JORNAL

DE

SCIENCIAS MATHEMATICAS E ASTRONOMICAS

PUBLICADO

PELO

DR. F. GOMES TEIXEIRA

Professor na Academia Polytechnica do Porto,
Antigo Professor na Universidade de Coimbra,
Socio da Academia Real das Sciencias de Lisboa, etc.

VOLUME IX

COIMBRA
IMPRENSA DA UNIVERSIDADE
1889

SOBRE A REPRESENTAÇÃO PARAMETRICA DAS CURVAS DO PRIMEIRO GENERO

POR

DUARTE LEITE

(Professor na Academia Polytechnica do Porto)

As curvas algebricas de grau n qualquer, cujo genero é egual á unidade, são definidas como tendo singularidades equivalentes a $\frac{1}{2}n(n-3)$ pontos duplos, e d'este facto resulta que se podem transformar *unideterminativamente* n'uma cubica sem ponto duplo (*).

O problema da representação parametrica d'estas curvas reduz-se, pois, ao do da cubica geral.

No que segue temos em vista mostrar como as funcções ellipticas de Weierstrass apparecem naturalmente na resolução d'este problema, com decidida vantagem sobre as de Jacobi, já anteriormente empregadas por varios geometras para o mesmo fim (**).

1. Na sua *Enumeratio linearum tertii ordinis*, demonstrou Newton que qualquer cubica se póde deduzir projectivamente d'uma das cinco parabolas divergentes comprehendidas na equação

$$y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d;$$

e para que não haja ponto duplo, basta que as tres raizes do segundo membro sejam deseguaes (***).

(*) Clebsch, *Leçons sur la Géometrie*, tom. III, pag. 313.

(**) Clebsch, op. cit., tom. II, pag. 358 e seg.; tom. III. pag. 320.

(***) Vid. Salmon, *Higher plane curves*, a proposito da classificação das cubicas.

Supponde que isto tem logar, se transportarmos convenientemente a origem sobre o eixo dos x, reduziremos a equação precedente a esta outra

$$y^2 = k^2(4x^3 - g_2 x - g_3).$$

O exame d'esta egualdade suggere logo o emprego da funcção pu de Weierstrass; effectivamente satisfaz-se-lhe fazendo

$$x = pu, \quad y = kp'u.$$

Se remontarmos da parabola á cubica primitiva, invertendo a serie de operações projectivas effectuadas, teremos as novas expressões das coordenadas que seguem

$$x = \frac{a_1 p'u + b_1 pu + c_1}{a_3 p u + b_3 pu + c_3}, \quad y = \frac{a_2 p'u + b_2 pu + c_2}{a_3 p'u + b_3 pu + c_3};$$

ou empregando as coordenadas homogeneas

$$\rho x_i = a_i p'u + b_i pu + c_i, \tag{1}$$

qualquer que seja o triangulo coordenado.

2. Sem nos demorarmos aqui em desenvolver as interessantes consequencias que para as cubicas se deduzem d'esta fórma de representação, passaremos ao caso mais geral d'uma curva do primeiro genero.

Designemos pelo symbolo F_i uma funcção algebrica homogenea; então as coordenadas d'um ponto da curva serão dadas por

$$\chi y_i = F_i\ (x_1,\ x_2,\ x_3),$$

visto que ella provém da cubica (1) por transformação unideterminativa.

É evidente que estas coordenadas são funcções inteiras de pu e $p'u$; e podemos por

$$\theta y_i = f_i\,(pu) + \varphi_i\,(pu)\,.\,p'u. \tag{2}$$

Eis-nos, pois, chegados indirecta mas simplesmente á representação desejada; ella justifica plenamente o nome de *ellipticas* dado ás curvas de que nos occupamos.

Ainda podemos dar ás coordenadas uma fórma mais elegante. Effectivamente toda a funcção inteira de pu e $p'u$ póde reduzir-se ao seguinte typo (*)

$$\frac{\sigma(u-\lambda_1)\,\sigma(u-\lambda_2)\ldots\sigma(u-\lambda_n)}{\sigma^n u}$$

$$\Sigma\lambda_i \equiv 0 \quad \text{mod } (2\omega,\ 2\omega').$$

Não é difficil inferir d'aqui os valores que seguem para as coordenadas

$$\left|\begin{aligned}
&\rho y_1 = \sigma(u-\lambda_1)\,\sigma(u-\lambda_2)\ldots\sigma(u-\lambda_n)\\
&\rho y_2 = \sigma(u-\mu_1)\,\sigma(u-\mu_2)\ldots\sigma(u-\mu_n)\\
&\rho y_3 = \sigma(u-\nu_1)\,\sigma(u-\nu_2)\ldots\sigma(u-\nu_n)\\
&\Sigma\lambda_i \equiv \Sigma\mu_i \equiv \Sigma\nu_i \equiv 0 \quad \text{mod } (2\omega,\ 2\omega')
\end{aligned}\right| \tag{3}$$

Quanto ao numero n, vamos mostrar como se póde egualar ao grau.

