nos angulos RAP , $R'AP'$ serão iguais á linha c .

Se a hyperbola opposta $M''A'M'''$ (Fig. 73), descrita entre as asymptotas produzidas, encontrar a ellipse, determinará mais dous pontos M'' , M''' , os quais darão R'' , R''' tais, que se por elles e por D tirarmos duas rectas, as partes comprehendidas dentro do angulo TAS serão iguais a c . Tal he em geral o methodo geometrico de resolver os problemas determinados, que não passarem do quarto gráo.

406 O mesmo methodo pôde servir ainda quando não se faça uso de duas incognitas, com tanto porém que depois se introduza huma de novo. Por exemplo, se nos propuzessem este problema: *Achar hum cubo que tenha para outro conhecido a' a razão dada de $m : n$* ; suppondo o lado do cubo procura-

do

do $\equiv u$, teriamos $u^3 : a^3 :: m : n$, e por consequencia $nu^3 \equiv ma^3$.

Para construirmos esta equação, supporiamos $u^2 \equiv at$, e teriamos $ntu \equiv ma^2$, ou $tu \equiv \frac{ma^2}{n}$.

Descreveriamos pois a parabola que tem a equação $u^2 \equiv at$, e a hyperbola a que pertence a equação $tu \equiv \frac{ma^2}{n}$; a intersecção das duas curvas daria os valores de u e t .

Multiplique-se porém a transformada por u , e substitua-se em lugar de u^2 o seu valor at ; virá $t^2 \equiv \frac{ma}{n}u$, equação á parabola, a qual se pôde construir juntamente com a outra $u^2 \equiv at$. Advirta-se que estas equações são as mesmas que teriamos, se procurássemos duas meias proporcionais entre a e $\frac{ma}{n}$; assim podem construir-se precisamente como se ensinou (399).

407 Pela equação $nu^3 \equiv ma^3$, a qual dá $u \equiv \sqrt[3]{\frac{ma^3}{n}}$, se vê que os radicais cubos podem construir-se por meio das secções conicas. O mesmo se deve entender a respeito dos radicais do quarto gráo em que se contiverem radicais cubos, como por exemplo $\sqrt[4]{(a^3 \sqrt[3]{ab^3})}$; porque se entrassem sómente radicais quadrados, como em $\sqrt[4]{(a^3 \sqrt{ab})}$, ou quantidades racionais, a construcção se reduziria sempre ao circulo. Com effeito no nosso exem-

plo, tomando huma meia proporcional m entre a e b , teriamos $\sqrt[4]{a^3m}$; e tomando outra meia proporcional n entre a e m , teriamos $\sqrt[4]{a^2n^2}$, isto he \sqrt{an} , expressão de huma meia proporcional entre a e n .

408 Se a equação determinada constar de maior numero de termos, não deixará porisso de poder construir-se de hum modo analogo. Assim se tivermos $u^4 + au^3 + aqu^2 + a^2ru + sa^3 = 0$, sendo $a, q, r, e s$ quantidades conhecidas, supporremos $u^2 = at$, e acharemos $at^2 + aut + qu^2 + aru + sa^2 = 0$, equação que pertence a huma secção conica. Se a construímos pois, e tambem a outra $u^2 = at$, as intersecções das duas curvas determinarão os diferentes valores de u .

409 Póde acontecer que hum problema tenha muitas soluções, e sem embargo as curvas não cheguem a encontrar-se, quando se introduz do modo exposto huma nova equação. Para evitar este embaraço, daremos hum methodo que tem lugar em todos os casos.

Seja, por exemplo, $u^3 - au^2 + pau - qa^2 = 0$ a equação procedida de hum problema. Supporremos $u^3 - au^2 + pau - qa^2 = a^2t$, sendo t huma indeterminada, e a, p, q numeros ou linhas conhecidas. Esta equação, em que t não passa do primeiro gráo, póde construir-se com facilidade, dando a u successivamente muitos valores AP, AP, &c. (Fig. 74) e calculando os correspondentes de t , que tiraremos perpendiculares a AP para maior facilidade, como PM, PM &c. e com attenção aos finais. Se procurarmos pois os pontos em que a curva encontra o eixo, teremos $u^3 - au^2 +$

pau

$pu - qa^2 = 0$, isto he, a equação proposta; logo as distancias AO, AO', AO'', em que a curva encontra o eixo, serão os diferentes valores de u . Querendo aqui usar de construcção em lugar de calculo, daremos á equação a fórma $t = \frac{u^2}{a^2} -$

$\frac{u^2}{a} + \frac{pu}{a} - q$, e construiremos (246) cada hum

dos termos do segundo membro para cada hum dos valores de u .

410 Quando no problema entrar mais que huma incognita, podemos fazer uso da construcção precedente, reduzindo todas as incognitas a huma unica pelo methodo dado (162 e seg.).

411 Se o problema for indeterminado, e huma das duas incognitas não passar do segundo gráo, poderemos sempre construir a equação dando á outra incognita, seja qual for o seu gráo, valores arbitrarios, e calculando os correspondentes da primeira incognita, na hypothese de que esta represente as ordenadas de huma curva, e aquella as suas abscissas. Se porém as duas incognitas passarem ambas do segundo gráo, será necessario para cada valor que se der a huma, achar os valores da outra pelo methodo que acabamos de ensinar. Não nos demoraremos mais nas construcções desta ultima especie, porque raras vezes se encontra.

412 Antes de concluirmos esta Secção, mostraremos alguns usos mais da applicação das equações ás linhas curvas. Por quanto toda a equação a huma secção conica he sempre do segundo gráo, e a equação mais geral deste gráo pôde reduzir-se á fórma

ma

ma $dt^2 + cut + eu^2 + ft + gu + b = 0$; segue-se que podemos sempre fazer passar huma secção conica por cinco pontos dados; com tanto que estes tres a tres não estejaõ em linha recta, porque huma secção conica não pôde encontrar huma recta em mais de dous pontos.

