ELEMENTOS
DE
ANALYSE.

ELEMENTOS
DE
ANALYSE.

ELEMENTOS
DE
ANALYSE
POR
MR. BEZOUT
TRADUZIDOS DO FRANCEZ.

SEGUNDA EDIÇAÕ

Correcta e accõmodada para o uso das Escolas de Mathematica da Universidade.

TOMO I.

COIMBRA:
NA REAL IMPRENSA DA UNIVERSIDADE.

M. DCC. LXXXXIII.

Com licença da Real Mesa da Commissaõ Geral sobre o Exame e Censura dos Livros, e Privilegio Real.

PRIVILEGIO.

EU ELREY. Faço ſaber aos que eſte Alvará virem : Que Havendo Eu Ordenado pelos Eſtatutos Noviſſimos, com que Reſtaurei, e Mandei de novo fundar a Univerſidade de Coimbra, que os Eſtudos das Sciencias Mathematicas conſtituiſſem nella huma indiſpenſavel Faculdade : E ſendo ao meſmo fim Servido pela Minha Carta de Ley de dez de Novembro de mil ſetecentos ſetenta e dous abolir, e caſſar os Titulos Nono, e Decimo dos Eſtatutos do Collegio Real de Nobres; pelos quaes os referidos Eſtudos deviaõ tambem ſer enſinados no ſobredito Collegio; para que ſó, e unicamente foſſem promovidos, e cultivados na dita Univerſidade, em commum beneficio de todos os Meus Fieis Vaſſallos : Por quanto pela ſobredita aboliçaõ ficaraõ os referidos Eſtudos proprios, e privativos da Univerſidade; e veio a ceſſar o fim do Privilegio excluſivo, que para a impreſſaõ dos Livros Claſſicos Havia concedido pela outra Carta da Ley, e Doaçaõ perpetua feita ao dito Collegio em doze de Outubro de mil ſetecentos ſeſſenta e ſinco; naquella parte, que he reſpectiva aos Livros Mathematicos : Hey por bem transferir para a ſobredita

Uni-

Univerſidade de Coimbra o meſmo Privilegio excluſivo para a impreſſaõ dos Livros de Euclides, Archimedes, e outros Claſſicos das Sciencias Mathematicas; aſſim, e da maneira que na ſobredita Doaçaõ Eu havia concedido ao referido Collegio: Revogando, como Revogo a eſte fim, a meſma Doaçaõ naquella parte, que na generalidade della ſó he comprehenſiva das impreſſoens dos ditos Livros, ou de outros, que hajaõ de ſervir aos ſobreditos Eſtudos Mathematicos, e pelos quaes ſe devaõ enſinar na meſma Univerſidade de Coimbra.

Pelo que: Mando ao Marquez de Pombal, do Meu Conſelho de Eſtado, e Meu Lugar-Tenente na Fundaçaõ da Univerſidade de Coimbra; á Real Meſa Cenſoria; Meſa do Deſembargo do Paço; Regedor da Caſa da Supplicaçaõ; Conſelhos de Minha Real Fazenda; e dos Meus Dominios Ultramarinos; Meſa da Conſciencia, e Ordens; Governador da Relaçaõ, e Caſa do Porto; Senado da Camara, e bem aſſim a todos os Deſembargadores, Corregedores, Provedores, Ouvidores, Juizes, Juſtiças, e mais peſſoas deſtes Meus Reinos, e Dominios, a quem o conhecimento deſte Alvará deva pertencer, que o cumpraõ, e guardem, e façaõ cumprir, e guardar ſem duvida, ou embargo algum, qualquer que elle ſeja; naõ obſtante a ſobredita Carta, Ley, e Doaçaõ perpe-

tua

tua de doze de Outubro de mil ſetecentos ſeſſenta e ſinco, que Tenho revogado ao ſobredito fim na parte, que ſó reſpeita ás ſobreditas impreſſoens; ficando para tudo o mais em ſeu vigor, e inteira validade. E eſte valerá como ſe paſſaſſe pela Chancellaria, poſto que por ella naõ ha de paſſar, e o ſeu effeito haja de durar hum, e muitos annos: naõ obſtantes as Ordenaçoens em contrario, as quaes Hey por derogadas para eſte effeito ſómente. Dado no Palacio de Noſſa Senhora da Ajuda em deſeſeis de Dezembro de mil ſetecentos ſetenta e tres.

REY ∴

Marquez de Pombal.

ALvará, porque Voſſa Mageſtade pelos motivos nelle expreſſos He ſervido transferir para a Univerſidade de Coimbra o Privilegio excluſivo para as impreſſoens dos Livros Claſſicos dos Eſtudos Mathematicos;

cos ; havendo cessado o fim , com que antes fora concedido , e doado ao Collegio Real de Nobres ; na fórma assima declarada.

Para Vossa Magestade ver.

João Chrisostomo de Faria e Sousa de Vasconcellos de Sá o fez.

Cumpra-se, e registe-se. Nossa Senhora da Ajuda em 4 de Janeiro de 1774.

Marquez Visitador.

No Livro de Providencia Litteraria desta Secretaria de Estado dos Negocios do Reino fica registado este Alvará. Nossa Senhora da Ajuda em 3 de Janeiro de 1774.

João Chrisostomo de Faria e Sousa de Vasconcellos de Sá.

TABOA

DAS

MATERIAS QUE SE CONTÈM NESTES ELEMENTOS.

Das

Das

Das

ERRA-

ERRATAS.

Pag.	Lin.	Errat.	Emend.
5	12	da letra	de qualquer letra
14	3	*b*	*c*
ibid.	4	*ab*	*ac*
22	21	para dividir	para ſe dividir
26	3	$-c^4$	$-c^2$
27	13	$+2c$	$+2ac$
28	11	$8ab$	$8b-a$
34	1	diminuindo	diminuido
79	18	17	10
ibid.	19	6 de Numero Aureo, e 5	8 de Numero Aureo, e 11
81	2	caudas	cauda
ibid.	9	o ſinal $\surd$	o ſinal $+$
85	3	± 5	± 5
90	7	uſando	ſe uſando
93	3	tirar	tirarmos
95	7	$+$; ou $-$	$+$, ou com o ſinal $-$
96	5	porque	pela qual
110	14	elle	ella
119	17	pares	impares
ibid.	18	impares	pares
127	10	$(a+b)^{\frac{m}{n}} +$	$(a+b)^{\frac{m}{n}} =$
149	18	*ſe tornara*;	*ſe tornarãõ*
153	16	y^{m-1}	$y^m - 1$
180	5	a ſua raiz	o ſeu valor
197	8	altura	altura *b*
200	3	quadrando DEAIH	quadrado
202	13	*an* ſerá a ſoma das quantidades	a ſoma das quantidades *an* ſerá

Pag.	*Lin.*	*Errat.*	*Emend.*
206	10	vençe	vença
208	7	poximamente	proximamente
ibid.	14	progressaõ	propagaçaõ
216	10	m	m^2
ibid.	11	n	n^2
220	12	*pependicular*	*perpendicular*
222	19	agudo, ou obtuso	obtuso, ou agudo
247	*ult.*	de A e B	A e B
248	22	que será	será
251	9	determidada	determinada
257	17	ponto M	ponto M da ellipse
263	20	NN	NN′
270	1	estes	estas
ibid.	10	AT	At
271	12	obscissas	abscissas
283	3	MO	as partes MO
285	12	encontraõ	encontraráõ
ibid.	15	MAm	AMm
291	6	linha	linha indefinida
300	17	necessario	necessaria
303	6	b^2g^2c	$b^2g^2c^2$

ELE-

ELEMENTOS DE ANALYSE.

INTRODUCÇAÕ.

OS raciocinios que ſe fazem nas indagações Mathematicas, naõ obſtante a variedade dos objectos deſtas ſciencias, tem partes communs, que ſe podem reduzir a regras gerais, reſultando dellas a vantagem de ſer o noſſo eſpirito alliviado de grande parte dos esforços, que ſeria neceſſario applicar em cada huma das queſtões. O methodo que enſina a achar as ditas regras, chama-ſe *Analyſe.*

Divide-ſe eſta em duas partes: em *Analyſe Finita*, ou *Algebra*; e em *Analyſe Infiniteſimal*, a qual comprehende o *Calculo Differencial*, e *Integral.* A primeira parte ſerá a materia deſte Tomo.

PRIMEIRA PARTE,

OU

ELEMENTOS DE ALGEBRA.

SECÇAÕ I.

DOS PRINCIPIOS DO CALCULO LITERAL.

1 A ALGEBRA he o inſtrumento da Analyſe, ou a Sciencia, que tem por objecto enſinar os meios de reduzir a regras gerais a reſoluçaõ de todas as queſtões, que ſe pódem propôr ácerca das quantidades.

Como eſtas regras para ſerem gerais, naõ devem depender dos valores particulares das quantidades que ſe conſideraõ, mas da natureza de cada huma das queſtões, de maneira que ſejaõ conſtantemente as meſmas para todos os problemas da meſma eſpecie; ſegue-ſe, que a Algebra naõ deve repreſentar as quantidades pelos meſmos caracteres, de que uſa a Arithmetica.

Porque 1.º os algariſmos tem hum valor determinado por convençaõ. Ainda que 3, por exemplo, tanto póde ſignificar 3 toezas, como 3 horas, ou 3 libras &c.; comtudo naõ póde ſignificar cem, ou mil &c. 2.º Os reſultados da Arithmetica naõ moſtraõ o caminho, porque chegamos a deſcubri-los. Huma, ou muitas operações Arithmeticas pó-

pódem dar o resultado 12, por exemplo; mas este numero naõ declara se procedeo de multiplicar 3 por 4, ou 2 por 6, ou de somar 5 com 7, ou 2 com 10, ou em geral de alguma outra combinaçaõ de operações. Além de que a Arithmetica dá regras para achar certos resultados, mas destes naõ se pódem deduzir regras. A Algebra para satisfazer a estes objectos representa as quantidades por sinais genericos, e universais, como saõ as letras do Alfabeto, as quais, naõ tendo mais relaçaõ com hum numero do que com outro, admittem todos os valores; e estando presentes sempre á vista no decurso de hum calculo, conservaõ, por assim dizer, o vestigio das operações, que com ellas se executáraõ, ou ao menos mostraõ nos resultados das mesmas operações o caminho mais breve, que se deve seguir para chegar ao mesmo fim pelos meios mais simples.

Tambem se exprimem em linguagem Algebrica as relações, e condições das quantidades, as differentes operações, que destinamos fazer sobre ellas, &c.: em huma palavra na Algebra tudo he representaçaõ. Pouco a pouco ensinaremos os differentes modos de representar tudo, quanto diz respeito ás quantidades, e mostraremos as vantagens, que disso resultaõ.

He pois a Algebra a Arte de representar por symbolos gerais todas as idêas, que se pódem formar relativamente ás quantidades. Assim tudo o que he designado pelas letras do Alfabeto tem o nome de *Quantidade*, ou *Expressaõ Algebrica.*

Das Operações Fundamentais do Calculo Literal.

2 SObre as quantidades algebricas se fazem, ou para melhor dizer se indicaõ as quatro operações de somar, diminuir, multiplicar e dividir, que se executaõ na Arithmetica.

Da Addiçaõ, e Subtracçaõ.

3 PAra somar e diminuir quantidades semelhantes naõ se precisa de regra; he evidente, que para somar huma quantidade representada por a com igual quantidade a, devemos escrever $2a$; e que para somar $2a$ com $3a$, escreveremos $5a$. Tambem he manifesto, que tirando $2a$ de $5a$ o resto he $3a$. A estas duas operações taõ faceis como frequentes se dá o nome commum de *Reducçaõ*.

4 Nas quantidades dissemelhantes, que sempre se representaõ por letras differentes, naõ fazemos mais do que indicar estas operações. Para isso no somar usamos do sinal $+$, que se pronuncia *mais*, e no diminuir do sinal $-$, que se pronuncia *menos*.

Assim, havendo de somar huma quantidade representada por a com outra representada por b, escreveremos $a + b$; de maneira que naõ saberemos qual he o verdadeiro resultado, senaõ depois de conhecermos o valor particular das quantidades, que se representaõ por a e b; se a vale 5, e b vale 12, $a + b$ valerá 17.

Do

Do meſmo modo para ſomar - - $5a + 3b$
com - - - - - - - - - - - - $9a + 2c$
e - - - - - - - - - - - - - $9b + 3d$

eſcreveremos - $5a + 3b + 9a + 2c + 9b + 3d$

que ſe reduz (3) a - - $14a + 12b + 2c + 3d$.

Em quanto ao diminuir, para tirarmos b de a eſcreveremos $a - b$.

Se de - - - - - - - - - - $9a + 6b$
quizermos tirar - - - - - - $5a + 4b$

eſcreveremos. - - - - $9a + 6b - 5a - 4b$

que ſe reduz (3) a - - - $4a + 2b$.

5 Hum numero poſto antes da letra chamaſe com razaõ *Coefficiente* da meſma letra: em $3b$, por exemplo, 3 he coefficiente de b. Quando o coefficiente he 1, naõ ſe eſcreve; aſſim ſe de $3a$ tirarmos $2a$ o reſto he $1a$, mas eſcreve-ſe taõ ſómente a. Pelo que ſe encontrarmos huma letra ſem numero que a preceda, naõ imaginemos que o ſeu coefficiente ſeja cifra; neſſe caſo o coefficiente he a unidade.

6 He indifferente a ordem em que ſe diſpõem as quantidades, que ſe ſomaõ ou diminuem. Se quizermos ſomar a com b, poderemos eſcrever $a + b$, ou $b + a$; e para tirarmos b de a, eſcreveremos $a - b$, ou $- b + a$. Seguiremos porem, quanto podermos, a ordem alfabetica, que he a mais uſada, porque nella ſe pronunciaõ as letras com mais facilidade do que em outra qualquer, e ſe percebem melhor as quantidades ſemelhantes.

7 Notemos tambem, que toda a quantidade, que naõ tem final, fe reputa ter $+$: a he o mefmo que $+a$. He coftume fupprimir o final $+$ nas quantidades que o devem ter, quando eftas fe efcrevem no primeiro lugar; naõ affentamos $+a+b$, mas fimplesmente $a+b$.

8 Quando depois de huma operaçaõ fe procede á reducçaõ, póde acontecer que a quantidade precedida do final — tenha coefficiente maior, que o da quantidade femelhante precedida do final $+$; porém em todos os cafos a operaçaõ fe executa por efta regra geral. *Para fomar as quantidades algebricas, efcrevaõ-fe confecutivamente todas as fuas partes com os finais refpectivos, reduzaõ-fe todas as quantidades femelhantes a huma unica, ajuntando de huma parte todas as que tiverem $+$, e da outra todas as que tiverem —, tire-fe finalmente o menor refultado do maior, e dê-fe ao refto o final do maior.*

Por exemplo, fe huma operaçaõ deffe $14a+12b+2c+3d+a+b+4d-5c$; reduziriamos efta quantidade a $15a+13b-3c+7d$, na qual em lugar de $2c-5c$, que tinhamos na primeira, fe efcreve $-3c$, porque havendo de tirar $5c$ de huma quantidade, em que fómente fe offerece $2c$, refta ainda $3c$, que fe deve tirar da totalidade das outras quantidades.

Havendo de fomar $a+b$ e $a-b$, teremos $a+b+a-b$, ifto he $2a$, porque $b-b$ he nada. Logo fe ajuntarmos a foma $a+b$ de duas quantidades quaisquer a e b com a fua differença $a-b$, acharemos o dobro da maior das mefmas quantidades.

Que-

Queremos ſomar as quatro quantidades ſeguintes

$$\begin{array}{r} 5a + 3b - 4c \\ 2a - 5b + 6c + 2d \\ a - 4b - 2c + 3e \\ 7a + 4b - 3c - 6e \\ \hline \end{array}$$

Soma $5a + 3b - 4c + 2a - 5b + 6c + 2d + a - 4b - 2c + 3e + 7a + 4b - 3c - 6e$.

Fazendo a reducçaõ em ordem a a, temos $15a$; em ordem a b, temos $+7b$ de huma parte, e $-9b$ da outra, conſeguintemente $-2b$ de reſto; em ordem a c, temos $-9c$ de huma parte, $6c$ da outra, e conſeguintemente $-3c$ de reſto; reduzindo as outras quantidades do meſmo modo, acharemos $15a - 2b - 3c + 2d - 3e$.

9 Nas expreſsões algebricas as quantidades ſeparadas pelos ſinais $+$ e $-$, chamaõ-ſe *Termos* das meſmas expreſsões.

10 Huma quantidade chama-ſe *Monomio*, *Binomio*, *Trinomio* &c. conforme ſe compõe de hum, ou dous, ou tres &c. termos; e em geral ſe chama *Polynomio*, quando conſta de hum numero indeterminado de termos.

11 Em quanto á ſubtracçaõ das quantidades algebricas, a regra geral he eſta. *Mudem-ſe os ſinais dos termos da quantidade que ſe deve tirar, iſto he, mude-ſe* $+$ *em* $-$, *e* $-$ *em* $+$; *ſôme-ſe a quantidade aſſim mudada com a outra de que ſe deve fazer a ſubtracçaõ, e reduza-ſe.*

Ex-

Exemplo.

De - - - - -	$6a - 3b + 4c$
queremos tirar -	$5a - 5b + 6c$
eſcreveremos -	$6a - 3b + 4c - 5a + 5b - 6c.$

e reduzindo, teremos o reſto $a + 2b - 2c$.

Eſcolhendo hum exemplo mais ſimples para dar a razaõ da regra, ſupponhamos que de a queremos tirar b, he evidente que devemos eſcrever $a - b$. Mas ſe de a quizermos tirar $b - c$, iſto he, ſe quizermos tirar naõ b por inteiro, mas ſómente b diminuido de c, devemos por compenſaçaõ ajuntar o que ſe tirou de mais no primeiro caſo, e eſcrever $a - b + c$, iſto he, mudar os ſinais de todos os termos na quantidade que ſe ha de ſubtrahir.

Nos numeros he deſneceſſario eſte cuidado; por quanto ſe de 12 houveſſemos de tirar $8 - 3$, começariamos por tirar 3 de 8, e o reſto 5 tirado de 12 daria o reſto buſcado 7. Mas poderiamos tambem tirar logo 8 de 12, e ao reſto 4 ajuntar 3, o que da meſma ſórte daria 7. Eſte ultimo partido he o que ſe toma na Algebra por neceſſidade, pois que ella naõ admitte a reducçaõ preliminar, que ſe faz nos numeros.

Quando ſe pertende ſómente indicar a ſubracçaõ, encerra-ſe cada huma das duas quantidades entre parentheſes, e dá-ſe o ſinal $-$ áquella que ſe deve tirar. Aſſim, para indicar que de $a + b$ ſe deve tirar $a - b$, eſcreveremos $(a + b) - (a - b)$: ſe effeituarmos a operaçaõ, acharemos o reſto $2b$. Logo a differença entre a ſoma, e a differença de du-

duas quantidades dá o dobro da menor dellas.

12 As quantidades precedidas do ſinal + chamaõ-ſe *Poſitivas*, e as que tem antes de ſi o ſinal — chamaõ-ſe *Negativas*.

Da Multiplicaçaõ.

13 A Multiplicaçaõ Algebrica requer algumas conſiderações particulares, que naõ tem lugar na Arithmetica; porque além das quantidades há ſinais, a que ſe deve attender. Porém ſe naõ conſiderarmos mais que os valores numericos das quantidades repreſentadas pelas letras, deve-ſe formar a meſma idêa de ambas as multiplicações (Arith. 40). Aſſim, multiplicar a por b he tomar a quantidade repreſentada por a tantas vezes, quantas ſaõ as unidades da quantidade repreſentada por b.

14 Para indicar a multiplicaçaõ uſamos do ſinal $\times$, ou de hum ponto poſto entre as duas quantidades que ſe devem multiplicar, e tambem de nenhum ſinal, pelo menos nas quantidades monomias; de maneira que $a \times b$, $a \cdot b$, ab ſaõ tres expreſsões, as quais querem dizer a multiplicado por b, ou que a ſe deve multiplicar por b. O ultimo modo he o mais uſado.

15 Querendo multiplicar ab por c, eſcreveremos abc, e para multiplicar ab por cd eſcreveremos $abcd$. He indifferente o lugar em que as letras ſe pōem, porque (Arith. 44) o producto he ſempre o meſmo.

16 Quando encontrarmos pois huma quantidade como v. g. ab, abc, $abcd$, na qual as letras ſe achem eſcritas conſecutivamente ſem ſinal algum

inter-

intermediario, concluiremos que ella reprefenta o producto da multiplicaçaõ fucceffiva de cada huma das letras, de que fe compõe.

17 Logo (Arith. 42) *a* e *b* faõ factores de *ab*; *a*, *b*, *c* faõ factores de *abc*, e affim nos outros cafos.

18 Segue-fe mais, que *no producto da multiplicaçaõ de muitas quantidades monomias devem entrar todas as letras, de que fe compõe tanto o multiplicando como o multiplicador.*

Ifto fuppofto, fe as quantidades, que houverem de multiplicar-fe, qualquer que feja o numero dellas, fe compuzerem da mefma letra, efcreveremos efta no producto tantas vezes quantas fe achar nos factores. Affim *a* multiplicado por *a* dá *aa*; *aa* multiplicado por *aaa* dá *aaaaa*; *aa* multiplicado por *aaa*, e além diffo por *a*, dá *aaaaaa*.

19 Em tais cafos fe affentou, que naõ fe efcreveffe a dita letra mais que huma vez, mas que fe marcaffe com hum numero, a que fe deo o nome de *Expoente*, o qual fe puzeffe á direita da letra, algum tanto por cima, e fignificaffe quantas vezes ella fe devia efcrever; ifto he, que em lugar de *aa* fe efcreveffe a^2, em lugar de *aaa* fe efcreveffe a^3 &c.

Confervemos pois na lembrança, que *o expoente de huma letra denota quantas vezes ella he factor do producto*. Em a^3b^2c há tres factores de valor differente, a faber *a*, *b*, *c*; porém deftas letras a primeira he factor tres vezes, a fegunda duas, e a terceira huma, porque a^3b^2c vale o mefmo que *aaabbc*.

Logo (Arith. 150) o expoente denota tambem a potencia, a que huma quantidade eftá eleva-

da

da. Assim a^2 he a segunda potencia, ou o quadrado de a; a^5 a quinta potencia de a. Deste modo todas as potencias de a se representaõ cômodamente por a, a^2, a^3, a^4, a^5 &c. Logo em lugar de a se póde escrever a^1. Em geral, quando o expoente he 1 omitte-se, e reciprocamente.

Naõ devemos pois confundir o expoente com o coefficiente. O expoente indica a multiplicaçaõ mais ou menos repetida de huma quantidade por si mesma; o coefficiente porém denota a addiçaõ repetida de huma mesma quantidade. Por exemplo, $2a$ vale o mesmo que $a + a$, e a^2 significa $a \times a$, de maneira que se a vale 5, $2a$ vale 10, mas a^2 vale 25.

Os termos, que saõ formados das mesmas letras affectas respectivamente dos mesmos expoentes, chamaõ-se semelhantes.

20 Donde se segue, que *para multiplicar duas quantidades monomias, que tenhaõ letras communas, somaremos os expoentes das letras semelhantes do multiplicando e multiplicador.*

Para multiplicar a^5 por a^3 escreveremos a^8, isto he a letra a, dando-lhe o expoente 8 soma dos dous expoentes 5 e 3. Do mesmo modo para multiplicar $a^3 b^2 c$ por $a^4 b^3 cd$, escreveremos $a^7 b^5 c^2 d$. Tal he a regra das letras na multiplicaçaõ das quantidades monomias.

21 Em quanto aos coefficientes que pódem ter os factores monomios, por elles começaremos a multiplicaçaõ como na Arithmetica, e o producto servirá de coefficiente do producto algebrico. Assim, para multiplicar $5a$ por $3b$, multiplicaremos primeiramente 5 por 3, depois a por b, e acharemos o producto $15ab$. Do mesmo modo havendo

do de multiplicar $12a^3 b^2$ por $9a^4 b^3$, teremos $108a^7 b^5$.

22 Paſſando agora á multiplicaçaõ das quantidades complexas ou dos polynomios, devemos como nos numeros compoſtos multiplicar ſucceſſivamente cada hum dos termos do multiplicando por cada hum dos termos do multiplicador, obſervando as regras, que havemos dado para a multiplicaçaõ dos monomios, ſomar depois os productos parciais, e reduzir. He indifferente principiar da direita para a eſquerda, ou da eſquerda para a direita; mas ſeguiremos eſte ultimo modo, que he o mais uſado.

Exemplo I.

Havendo de multiplicar - $a + b$
por - - - - - - - - - $c + d$

Producto - - $ac + bc + ad + bd$.

1.° Multiplico a por c, o producto he ac (15); 2.° multiplico b por c, o producto he bc; ſomo os dous productos, e tenho $ac + bc$ por producto de $a + b$ por c.

Multiplicando do meſmo modo a e b por d, acho o producto $ad + bd$, o qual ſomado com o primeiro dá $ac + bc + ad + bd$.

Com effeito, multiplicar $a + b$ por $c + d$ he tomar naõ ſómente a, mas tambem b tantas vezes, quantas ſaõ as unidades da totalidade $c + d$, iſto he, tantas vezes quantas ſaõ as unidades de c, e mais tantas quantas ſaõ as unidades de d.

Ex-

Exemplo II.

Querendo multiplicar - - -	$a - b$
por - - - - - - - -	$c - d$
Producto	$ac - bc - ad + bd.$

Multiplico primeiramente a por c que dá ac, e depois b por c que dá bc; mas tiro o segundo producto do primeiro, porque multiplicando a por inteiro na primeira operaçaõ, multiplica-se de mais a quantidade b, que se devia tirar de a: logo devemos tirar do producto a quantidade b multiplicada por c, isto he bc.

Do mesmo modo $a - b$ multiplicado por d, dá $ad - bd$; mas como o sinal do multiplicador actual d he —, tiraremos o segundo producto do primeiro, e (11) acharemos $ac - bc - ad + bd$.

Com effeito, valendo o multiplicador $c - d$ menos que c a quantidade d, o multiplicando sómente se deve tomar tantas vezes, quantas saõ as unidades de c diminuido de d. E como havendo tomado primeiramente $a - b$ tantas vezes, quantas saõ as unidades de c, o producto $ac - bc$ vale mais do que deve ser, quanto he o valor de $a - b$ tomado tantas vezes quantas saõ as unidades de d, segue-se que devemos tirar o producto de $a - b$ por d.

Se em lugar das letras a, b, c, d tomarmos 6, 4, 7, 3 ou outros quaisquer numeros, poderemos com elles formar a mesma demonstraçaõ.

23 Se attendermos aos sinais dos termos de que se compõe o producto total $ac - bc - ad + bd$, e os compararmos com os sinais do multiplican-

cando e do multiplicador, acharemos 1.º que o termo a, em que ſe reputa eſtar o ſinal $+$, ſendo multiplicado por b da meſma ſórte affecto de $+$ deo o producto ab, tambem notado com o ſinal $+$.

2.º Que o termo b notado com o ſinal $-$ ſendo multiplicado por c, que ſe reputa ter o ſinal $+$, deo o producto bc com o ſinal $-$.

3.º Que o termo a affecto de $+$ multiplicado por d, que tem o ſinal $-$, deo ad com o ſinal $-$.

4.º Finalmente que o termo b, o qual tem o ſinal $-$, ſendo multiplicado por d, que da meſma ſórte tem $-$, deo bd notado com $+$.

Iſto poſto, daqui por diante conheceremos facilmente nas multiplicações parciais, ſe os productos particulares devem ſer poſitivos ou negativos; para o que obſervaremos as duas regras ſeguintes deduzidas das reflexões precedentes.

24 *Se o multiplicando e o multiplicador tiverem ambos o meſmo ſinal, o producto ſerá affecto do ſinal* $+$. *Se pelo contrario tiverem ſinais differentes, o producto terá ſempre o ſinal* $-$. Por meio deſtas regras, e das que havemos dado (15, 20, 21 e 22) eſtamos em termos de fazer qualquer multiplicaçaõ algebrica. Mas para ſe proceder com methodo, obſervaremos primeiramente a regra dos ſinais, depois a dos coefficientes, e por fim a das letras e dos expoentes.

Exemplo III.

Se quizermos multiplicar $5a^4 - 2a^3b + 4a^2b^2$
por - - - - - - $a^3 - 4a^2b + 2b^3$

$$
\begin{array}{r}
5a^7 - 2a^6b + 4a^5b^2 \\
- 20a^6b + 8a^5b^2 - 16a^4b^3 \\
+ 10a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5 \\
\hline
\end{array}
$$

Pr. $5a^7 - 22a^6b + 12a^5b^2 - 6a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5$

Multiplicaremos ſucceſſivamente os tres termos do multiplicando pelo primeiro a^3 do multiplicador. Tendo os dous termos $5a^4$ e a^3 o meſmo ſinal, o producto deve ter $+$; porém naõ o eſcreveremos por pertencer ao primeiro termo do producto (7). Depois diſſo multiplicaremos o coefficiente 5 de a por 1 coefficiente de a^3 (21), o producto he 5. Por fim multiplicando a^4 por a^3 (20) teremos a^7, e conſeguintemente $5a^7$ por producto.

Paſſando a multiplicar o termo $- 2a^3b$ por a^3, vê-ſe que ſendo differentes os ſinais, o producto ſerá negativo. Multiplicando além diſſo os coefficientes e as letras, teremos o producto $- 2a^6b$.

Do meſmo modo o termo $+ 4a^2b^2$ multiplicado por a^3 dará $4a^5b^2$.

Havendo multiplicado todos os termos do multiplicando por a^3, devemos multiplica-los pelo ſegundo termo $- 4a^2b$ do multiplicador. O termo $5a^4$ multiplicado por $- 4a^2b$ de ſinal contrario dará $- 20a^6b$; o termo $- 2a^3b$ multiplicado por $- 4a^2b$ do meſmo ſinal dará $+ 8a^5b^2$; e o termo $+ 4a^2b^2$ multiplicado por $- 4a^2b$ dará $16a^4b^3$.

Por fim paſſaremos a fazer a multiplicaçaõ pelo lo termo $+2b^3$; e obſervando as meſmas regras, acharemos que os tres productos parciais ſaõ $+10a^4b^3$, $-4a^3b^4$, $+8a^2b^5$.

Somando todos eſtes productos e reduzindo teremos o producto total $5a^7 - 22a^6b + 12a^5b^2 - 6a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5$.

25 Para exercicio dos principiantes ajuntamos os exemplos ſeguintes, acompanhados de algumas reflexões, as quais moſtraõ hum dos uſos, que tem a Algebra para deſcubrir verdades gerais.

Exemp. IV. *Exemp. V.* *Exemp. VI.*

$$\begin{array}{r} a+b \\ a-b \\ \hline a^2+ab \\ -ab-b^2 \\ \hline a^2-b^2. \end{array} \qquad \begin{array}{r} a+b \\ a+b \\ \hline a^2+ab \\ +ab+b^2 \\ \hline a^2+2ab+b^2. \end{array} \qquad \begin{array}{r} a^2+2ab+b^2 \\ a+b \\ \hline a^3+2a^2b+ab^2 \\ +a^2b+2ab^2+b^3 \\ \hline a^3+3a^2b+3ab^2+b^3. \end{array}$$

O exemplo IV. demonſtra duas propoſições, a que muitas vezes havemos de recorrer. I. *A ſoma de duas quantidades multiplicada pela ſua differença dá ſempre a differença dos quadrados das meſmas quantidades*. Tomem-ſe dous numeros quaisquer, 5 e 3 por exemplo, a ſoma 8 multiplicada pela differença 2 dá 16, que he com effeito a differença entre 25 e 9, quadrados de 5 e 3. II. Reciprocamente, *a differença dos quadrados de duas quantidades pode ſempre conſiderar-ſe, como formada pela multiplicaçaõ da ſoma das meſmas quantidades pela ſua differença*.

Aſ-

Assim $b^2 - c^2$ resulta da multiplicação de $b + c$ por $b - c$. Donde se segue, que a differença dos quadrados não póde ser hum numero primo.

No exemplo V. se mostra de hum modo geral e simples, que *o quadrado da soma* a + b *de duas quantidades he composta do quadrado* a^2 *da primeira, do dobro* 2ab *da primeira multiplicada pela segunda, e do quadrado* b^2 *da segunda* (Arith. 134).

O exemplo VI. confirma tambem o que dissemos (Arith. 154) sobre a formação do cubo.

Se multiplicarmos $\frac{2}{5}a^3 - \frac{4}{5}a^2b + \frac{1}{2}b^3$ por $\frac{3}{5}ab - 2b^2$, acharemos, que o producto he $\frac{2}{5}a^4b - \frac{136}{75}a^3b^2 + \frac{8}{5}a^2b^3 + \frac{3}{10}ab^4 - b^5$. Do mesmo modo $5a^3 - 4a^2b + 5ab^2 - 3b^3$ multiplicado por $4a^2 - 5ab + 2b^2$, dá $20a^5 - 41a^4b + 50a^3b^2 - 45a^2b^3 + 25ab^4 - 6b^5$.

26 Para indicar a multiplicação das quantidades complexas, he costume cobrir cada huma dellas com huma risca, ou encerra-làs entre parentheses, escrevendo hum dos sinais da multiplicação (14) entre o multiplicando e o multiplicador: algumas vezes não se interpõe sinal algum. Por exemplo, as expressões $\overline{a^2 + 3ab + b^2} \times \overline{2a + 3b}$, $(a^2 + 3ab + b^2) \times (2a + 3b)$, e $(a^2 + 3ab + b^2) . (2a + 3b)$, ou simplesmente $(a^2 + 3ab + b^2)$

$(2a + 3b)$ denotaõ, que a totalidade $(a^2 + 3ab + b^2)$ ſe deve multiplicar por $2a + 3b$.

27 Em muitos caſos he mais util indicar a multiplicaçaõ do que effeitua-la. Aindaque eſtes ſómente pele uſo ſe diſtinguem, com tudo podemos dizer geralmente, que devemos indicar as multiplicações, quando a eſtas ſe ſegue a diviſaõ; porque executando-ſe eſta ultima operaçaõ, como veremos, pela ſuppreſſaõ dos factores communs ao dividendo e ao diviſor, melhor conheceremos os factores, quando a multiplicaçaõ eſtiver ſimpleſmente indicada.

Da Diviſaõ.

28 A Diviſaõ na Algebra tem o meſmo objecto que na Arithmetica, e conſeguintemente o modo de a fazer depende muito dos ſinais, de que uſamos na multiplicaçaõ.

29 Quando a quantidade dividenda e o diviſor naõ tem letra commua, he impoſſivel executar a operaçaõ; indica-ſe porém eſta em tal caſo, eſcrevendo o diviſor por baixo do dividendo em fórma de fracçaõ. Aſſim, para denotar que devemos dividir a por b, eſcreveremos $\frac{a}{b}$, e para ſignificar que devemos dividir $aa + bb$ por $c + d$, eſcreveremos $\frac{aa+bb}{c+d}$. Tambem ſe indica a diviſaõ por meio de dous pontos poſtos entre o dividendo e o diviſor. Deſte modo $(aa + bb) : (c + d)$ ou $\overline{aa + bb} : \overline{c + d}$ he o meſmo que $\frac{aa+bb}{c+d}$.