Fazendo $y_1 = 0$, concluimos para u os valores λ_i, salvos multiplos dos periodos. Parte d'elles são os argumentos dos pontos com que a recta $y_1 = 0$ corta a curva; os restantes são extranhos a esta, e devem portanto annullar simultaneamente as coordenadas, se os houver.

Incluam-se no factor de proporcionalidade; então, substituindo a u um novo parametro que diffira d'elle na media arithmetica das raizes λ_i, ou μ_i, ou ν_i, cujo indice exceder o grau, chegaremos ás equações (3), em que n tem o valor annunciado.

(*) Halphen, *Traité des fonctions elliptiques*, tom. I.

3. Os lados do triangulo coordenado cortam a curva n'uma serie de pontos, cujos argumentos sommam zero ou multiplos dos periodos. Esta propriedade será exclusiva d'estas tres rectas?

Vamos ver que tem logar para qualquer recta, e mais ainda, para qualquer curva algebrica.

Seja, de feito,

$$f(y_1, y_2, y_3) = 0$$

a equação d'uma curva algebrica de grau *m;* obtemos o argumento dos *mn* pontos de secção, substituindo n'ella as expressões (2) ou (3).

Resulta uma equação cujo primeiro membro é uma funcção de pu e $p'u$. Ora sabe-se (*) que entre os argumentos u_i que annullam nma funcção d'esta natureza existe a relação

$$\Sigma u_i \equiv 0 \quad \text{mod}\,(2\omega,\, 2\omega').$$

Se, portanto, applicarmos esta propriedade ao nosso, concluiremos o seguinte theorema:

Os argumentos dos pontos em que uma curva algebrica corta uma curva elliptica sommam zero, ou multiplos dos periodos.

Deve-se attribuir este theorema a Clebsch, que o demonstrou com generalidade para os argumentos das funcções ellipticas de Jacobi, representando as coordenadas da curva como producto da funcção $\mathrm{H}(u)$ (**).

Por meio d'esta proposição resolvem-se todos os problemas de contacto com extrema facilidade, seguindo o caminho indicado pelo illustre geometra que citâmos.

Porto, setembro de 1888.

(*) Halphen, op. cit., tom. I, pag. 215.
(**) Clebsch, op. cit., tom. II, pag. 393; tom. III, pag. 322.

DEMONSTRAÇÃO DO THEOREMA DE CAUCHY

POR

JOSÉ BRUNO DE CABEDO

(Professor na Universidade de Coimbra)

. . . .

Seja $f(z)$ uma funcção continua e bem determinada, assim como as suas derivadas successivas até á ordem n ao longo de uma linha L.

Considerando as suas extremidades z e z_1, a noção de derivada dá logar ás equações seguintes

$$\left.\begin{array}{l} f(z)-f(z_1)=(z-z_1)f'(z_1)+\varepsilon \\ f'(z)-f'(z_1)=(z-z_1)f''(z_1)+\varepsilon_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f^{n-1}(z)-f^{n-1}(z_1)=(z-z_1)f^n(z_1)+\varepsilon_{n-1} \end{array}\right\}, \quad \dots (1)$$

onde ε, ε_1, . . . são funcções continuas e bem determinadas da variavel z em toda a extensão da mesma linha.

Entre estas funcções ha relações simples que vamos deduzir. Para isto, derivando a primeira das equações precedentes em relação a z, vem

$$f'(z)=f'(z_1)+\varepsilon',$$

d'onde se tira, attendendo á segunda,

$$\varepsilon'=(z-z_1)f''(z_1)+\varepsilon_1.$$

Integrando agora ambos os membros d'esta equação ao longo de L no sentido $z_1 z$, e attendendo a que é $\varepsilon = 0$ para $z = z_1$, acha-se

$$\varepsilon = \frac{(z - z_1)^2}{1.2} f''(z_1) + \int_L \varepsilon_1 \, dz.$$

Do mesmo modo as restantes equações dão

$$\varepsilon_1 = \frac{(z - z_1)^2}{1.2} f'''(z_1) + \int_L \varepsilon_2 \, dz$$

....

$$\varepsilon_{n-1} = \frac{(z - z_1)^2}{1.2} f^n(z_1) + \int_L \varepsilon_{n-1} \, dz.$$

Finalmente, eliminando entre estas equações as funcções ε, $\varepsilon_1, \ldots$, vem a expressão

$$\varepsilon = \frac{(z - z_1)^2}{1.2} f''(z_1) + \ldots + \frac{(z - z_1)^n}{1.2 \ldots n} f^n(z_1) + \int_L \int_L \ldots \int_L \varepsilon_{n-1} \, dz,$$

que, substituida na primeira das equações (1), dá a formula de Taylor, que nos vae servir para demonstrar a celebre proposição de Cauchy.