Com effeito sejaõ A, B, C, D, E (*Fig. 75*) os cinco pontos dados. Se os referirmos á recta AD que passa por dous delles, entãõ conduzindo BF, CH, EG perpendiculares a AD para maior facilidade, as distancias AF, BF, AG, GE, AH, HC, AD poderãõ considerar-se como abscissas e ordenadas de huma curva, cuja equação he $dt^2 + cut + eu^2 + ft + gu + b = 0$. Porque seja $AF = m$, $BF = n$, $AG = m'$, $GE = n'$, $AH = m''$, $CH = n''$, $AD = m'''$, está claro 1º que no ponto A temos $u = 0$, e $t = 0$, e conseguintemente $b = 0$. 2º No ponto B temos $u = m$, $t = n$, e a equação se muda em

$$dm^2 + cmn + en^2 + fm + gn = 0.$$

3º No ponto E temos do mesmo modo

$$dm'^2 + cm'n' + en'^2 + fm' + gn' = 0$$

4º No ponto C temos

$$dm''^2 + cm''n'' + en''^2 + fm'' + gn'' = 0$$

5º Ultimamente, no ponto D onde $t = 0$, temos

$$em''' + g = 0.$$

E como nestas quatro equações entraõ todas as quantidades c , e , f , g em primeiro grão, com facilidade se acharãõ os seus valores, os quais sendo substituidos na equação $dt^2 + cut + eu^2 + ft + gu$

$gu = 0$, a tornarão em outra, que será divisível por d , e em que por consequencia todos os termos terão coefficients conhecidos; será pois muito facil de construir a secção conica a que pertencer a mesma equação. No caso de não serem dados mais que quatro pontos, hum dos coefficients será arbitrario; logo poderemos impôr huma condição como quizermos, duas se forem dados tres pontos sómente, e assim por diante.

As linhas distinguem-se pelo gráo da sua equação; assim a linha recta he linha da primeira ordem; as secções conicas são linhas da segunda ordem.

Por hum modo analogo se pôde determinar a equação de huma linha da terceira ordem, que se sujeite a passar por tantos pontos menos hum, quantos são os differentes termos que pôde ter a equação geral desta ordem a duas indeterminadas; e assim nas ordens superiores.

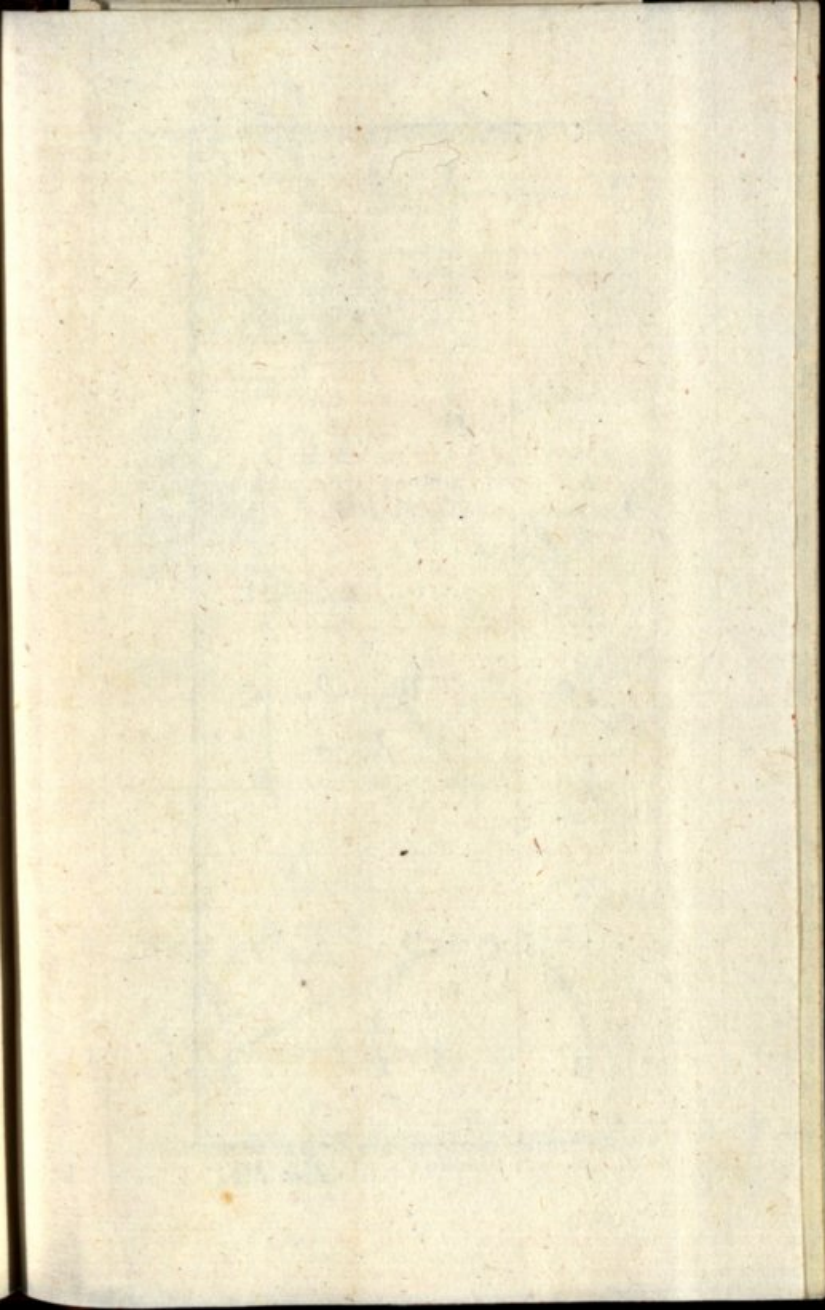
413 O mesmo methodo pôde servir para achar approximadamente a lei que observão entre si muitas quantidades conhecidas, e dependentes humas das outras por certas relações; e nesta applicação tem o nome de *Methodo das interpolações*. Supponhamos, por exemplo, que tres quantidades conhecidas CB, ED, GF (*Fig. 76*) dependem de outras tres AB, AD, AF; pertende-se achar a lei geral que une estas quantidades, de maneira que se possa determinar huma quantidade HI, intermedia ou vizinha das primeiras, a qual derive de AH, do mesmo modo que CB, DE &c. derivaõ de AB, AD &c.