30 Sendo o dividendo e o diviſor monomios, ſe to-

todas as letras, que tem o divisor, se acharem tambem no dividendo, póde fazer-se a divisaõ exactamente; o que se executará da maneira seguinte.

Supprimaõ-se no dividendo todas as letras cõmuas ao divisor, as que restarem formaraõ o quociente. Assim para dividir ab por a supprimiremos a no dividendo, e teremos b por quociente.

Do mesmo modo, havendo de dividir abc por ab, escreveremos c.

A razaõ he, porque as letras do divisor commuas ao dividendo saõ factores (15) do mesmo dividendo, e conseguintemente (Arith. 69) o quociente se comporá das letras do dividendo, que naõ forem commuas ao divisor.

31 Donde se segue, que havendo expoentes, *tiraremos o expoente de cada huma das letras do divisor do expoente da letra semelhante do dividendo.*

Desta sórte, querendo dividir a^3 por a^2, tiraremos 2 de 3, teremos 1; e conseguintemente a^1, ou a será o quociente. Do mesmo modo, havendo de dividir $a^4b^3c^2$ por a^2bc, teremos a^2b^2c.

Com effeito, $\frac{a^3}{a^2}$ he o mesmo que $\frac{aaa}{aa}$, e esta expressaõ se reduz (30) a a. Em geral, o expoente de qualquer letra do quociente deve ser a differença entre os expoentes, que a mesma letra tem no dividendo e no divisor.

32 Logo a letra, cujo expoente for o mesmo no dividendo e no divisor, terá no quociente cifra por expoente. Assim a^3 dividido por a^3 dá a^0; e a^3bc^2 dividido por a^2bc^2 dá ab^0c^0.

As letras que tem o por expoente naõ se escrevem, porque cada huma dellas naõ he outra cousa mais do que a unidade. Com effeito, quando dividimos a^3 por a^3, buscamos quantas vezes a^3 se contém em a^3; e como se contém huma vez, o quociente deve ser 1. Mas por outra parte a^3 dividido por a^3 dá a^0: logo a^0 vale 1. Em geral, *toda a quantidade, cujo expoente he cifra, vale* 1.

33 Se algumas letras do divisor naõ forem communs ao dividendo, ou se alguns expoentes do divisor forem maiores que os de letras semelhantes do dividendo, indicaremos a divisaõ (29), porque em tais casos naõ he possivel faze-la exactamente. Simplificaremos porém o quociente, ou a quantidade fraccionaria que o representa, supprimindo as letras communs ao dividendo e ao divisor; de maneira que, havendo expoentes em letras semelhantes, riscaremos aquella que o tiver menor, e deixaremos na outra a differença entre os expoentes primitivos. Querendo, por exemplo, dividir a^5bc^3 por $a^2b^3c^4$, escreveremos $\frac{a^5bc^3}{a^2b^3c^4}$, e a reducçaõ se fará desta sorte: riscaremos a^2 no divisor, e escreveremos sómente a^3 no dividendo; riscaremos b no dividendo, e escreveremos sómente b^2 no divisor; finalmente escreveremos sómente c no divisor, e assim teremos $\frac{a^3}{b^2c}$. Do mesmo

mo-

modo $\frac{a^2b^5c^3}{a^3bc^2d}$ ſe reduz a $\frac{b^4c}{ad}$. Se depois deſtas operações naõ reſtar letra alguma no dividendo, eſcreveremos em lugar delle a unidade. Aſſim $\frac{a^2}{a^3}$ ſe reduz a $\frac{1}{a}$.

A razaõ deſtas regras ſe percebe facilmente, advertindo, que ſupprimir o meſmo numero de letras no dividendo e no diviſor he o meſmo, que dividir os dous termos de huma fracçaõ por huma meſma quantidade; operaçaõ (Arith. 89) que ſimplifica os quebrados, e naõ altéra o ſeu valor.

34 Se o dividendo, ou o diviſor, ou ambos elles tiverem coefficientes, praticaremos as regras de Arithmetica; e ſe naõ podermos fazer a diviſaõ exactamente, poremos os numeros em fórma de quebrado, o qual, podendo ſer, ſe reduzirá (Arith. 92) á expreſſaõ mais ſimples.

Havendo, por exemplo, de dividir $8a^3b$ por $4a^2b$, dividiremos primeiramente 8 por 4, e teremos 2 por quociente; dividindo depois a^3b por a^2b teremos a por quociente, e conſeguintemente $2a$ por quociente total. Querendo dividir $8a^3b^2$ por $6ab$, eſcreveremos $\frac{8a^3b^2}{6ab}$, que ſe reduz a $\frac{4a^2b}{3}$.

35 A regra que acima demos (33) ſe applica aos polynomios, com tanto que as letras communas ao dividendo e ao diviſor ſe achem em todos

dos os termos de ambos elles. Assim, tendo para dividir $a^5 + 4a^4b - 5a^2b^3$ por $a^3 - 5a^2b$ reduziremos o quociente $\frac{a^5 + 4a^4b - 5a^2b^3}{a^3 - 5a^2b}$ a $\frac{a^3 + 4a^2b - 5b^3}{a - 5b}$, supprimindo a^2, que he factor commum a todos os termos do dividendo, e do divisor.

36 Quando o dividendo e o divisor saõ complexos, naõ temos regras geraes para conhecer por simples inspecçaõ, se a divisaõ póde ou naõ fazer-se exactamente. Para o saber, e achar ao mesmo tempo o quociente, he preciso fazer a operaçaõ seguinte.

1.º *Ordenem-se* os termos do dividendo e do divisor relativamente a huma mesma letra, isto he, escolha-se huma letra que seja commua a ambos, e escrevaõ-se por ordem de grandeza os termos, em que a dita letra tiver expoentes consecutivamente mais pequenos.

2.º Havendo posto em huma linha tanto o dividendo como o divisor com os termos assim ordenados, separe-se hum do outro por meio de huma risca, e proceda-se á divisaõ, tomando sómente o primeiro termo do dividendo para dividir conforme as regras acima dadas (30, 31, 34) pelo primeiro termo do divisor, e escrevendo o quociente debaixo do divisor.

3.º Multipliquem-se successivamente todos os termos do divisor pelo quociente achado, e escreva-se o producto debaixo do dividendo, mudando os sinais.

4.º Passando huma risca por baixo de tudo isto, e fazendo a reducçaõ, escreva-se o resto, e comece-se segunda divisaõ com este novo dividendo do, tomando por primeiro termo aquelle que tiver maior expoente.

He preciſo notar, que ſe deve attender aos ſinais dos termos do dividendo e do diviſor. A regra he a meſma, que demos para a multiplicaçaõ, iſto he . . . .

Se o dividendo e o diviſor tiverem o meſmo ſinal, o quociente ſerá poſitivo.

Se pelo contrario tiverem ſinais differentes, o quociente ſerá negativo.

Porque, como (Arith. 74) multiplicando o quociente pelo diviſor, deve ſahir no producto o dividendo, he preciſo que o quociente tenha ſinais tais, que ſendo multiplicado pelo diviſor reproduza o dividendo com os meſmos ſinais; condiçaõ, da qual ſe deduz neceſſariamente a regra que acabamos de dar.

Paſſemos aos exemplos, e para procedermos com ordem, começaremos pelos ſinais, depois dividiremos os coefficientes, e por fim as letras.

Exemplo I.

Se houvermos de dividir $a^2 - b^2$ por $b + a$, ordenaremos eſtas quantidades relativamente a huma das letras a, b, a a, por exemplo, eſcrevendo como aqui ſe vê.

Dividendo - -	$aa - bb$	$a + b$	Diviſor
	$-aa - ab$	$a - b$	Quociente
Reſto - - -	$-ab - bb$		
	$+ab + bb$		
Reſto - - - - - - -	0		

Ten-

Tendo o primeiro termo *aa* do dividendo o meſmo ſinal, que o primeiro termo *a* do diviſor, eſcreveremos $+$ no quociente; mas como pertence ao primeiro termo, podemos omitti-lo. Dividindo *aa* por *a*, temos *a* por quociente, que eſcreveremos debaixo do diviſor.

Multipliquem-ſe ſucceſſivamente os dous termos *a* e *b* do diviſor pelo primeiro termo *a* do quociente, e eſcrevaõ-ſe os productos *aa* e *ab* debaixo do dividendo com o ſinal $-$ contrario ao que deo a multiplicaçaõ, pois que eſtes productos devem ſer tirados do dividendo.

Faça-ſe a reducçaõ, riſcando os dous termos *aa* e $-aa$ que ſe deſtroem, e reſta $-ab$, que com a parte $-bb$, que ainda reſta do dividendo, compõe tudo o que ainda falta para dividir.

Continuaremos pois a diviſaõ, tomando $-ab$ por primeiro termo do novo dividendo.

Dividindo $-ab$ por *a*, eſcreveremos $-$ no quociente, porque os ſinais ſaõ differentes: em quanto ás letras o quociente he *b*, que eſcreveremos no ſeu lugar.

Multipliquem-ſe os dous termos *a* e *b* do diviſor pelo termo $-b$ do quociente; os productos ſaõ $-ab$, e $-b^2$. Eſcreveremos pois $+ab+b^2$ debaixo do ſegundo dividendo; e como fazendo a reducçaõ, naõ ha reſto, concluiremos, que o quociente he $a-b$.

Igualmente ſe poderia ter ordenado o dividendo e o diviſor relativamente a *b*. Neſſe caſo teriamos para dividir $-b^2+a^2$ por $b+a$, e fazendo-ſe a operaçaõ da meſma ſórte, achariamos $-b+a$, que he o meſmo que $a-b$.

Exem-

Exemplo II.

$$\begin{array}{l|l}
a^3 - b^3 & a - b \\
-a^3 + a^2b & \overline{a^2 + ab + b^2} \\
\hline
+a^2b - b^3 & \\
-a^2b + ab^2 & \\
\hline
+ab^2 - b^3 & \\
-ab^2 + b^3 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

Exemplo III.

$$\begin{array}{l|l}
8a^4 - 2a^3b - 13a^2b^2 - 3ab^3 & 4a^2 + 5ab + b^2 \\
-8a^4 - 10a^3b - 2a^2b^2 & \overline{2a^2 - 3ab} \\
\hline
-12a^3b - 15a^2b^2 - 3ab^3 & \\
+12a^3b + 15a^2b^2 + 3ab^3 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

Exemplo IV.

$$\begin{array}{l|l}
\frac{2}{7}a^3 - \frac{9}{35}ab^2 + \frac{1}{6}a^2b - \frac{3}{20}b^3 & \frac{2}{3}a^2 - \frac{3}{5}b^2 \\
-\frac{2}{7}a^3 + \frac{9}{35}ab^2 & \overline{\frac{3}{7}a + \frac{1}{4}b} \\
\hline
\frac{1}{6}a^2b - \frac{3}{20}b^3 & \\
-\frac{1}{6}a^2b + \frac{3}{20}b^3 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

Exem-

Exemplo V.

$$\begin{array}{l|l} a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - c^4 & a^2 + b^2 + c^2 \\ \cline{2-2} -a^4 - a^2b^2 - a^2c^2 & a^2 + b^2 - c^4 \\ \hline + a^2b^2 - a^2c^2 + b^4 - c^4 & \\ - a^2b^2 - b^4 - b^2c^2 & \\ \hline - a^2c^2 - b^2c^2 - c^4 & \\ + a^2c^2 + b^2c^2 + c^4 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Quando a divisaõ se naõ póde fazer exactamente, naõ querendo indica-la (29), continuaremos a operaçaõ até onde nos parecer, assim como se pratica na Arithmetica. Havendo de dividir, por exemplo, a por $b + c$, escreveremos $\frac{a}{b+c}$, ou $\frac{a}{b} - \frac{ac}{b^2} + \frac{ac^2}{b^3} - \frac{ac^3}{b^4} +$ &c.&c. sem fim. Deste modo se resolvem geralmente todas as fracções em series infinitas.

37 Se havendo ordenado o dividendo e o divisor relativamente a huma letra, se acharem outros termos, nos quais a dita letra tenha o mesmo expoente, estes se disporaõ em huma colunna vertical, como se mostra no exemplo seguinte; e nesta disposiçaõ se deveraõ ordenar todos os termos de cada colunna respectivamente a outra letra.

Exemplo.

Para dividir $19a^2b^2 + 13a^3b - 20a^4 - 10a^3c - 6a^2bc + 2ab^2c - 5ab^3$ por $- 3ab - 5a^2 + b^2$, ordenaremos o dividendo e o diviſor relativamente a a, e teremos $- 20a^4 + 13a^3b - 10a^3c + 19a^2b^2 - 6a^2bc + 2ab^2c - 5ab^3$ para dividir por $- 5a^2 - 3ab + b^2$; mas como no dividendo ha dous termos affectos de a^3, dous affectos de a^2, e dous affectos de a, devemos diſpo-los da maneira ſeguinte, ordenando-os em cada colunna relativamente a b.

$$\text{Divid.}\left\{\begin{array}{r} -20a^4 + 13a^3b + 19a^2b^2 - 5ab^3 \\ - 10a^3c - 6a^2bc + 2ab^2c \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} -5a^2 - 3ab + b^2 \\ \hline 4a^2 - 5ab + 2a \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{l} \quad + 20a^4 + 12a^3b - 4a^2b^2 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{Reſto}\ \text{- -}\ \left\{\begin{array}{l} + 25a^3b + 15a^2b^2 - 5ab^3 \\ - 10a^3c - 6a^2bc + 2ab^2c \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{l} - 25a^3b - 15a^2b^2 + 5ab^3 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{Reſto}\ \text{- - -}\ - 10a^3c - 6a^2bc + 2ab^2c$$

$$\begin{array}{l} + 10a^3c + 6a^2bc - 2ab^2c \\ \hline \end{array}$$

$$\text{Reſto}\ \text{- - - - - - - - - - - -}\ 0$$

Para ordenar as quantidades, he ordinariamente mais commodo eſcolher a letra, que tem omeſmo expoente em muitos termos.

38 Se huma quantidade póde ter a fórma de producto, como acontece muitas vezes, principal-

palmente quando reſulta de differentes operações, he util indicar a multiplicaçaõ entre os ſeus factores. Aindaque o methodo de os achar depende de conhecimentos, que ſó adiante daremos, com tudo quem ſe familiarizar com a multiplicaçaõ e diviſaõ, com facilidade os achará em muitos caſos. Por exemplo, havendo de ſomar $5ab - 3bc + a^2$ com $3ab + 3bc - 2a^2$, teremos $8ab - a^2$, que por cauſa da letra a, que he factor commum dos dous termos $8ab$ e a^2, póde conſiderar-ſe como producto da multiplicaçaõ de $8ab$ por a, e repreſentar-ſe por $(8b - a)a$. He muito util o exercicio neſte genero de reſoluções.

Do modo de achar o maior diviſor commum de duas quantidades litterais.

39 O Methodo he o meſmo que havemos dado para os numeros (Arith. 95), e a demonſtraçaõ funda-ſe nos meſmos principios. Havendo ordenado as duas quantidades, divida-ſe a maior pela menor: ſe houver reſto, por elle ſe dividirá o diviſor, e pelo novo reſto o novo diviſor, e aſſim por diante, até chegar a huma diviſaõ exacta: o ultimo diviſor ſerá o que ſe buſca.

Para facilitar o uſo deſta regra, notaremos que duas quantidades A e B conſervaõ o ſeu maior diviſor commum, aindaque ſe multiplique ou divida huma dellas, v.g. A, por huma quantidade que naõ tenha diviſor cõmum com B. Por exemplo, ab e ac tem o diviſor commum a; e ſe multiplicarmos ab por d, entre o producto abd e ac haverá terá o mesmo divisor commum a, que havia entre ab e ac. Naõ aconteceria o mesmo, se multiplicassemos ab por huma quantidade, que fosse divisor de ac, v. g. por c; porque o divisor cómum entre o producto abc e ac he ac, e naõ a. Do mesmo modo, se multiplicassemos ab por cd, que tem hum factor commum com ac; teriamos $abcd$, cujo divisor commum com ac he ac. Em geral, $a + b$ e $a^2 - b^2$, $am + bm$ e $a^2n - b^2n$ tem o mesmo maior divisor commum; e reciprocamente.

40 Donde se seguem as duas reflexões seguintes, que tem ambas lugar no progresso das divisões successivas, que exige a regra dada. I. Conhecendo que huma das duas quantidades tem hum factor, que naõ he divisor da outra, podemos supprimi-lo, e ficará o calculo mais simples. II. A fim de fazer a divisaõ exacta, podemos multiplicar huma das duas quantidades por huma grandeza conveniente, com tanto que esta naõ seja divisor da outra quantidade.

Exemplo I.

Supponhamos que se pede o maior divisor commum de $a^2 - 3ab + 2b^2$ e $a^2 - ab - 2b^2$

$$\begin{array}{lr|ll} 1.^{\circ}\ \text{Divid.} & a^2 - 3ab + 2b^2 & a^2 - ab - 2b^2 & 1.^{\circ}\ \text{Divisor} \\ & -a^2 + ab + 2b^2 & 1 & 1.^{\circ}\ \text{Quociente} \\ \hline 1.^{\circ}\ \text{Resto} & -2ab + 4b^2 & & \end{array}$$

Devemos agora dividir $a^2 - ab - 2b^2$ por $-2ab + 4b^2$, porque o expoente de a no resto he menor, que

que o expoente de a no diviſor; mas como o reſto tem o factor $2b$, que naõ he factor do novo dividendo, baſtará dividir $a^2 - ab - 2b^2$ por $-a + 2b$, ſupprimindo $2b$. Temos pois

$$\begin{array}{rrrl} \text{2.° Divid.}\ a^2 & -ab & -2b^2 & \left\{\begin{array}{ll} -a+2b & \text{2.° Diviſor} \\ \hline -a-b & \text{2.° Quociente} \end{array}\right. \\ -a^2 & +2ab & & \\ \hline & +ab & -2b^2 & \\ & -ab & +2b^2 & \\ \hline \text{Reſto} & - - - & 0 & \end{array}$$

Logo $-a + 2b$ he o maior diviſor commum.

Exemplo II.

$$5a^3 - 18a^2b + 11ab^2 - 6b^3 \left\{ 7a^2 - 23ab + 6b^2 \right.$$

Como 5 naõ he diviſivel por 7, e alem diſſo eſte numero naõ he factor commum dos termos da ſegunda quantidade, multiplicaremos a primeira por 7, e teremos - - - - - - - -

$$\begin{array}{rrrrl} 35a^3 & -126a^2b & +77ab^2 & -42b^3 & \left\{\begin{array}{l} 7a^2 - 23ab + 6b^2 \\ \hline 5a \end{array}\right. \\ -35a^3 & +115a^2b & -30ab^2 & & \\ \hline & -11a^2b & +47ab^2 & -42b^3 & \end{array}$$

A operaçaõ ſe continuará ainda pelo meſmo diviſor, multiplicando o reſto por 7, e omittindo o factor b.

— 77

$$\begin{array}{rrr|l} -77a^2 & +\ 329ab & -\ 294b^2 & 7a^2 - 23ab + 6b^2 \\ \cline{4-4} +77a^2 & -\ 253ab & +\ 66b^2 & -11 \\ \hline & 76ab & -\ 228b^2 & \end{array}$$

Devemos agora dividir $7a^2 - 23ab + 6b^2$ por $76ab - 228b^2$, ou melhor, por $a - 3b$.

$$\begin{array}{rrr|l} 7a^2 & -\ 23ab & +\ 6b^2 & a - 3b \\ \cline{4-4} -7a^2 & +\ 21ab & & 7a - 2b \\ \hline & -\ 2ab & +\ 6b^2 & \\ & +\ 2ab & -\ 6b^2 & \\ \hline \text{Reſto} & \text{- - - - -} & 0 & \end{array}$$

Logo $a - 3b$ he o maior diviſor commum das duas quantidades propoſtas.

Pelo habito de calcular (38) ſe deſcobre em muitos caſos o maior diviſor commum de duas quantidades com maior facilidade, do que pelo methodo geral. Por exemplo, nas quantidades $a^4 + a^2b^2 - a^2c^2 - b^2c^2$, e $2a^2c + 4bc^2 - 2a^3 - 4abc$, ou $a^2(a^2 + b^2) - c^2(a^2 + b^2)$, e $c(2a^2 + 4bc) - a(2a^2 + 4bc)$, he claro que a primeira he o meſmo que $(a^2 + b^2)(a^2 - c^2)$, e a ſegunda o meſmo que $(2a^2 + 4bc)(c - a)$. Mas $(a^2 + b^2)(a^2 - c^2)$ he (24) o meſmo que $-(a^2 + b^2)(c^2 - a^2)$, e $c^2 - a^2$ he diviſivel (25) por $c - a$; logo $c - a$ he diviſor das duas quantidades. Fazendo do a divisaõ, os quocientes saõ $-(a^2+b^2)(a+c)$ e $2a^2+4bc$, que naõ tem divisor commum: logo $c-a$ he o maior divisor commum das quantidades propostas.

Das Fracções Litterais.

41 As fracções litterais calculaõ-se pelas regras das fracções numericas, fazendo-se a applicaçaõ do que havemos dito a respeito das quatro operações algebricas.

42 A fracçaõ $\frac{a}{b}$ pode transformar-se sem alteraçaõ de valor em $\frac{ac}{bc}$, ou $\frac{a^2}{ab}$, ou $\frac{a^2+ab}{ab+b^2}$, e assim por diante (Arith. 88).

43 A fracçaõ $\frac{a^2c}{abc}$ he o mesmo que $\frac{a}{b}$, assim como $\frac{6a^3+3a^2b}{12a^3+9a^2c}$ e $\frac{2a+b}{4a+3c}$ tem o mesmo valor (Arith. 89). Esta reducçaõ das fracções á expressaõ mais simples comprehende-se no que havemos dito (33).

44 A regra mais geral para reduzir huma fracçaõ aos seus menores termos, consiste em dividir tanto o numerador como o denominador pelo maior divisor commum, que elles podem ter (39).

45 A expressaõ $a+\frac{bd}{c}$ pode mudar-se na fracçaõ unica $\frac{ac+bd}{c}$, e do mesmo modo $a+\frac{cd-ab}{b-d}$ se reduz a $\frac{ab-ad+cd-ab}{b-d}$, isto he, a $\frac{cd-ad}{b-d}$ (Arith. 86).

46 A quantidade $\frac{3ab+ac+cd}{a}$ póde redu-

zir-

zir-se a $3b + c + \frac{cd}{a}$, e semelhantemente. $\frac{a^2+4ab+4b^2+c^2}{a+2b}$ se reduz a $a + 2b + \frac{c^2}{a+2b}$ (Arith. 85).

47 As tres fracções $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$, sendo reduzidas ao mesmo denominador, tornaõ-se em $\frac{adf}{bdf} + \frac{bcf}{bdf} + \frac{bde}{bdf}$, e do mesmo modo as duas $\frac{b+c}{a+b}$ e $\frac{a-2c}{a-b}$ se mudaõ em $\frac{ab+ac-b^2-bc}{a^2-b^2}$ e $\frac{a^2-2ac+ab-2bc}{a^2-b^2}$ (Arith. 90, 91).

48 Se os denominadores tiverem factor commum, praticaremos conforme a regra dos numeros (Arith. 91 §§). Por exemplo $\frac{a}{bc}$ e $\frac{d}{bf}$ se reduzem a $\frac{af}{bcf}$ e $\frac{cd}{bcf}$. Do mesmo modo as tres fracções $\frac{a}{bc}$, $\frac{d}{bf}$, $\frac{e}{cg}$ se reduzem a $\frac{afg}{bcfg}$, $\frac{dcg}{bcfg}$, $\frac{bef}{bcfg}$.

49 Para somar as fracções $\frac{b+c}{a+b}$ e $\frac{a-2c}{a-b}$, observaremos a regra dada (Arith. 102), e teremos $\frac{ab+ac-b^2-bc+a^2-2ac+ab-2bc}{a^2-b^2}$, que se reduz a $\frac{2ab-ac-b^2-3bc+a^2}{a^2-b^2}$.

Pelo contrario, havendo de tirar a segunda da primeira, acharemos $\frac{ab+ac-b^2-bc-a^2+2ac-ab+2bc}{a^2-b^2}$, que se reduz a $\frac{3ac-b^2+bc-a^2}{a^2-b^2}$ (Arith. 105).

50 Se nesta operaçaõ mudassemos juntamente os sinais do numerador e do denominador, haveriamos

C so-

somado as fracções e naõ diminuindo; porque $\frac{a}{b}$ naõ he differente de $\frac{-a}{-b}$ (36).

51 Para multiplicar $\frac{a}{b}$ por $\frac{c}{d}$, escreveremos $\frac{ac}{bd}$, como tambem $\frac{1}{2}a$ multiplicado por $\frac{1}{2}b$ dá $\frac{1}{4}ab$, e $\frac{a}{b}$ multiplicado por c dá $\frac{ac}{b}$ (Arith. 106, 107). No caso de serem complexos os termos da fracçaõ, praticaremos conforme a regra da multiplicaçaõ dos polynomios.

52 Querendo dividir $\frac{a}{b}$ por $\frac{c}{d}$, escreveremos $\frac{ad}{bc}$, e para dividir $\frac{a+b}{c+d}$ por $\frac{c+d}{a-b}$, escreveremos $\frac{(a+b)(a-b)}{(c+d)(c+d)}$, que se reduz a $\frac{a^2-b^2}{(c+d)^2}$. Finalmente $\frac{a}{b}$ dividido por c dá $\frac{a}{bc}$ (Arith. 109, 110).

Das Equações.

53 PAra significar que duas quantidades saõ iguais, he costume separa-las pelo sinal $=$, que se pronuncia *igual*, ou *he igual a*; pelo que, a expressaõ $a=b$ quer dizer a igual a b, ou que a he igual a b.

O concurso de duas, ou de muitas quantidades assim separadas pelo sinal $=$ tem o nome de *Equaçaõ*. A totalidade das quantidades, que estaõ á esquerda do dito sinal, fórma o *primeiro membro* da equaçaõ; e a totalidade das que estaõ á direita, constitue o *segundo membro*.

Na equaçaõ $4x-3=2x+7$, $4x-3$ fórma o primeiro membro, e $2x+7$ o segundo.

To-

Toda a queſtaõ, que póde reſolver-ſe por Algebra, envolve no enunciado hum certo numero de condições, as quais ſaõ outros tantos meios para perceber as relações, que ha entre as quantidades, que ſe buſcaõ, a que ſe dá o nome de *incognitas*, e as conhecidas do problema. Eſtas relações pódem exprimir-ſe ſempre por equações, em que as *incognitas* ſe achaõ combinadas com as quantidades conhecidas de hum modo mais ou menos compoſto, confórme a queſtaõ he mais ou menos difficultoſa.

Aſſim para reſolver por Algebra as queſtões, que pódem propor-ſe ácerca das quantidades, ſaõ neceſſarias tres couzas.

1.º Perceber na propoſiçaõ, ou na natureza do problema as relações, que ha entre as quantidades conhecidas e as incognitas. Sobre eſta faculdade, que o noſſo eſpirito adquire com o uſo, naõ ſe pódem dar regras gerais.

2.º Exprimir cada huma das relações por huma equaçaõ. Eſte requiſito póde reduzir-ſe a huma unica regra; mas a ſua applicaçaõ he mais ou menos facil, confórme a natureza das queſtões, e confórme a capacidade e exercicio do Analyſta.

3.º Reſolver a equaçaõ ou as equações, iſto he, deduzir o valor das incognitas. Sobre eſte ponto ſe póde dar hum numero determinado de regras, que vamos a expôr.

Como as queſtões pódem conduzir a equações mais ou menos compoſtas, tem-ſe eſtas dividido em muitas claſſes ou gráos, os quais ſe diſtinguem pelo expoente da quantidade ou das quantidades incognitas, que nellas entraõ. Começamos agora a tratar das *Equações do primeiro gráo*, ou *Lineares*, que ſaõ aquellas, em que as incognitas naõ eſtaõ multiplicadas nem entre ſi, nem por ſi meſmas.

Da reſoluçaõ das Equações do primeiro grão a huma incognita.

54 Reſolver huma equaçaõ he reduzi-la a outra, na qual a incognita ſe ache ſó em hum membro, e no outro eſtejaõ ſómente quantidades conhecidas. Feito iſto, fica o problema reſolvido, porque huma quantidade igual a quantidades conhecidas he conhecida.

Daqui por diante repreſentaremos as incognitas por algumas das ultimas letras x, y, z do Alfabeto, para as diſtinguirmos das quantidades conhecidas, que repreſentaremos ou por numeros, ou pelas primeiras letras do Alfabeto.

55 A incognita póde achar-ſe miſturada com as quantidades conhecidas de tres modos: 1.º por addiçaõ ou ſubtracçaõ, como na equaçaõ $x + 3 = 5 - x$. 2.º Por addiçaõ, ſubtracçaõ, e multiplicaçaõ, como na equaçaõ $4x - 6 = 2x + 16$. 3.º Finalmente por addiçaõ, ſubtracçaõ, multiplicaçaõ, e diviſaõ, como na equaçaõ $\frac{9}{5} x - 4 = \frac{2}{3} x + 17$; ou pelas duas operações ultimas, ou ſómente pela ultima.

Eis-aqui as tres regras, porque ſe deſembaraça a incognita neſtes differentes caſos.

56 *Para fazer paſſar qualquer termo de hum membro da equaçaõ para o outro, riſque-ſe o dito termo, e eſcreva-ſe no outro membro com ſinal contrario.*

Por exemplo, na equaçaõ $4x + 3 = 3x + 12$, querendo fazer paſſar o termo $+ 3$ para o ſegundo mem-

membro, eſcreveremos $4x = 3x + 12 - 3$, ou, reduzindo, $4x = 3x + 9$. Se quizermos agora mudar o termo $3x$ para o primeiro membro, eſcreveremos $4x - 3x = 9$, que pela reducçaõ dá $x = 9$.

Da meſma ſorte na equaçaõ $5x - 7 = 21 - 4x$, querendo tranſpôr o termo -7, eſcreveremos $5x = 21 - 4x + 7$, iſto he $5x = 28 - 4x$; e ſe depois diſſo quizermos tranſpôr $-4x$, eſcreveremos $5x + 4x = 28$, ou $9x = 28$. Brevemente veremos, como ſe acaba a reſoluçaõ deſta equaçaõ.

Eſtas transformações fundaõ-ſe, em que duas quantidades ſe conſervaõ iguais, ſe a ambas ajuntarmos, ou de ambas tirarmos a meſma quantidade.

57 Por eſta regra ſe podem tranſportar ao meſmo tempo todos os termos affectos da incognita para hum membro, e todas as quantidades conhecidas para o outro. Aſſim da equaçaõ $7x - 8 = 14 - 4x$ ſe conclue $7x + 4x = 14 + 8$, ou $11x = 22$. Do meſmo modo a equaçaõ $ax + bc - cx = ac - bx$ ſe transforma em $ax - cx + bx = ac - bc$.

58 Se depois da tranſpoſiçaõ, e reducçaõ, o termo affecto de x tiver o ſinal $-$, mudaremos os ſinais de ambos os membros. Por exemplo, ſe tivermos $3x - 8 = 4x - 12$, tranſpondo e reduzindo, acharemos $-x = -4$: deduziremos pois $x = 4$; porque igualmente poderiamos tranſpôr os x para o ſegundo membro, e teriamos $4 = x$, que he o meſmo que $x = 4$.

59 Quando a equaçaõ he numerica, ou quando ſendo litteral inclue quantidades ſemelhantes, pode abbreviar-ſe a reducçaõ, riſcando huma dellas, e tirando outro tanto da outra, ou ſomando, conforme elles tiverem o meſmo, ou differente ſinal em differen-

tes

tes membros. Por exemplo, na equaçaõ $6b - 4a + 2x = 5a + 3x$, riſcaremos $2x$ no primero membro, e eſcreveremos ſómente x no ſegundo; riſcaremos $5a$ no ſegundo, e ſomaremos $4a$ com $5a$, o que dará immediatamente $6b - 9a = x$. Do meſmo modo a equaçaõ $5a + 2b = 5a + x$ ſe reduz immediatamente a $2b = x$.

60 Feita a tranſpoſiçaõ, para ter o valor da incognita no caſo de naõ entrarem fracçóes na equaçaõ, executaremos a regra ſeguinte: *Eſcreva-ſe unicamente a incognita em hum membro, e divida-ſe o outro pelo multiplicador que ella tinha.*

Por exemplo, da equaçaõ $7x - 8 = 14 - 4x$, que dá $11x = 22$, deduzimos $x = \frac{22}{11}$; porque ſe $11x = 22$, a undecima parte de $11x$, ou x ſerá tambem igual á undecima parte de 22.

Do meſmo modo a equaçaõ $12x - 15 = 4x + 25$, ou $8x = 40$, dá $x = 5$.

A regra he a meſma para as equaçóes litterais, qualquer que ſeja o numero dos termos affectos da incognita depois da tranſpoſiçaõ. A equaçaõ $ax = bc$ dá $x = \frac{bc}{a}$. A equaçaõ $ax + bc - cx = ac - bx$, ou $ax - cx + bx = ac - bc$ dá $x = \frac{ac - bc}{a - c + b}$, dividindo o ſegundo membro pela totalidade das quantidades $a - c + b$.

61 Para conhecermos pois o valor de x, quando depois da tranſpoſiçaõ ha muitos termos affectos da dita incognita, dividiremos o ſegundo membro pela totalidade das quantidades que multiplicaõ x no primeiro, tomando-as com os ſinais, com que nelle ſe achaõ.

Por exemplo, na equaçaõ $ax = bc - 2x$, ou

$ax + 2x = bc$, teremos $x = \frac{bc}{a+2}$. Da mesma sorte a equaçaõ $x - ab = bc - ax$, ou $x + ax = bc + ab$, dá $x = \frac{bc+ab}{1+a}$ (5).

62 Se houver alguma quantidade, que seja factor comum de todos os termos da equaçaõ, para simplificar, dividiremos por elle todos os termos. Por exemplo, na equaçaõ $15b^2 = 27ab + 6bx$ dividiremos todos os termos pelo seu factor commum $3b$, e teremos $5b = 9a + 2x$, da qual (56, 60) se tira $x = \frac{5b-9a}{2}$.

63 As regras, que acabamos de dar, podem applicar-se ás equações, em que entraõ denominadores, com tanto que estes naõ contenhaõ a incognita; mas como ellas se executaõ ordinariamente com mais facilidade, quando naõ ha fracções, por isso ajuntaremos a regra seguinte.

64 Para transformar huma equaçaõ na qual entraõ denominadores, em outra que os naõ tenha, *multiplique-se cada hum dos termos, que naõ tem denominador, pelo producto de todos os denominadores; e o numerador de cada huma das fracções pelo producto dos denominadores das outras sómente.*

Por exemplo, se tivessemos a equaçaõ $\frac{2x}{3} + 4 = \frac{4x}{5} + 12 - \frac{5x}{7}$, multiplicariamos os termos 4 e 12 por 3. 5. 7 ou 105, e teriamos 420, e 1260. Depois multiplicariamos $2x$ por 5.7 ou 35, $4x$ por 3. 7 ou 21, e $5x$ por 3. 5 ou 15, e teriamos $70x$, $84x$, $75x$; e conseguintemente a equaçaõ proposta se muda em $70x + 420 = 84x + 1260 - 75x$. Applicando agora a esta as regras precedentes, teremos $x = \frac{840}{61} = 13\frac{47}{61}$.