Seja então $f(z)$, assim como a sua derivada, uma funcção continua e uniforme no interior de uma area onde se acham descriptos os contornos b_1 e b_2 com as mesmas extremidades z e z_1. Designando por $F(z)$ a sua primitiva, o seu accrescimo na passagem de z_1 para z é respectivamente em relação aos contornos considerados

$$\Delta_{b_1} = (z - z_1) f(z_1) + \frac{(z - z_1)^2}{1.2} f'(z_1) + \int_{b_1} \varepsilon_1 \, dz,$$

$$\Delta_{b_2} = (z - z_1) f(z_1) + \frac{(z - z_1)^2}{1.2} f'(z_1) + \int_{b_2} \varepsilon_1 \, dz,$$

d'onde resulta

$$\Delta_{b_1} - \Delta_{b_2} = \int_{b_1} \varepsilon_1 \, dz - \int_{b_2} \varepsilon_1 \, dz.$$

Posto isto, como ε_1 é um infinitamente pequeno de segunda ordem em relação a $z - z_1$, póde pôr-se

$$\varepsilon_1 = (z - z_1)^2 \varphi(z),$$

sendo $\varphi(z)$ uma funcção finita e bem determinada em toda a extensão da região considerada.

Teremos pois

$$\operatorname{mod} \int_{b_1} \varepsilon_1 \, dz = \operatorname{mod} \int_{b_1} (z - z_1)^2 \varphi(z) \, dz \overline{\overline{<}} \int_{b_1} \operatorname{mod}(z - z_1)^2 \operatorname{mod} \varphi(z) \, ds$$

$$\overline{\overline{<}} \, r_1^2 M_1 s_1 \overline{\overline{<}} M_1 s_1^3,$$

designando por r_1 a maior distancia a que a variavel z se acha de z_1 no seu curso ao longo de b_1, por M_1 o modulo maximo de $\varphi(z)$ sobre a mesma linha cujo perimetro é s_1, e attendendo a que, pela propriedade da linha recta, é $r_1 < s_1$.

Analogamente o segundo integral dá

$$\operatorname{mod} \int_{b_2} \varepsilon_1 \, dz \overline{\overline{<}} M_2 s_2^3,$$

d'onde se conclue

$$\operatorname{mod}(\Delta_{b_1} - \Delta_{b_2}) \overline{\overline{<}} M_1 s_1^3 + M_2 s_2^3 \overline{\overline{<}} N_{1,2} s_{1,2}^3,$$

designando por $s_{1,2}$ o maior dos s e fazendo $M_1 + M_2 = N_{1,2}$.

Dividamos agora um contorno L_1, tomado na mesma area, em p partes b'_1, b''_1, ... taes que os seus perimetros tenham um mesmo valor s_1. Deformando depois estas partes, de modo que se conservem fixas as suas extremidades e fiquem ainda com os seus perimetros de uma mesma grandeza s_2, obtem-se um novo contorno L_2 dividido egualmente em p partes b'_2, b''_2, ... pelos pontos communs com o primeiro.

A applicação da formula precedente dará então

$$\operatorname{mod}(\Delta_{L_1}-\Delta_{L_2})=\operatorname{mod}\left(\int_{L_1}-\int_{L_2}\right)=\operatorname{mod}\left(\int_{b'_1}-\int_{b'_2}+\int_{b''_1}-\int_{b''_2}+\ldots\right)$$

$$\overline{\overline{<}}\,N'_{1,2}s_{1,2}^3+N''_{1,2}s_{1,2}^3+\ldots\overline{\overline{<}}\,N_{1,2}\,S_{1,2}\,s_{1,2}^2,$$

designando por $N_{1,2}$ o maior dos N e attendendo a que pela nossa construcção $p\,.\,s_{1,2}$ é egual ao maior dos perimetros L_1 e L_2 que representamos por $S_{1,2}$.

Fazendo para maior simplicidade $N_{1,2}\,S_{1,2}=P_{1,2}$, teremos

$$\operatorname{mod}(\Delta_{L_1}-\Delta_{L_2})\,\overline{\overline{<}}\,P_{1,2}\,s_{1,2}^2.$$

Por p deformações infinitesimaes do mesmo perimetro póde de L_2 derivar-se um outro contorno L_3, de modo que só tenha de commum com L_1 as suas extremidades e com o primeiro $p+1$ pontos communs que o dividam em p partes cujos perimetros sejam eguaes entre si.