De muitos modos se pôde satisfazer a este problema, tomando huma equação a duas indetermi-

na-

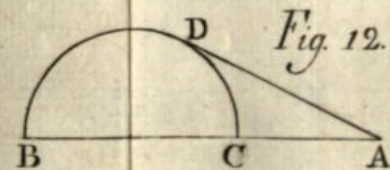
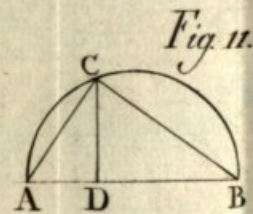
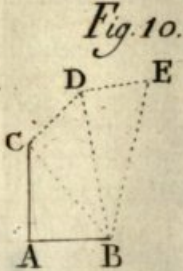
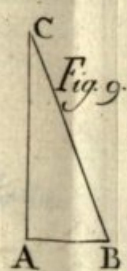
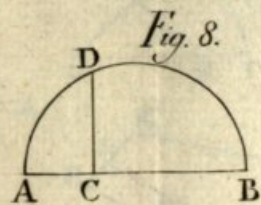
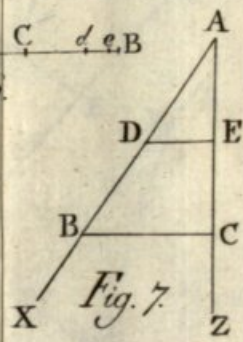
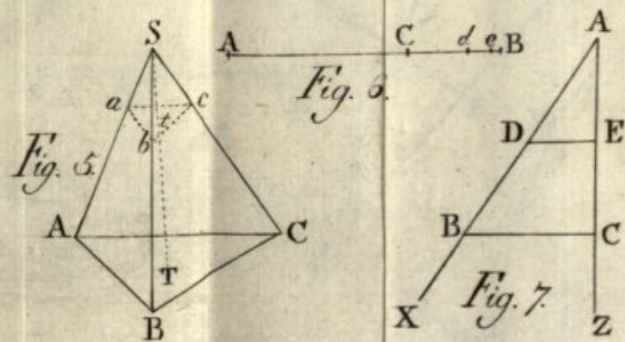
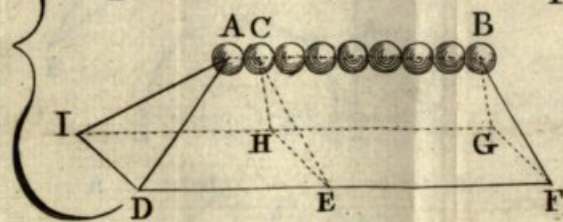
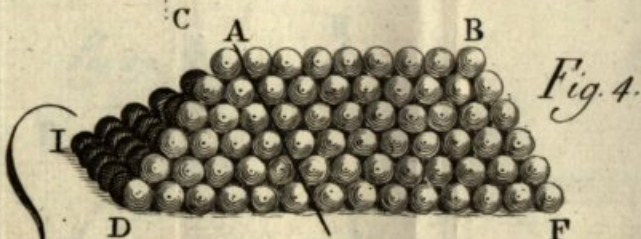
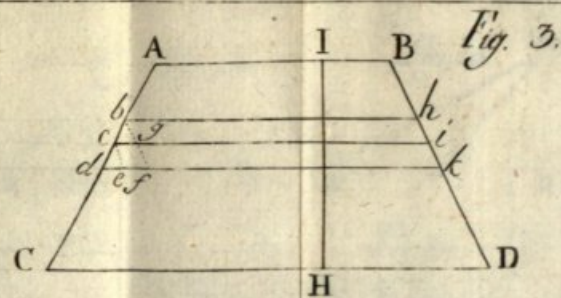
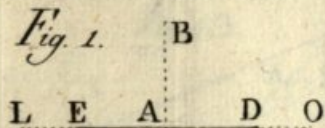
nadas u e t , a qual tenha pelo menos tantos termos diferentes, quantas são as quantidades dadas, tais como CB, ED, GF. Mas entre todos elles o que mais facilita o uso que pôde ter o dito methodo, he o considerar IH como ordenada, e AH como abscissa de huma curva, que passe pelos pontos dados C, E, G, &c., e na qual t seja huma função indeterminada da abscissa correspondente, da fórmula $a + bu + cu^2 + \&c.$, tomando tantos termos, quantos são os pontos C, E, G. Logo se supuzermos (412) 1^o $u = AB$, $t = CB$; 2^o $u = AD$, $t = DE$; 3^o $u = AF$, $t = FG$, e assim por diante, teremos tantas equações para determinar a, b, c , quantos são os pontos dados; e substituindo os valores em $t = a + bu + cu^2 + \&c.$, acharemos a equação approximada da curva, que passa pelos pontos C, E, G, &c. Pondo então por u a distancia AH, teremos o valor correspondente de t ou HI; e reciprocamente.

Seguindo o mesmo procedimento, podemos imitar o contorno ABCDEF (Fig. 77) de qualquer curva traçada ao acaso (282). Para isso abaixaremos dos diferentes pontos A, B, C, D, &c. perpendiculares sobre a linha determinada XZ, que se toma por linha das abscissas, e acharemos, como acabamos de ensinar, a equação de huma curva que passe pelos mesmos pontos; por meio della pois se calcularão as perpendiculares intermediarias com tanto maior approximação, quanto maior for o numero dos pontos A, B, C, D, &c. que houvermos tomado.