Com

Com effeito, as tres fracções da equaçaõ proposta, sendo reduzidas ao mesmo denominador conforme as regras da Arithmetica, daõ $\frac{70x}{105}$, $\frac{84x}{105}$, $\frac{75x}{105}$, que realmente saõ o mesmo que as primitivas. Se reduzirmos tambem os dous termos inteiros a fracções, cujos denominadores sejaõ 105, teremos $\frac{420}{105}$ e $\frac{1260}{105}$; de maneira que a equaçaõ proposta se transforma em $\frac{70x+420}{105} = \frac{84x+1260-75x}{105}$. Mas quantidades iguais, sendo multiplicadas pelo mesmo numero, conservaõ ainda a igualdade; logo multiplicando ambos os membros por 105, isto he, supprimindo o denominador commum, será verdadeira a equaçaõ, isto he, teremos, como acima, $70x + 420 = 84x + 1260 - 75x$.

Se os denominadores tiverem hum factor commum, simplificaremos esta operaçaõ, como ensinamos (Arith. 91 §§).

65 A regra he a mesma para as equações litterais, com tanto que se observem as regras da multiplicaçaõ algebrica. Assim, a equaçaõ $\frac{ax}{b} + b = \frac{cx}{d} + \frac{ab}{c}$ se transforma em $acdx + b^2cd = bc^2x + ab^2d$, donde se tira $x = \frac{ab^2d - b^2cd}{acd - bc^2}$.

Se tivermos $\frac{cx}{ab} + \frac{dx}{ac} = e$, multiplicaremos (48) cx por c, dx por b, e virá - - - $\frac{c^2x + bdx}{abc} = e$, isto he, $c^2x + bdx = abce$; da qual tiraremos $x = \frac{abce}{c^2+bd}$.

66 No

66 No caſo de ſerem complexos os denominadores, he mais commodo de ordinario indicar primeiramente as operações, e executa-las depois. Por exemplo, ſe tiveſſemos $\frac{ax}{a-b}+4b=\frac{cx}{3a+b}$, eſcreveriamos $ax(3a+b)+4b(a-b)(3a+b)=cx(a-b)$; e fazendo agora as operações indicadas, acharemos $3a^2x+abx+12a^2b-8ab^2-4b^3=acx-bcx$, e conſeguintemente $x=\frac{4b^3+8ab^2-12a^2b}{3a^2+ab-ac+bc}$.

Applicaçaõ dos principios precedentes a reſoluçaõ de alguns Problemas.

67 AInda que reſervamos os uſos da Algebra para a ſegunda Secçaõ, com tudo, afim de fazermos a tempo algumas obſervações uteis, applicaremos os principios precedentes a alguns problemas muito faceis.

As regras, que acabamos de dar, ſaõ ſufficientes para reſolver qualquer problema do primeiro gráo, que eſteja expreſſo em equaçaõ: reſta ſaber como eſta ſe ha-de formar.

Para pôr hum problema em equaçaõ, *repreſente-ſe por huma letra cada huma das quantidades que ſe buſcaõ, e havendo examinado o eſtado da queſtaõ, por meio dos ſinais algebricos façaõ-ſe ſobre as quantidades dadas, e as incognitas as meſmas operações, e os meſmos raciocinios, que ſe fariaõ para verificar as incognitas no caſo de ſerem conhecidos os ſeus valores.*

Os problemas ſeguintes dirigiraõ a applicaçaõ

çaõ desta regra geral, ainda que pela sua simplicidade naõ precisaõ da Algebra para se resolverem.

Problema I. *Hum pai e hum filho tem entre ambos cem annos; o pai tem quarenta mais que o filho; pergunta-se, qual he a idade de cada hum.*

Pouca attençaõ basta para ver, que o problema se reduz a achar duas quantidades, cuja soma seja 100, e a differença 40. Tambem he manifesto, que, se for conhecida huma destas quantidades, a segunda o será com facilidade; se a maior, por exemplo, for conhecida, tirando della 40, teremos a mais pequena.

Representemos pois a maior por x.

Ora, se este valor fosse conhecido, e o quizessemos verificar, tirariamos delle 40 para ter o numero menor; depois disso somariamos o maior com o menor para ver se davaõ 100. Imitemos pois este modo de obrar.

O numero maior he - - - - - - - - x

Logo o menor será - - - - - - - - $x - 40$

Estes dous numeros somados daõ - $2x - 40$

Mas pelas condiçóes da questaõ devem dar 100,

Logo eis-aqui o problema posto em equaçaõ - - - - - - - - $2x - 40 = 100$

Havendo assim traduzido o problema em linguagem algebrica, para ter x, naõ se trata de mais, que de applicar as regras dadas (53 e 56). A primeira dá $2x = 100 + 40 = 140$, e a segunda $x = \frac{140}{2} = 70$. Logo o numero menor será $70 - 40 = 30$; e conseguintemente o pai tem 70 annos, e o filho 30. Com effeito, $70 + 30 = 100$.

Reflectindo sobre o modo, porque nos conduzimos para resolver este problema, ve-se claramenmento, que os raciocinios, que fizemos, naõ saõ dependentes dos valores particulares dos numeros 100, e 40 da questaõ, e que se em lugar destes fossem dados outros quaisquer, sempre procederiamos pela mesma fórma. Assim, se o problema se propuzesse deste modo geral: *Sendo dada a soma* a *de duas quantidades, e a sua differença* b, *achar cada huma das mesmas quantidades.*

Representando a maior por - - - - - x
A menor será - - - - - - - - - - - - - - $x - b$
E a soma de ambas - - - - - - - - - - - $2x - b$
Mas esta, conforme a questaõ, deve ser - - - a
Logo - - - - - - - - - - - - - - - - $2x - b = a$;
equaçaõ, de que se tira $x = \frac{a}{2} + \frac{b}{2}$.

Quer dizer, que para termos a maior, ajuntaremos a semisoma com a semidifferença, como se achou (Trig. 177) por outro modo.

Como a menor he $x - b$, será $\frac{a}{2} + \frac{b}{2} - b$, isto he, $\frac{a + b - 2b}{2} = \frac{a}{2} - \frac{b}{2}$. Logo, para termos a menor, da semisoma tiraremos a semidifferença (Trig. 177). Esta traducçaõ dos resultados finais deve ser hum dos principais cuidados do Analysta.

Fica pois manifesto, como representando em geral, isto he, por letras, as quantidades conhecidas, que entraõ nos problemas, descobrimos regras gerais para a resoluçaõ de todos os problemas da mesma especie.

Muitas vezes os problemas parecem differentes á primeira vista, mas depois de hum leve exame se acha, que naõ differem mais que no modo de se enunciarem. Por exemplo, se nos propuzerem:

Di-

Dividir o numero dado a *em duas partes, das quais huma exceda, ou ſeja excedida da outra na quantidade dada* b. He facil de ver, que eſte problema he o meſmo que o precedente.

Probl. II. *Dividir o numero 720 em tres partes tais, que a maior exceda a menor em 80, e a media exceda a menor em 40.*

Se me diſſeſsem qual era a parte menor, e a quizeſſe verificar, deveria ajuntar-lhe 40 para ter a ſegunda, e depois 80 para ter a maior; a ſoma das tres partes ſeria 720.

Chamemos pois á parte menor - - x
Logo a media he - - - - - - - - - - - $x+40$
E a maior - - - - - - - - - - - - - - $x+80$
Ora eſtas tres partes reunidas daõ - - $3x+120$
E como o problema exige que dem - - - - 720
Logo - - - - - - - - - - - - - $3x+120=720$

Applicando as regras precedentes, teremos $x=200$; logo a ſegunda parte he 240, e a maior 280: eſtas tres partes juntas fazem com effeito a ſoma de 720.

Tambem aqui he manifeſto, que ſe os numeros propoſtos, em lugar de ſerem 720, 40, e 80, foſſem outros quaisquer, a queſtaõ poderia reſolver-ſe do meſmo modo. Pelo que, para reſolver todos os problemas, nos quais ſe trate de dividir hum numero dado *a* em tres partes tais, que o exceſſo da maior ſobre a menor ſeja hum numero qualquer *b*, e o exceſſo da media ſobre a menor ſeja *c*, diſcorreremos do meſmo modo, como aqui ſe moſtra.

Seja

Seja a parte menor - - - - - - x
A media será - - - - - - - - $x+c$
E a maior - - - - - - - - - - - $x+b$
A soma dá - - - - - - - - - $3x+b+c$
Mas deve dar - - - - - - - - - - - - a
Logo será $3x+b+c=a$;

Donde se tira $x=\frac{a-b-c}{3}=\frac{a-(b+c)}{3}$

Quer dizer esta formula, que para ter a parte menor tomaremos o terço da differença entre o numero, que se quer dividir, e a soma dos dous excessos. Assim, havendo de repartir 642 em tres partes tais, que a media exceda a menor em 75, e a maior exceda a menor em 87; tiraremos $75+87$ ou 162 de 642, e teremos 480; cujo terço 160 he a parte menor, e conseguintemente as outras duas saõ $160+75$ ou 235, e $160+87$ ou 247.

Probl. III. *Repartir hum numero dado, por exemplo* 14250, *em tres partes tais, que sejaõ entre si como os numeros* 3, 5, *e* 11.

Se conhecessemos huma das partes, v. g. a primeira, para a verificarmos, buscariamos (Arith. 194) hum numero que fosse para ella :: 5 : 3, e este seria a segunda parte. Buscariamos tambem outro numero, que fosse para a mesma primeira parte :: 11 : 3; e este seria a terceira parte. A soma destas tres partes formaria 14250. Procedendo pois desta maneira

Seja a primeira parte - - - - - - x
Será (Arith. 194) a segunda - - $\frac{5x}{3}$
E a terceira - - - - - - - - - - - $\frac{11x}{3}$
A soma destas dá - - - - $x+\frac{16x}{3}$
Mas conforme a questaõ deve dar - - - - 14250
Logo, $x+\frac{16x}{3}=14250$ Esta

Esta equaçaõ se muda (64) em $19x = 42750$;
Logo (60) - - - $x = 2250$. A segunda parte será pois $\frac{5 \times 2250}{3}$ ou 3750, e a terceira 8250. Com effeito os tres numeros 2250, 3750, 8250, somados fazem 14250, e estaõ entre si como 3, 5, e 11; como he facil de ver, dividindo-os por 750, com o que (Arith. 170) naõ se altera a razaõ.

Se o numero que se quer dividir, em lugar de ser 14250, fosse em geral a, e os numeros proporcionais ás partes, em lugar de 3, 5, 11, fossem em geral m, n, p, imitariamos o que acabamos de fazer.

Assim, representando a primeira parte por - x

A segunda será - - - - - - - - - - - - - - - $\frac{nx}{m}$

E a terceira - - - - - - - - - - - - - - - - - - $\frac{px}{m}$

Cuja soma faz - - - - - - - - - - $x + \frac{nx + px}{m}$

Mas deve fazer - - - - - - - - - a

Logo $x + \frac{nx + px}{m} = a$.

Esta equaçaõ dá $mx + nx + px = ma$, e conseguintemente $x = \frac{ma}{m + n + p}$.

Para traduzirmos esta soluçaõ, e enunciarmos huma regra geral, note-se, que se tivessemos $m + n + p : m :: a :$; o quarto termo (Arith. 179) seria $\frac{am}{m + n + p}$; e como x he expresso nesta quantidade, segue-se, que para termos a primeira parte, calcularemos o quarto proporcional ao numero proposto, á primeira das partes dadas, e á soma de todas estas (Arith. 197).

Probl. IV. *Despachou-se de Dreux para Brest hum Postilhaõ, cuja velocidade he tal, que em huma* *ma hora anda duas leguas. Oito horas depois se despachou outro de Paris para Brest, cuja velocidade he de tres leguas por hora. Pergunta-se, onde se haõ de encontrar, sabendo-se tambem, que a distancia de Paris a Dreux he de 17 leguas.*

Se me dissessem, quantas leguas devia andar o segundo Postilhaõ para se encontrar com o primeiro, eis-aqui como verificaria este numero. Buscaria que jornada teria feito o primeiro no tempo, em que o segundo tinha feito a sua, calculando o quarto termo desta proporçaõ $3 : 2 ::$ o numero de leguas corridas pelo segundo he para o numero de leguas, que o primeiro terá andado no mesmo tempo. A este quarto termo ajuntaria o numero de leguas, que o primeiro Postilhaõ devia ter andado nas 8 horas de antecipaçaõ da partida, como tambem as 17 leguas do intervallo de Paris a Dreux, que elle tinha igualmente de avanço; a soma daria o numero de leguas corridas pelo segundo. Procedendo pois desta maneira

Seja o numero de leguas corridas pelo segundo x

No mesmo tempo o primeiro andará - - - $\frac{2}{3} x$

E nas 8^h de avanço - - - - - - - - - - - - - 16

E pela distancia de Paris a Dreux - - - - 17

Estas tres quantidades fazem a soma $\frac{2}{3} x + 33$

isto he, o numero de leguas que deverá andar o segundo, para se encontrar com o primeiro

Logo $\frac{2}{3} x + 33 = x$, e conseguintemente $x = 99$; quer dizer, que os dous Postilhões deveraõ encontrar-se a 99 leguas de Paris.

Com effeito, no tempo em que o segundo andar 99 leguas, o primeiro andará 66, estas juntatamente com as 16 leguas de adiantamento em razaõ das 8 horas, e com as 17 leguas de avanço, por partir de Dreux, fazem a ſoma de 99: logo eſtaraõ ambos ao meſmo tempo no meſmo lugar.

Em geral, ſeja o intervallo dos lugares da partida $= a$, a differença entre os tempos da partida $= b$, a velocidade do primeiro Poſtilhaõ $= c$, a do ſegundo $= d$, o eſpaço que deve andar o ſegundo para ſe encontrar com o primeiro $= x$: diſcorrendo, como havemos feito precedentemente, teremos $x = \frac{cx}{d} + bc + a$, donde ſe tira $x = \frac{bcd + ad}{d - c}$, que dá a ſoluçaõ de todos os problemas deſta eſpecie, pelo menos em quanto ſe ſuppõe, que os dous Poſtilhões vaõ para a meſma parte, e que a partida do que anda menos precede á do mais veloz.

Para moſtrarmos o uſo deſta formula, tornemos ao exemplo precedente. Como neſte caſo $a = 17^l$, $b = 8^h$, $c = 2^l$, $d = 3^l$, o valor geral de x ſe torna em $x = \frac{17.3 + 8.2.3}{3 - 2} = 51 + 48 = 99^l$, como acima.

O uſo pois das ſoluções gerais he tal, que ſe ſubſtituirmos em lugar das letras os numeros, que ellas repreſentaõ, e fizermos as operações indicadas pela diſpoſiçaõ e ſinais das meſmas letras, acharemos a reſoluçaõ de todos os problemas particulares da meſma eſpecie.

Por exemplo, ſe nos propuzeſſem eſte problema: *A agulha das horas de hum relogio correſponde a $17'$, e a dos minutos a $24'$, iſto he, ſaõ $3^h\ 24'$; pergunta-ſe, quando eſtaraõ as duas agulhas huma ſobre a outra.*

Como as duas agulhas ſe movem ao meſmo tempo, a quantidade b he cifra neſte caſo; a ou o eſpapaço que a agulha dos minutos deve correr desde a vigesima quarta divisaõ do quadrante até a decima septima, he igual a 53 divisões; $c = 5$; $d = 60$. Temos pois $x = \frac{53 . 60}{60 - 5} = 57 \frac{9}{11}$, isto he, deverá a agulha dos minutos correr ainda 57 divisões e $\frac{9}{11}$; e como ella correspondia á vigesima quarta divisaõ, deverá corresponder a 81 divisões e $\frac{9}{11}$, ou, pois que huma circumferencia consta de 60 divisões, as duas agulhas estaraõ huma sobre a outra aos $21' \frac{9}{11}$ da hora seguinte, isto he, ás $4^h 21' \frac{9}{11}$.

Alem da vantagem exposta das soluções litteraes, ha outra, a qual consiste em que muitas vezes as formulas, precedendo certas preparações, admittem o enunciarem-se de hum modo simples, e facil de se conservar na memoria. Por exemplo, a formula ultimamente achada $x = \frac{ad + bcd}{d - c}$, na qual a quantidade d he factor commum dos dous termos do numerador, póde escrever-se por este modo, $x = \frac{(a + bc) d}{d - c}$, onde se vê, que x he o quarto termo da proporçaõ, cujos tres primeiros seriaõ $d - c : d :: a + bc$. Porem $d - c$ denota a differença das velocidades dos dous Postilhões; d denota a velocidade do segundo; e $a + bc$ compõe-se do intervallo a dos dous lugares da partida, e da quantidade bc, que exprime o espaço corrido pelo primeiro Postilhaõ no tempo que tem de avanço, de maneira que $a + bc$ representa a jornada que tem feito o primeiro até o instante, em que o ſegundo começa a ſua, ou todo o avanço que o primeiro ganhou em raſaõ de partir mais cedo, e de hum lugar mais adiantado. Logo a reſoluçaõ do problema pode reduzir-ſe a eſte enunciado: Havendo multiplicado a velocidade do primeiro Poſtilhaõ pelo tempo que tem de avanço, ſome-ſe o producto com o intervallo dos lugares da partida; e buſcando depois o quarto proporcional á differença das velocidades, á velocidade do ſegundo, e á ſoma achada, elle determinará o lugar do encontro. Pelo que no noſſo primeiro exemplo, tendo o primeiro Poſtilhaõ 8^h de avanço, e 2^l de velocidade, ſomaremos 16^l com 17^l intervallo dos dous lugares, o que dá 33; e calculando o quarto termo da proporçaõ $3 - 2$ ou $1 : 3 :: 33 :$, acharemos 99, como acima.

Ultimamente, ainda que entrem fracções, a regra ſempre he a meſma. Por exemplo, ſe o primeiro Poſtilhaõ andaſſe 7^l em 4^h, o ſegundo 13^l em 5^h; ſe o primeiro ſe antecipaſſe 15^h, e o intervallo dos dous lugares da partida foſſe de 42^l; diriamos: andando o primeiro 7^l em 4^h, vem a andar $\frac{7}{4}$ de legua por hora, e por tanto eſta he a velocidade do primeiro; do meſmo modo a velocidade do ſegundo he de $\frac{13}{5}$ de legua por hora. Aſſim multiplicando $\frac{7}{4}$ por 15, e ſomando o producto $\frac{105}{4}$ com 42, teremos $\frac{273}{4}$; calculando pois o quarto termo da proporçaõ $\frac{13}{5} - \frac{7}{4} : \frac{13}{5} :: \frac{273}{4} :$; eſte quarto termo $\dfrac{\frac{13}{5} \times \frac{273}{4}}{\frac{13}{5} - \frac{7}{4}}$, ou $\dfrac{\frac{3549}{20}}{\frac{17}{20}}$, ou $\frac{3549}{17}$, ou $208\frac{13}{17}$

he

he o numero de leguas, que o ſegundo Poſtilhaõ deverá andar.

Reflexões ſobre as quantidades poſitivas, e negativas.

69 AS formulas gerais ſervem naõ ſómente para reſolver todos os problemas analagos por ſimples ſubſtituições, mas tambem para achar em muitos caſos a ſoluçaõ de outros, cujas condições ſejaõ em tudo oppoſtas áquellas, a que ſe havia ſatisfeito primeiramente; e para iſſo baſta ordinariamente huma ſimples mudança de $+$ em $-$, ou de $-$ em $+$ nos ſinais das quantidades. Mas antes de moſtrarmos eſte novo uſo dos ſinais, conſideremo-los em outro ponto de viſta.

As letras naõ repreſentaõ mais que os valores abſolutos das quantidades. Os ſinais $+$ e $-$ naõ tem repreſentado até aqui mais do que as operações da addiçaõ e ſubtracçaõ; porem podem repreſentar tambem em muitos caſos a exiſtencia relativa de humas quantidades a reſpeito de outras.

Huma quantidade póde conſiderar-ſe em dous ſentidos oppoſtos, ou como capaz de augmentar outra quantidade, ou como capaz de a diminuir; mas em quanto ella ſe repreſenta meramente por huma letra, ou por hum numero, naõ ſe ſaberá em qual dos dous ſentidos ſe conſidera. Por exemplo, ſe hum homem tiver tantos bens como dividas, o meſmo numero póde ſervir para exprimir a quantidade numerica de ambas as couſas, porem eſte numero naõ moſtrará a differença que ha entre ellas. O meio mais natural de a declarar he deſigna-las por hum ſinal, que indique o effeito que humas pódem produzir ſobre as outras; e como o effeito das dividas he diminuir os bens, que cada hum poſſue, fica muito natural deſignar aquellas, applicando-lhes o ſinal —.

Do meſmo modo, ſe conſiderarmos huma linha recta (*Fig.* I) como gerada pelo movimento de hum ponto *A* na direcçaõ perpendicular á linha *BC*, he claro, que ainda que ſe repreſente por *a* o eſpaço *AD* ou *AE*, que elle tem corrido, naõ ſe determina com iſſo abſolutamente a ſua ſituaçaõ, pois que o ponto tanto póde mover-ſe de *A* para *D*, como de *A* para *E*. O meio de a fixar he indicar por algum ſinal, ſe a quantidade *a* eſtá á direita ou á eſquerda, e para iſſo ſaõ muito proprios os ſinais +, e —; por quanto referindo o movimento do ponto *A* a outro ponto *L* conhecido, e conſiderado como termo fixo, quando o ponto *A* ſe move para *D*, a linha que deſcreve tende a augmentar *LA*, e quando ſe move para *E*, a linha que deſcreve tende a diminuir *LA*, e conſeguintemente he natural o repreſentar *AD* por $+a$, ou ſimpleſmente por *a*, e *AE* por $-a$. Seria o contrario, ſe reportaſſemos o movimento do ponto *A* ao ponto *O*.

Tem pois as quantidades negativas huma exiſtencia taõ real como as poſitivas; a unica differença, que ha entre ellas, he o tomarem-ſe no calculo em ſentido contrario, e por tanto as regras, que havemos dado para as differentes operações ſobre as quantidades, ſaõ as meſmas, ſeja qual for o ponto de viſta, em que eſtas ſe conſideraõ. Tanto humas como outras pódem achar-ſe, e muitas vezes ſe achaõ miſturadas juntamente no meſmo calculo. Acontece iſto, naõ ſó porque certas operações

ções conduzem a tirar certas quantidades de outras, como havemos visto; mas tambem porque muitas vezes no calculo ha necessidade de exprimir as differentes accepções, em que se tomaõ as quantidades.

70 Pelo que, se na resoluçaõ de hum problema o valor da incognita sahir negativo; por exemplo, se chegarmos a hum resultado como $x = -3$; concluiremos que a quantidade designada por x naõ tem as propriedades, que lhe attribuimos, ou suppuzemos no calculo, mas outras em tudo contrarias. Propondo-se, por exemplo, este problema: *Achar hum numero, que sendo junto a* 15 *dê* 10, o qual he evidentemente impossivel; se representarmos o numero buscado por x, teremos $x + 15 = 10$, e conseguintemente $x = -5$. Esta ultima conclusaõ pois nos mostra, que x, o qual se tinha considerado como devendo ajuntar-se a 15 para formar 10, deve pelo contrario ser tirado. Deste modo toda a soluçaõ negativa indica alguma supposiçaõ falsa no enunciado do problema; mas indica ao mesmo tempo a correcçaõ, mostrando que a quantidade procurada se deve tomar em hum sentido totalmente opposto áquelle, em que d'antes havia sido tomada.

71 Concluamos pois, que havendo resolvido hum problema, no qual algumas quantidades se tenhaõ tomado em hum sentido, se o quizermos resolver, tomando as mesmas quantidades em sentido totalmente opposto, bastará mudar os sinais, que actualmente tem as mesmas quantidades. Por exemplo, no problema quarto, resolvido geralmente para o caso em que os Postilhões caminhassem para a mesma parte, se quizermos ter a reso-

lu-

luçaõ de todos os problemas, que ſe pódem propôr no caſo em que elles venhaõ de partes oppoſtas a encontrar-ſe hum com o outro, mudaremos o ſinal de c no valor achado $x = \frac{ad + bcd}{d - c}$. Com effeito, neſte caſo o primeiro Poſtilhão, como em lugar de ſe apartar ſe avizinha do ſegundo, diminue a jornada que eſte devia fazer, e diminue-a em razaõ da ſua velocidade c, ou do eſpaço que corre em huma unidade de tempo; devemos pois exprimir, que c em lugar de augmentar diminue, iſto he, eſcrever $-c$ em lugar de $+c$. Eſta mudança dá $x = \frac{ad - bcd}{d + c}$; porque $+bcd = +bd(+c)$; logo, mudando o ſinal, teremos $+bd(-c) = -bcd$.

Confirmemos tudo iſto com hum exemplo. Supponhamos que dous Poſtilhões vem de partes contrarias, e ſahem de dous lugares, cujo intervallo he de 100 leguas: o primeiro parte 7 horas antes do ſegundo, e tem velocidade de 2^l por hora; o ſegundo anda 3^l por hora. Seja x a jornada, que eſte deve fazer para ſe encontrar com o primeiro. He claro, que x ſerá igual á differença entre a diſtancia total, e o eſpaço corrido pelo primeiro; e como eſte eſpaço ſe compõe do que elle póde andar nas ſete horas, iſto he, de 14^l, e do que tiver andado em quanto o ſegundo caminhar, iſto he, de $\frac{2}{3}x$; teremos $x = 100 - 14 - \frac{2}{3}x$, e conſeguintemente $x = \frac{258}{5} = 51\frac{3}{5}$. Ora ſe na formula $x = \frac{ad - bcd}{d + c}$, a qual, como diſſemos, pertence a eſte caſo, ſubſtituirmos 100 por a, 7 por b, 3 por d, e 2 por c, teremos do mesmo modo $x = 51\frac{3}{5}$.

A' medida que nos formos adiantando, teremos o cuidado de fixar cada vez mais a idêa, que se deve fazer das quantidades negativas.

72 Como convem muito adquirir facilidade de pôr os problemas em equaçaõ, ajuntamos aqui alguns simples para exercicio dos principiantes, contentando-nos com dar os resultados, os quais serviraõ para confirmar as suas tentativas. Depois de os terem resolvido nos numeros em que saõ propostos, deveraõ substituir letras aos numeros, e exercitar-se na resoluçaõ litteral: imitando assim as soluções particulares, se adquire a facilidade de genaralizar, e estender as idêas.

Achar hum numero, que sendo successivamente junto a 5, *e a* 12, *dê duas somas, as quais sejaõ entre si como* 3 *para* 4 . . . . . Resp. 16.

Achar hum numero tal, que reunindo a sua ametade, terço, e $\frac{2}{5}$, *se forme huma soma, a qual tenha* 7 *de excesso sobre o numero procurado* . . Resp. 30.

Andaõ trabalhando tres officiais, dos quais o primeiro faz 5 *braças de obra por dia, o segundo* 7, *e o terceiro* 8: *em que tempo faraõ* 100 *braças, trabalhando juntamente todos tres?* . . . Resp. 5^d.

Ajustou-se hum official preguiçozo a razaõ de 24 *soldos por cada dia em que trabalhasse; mas com condiçaõ de se lhe descontarem* 6 *soldos por cada dia, em que naõ trabalhasse. Passados* 30 *dias fez-se-lhe a conta, e achou-se que nada tinha de receber. Quantos dias trabalhou?* . . . . , Resp. 6^d.

Hum homem comprou hum cavallo, que vendeo com 100 *libras de ganho: sabe-se que o lucro foi de* 10

por

por cento. Por quanto o comprou? . . Resp. por 900^l.

Pagou-se certa quantia em 15 pagamentos, que se fizeraõ sempre progressivamente com augmento da mesma quantidade; o primeiro pagamento foi de 7 lib., e o ultimo de 37. Quanto era o augmento de cada hum? Resp. de $2\frac{1}{7}$.

Temos agua do mar, que em 32 libras contem huma de sal. Que porçaõ de agua doce se deverá ajuntar-lhe, para que em 32 libras de misto naõ haja mais que duas onças de sal? . . . . Resp. 224 *libras.*

Das Equações lineares a muitas incognitas.

73 QUalquer que seja o numero das incognitas, o methodo de pôr o problema em equaçaõ (67) he sempre o mesmo. Mas em geral, he necessario formar tantas equações, como permittirem as condições. Se todas estas forem distinctas, e independentes humas das outras, e se alem disso cada huma se podér exprimir por huma equaçaõ, o problema naõ poderá ter mais que huma soluçaõ, no caso de serem as equações todas do primeiro grão, e de serem ao mesmo tempo tantas as equações quantas as incognitas. Se porem alguma das condições se achar implicita ou explicitamente comprehendida em alguma das outras, ou se o numero das condições for menor que o numero das incognitas; teremos menos equações que incognitas, e por tanto a questaõ poderá ter huma infinidade de soluções, excepto quando o numero destas for limitado por alguma condiçaõ particular, que naõ possa exprimir-se por equaçaõ. De tudo isto daremos exemplos. Sup-

Suppondo primeiramente duas equações, e duas incognitas, a regra que se deve ajuntar ás que havemos dado ácerca das equações a huma incognita, he a seguinte.

74 *Tome-se em cada equaçaõ o valor de huma mesma incognita, e igualando os dous valores, teremos huma equaçaõ á segunda incognita. Sendo achado o valor desta pelas regras precedentes, faça-se substituiçaõ delle em qualquer dos dous valores, que se tomaraõ pela primeira operaçaõ, e assim determinaremos a segunda incognita.*

Exemplo I. Tendo as duas equações $2x + y = 24$, $5x + 3y = 65$, tomaremos em ambas o valor de x, e acharemos na primeira $x = \frac{24 - y}{2}$, e na segunda $x = \frac{65 - 3y}{5}$. Igualando estes dous valores, teremos $\frac{24 - y}{2} = \frac{65 - 3y}{5}$. Esta equaçaõ naõ inclue mais do que a segunda incognita y, e dá $y = 10$.

Para termos x, substituiremos em lugar de y o seu valor 10 no primeiro valor de x, que he o mais simples, e acharemos $x = 7$.

75 Exemplo II. Se tivermos $\frac{4x}{5} - \frac{5y}{6} = 2$, e $\frac{2}{3}x + \frac{3}{4}y = 19$; acharemos primeiramente $x = \frac{60 + 25y}{24}$, e $x = \frac{228 - 9y}{8}$. Logo $\frac{60 + 25y}{3} = 228 - 9y$, e conseguintemente $y = \frac{624}{52} = 12$.

Substituindo este valor na segunda expressaõ de x, teremos $x = \frac{120}{8} = 15$.

76 Exemplo III. Se forem propostas as duas equa-

equações $\frac{2}{5}x = \frac{1}{4}x + \frac{3}{7}y - 9$, e $\frac{4}{5}x - \frac{2}{7}y = \frac{1}{2}y - 6$; deduziremos $x = \frac{20y - 420}{7} = \frac{55y - 420}{56}$, ou $4y - 84 = \frac{11y - 84}{8}$, da qual ſe tira $y = \frac{588}{21} = 28$. Subſtituindo eſte valor na equaçaõ $x = \frac{20y - 420}{7}$, teremos $x = 20$.

77 Exemplo IV. Em geral, as duas equações $ax + by = c$, e $dx + fy = e$, em que a, b, c, d, e, f denotaõ quantidades conhecidas, poſitivas, ou negativas, daõ $x = \frac{fc - be}{af - bd}$, e $y = \frac{ae - cd}{af - bd}$.

78 Quando as duas incognitas naõ ſe acharem ambas em cada huma das equações, o calculo naõ differirá dos precedentes, ſenaõ em ſer mais ſimples.

Por exemplo, ſe tivermos $5ax = 3b$, e $cx + dy = e$, a primeira dará $x = \frac{3b}{5a}$, e a ſegunda $x = \frac{e - dy}{c}$: logo $\frac{3b}{5a} = \frac{e - dy}{c}$, donde ſe tira $y = \frac{5ae - 3bc}{5ad}$.

Das Equações lineares a tres, e mais incognitas.

79 DO que fica dito ſe deduz facilmente o methodo de reſolver as equações, quando for mais conſideravel o numero das incognitas, ſuppondo que ha igual numero de humas e outras.

Se tivermos tres equações, *tome-ſe em cada hu-*

huma o valor de huma mesma incognita, e iguale-se o primeiro ao segundo, e o primeiro ao terceiro; ou o primeiro ao segundo, e o segundo ao terceiro, e assim se reduzirá este caso ao precedente (74).

Sejaõ, por exemplo, as tres equações,

$$3x + 5y + 7z = 179$$
$$8x + 3y - 2z = 64$$
$$5x - y + 3z = 75$$

Da primeira tiro $x = \frac{179 - 5y - 7z}{3}$.

Da segunda . . $x = \frac{64 - 3y + 2z}{8}$.

Da terceira . . . $x = \frac{75 + y - 3z}{5}$.

Igualando o primeiro ao segundo, tenho - - - $\frac{179 - 5y - 7z}{3} = \frac{64 - 3y + 2z}{8}$.

Igualando o primeiro ao terceiro, tenho - - - $\frac{179 - 5y - 7z}{3} = \frac{75 + y - 3z}{5}$.

Observando agora nestas duas equações a regra dada (74), acharemos $z = 15$, e $y = 10$.

Para ter x, substituaõ-se estes valores em huma das suas expressões, e teremos $x = 8$.

80 O calculo será mais simples, quando as incognitas naõ entrarem todas juntamente em cada huma das equações.

Sejaõ, por exemplo, as tres equações, $5x + 3y = 65$, $2y - z = 11$, $3x + 4z = 57$.

A primeira e a terceira daõ $x = \frac{65 - 3y}{5} = \frac{57 - 4z}{3}$, e combinando esta ultima com a segunda, acharemos $z = 9$, $y = 10$, $x = 7$.

81 Sendo maior o numero das equações, *tome-se em cada equaçaõ o valor de huma mesma incogni-*

gnita, iguale-ſe hum deſtes valores a cada hum dos outros, e haverá de menos huma equaçaõ e huma incognita. Tratem-ſe eſtas novas equações como as primeiras, e haverá tambem de menos huma equaçaõ e huma incognita. Continue-ſe aſſim por diante, até que finalmente ſe chegue a naõ ter mais que huma incognita.

82 Tambem podemos determinar os valores das incognitas pelo methodo ſeguinte, que he util em muitas occaſiões.

Sejaõ as duas equações $3x + 4y = 81$, e $3x - 4y = 9$. Se tirarmos a ſegunda da primeira, teremos $8y = 72$, e conſeguintemente $y = 9$: ſe pelo contrario as ajuntarmos, teremos $6x = 90$, e conſeguintemente $x = 15$. He pois manifeſto, que quando o coefficiente de huma das incognitas he o meſmo em cada huma das duas equações, eſtas muito facilmente por meio da addiçaõ, ou da ſubtracçaõ ſe reduzem a naõ terem mais que huma incognita.