Sendo assim, a formula anterior dará

$$\operatorname{mod}(\Delta_{L_1}-\Delta_{L_2})\,\overline{\overline{<}}\,\operatorname{mod}\left(\int_1-\int_2\right)+\operatorname{mod}\left(\int_2-\int_3\right)$$

$$\overline{\overline{<}}\,P_{1,2}\,s_{2,3}^2+P_{2,3}\,s_{2,3}^2\,\overline{\overline{<}}\,Q_{1,3}\,s_{1,3}^2,$$

fazendo $P_{1,2}+P_{2,3}=Q_{1,3}$ e designando por $s_{1,3}$ o maior dos s.

Finalmente de L_3 deriva um contorno L_5 do mesmo modo que o primeiro resultou de L_1, e assim successivamente até se obter um contorno L_{2p+1}.

Pela comparação dos dois contornos extremos teremos então

$$\operatorname{mod}(\Delta_{L_1}-\Delta_{L_{2p+1}})\,\overline{\overline{<}}\,Q_{1,3}\,s_{1,3}^2+Q_{3,5}\,s_{3,5}^2+\ldots$$

$$\overline{\overline{<}}\,Q_{1,2p+1}\times S_{1,2p+1}\times s_{1,2p+1},$$

designando por $Q_{1,2p+1}$ o maior dos Q, por $s_{1,2p+1}$ o maior dos s, e por $S_{1,2p+1} = p . s_{1,2p+1}$ o maior dos perimetros de L_1, L_2, etc.

A relação precedente demonstra, pois, o theorema de Cauchy, por ser $s_{1,2p+1}$ uma quantidade que se póde tornar tão pequena quanto se quer.

BIBLIOGRAPHIA

J. Pedro Teixeira. — *Estudo sobre funcções duplamente periodicas.* — *Coimbra, 1888.*

Desde que Abel e Jacobi descobriram a dupla periodicidade das funcções ellipticas, a attenção dos geometras foi chamada para a theoria geral das funcções duplamente periodicas, das quaes se tirou como consequencia a theoria das funcções ellipticas. Muitos são os trabalhos que até hoje têem sido publicados a respeito d'este bello assumpto. O sr. Pedro Teixeira no seu livro, apresentado á Faculdade de Mathematica da Universidade de Coimbra como dissertação inaugural, expõe de um modo claro e methodico o que n'elle ha de mais importante.

Principia o auctor por algumas definições e principios geraes relativos á natureza e numero de periodos das funcções monodromas, ao parallelogrammo dos periodos, etc. Demonstra em seguida alguns theoremas fundamentaes n'esta doutrina e passa á deducção das formulas que dão as expressões analyticas das funcções duplamente periodicas, com os infinitos em evidencia, considerando primeiro as funcções que têem sómente polos, e em seguida as funcções que têem polos e pontos singulares essenciaes isolados. Termina a primeira parte do livro por alguns theoremas relativos ás funcções periodicas ligadas por uma equação algebrica.

Na segunda parte do seu trabalho occupa-se o auctor das funcções duplamente periodicas de segunda especie, deduzindo as expressões analyticas d'estas funcções que tornam evidentes os seus zeros e os seus infinitos.

L. Viglione. — *Leciones de Geometria Analitica.* — *Buenos-Aires, 1888.*

Contém esta obra importante as excellentes prelecções feitas pelo auctor, na Universidade de Buenos-Aires, nos annos de 1885 e 1886.

Principia o primeiro volume por uma introducção, onde o auctor define os systemas de coordenadas mais usados, isto é, os systemas cartesiano, polar, trilinear, superficial e tangencial.

Em seguida vem a primeira secção, destinada ao systema cartesiano, onde o auctor se occupa da representação dos logares geometricos por equações, das mudanças de coordenadas, da theoria da linha recta e da theoria das conicas. Muitos e bem escolhidos exercicios vêem espalhados por estes capitulos, para que o leitor se familiarise com o manejo das coordenadas cartesianas, e com as questões geometricas de que se vai occupando. Merece especial attenção n'esta parte da obra a parte relativa á classificação das conicas, que o auctor expõe pelo methodo empregado pelo illustre geometra italiano E. d'Ovidio.

Na segunda secção occupa-se o auctor do systema de coordenadas polares. Ensina o meio de transformar as equações referidas a coordenadas polares em equações referidas a coordenadas cartesianas, e deduz as equações polares da recta e das secções conicas.

Na secção terceira e quarta vem um estudo rapido dos systemas de coordenadas trilinear, superficial e tangencial.

Segue-se a Geometria Analytica a tres dimensões, que o auctor divide em quatro partes, nas quaes se occupa dos principios geraes d'este ramo da Geometria, e da theoria da linha recta, do plano e das quadricas. Como na Geometria plana, o auctor acompanha a exposição com bons exercicios.

D. D. Bucas e D. R. Escandón. — Teoria elemental de las determinantes. — 1888.

N'este livro, escripto principalmente debaixo do ponto de vista didactico, é exposta com toda a clareza e rigor a parte da theoria dos determinantes mais necessaria para estudar com fructo os tratados modernos de Analyse, de Geometria e de Mechanica.