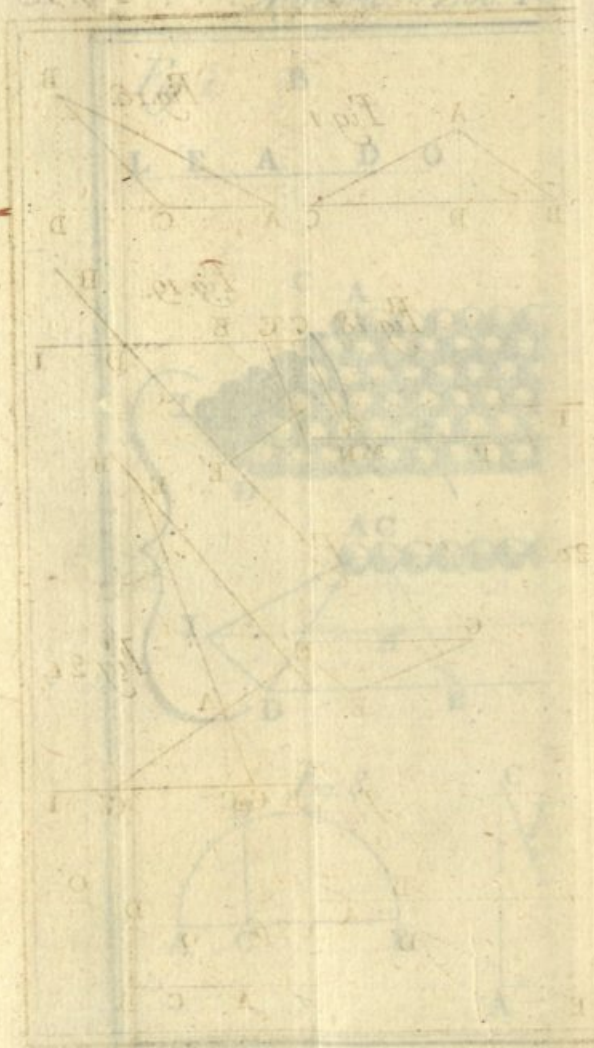


nadas x e r , a qual tenha pelo menos tantos termos diferentes, quantos são as quantidades dadas, tais como CB , ED , GF . Mas entre todos elles o que mais facilis o uso que pôde ser o dito methodo, he o considerar IH como ordinada, e AH como abscissa de huma curva, que passe pelos pontos dados C , E , G , &c., e na qual r seja huma função indeterminada da abscissa correspondente, da forma $a + bx + cx^2 + \&c.$, tomado tantos termos, quantos são os pontos C , E , G . Logo se supozermos (x_1) 1^o $x = AB$, $r = CB$, 2^o $x = AD$, $r = DE$, 3^o $x = AF$, $r = FG$, e assim por diante, teremos tantas equações para determinar a , b , c , &c. quanto são os pontos dados; e substituindo os valores em $r = a + bx + cx^2 + \&c.$, acharemos a equação approximada da curva, que passa pelos pontos C , E , G , &c. Posto então por r a distancia AH , teremos o valor correspondente de r ou IH , e reciprocamente.