83 Pode-ſe dar ſempre o meſmo coefficiente á meſma incognita, multiplicando huma das duas equações por hum numero conveniente, o qual ſe achará da maneira ſeguinte.

Sejaõ as duas equações $4x + 3y = 65$, e $5x + 8y = 111$. Repreſentando por m o numero de que ſe trata, multiplique-ſe por elle huma das duas equações, a ſegunda, por exemplo, e teremos $5mx + 8my = 111m$. Ajuntando eſta com a primeira, acharemos $(4 + 5m)x + (3 + 8m)y = 65 + 111m$.

Agora para eliminar x, ſupporemos que o numero m he tal, que $4 + 5m = 0$, donde ſe tira $m = -\frac{4}{5}$. Eſta hypotheſe reduz a equaçaõ a

(3

$(3+8m)y=65+111m$, que dá $y=\frac{65+111m}{3+8m}$ $=\frac{65-\frac{444}{5}}{3-\frac{32}{5}}=7$. O mesmo aconteceria, se multiplicassemos a primeira por 5, coefficiente de x na segunda, e esta por 4, coefficiente de x na primeira, e tirassemos o segundo producto do primeiro. Se quizessemos porem eliminar y, supporiamos $3+8m=0$, que dá $m=-\frac{3}{8}$; e conseguintemente a equaçaõ se reduziria a $(4+5m)x=65+111m$, donde se tira $x=\frac{65+111m}{4+5m}=\frac{65-\frac{333}{8}}{4-\frac{15}{8}}=11$.

84 Se tivermos tres equacões, e tres incognitas; multiplicaremos a segunda por hum numero m, e a terceira por outro n; e ajuntando os productos com a primeira, supporemos o coefficiente de cada huma de duas das incognitas x, y, e z igual a nada, e teremos assim duas equações para determinar m e n, as quais se trataraõ como no caso precedente.

Tomemos para exemplo as tres equações

$$\begin{aligned} 3x+5y+7z&=179\\ 8x+3y-2z&=64\\ 5x-y+3z&=75 \end{aligned}$$

Multiplicando a segunda por m, a terceira por n, e ajuntando os productos com a primeira, teremos $(3+8m+5n)x+(5+3m-n)y+(7-2m+3n)z=179+64m+75n$.

Para achar o valor de z, supporemos $3+8m+5n=0$, e $5+3m-n=0$; e a equaçaõ se re-

reduzirá a $(7 - 2m + 3n)z = 179 + 64m + 75n$, donde ſe tira $z = \frac{179 + 64m + 75n}{7 - 2m + 3n}$.

Determinemos agora m e n por meio das duas equações hypotheticas, multiplicando, como no caſo precedente, a ſegunda por p, e ajuntando o producto com a primeira. Eſta operaçaõ dará $3 + 5p + (8 + 3p)m + (5 - p)n = 0$, a qual, ſuppondo $8 + 3p = 0$, ou $p = -\frac{8}{3}$ afim de ter n, ſe reduzirá a $3 + 5p + (5 - p)n = 0$; logo $n = \frac{-3 - 5p}{5 - p} = \frac{31}{23}$. Semelhantemente acharemos $m = -\frac{28}{23}$. Subſtituindo pois eſtes valores na expreſſaõ de z, teremos $z = 15$.

Pelo que fica dito ſe percebe o modo, porque deveriamos praticar, ſe em lugar de z quizeſſemos ter x ou y. Porem, havendo determinado huma das incognitas, he eſcuſado começar de novo hum calculo ſemelhante para cada huma das outras; baſta ſubſtituir o valor achado em todas as equações propoſtas menos huma, e aſſim ſe determinaõ os outros valores como no caſo de haver huma equaçaõ de menos. No noſſo exemplo, tendo achado $z = 15$, ſubſtituiremos eſte valor tanto na ſegunda equaçaõ como na terceira, e entaõ por meio de duas equações a duas incognitas acharemos $y = 10$, e $x = 8$

85 Por qualquer dos dous methodos expóſtos ſe pódem deduzir formulas gerais, que repreſentem os valores das incognitas em todos os caſos imaginaveis. Aſſim, exprimindo geralmente duas equações do primeiro gráo a duas incognitas por $ax + by + c = 0$, e $a'x + b'y + c' = 0$, como he

he ſempre poſſivel, tranſpondo todos os termos para hum membro; acharemos . . . .

$$x = \frac{bc' - b'c}{ab' - a'b},\ y = \frac{a'c - ac'}{ab' - a'b}.$$

Do meſmo modo, repreſentando tres equaçóes do primeiro gráo a tres incognitas por $ax + by + cz + d = 0$, $a'x + b'y + c'z + d' = 0$, $a''x + b''y + c''z + d'' = 0$, acharemos que os valores de x, y, e z ſe exprimem da maneira ſeguinte.

$$z = \frac{-ab'd'' + a'bd'' - a''bd' + ab''d' - a'b''d + a''b'd}{+ab'c'' - a'bc'' + a''bc' - ab''c' + a'b''c - a''b'c}$$

$$y = \frac{-ad'c'' + a'dc'' - a''dc' + ac'd'' - a'cd'' + a''cd'}{+ab'c'' - a'bc'' + a''bc' - ab''c' + a'b''c - a''b'c}$$

$$x = \frac{-b'c''d + bc''d' - bc'd'' + b''c'd - b''cd' + b'cd''}{+ab'c'' - a'bc'' + a''bc' - ab''c' + a'b''c - a''b'c}$$

Para 4 equaçóes, e 4 incognitas achariamos quatro fracçóes, as quais teriaõ 24, iſto he, 1. 2. 3. 4 termos no numerador, e outros tantos no denominador. Para 5 incognitas ſe achariaõ 120, ou 1. 2. 3. 4. 5 termos, 720 ou 1. 2. 3. 4. 5. 6 para 6; e aſſim por diante.

Podemos porem abbreviar hum calculo taõ longo, reflectindo na fórma dos valores achados, e nos que ſe achariaõ do meſmo modo para quatro equaçóes, e quatro incognitas. Porque 1.° ſeja qual for o numero das incognitas x, y, e z, os ſeus valores tem todos o meſmo denominador.

2.° O numerador de qualquer dos valores ſe fórma do ſeu denominador, trocando neſte o coefficiente da incognita reſpectiva pela ultima letra d da equaçaõ, e mudando os ſinais. Por exemplo, ſe no denominador de x ultimamente achado mudarmos

mos a em d, a' em d', a'' em d'', e fizermos mudança dos finais, teremos o numerador.

Para achar a regra que dá o denominador commum, noto 1.º que no caso de huma equaçaõ, e huma incognita, como em $ax + b = 0$, o denominador he a. 2.º No caso de duas equações, e duas incognitas, he $ab' - a'b$. 3.º No caso de tres equações, e tres incognitas, he $(ab' - a'b)\, c'' + (a''b - ab'')\, c' + (a'b'' - a''b')\, c$.

Noto mais, que o denominador $ab' - a'b$ no caso de 2 incognitas, se fórma de a denominador no caso de huma incognita, multiplicando a por b', depois mudando em ab', $'$ em o, e o em $'$ (por o entendemos o accento da letra naõ accentuada) e ultimamente fazendo mudança de $+$ em $-$.

Semelhantemente, o denominador no caso de 3 incognitas se fórma do denominador no caso de 2 incognitas: 1.º multiplicando este por c'': 2.º mudando $''$ em $'$, e $'$ em $''$, e tambem os finais: 3.º mudando neste ultimo resultado $'$ em o, e o em $'$, e os finais.

Logo o denominador para 4 incognitas se achará 1.º multiplicando o que convem a 3 por d''': 2.º mudando $'''$ em $''$, e $''$ em $'''$, e os finais: 3.º mudando neste segundo resultado $''$ em $'$, e $'$ em $''$, e os finais: 4.º mudando neste terceiro $'$ em o, o em $'$, e os finais. Bem se vê o que se devia fazer no caso de ser maior o numero das incognitas.

Temos pois huma regra geral, por meio da qual se podem determinar separadamente os valores das incognitas nas equações do primeiro gráo.

E ainda que se devaõ calcular todos os denominadores, que pertencem a todas as equações de

me-

menor numero de incognitas, com tudo a regra naõ conduz a calculos ſuperfluos; tudo o que por ella ſe calcula, entra neceſſariamente na quantidade, que ſe buſca. Veja-ſe a *Theoria geral das Equações*, que publicamos em 1779.

Applicaçaõ á reſoluçaõ de alguns Problemas.

86 PRobl. I. *Hum homem tem duas eſpecies de moeda; 7 peças da eſpecie de maior valor com 12 da ſegunda valem 288 libras; e 12 da primeira eſpecie com 7 da ſegunda fazem 358^l. Quanto vale cada eſpecie de moeda?*

Se o ſoubeſſemos, multiplicando o valor de huma peça da primeira eſpecie por 7, e o de huma peça da ſegunda por 12, a ſoma dos productos daria 288 libras. Do meſmo modo, multiplicando o valor de huma peça da primeira eſpecie por 12, e da ſegunda por 7, a ſoma dos productos daria 358^l.

Iſto poſto, ſeja o numero de libras, ou o valor de huma peça da primeira eſpecie $= x$, e o da ſegunda $= y$. Logo $7x + 12y = 288$, e $12x + 7y = 358$.

Para acharmos agora x e y, tomaremos em ambas as equações o valor de x, e igualando os dous valores teremos $x = \frac{288 - 12y}{7} = \frac{358 - 7y}{12}$; donde ſe tira $y = 10$, e conſeguintemente $x = 24$: logo as maiores peças eraõ de 24^l, e as menores de 10^l. Com effeito, 7 peças de 24^l valem 168^l, e eſtas com 12 de 10^l, ou com 120^l fazem a ſoma de 288^l. De mais, 12 peças de 24^l, que fazem 288^l, com 7 de 10^l valem 358^l.

Probl. II. *Fes-se hum misto de ouro e prata, cujo volume he de 12 pollegadas cubicas, e o pezo de 100 onças. A pollegada cubica de ouro peza 12 onças $\frac{2}{3}$, e huma pollegada cubica de prata peza $6\frac{8}{9}$. Pergunta-se, que quantidades de ouro e prata entráraõ nesta liga.*

Seja x o numero de pollegadas cubicas de ouro, e y o numero de pollegadas cubicas de prata; teremos $x + y = 12$. Por outra parte, pezando cada pollegada cubica de ouro $\frac{38}{3}$ de onça, o numero x de pollegadas cubicas pezará $\frac{38x}{3}$. Pela mesma razaõ, y de pollegadas cubicas de prata pezará $\frac{62y}{9}$. Logo o ouro e a prata pezaraõ juntamente $\frac{38x}{3} + \frac{62y}{9}$, e conseguintemente teremos $\frac{38x}{3} + \frac{62y}{9} = 100$.

Destas duas equações se tira $x = 12 - y = \frac{450 - 31y}{57}$; logo $57(12 - y) = 450 - 31y$, que dá $y = 9$, e conseguintemente $x = 3$, isto he, misturaraõ-se 3 pollegadas cubicas de ouro com 9 de prata. Com effeito, $9 + 3 = 12$, e $38 + 62 = 100$.

Se as duas materias que se misturaraõ tivessem gravidades especificas differentes das suppostas (por gravidade especifica entendemos o pezo de hum determinado volume), e se tanto o pezo total do misto, como o seu volume fossem outros quaesquer; o methodo para achar as quantidades de cada especie de materia, naõ deixaria porisso de ser o mesmo. Assim, para incluir todas as soluções dos problemas deste genero em huma unica, seja

A

A quantidade da primeira materia - - - x
A da segunda - - - - - - - - - - - - - y
A do composto - - - - - - - - - - - - a
Reportando-se a, x e y à mesma unidade de volume, por exemplo, a pollegadas cubicas.
O pezo total do misto - - - - - - - - - b
A gravidade especifica, ou o pezo da unidade adoptada de volume, da primeira materia - c
A da segunda - - - - - - - - - - - - - d
Exprimindo-se b, c, d na mesma unidade de pezo; v. g. em onças.
Isto posto; teremos $x + y = a$, e $cx + dy = b$; logo $x = \frac{b - ad}{c - d}$, e $y = \frac{ac - b}{c - d}$.

Estes valores daõ huma regra susceptivel de huma enunciaçaõ commoda. Porque, sendo $b - ad = a\left(\frac{b}{a} - d\right)$, e $ac - b = a\left(c - \frac{b}{a}\right)$, as nossas formulas podem reduzir-se a - - - -

$$x = \frac{a\left(\frac{b}{a} - d\right)}{c - d};\ \text{e}\ y = \frac{a\left(c - \frac{b}{a}\right)}{c - d};$$ isto he, ás duas analogias.

$$c - d : \frac{b}{a} - d :: a : x$$

$$c - d : c - \frac{b}{a} :: a : y.$$

E como $\frac{b}{a}$ he o pezo da unidade de volume do composto, ou a sua gravidade especifica, podemos enunciar a regra geral para resolver todos os problemas desta especie da maneira seguinte.

Como a differença entre as gravidades especificas dos simplices para a differença entre as gravidades especificas do composto e do simples mais leve, assim a

 quan-

quantidade do composto para a parte que entrou do simples mais pezado.

Como a differença entre as gravidades especificas dos simplices para a differença entre as gravidades especificas do composto e do simples mais pezado, assim a quantidade do composto para a parte que entrou do simples mais leve.

Esta regra he a mesma a que (Arith. 200) demos o nome de *Regra de Liga Inversa*, cuja demonstração reservamos para esta parte.

Ao mesmo problema se podem reduzir infinitos outros, que á primeira vista naõ parecem da mesma especie. Por exemplo este: *Fazer de 522 libras 42 peças, humas de 24^l, e outras de 6^l*; porque vem a ser o mesmo que o de *hum misto*, cuja quantidade (a) he 42, e o pezo (b) 522, sendo a gravidade especifica (c) do primeiro simples $= 24$, e a (d) do segundo $= 6$. Conforme a regra, acharemos que saõ necessarias 15 peças de 24^l, e 27 de 6^l.

A mesma regra serviria tambem para resolver o problema seguinte. *Pezando hum pé cubico de agua do mar 74^l, e hum de agua da chuva 70^l; quanto se deve misturar de huma e outra, para fazer agua que peze 73^l por pé cubico?*

Daqui se vê, quanto he util, como ja dissemos, o representar em geral as quantidades dadas que entraõ nos problemas, e interpretar ou traduzir os resultados algebricos das soluções.

Probl. III. *Temos tres barras, em cada huma das quaes entra ouro, prata, e cobre. A liga da primeira he tal, que em 16 onças ha 7 de ouro, 8 de prata, e 1 de cobre. Na segunda em 16 onças ha 5 de ouro, 7 de prata, e 4 de cobre. Na terceira em 16 onças ha 2 de ouro, 9 de prata, e 5 de cobre.*

Per-

Pertende-se compôr huma quarta barra, com differentes porções destas tres ligas, tal que em 16 onças entrem 4 onças $\frac{15}{16}$ de ouro, 7 $\frac{10}{16}$ de prata, e 3 $\frac{7}{16}$ de cobre.

Representemos por x, y, e z o numero de onças, que se deve tomar respectivamente da primeira, segunda, e terceira barra.

Como 16 onças da primeira contem 7 de ouro, x conterá $\frac{7x}{16}$ do mesmo metal. Semelhantemente, tomando y da segunda e z da terceira, tomamos $\frac{5y}{16}$ e $\frac{2z}{16}$ de ouro. Teremos pois pela primeira condiçaõ do problema $\frac{7x+5y+2z}{16} = 4\frac{15}{16}$.

Logo - - - - - - - - - - $7x + 5y + 2z = 79$

Do mesmo modo a segunda condiçaõ dá - - - - $8x + 7y + 9z = 122$

E a terceira - - - - - - - $x + 4y + 5z = 55$

Eliminando x, teremos . . . .

$$\frac{79-5y-2z}{7} = \frac{122-7y-9z}{8},$$

$$\frac{79-5y-2z}{7} = 55-4y-5z.$$

Eliminando agora y, teremos . . . .

$$\frac{222-47z}{9} = \frac{306-33z}{23};$$

Logo $z = 3$, $y = 9$, e $x = 4$: isto he; devemos tomar 4 onças da primeira barra, 9 da segunda, e 3 da terceira, para que a nova barra tenha 4 onças e $\frac{15}{16}$ de ouro, 7 $\frac{10}{16}$ de prata, e 3 $\frac{7}{16}$ de cobre.

Com effeito, tendo a primeira em 16 onças

7 de ouro, 8 de prata, e 1 de cobre, 4 onças con-
teraõ $\frac{28}{16}$ de ouro, $\frac{32}{16}$ de prata, e $\frac{4}{16}$ de cobre. Do mesmo modo, 9 onças da segunda teraõ $\frac{45}{16}$ de ouro, $\frac{63}{16}$ de prata, e $\frac{36}{16}$ de cobre, assim como 3 onças da terceira teraõ $\frac{6}{16}$ de ouro, $\frac{27}{16}$ de prata, e $\frac{15}{16}$ de cobre.

Reunindo as tres porções de cada metal, teremos $\frac{79}{16}$, $\frac{122}{16}$, $\frac{55}{16}$, ou $4\frac{15}{16}$, $7\frac{10}{16}$ e $3\frac{7}{16}$ pelas quantidades de ouro, prata e cobre, que haõ de entrar na quarta barra.

Dos casos, em que os problemas ficaõ indeterminados, ainda que haja igual numero de equações, e de incognitas.

87 TEm isto lugar, quando algumas condições differem taõ sómente na apparencia. Entaõ as equações, que as exprimem, ou saõ multiplas humas das outras, ou, em geral, algumas dellas se compõem de huma ou de muitas outras somadas ou diminuidas, multiplicadas ou divididas por certos numeros. Por exemplo, hum problema que conduzisse a estas tres equações

$$5x + 3y + 2z = 17$$
$$8x + 2y + 4z = 20$$
$$18x + 8y + 8z = 54$$

ficaria indeterminado, isto he, seria susceptivel de hum numero indefinido de soluções; porque a ultitima equaçaõ compõe-ſe da ſegunda ſomada com o dobro da primeira, iſto he, ſegue-ſe neceſſariamente das duas primeiras, e por tanto naõ exprime condiçaõ nova: eſtamos pois realmente no caſo de ter ſómente as duas primeiras, e tres incognitas, no qual cada huma deſtas, como veremos, he ſuſceptivel de hum numero indefinido de valores.

88 Quando huma equaçaõ ſe comprehende nas outras, o calculo ſempre o declara, conduzindonos a huma equaçaõ *identica*, iſto he, a huma equaçaõ, na qual os dous membros conſtaõ de termos iguaes e ſemelhantes: de maneira que apareceraõ tantas equações identicas, quantas forem as inuteis das propoſtas.

Por exemplo, as duas equações $6x + 8y = 12$, e $x + \frac{4}{3}y = 2$ daõ $x = \frac{12 - 8y}{6} = 2 - \frac{4}{3}y$, e conſeguintemente $12 - 8y = 12 - 8y$, equaçaõ identica, a qual naõ dá a conhecer o valor de y, porque depois das operações ordinarias achamos $0 = 0$. Logo huma equaçaõ he inutil: com effeito, a ſegunda ſe fórma da primeira dividida por 6.

Do meſmo modo as tres equações de cima daõ $\frac{17 - 3y - 2z}{5} = \frac{20 - 2y - 4z}{8}$, e $\frac{17 - 3y - 2z}{5} = \frac{54 - 8y - 8z}{18}$, donde eliminando y, ſe deduz a equaçaõ identica $\frac{36 + 4z}{14} = \frac{36 + 4z}{14}$; naõ temos pois neſte caſo mais que duas equações realmente diſtinctas.

Mas se tivessemos as tres equações seguintes

$$5x + 3y + 2z = 24$$
$$\frac{25}{2}x + \frac{15}{2}y + 5z = 60$$
$$15x + 9y + 6z = 72$$

Achariamos . . . .
$600 - 75y - 50z = 600 - 75y - 50z$, e $360 - 45y - 30z = 360 - 45y - 30z$; equações identicas, das quais naõ se póde tirar nem y, nem z. Logo, propriamente fallando, ha huma unica equaçaõ; e bem se vê como as duas ultimas se fórmaõ da primeira.

89 Nos casos de que acabamos de tratar, tanto o numerador como o denominador de cada hum dos valores (85) das incognitas x, y, z se reduzem a 0; e assim deve ser. Podemos pois por meio das mesmas formulas geraes conhecer se humas equações se comprehendem nas outras.

Dos casos em que os problemas saõ impossiveis.

90 A Impossibilidade de hum problema, cujas equações naõ passaõ do primeiro grão, conhece-se por algum resultado absurdo, a que chegamos no decurso do calculo.

Se tivermos, por exemplo, $5x + 3y = 30$, e $20x + 12y = 135$, igualando os dous valores de x, acharemos $600 = 675$; logo o problema, que conduzisse ás duas equações propostas, seria impossivel, e absurdo.

O mesmo acontecerá, quando o numero das equações for maior que o das incognitas, e nenhuma dellas se comprehender nas outras.

91

91 As foluções negativas indicaõ huma efpecie de impoffibilidade; porem efta naõ he abfoluta, he fomente relativa ao fentido, em que fe tomáraõ as quantidades; de forte que ha fempre hum, no qual as foluções faõ naturais, e admiffiveis (70). Os refultados incompativeis com as condições moftraõ tambem, que o problema he impoffivel; como, por exemplo, fe acharmos hum refultado fraccionario, devendo fer inteiro.

Dos Problemas indeterminados.

92 DAmos o nome de *Problema indeterminado* a todo aquelle, a que fe fatisfaz por muitos modos, fem que fe poffa determinar, qual he de todos elles o que tem particularmente lugar. Neftes problemas há fempre menos condições que incognitas; e ficando huma quantidade a arbitrio do Analyfta, faõ infinitas as foluções, falvo fe forem limitadas, como muitas vezes acontece, por algumas condições, as quais naõ podendo exprimir-fe em equações, naõ determinaõ directamente o numero de foluções, que o problema póde ter.

Propondo-fe, por exemplo, *Achar dous numeros, cuja foma feja* 24; reprefentando hum e outro por x e y, teremos $x + y = 24$, donde fe tira $x = 24 - y$. Bem fe vê que efte problema he fufceptivel de huma infinidade de foluções, fe por x, e y entendermos indifferentemente quaisquer numeros inteiros ou quebrados, pofitivos ou negativos: porque para fatisfazer á queftaõ bafta dar a y o valor que quizermos, e calcular o de x na equaçaõ $x = 24 - y$. Defte modo, fuppondo fucceffivamenmente $y = 1$, $y = 1\frac{1}{2}$, $y = 2$, $y = 2\frac{2}{3}$, &c.

teremos $x = 23$, $x = 22\frac{1}{2}$, $x = 22$, $x = 21\frac{1}{3}$, &c.
Querendo porem ſomente numeros inteiros e poſitivos, he muito limitado o numero das ſoluções, porque entaõ y naõ deve ſer maior que 24, e a equaçaõ naõ póde ter mais que 25 ſoluções, contando o; de maneira que ſuppondo ſucceſſivamente $y = 0$, $y = 1$, $y = 2$, &c. teremos $x = 24$, $x = 23$, $x = 22$, &c.

Todos os problemas indeterminados podem reduzir-ſe á equaçaõ $ax + by = c$.

93 Para moſtrar o modo de reſolver eſtes problemas em numeros inteiros e poſitivos, quando ſeja dada huma tal condiçaõ, ſervem de muito os exemplos ſeguintes, porque nem ſempre he iſſo taõ facil como no precedente.

Probl. I. *Pergunta-ſe por quantos modos ſe podem pagar 542 libras, dando peças de 17^l, e recebendo em troco outras de 11^l.*

Seja x o numero de peças de 17^l, e y o numero de peças de 11^l, os quais devem ſer numeros inteiros. Como dando x peças de 17^l ſe pagaõ $17x^l$, e aceitando y peças de 11^l ſe recebem $11y^l$, he claro que ſe pagaõ $17x - 11y$; e porque o pagamento deve ſer de 542^l, teremos $17x - 11y = 542$. Tirando deſta o valor da incognita, que tem menor coefficiente, acharemos $y = \frac{17x - 542}{11}$, que ſe reduz pela diviſaõ a $y = x - 49 + \frac{6x - 3}{11}$.

De-

Devendo y ſer hum numero inteiro, tambem $\frac{6x-3}{11}$ o deverá ſer. Repreſentemos por E hum numero inteiro; teremos $\frac{6x-3}{11}=E$, e conſeguintemente $x=\frac{11E+3}{6}=E+\frac{5E+3}{6}$. Como x tambem deve ſer hum numero inteiro, he preciſo que $\frac{5E+3}{6}$ ſeja hum numero inteiro. Repreſente-ſe eſte por E'; teremos $\frac{5E+3}{6}=E'$, e conſeguintemente $E=\frac{6E'-3}{5}=E'+\frac{E'-3}{5}$.

He pois neceſſario que $\frac{E'-3}{5}$ ſeja hum numero inteiro: repreſentando-ſe eſte por E'', teremos $\frac{E'-3}{5}=E''$, donde ſe tira $E'=5E''+3$. A operaçaõ naõ paſſa adiante, porque tomando por E'' o numero inteiro que ſe quizer, teremos ſempre para E', que naõ tem denominador, hum numero inteiro como a queſtaõ requer.

Voltando agora aos valores de x e y, como temos $E=\frac{6E'-3}{5}$, ſerá $E=6E''+3$, e conſeguintemente $x=11E''+6$, e $y=17E''-40$. O valor de x dá a liberdade de tomar por E'' hum numero inteiro qualquer, mas o de y naõ permitte que ſe tome E'' menor que 3; porque y naõ ſerá poſitivo, ſenaõ for $17E''>40$, ou $E''>\frac{40}{17}$; iſto he, $E''>2$.

Pode-

Podemos pois satisfazer a este problema por huma infinidade de modos differentes, substituindo por E'' todos os numeros inteiros positivos desde 3 até o infinito. Assim, pondo successivamente $E''=3$, $E''=4$, $E''=5$, $E''=6$, $E''=7$ &c. teremos os valores correspondentes de x, e de y, como aqui se mostra.

$$\begin{array}{llll} x = 39 & \ldots & y = 11 \\ = 50 & & = 28 \\ = 61 & & = 45 \\ = 72 & & = 62 \\ = 83, \text{ \&c.} & & = 79 \end{array}$$

Em geral, $x = 39 + 11m$, e $y = 11 + 17m$.

Cada hum delles he tal, que dando o numero x de peças de 17^l, e recebendo o numero correspondente y de peças de 11^l, pagaremos 542^l.

Probl. II. *Fazer 741 lib. em 41 peças de tres especies; de 24^l, de 19^l, e de 10^l.*

Sejaõ x, y, e z os numeros de cada huma das tres especies; teremos $x + y + z = 41$, e $24x + 19y + 10z = 741$.

Eliminando huma das incognitas, x por exemplo, teremos $x = 41 - y - z = \frac{741 - 19y - 10z}{24}$; logo $5y + 14z = 243$; e tomando o valor de y, acharemos $y = \frac{243 - 14z}{5} = 48 - 2z + \frac{3 - 4z}{5}$.

Como y e z devem ser numeros inteiros, he necessario que $\frac{3 - 4z}{5}$ seja hum numero inteiro E: logo $\frac{3 - 4z}{5} = E$, e $z = - E + \frac{3 - E}{4}$. Deve pois

ser

ſer $\frac{3-E}{4} = E'$, donde ſe tira $E = 3 - 4E'$.

Fazendo agora as ſubſtituições neceſſarias nos valores de x, y, e z, teremos $z = 5E' - 3$, $y = 57 - 14E'$, e $x = 9E' - 13$.

Neſtes tres valores em lugar de E' podemos ſubſtituir o numero inteiro que quizermos, com tanto que reſultem numeros poſitivos para x, y, e z. Eſta condiçaõ envolve as tres ſeguintes. 1.° Que ſeja $9E' > 13$, ou $E' > 1\frac{4}{9}$. 2.° Que ſeja $57 > 14E'$, ou $E' < 4\frac{1}{14}$. 3.° Que ſeja $5E' > 3$, ou $E' > \frac{3}{5}$; como acontecerá, todas as vezes que ſe houver ſatisfeito á primeira condiçaõ. Por eſte modo o numero das ſoluções he taõ limitado, que naõ paſſa de tres: para as achar daremos por valores a E' os numeros 2, 3 e 4, que ſaõ os unicos admiſſiveis. Logo as 741$'$ naõ podem fazer-ſe em 41 peças das tres eſpecies propoſtas de outra ſorte, que naõ ſeja tomando os ſeguintes valores de x, y, e z.

$$x = 5 \;.\;.\;.\; 14 \;.\;.\;.\; 23$$
$$y = 29 \;.\;.\;.\; 15 \;.\;.\;.\; 1$$
$$z = 7 \;.\;.\;.\; 12 \;.\;.\;.\; 17$$

No progreſſo das diviſões, que fazemos para reduzir o valor da indeterminada a hum numero inteiro, podemos tomar o quociente por cima do verdadeiro valor, e aſſim abbreviaremos muito o calculo em alguns caſos.

Por exemplo, tendo a equaçaõ $19y = 52x + 139$, em lugar de concluir $y = 2x + 7 + \frac{14x + 6}{19}$, concluiremos $y = 3x + 7 \frac{-5x + 6}{19}$;

por-

porque, ſendo $3x$ o quociente mais proximo; o exceſſo $5x$, a que por compenſaçaõ damos o ſinal —, tem hum coefficiente menor, e conſeguintemente o calculo ſe acabará mais depreſſa. Fazendo pois $\frac{-5x+6}{19}=E$, concluiremos pela meſma razaõ $x=1-4E+\frac{1+E}{5}$; e fazendo $\frac{1+E}{5}=E'$, teremos $E=5E'-1$; logo $x=5-19E'$, e $y=21-52E'$. Deſte modo dando por valores a E' todos os numeros negativos, acharemos todas as ſoluções poſitivas da equaçaõ. Se quizermos uſar de numeros poſitivos, faremos $\frac{-5x+6}{19}=-E$, e depois $\frac{-E+1}{5}=-E'$, como he permittido, e teremos $x=19E'+5$, $y=52E'+21$.

Do meſmo modo, no problema II. onde devia ſer $\frac{3-4z}{5}=E$, podemos tomar $-z+\frac{3+z}{5}=E$, e concluir $z=5E-3$.

Abbreviaõ-ſe muito eſtes calculos, ſomando ou diminuindo, multiplicando ou repartindo as quantidades, que devem ſer numeros inteiros, por outros numeros inteiros. No problema I., multiplicando $\frac{6x-3}{11}$ por 2, teremos $\frac{12x-6}{11}=E$, e ſubtrahindo $\frac{11x}{11}$, acharemos $x=11E+6$, $y=17E-40$.

Probl. III. *Sendo o Circulo Solar huma revoluçaõ periodica de 28 annos, o Lunar ou Aureo Numero outra de 19 annos, e renovando-ſe a Indicçaõ Romana todos os 15 annos; pergunta-ſe qual he o anno da Era Vulgar, que tem tido 10 de Circulo Solar, 8 de Lunar, e 11 de Indicçaõ.* Re-

Reduz-se o problema a achar hum numero, que sendo dividido por 28, 19, e 15 dê os restos 10, 8, e 11. Sendo pois x este numero, teremos $\frac{x-10}{28} = E$, $\frac{x-8}{19} = E'$, e $\frac{x-11}{15} = E''$. As duas primeiras daó $E = 19E' + 4$, e $x = 532E' + 122$ Substituindo este valor de x na terceira, teremos $E' = 15E'' + 12$, e conseguintemente $x = 7980 E'' + 6506$.

Suppondo $E'' = 0$, $E'' = 1$, &c. teremos . . $x = 6506$, $x = 14486$, &c.

Para reduzir á Era vulgar estes annos, que pertencem ao Periodo Juliano, tiraremos de cada hum delles 4713, isto he, o anno do Periodo a que corresponde o principio da nossa Era. Fazendo pois esta applicaçaõ á primeira epoca, acharemos 1793. Logo desde o principio do mundo, conforme a Chronologia ordinaria, o anno de 1793 tem sido o unico, que reunio 17 de Circulo Solar, 6 de Numero Aureo, e 5 de Indicçaõ. O anno de 9773 da nossa Era será o unico, que no intervallo de 1793 até 9773 poderá satisfazer ás mesmas condiçóes.

Das Equaçóes do segundo gráo a huma incognita.

94 CHamamos *Equaçóes do segundo gráo* a todas aquellas, em que a mais alta potencia da incognita he esta incognita multiplicada por si mesma, ou elevada ao quadrado. A equaçaõ $5x^2 = 125$ he do segundo gráo, porque no termo $5x^2$

a

a quantidade x eſtá multiplicada por ſi meſma. Do meſmo modo $x^2 + px = q$ he huma equaçaõ geral do ſegundo gráo, ſendo p e q quaisquer quantidades conhecidas, poſitivas, ou negativas.

95 Quando $p = 0$, iſto he; quando a equaçaõ naõ inclue outra potencia da incognita, mais que o quadrado, reſolve-ſe eſta com muita facilidade, deſembaraçando o dito quadrado (56, 60, e 64) de tudo o que a multiplica ou divide, e tirando depois a raiz quadrada de cada membro.

Por exemplo, da equaçaõ pura do ſegundo gráo $5x^2 = 125$, dividindo pelo multiplicador 5, concluo $x^2 = 25$, e tirando a raiz quadrada de cada membro, $x = 5$; porque as raizes quadradas de quantidades iguais ſaõ tambem iguais. Do meſmo modo, ſe tivermos $\frac{5}{3}x^2 = \frac{4}{5}x^2 + 7$, acharemos pelas regras ordinarias $13x^2 = 105$, e depois $x = \sqrt{\frac{105}{13}}$, iſto he, igual á raiz quadrada de $\frac{105}{13}$.

Uſamos deſte *final radical* para ſignificar, que ſe deve tirar a raiz quadrada. Havendo eſta de extrahir-ſe de huma fracçaõ, como no caſo preſente, devem as pernas do final $\sqrt{}$ deſcer para baixo da riſca, que ſepara o numerador do denominanor; querendo porém repreſentar a raiz quadrada de hum termo ſómente da fracçaõ, o radical deve ficar todo por cima, ou por baixo da riſca da diviſaõ. Aſſim para notarmos que a raiz quadrada de 40 ſe ha-de dividir por 3, eſcreveremos $\frac{\sqrt{40}}{3}$. Se for complexa a quantidade, de que quizermos extra-

extrahir a raiz quadrada, daremos ao radical huma caudas com que se cubra toda a quantidade, ou tambem encerraremos esta entre parentheses: por exemplo, para representarmos a raiz quadrada de $3ab + b^2$, escreveremos $\sqrt{3ab + b^2}$, ou . . . $\sqrt{}(3ab + b^2)$.