Dividiram os auctores o seu tratado em dois livros. No primeiro expõem os principios fundamentaes da theoria dos determinantes e os theoremas necessarios para os calcular, desenvolver e combinar. No segundo fazem applicação d'estes principios á Algebra e á Trigonometria, occupando-se successivamente da resolução das equações do primeiro, segundo e terceiro gráo com uma incognita, dos systemas de equações do primeiro gráo, dos systemas de duas equações do segundo e terceiro gráo, etc.

A exposição das doutrinas é acompanhada de exercicios, para que o leitor se familiarise com o emprego dos determinantes.

D. Z. G. de Galdeano. — *Critica y sintesis del Algebra.* — *Toledo, 1888.*

Lê-se com verdadeiro prazer este trabalho interessante, em que o illustre professor do Instituto de Toledo revela extensos conhecimentos de Analyse moderna e elevado criterio philosophico. Não ha questão alguma importante de Algebra de que o auctor se não occupe para lhe discutir os fundamentos, analysar os methodos e resumir a historia.

É assim que, a respeito do conceito de numero, se refere aos principios mais importantes da Arithmetica superior, mencionando os trabalhos de Fermat, Euler, Lagrange, Legendre, Gauss, Dirichlet, Kummer, etc.

Occupa-se em seguida do conceito de continuidade, mencionando differentes assumptos em que se manifesta este conceito.

A respeito do conceito de qualidade em Algebra, occupa-se o auctor da theoria das quantidades complexas, da theoria das funcções analyticas para expôr os trabalhos de Cauchy, Riemann, Weierstrass, Cantor, Bois-Reymond, etc.; e do mecanismo das leis do Calculo para expôr os trabalhos de Möbius, Bellavitis, Grassmann, Hamilton, etc.

Vem em seguida o estudo sobre o conceito de qualidade na applicação da Algebra á Geometria, referindo-se o auctor principalmente á correlação das figuras de Carnot.

Finalmente vem o estudo do conceito de combinação e ordem em Algebra, e a este respeito refere-se o auctor aos trabalhos relativos á resolução algebrica das equações, á Algebra das fórmas, á theoria dos determinantes, etc.

Na segunda parte do livro o auctor indica quaes os doutrinas que, no seu modo de ver, devem constituir a Algebra, e o modo de as expôr e ensinar.

M. Lerch. — *Sur une méthode pour obtenir le développement en série trigonométrique de quelques fonctions elliptiques* (*Acta Mathematica*, t. XII).

N'este trabalho importante apresenta o auctor um methodo directo para desenvolver em serie trigonometrica a funcção

$$\frac{\theta_0(x+u)}{\theta_0(u)}$$

sendo

$$\theta_0(u) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2} \cos 2nu\pi, \quad q = e^{\tau\pi i}.$$

L. Niesen. — *Sur l'aspect physique de la planète Mars* (*Bulletins de l'Académie R. de Belgique, 1888*).

N'esta noticia interessante dá o sr. Niesen, astronomo no Observatorio de Bruxellas, noticia das observações que fez sobre o aspecto physico de Marte durante a opposição de 1888. O auctor compara as suas observações com as do sr. Perrotin, feitas durante esta opposição e a de 1886, para notar que, em quanto que o sr. Perrotin achou differenças consideraveis no aspecto d'este planeta nas duas epochas das observações, as suas lhe apresentaram Marte com um aspecto semelhante ao observado pelo sr. Perrotin em 1886.

Em seguida o sr. Giesen chama a attenção sobre algumas precauções que é necessario tomar para tornar comparaveis as observações d'esta natureza.

Ch. Hermite. — *Remarques sur la décomposition en éléments simples des fonctions doublement périodiques* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. II).

É bem conhecido o papel importante que representa na theoria das funcções periodicas a decomposição em elementos simples da funcção $F(x)$, cujos periodos são $2k$ e $2ik$ e cujos pólos são $a, b, \ldots, l$:

$$F(x) = C + \Sigma A \frac{H'(x-a)}{H(x-a)} + \Sigma D_x A' \frac{H'(x-a)}{H(x-a)} + \ldots$$

N'esta decomposição a quantidade $\frac{H'(x)}{H(x)}$, que representa o papel de elemento simples, não é duplamente periodica, em quanto que as suas derivadas o são. Por isso n'esta bella memoria o grande geometra francez apresenta uma outra decomposição de $F(x)$ em que não entram mais do que os elementos duplamente periodicos sn^2x e sua derivada. Em seguida considera o caso particular das funcções com dois periodos $2k$ e $2ik$, que se reproduzem com mudança de signal quando se ajuncta á variavel x um dos semiperiodos ik, $k+ik'$, k, a respeito das quaes faz algumas observações do maior interesse. Finalmente considera as funcções cujos periodos são $4k$ e $4ik'$ para mostrar que podem ser decompostas em elementos simples formados por meio das quantidades snx, cnx, dnx.