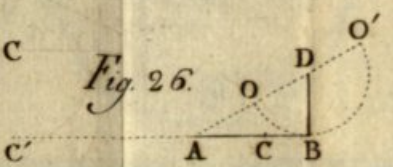
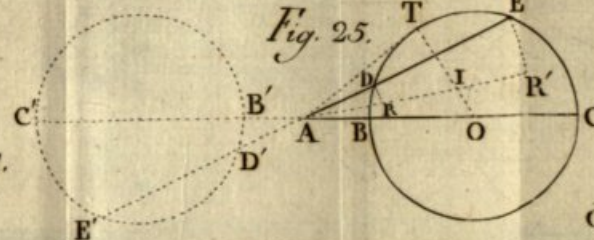
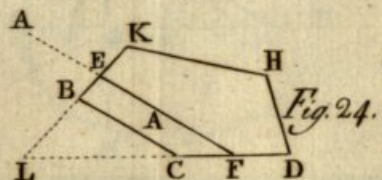
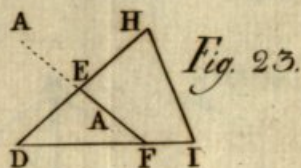
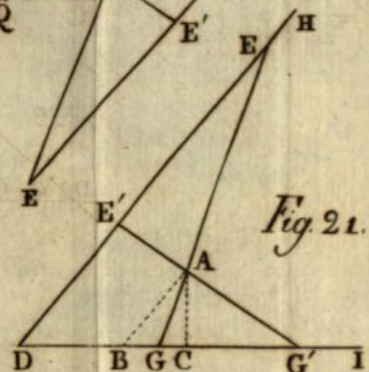
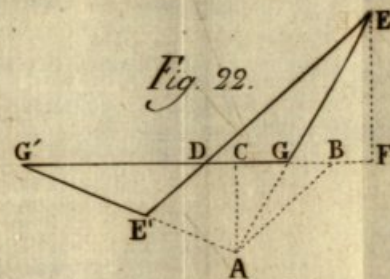
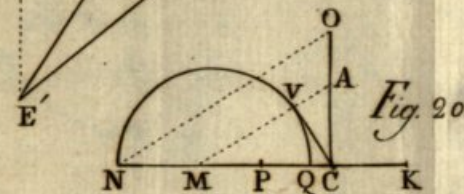
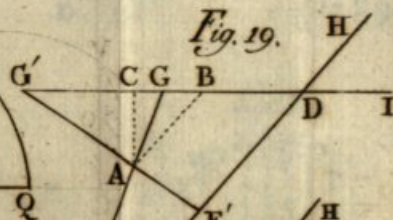
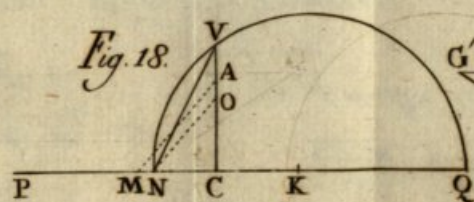
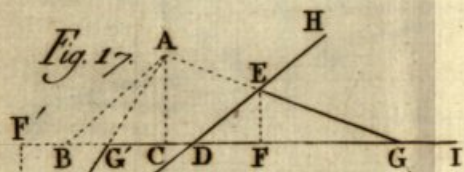
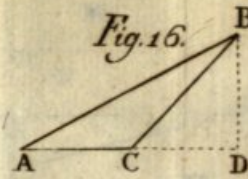
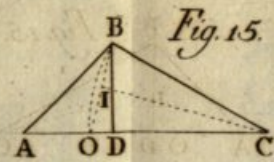
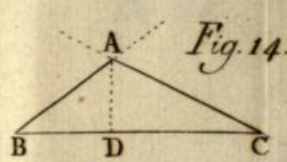
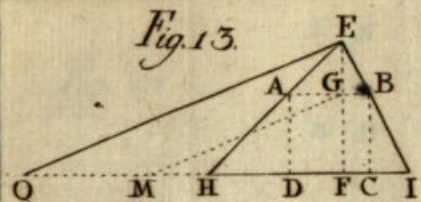
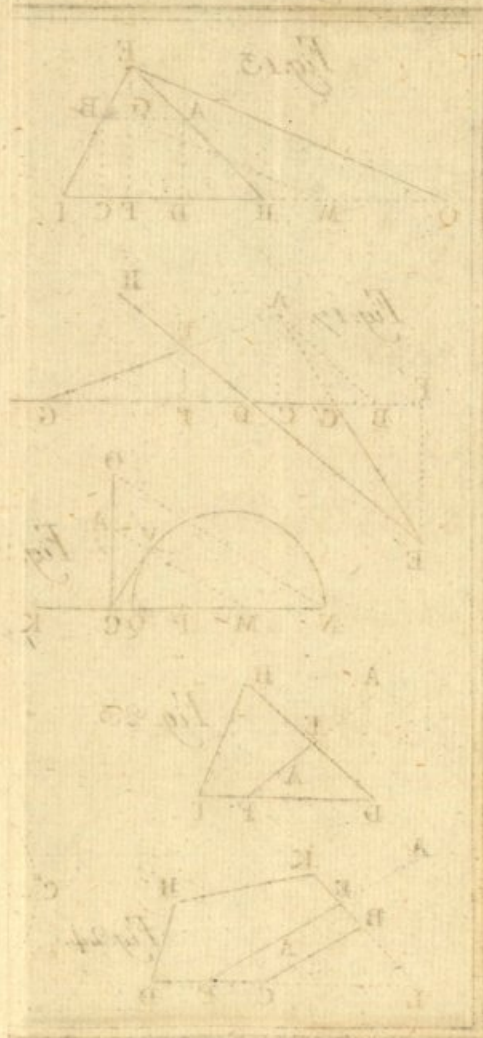
Seguinte o mesmo procedimento, podemos traçar o contorno $AECDEI$ (Fig. 77) de qualquer curva traçada ao acaso (282). Para isso absteremos das diferentes pontos A , B , C , D , &c. perpendiculares sobre a linha determinada XZ , que se toma por linha das abscissas, e acharemos, como achamos de ordinadas, a equação de huma curva que passe pelos mesmos pontos; por meio della pois se calcularão as perpendiculares intermédias com tanto maior approximação, quanto maior for o número dos pontos A , B , C , D , &c. que empregarmos tomado.