96 Como (24) de $+ \times +$, e de $- \times -$ resulta igualmente $+$, segue-se, que á raiz quadrada de toda a quantidade que tiver o final $\sqrt{}$, se deve dar indifferentemente $+$, ou $-$. Assim na equação precedente $x^2 = 25$, podemos dizer com igual razaõ, que a raiz quadrada he $+ 5$, ou que he $- 5$, porque cada numero destes multiplicado por si mesmo dá $+ 25$. A resoluçaõ pois da equaçaõ $x^2 = 25$ se deve escrever desta sórte $x = \pm 5$, que se lê dizendo *x igual a mais ou menos* 5, e equivale a estas duas equações $x = 5$, e $x = - 5$; valores differentes, naõ obstante serem representados pela mesma letra x, pois sendo esta hum final pelo qual se exprime a quantidade que se busca, póde designar quantidades differentes.

Da mesma sórte, da equaçaõ geral $x^2 = q$ deduziremos $x = \pm \sqrt{q}$. Se dessemos ao primeiro membro o final ambiguo $\pm$, teriamos $\pm x = \pm \sqrt{q}$, da qual se tiraõ as quatro equações $+ x = + \sqrt{q}$ $+ x = - \sqrt{q}$, $- x = + q$, e $- x = - \sqrt{q}$. Como porém as duas ultimas naõ differem das duas primeiras, basta dar o final $\pm$ ao segundo membro.

97 Se tivermos de extrahir a raiz quadrada de huma quantidade precedida do final $-$, affectaremos tudo com o radical, dando-lhe tambem o final $\pm$. Assim se tivessemos $x^2 = - 4$, escreveriamos $x = \pm \sqrt{-4}$, ou $x = \pm \sqrt{}(- 4)$;

 ain-

ainda que a raiz de 4 ſeja 2, naõ ſe ſegue que devamos eſcrever $x = \pm 2$; he eſſencial o attender ao final — da quantidade que eſtá debaixo do radical.

98 Todas as vezes que huma equaçaõ conduzir deſte modo a tirar a raiz quadrada de huma quantidade negativa, concluiremos, que he impoſſivel o problema que deo tal equaçaõ. Com effeito, huma quantidade negativa naõ póde ter raiz quadrada, nem exacta, nem approximada, porque naõ he poſſivel achar huma quantidade, que multiplicada por ſi meſma dê producto negativo. He verdade, que -4, por exemplo, póde reſultar de $+2$ multiplicado por -2; mas tendo eſtas quantidades differente ſinal, naõ ſaõ iguais, e conſeguintemente o ſeu producto naõ he hum quadrado. Pelo que, quando ſe propõe tirar a raiz quadrada de huma quantidade negativa, propõe-ſe hum abſurdo, e conſeguintemente ſerá impoſſivel todo o problema, que depender de ſemelhante operaçaõ. Tal he o caracter, porque ſe diſtingue a impoſſibilidade dos problemas do ſegundo gráo.

Naõ deve porém reputar-ſe como inutil a conſideraçaõ das raizes quadradas das quantidades negativas: muitas vezes o problema he poſſivel, e ſem embargo diſſo ſómente admitte reſoluçaõ pelo concurſo deſta eſpecie de quantidades, nas quais por fim deſapparece o abſurdo. As raizes quadradas das quantidades negativas chamaõ-ſe *quantidades imaginarias*. Aſſim $\sqrt{-1}$ . . . $\sqrt{-2}$ . . . $\sqrt{-a}$ . . . $a + b\sqrt{-1}$ . . . $a + \sqrt{-b}$ ſaõ todas quantidades imaginarias.

99 Paſſando agora ás equações completas do ſegundo gráo, nas quais naõ he $p = 0$, como em $x^2 - 4x = 12$, he claro que ſe podermos *preparar*

o

o primeiro membro a fim de ſer hum quadrado perfeito, tirando depois a raiz quadrada de cada membro, ficará a equaçaõ reduzida ao primeiro gráo, e naõ terá difficuldade a ſua reſoluçaõ. Eſta preparaçaõ requer tres couſas: 1.º que ſe paſſem para hum membro (56) todos os termos affectos de x, e para o outro todas as quantidades conhecidas: 2.º que o termo x^2 ſe faça poſitivo (58): 3.º que eiſe ſe deſembarace (60, 64) de todo o multiplicador, ou diviſor. Feito iſto, ſe ajuntarmos a cada membro o quadrado da ametade da quantidade conhecida que multiplica x, ficará completo (25) o quadrado do primeiro membro.

Por exemplo, para preparar a equaçaõ . . . $4x - \frac{3}{5}x^2 = 4 - 2x$ que ſe pertende reſolver; 1.º paſſaremos todos os x para o primeiro membro, eſcrevendo x^2 em primeiro lugar, e teremos $-\frac{3}{5}x^2 + 6x = 4$; 2.º faremos x^2 poſitivo, mudando todos os ſinais, e teremos $\frac{3}{5}x^2 - 6x = -4$; 3.º deſembaraçaremos x^2, multiplicando todos os termos por $\frac{5}{3}$, e teremos $x^2 - 10x = -\frac{20}{3}$.

Reduzido aſſim o primeiro membro de qualquer equaçaõ do ſegundo gráo á forma $x^2 \pm px$, noto que eſta quantidade tem já hum quadrado x^2, que ſe póde conſiderar como o quadrado do primeiro termo x de hum binomio. Tem mais o termo px, que ſe póde conſiderar como o dobro de x

 multi-

multiplicado por outra quantidade, que devé ser a ametade do multiplicador p de x. Logo para completar o quadrado, nada mais falta do que ajuntar o quadrado desta segunda quantidade $\frac{1}{2}p$, isto he, ajuntar $\frac{1}{4}p^2$. Deste modo a equaçaõ geral $x^2 + px = q$ se transforma em $x^2 + px + \frac{1}{4}p^2$, $= q + \frac{1}{4}p^2$. Extrahiremos pois a raiz quadrada exactamente do primeiro membro, tirando as raizes separadamente dos dous termos extremos x^2, e $\frac{1}{4}p^2$, e interpondo o sinal que tiver o termo medio, porque o quadrado de $a \pm b = a^2 \pm 2ab + b^2$.
Quanto ao segundo membro, tira-se, ou indica-se a sua raiz quadrada; e assim teremos $x + \frac{1}{2}p = \pm\sqrt{(q + \frac{1}{4}p^2)}$ logo . . . .

$$x = -\tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 + q)}.$$

100 Desta formula se deduz a regra seguinte, que observaremos na resoluçaõ das equaçoes do segundo gráo.

Havendo preparado a equaçaõ, iguale-se a incognita x *á ametade do seu multiplicador, tomado com sinal contrario, mais ou menos a raiz quadrada da mesma ametade elevada ao quadrado, e da quantidade conhecida que constitue o segundo membro.*

Por exemplo, tendo a equaçaõ $x^2 + 6x = 16$, como esta se acha preparada, concluiremos immediatamente $x = -3 \pm\sqrt{(9 + 16)}$, igualando x á ametade -3 do coefficiente 6 de x tomado com

com ſinal contrario, mais ou menos a raiz quadrada do quadrado 9 do meſmo 3, e do termo conhecido 16 da equaçaõ. Logo $x = -3 \pm 5$, iſto he $x = 2$, ou $x = -8$.

Do meſmo modo a equaçaõ $4x - \frac{8}{5}x^2 = 4 - 2x$, que preparada (99) ſe muda em $x^2 - 10x = -\frac{20}{3}$, dá $x = 5 \pm \sqrt{25 - \frac{20}{3}} = 5 \pm \sqrt{\frac{55}{3}}$.

Applicaçaõ a alguns Problemas do ſegundo gráo.

101 SEja qual for o gráo dos problemas, a regra para os pôr em equaçaõ he a meſma que havemos dado (67).

Probl. I. *Achar hum numero tal, que ſendo junto 8 vezes ao ſeu quadrado, faça a ſoma de 33.*

Seja x o numero procurado; o ſeu quadrado ſerá x^2; logo $x^2 + 8x = 33$. Deſta ſe deduz conforme a regra (100)... $x = -4 \pm \sqrt{(16 + 33)} = -4 \pm 7$, e conſeguintemente teremos eſtes dous valores, $x = 3$, e $x = -11$.

O primeiro ſatisfaz ao problema; porque ajuntando 8 vezes 3, ou 24 a 9, quadrado de tres, temos a ſoma 33.

O ſegundo, como he negativo, indica que ha outro problema, no qual, tomando x em ſentido contrario, teremos 11 por ſoluçaõ; iſto he, o ſegundo valor de x deve ſatisfazer a eſte problema:

Achar

Achar hum numero tal, que ſendo tirado 8 *vezes do ſeu quadrado, o reſto ſeja* 33; e com effeito, de 121 quadrado de 11 tirando 8 vezes 11, ou 88, o reſto he 33.

Para confirmar o que havemos dito ſobre as quantidades negativas (70), note-ſe que eſte ſegundo problema, ſendo poſto em equaçaõ dá $x^2 - 8x = 33$, donde ſe tiraõ os dous valores $x = 11$, e $x = -3$, que ſaõ o contrario dos do primeiro problema.

102 Deſte modo toda a equaçaõ do ſegundo gráo a huma incognita tem duas ſoluções, porque ambos os valores 11 e -3, ſendo ſubſtituidos em lugar de x na equaçaõ $x^2 - 8x = 33$, a reſolvem igualmente, iſto he, reduzem igualmente o primeiro membro a 33, como he facil de ver. Mas nem ſempre o problema, que conduzio á equaçaõ, tem duas ſoluções; porque no caſo preſente o ſegundo valor -3 reſolve unicamente o problema contrario. Muitas vezes as duas ſoluções da equaçaõ ſaõ tambem ſoluções do problema, como veremos adiante.

Probl. II. *Deviaõ repartir-ſe* 175 *lib. por hum certo numero de peſſoas, mas duas por auſentes naõ tem parte. Eſta circunſtancia dá hum augmento de* 10[l] *á parte de cada hum dos preſentes: pergunta-ſe quantos haviaõ de ſer entaõ os participantes.*

Repreſentando eſte numero por x, a parte de cada hum, ſe todos eſtiveſſem preſentes, ſeria $\frac{175}{x}$; mas como faltaõ dous, ſerá $\frac{175}{x-2}$; logo, conforme o problema, $\frac{175}{x-2} - \frac{175}{x} = 10$, iſto he, $-10x^2 + 20x = -350$.

Eſta

Eſta equaçaõ ſendo preparada (99) dá $x^2 - 2x = 35$, e conſeguintemente (100) . . $x = 1 \pm \sqrt{(35+1)} = 1 \pm 6$; logo $x = 7$, e $x = -5$. O primeiro valor he o que ſe procura; porque $\frac{175}{5} - \frac{175}{7} = 10$. O ſegundo porém reſolve o problema, em que ſe trataſſe de repartir 175^l por duas peſſoas mais, de maneira, que com eſta circunſtancia a parte, que havia de caber ſem iſſo a cada hum, tiveſſe huma diminuiçaõ de 10^l.

Probl. III. *Comprou-ſe hum cavallo, o qual ſe vendeo depois por 24 dobras, perdendo-ſe tanto por 100, como tinha cuſtado: pergunta-ſe por quanto ſe havia comprado.*

Seja x o numero buſcado, iſto he, o numero de dobras que cuſtou o cavallo; logo, fazendo a proporçaõ $100 : x :: x :$; o quarto termo $\frac{x^2}{100}$ ſerá a perda, e conſeguintemente $x - \frac{x^2}{100} = 24$.

Preparando eſta equaçaõ, acharemos $x^2 - 100x = -2400$, donde (100) ſe tira $x = 50 \pm \sqrt{(2500 - 2400)} = 50 \pm 10$; iſto he, $x = 60$, e $x = 40$. Podia pois o preço do cavallo ſer igualmente de 60, ou de 40 dobras, porque o enunciado da queſtaõ naõ determina qual dos dous tem lugar. Com effeito, ſuppondo que o cavallo cuſtou 60 dobras, a perda foi de 36, logo vendeo-ſe por $60 - 36 = 24$. No ſegundo caſo, a perda foi de 16 dobras, logo vendeo-ſe por $40 - 16 = 24$.

103 As duas ſoluções, que tem toda a equaçaõ do ſegundo grão, podem ſer ambas poſitivas, como neſte problema: ou huma negativa, e outra poſiti-

ſitiva, como nos dous precedentes: ou tambem ambas negativas, quando o enunciado da queſtaõ he vicioſo; porque cada huma deſtas ſoluções moſtra, que a incognita ſe deve tomar em ſentido contrario ao do enunciado. Propondo-ſe, por exemplo: *Achar hum numero tal, que ajuntando-ſe ao ſeu quadrado nove vezes o meſmo numero, e mais* 50, *a ſoma ſeja igual a* 30; teremos a equaçaõ $x^2 + 9x + 50 = 30$, ou $x^2 + 9x = -20$, que dá $x = -\frac{9}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{81}{4} - 20\right)} = \frac{-9 \pm 1}{2}$; logo $x = -4$, e $x = -5$. O problema pois deve mudar-ſe neſte: *Achar hum numero tal, que ajuntando-ſe* 50 *ao ſeu quadrado, e tirando-ſe da ſoma* 9 *vezes o meſmo numero procurado, o reſto ſeja* 30.

104 Aſſim tem a Algebra a vantagem naõ ſómente de reſolver as queſtões, mas tambem de enſinar a diſtinguir ſe ſaõ bem ou mal propoſtas, e até (98) ſe ſaõ impoſſiveis. Por exemplo, reſolva-ſe o problema III., ſuppondo 26 dobras em lugar de 24, e acharemos $x = 50 \pm \sqrt{-100}$; logo o problema neſta hypotheſe he impoſſivel. Acontece iſto todas as vezes que for q negativo, e ao meſmo tempo maior que $\frac{1}{4} p^2$ (98, 99).

PROBL. IV. *Huma companhia de dous negociantes ganhou* 18 *dobrões e* $\frac{3}{4}$, *tendo entrado nella o primeiro com* 30 *dobrões por* 17 *mezes, e o ſegundo com a ſua parte* 5 *mezes depois do primeiro, ou por* 12 *mezes; eſta he tal, que ſomada com o lucro reſpectivo faz* 26 *dobrões. Qual he a entrada do ſegundo, e qual o ganho de cada hum?*

Se conheceſſemos a entrada do ſegundo, com facilidade ſe acharia o ganho de cada hum. Repreſenſentando pois a dita entrada por x, e reduzindo a ſociedade a hum mez de duraçaõ, a entrada do primeiro valerá 510 dobrões por hum mez, e a do ſegundo $12x$ pelo meſmo tempo. Logo (Arith. 197) $510 + 12x : 18\frac{3}{4} :: 12x :$ ganho do ſegundo $= \frac{75x}{170 + 4x}$; e conſeguintemente pelas condições $x + \frac{75x}{170 + 4x} = 26$.

Preparando eſta equaçaõ para ſe reſolver, teremos $x^2 + \frac{141}{4}x = 1105$; logo $x = -\frac{141}{8} \pm \sqrt{\left(\frac{19881}{64} + 1105\right)} = \frac{-141 \pm 301}{8}$; iſto he no problema actual, $x = \frac{160}{8} = 20$. O ſegundo negociante pois entrou com 20 dobrões, e conſeguintemente ganhou 6, e o primeiro $12\frac{3}{4}$.

Probl. V. *Dividir hum numero* a *em duas partes tais, que o producto de* m *vezes a maior por* n *vezes a menor ſeja igual a* b.

Repreſentando por x huma das duas partes, a outra ſerá $a - x$; e teremos a equaçaõ $m(a - x)nx = b$, logo $x^2 - ax = \frac{-b}{mn}$, e conſeguintemente $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 - \frac{b}{mn}\right)}$. Se for $b > \frac{mna^2}{4}$, o problema ſerá impoſſivel.

106 Quando as equações litterais tiverem a fórma muito compoſta, para as reduzirmos a tres termos, igualaremos a huma quantidade a ſoma de todas as que multiplicarem x, e todas as quantidades conhecidas a outra. Por exemplo, ſe tivermos

mos a equaçaõ $ax^2 + bcx - a^2b = bx^2 + ab^2 - acx$, preparando acharemos $x^2 + \frac{ac+bc}{a-b}x = \frac{a^2b+ab^2}{a-b}$, a qual, ſuppondo $\frac{ac+bc}{a-b} = p$, e $\frac{a^2b+ab^2}{a-b} = q$, ſe reduz á forma $x^2 + px = q$.

107 Porem eſtas transformações ſomente ſe devem fazer, quando o calculo que ſe ſeguir, naõ uſando dellas, venha a ſer muito complicado. Neſte meſmo exemplo depois de dar á equaçaõ propoſta a forma $x^2 + \frac{ac+bc}{a-b}x = \frac{a^2b+ab^2}{a-b}$, indicando o quadrado, deduziremos (100) com ſumma facilidade . . . .

$$x = \frac{-ac-ab}{2a-2b} \pm \sqrt{\left(\frac{ac+bc}{2a-2b}\right)^2 + \frac{a^2b+ab^2}{a-b}}.$$

108 Havendo concluido o valor de x, podemos conſervar o radical no meſmo eſtado em que ſe acha, até ſe fazerem as applicações numericas. Mas melhor ſerá ſimplificar, reduzindo ao meſmo denominador as duas partes que eſtaõ debaixo do radical, conforme as obſervações que fizemos (48). Por exemplo, tendo $\sqrt{\left(\frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right)}$, multiplicaremos $\frac{c}{a}$ por $4a$, e teremos $\sqrt{\left(\frac{b^2+4ac}{4a^2}\right)} = \frac{\sqrt{(b^2+4ac)}}{2a}$ (Arith. 142). Logo ſe na equaçaõ geral do ſegundo gráo p for huma fracçaõ, ou ſe

ſe a equaçaõ for $ax^2 + bx = c$, teremos . . .

$$x = \frac{-b \pm \surd(b^2 + 4ac)}{2a}.$$

Da Extracçaõ da Raiz quadrada das quantidades litterais.

109 A Reſoluçaõ das equações do ſegundo gráo conduz, como acabamos de ver, a tirar a raiz quadrada, ou das quantidades numericas, ou das litterais. Pelo que reſpeita ás primeiras, naõ temos que acreſcentar ao que diſſemos na Arithmetica; reſta tratar das ultimas.

Por quanto hum producto de quantidades monomias (18) inclue todas as letras dos factores, e eſtes ſaõ os meſmos na formaçaõ de hum quadrado; ſegue-ſe que em todo o quadrado monomio cada letra da raiz deve ſer duas vezes factor, e o expoente de cada letra de hum quadrado monomio deve ſer o dobro do expoente, que a meſma letra tiver na raiz. Logo: *Para tirar a raiz quadrada de hum monomio, deve-ſe tomar a ametade dos expoentes de cada huma das ſuas letras.* Aſſim, $\surd a^2 = a$, $\surd a^6 = a^3$, $\surd a^2b^2c^2 = abc$, $\surd a^4b^6c^8 = a^2b^3c^4$.

110 Se houver algum expoente impar, a quantidade propoſta naõ ſerá quadrado perfeito. Entaõ, conforme a regra, ſe introduzirá hum expoente fraccionario, o qual deſigna que reſta tirar a raiz quadrada á quantidade que o tiver. Por exemplo $\surd a^2b^3c^4 = ab^{\frac{3}{2}}c^2 = abb^{\frac{1}{2}}c^2$; porque $a^2b^3c^4 = a^2b^2bc^4$.

Deſta

Deſta ſorte o expoente fraccionario tem o meſmo uſo que o ſinal $\surd$; de maneira que $abb^{\frac{1}{2}}c^2$ ou $abc^2b^{\frac{1}{2}}$ equivale a $abc^2\sqrt{b}$. Reciprocamente, em huma quantidade affecta do ſinal $\surd$ poderá ſupprimir-ſe o radical, com tanto que ſe tome a ametade de cada hum dos expoentes; transformaçaõ de grande utilidade.

111 Podemos pois em muitos caſos ſimplificar as quantidades affectas do ſinal $\surd$. Exemplos, $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ . . . $\sqrt{a^2b^3c} = ab\sqrt{bc}$ . . . $\sqrt{a^5b^4c^3} = a^2b^2c\sqrt{ac}$ . . . $\sqrt{\frac{a^3}{f}} = a\sqrt{\frac{a}{f}} = \frac{a}{f}\sqrt{af}$, multiplicando o numerador e denominador por f.

112 Donde vem, que para tirarmos para fora do radical os factores que delle puderem ſahir, tomaremos a ametade dos ſeus expoentes; e pelo contrario, para meter hum factor dentro do radical, dobraremos o ſeu expoente, iſto he, levantaremos o meſmo factor ao quadrado. Aſſim, $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2b}$ . . . $a\sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{\frac{a^2b}{a}} = \sqrt{ab}$ . . . $(a+b)\sqrt{c} = \sqrt{(a+b)^2c}$.

113 Se a quantidade tiver coefficiente, e eſte for quadrado perfeito, tiraremos a ſua raiz conforme as regras da Arithmetica. Aſſim, $\sqrt{9a^2b^3} = 3ab\sqrt{b}$, $\sqrt{1024\,a^2b^3c} = 32ab\sqrt{bc}$.

114 Mas ſe o coefficiente naõ for hum quadrado perfeito, veremos ſe he poſſivel reſolvello em dous factores, dos quais hum ſeja quadrado perfeito; tiraremos entaõ a raiz deſte, e deixaremos o outro debaixo do radical. Aſſim, $\sqrt{48a^2b^3} = \sqrt{16 \cdot 3a^2b^3} = 4ab\sqrt{3^b}$; $\sqrt{512\,a^3b^2} = 16ab\sqrt{2a}$.

115 Se a quantidade affecta do ſinal $\surd$ for po-

lynomio, mas naõ quadrado perfeito, examinaremos ſe pode reſolver-ſe em dous factores, dos quais hum ſeja quadrado para lhe tirar a raiz, deixando o outro dentro do radical. Eſte factor quadrado facilmente ſe deſcobre, quando he monomio. Por exemplo, $\sqrt{(4a^3b^2 - 5a^2b^3 + 6b^5)} = \sqrt{(4a^3 - 5a^2b + 6b^3)b^2} = b\sqrt{(4a^3 - 5a^2b + 6b^3)}$.

116 Mas quando o factor quadrado he polynomio, ou quando a quantidade complexa que eſtá debaixo do radical he quadrado perfeito, naõ pareça que ſe lhe extrahe a raiz, tirando-a ſeparadamente a cada hum dos termos. Por exemplo, ſe tendo $a^2 + b^2$ tomaſſemos $a + b$ pela ſua raiz quadrada, cahiriamos em grande erro, pois o quadrado de $a + b$ naõ he $a^2 + b^2$, mas $a^2 + 2ab + b^2$, de ſorte que $a^2 + b^2$ naõ tem raiz exacta em letras. O methodo que entaõ devemos obſervar he o ſeguinte, o qual ſe funda na formaçaõ do quadrado (25).

117 Seja a quantidade $60ab + 36a^2 + 25b^2$ de que ſe pede a raiz quadrada. Diſporemos os termos, como na diviſaõ, em ordem a huma das ſuas letras, de a, por exemplo.

$$\begin{array}{r|l}
36a^2 + 60ab + 25b^2 & 6a + 5b \text{ Raiz} \\
-36a^2 \qquad\qquad\qquad & 12a + 5b \\
\hline
+60ab + 25b^2 & \\
-60ab - 25b^2 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

A primeira parte da raiz ſe achará, tomando a de $36a^2$; e como $\sqrt{36a^2} = 6a$, eſcreveremos $6a$ na raiz. Subtrahindo o quadrado $36a^2$ da quantidade propoposta, resta $60ab + 25b^2$. E porque $60ab$ deve ser o producto do dobro da primeira parte $6a$ da raiz multiplicada pela segunda, para acharmos esta, dividiremos $60ab$ por $12a$; escrevendo pois o quociente $5b$ adiante da raiz, teremos $6a + 5b$ pela raiz buscada. Para confirmarmos esta operação, escreveremos $5b$ adiante de $12a$, e multiplicaremos o total $12a + 5b$ pelo mesmo quociente $5b$; e como tirando este producto da quantidade $60ab + 25b^2$, não resta nada, concluiremos que $6a + 5b$ he a raiz quadrada exacta de $36a^2 + 60ab + 25b^2$.

Tomemos por segundo exemplo a quantidade $9b^2 - 12ab + 16c^2 + 4a^2 + 16ac - 24bc$. Ordenando relativamente a a, e obrando como aqui se mostra, acharemos, que a raiz he $2a - 3b + 4c$.

$$\begin{array}{l|l}
4a^2 - 12ab + 16ac + 9b^2 - 24bc + 16c^2 & 2a - 3b + 4c \text{ Raiz} \\
-4a^2 & 4a - 3b \\
\hline
\text{I. Resto } - 12ab + 16ac + 9b^2 - 24bc + 16c^2 & 4a - 6b + 4c \\
\phantom{\text{I. Resto }} + 12ab - 9b^2 & \\
\hline
\text{II. Resto } + 16ac - 24bc + 16c^2 & \\
\phantom{\text{II. Resto }} - 16ac + 24bc - 16c^2 & \\
\hline
\text{Ultimo Resto } - - - - - 0 &
\end{array}$$

Do mesmo modo se achará, que as raizes quadradas das tres quantidades ... $16a^4 + 40a^3b + 25a^2b^2$ ... $36b^4 - 60ab^3 + 25a^2b^2 - 36b^2c^2 + 30abc^2 + 9c^4$ ... $a^6 - 4a^3c^3 + 8a^3e^3 + 4c^6 - 16c^3e^3 + 16e^6$, são $4a^2 + 5ab$ ... $6b^2 - 5ab - 3c^2$ ... $a^3 - 2c^3 + 4e^3$.

Do

Do Calculo das quantidades affectas do sinal $\surd$.

118 O Calculo destas quantidades irracionais se pratica por meio das mesmas quatro operações, que temos mostrado nas outras quantidades. Somaõ-se, ou diminuem-se duas, ou mais quantidades radicais, unindo-as com o sinal $+$; ou $-$, no caso de naõ serem semelhantes; porem se o forem, e houver sómente differença nos coefficientes numericos que estaõ fora do radical, reduzem-se pelo methodo ordinario. Por exemplo, $3a\sqrt{b}$ somado com $4b\sqrt{c}$ dá $3a\sqrt{b} + 4b\sqrt{c}$; $4ab\sqrt{c}$ somado com $5ab\sqrt{c}$ dá $9ab\sqrt{c}$; $3a\sqrt{b}$ tirado de $4b\sqrt{c}$ dá $4b\sqrt{c} - 3a\sqrt{b}$. Suppomos, que os radicais se tem reduzido antes da operaçaõ ás expressões mais simples (112); porque se tivessemos para ajuntar $4b\sqrt{a^3c}$ com $6a\sqrt{ab^2c}$, reduziriamos o primeiro a $4ab\sqrt{ac}$, e o segundo a $6ab\sqrt{ac}$, os quais somados daõ $10ab\sqrt{ac}$.

A multiplicaçaõ executa-se como se naõ entrassem radicais, e depois affecta-se o producto com o sinal $\surd$. Por exemplo $\sqrt{a} \times \sqrt{c} = \sqrt{ac}$, multiplicando a por c, e dando ao producto ac o sinal $\surd$. Do mesmo modo $\sqrt{(a^2 + b^2)} \times \sqrt{ac} = \sqrt{(a^3c + ab^2c)}$; $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = \sqrt{a^2} = a$; $(4 + 2\sqrt{2})\ (2 - \sqrt{2}) = 4$; $\sqrt{(a+b)} \times \sqrt{(a+b)} = a + b$; $\sqrt{(-a)} \times \sqrt{b} = \sqrt{-ab}$; $\sqrt{(-a)} \times \sqrt{(-b)} = -\sqrt{ab}$.

Pareceria neste ultimo exemplo, que o producto conforme a regra devia ser $\sqrt{ab}$, ou antes $\pm\sqrt{ab}$; mas como $\sqrt{(-a)} = \sqrt{a}\,.\,\sqrt{-1}$, e $\sqrt{(-b)}$

$\sqrt{(-b)} = \sqrt{b}\,.\,\sqrt{-1}$, ſerá $\sqrt{(-a)} \times \sqrt{(-b)} = \sqrt{a}\,.\,\sqrt{-1} \times \sqrt{b}\,.\,\sqrt{-1} = \sqrt{ab}\,.\,\sqrt{(-1)^2} = \sqrt{ab}\,.\,(-1) = -\sqrt{ab}$; porque a exiſtencia actual do ſinal $-$ em $\sqrt{(-1)^2}$ declara a operaçaõ porque chegamos ao quadrado $(-1)^2$, de que pertendemos tirar a raiz, e conſeguintemente naõ havendo duvida ſe elle procede de $(+1)(+1)$, ou de $(-1)(-1)$, naõ tem aqui lugar a ambiguidade do ſinal $\pm$. Naõ ſe confunda pois $\sqrt{(-a)^2}$ com $\sqrt{-a^2}$; o primeiro he . . . $\sqrt{(-a \times -a)} = -a$, e o ſegundo he . . . $\sqrt{(-a \times +a)}$, ou huma quantidade imaginaria $a\sqrt{-1}$. Iſto poſto, naõ pode haver difficuldade em multiplicar os polynomios, que tem termos affectos de imaginarios.

Donde ſe ſegue, que para quadrar huma quantidade affecta de $\sqrt{}$, baſta ſupprimir eſte ſinal. Aſſim querendo quadrar $\sqrt{(a^2 + b^2)}$, eſcreveremos $a^2 + b^2$. Do meſmo modo $\sqrt{(a^2b + b^3)^2} = a^2b + b^3$.

119 Logo com muita facilidade podémos deſembaraçar huma equaçaõ dos ſinais $\sqrt{}$ que ella tiver. Por exemplo, na equaçaõ $x - 2a = b + \sqrt{ax}$, deixaremos $\sqrt{ax}$ ſomente em hum membro, e teremos $x - 2a - b = \sqrt{ax}$; entaõ quadrando cada membro, teremos $x^2 - 4ax - 2bx + 4a^2 + 4ab + b^2 = ax$, ou $x^2 - (5a + 2b)x = -(2a + b)^2$.

120 Para dividir huma quantidade radical por outra, dividiremos como ſe naõ houveſſe o ſinal $\sqrt{}$, e daremos eſte ao quociente, ou á fracçaõ. Querendo, por exemplo, dividir $\sqrt{a}$ por $\sqrt{b}$, dividiremos a por b que dá $\frac{a}{b}$, e applicando o radical te-

temos $\sqrt{\frac{a}{b}}$. Do mesmo modo, $\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}} = \sqrt{\frac{ab}{a}}$ $= \sqrt{b}$; $\frac{\sqrt{(a^2 - x^2)}}{\sqrt{(a+x)}} = \sqrt{(a-x)}$; $\frac{ab\sqrt{bc}}{a\sqrt{b}}$ $= b\sqrt{c}$.

Estas fracções podem transformar-se em outras, que tenhaõ o denominador racional; porque se o denominador da fracçaõ for, por exemplo, $a \pm \sqrt{b}$, multiplicando tanto este, como o numerador por $a \mp \sqrt{b}$, o novo denominador será $a^2 - b$.

Assim $\frac{3+2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}$, multiplicando o numerador, e o denominador por $1 - \sqrt{2}$; e . . . $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{a-b}$.

121 Se ou o dividendo, ou o divisor for racional, separaremos hum do outro por huma risca, para significar que hum delles naõ he affecto do radical. Assim, para dividir a por $\sqrt{a}$, escreveremos $\frac{a}{\sqrt{a}}$. Quando houver semelhança nas letras do dividendo e divisor, he conveniente em muitos casos dar á quantidade racional (112) a forma de radical, porque deste modo se facilitaõ as simplificações.

No ultimo exemplo, mudaremos a em $\sqrt{a^2}$, e teremos $\frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{a}} = \sqrt{a}$. Do mesmo modo . . .

$$\frac{\sqrt{(a^2-x^2)}}{a+x}=\frac{\sqrt{(a^2-x^2)}}{\sqrt{(a+x)^2}}=\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}.$$

Se tivermos $\frac{a^2}{b\pm\sqrt{(b^2-a^2)}}$, multiplicando o numerador, e o denominador por $b\mp\sqrt{b^2-a^2}$, acharemos $b\mp\sqrt{(b^2-a^2)}$.

Da formaçaõ das potencias dos monomios, e extracçaõ das ſuas raizes.

122 O Numero que denota a potencia a que ſe quer elevar huma quantidade, chama-ſe *expoente da potencia.*

123 Do que havemos dito (19, e 20) ſe ſegue, que *para ſe elevar qualquer monomio a huma potencia dada, multiplicar-ſe-ha o expoente actual de cada letra da quantidade propoſta pelo expoente da potencia.* Aſſim para elevar a^2b^3c á quarta potencia eſcreveremos $a^8b^{12}c^4$, multiplicando os expoentes 2, 3, 1 de a, b, c pelo expoente 4 da potencia. Em geral a potencia m de $a^nb^pc^q$ he $a^{mn}b^{mp}c^{mq}$.

124 Se a quantidade propoſta for huma fracçaõ, elevaremos á potencia tanto o numerador, como o denominador. Aſſim, a quinta potencia de $\frac{a^2b^3}{cd^2}$ he $\frac{a^{10}b^{15}}{c^5d^{10}}$, e geralmente a potencia m de $\frac{a^nb^p}{c^qd^r}$ he $\frac{a^{mn}b^{mp}}{c^{mq}d^{mr}}$.

125 No caſo de haver coefficiente, elevallo-he-

hemos á potencia propoſta, multiplicando-o por ſi meſmo conſecutivamente. Aſſim a quinta potencia de $4a^3b^2$ he $1024a^{15}b^{10}$, ou indicando a operaçaõ, $4^5a^{15}b^{10}$.

126 Pelo que reſpeita aos ſinais, ſe o expoente da potencia for par, o reſultado terá ſempre $+$; mas ſe for impar, terá $+$, ou $-$, conforme for $+$, ou $-$ o ſinal da quantidade propoſta (24).

127 Em qualquer potencia pois o expoente actual de cada letra contem tantas vezes o expoente da ſua raiz, quantas ſaõ as unidades do expoente da meſma potencia. Na quarta potencia, por exemplo, o expoente de cada letra he quadruplo do que era na quantidade primitiva, que he a raiz da dita potencia.

O numero que exprime o gráo da raiz, chama-ſe *expoente da raiz.*

128 Logo para voltar de qualquer potencia á ſua raiz, iſto he, *para tirar a raiz de hum gráo propoſto de qualquer monomio, dividiremos o expoente actual de cada huma das ſuas letras pelo expoente da raiz.* Aſſim a raiz terceira de $a^{12}b^6c^3$ he a^4b^2c; a raiz quinta de $a^{20}b^{15}c^5$ he a^4b^3c. Em geral a raiz m de a^nb^p he $a^{\frac{n}{m}}b^{\frac{p}{m}}$.

O ſinal da raiz ſerá indifferentemente $+$, ou $-$, ſe o gráo for par; mas ſe for impar, a raiz terá o ſinal da quantidade propoſta.

129 Se a quantidade for huma fracçaõ, tiraremos ſeparadamente a raiz de ambos os ſeus termos.

130 Havendo coefficientes, tiraremos a ſua raiz pelos methodos da Arithmetica.

131 Quando o expoente da raiz naõ dividir exactamente cada hum dos expoentes da quantida-

de propoſta, naõ ſerá eſta huma potencia perfeita do gráo de que ſe trata. Neſte caſo o expoente fica fraccionario, e deſigna que ainda reſta extrahir huma raiz. Aſſim a raiz cubica de $a^3b^3c^4$ he $a^1bcc^{\frac{1}{3}}$, onde o expoente $\frac{1}{3}$ denota, que ainda reſta extrahir a raiz cubica de c.