H. G. Zeuthen. — Note sur l'usage des coordonées dans l'antiquité et sur l'invention de cet instrument (*Bulletin de l'Académie Danoise des Sciences, 1888*).

No livro notavel que o sr. Zeuthen escreveu ha alguns annos, para expôr a theoria das conicas segundo o methodo dos antigos, fez um uso continuo das coordenadas e notou que se prestavam tanto á exposição dos methodos empregados pelos antigos, que foi levado a concluir que elles conheciam este instrumento de indagações geometricas. Tendo porém o sr. Günther attribuido a Fermat a descoberta do uso e utilidade das coordenadas, o sr. Zeuthen faz uma analyse dos trabalhos de Fermat, onde este grande sabio emprega as coordenadas, para fazer vêr que foi procurando reconstruir os dous livros perdidos de Apollonius sobre os logares geometricos planos, que Fermat foi levado ao emprego das coordenadas, e que os antigos não só sabiam fazer as mesmas applicações das coordenadas que levaram o sr. Günther a attribuir a Fermat a descoberta da utilidade d'este instrumento, mas ainda outras. Para o sr. Zeuthen, o grande merito do *Isagoge* de Fermat está na exposição clara do methodo das coordenadas, e o grande merito de Geometria de Descartes está na base algebrica que deu á Geometria e a todas as mathematicas.

Gino Loria. — Notizie storiche sulla Geometria numerativa (Bibliotheca Mathematica de G. Eneström, 1888).

Consta de oito paragraphos esta interessante noticia. No primeiro define o auctor o objecto de Geometria numerativa. No segundo dá noticia dos trabalhos que prepararam este ramo de Geometria. No terceiro refere-se á sua fundação por Chastes, á longa serie de memorias que este grande geometra escreveu sobre este assumpto, e á sua theoria das caracteristicas dos systemas de curvas e superficies. No quarto, quinto e sexto refere-se aos theoremas de Geometria numerativa obtidos pela ligação da theoria dos systemas de curvas ou de superficies com a das equações differenciaes, pela generalisação da theoria das caracteristicas, e pela theoria da correspondencia. Finalmente nos paragraphos setimo e oitavo expõe as indagações de Halphen e de Schubert a respeito d'este assumpto. Acompanha este trabalho historico uma lista de 137 memorias sobre Geometria numerativa.

E. Cesàro. — Remarques sur la théorie des roulettes (*Nouvelles Annales de Mathématiques,* 3ème série, t. VII).

O auctor mosta como os principios fundamentaes da Geometria intrinseca conduzem facilmente aos principaes resultados conhecidos relativos ás curvas geradas pelo movimento de uma curva gyrando sobre outra.

S. Pincherle. — Sulle funzioni ipergeometriche generalizzate (*Rendiconti della R. Accademia dei Lyncei, Roma, 1888*)

As funcções hypergeometricas, definidas por Riemann como integraes de certas equações differenciaes lineares de segunda ordem, foram generalisadas em duas direcções differentes por Pochhammer e Goursat. O objecto do trabalho do sr. Pincherle é mostrar que entre as duas familias de transcendentes descobertas por aquelles auctores existe uma ligação. Mostra, com effeito, que as transcendentes de Pochhammer têem a sua origem n'uma equação ás differenças finitas, e que as transcendentes de Goursat têem a sua origem n'uma equação differencial linear, e que entre estas equações existe uma ligação tal que a uma propriedade de uma corresponde uma propriedade correlativa da outra.

G. de Longchamps. — Sur la transformation orthotangentielle dans le plan et dans l'espace (*Bulletin de la Société R. des Sciences de Bohême, 1888*).

Seja XY uma recta fixa, U uma curva dada, Δ uma tangente a esta curva, e A o ponto em que esta tangente corta XY. Se pelo ponto A se tirar uma perpendicular Δ' a Δ, a envolvente de Δ', quando Δ se move, é uma curva U′, que é a transformada orthotangencial da curva U. O objecto do artigo do sr. Longchamps é o estudo analytico d'esta transformação no systema Cartesiano.

A. Gützmer. — Ein satz über Potenzreihen (*Mathematische Annalen*, t. XXXII).

E. Cesàro. — Sur une proposition de théorie asymptotique des nombres (*Annali di Matematica pura ed applicata*, 2.ª serie, t. XVI).

—— *Sur une distribution des signes* (*Rendiconti della R. Accademia dei Lyncei, Roma, 1888*).

Gino Loria. — Sul concetto di volume in uno spazio lineare qualunque (*Giornale de Battaglini*, t. XXVI).