1711



1711



No 111 Algebra Part II

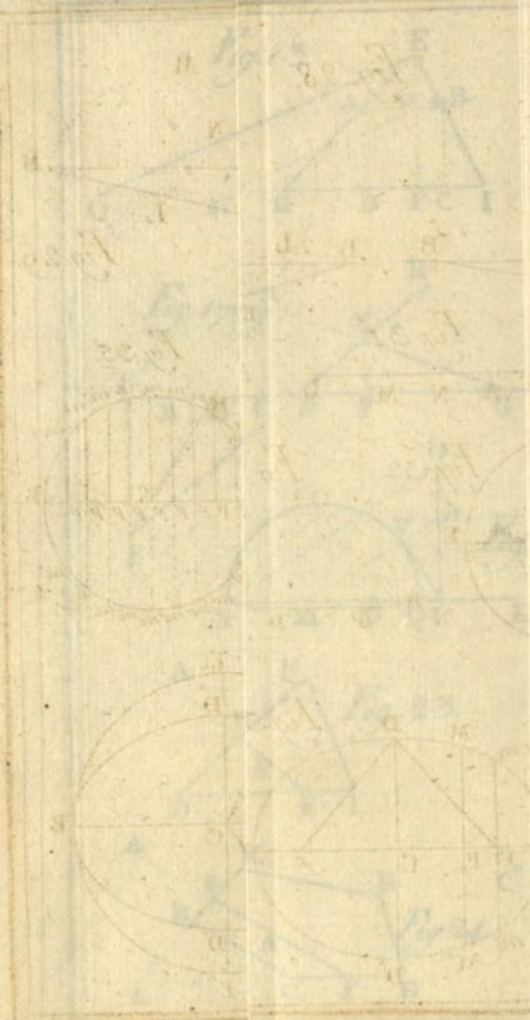
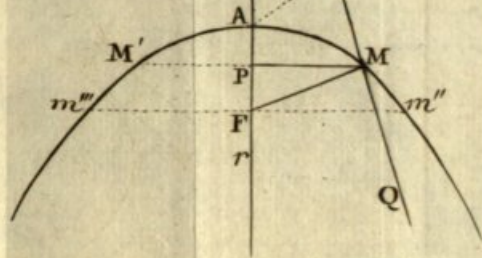
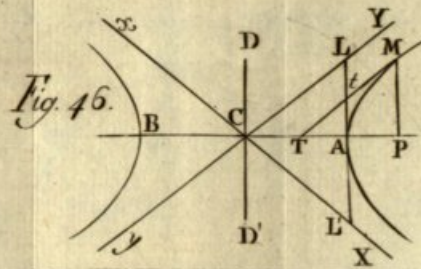
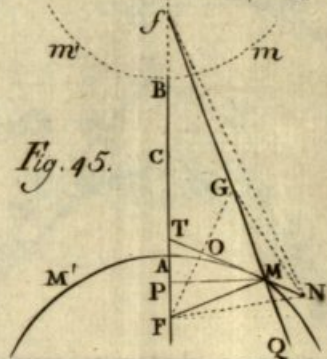
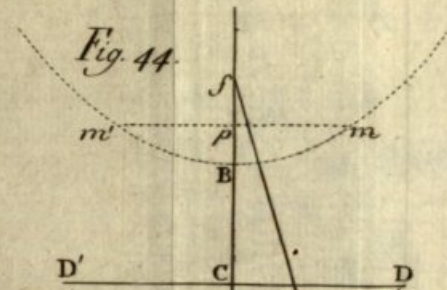
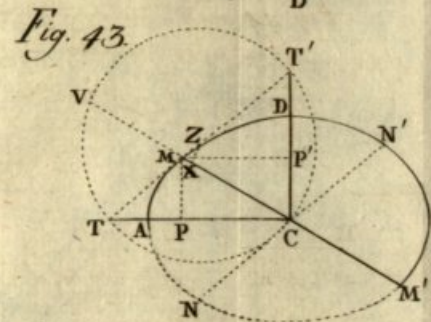
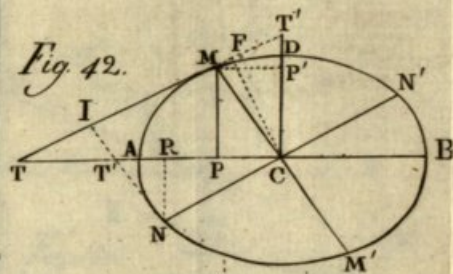
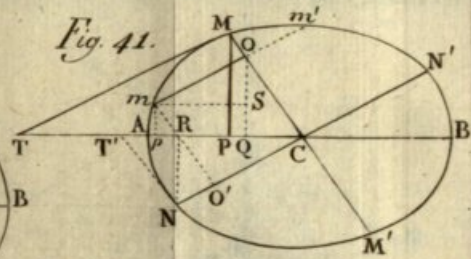
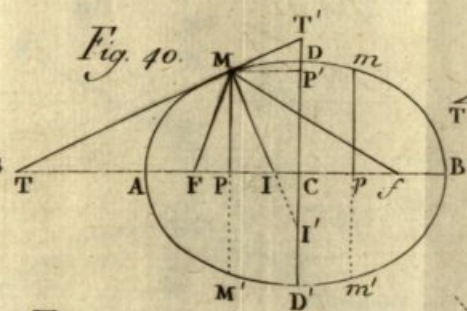
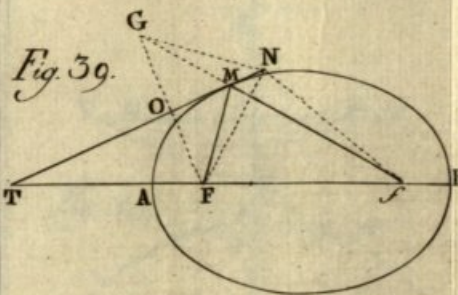