132 O ſinal $\surd$ tambem ſerve para indicar as extracções de raizes ſuperiores ao ſegundo gráo, eſcrevendo-ſe na abertura delle o expoente da raiz. Aſſim, para ſignificar a raiz cubica de a, podemos eſcrever $\sqrt[3]{a}$, de maneira que $\sqrt[3]{a}=a^{\frac{1}{3}}$. Para ſignificar a raiz ſetima de a^4 eſcreve-ſe $\sqrt[7]{a^4}=a^{\frac{4}{7}}$.

133 Se a quantidade for complexa, naõ ſe deve praticar a diviſaõ em cada hum dos expoentes; mas conſidera-ſe a totalidade das ſuas partes como huma quantidade ſimples, cujo expoente he naturalmente 1, e divide-ſe eſte pelo expoente da raiz. Por exemplo, em lugar de $\sqrt[4]{(a^2+b^2)}$, ou $\sqrt[4]{\overline{a^2+b^2}}$ eſcreveremos $(a^2+b^2)^{\frac{1}{4}}$, ou $\overline{a^2+b^2}^{\frac{1}{4}}$. Se a quantidade total que eſtá debaixo do radical tiver ja hum expoente, eſte ſe dividirá pelo da raiz. Aſſim em lugar $\sqrt[4]{(a^2+b^2)^3}$ podemos eſcrever $(a^2+b^2)^{\frac{3}{4}}$.

Do Calculo dos radicais, e dos expoentes.

134 AS regras que havemos dado (118) para ſomar, e diminuir as quantidades radicais do ſegun-

gundo gráo, igualmente se applicaõ ás dos gráos superiores. Deste modo $\frac{a}{b}\sqrt[m]{\frac{c}{d}}+\frac{f}{g}\sqrt[m]{\frac{c}{d}}=\frac{ag+bf}{bg}\sqrt[m]{\frac{c}{d}}$; e $\frac{a}{b}\sqrt[m]{\frac{c}{d}}-\frac{f}{g}\sqrt[m]{\frac{c}{d}}=\frac{ag-bf}{bg}\sqrt[m]{\frac{c}{d}}$.

135 No multiplicar e dividir as quantidades radicais do mesmo gráo, tambem se pratica como nos radicais do segundo gráo. Assim $\sqrt[7]{a^5}\times\sqrt[7]{a^3}=\sqrt[7]{a^8}=a\sqrt[7]{a}$ . . . $\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$ . . $\sqrt[m]{5}\frac{a}{b}\times\frac{f}{g}\sqrt[m]{-20\frac{c}{d}}=\frac{f}{g}\sqrt[m]{\left(-100\frac{ac}{bd}\right)}$.

Para dividir $\sqrt[7]{a^5}$ por $\sqrt[7]{a^3}$ escreveremos $\sqrt[7]{a^2}$. Do mesmo modo $\frac{\sqrt[n]{ab}}{\sqrt[n]{acd}}=\sqrt[n]{\frac{b}{cd}}$ . . . $\frac{\sqrt[5]{a^3}}{a}=\sqrt[5]{\frac{a^3}{a^5}}=\sqrt[5]{\frac{1}{a^2}}=\frac{1}{\sqrt[5]{a^2}}$; porque em geral toda a potencia, ou toda a raiz da unidade he a unidade.

136 Para elevar as quantidades radicais a quaisquer potencias, multiplicaremos os seus expoentes pelos das potencias, a que as quizermos elevar. Assim $\left(\sqrt[7]{a^2b^3}\right)^4=\sqrt[7]{a^8b^{12}}=ab\sqrt[7]{ab^5}$; porque $\sqrt[7]{a^2b^3}=a^{\frac{2}{7}}b^{\frac{3}{7}}$ (132), e $\left(a^{\frac{2}{7}}b^{\frac{3}{7}}\right)^4=a^{\frac{8}{7}}b^{\frac{12}{7}}$ (123), ou $ab\sqrt[7]{ab^5}$.

Do

Do mesmo modo $\left(\sqrt[5]{2\left(\frac{a}{b}\right)^m}\right)^3 = \sqrt[5]{8\left(\frac{a}{b}\right)^{3m}}$.

Logo, quando o expoente do radical he o mesmo que o da potencia proposta, basta tirar o radical. Assim $\left(\sqrt[m]{a}\right)^m = a$; e com effeito, o fim he reduzir a quantidade ao primeiro estado.

137 Para extrahir huma raiz qualquer das quantidades radicais, deve-se multiplicar o expoente actual do radical pelo expoente da nova raiz. Assim, $\sqrt[3]{\sqrt[5]{a^4}} = \sqrt[15]{a^4}$, multiplicando 5 por 3; e

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a^p}} = \sqrt[mn]{a^p}$; porque $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a^p}} = \sqrt[m]{a^{\frac{p}{n}}} = \sqrt[mn]{a^p}$.

138 Se os radicais propostos forem de differente grão, para se fazerem sobre elles as duas operações de multiplicar e dividir, primeiramente se reduziraõ ao mesmo grão. Isto se consegue, multiplicando os expoentes de cada hum dos radicais, e os das quantidades que estaõ debaixo delles, pelo producto dos expoentes de todos os outros radicais.

Deste modo para reduzir ao mesmo grão os tres radicais $\sqrt[5]{a^3}$, $\sqrt[7]{a^2}$, $\sqrt[8]{a^7}$, multiplicaremos o expoente 5 do primeiro radical, e o expoente 3 da quantidade respectiva a^3, pelo producto 8.7, ou 56 dos expoentes dos outros radicais, e teremos $\sqrt[280]{a^{168}}$. Fazendo o mesmo a respeito dos outros dous, acharemos $\sqrt[280]{a^{80}}$, $\sqrt[280]{a^{245}}$. Porque, sen-

ſendo $\sqrt[5]{a^3} = a^{\frac{3}{5}}$, $\sqrt[7]{a^2} = a^{\frac{2}{7}}$, e $\sqrt[8]{a^7} = a^{\frac{7}{8}}$, para reduzirmos as tres fracções $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{7}{8}$ ao meſmo denominador, devemos multiplicar os dous termos de cada huma pelos productos dos denominadores de todas as outras.

Segue-ſe pois (135) que $\sqrt[m]{a^p} \cdot \sqrt[n]{b^q} = \sqrt[mn]{a^{np}b^{mq}}$; e $\frac{a}{b}\sqrt[m]{\frac{s}{t}} : \frac{c}{d}\sqrt[n]{\frac{y}{z}} = \ldots \frac{ad}{bc}\sqrt[mn]{\frac{s^n z^m}{t^n y^m}}$.

139 Logo, quando o expoente do radical, e o da quantidade delle affecta tem hum diviſor commum, podemos ſimplificar a expreſſaõ, dividindo ambos os expoentes por eſſe diviſor. Aſſim, $\sqrt[12]{a^8} = \sqrt[3]{a^2}$; $\sqrt[6]{a^3} = \sqrt{a}$.

140 Donde vem, que ſe o expoente da raiz que ſe pertende tirar, for producto de dous, ou mais numeros, podemos fazer ſucceſſivamente a extracçaõ da maneira ſeguinte. Supponhamos que ſe pede a raiz ſexta de a^{24}; podemos tirar primeiramente a raiz quadrada, depois a cubica, e teremos a raiz ſexta; porque (139) $\sqrt[6]{a^{24}} = \sqrt[3]{a^{12}} = \sqrt[1]{a^4} = a^4$, que he o meſmo que ſe tomaſſemos immediatamente a raiz ſexta de a^{24}, dividindo 24 por 6 conforme a regra geral (128).

Todas as operações precedentes ſe podem executar ainda mais commodamente por meio dos expoentes fraccionarios, que fazem as vezes dos radidicais, e saõ muito proprios para o calculo.

Havendo de multiplicar $\sqrt[5]{a^3}$ por $\sqrt[5]{a^4}$, transformaremos esta operaçaõ em $a^{\frac{3}{5}} \times a^{\frac{4}{5}}$, e (20) teremos $a^{\frac{7}{5}} = a . a^{\frac{2}{5}} = a \sqrt[5]{a^2}$. Do mesmo modo $\sqrt[5]{a^3} . \sqrt[7]{a^4} = a^{\frac{3}{5}} . a^{\frac{4}{7}} = a \sqrt[35]{a^6}$. Em geral . . $\sqrt[m]{a^n b^p} \times \sqrt[q]{a^r b^s} = \sqrt[qm]{a^{qn+mr} b^{pq+ms}}$.

O mesmo se praticará na divisaõ. Por exemplo, $\frac{\sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[5]{a^3}} = \frac{a^{\frac{4}{5}}}{a^{\frac{3}{5}}} = a^{\frac{1}{5}}$ (31), ou $\sqrt[5]{a}$; $\frac{\sqrt[5]{a^3 b^4}}{\sqrt[7]{a^2 b^3}} = . .$ $\frac{a^{\frac{3}{5}} b^{\frac{4}{5}}}{a^{\frac{2}{7}} b^{\frac{3}{7}}} = \sqrt[35]{a^{11} b^{13}}$. Em geral, $\frac{\sqrt[m]{a^n b^p}}{\sqrt[q]{a^r b^s}} = . .$ $\sqrt[qm]{a^{qn-mr} b^{pq-ms}}$.

141 Neste ultimo exemplo se for $\frac{r}{q} > \frac{n}{m}$, o expoente de a será negativo, e o mesmo acontecerá ao de b, se for $\frac{s}{q} > \frac{p}{m}$. Geralmente nas divisões, ou fracções, se o expoente da letra do denominador for maior que o da letra correspondente do numerador, a differença entre elles com o sinal — será o expoente da mesma letra no numerador; de maneira que a toda a fracçaõ algebrica se pode dar a forma de inteiro. Por exemplo, em

em lugar de $\frac{a^3}{b^2}$ podemos escrever $a^3 b^{-2}$.

Com effeito, concebendo que a contem a b hum certo numero m de vezes, inteiro, ou fraccionario, será $a = mb$, e conseguintemente $\frac{a^3}{b^2} = \frac{m^3 b^3}{b^2} = m^3 b$. Mas tambem $a^3 b^{-2} = m^3 b^3 b^{-2} = m^3 b$ (20). Logo $\frac{a^3}{b^2} = a^3 b^{-2}$.

Em geral: *Pode huma quantidade passar do denominador para numerador, ou do numerador para denominador sem alteraçaõ da fracçaõ, escrevendo-se como factor no termo em que naõ estava, mas com o expoente de sinal contrario do que tinha.*

Exemplos ... $\frac{1}{a^3} = a^{-3}$ ... $a^5 = \frac{1}{a^{-5}}$ ... $\frac{1}{a^m} = a^{-m}$ ... $\frac{e}{f} = \frac{f^{-1}}{e^{-1}}$ ... $\frac{a^m b^n}{c^p d^q} = a^m b^n c^{-p} d^{-q}$ ... $\frac{a^3 + b^3}{a^2 + b^2} = (a^3 + b^3)(a^2 + b^2)^{-1}$ ... $\frac{\sqrt[5]{(a^3 + b^3)^4}}{\sqrt[4]{(a^2 + b^2)^3}} = (a^3 + b^3)^{\frac{4}{5}} (a^2 + b^2)^{-\frac{3}{4}}$.

142 E reciprocamente: *Se huma quantidade constar de partes affectas de expoentes negativos, poderaõ estas passar com expoentes positivos, para denominador, ou para numerador, conforme se acharem no numerador, ou no denominador.*

Des-

Deste modo $a^3 b^{-4} = \frac{a^3}{b^4}$ . . . $a^{m-3} = \frac{a^m}{a^3}$ . . . $\frac{a}{b^{-2}} = ab^2$ . . . $\frac{p^{-2}\,q^{-3}}{(mn)^{-1}} = \frac{mn}{p^2\,q^3}$, e assim por diante.

Tal he a idêa que devemos formar dos expoentes negativos.

Da formaçaõ das potencias das quantidades complexas.

143 DO que havemos dito a respeito das potencias se segue, que para elevar qualquer quantidade complexa a huma potencia proposta, devemos multiplicar a quantidade por si mesma tantas vezes, quantas saõ as unidades do expoente da mesma potencia. Mas como este calculo he as mais das vezes longo, e sempre indirecto, por isso vamos a dar hum methodo livre destes inconvenientes, considerando primeiramente a propriedade dos productos das quantidades binomias, porque destes depende a formaçaõ das potencias das quantidades mais compostas.

144 Sejaõ $x+a$, $x+b$, $x+c$, $x+d$, &c. muitas quantidades binomias, todas com o termo x commum.

$$\begin{array}{ll} \text{Multiplicando} & x + a \\ \text{por} \;.\;.\;.\;. & x + b \\ \hline \text{teremos} \;.\;.\;.\;.\;.\;. & x^2 + ax + ab \\ & + bx \end{array}$$

Mul-

Multiplicando eſte producto por $x + c$, teremos

$$\begin{array}{llll} x^3 & + ax^2 & + abx & + abc \\ & + bx^2 & + acx & \\ & + cx^2 & + bcx & \end{array}$$

Multiplicando eſte ſegundo producto por $x + d$, teremos

$$\begin{array}{lllll} x^4 & + ax^3 & + abx^2 & + abcx & + abcd \\ & + bx^3 & + acx^2 & + abdx & \\ & + cx^3 & + adx^2 & + acdx & \\ & + dx^3 & + bcx^2 & + bcdx & \\ & & + bdx^2 & & \\ & & + cdx^2 & & \end{array}$$

e aſſim por diante. Reflectindo neſtes productos, e tomando por hum termo todas as quantidades que eſtaõ em huma meſma colunna, noto o ſeguinte.

1.° O primeiro termo de cada producto he o primeiro termo x de cada binomio, elevado a huma potencia deſignada pelo numero dos binomios; de maneira que ſe eſte foſſe m, o primeiro termo ſeria x^m.

2.° As potencias de x vaõ ao depois diminuindo continuamente de huma unidade até o ultimo termo, em que naõ entra x.

3.° Em quanto aos multiplicadores dos differentes termos, o do primeiro he conſtantemente a unidade; o do ſegundo he a ſoma dos ſegundos termos a, b, c, &c. dos binomios; o do terceiro he a ſoma dos productos das quantidades a, b, c, &c. multiplicadas duas a duas; o do quarto he a ſoma dos productos das meſmas quantidades a, b, c, &c. multiplicadas tres a tres; e aſſim por diante até o ultimo termo, que he ſempre o producto das ditas quantidades. Eſtas conſequencias ſaõ evidentes, ſeja qual for o numero dos binomios $x + a$, $x + b$, &c. que ſe tem multiplicado.

145 Se as quantidades a, b, c, d, &c. forem todas iguais a a, os producٌtos ſeraõ as potencias ſucceſſivas de $x + a$. Subſtituindo pois a em lugar de b, c, d, &c. os producٌtos ſe mudaraõ em

$$x^2 + 2ax + x^2 = (x + a)^2$$
$$x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3 = (x + a)^3$$
$$x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4 = (x + a)^4$$

Logo ſe o expoente da potencia, a que ſe pertende elevar o binomio, for m, as potencias ſucceſſivas de x ſeraõ x^m, x^{m-1}, x^{m-2}, x^{m-3}, x^{m-4}, &c.

146 Pelo que reſpeita á lei dos coefficientes, ou á dependencia que tem de m, como o multiplicador do ſegundo termo (144) he igual á ſoma das quantidades a, b, c &c, no caſo de ellas ſerem iguais a a, ſerá a tomado tantas vezes, quantas forem as meſmas quantidades. Logo para m quantidades o multiplicador ſerá ma, iſto he, ſerá o coefficiente m igual ao expoente do primeiro termo da potencia. Iſto com effeito ſe acha nas tres potencias que acima expuzemos.

Nos outros termos, cada huma das quantidades ab, ac, ad, &c. ſe reduz a a^2 na ſuppoſiçaõ preſente, como tambem abc, abd, &c. ſe mudaõ em a^3, e aſſim por diante. Logo o multiplicador do terceiro termo ſe reduz a a^2 tomado tantas vezes, quantos ſaõ os producٌtos que podem dar as letras a, b, c, &c., multiplicadas duas a duas. Da meſma ſorte, o multiplicador do quarto termo ſe reduz a a^3 tomado tantas vezes, quantos ſaõ os producٌtos das meſmas letras multiplicadas tres a tres; e aſſim por diante. Teremos pois os coefficientes, ſe determinarmos quantos producٌtos póde dar o numero m

do

de letras, multiplicadas duas a duas, tres a tres, &c.

147 Se combinarmos hum numero m de letras por todos os modos imaginaveis, isto he, duas a duas, tres a tres, quatro a quatro, &c., sem que haja repetiçaõ de huma mesma letra em huma mesma combinaçaõ, acharemos:

1.° Que o numero de combinações de muitas letras duas a duas he o dobro do numero de productos realmente differentes, que se podem formar, multiplicando as letras duas a duas. Por exemplo, a e b daõ duas combinações ab, ba, mas estas naõ saõ dous productos differentes. Logo o numero de productos he igual a $\frac{1}{1.2}$ do numero destas combinações.

2.° O numero de combinações tres a tres he o sextuplo do numero de productos realmente distinctos. Por exemplo, as tres quantidades a, b, c, sendo dispostas de todos os modos possiveis, daõ seis combinações abc, acb, bac, bca, cab, cba, que naõ saõ productos differentes. Logo o numero de productos he igual a $\frac{1}{1.2.3}$ de tais combinações.

Semelhantemente, quatro quantidades saõ susceptiveis de 24 combinações, cada huma das quais he o mesmo producto; e conseguintemente o numero de productos differentes, que se podem formar combinando muitas letras 4 a 4, he $\frac{1}{1.2.3.4}$ do numero total destas combinações. Da mesma sorte o numero de productos differentes, que se podem

dem formar combinando muitas letras 5 a 5, 6 a 6, 7 a 7, &c. he $\frac{1}{1.2.3.4.5}$, $\frac{1}{1.2.3.4.5.6}$, $\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7}$, &c. isto he, huma fracçaõ que tem por numerador o numero total das combinações, e por denominador o producto dos numeros 1, 2, 3, 4, &c. até o que designa de quantas letras se compõe o producto.

148 Resta achar o numero das combinações 2 a 2, 3 a 3, &c. que pode dar o numero m de letras.

Em quanto ás combinações duas a duas, he evidente, que naõ devendo multiplicar-se huma letra por si mesma, será $m - 1$ o numero de letras, por que elle se ha-de multiplicar, e conseguintemente cada letra dará $m - 1$ combinações: logo m letras daraõ $m\,(m - 1)$ combinações, e por tanto o numero de productos de duas letras realmente distinctos será $m.\frac{m-1}{2}$.

Nas combinações tres á tres he necessario, que cada huma das combinações duas a duas seja combinada com cada letra que ella naõ inclue, isto he com $m - 2$ letras, e conseguintemente huma mesma combinaçaõ de duas letras dará $m - 2$ combinações de tres letras: logo, como ha $m.\overline{m-1}$ combinações de duas letras, o numero total das combinações de tres letras será $m.\overline{m-1}.\overline{m-2}$, e por tanto (147) o numero dos productos realmente differentes será $m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}$.

Acha-

Acharemos do meſmo modo, que o numero das combinações 4 a 4, 5 a 5, 6 a 6, &c. he $m . \overline{m-1} . \overline{m-2} . \overline{m-3}$, $m . \overline{m-1} . \overline{m-2} . \overline{m-3} . \overline{m-4}$, $m . \overline{m-1} . \overline{m-2} . \overline{m-3} . \overline{m-4} . \overline{m-5}$, &c.: Logo o numero de productos diſtinctos, que ſe podem formar, multiplicando m letras 4 a 4, 5 a 5, 6 a 6, &c. ſerá repreſentado por $m . \frac{m-1}{2} . \frac{m-2}{3} . \frac{m-3}{4}$; por $m . \frac{m-1}{2} . \frac{m-2}{3} . \frac{m-3}{4} . \frac{m-4}{5}$; por $m . \frac{m-1}{2} . \frac{m-2}{3} . \frac{m-3}{4} . \frac{m-4}{5} . \frac{m-5}{6}$; e aſſim por diante.

Donde ſe ſegue (146) que o coefficiente de qualquer termo da potencia de hum binomio he igual ao coefficiente do precedente multiplicado pelo expoente de x no meſmo termo precedente, e dividido pelo numero dos termos precedentes.

149 Concluamos pois que

$$(x+a)^m = x^m + max^{m-1} + m . \frac{m-1}{2} a^2 x^{m-2} + m . \frac{m-1}{2} . \frac{m-2}{3} a^3 x^{m-3} + m . \frac{m-1}{2} . \frac{m-2}{3} . \frac{m-3}{4} a^4 x^{m-4} + \&c.$$

Por eſta formula elevaremos hum binomio qualquer a huma potencia dada, ſubſtituindo em lugar de x o primeiro termo do binomio propoſto, em lugar de a o ſegundo, e por m o expoente da potencia.

Querendo, por exemplo, formar a ſetima potencia

cia de $x+a$, acharemos $x^7 + 7ax^6 + 21a^2x^5 + 35a^3x^4 + 35a^4x^3 + 21a^5x^2 + 7a^6x + a^7$. Porque, $m = 7$; logo $x^m = x^7$; $max^{m-1} = 7ax^6$; $m.\frac{m-1}{2}.a^2x^{m-2} = 7.\frac{6}{2}a^2x^5 = 21a^2x^5$; $m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}a^3x^{m-3} = 21.\frac{5}{3}a^3x^4 = 35a^3x^4$; e assim por diante até o termo ..... $m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}.\frac{m-3}{4}.\frac{m-4}{5}.\frac{m-5}{6}.\frac{m-6}{7}.a^7x^{m-7}$, o qual se reduz a a^7. Os termos seguintes saõ nada, porque no coefficiente de todos elles entra $m-7=0$ na nossa hypothese. Em geral o calculo naõ passa adiante do numero $m+1$ de termos, e o ultimo terá a fórma $m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}...\frac{m-(m-1)}{m}a^m$.

Se em lugar de $x+a$ tivermos $x-a$, mudaremos os sinais (126) nos termos em que entraõ potencias impares de a, de maneira que reunindo ambos os casos, será $(x \pm a)^m = x^m \pm max^{m-1} + m\frac{m-1}{2}a^2x^{m-2} \pm m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}a^3x^{m-3} + \&c.$

150 Por quanto (142) $x^{m-1} = \frac{x^m}{x}$, $x^{m-2} = \frac{x^m}{x^2}$, $x^{m-3} = \frac{x^m}{x^3}$, e assim por diante, podemos mudar a nossa formula em $(x \pm a)^m = x^m\left(1 \pm m\frac{a}{x} + m.\frac{m-1}{2}\frac{a^2}{x^2} \pm m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}\frac{a^3}{x^3} + \&c.\right)$

donde ſe deduz o methodo ſeguinte para achar commodamente a ſerie dos termos, de que deve conſtar qualquer potencia, cujo expoente m ſeja numero poſitivo ou negativo, inteiro ou fraccionario, de hum binomio ou ſimples como $x \pm a$, ou composto como $x^2 \pm a^2$, $x^3 \pm a^3$, &c.

151 Eſcrevaõ-ſe em huma linha as quantidades

$$m, \frac{m-1}{2}, \frac{m-2}{3}, \frac{m-3}{4}, \frac{m-4}{5}, \&c.$$

$$1 \pm m\frac{a}{x} + m.\frac{m-1}{2}\frac{a^2}{x^2} \pm m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}\frac{a^3}{x^3}$$

$$+ m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}.\frac{m-3}{4}\frac{a^4}{x^4}, \&c.$$

Aſſentando depois a unidade por baixo, e mais para a eſquerda, forme-ſe a ſerie inferior por eſta lei.

Multiplique-ſe a unidade pelo primeiro termo da ſerie ſuperior, e tambem por $\pm \frac{a}{x}$, conforme o ſegundo termo do binomio for poſitivo, ou negativo, e teremos o ſegundo termo da ſerie inferior.

Multiplique-ſe eſte ſegundo termo pelo ſegundo da ſerie ſuperior, e por $\pm \frac{a}{x}$, e teremos o terceiro termo da ſerie inferior.

Multiplique-ſe eſte terceiro termo pelo terceiro da ſerie ſuperior, e por $\pm \frac{a}{x}$, teremos o quarto da ſerie inferior; e aſſim por diante.

Ajuntando todos os termos da ſerie inferior, e multiplicando a totalidade por x^m, teremos o valor de $(x \pm a)^m$.

152 Se o binomio fosse $x^2 \pm a^2$, ou $x^3 \pm a^3$, ou &c. multiplicariamos successivamente os termos por $\pm \frac{a^2}{x^2}$ ou por $\pm \frac{a^3}{x^3}$, em geral, pelo segundo termo do binomio dividido pelo primeiro; e a totalidade se multiplicaria depois pelo primeiro termo do binomio, elevado á potencia proposta.

Para fazermos huma applicação, busquemos a sexta potencia de $x^3 + a^3$.

$$6 . \frac{5}{2} \quad \frac{4}{3} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{1}{6}$$

$$1 + \frac{6a^3}{x^3} + \frac{15a^6}{x^6} + \frac{20a^9}{x^9} + \frac{15a^{12}}{x^{12}} + \frac{6a^{15}}{x^{15}} + \frac{a^{18}}{x^{18}},$$

Tendo achado a serie inferior pelo methodo antecedente, multiplicaremos a totalidade por $(x^3)^6 = x^{18}$, e teremos $x^{18} + 6a^3x^{15} + 15a^6x^{12} + 20a^9x^9 + 15a^{12}x^6 + 6a^{15}x^3 + a^{18}$.

153 Se em lugar de binomio houvermos de elevar hum polynomio a huma potencia proposta, por exemplo, o trinomio $a + b + c$ á terceira potencia, faremos $b + c = p$, e (149) teremos $(a + p)^3 = a^3 + 3a^2p + 3ap^2 + p^3 = a^3 + 3a^2(b + c) + 3a(b + c)^2 + (b + c)^3$. Como $(b + c)^2$, e $(b + c)^3$ saõ potencias de binomios, naõ ha difficuldade em as achar. Acabando o calculo, teremos $a^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 6abc + 3ac^2 + b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3$.

154 Isto mesmo se póde achar pelo methodo

do ſeguinte, que ſe deduz da formula do binomio. Faça-ſe $b + c = p$; teremos $(a + p)^3 =$

$$\begin{array}{cccc} a^3 + 3a^2p & + \; 3ap^2 & + \; p^3 \\ 1 & 2 & 3 \end{array}$$

Eſcreva-ſe debaixo de cada termo o expoente de p, e multiplique-ſe cada termo pelo numero correſpondente, mudando hum p em b, o que dá

$$\begin{array}{ccc} 3a^2b + 6abp & + \; 3bp^2 \\ & \frac{1}{2} & 1 \end{array}$$

Eſcreva-ſe debaixo deſta quantidade a ametade de cada expoente de p, e multiplique-ſe cada termo pelo numero correſpondente, mudando hum p em b; teremos . . . .

$$\begin{array}{cc} 3ab^2 + 3b^2p \\ & \frac{1}{3} \end{array}$$

Eſcreva-ſe debaixo de cada termo o terço do expoente de p, e multiplicando como dantes, mudando tambem hum p em b, teremos . . . b^3

Ajuntando eſtas quatro linhas, e mudando p em c, acharemos . . . .

$a^3 + 3a^2c + 3ac^2 + c^3 + 3a^2b + 9abc + 3bc^2 + 3ab^2 + 3b^2c + b^3$.

Multiplicaremos pois cada termo da primeira linha pelo expoente de p; cada termo da ſegunda pela ametade do expoente de p neſta linha; cada termo da terceira pelo terço do expoente de p neſta terceira, mudando hum p em b em todas as linhas, menos na primeira em que naõ ha mudança; e mudando ultimamente em c todos os p que reſtarem. Eſta regra ſe applica da meſma ſorte aos quadrinomios, quintinomios, &c.

Da extracçaõ das raizes das quantidades complexas.

155 DO que vamos a dizer sobre a raiz quinta se deduzirá o que devemos executar nos outros gráos.

Por quanto $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$, he manifesto, que para achar o primeiro termo da raiz quinta de huma quantidade litteral, havendo ordenado todos os termos da potencia dada, tiraremos a raiz quinta do primeiro termo; e para achar o segundo termo da raiz, dividiremos o segundo termo da quantidade proposta pelo quintuplo da quarta potencia da raiz achada. Com effeito $\sqrt[5]{a^5} = a$, e $\frac{5a^4b}{5a^4} = b$, que he o segundo termo da raiz. Para verificarmos esta operaçaõ, depois de ter o segundo termo, elevaremos ao quinto gráo a raiz achada, e tiraremos o resultado da quantidade proposta.

Exemplo. Pede-se a raiz quinta de . . . . .

$$\begin{array}{l} 32a^5 + 240a^4b + 720a^3b^2 + 1080a^2b^3 + 810ab^4 + 243b^5 \\ \underline{-\,32a^5 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad} \\ \textit{Resto} + 240a^4b + 720a^3b^2 + 1080a^2b^3 + 810ab^4 + 243b^5 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \textit{Raiz} \\ \underline{2a + 3b} \\ 80a^4 \end{array} \right.$$

Tiro a raiz quinta de $32a^5$ que he $2a$, e escrevo-a na raiz. Elevo $2a$ á quinta potencia, e tirando da quantidade proposta o producto $32a^5$, destróc-se o primeiro termo.

Ele-

Elevo a raiz $2a$ á quarta potencia, tenho $16a^4$; efcrevo o quintuplo $80a^4$ por baixo da raiz $2a$, e por elle divido o primeiro termo $240a^4b$ do refto; efta operaçaõ dá $3b$, que efcrevo na raiz. Elevo pois $2a + 3b$ á quinta potencia, e fazendo a fubtracçaõ nada refta; logo a raiz he exactamente $2a + 3b$.

Se a raiz houveffe de conftar de mais de dous termos, appareceria algum refto depois defta primeira operaçaõ. Entaõ confiderando $2a + 3b$ como huma fó quantidade, com ella fe continuaria a operaçaõ para achar o terceiro termo, da maneira que fe praticou com $2a$ para achar o fegundo.

156 Pelo que refpeita ás quantidades numericas, para extrahirmos a raiz do gráo m, fepararemos o numero dado em claffes de m letras, começando pela direita. Da ultima claffe á efquerda, que póde ter menos letras do que as outras, tiraremos a raiz do gráo m, a qual naõ conftará de mais de huma letra, e ferá a primeira da raiz. Para junto do refto abaixaremos a claffe feguinte, e feparando $m - 1$ letras á direita, dividiremos a parte que ficar á efquerda por m vezes a raiz achada, elevada á potencia $m - 1$; e affim por diante.

Efta regra que ja enfinamos (Arith. 156 §§), fe percebe aqui com muita facilidade, advertindo que $(a + b)^m = a^m + ma^{m-1}b$ &c, e que fe a reprefentar dezenas, e b unidades, a^m naõ póde incluir-fe nos m ultimos algarismos, nem $ma^{m-1}b$ nos $m - 1$ ultimos. Na quinta potencia,

cia, por exemplo $(10)^5 = 100000$, e $(10)^4 = 10000$; logo a^5 naõ ſe contem nos cinco ultimos algariſmos, nem $4a^4$ nos quatro ultimos.

Do modo de ter a raiz approximada das potencias imperfeitas das quantidades litterais.

157 QUando a quantidade complexa naõ he potencia perfeita do gráo de que ſe pede a raiz, naõ he poſſivel que eſta ſe ache exactamente; devemos porem approximalla tanto para o verdadeiro valor, quanto exigir o problema que depender deſſa extracçaõ. Pelo methodo que acabamos de expôr para as potencias perfeitas, poderiamos achar as raizes approximadas; porque teriamos huma ſerie de termos fraccionarios, dos quais aproveitariamos ſómente hum numero limitado, deſprezando os outros, que diminuirião continuamente de valor. Podemos porem chegar ao meſmo reſultado por hum caminho muito mais breve, fazendo uſo da formula do binomio, para o que devemos lembrar-nos (133) que as quantidades irracionais ſe pódem eſcrever em fórma de potencias com expoentes fraccionarios, ou que $\sqrt[m]{(a+x)} = (a+x)^{\frac{1}{m}}$.

Exemplo I. Pede-ſe a raiz quadrada de $a+x$, iſto he, o valor de $(a+x)^{\frac{1}{2}}$

Eſcreveremos (151) a ſerie . . . .

$$\frac{1}{2},\ \frac{\frac{1}{2}-1}{2},\ \frac{\frac{1}{2}-2}{3},\ \frac{\frac{1}{2}-3}{4},\ \frac{\frac{1}{2}-4}{5},\ \&c.$$

a qual ſe reduz a . . . .

$$\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{3}{6}, -\frac{5}{8}, -\frac{7}{10}, \&c.$$

Formaremos depois a ſegunda ſerie . . . .

$$1+\frac{1}{2}\frac{x}{a}-\frac{1}{8}\frac{x^2}{a^2}+\frac{1}{16}\frac{x^3}{a^3}-\frac{5}{128}\frac{x^4}{a^4}$$
$$+\frac{7}{256}\frac{x^5}{a^5}-\&c.$$

E multiplicando a totalidade por $a^{\frac{1}{2}}$, teremos

$$\sqrt{(a+x)}=a^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{2}\frac{x}{a}-\frac{1}{8}\frac{x^2}{a^2}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{16}\frac{x^3}{a^3}-\frac{5}{128}\frac{x^4}{a^4}+\frac{7}{256}\frac{x^5}{a^5}-\&c.\right)$$

a qual ſe póde continuar com facilidade até onde quizermos, e muito melhor, ſe eſcrevermos os coefficientes, indicando ſómente a multiplicaçaõ. Deſte modo

$$\sqrt{(a+x)}=a^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{2}\frac{x}{a}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\frac{x^2}{a^2}\right.$$
$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\frac{x^3}{a^3}-\frac{1.\ 3.\ 5}{2.\ 4.\ 6.\ 8}\frac{x^4}{a^4}+\frac{1.\ 3.\ 5.\ 7}{2.\ 4.\ 6.\ 8.\ 10}$$
$$\left.\frac{x^5}{a^5}-\&c.\right)$$

Na qual os numeradores ſe fórmaõ dos numeros pares multiplicados entre ſi, e os denominadores de productos dos numeros impares.