Ch. Hermite. — *Sur la transformation de l'intégrale elliptique de seconde espèce* (*Mémoires de la Société R. des Sciences de Bohême*, 7ème série, t. II).

—— *Demonstration nouvelle d'une formule relative aux intégrales Eulériennes de seconde espèce* (*Bulletin de la Société royale des Sciences de Prague, 1888*).

G. B. Guccia. — *Sur l'intersection de deux courbes algébriques en un point singulier* (*Comptes rendus de l'Academie des Sciences de Paris, 1888*).

G. T.

EXTRACTOS DAS ULTIMAS PUBLICAÇÕES

I

Sobre um desenvolvimento em serie de $\frac{1}{\cos x}$.

A serie que figura no desenvolvimento conhecido

$$\frac{1}{\cos x}=\pi\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu}(2\nu-1)}{x^2-(2\nu-1)^2\frac{\pi^2}{4}}$$

não é absolutamente convergente. Para remediar este inconveniente o sr. Weyr transforma esta serie por meio da fórmula

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots$$

que dá

$$-1=\frac{4}{\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu}}{2\nu-1},$$

na serie

$$\frac{1}{\cos x}=1+\pi\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu}(2\nu-1)}{x^2-(2\nu-1)^2\frac{\pi^2}{4}}+\frac{4}{\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu}}{2\nu-1}$$

que dá a formula

$$\frac{1}{\cos x}=1+\frac{4x^2}{\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu}}{(2\nu-1)\left[x^2-(2\nu-1)^2\frac{\pi^2}{4}\right]}.$$

A serie que entra no segundo membro d'esta formula é absolutamente convergente.

[*Ed. Weyr: Extrait d'une lettre à M. Hermite* (*Bulletin des Sciences Mathématiques*, 2ᵉ série, t. XII)].

II

Uma questão de maximos e minimos

Os theoremas sobre o maximum d'um producto de factores positivos cuja somma é constante e sobre o minimum da somma de termos positivos cujo producto é constante demonstra-se facilmente por meio da desigualdade

$$xyz\ldots \leqq \left(\frac{x+y+z+\ldots}{n}\right)^n,$$

a qual mostra que, quando a somma é dada, o producto é maximum, e que, quando o producto é dado, a somma é minimum, no caso de ser $x=y=z=\ldots$

[*Ch. Bioche: Sur les minima des sommes, etc.* (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1888)].

III

Sobre uma formula de Raabe

A formula de Raabe

$$\int_0^1 \log\Gamma(x+u)\,dz = u\log u - u + \frac{1}{2}\log 2\pi$$

é demonstrada do modo seguinte pelo sr. Lerch:

Pondo no integral

$$\int_0^1 \log\Gamma(x+u)\,dx = \mathrm{F}(u),$$

onde u é real e positivo, $x+u=z$, vem

$$F(u)=\int_u^{u+1}\log\Gamma(z)\,dz,$$

d'onde se tira

$$\frac{dF(u)}{du}=\log\frac{\Gamma(u+1)}{\Gamma(u)}=\log u$$

e portanto

$$F(u)=C+u\log u-u.$$

Para determinar a constante C note-se que é

$$C=\int_0^1\log\Gamma(x)\,dx,$$

e que da formula

$$\Gamma(x)\,\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi u}$$

se tira

$$\int_0^1\log\Gamma(x)\,dx=\log\pi-\int_0^1\log\operatorname{sen}\pi x\,dx-\int_0^1\log\Gamma(1-x)\,dx$$

ou

$$2\int_0^1\log\Gamma(x)\,dx=\log\pi-\int_0^1\log\operatorname{sen}\pi x\,dx=\log 2\pi,$$

visto ser

$$\int_0^1\log\Gamma(1-x)\,dx=\int_0^1\log\Gamma(x)\,dx.$$

Temos pois

$$C=\frac{1}{2}\log 2\pi.$$

Substituindo na expressão de $F(u)$ vem a formula de Raabe.

[*M. Lerch: Démonstration élémentaire d'une formule de Raabe* (*Giornale de Rattaglini*, t. XXVI)].

IV

Valor do integral $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$

Póde deduzir-se o valor do integral $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ da expressão do numero π devida a Wallis, como fez vêr o sr. Méray.