Fig 111



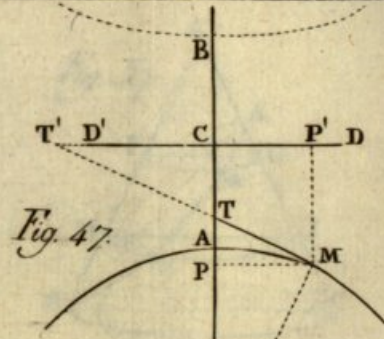


Fig. 47

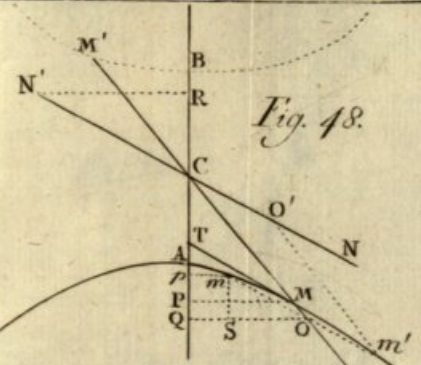


Fig. 48

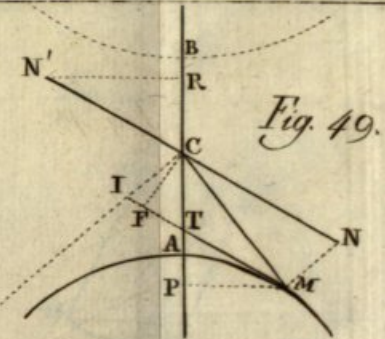


Fig. 49

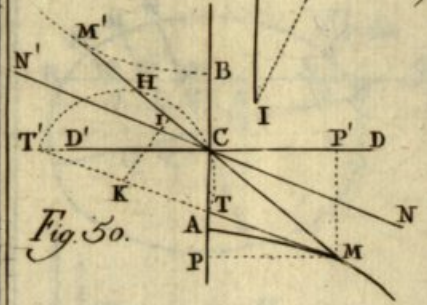


Fig. 50

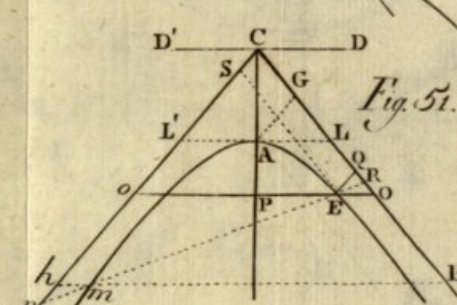


Fig. 51

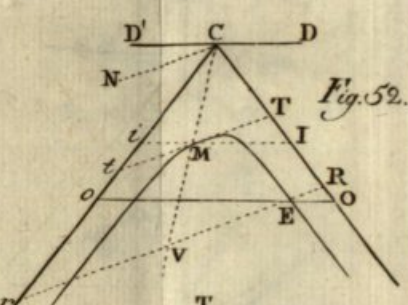


Fig. 52

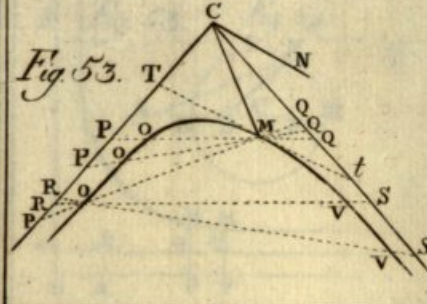


Fig. 53

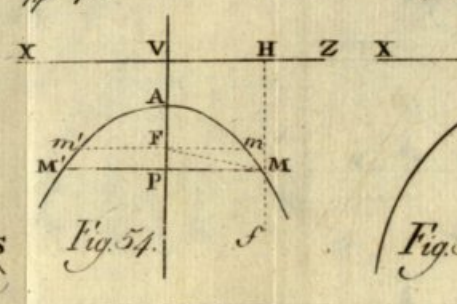


Fig. 54

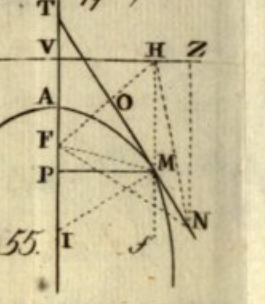


Fig. 55

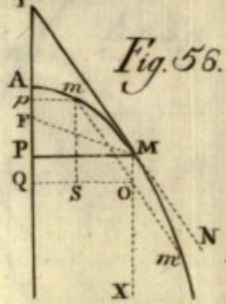


Fig. 56

Fig. 56

Algebra Part V



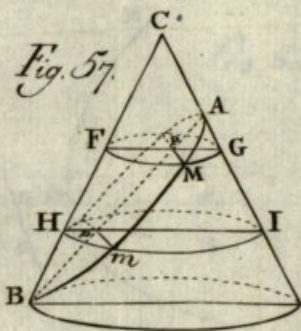


Fig. 57.

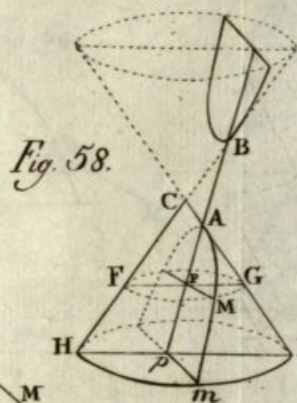


Fig. 58.

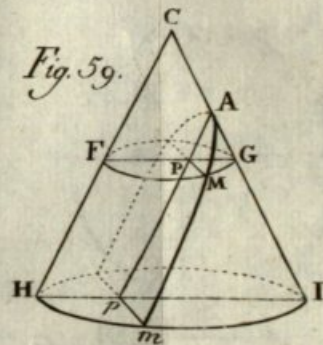


Fig. 59.

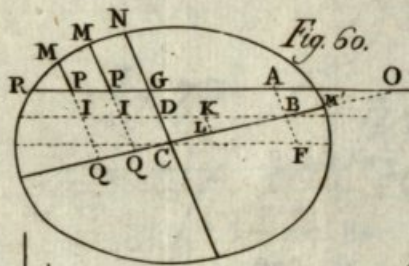


Fig. 60.

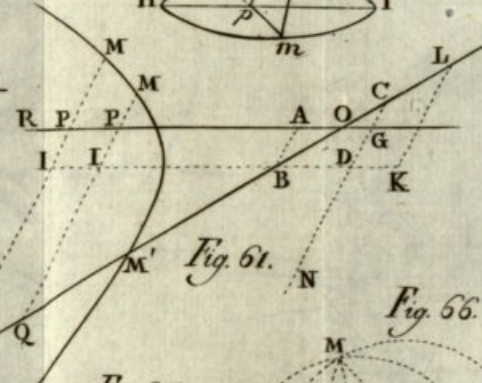


Fig. 61.

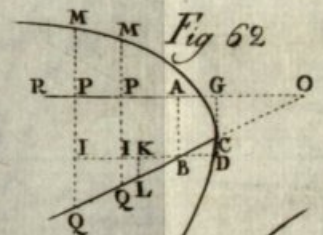


Fig. 62.

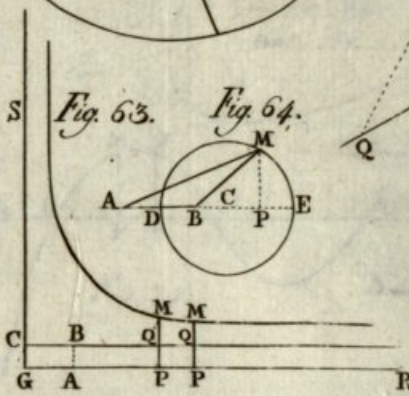


Fig. 63.

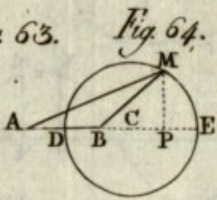


Fig. 64.

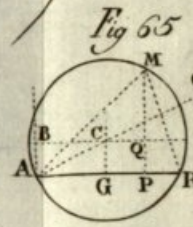


Fig. 65.