Da meſma ſorte acharemos . . . .

$$\sqrt{(a-x)}=a^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{1}{2}\frac{x}{a}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\right.$$
$$\left.\frac{x^2}{a^2}-\frac{1.\ 3}{2.\ 4.\ 6}\frac{x^3}{a^3}-\frac{1.\ 3.\ 5.}{2.\ 4.\ 6.\ 8}\frac{x^4}{a^4}-\&c.\right)$$

158 Pa-

158 Para moſtrarmos o uſo deſtas approximações nas quantidades numericas, ſupponhamos que ſe pede a raiz quadrada de 101. Partiremos eſte numero em duas partes, huma das quais ſeja quadrado perfeito, por exemplo, em 100 e 1; entaõ ſuppondo $a = 100$, e $x = 1$, teremos $\frac{x}{a} = 0{,}01$, e $\sqrt{(a + x)} = \sqrt{101} = 10\left(1 + \frac{0{,}01}{2} - \frac{(0{,}01)^2}{2.4} + \frac{3(0{,}01)^3}{2.4.6} - \frac{3.5\,(0{,}01)^4}{2.4.6.8} + \&c.\right)$

Querendo eſta raiz approximada ſómente até as decimas-milleſimas, baſta tomar os tres primeiros termos, porque o quarto $\frac{(0{,}01)^3}{16}$ ſe reduz a 0,000000625, e ainda que eſte termo ſe deva multiplicar por 10, como todos os outros, naõ dá por iſſo mais do que 0,00000625, quantidade muito menor que huma decima-milleſima. Os termos ſeguintes por mais forte razaõ ſeráõ muito menores; porque ſaõ continuamente multiplicados pela fracçaõ 0,01. O valor pois de $\sqrt{101}$ ſe reduz a . . . .

$$10\left(1 + \frac{0{,}01}{5} - \frac{(0{,}01)^2}{8}\right) = 10(1 + 0{,}005 - 0{,}0000125) = 10{,}0499,$$ parando nas decimas-milleſimas.

Exemplo II. Pede-ſe a raiz quinta de $a^5 - x^5$, iſto he, o valor de $(a^5 - x^5)^{\frac{1}{5}}$.

A ſerie neſte caſo he

$$\frac{1}{5},\ -\frac{4}{10},\ -\frac{9}{15},\ -\frac{14}{20},\ -\frac{19}{25},\ \&c.$$

Logo teremos . . . .

$$\sqrt[5]{(a^5-x^5)} = a\left(1 - \frac{1}{5}\frac{x^5}{a^5} - \frac{1}{5}\cdot\frac{4}{10}\frac{x^{10}}{a^{10}} - \frac{1.4.9}{5.10.15}\frac{x^{15}}{a^{15}} - \frac{1.4.9.14}{5.10.15.20}\frac{x^{20}}{a^{20}} - \&c.\right)$$

159 Advirta-ſe que neſtas ſeries, e em todas as que ſe podem formar do meſmo modo, devemos tomar para primeiro termo o maior da quantidade propoſta. Por exemplo, em $\sqrt{(a+x)}$ havemos tomado a por primeiro termo; mas ſe x foſſe maior que a, deveriamos tomar x. A razaõ he, porque ſendo $x > a$, he $\frac{x}{a} > 1$, a ſerie ...

$$a^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{x}{a} - \frac{1}{8}\frac{x^2}{a^2} + \&c.\right)$$ he *divergente*, ou os ſeus termos vaõ ſempre creſcendo, e conſeguintemente naõ ſe deve parar em hum certo numero delles. Porém ſe neſte meſmo caſo tomarmos x para primeiro termo, virá a ſerie *convergente*

$$a^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{a}{x} - \frac{1}{8}\frac{a^2}{x^2} + \&c.\right),$$ cujos termos vaõ diminuindo cada vez mais.

160 Por quanto toda a fracçaõ algebrica he ſuſceptivel da forma de inteiro (141), ſegue-ſe que pela formula do binomio podemos tambem reduzir a ſerie toda a fracçaõ, que tiver o denominador complexo, com maior facilidade do que pela diviſaõ.

Por exemplo ſe tivermos $\frac{a}{b+x}$, que he o meſmo que $a(b+x)^{-1}$, elevaremos (151) $b+x$

á

á potencia -1. Formando pois a ferie . . .

$$-1,\ \frac{-1-1}{2},\ \frac{-1-2}{3},\ \frac{-1-3}{4},\ \&c.$$

ou . . . $-1, -1, -1, -1$, &c.

teremos $(b+x)^{-1}=b^{-1}\left(1-\frac{x}{b}+\frac{x^2}{b^2}-\frac{x^3}{b^3}+\frac{x^4}{b^4}-\&c.\right)=\frac{1}{b}-\frac{x}{b^2}+\frac{x^2}{b^3}-\frac{x^3}{b^4}+\frac{x^4}{b^5}-\&c.$ Logo $a(b+x)^{-1}=\frac{a}{b+x}=\frac{a}{b}-\frac{ax}{b^2}+\frac{ax^2}{b^3}-\frac{ax^3}{b^4}+\frac{ax^4}{b^5}-\&c.$

Do mefmo modo $\frac{a^2}{a^2-x^2}=a^2(a^2-x^2)^{-1}=a^2.a^{-2}\left(1+\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^4}{a^4}+\frac{x^6}{a^6}+\frac{x^8}{a^8}+\&c.\right)=1+\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^4}{a^4}+\frac{x^6}{a^6}+\frac{x^8}{a^8}+\&c.$

Se tiveffemos para reduzir $\frac{a^2}{(a^2+x^2)^3}$ em ferie, confiderariamos efta quantidade como $a^2(a^2+x^2)^{-3}$. Do mefmo modo em lugar de $\frac{a^2}{\sqrt[5]{(a^2+x^2)^3}}$ efcreveremos $a^2(a^2+x^2)^{-\frac{3}{5}}$; e af-assim nos outros casos.

As quantidades irracionais, e fraccionarias tambem se transformaõ em series infinitas pelo *Methodo dos Coefficientes indeterminados*, de que vamos a dar idêa em alguns exemplos.

Supponhamos que se quer reduzir em serie a fracçaõ $\frac{a}{b+x}$.

Sejaõ as quantidades $A, B, C, D, E,$ &c. tais, que tenhamos . . . . .

$$\frac{a}{b+x} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \&c.$$

Isto supposto, multiplicando o segundo membro pelo denominador, e transpondo, será . . .

$$\begin{aligned} o = &Ab + Bbx + Cbx^2 + Dbx^3 + Ebx^4 + \&c. \\ &- a + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \&c. \end{aligned}$$

Se igualarmos cada columna a nada, o segundo membro se destruirá como deve ser, e teremos tantas equações, quantas saõ as quantidades indeterminadas $A, B, C,$ &c. Deste modo será $-a + Ab = o$ . . . $Bbx + Ax = o$ . . . $Cbx^2 + Bx^2 = o$ . . . $Dbx^3 + Cx^3 = o$ . . $Ebx^4 + Dx^4 = o$ . . . &c.

A primeira equaçaõ dá $A = \frac{a}{b}$. Substituindo este valor na segunda, teremos $B = -\frac{a}{b^2}$. Substituindo este na terceira, teremos $C = \frac{a}{b^3}$. Da mesma sorte se achará $D = -\frac{a}{b^4}$ . . . $E = \frac{a}{b^5}$. Logo substituindo todos estes valores na serie, acharemos

mos $\frac{a}{b+x} = \frac{a}{b} - \frac{ax}{b^2} + \frac{ax^2}{b^3} - \frac{ax^3}{b^4} + \frac{ax^4}{b^5} - \&c.$

Querendo extrahir a raiz quadrada de $a+x$ supporemos $\sqrt{(a+x)} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \&c.$ e teremos (119) $a + x =$

$$\begin{aligned} A^2 + 2ABx + 2ACx^2 + 2ADx^3 + 2AEx^4 + \&c. \\ + B^2x^2 + 2BCx^3 + 2BDx^4 + \&c. \\ + C^2x^4 + \&c. \end{aligned}$$

a qual dá $A^2 = a \ldots 2AB = 1$, donde vem $A = a^{\frac{1}{2}}$, $B = \frac{1}{2a^{\frac{1}{2}}}$, e formando huma equaçaõ de cada columna, $C = -\frac{1}{8aa^{\frac{1}{2}}} \ldots D = \frac{1}{16a^2a^{\frac{1}{2}}} \ldots$ $E = -\frac{5}{128a^3a^{\frac{1}{2}}} \ldots \&c.$ Logo teremos . . .

$$\sqrt{(a+x)} = a^{\frac{1}{2}} + \frac{x}{2a^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^2}{8aa^{\frac{1}{2}}} + \frac{x^3}{16a^2a^{\frac{1}{2}}} - \frac{5x^4}{128a^3a^{\frac{1}{2}}} + \&c.$$

, e multiplicando todos os numeradores e denominadores por $a^{\frac{1}{2}}$, teremos como acima . . . .

$$\sqrt{(a+x)} = a^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{x}{2a} - \frac{x^2}{8a^2} + \frac{x^3}{16a^3} - \frac{5x^4}{128a^4} + \&c.\right)$$

O mesmo resultado se acharia immediatamente depois da substituiçaõ dos coefficientes, se reduzissemos o binomio proposto a ter a unidade por primeiro termo, isto he, se dessemos a $\sqrt{(a+x)}$ a fórma $\sqrt{a}\,.\,\sqrt{\left(1+\frac{x}{a}\right)}$, multiplicando e dividindo ao mesmo tempo os dous termos por $\sqrt{a}$, e tratassemos depois $\frac{x}{a}$ como huma só quantidade.

161 Havemos supposto que a formula que deo o calculo para as potencias perfeitas de hum binomio, ou para m inteiro, e positivo, podia tambem servir para formar as potencias imperfeitas, ou para m fraccionario, positivo, ou negativo. Para mostrarmos agora a legitimidade desta applicaçaõ a todos os expoentes, comecemos pelo caso de ser m huma fracçaõ positiva.

Seja em geral $(a+b)^{\frac{m}{n}}$, sendo $\frac{m}{n}$ positivo. Devemos provar que . . . .

$$(a+b)^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{m}{n}}\left(1+\frac{m}{n}\,\frac{b}{a}+\frac{m}{n}.\frac{\frac{m}{n}-1}{2}\,\frac{b^2}{a^2}\right.$$

$$\left.+\frac{m}{n}\,.\,\frac{\frac{m}{n}-1}{2}.\frac{\frac{m}{n}-2}{3}\,\frac{b^3}{a^3}+\&c.\right)$$

Com effeito, reduzindo o primeiro termo do binomio a ser 1, e elevando ambos os membros á potencia n, temos . . . .

$$\left(1+\frac{b}{a}\right)^m=\left(1+\frac{m}{n}\,\frac{b}{a}+\frac{m}{n}\,.\,\frac{\frac{m}{n}-1}{2}\,\frac{b^2}{a^2}\right.$$

$$+\frac{m}{n}\frac{\frac{m}{n}-1}{2}\cdot\frac{\frac{m}{n}-2}{3}\frac{b^3}{a^3}+\&c.)^n,$$

isto he, ...

$$m.\frac{m-1}{2}\frac{b^2}{a^2}+m.\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\frac{b^3}{a^3}+\&c.=$$

$$m.\frac{\frac{m}{n}-1}{2}\frac{b^2}{a^2}+m.\frac{\frac{m}{n}-1}{2}\cdot\frac{\frac{m}{n}-2}{3}\frac{b^3}{a^3}+\&c.$$

$$+\frac{m^2}{n^2}\cdot\frac{n-1}{2}\frac{b^2}{a^2}+\frac{2m^2}{n}\cdot\frac{\frac{m}{n}-1}{2}\cdot\frac{n-1}{2}\frac{b^3}{a^3}+\&c.$$

$$+\frac{m^3}{n^2}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\frac{b^3}{a^3}+\&c.$$

Porém $m.\frac{\frac{m}{n}-1}{2}+\frac{m^2}{n}\cdot\frac{n-1}{2}$, que he a totalidade do que multiplica $\frac{b^2}{a^2}$ no segundo membro, reduz-se a $m\left(\frac{m-n}{2n}+\frac{mn-m}{2n}\right)=m$ $.\ \frac{m-1}{2}$, que he o multiplicador de $\frac{b^2}{a^2}$ no primeiro membro.

Do mesmo modo, $m.\frac{\frac{m}{n}-1}{2}\cdot\frac{\frac{m}{n}-2}{3}+\frac{2m^2}{n}$

$$\frac{\frac{m}{n}-1}{2}\cdot\frac{n-1}{2}+\frac{m^3}{n^2}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3},$$ que he a

totalidade do que multiplica $\frac{b^3}{a^3}$ no ſegundo membro, ſe reduz a

$$m\left(\frac{(m-n)(m-2n)+3m(m-n)(n-1)+m^2(n-1)(n-2)}{2n\cdot 3n}\right)=$$

$$m\left(\frac{m^2-3m+2}{2\cdot 3}\right)=m\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3},$$ que he o

multiplicador de $\frac{b^3}{a^3}$ no primeiro membro.

Se levaſſemos as ſeries adiante do cubo, achariamos da meſma ſórte termos identicos. Logo he verdadeira a equaçaõ . . . .

$$(a+b)^{\frac{m}{n}}+a^{\frac{m}{n}}\left(1+\frac{m}{n}\,\frac{b}{a}+\frac{m}{n}\cdot\frac{\frac{m}{n}-1}{2}\,\frac{b^2}{a^2}+\right.$$

$$\left.\frac{m}{n}\cdot\frac{\frac{m}{n}-1}{2}\cdot\frac{\frac{m}{n}-2}{3}\,\frac{b^3}{a^3}+\&c.\right)$$

Serve pois a formula do binomio para elevar a huma potencia, cujo expoente ſeja hum numero fraccionario poſitivo.

Para provarmos agora que a meſma formula póde applicar-ſe a hum expoente negativo, devemos moſtrar que

$$(a+b)^{-\frac{m}{n}} = a^{-\frac{m}{n}}\left(1 - \frac{m}{n}\frac{b}{a} + \frac{m}{n}.\frac{\frac{m}{n}+1}{2}\frac{b^2}{a^2}\right.$$

$$\left. - \frac{m}{n}.\frac{\frac{m}{n}+1}{2}.\frac{\frac{m}{n}+2}{3}\frac{b^3}{a^3} + \&c.\right)$$

isto he, que

$$1 = \left(1+\frac{b}{a}\right)^{\frac{m}{n}}\left(1 - \frac{m}{n}\frac{b}{a} + \frac{m}{n}.\frac{\frac{m}{n}+1}{2}\frac{b^2}{a^2}\right.$$

$$\left. - \frac{m}{n}.\frac{\frac{m}{n}+1}{2}.\frac{\frac{m}{n}+2}{3}\frac{b^3}{a^3} + \&c.\right)$$

Com effeito desenvolvendo $\left(1+\frac{b}{a}\right)^{\frac{m}{n}}$, e multiplicando as duas series, sem passar do cubo, acharemos . . . .

$$1 = 1 - \frac{m}{n}\frac{b}{a} + \frac{m}{n}.\frac{\frac{m}{n}+1}{2}\frac{b^2}{a^2} - \frac{m}{n}.\frac{\frac{m}{n}+1}{2}.\frac{\frac{m}{n}+2}{3}\frac{b^3}{a^3} + \&c.$$

$$+ \frac{m}{n}\frac{b}{a} - \frac{m^2}{n^2}\frac{b^2}{a^2} + \frac{m^2}{n^2}.\frac{\frac{m}{n}+1}{2}\frac{b^3}{a^3} + \&c.$$

$$+ \frac{m}{n}.\frac{\frac{m}{n}-1}{2}\frac{b^2}{a^2} - \frac{m^2}{n^2}.\frac{\frac{m}{n}-1}{2}\frac{b^3}{a^3} + \&c.$$

$$+ \frac{m}{n}.\frac{\frac{m}{n}-1}{2}.\frac{\frac{m}{n}-2}{3}\frac{b^3}{a^3} + \&c.$$

 isto

isto he; fazendo o calculo, $1 = 1$.

Logo a formula do binomio tem toda a generalidade que havemos supposto.

Das Equações superlineares a duas incognitas.

162 DIzemos que huma equaçaõ a huma incógnita he do terceiro, quarto, quinto, &c. gráo, quando a mais alta potencia da incognita he a terceira, quarta, quinta, &c.; mas álem desta podem entrar todas as potencias inferiores. Assim as equações $x^3 = 8$, $x^3 + 5x^2 = 4$, $x^3 + 6x^2 - 9x = 7$ saõ todas do terceiro gráo.

Porém se a equaçaõ inclue duas ou mais incognitas, dizemos que he superlinear, naõ sómente quando huma das incognitas passa do primeiro gráo, mas tambem quando algumas dellas estaõ multiplicadas entre si: geralmente, o gráo de huma equaçaõ se determina pela maior soma dos expoentes das incognitas em hum mesmo termo. A equaçaõ $x^3 + y^3 = a^2b$ he do terceiro gráo; a equaçaõ $bx^2 + x^2y + ay^2 = ab^2$ tambem he do terceiro gráo, porque os expoentes de x e y no termo x^2y fazem a soma de 3.

163 Para resolver os problemas que conduzem a estas equações, devemos, como se pratica no primeiro gráo, reduzillas todas a huma, em que naõ haja mais que huma incognita.

Se tivermos duas equações e duas incognitas, e huma destas naõ passar do primeiro gráo em huma das equações, *tome-se o valor desta incognita, como se tudo o mais fosse conhecido*; *e substituin-*

do-ſe o ſeu valor na outra equaçaõ, ſe formará aſſim huma nova, em que naõ entrará mais que huma incognita.

Exemplo I. Achar dous numeros, cuja ſoma ſeja 12, e o producto 35. Repreſentando eſtes dous numeros por x e y, teremos $x + y = 12$, e $xy = 35$.

A primeira dá $x = 12 - y$, e ſubſtituindo na ſegunda, acharemos $12y - y^2 = 35$, iſto he, $y^2 - 12y = -35$. Logo (100) $y = 6 \pm 1$, iſto he, $y = 7$, ou $y = 5$; e como $x = 12 - y$, teremos $x = 5$, ou $x = 7$; e conſeguintemente os dous numeros buſcados ſaõ 5 e 7, ou 7 e 5.

Exemplo II. Se tivermos $x + 3y = 6$ e $x^2 + y^2 = 12$, ſubſtituindo na ſegunda o valor de $x = 6 - 3y$, que dá a primeira, teremos $(6 - 3y)^2 + y^2 = 12$, iſto he, $10y^2 - 36y + 24 = 0$, donde ſe deduzirá o valor de y.

Exemplo III. Se as duas equações forem $xy + y^2 = 5$, e $x^3 + x^2 y = y^2 + 7$, tomando na primeira o valor de $x = \frac{5 - y^2}{y}$, e ſubſtituindo na ſegunda virá $\frac{(5 - y^2)^3}{y^3} + \frac{(5 - y^2)^2 y}{y^2} = y^2 + 7$; iſto he, a equaçaõ do quinto gráo $y^5 - 5y^4 + 7y^3 + 50y^2 - 125 = 0$, que inclue ſómente y.

164 *Se huma das incognitas naõ paſſar do ſegundo gráo em huma das duas equações, tome-ſe neſta o valor do ſeu quadrado, e fazendo-ſe ſubſtituições ſucceſſivas na outra equaçaõ até que a incognita ſe ache no primeiro gráo, tire-ſe o valor della, e ſubſtitua-ſe na primeira equaçaõ.*

Por exemplo, ſe tivermos $x^2 + 3y^2 = 6x$, e

2

$2x^3 - 3y^2 = 8$, tomaremos na primeira o valor de $x^2 = 6x - 3y^2$, e ſubſtituindo na ſegunda, teremos $2x(6x - 3y^2) - 3y^2 = 8$; iſto he, $12x^2 - 6xy^2 - 3y^2 = 8$. Como neſta ainda ha x^2, ſubſtitua-ſe outra vez o meſmo valor, e virá $72x - 36y^2 - 6xy^2 - 3y^2 = 8$. Parando com as ſubſtituições, porque eſta equaçaõ tem x ſómente no primeiro gráo, tomaremos nella o valor de . . $x = \frac{39y^2 + 8}{72 - 6y^2}$, o qual ſubſtituido na primeira $x^2 + 3y^2 = 6x$ dá $(39y^2 + 8)^2 + 3y^2(72 - 6y^2)^2 = (234y^2 + 48)(72 - 6y^2)$.

165 Semelhantemente podemos reduzir as equações de gráos mais elevados a huma, em que entre huma ſó incognita; porém a equaçaõ final ſubirá a hum gráo mais elevado do que deve ſer. Pelo que vamos a expôr outro methodo, que naõ he ſujeito a eſte inconveniente.

166 Toda a equaçaõ a duas incognitas póde reduzir-ſe á fórma . . . $Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} \ldots + T = 0$, ſendo m o gráo a que x eſtá elevado; porque podemos repreſentar por huma letra a totalidade das quantidades, que multiplicaõ huma meſma potencia de x. Aſſim, a equaçaõ geral do ſegundo gráo a duas incognitas $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, póde ter a fórma $ax^2 + (by + d)x + cy^2 + ey + f = 0$, ou por abbreviar, $Ax^2 + Bx + C = 0$, com tanto que depois de havermos feito o uſo para que ſe deo eſta nova fórma, ſubſtituamos em lugar das letras A, B, C o que ellas repreſentaõ. Iſto poſto, ſejaõ . . .

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + Dx^{m-3} + \ldots T = 0$$
$$A'x^m + B'x^{m-1} + C'x^{m-2} + D'x^{m-3} + \ldots T' = 0$$

duas equações do mesmo gráo, das quaes se pertende eliminar x.

Multiplicaremos a primeira por A', a segunda por A, e tirando o segundo producto do primeiro, teremos huma equaçaõ do gráo $m-1$.

Multiplicaremos a primeira por $A'x + B'$, a segunda por $Ax + B$, e tirando o segundo producto do primeiro, teremos segunda equaçaõ do gráo $m-1$.

Multiplicaremos a primeira por $A'x^2 + B'x + C'$, a segunda por $Ax^2 + Bx + C$, e tirando o segundo producto do primeiro, teremos terceira equaçaõ do gráo $m-1$.

Continuando do mesmo modo, até que o multiplicador seja do gráo $m-1$, teremos m equações, cada huma do gráo $m-1$.

Consideraremos pois em cada huma dellas as differentes potencias x^{m-1}, x^{m-2}, x^{m-3} &c. como se fossem outras tantas incognitas do primeiro gráo; e determinando (85) os seus valores por meio de $m-1$ equações, os substituiremos na ultima.

Assim virá huma equaçaõ sem x, e repondo nesta os valores de A, B, C &c. e A', B', C' &c. teremos huma equaçaõ em y.

Se tivermos, por exemplo, as duas equações . .

$$Ax^2 + Bx + C = 0$$
$$A'x^2 + B'x + C' = 0$$

as quais pódem representar todas as equações a duas incognitas, naõ passando huma destas do segundo gráo; formaremos pela multiplicaçaõ, e subtracçaõ as duas equações . . . . . .

$$(A'B - AB')x + A'C - AC' = 0$$
$$(A'C - AC')x + B'C - BC' = 0 \qquad \text{A}$$

A primeira dá $x = \frac{AC' - A'C}{A'B - AB'}$, e ſubſtituindo na ſegunda teremos $-(A'C - AC')^2 + (A'B - AB')(B'C - BC') = 0$, equaçaõ em que naõ entra x.

Se tivermos . . . .

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$$
$$A'x^3 + B'x^2 + C'x + D' = 0$$

formaremos as tres equações

$$(A'B - AB')x^2 + (A'C - AC')x + A'D - AD' = 0$$
$$(A'C - AC')x^2 + (A'D - AD' + B'C - BC')x + B'D - BD' = 0$$
$$(A'D - AD')x^2 + (B'D - BD')x + C'D - CD' = 0$$

Conſiderando pois x^2 e x como incognitas do primeiro gráo, determinaremos os ſeus valores por meio de duas quaisquer deſtas equações, e os ſubſtituiremos na terceira.

167 Se as equações naõ forem do meſmo gráo, ou ſe os expoentes de x forem m em huma equaçaõ, e n na outra; entaõ ſuppondo que m he o maior, multiplicaremos a equaçaõ do gráo n por x^{m-n}, e deſte modo a reduziremos ao meſmo gráo. Obraremos pois como no caſo precedente, continuando as multiplicações até que o multiplicador chegue ao gráo $n-1$, e teremos n equações, cada huma do gráo $m-1$. Em todas ellas ſubſtituiremos ſucceſſivamente por todas as potencias ſuperiores a x^n o valor de x^n tirado da equaçaõ do gráo n, até que a mais alta potencia que reſtar ſeja x^{n-1}, o que he ſempre poſſivel; e deſte modo teremos n equações cada huma do gráo $n-1$. Por meio do numero $n-1$ deſtas equações determinaremos os valores de x^{n-1}, x^{n-2}, x^{n-3}, &c. como ſe foſſem incognitas do primeiro gráo, e os ſubſtituiremos na ultima. Se-

Sejaõ, por exemplo, $y^3 - 1 = 0$, e $ay^2 + by + x = 0$ duas equações, de que se pertende eliminar y.

Multiplicando a segunda por y, a primeira por a, e tirando hum producto do outro, teremos $by^2 + xy + a = 0$.

Multiplicando a primeira por $ay + b$, a segunda por y^2, e tirando hum producto do outro, teremos $xy^2 + ay + b = 0$.

Tendo assim tres equações com y^2, y, e x, se as tratarmos como se fossem do primeiro grão a tres incognitas, acharemos . . . .

$$x^3 - 3abx + a^3 + b^3 = 0.$$

Do mesmo modo se tivessemos $y^4 - 1 = 0$, e $ay^3 + by^2 + cy + x = 0$, formariamos as tres equações

$$by^3 + cy^2 + xy + a = 0$$
$$cy^3 + xy^2 + ay + b = 0$$
$$xy^3 + ay^2 + by + c = 0$$

as quais juntamente com a segunda das propostas $ay^3 + by^2 + cy + x = 0$ serviriaõ para eliminar as tres quantidades y^3, y^2, y, e achariamos. . .

$$\begin{array}{l} x^4 - 4acx^2 + 4a^2bx - a^4 \quad = 0 \\ \quad - 2bbx^2 + 4bc^2x - c^4 \\ \qquad\qquad\qquad\quad + b^4 \\ \qquad\qquad\qquad\quad + 2a^2c^2 \\ \qquad\qquad\qquad\quad - 4ab^2c \end{array}$$

Este methodo he geral, e admitte simplificaçaõ em muitos casos. Por exemplo, tendo as duas equações acima $y^3 - 1 = 0$, e $ay^2 + by + x = 0$, com muita facilidade deduziremos as duas equações do segundo grão, multiplicando a segunda por y, e substituindo nella o valor de y^3 tirado da primeira; e fazendo depois o mesmo á que resulta desta operaçaõ. Naõ nos demoraremos em individuar estes casos; advertiremos sómente, que nas multiplicações successivas por A' e A, por $A'x + B'$ e $Ax + B$, &c. he escusado multiplicar o primeiro, os dous primeiros, &c. termos das duas equações propostas, e em geral tantos primeiros termos, quantos saõ os do multiplicador, porque os productos se anniquilaõ pela subtracçaõ.

168 Se determinarmos os valores das differentes potencias de x pela regra que demos para as equações do primeiro grão a muitas incognitas, a equaçaõ final em y naõ passará do grão mn, suppondo que os maiores expoentes de x, e de y saõ m em huma equaçaõ, e n na outra.

Mas se os expoentes de x e de y forem desiguais em cada huma das equações, de maneira que sendo os de x ainda m e n, os de y sejaõ porém $m + p$, e $n + q$, a equaçaõ final em y naõ passará do grão $mn + mq + np$. Veja-se a demonstraçaõ nas *Mem. da Acad. das Sciencias*, *ann.* 1764. Podem consultar-se tambem as *Mem. da Acad. de Berlin*, *ann.* 1748, e a *Analyse das linhas curvas de Cramer*.

169 Em muitos casos se consegue a eliminaçaõ mais brevemente, do que pelos methodos preceden-

cedentes. Por exemplo se tivessemos $bxy = a^2x - a^3$ e $x^2 - ax = by$, tomando na primeira . . $x = \frac{a^2x - a^3}{by}$, e na segunda . . . $x = \frac{by}{x-a}$; e multiplicando huma pela outra, achariamos $x = \pm a$.

Tambem para eliminar y das equações $ay^2 - 2x^2y = ax^2$, e $a^2y^2 - 2a^2xy = x^4$, acharemos primeiramente $y = \frac{x^2}{a} \pm \sqrt{\left(\frac{x^4}{a^2} + x^2\right)}$, e

$y = x \pm \sqrt{\left(\frac{x^4}{a^2} + x^2\right)}$; e igualando depois os dous valores, virá $x = a$.

Se as equações fossem $x + y + z = a$, $xy + xz + yz = b$, e $xyz = c$, multiplicando a primeira por x^2, a segunda por x, tirando o segundo resultado do primeiro, e ajuntando ao resto a terceira, achariamos $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$. Se em lugar de multiplicar por x e x^2, multiplicassemos por y e y^2, ou por z e z^2, achariamos da mesma sorte equações semelhantes em y, ou em z.

Das

Das Equações ſuperlineares a mais de duas incognitas.

170 HAvendo mais de duas equações, e mais de duas incognitas, tres por exemplo, podemos pelo meſmo methodo eliminar huma das incognitas por meio da primeira e ſegunda equaçaõ, e eliminalla outra vez por meio da primeira e terceira, ou da ſegunda e terceira. Feito iſto, teremos duas equações e duas incognitas, que ſe trataraõ pelo methodo precedente.

Porém devemos advertir, que eſte methodo ſendo applicado a mais de duas incognitas, tem o inconveniente de conduzir a equações mais elevadas do que deve ſer. O meio de o evitar conſiſte em eliminar combinando as equações, naõ duas a duas, mas tres a tres, quando ſaõ tres, e quatro a quatro, quando ſaõ quatro, &c.; combinaçaõ que exige huma eſcolha particular. V. as *Mem. da Acad. das Sciencias*, *ann.* 1764, onde tambem ſe acharaõ muitas indagações ſobre o grão da equaçaõ final. Sem embargo de que eſtes methodos abaixaõ conſideravelmente o grão em comparaçaõ de outros; com tudo he provavel que elle ainda ſe poſſa diminuir mais, e que iſto ſómente ſe conſiga, quando ſe achar hum methodo para eliminar ſimultaneamente todas as incognitas menos huma, como ſe tem deſcuberto para o primeiro grão.

Das

Das Equações a dous termos.

171 CHamamos *Equações a dous termos* áquellas em que entra huma só potencia da incognita.

Por exemplo, a equação $ax^5 + bx^5 = a^4b^2 - a^3b^3$ he huma equação a dous termos, pois que dando-se-lhe a fórma $(a+b)x^5 = a^4b^2 - a^3b^3$, $a+b$ póde reduzir-se a huma só quantidade p, e $a^4b^2 - a^3b^3$ a outra q, de maneira que a equação póde representar-se por esta . . . $px^5 = q$.

Estas equações saõ muito faceis de resolver: Havendo desembaraçado a potencia da incognita, como nas outras equações, naõ resta mais que tirar a raiz do gráo designado pelo expoente da incognita. Assim a equação $px^5 = q$ se mudará em $x^5 = \frac{p}{q}$, e tirando a raiz quinta, teremos $x = \sqrt[5]{\frac{p}{q}}$. Em geral, a equação $px^m = q$ dá $x = \sqrt[m]{\frac{p}{q}}$.

172 Se m he impar, a incognita tem sempre hum unico valor real, o qual será positivo ou negativo, conforme for o segundo membro positivo ou negativo. Se m he par, a incognita tem, como no segundo gráo, dous valores, hum positivo, e outro negativo, os quais seraõ ambos reais, ou ambos imaginarios, conforme for o segundo membro positivo, ou negativo; pelo que nas equações a dous ter-

termos a incognita naõ pode ter mais que dous valores reais. Por exemplo, a equaçaõ $x^5 = 1024$ dá $x = \sqrt[5]{1024}$, porque há hum unico valor real 4, que ſendo elevado á quinta potencia poſſa produzir 1024. Porém a equaçaõ $x^4 = 625$ dá . . . $x = \pm \sqrt[4]{625}$; porque $- \times -$ hum numero par de vezes produz o meſmo que $+ \times +$. Pelo contrario a equaçaõ $x^4 = -625$ dá $x = \pm \sqrt[4]{-625}$, iſto he, dous valores imaginarios, porque naõ ha numero poſitivo ou negativo, que ſendo multiplicado por ſi meſmo hum numero par de vezes, produza huma quantidade negativa.

Applicaçaõ. *Achar dous meios proporcionais entre* 5 e 625.

Repreſentando os dous numeros deſconhecidos por x e y, teremos $\div\!\div\; 5 : x : y : 625$, donde ſe deduz

$$5 : x :: x : y,$$
$$x : y :: y : 625$$

Eſtas duas proporções daõ $5y = x^2$, e $625x = y^2$; donde vem $y = \frac{x^2}{5}$, e $x^3 = 15625$; logo $x = 25$, e $y = 125$.

Das Equações que podem reſolver-ſe á maneira das do ſegundo gráo.

173 ESTAS equações naõ devem incluir mais que duas potencias differentes de x, mas o expoente de huma deve ſer o dobro do expoente da outra; tais ſaõ $x^4 + 5x^2 = 8$, $x^6 + 5x^3 = 8$,

e

e em geral a equaçaõ a tres termos da fórma $x^{2m} + px^m = q$. Reſolvem-ſe eſtas como as do ſegundo gráo; porque fazendo $x^m = y$, teremos $y^2 + py = q$, equaçaõ do ſegundo gráo, da qual ſe tira $y = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}$, iſto he, $x^m = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}$; logo (171).. $x = \sqrt[m]{\left[-\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}\right]}$.

Applicaçaõ. *Achar dous numeros, cujo producto ſeja 6, e a ſoma dos cubos faça 35.*

Teremos $xy = 6$, e $x^3 + y^3 = 35$, as quais daõ (163) $y = \frac{6}{x}$, e $x^6 - 35x^3 = -216$; logo $x = \sqrt[3]{\left[\frac{35}{2} \pm \sqrt{\left(\left(\frac{35}{2}\right)^2 - 216\right)}\right]} = \sqrt[3]{\left(\frac{35 \pm 19}{2}\right)}$, iſto he, $x = \sqrt[3]{27} = 3$, e $x = \sqrt[3]{\frac{16}{2}} = 2$; e conſeguintemente $y = 2$, e $y = 3$.

Se m for par, a equaçaõ poderá ter até quatro raizes reais.

Da Compoſiçaõ das Equações.

174 T*Oda a equaçaõ dá tantos valores para a incognita, ou tem tantas raizes, quantas ſaõ as unidades do mais alto expoente da incognita*; bem entendi-

dido, que humas dellas podem ſer poſitivas, outras negativas, humas reais, outras imaginarias.

175 Para o moſtrarmos, he preciſo notar, que em toda a equaçaõ ſe tranſpuzermos todos os ſeus termos para hum membro, e os ordenarmos relativamente a x (preparaçaõ que daqui por diante ſupporemos ſempre feita); póde eſte membro conſiderar-ſe como o reſultado da multiplicaçaõ de muitos factores binomios ſimples, que tenhaõ x por termo commum. Por exemplo, na equaçaõ $x^3 + 7x = 8x^2 + 9$, depois de ſe lhe dar a fórma $x^3 - 8x^2 + 7x - 9 = 0$, póde $x^3 - 8x^2 + 7x - 9$ conſiderar-ſe como reſultado de tres factores binomios ſimples $x - a$, $x - b$, $x - c$. Porque eſtes multiplicados entre ſi, daõ . .

$$\begin{aligned} x^3 - ax^2 &+ abx - abc = 0 \\ - bx^2 &+ acx \\ - cx^2 &+ bcx \end{aligned}$$

e para que às duas equações ſejaõ as meſmas, baſta que ſeja . . . $a + b + c = 8$ . . . $ab + ac + bc = 7$ . . . $abc = 9$, as quais daõ (169) . . . $a^3 - 8a^2 + 7a - 9 = 0$, $b^3 - 8b^2 + 7b - 9 = 0$, e $c^3 - 8c^2 + 7c - 9 = 0$. Daqui ſe deduzem as propoſições ſeguintes.