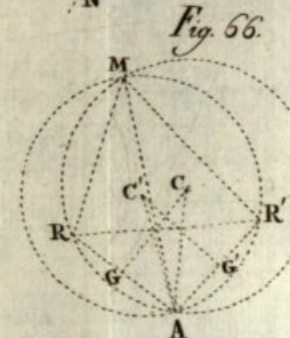


Fig. 66.

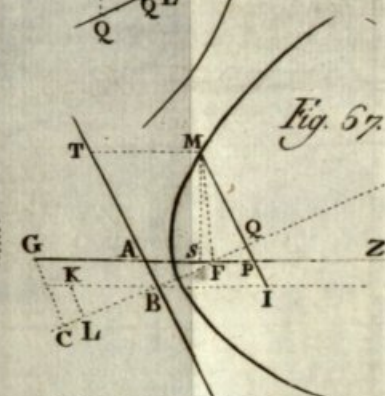


Fig. 67.

Fig. 57

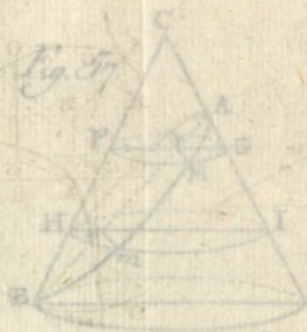


Fig. 58.

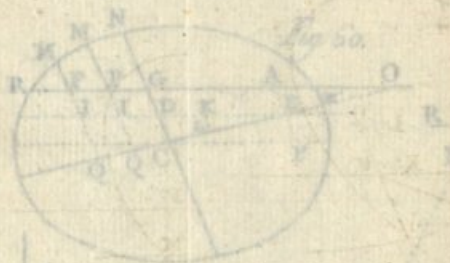


Fig. 59.

Fig. 60.



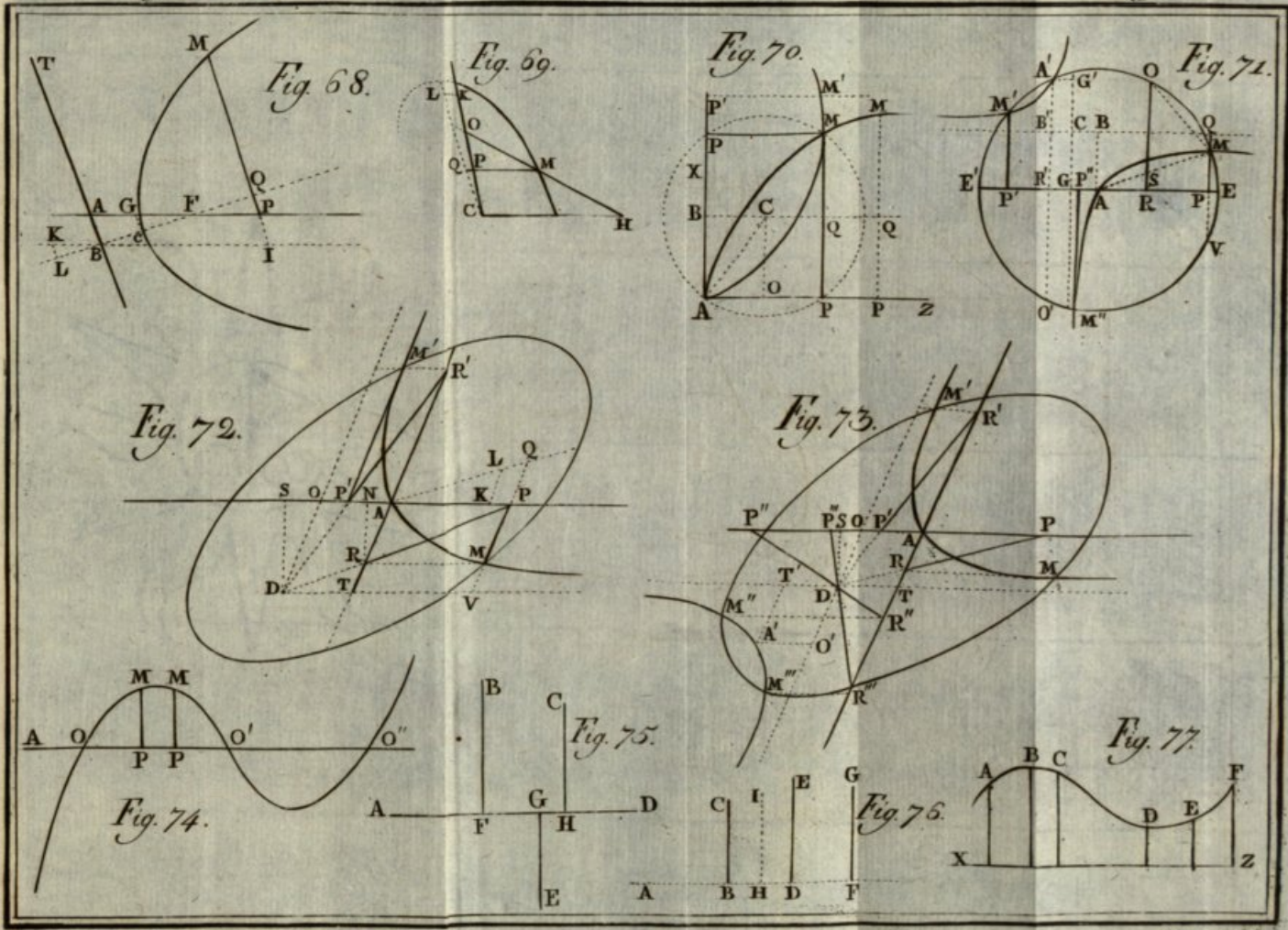


Fig. 77.



Fig 72

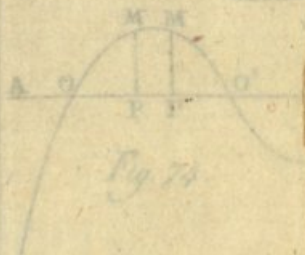


Fig 74