176 1.º Por quanto naõ ha differença entre as equações que devem dar os valores de a, b, c, os quais por outra parte naõ podem ſer iguais entre ſi; qualquer das tres equações neceſſariamente ha-de dar os valores de a, b, c; logo cada huma dellas deve ter tres raizes a, b, c.

2.º

2.° E como cada huma das tres equações he a mesma que a proposta $x^3 - 8x^2 + 7x - 9 = 0$, com a differença unica de a, ou b, ou c se mudar em x; tambem esta deve ter tres raizes, as quais seraõ os valores de a, b, c; e conseguintemente as quantidades que se devem substituir em lugar de a, b, c nos factores $x - a, x - b, x - c$, para produzirem $x^3 - 8x^2 + 7x - 9 = 0$, seraõ as raizes da mesma equaçaõ.

177 Estas consequencias seriaõ as mesmas, ainda que os coefficientes das differentes potencias de x fossem outros quaisquer numeros, e a equaçaõ fosse de outro qualquer gráo. Assim se tivermos em geral a equaçaõ $x^4 - px^3 + qx - rx + s = 0$, sendo p, q, r, s numeros conhecidos, poderemos consideralla como formada pelo producto de quatro factores simples $x - a, x - b, x - c, x - d$, ou suppolla igual a . . . . ;

$$\begin{array}{l}
x^4 - ax^3 + abx^2 - abcx + abcd = 0 \\
\quad\;\; - bx^3 + acx^2 - abdx \\
\quad\;\; - cx^3 + adx^2 - acdx \\
\quad\;\; - dx^3 + bcx^2 - bcdx \\
\qquad\qquad + bdx^2 \\
\qquad\qquad + cdx^2
\end{array}$$

Para isso, formando quatro equações como no caso precedente, $a + b + c + d = p$, $ab + ac + ad + bc + bd + cd = q$, $abc + abd + acd + bcd = r$, e $abcd = s$; a, b, c, d devem ser tais

tais, que tenhamos ... $a^4 - pa^3 + qa^2 - ra + s = 0$ .... $b^4 - pb^3 + qb^2 - rb + s = 0$ ... $c^4 - pc^3 + qc^2 - rc + s = 0$ .... $d^4 - pd^3 + qd^2 - rd + s = 0$.

Pelo que cada huma deſtas equações terá quatro raizes, que ſeraõ os valores das quatro quantidades a, b, c, d; e como cada huma daquellas he a meſma que a propoſta $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$, as quantidades a, b, c, d ſeraõ tambem as ſuas raizes.

178 Logo em geral: 1.° *Huma equaçaõ de qualquer grão que ſeja, póde conſiderar-ſe como formada pelo producto de tantos factores binomios ſimples, tendo todos por termo commum a letra que repreſenta a incognita, quantas ſaõ as unidades do mais alto expoente da meſma incognita.*

2.° *Os ſegundos termos dos binomios ſaõ as raizes da meſma equaçaõ, ſendo cada huma tomada com ſinal contrario.*

179 Havemos ſuppoſto, que a equaçaõ tinha alternadamente termos poſitivos e negativos: porém ſeja qual for a ordem dos ſinaes, como na equaçaõ $x^4 + px^3 - qx^2 - rx + s = 0$, ſempre ſe demonſtrará do meſmo modo, que póde eſta ſer repreſentada por $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d) = 0$ ſendo a, b, c, d as ſuas raizes.

180 Pois que temos .. $a + b + c + d = p$ ... $ab + ac + ad + bc + bd + cd = q$ ... $abc + abd + acd + bcd = r$ ... $abcd = s$, e a, b, c, &c. ſaõ as raizes da equaçaõ; ſegue-ſe, que

que na equaçaõ $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$; e geralmente em toda a equaçaõ.

1.° *O coefficiente* $-p$ *do ſegundo termo, tomado com ſinal contrario, iſto he,* $+p$, *he igual á ſoma de todas as raizes.*

2.° *O coefficiente do terceiro termo he igual á ſoma dos productos das raizes multiplicadas duas a duas.*

3.° *O coefficiente do quarto termo, tomado com ſinal contrario, he igual á ſoma das raizes multiplicadas tres a tres*; e aſſim por diante até que *finalmente o ultimo termo he o producto de todas as raizes.*

Eſtas concluſões ſaõ geraes, ſejaõ quaes forem os ſinais dos termos da equaçaõ, com tanto que ſe tome ſempre com ſinal contrario o coefficiente de cada termo de numero par.

Aſſim na equaçaõ $x^3 + 2x^2 - 23x - 60 = 0$, a ſoma das tres raizes $= -2$, a ſoma dos productos, duas a duas $= -23$, e o producto de todas tres $= +60$. Com effeito, as tres raizes ſaõ $+5, -4, -3$, porque cada numero deſtes, ſendo ſubſtituido em lugar de x, reduz o primeiro membro a nada; e he evidente que $5 - 4 - 3 = -2$, $-20 - 15 + 12 = -23$, e $5 \times -4 \times -3 = +60$.

181 Logo: 1.° *Toda a equaçaõ, em que faltar o ſegundo termo, terá raizes poſitivas e negativas, e a ſoma de humas ſerá igual á ſoma das outras; e reciprocamente.*

2.° *Se algumas raizes forem* 0, *faltaraõ outros tantos termos ultimos da equaçaõ; e reciprocamente.*

3.°

3.° *Se todas as raizes forem negativas, seraõ positivos todos os termos da equaçaõ; e se todas forem positivas, os termos seraõ alternadamente positivos e negativos.*

E em huma equaçaõ, cujas raizes saõ reais, ha tantas positivas, quantas saõ as mudanças dos sinais; e tantas negativas, quantas saõ as repetições successivas do mesmo sinal.

Assim na equaçaõ $x^3 - 19x + 30 = 0$, porque falta o segundo termo, concluiremos que a soma das raizes positivas he igual á soma das negativas; com effeito as tres raizes saõ $+2$, $+3$, e -5.

Na equaçaõ $x^5 - 3x^4 - x^3 + 3x^2 = 0$, em que faltaõ os dous ultimos termos, as raizes saõ -1, $+1$, $+3$, 0, 0.

Na equaçaõ $x^3 + 7x^2 + 14x + 8 = 0$, em que se acha consecutivamente tres vezes o mesmo sinal $+$, ha tres raizes negativas -1, -2, -4; mas a equaçaõ $x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0$, em que ha tres mudanças de sinal, tem tres raizes positivas $+1$, $+2$, $+4$.

Agora se póde perceber facilmente a razaõ, porque muitos numeros differentes podem satisfazer a huma equaçaõ. Propondo-se, por exemplo: *Achar hum numero tal, que se delle tirarmos* 5, *e lhe ajuntarmos successivamente* 3 e 4, *as duas somas multiplicadas entre si, e pelo resto, dem nada*; teremos, sendo x o numero desconhecido, $(x+4)(x+3)(x-5) = 0$, isto he, $x^3 + 2x^2 - 23x - 60 = 0$. Vê-se pois, que este producto póde ser nada em tres casos, quando $x = -4$, quando $x = -3$, e quando $x = 5$; e que propondo-se a equaçaõ $x^3 + 2x^2 - 23x - 60 = 0$, naõ ha cousa que determine a preferir -4 a -3, ou a $+5$, pois que cada numero destes reduz igualmente o primeiro membro a nada, e por tanto satisfaz igualmente á equaçaõ.

182 As equações $a+b+c+d=p$, $ab+ac+ad+bc+bd+cd=q$, $abc+abd+acd+bcd=r$, $abcd=s$, conduzem á mesma equaçaõ, tanto para ter a, como para ter b, como &c. A razaõ he, porque a, b, c, d, estaõ dispostas da mesma maneira em cada huma das equacões, e por tanto naõ ha motivo, para que huma dellas seja determinada por operações differentes das que determinaõ a outra. Logo em geral: Se buscando muitas quantidades desconhecidas, formos obrigados para cada huma a fazer uso dos mesmos raciocinios, das mesmas operações, e das mesmas quantidades conhecidas, todas estas seraõ necessariamente raizes de huma mesma equaçaõ, e por consequencia o problema respectivo conduzirá a huma equaçaõ composta.

183 Huma equaçaõ tambem se póde considerar como formada pelo producto de muitos factores compostos. Assim, huma equaçaõ do terceiro gráo póde considerar-se como formada por hum factor do segundo x^2+ax+b, e outro do primeiro $x+c$; porque x^2+ax+b póde representar o producto de outros dous factores simples. Do mesmo modo huma equaçaõ do quinto gráo pode ser considerada como producto, ou de cinco factores simples, ou de dous do segundo gráo e hum do primeiro, ou de hum do terceiro e outro do segundo, ou finalmente de hum factor do quarto e outro do primeiro.

184 Como pois huma equaçaõ de qualquer gráo póde ser formada pelo concurso de hum ou de muitos

tos factores do ſegundo, e as equações deſte gráo pódem ter raizes imaginarias; ſegue-ſe que tambem aquellas as podem ter, ainda que de fórmas muito differentes das do ſegundo gráo.

185 Do meſmo modo de conſiderar as equações ſe ſegue: 1.° Que huma equaçaõ do gráo m naõ póde ter mais que m diviſores do primeiro gráo.

186 2.° Que o numero dos diviſores, que póde ter do ſegundo gráo, ſe exprime por $m.\frac{m-1}{2}$. Com effeito, hum factor do ſegundo gráo he o producto de dous factores ſimples; logo como eſtes podem ſer diviſores, tambem aquelle o poderá ſer. Mas (148) ha $m.\frac{m-1}{2}$ modos differentes de multiplicar m quantidades duas a duas; logo haverá $m.\frac{m-1}{2}$ diviſores differentes do ſegundo gráo.

Por exemplo, a equaçaõ. . . . .

$$\begin{array}{llll} x^4 - ax^3 & + abx^2 & - abcx & + abcd = 0 \\ \quad\; - bx^3 & + acx^2 & - abdx & \\ \quad\; - cx^3 & + adx^2 & - acdx & \\ \quad\; - dx^3 & + bcx^2 & - bcdx & \\ & + bdx^2 & & \\ & + cdx^2 & & \end{array}$$

formada pelo producto de $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$, póde conſiderar-ſe como formada pelo producto de dous factores do ſegundo gráo, por eſtes ſeis differentes modos. . . . .

multiplicando $(x-a)(x-b)$ por $(x-c)(x-d)$
$(x-a)(x-c)$ . . $(x-b)(x-d)$
$(x-a)(x-d)$ . . $(x-b)(x-c)$
$(x-b)(x-c)$ . . $(x-a)(x-d)$
$(x-b)(x-d)$ . . $(x-a)(x-c)$
$(x-c)(x-d)$ . . $(x-a)(x-b)$

Concluamos pois, que querendo achar os valores de g e h tais, que x^2+gx+h seja divisor de huma equaçaõ proposta do gráo m, podemos ter a certeza, que g e h necessariamente se haõ-de determinar cada hum por huma equaçaõ do gráo $m.\frac{m-1}{2}$. Porque sendo x^2+gx+h a expressaõ geral de hum factor do segundo gráo, h deve ser susceptivel de $m.\frac{m-1}{2}$ valores differentes, e o mesmo se diz de g, que he a soma de todas as raizes: Logo cada huma destas quantidades ha-de ser dada por huma equaçaõ do gráo $m.\frac{m-1}{2}$.

Prova-se do mesmo modo, que no caso de se considerar huma equaçaõ como formada por factores do terceiro gráo, cada hum delles he susceptivel de $m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}$ valores differentes, de maneira que se x^3+gx^2+hx+k representar hum dos factores, k se determinará por huma equaçaõ do gráo $m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}$. Podem-se tirar consequenquencias analogas para os factores do quarto gráo, quinto &c.

187 De tudo o que fica dito se segue, que havendo achado huma raiz a, para ter as outras, podemos dividir a equaçaõ por $x-a$. A divisaõ se fará exactamente, e dará por quociente huma quantidade, na qual x estará hum gráo menos elevado; e esta, se a puzermos igual a nada, será a equaçaõ que devemos resolver para ter as outras raizes. Se fossem conhecidas duas raizes a e b, dividiriamos a equaçaõ por $(x-a)(x-b)$, e assim por diante.

Do modo de transformar as Equações.

188 ANtes de passarmos á resoluçaõ das equações, he conveniente que tratemos primeiramente das differentes fórmas que ellas podem ter.

189 *Se em huma equaçaõ mudarmos os sinais dos termos em que entraõ potencias impares, as raizes positivas se tornaraõ negativas, e as negativas se tornaraõ positivas.* Porque substituindo $-x$ em lugar de $+x$, as raizes da equaçaõ mudaõ de sinal, como tambem os termos, em que entraõ potencias impares, sem que porisso haja mudança nos termos de potencias pares.

190 *Para mudar huma equaçaõ affecta de coefficientes fraccionarios em outra que os naõ tenha, sem embaraçar com coefficiente o primeiro termo*, substitua-se em lugar da incognita, outra dividida pelo producto de todos os denominadores, e multiplique-se depois toda a equaçaõ pelo denominador, que entaõ terá o primeiro termo.

Por

Por exemplo, ſe tivermos $x^3 + \frac{a}{m}x^2 + \frac{c}{n}x$ $\frac{d}{p} = 0$, faremos $x = \frac{y}{mnp}$, e ſubſtituindo virá $\frac{y^3}{m^3n^3p^3} + \frac{ay^2}{m^3n^2p^2} + \frac{cy}{mn^2p} + \frac{d}{p} = 0$; multiplicando pois por $m^3n^3p^3$, teremos a transformada $y^3 + anpy^2 + m^2np^2cy + m^3n^3p^2d = 0$.

191 Se m, n, p foſſem iguais, baſtaria fazer $x = \frac{y}{m}$. Logo para mudarmos huma equaçaõ, que em todos os termos tem coefficientes inteiros, em outra que tenha o primeiro termo deſembaraçado, ſem que entrem fracções nos outros termos, faremos $x = \frac{y}{m}$, ſendo m o coefficiente do primeiro termo. Com effeito a equaçaõ $mx^3 + ax^2 + bx + c = 0$, ſendo dividida por m, dá $x^3 + \frac{a}{m}x^2 + \frac{b}{m}x + \frac{c}{m} = 0$, a qual tem todos os denominadores iguais.

192 *Para fazer deſaparecer o ſegundo termo de huma equaçaõ, ſubſtitua-ſe em lugar da incognita, outra augmentada com o coefficiente do ſegundo termo, tomado com ſinal contrario, e dividido pelo expoente do primeiro.*

Para o moſtrar, ſeja a equaçaõ geral . . . $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \ldots + k = 0$.

Supponhamos $x = y + s$, ſendo s huma indeterminada; teremos a transformada. . . . .

$$y^m + msy^{m-1} + m.\frac{m-1}{2}s^2y^{m-2} + \&c. .. + k = 0$$
$$+ ay^{m-1} + (m-1)\,asy^{m-2} + \&c.$$
$$+ \qquad by^{m-2} + \&c.$$

Conſiderando y como incognita, para que neſta equaçaõ deſappareça o ſegundo termo, s deve ſer tal que tenhamos $ms + a = 0$, iſto he, deve ſer $s = \frac{-a}{m}$; logo $x = y - \frac{a}{m}$.

Por exemplo, para mudarmos a equaçaõ $x^3 + 6x^2 - 3x + 4 = 0$ em outra que naõ tenha ſegundo termo, faremos $x = y - 2$; e ſubſtituindo, acharemos $y^3 - 15y + 26 = 0$, que naõ tem y^2.

Da reſoluçaõ das Equações compoſtas.

193 RESolver geralmente huma equaçaõ ordenada de qualquer grão, como $x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + \&c \cdots + k = 0$, he achar para a incognita tantos valores, quantas ſaõ as unidades do ſeu maior expoente, ſendo cada hum delles expreſſo em letras p, q, &c. k combinadas entre ſi de qualquer modo; mas tal, que ſe o ſubſtituirmos na equaçaõ em lugar de x, reduza o primeiro membro a nada, independentemente de qualquer valor particular de p, q, &c.

Por exemplo, a regra que demos (100), reſolve geralmente as equações do ſegundo grão $x^2 + px + q = 0$

$+q=0$, porque dá dous valores $x=-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{(\frac{1}{4}p^2-q)}$, e cada hum delles ſubſtituido na equaçaõ reduz tudo a nada, como he facil de ver.

Eſta expreſſaõ geral dos differentes valores de x he tanto mais difficil de ſe achar, quanto mais elevado he o gráo da equaçaõ. Para iſto bem ſe perceber, moſtraremos, que ſeja qual for a fórma dos valores da incognita, a reſoluçaõ geral de huma equaçaõ de gráo determinado deve incluir a reſoluçaõ das equaçóes gerais de todos os gráos inferiores.

Com effeito, a reſoluçaõ geral he huma equaçaõ do quinto gráo . . . $x^5+px^4+qx^3+rx^2+sx+t=0$ deve dar a x cinco valores, cada hum delles expreſſo neceſſariamente em todas as letras p, q, r, s, t. Mas quando $t=0$, a equaçaõ ſe reduz a $(x^4+px^3+qx^2+rx+s)x=0$, e dá 1° $x=0$; 2° $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$. Logo hum dos cinco valores de x deve em tal caſo reduzir-ſe a nada, e os outros quatro devem ſer as raizes da equaçaõ $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$. E como ſendo eſta do quarto gráo, as ſuas raizes naõ podem deixar de ter a fórma propria das do quarto gráo; ſegue-ſe, que comprehendendo-ſe eſtas ao meſmo tempo nas do quinto, a reſoluçaõ geral deſte gráo ha-de comprehender a reſoluçaõ geral do quarto. Pelo meſmo modo ſe provará, que a reſoluçaõ do quarto gráo comprehende a do terceiro, e aſſim por diante. Logo a reſoluçaõ de huma equaçaõ de qualquer gráo deve comprehender a reſoluçaõ de todos os gráos inferiores.

Podemos pois concluir, que na expreſſaõ de huma raiz devem entrar ou explicita, ou implicitamente todas as eſpecies de radicais deſde o ſeu gráo até o primeiro. Com effeito he facil de ver, que

em

em qualquer gráo devem entrar radicais deſſe meſmo gráo, porque no caſo particular de faltarem todos os termos excepto o primeiro e o ultimo, a expreſſaõ dos valores de x ha-de incluir hum radical ſemelhante (171); e como a fórma geral das raizes comprehende a fórma das raizes de todos os gráos inferiores, ſegue-ſe que deve incluir todos os radicais deſde o ſeu gráo até o primeiro.

194 Feitas eſtas reflexóes ſobre a fórma das raizes, expliquemos hum methodo de as achar, o qual conſiſte em conſiderar a equaçaõ propoſta como o reſultado de duas equações a duas incognitas.

Aſſim, ſuppondo que a equaçaõ he . . . . $x^m + px^{m-2} + qx^{m-3} + rx^{m-4} + \&c\ldots + k = 0$, ſem ſegundo termo (192) para facilidade do calculo, tomaremos duas equações da fórma $y^m - 1 = 0$, e $ay^{m-1} + by^{m-2} + cy^{m-3} + dy^{m-4} + \&c. \ldots + x = 0$, das quais eliminando y, virá huma equaçaõ em x do gráo m da propoſta ſem ſegundo termo. Determinando pois a, b, c, &c. pela comparaçaõ deſta com a propoſta, e ſubſtituindo os ſeus valores na equaçaõ $ay^{m-1} + by^{m-2} + cy^{m-3} + dy^{m-4} + \&c \ldots + x = 0$, como tambem todas as raizes de y, que der a equaçaõ $y^m - 1 = 0$, as quais ſe achaõ com facilidade; teremos todas as raizes, ou valores de x.

Applicaçaõ ao terceiro gráo.

195 SEja $x^3 + px + q = 0$ a equaçaõ que ſe pertende reſolver.

Tomemos $y^3 - 1 = 0$, e $ay^2 + by + x = 0$, das quais eliminando y (167), vem

x^3

$$x^3 - 3abx + a^3 = 0$$
$$\qquad\qquad + b^3$$

Comparando agora esta com a proposta, para que sejaõ as mesmas, deve ser $-3ab = p$, e $a^3 + b^3 = q$, das quais se tira $a^6 - qa^3 = \frac{p^3}{27}$. Logo (173) $a = \sqrt[3]{[\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}]}$, usando de hum só valor de a, por naõ haver necessidade de mais; e conseguintemente . . . . $b = \sqrt[3]{[\frac{1}{2}q - \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}]}$.

Resta achar os valores de y por meio da equaçaõ $y^3 - 1 = 0$. Esta dá $y = 1$, e dividindo (187) $y^3 - 1$ por $y - 1$ . . . . $y = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$.

Substituindo pois successivamente estes tres valores de y, e os de a e b na equaçaõ $ay^2 + by + x = 0$, e advertindo que $\left(\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}\right)^2$ se reduz a $\frac{-1 \mp \sqrt{-3}}{2}$, teremos as tres raizes da equaçaõ proposta . . . .

$$x = -\sqrt[3]{[\tfrac{1}{2}q + \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3)}]}$$
$$\quad - \sqrt[3]{[\tfrac{1}{2}q - \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3)}]}.$$

$$x = \frac{1 + \sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{[\tfrac{1}{2}q + \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3)}]}$$
$$\quad + \frac{1 - \sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{[\tfrac{1}{2}q - \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3)}]}.$$

x

$$x = \frac{1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{[\tfrac{1}{2}q + \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3)}]}$$
$$+ \frac{1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{[\tfrac{1}{2}q - \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3)}]}.$$

ás quais ſe póde dar a fórma ſeguinte . . .

$$x = \sqrt[3]{[-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3)}]}$$
$$+ \sqrt[3]{[-\tfrac{1}{2}q - \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3)}]}.$$
$$x = \frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{[-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3)}]}$$
$$- \frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{[-\tfrac{1}{2}q - \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3)}]}.$$

Se na equaçaõ $x^3 + px + q = 0$ ſuppuzermos $q = 0$, teremos $(x^2 + p)x = 0$, a qual dá $x = 0$, $x = +\sqrt{-p}$, e $x = -\sqrt{-p}$. O meſmo ſe deduz neſte caſo das tres formulas geraes das raizes.

196 A equaçaõ $a^6 - qa^3 = \frac{1}{27}p^3$ tem ſeis raizes; porem, ainda que uſemos de cada hum dos ſeis valores de a, como he licito, naõ reſultaraõ poriſſo 18 valores differentes para x: cada valor de a dá a x os meſmos tres valores, que dá outro qualquer.

Para o moſtrarmos, ſimplifiquemos o calculo, fazendo $\sqrt[3]{[\tfrac{1}{2}q + \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3)}]} = m$ . . . e $\sqrt[3]{[\tfrac{1}{2}q - \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3)}]} = n$; a equaçaõ $a^3 = \tfrac{1}{2}q \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3)}$ ſe mudará neſtas duas $a^3 = m^3$ . . . $a^3 = n^3$. A primeira dá . . .

$a = m$ . . . $a = m\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)$ . . .

$a = m\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)$; e a segunda dá . . .

$a = n$ . . . $a = n\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)$ . . . $a = n$ $\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)$. E como temos $a^3 + b^3 = q$, será $m^3 + b^3 = q$, e $n^3 + b^3 = q$, isto he, substituindo os valores de m^3 e n^3 . . . $b^3 = \frac{1}{2}q - \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)} = n^3$, e $b^3 = \frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)} = m^3$. Logo a e b saõ tais, que $ab = mn$; de maneira que os valores que se correspondem, saõ os seguintes

$a = m$ . . . . $b = n$

$a = m\left(\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}\right)$ $b = n\left(\frac{-1 \mp \sqrt{-3}}{2}\right)$

$a = n$ . . . . $b = m$

$a = n\left(\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}\right)$ $b = m\left(\frac{-1 \mp \sqrt{-3}}{2}\right)$

Se substituirmos agora qualquer destas seis combinações em $x = -ay^2 - by$, e puzermos successivamente por y os seus tres valores, acharemos sempre estas tres raizes . . . . . . $x = -m - n$,

$x = \frac{1+\sqrt{-3}}{2} . m + \frac{1-\sqrt{-3}}{2} . n$,

$x = \frac{1-\sqrt{-3}}{2} . m + \frac{1+\sqrt{-3}}{2} . n$.

197 Reparando nos tres valores de x acima achados, vê-se claramente que quando $\sqrt{(\frac{1}{4}q^2}$

$+ \frac{1}{27} p^3)$ for real, iſto he, quando p for poſitivo, ou quando for negativo, ſendo ao meſmo tempo $\frac{1}{4} q^2 > \frac{1}{27} p^3$, os dous ultimos valores de x ſeraõ imaginarios; porque ſendo entaõ os dous radicais cubos quantidades reais, e deſiguais, os ſeus productos pelas quantidades $\sqrt{-3}$, e $-\sqrt{-3}$ naõ ſe deſtruiraõ, e aſſim ſe conſervaraõ expreſſões imaginarias nos dous valores de x; pelo que ſómente o primeiro ſerá real.

198 Porem ſe $\sqrt{(\frac{1}{4} q^2 + \frac{1}{27} p^3)}$ for quantidade imaginaria, iſto he, ſe p for negativo e tal, que ſeja $\frac{1}{27} p^3 > \frac{1}{4} q^2$, os tres valores de x ſeraõ reais.

Para o provarmos, ſupponha-ſe por abbreviar $\frac{1}{2} q = m$, e $\sqrt{(\frac{1}{27} p^3 - \frac{1}{4} q^2)} = n$; a quantidade que tem lugar neſte caſo . . . . $\sqrt[3]{[\frac{1}{2} q + \sqrt{(\frac{1}{4} q^2 - \frac{1}{27} p^3)}]}$, ou $\sqrt[3]{[\frac{1}{2} q + \sqrt{(\frac{1}{27} p^3 - \frac{1}{4} q^2)} \cdot \sqrt{-1}]}$ ſe mudará em $\sqrt[3]{(m + n\sqrt{-1})} =$
$m^{\frac{1}{3}} (1 + \frac{1}{3} \frac{n}{m} \sqrt{-1} + \frac{1}{9} \frac{n^2}{m^2} - \frac{5}{81} \frac{n^3}{m^3} \sqrt{-1}$
$- \frac{10}{243} \frac{n^4}{m^4} + \frac{110}{3645} \frac{n^5}{m^5} \sqrt{-1} + \&c.)$

Do mesmo modo se achará . . . .

$$\sqrt[3]{[\tfrac{1}{2}q-\sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2-\tfrac{1}{27}p^3)}]}=\sqrt[3]{(m-n\sqrt{-1})}=$$

$$m^{\frac{1}{3}}(1-\tfrac{1}{3}\frac{n}{m}\sqrt{-1}+\frac{1}{9}\frac{n^2}{m^2}+\frac{5}{81}\frac{n^3}{m^3}\sqrt{-1}$$

$$-\frac{10}{243}\frac{n^4}{m^4}-\frac{110}{3645}\frac{n^5}{m^5}\sqrt{-1}+\&c.)$$

Mudaõ-se pois os tres valores de x em . . . .

$$x=-m^{\frac{1}{3}}(2+\frac{2}{9}\frac{n^2}{m^2}-\frac{20}{243}\frac{n^4}{m^4}+\&c.)$$

$$x=m^{\frac{1}{3}}(1+\frac{1}{9}\frac{n^2}{m^2}-\frac{10}{243}\frac{n^4}{m^4}+\&c.)$$

$$-m^{\frac{1}{3}}\sqrt{3}(\frac{1}{3}\frac{n}{m}-\frac{5}{81}\frac{n^3}{m^3}+\frac{110}{3645}\frac{n^5}{m^5}-\&c.)$$

$$x=m^{\frac{1}{3}}(1+\frac{1}{9}\frac{n^2}{m^2}-\frac{10}{243}\frac{n^4}{m^4}+\&c.)$$

$$+m^{\frac{1}{3}}\sqrt{3}(\frac{1}{3}\frac{n}{m}-\frac{5}{81}\frac{n^3}{m^3}+\frac{110}{3645}\frac{n^5}{m^5}-\&c.)$$

Expressoens, em que naõ ha termos imaginarios.

A pezar das grandes fadigas dos Algebristas, até o presente naõ se tem achado outro modo de dar neste caso hum valor algebrico real ás tres raizes: pelo que só podemos determinallas por series, ou approximadamente. Em razaõ da difficuldade, deo-se a este caso o nome de *caso irreduzivel.*

Se $\frac{1}{27}p^3$ for negativo e igual a $\frac{1}{4}q^2$, todos os valores de x seraõ reais. Logo: Toda a equaçaõ do terceiro gráo tem pelo menos huma raiz real.

Exemplo I. *Achar as raizes da equaçaõ* $y^3 + 6y^2 - 3y + 4 = 0$.

Faça-se (192) .. $y = x - 2$, e teremos a transformada sem segundo termo $x^3 - 15x + 26 = 0$. Esta comparada com a geral $x^3 + px + q = 0$, dá $p = -15$, $q = 26$; logo $\frac{1}{3}p = -5$, $\frac{1}{27}p^3 = -125$; $\frac{1}{2}q = 13$, $\frac{1}{4}q^2 = 169$; donde vem $\sqrt{\left(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3\right)} = \sqrt{44}$: a equaçaõ proposta tem pois huma raiz real, e duas imaginarias.

A primeira he negativa... $x = -\sqrt[3]{(13 + \sqrt{44})} - \sqrt[3]{(13 - \sqrt{44})}$; as outras duas saõ . . . . .

$$x = \frac{1 + \sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{(13 + \sqrt{44})}$$
$$+ \frac{1 - \sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{(13 - \sqrt{44})}.$$
$$x = \frac{1 - \sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{(13 + \sqrt{44})}$$
$$+ \frac{1 + \sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{(13 - \sqrt{44})}.$$

Exemplo II. *Achar as raizes da equaçaõ* $x^3 - 9x - 10 = 0$.

Aqui temos $p = -9$, $q = -10$, e conseguin-

guintemente $\sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)} = \sqrt{-2}$; logo a equaçaõ pertence ao caſo irreduzivel. Fazendo uſo das ſeries precedentes, temos $m = -5$, $m^{\frac{1}{3}} = -1,7099$; $n = \sqrt{2} = 1,4142$; e por conſequencia $\frac{n}{m} = -0,2828$: logo, ſubſtituindo ſómente na primeira ſerie, virá . . . .
$x = +1,7099 [2 + \frac{2}{9}(0,2828)^2 - \frac{20}{243}(0,2828)^4 + \&c.]$; quantidade, na qual ſe devem fazer as operações indicadas.

Quando m for menor que n, formaremos ſeries proprias para eſte caſo (159). Se m e n differirem muito pouco entre ſi, ſerá neceſſario calcular grande numero de termos. Adiante veremos outro modo de achar os valores approximados de x.

199 Concluamos que ſe póde agora reſolver toda a equaçaõ a quatro termos da fórma $y^{3m} + py^{2m} + qy^m + r = 0$; porque, fazendo $y^m = x$, temos $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, iſto he, huma equaçaõ do terceiro gráo. Se fizermos $y^m = x - \frac{1}{3}p$, deduziremos immediatamente huma equaçaõ do terceiro gráo ſem ſegundo termo.

Applicaçaõ ao quarto gráo.

200 PAra reſolvermos a equaçaõ geral do quarto gráo ſem ſegundo termo

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0,$$

to-

tomaremos as duas equações $y^4 - 1 = 0$, e $ay^3 + by^2 + cy + x = 0$.

Eliminando y (167), temos

$$\begin{array}{l} x^4 - 4acx^2 + 4a^2bx - a^4 = 0 \\ \quad - 2bbx^2 + 4bc^2x - c^4 \\ \qquad\qquad\qquad\quad + b^4 \\ \qquad\qquad\qquad\quad + 2a^2c^2 \\ \qquad\qquad\qquad\quad - 4ab^2c \end{array}$$

Esta comparada termo por termo com a proposta, para que sejaõ as mesmas, dá ... $-4ac - 2b^2 = p$ ... $4a^2b + 4bc^2 = q$ ... $-a^4 - c^4 + b^4 + 2a^2c^2 - 4ab^2c = r$.

Para ter b, substituiremos na terceira o valor de $a^4 + c^4$ tirado da segunda, e o de ac tirado da primeira; e acharemos a equaçaõ

$$\begin{array}{l} 64b^6 + 32pb^4 + 4p^2b^2 - qq = 0 \\ \qquad\qquad\quad - 16rb^2 \end{array}$$

a qual he do sexto gráo, mas resolve-se (199) á maneira do terceiro, considerando b^2 como incognita. Esta equaçaõ chama-se a *reduzida*, porque á sua resoluçaõ se reduz a das equações do quarto gráo.

201 Por quanto o ultimo termo q^2 tem o sinal $-$, haverá (180) pelo menos hum factor da fórma $b^2 - n$, e conseguintemente (178) $b^2 = n$, isto he, $b = \pm \sqrt{n}$: logo b terá pelo menos dous valores reais; e dos seis que geralmente ha-de dar a equaçaõ, tres teraõ o sinal $+$, e tres o sinal $-$.

202 Para determinarmos a e c, recorreremos ás duas equações $-4ac - 2b^2 = p$, e $4a^2b$

$+4bc^2 = q$, as quais daõ $2ac = -\frac{1}{2}p - b^2$, e $a^2 + c^2 = \frac{q}{4b}$; logo, ajuntando a primeira com a ſegunda, tirando-a tambem da ſegunda, e extrahindo a raiz quadrada da ſoma e da differença, teremos

$$a + c = \pm \sqrt{\left(\frac{q}{4b} - \frac{1}{2}p - b^2\right)}$$

$$a - c = \pm \sqrt{\left(\frac{q}{4b} + \frac{1}{2}p + b^2\right)}$$

Naõ deduzimos a e c, o que ſeria facil (67), porque nos baſta ter os valores achados de $a + c$ e $a - c$.

Se ſubſtituirmos agora na ſegunda equaçaõ hypothetica $x = -ay^3 - by^2 - cy$ os valores de y deduzidos da primeira $y^4 - 1 = 0$, a ſaber (171, 187).. $y = \pm 1$, e $y = \pm\sqrt{-1}$, teremos os quatro valores de x, ou as quatro raizes da equaçaõ propoſta

$$x = -b - (a + c) = -b - \sqrt{\left(\frac{q}{4b} - \tfrac{1}{2}p - b^2\right)}.$$

$$x = -b + (a + c) = -b + \sqrt{\left(\frac{q}{4b} - \tfrac{1}{2}p - b^2\right)}.$$

$$x = +b + (a - c)\sqrt{-1} = +b + \sqrt{\left(\frac{-q}{4b} - \tfrac{1}{2}p - b^2\right)}.$$

$$x = +b - (a - c)\sqrt{-1} = +b - \sqrt{\left(\frac{-q}{4b} - \tfrac{1}{2}p - b^2\right)}.$$