Pondo, com effeito,

$$S_u = \int_0^\infty x^u e^{-x^2} dx$$

a integração por partes dá

$$S_{u+2} = \frac{u+1}{z} S_n$$

e portanto

$$S_{2m} = \frac{1.3\ldots(2m-1)}{2.2\ldots2} S_0, \quad S_{2m-1} = \frac{2.4\ldots(2m-2)}{2.2\ldots2} \cdot \frac{1}{2}.$$

Por outra parte, a substituição

$$x = \left(\frac{u-1}{2} y\right)^{\frac{1}{2}}$$

feita no integral, dá

$$S_u = \frac{1}{2}\left(\frac{u-1}{2}\right)^{\frac{u+1}{2}} e^{-\frac{u-1}{2}} T_u$$

onde

$$T_u = \int_0^\infty (eye^{-y})^{\frac{u-1}{2}} dy.$$

Mas por ser $eye^{-y} \overline{\overline{<}} 1$, temos $T_{2m+1} < T_{2m} < T_{2m-1}$, d'onde

$$1 < \frac{T_{2m}}{T_{2m+1}} < \frac{T_{2m-1}}{T_{2m+1}}.$$

Mas é facil de vêr que é

$$\lim_{m=\infty} \frac{T_{2m-1}}{T_{2m+1}} = \lim_{m=\infty} \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)^{-m}}{e} = 1\,;$$

logo será tambem

$$\lim \frac{T_{2m}^2}{T_{2m}^2{}_{+1}} = 1$$

ou, substituindo T_{2m} e T_{2m+1} pelos seus valores

$$\lim_{m=\infty} \frac{2\,S_0^2}{e\left(1-\frac{1}{2m}\right)^{2m} \cdot \frac{2m-1}{2m} \cdot \frac{2m+1}{2m}}$$

$$\times \frac{1^2.3^2.5^2\ldots(2m-1)^2(2m+1)}{2^2.4^2.6^2\ldots(2m)^2} = 1$$

ou, attendendo á fórmula de Wallis,

$$S_0 = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

[*Méray: Valeur de l'intégrale, etc.* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. XII)].

V

Definição geometrica das funcções ellipticas

O sr. G. Peano apresenta a seguinte definição geometrica das funcções ellipticas:

Seja $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ a equação da ellipse referida a eixos orthogonaes O_x e O_y. Seja P um ponto d'esta ellipse e M e N dous pontos do raio vector OP taes que $PM = -\frac{l}{2}$, $PN = \frac{l}{2}$, l representando um cumprimento dado.

Se P variar sobre a ellipse, os pontos M e N descrevem duas curvas e o segmento MN descreve uma área plana. Sendo U a área descripta por MN quando o angulo $POx = \alpha$ varía desde O até α, ou quando o angulo θ (suppondo $x = a\cos\theta$, $y = a\,\mathrm{sen}\,\theta$) varía desde o raio até θ, as formulas conhecidas dão

$$U = lab\int_0^{\alpha}\frac{d\alpha}{\sqrt{b^2\cos^2\alpha + a^2\,\mathrm{sen}^2\,\alpha}},$$

$$U = lab\int_0^{\alpha}\frac{d\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}}.$$

Como os dois integraes precedentes são integraes ellipticos de primeira especie, estas formulas podem servir para definir as funcções ellipticas.

Assim, por exemplo, suppondo $a > b$ e $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$, temos

$$U = lb\int_0^{\alpha}\frac{d\theta}{\sqrt{1 - e^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}},$$

e, pondo $\frac{U}{lb} = u$,

$$\theta = am\,u,\ x = a\,cn\,u,\ y = b\,sn\,u,\ r = a\,dn\,u.$$

[*G. Peano: Definizione geometrica delle funzioni ellitiche* (*Giornale di Matematiche de Battaglini*, t. XXVI)].

REMARQUES SUR DIVERS ARTICES CONCERNANT LA THÉORIE DES SÉRIES (*)

PAR

M. E. Cesàro

Professeur à l'Université de Palerme

1. M. Mathyas Lerch a signalé des séries qui se prêtent à des considérations intéressantes. C'est spécialement la série dont le terme générale est

$$u_n = q^{n-\nu} x^{\frac{\nu(\nu+1)}{2}}, \quad (0 < q < 1 < x),$$

que M. Lerch a fait connaître dans le *Jornal de Sciencias mathematicas e astronomicas*, vol. VII, pag. 79. On a représenté par ν le *nombre des chiffres* de n. Le nombre $\frac{u_n}{u_{n-1}}$, généralement égal à q, devient x^ν lorsque $n = 10^{\nu-1}$. Il en résulte que, si l'on fait parcourir à n la succession des puissances de 10, le rapport considéré finit pour surpasser toute limite. Cependant la *série est convergente,* car $\sqrt[n]{u_n}$ tend vers $q < 1$. M. Lerch dit, en outre, que x doit être inférieur à $\frac{1}{q^2}$. Curieux de *savoir le pourquoi* de cette condition inutile, j'ai été conduit à penser que M. Lerch, voulant se borner à faire connaître quelque exemple particulier de séries construites avec une grande généralité, a involontairement échangé entre elles les conditions relatives à deux cas particuliers

(*) Este artigo é extrahido das *Nouvelles Annales de Mathématiques* (3.ª serie, t. VII, 1888). Publicamol-o aqui por se referir a alguns artigos publicados n'este jornal.

différents. Soit $f(n)$ une fonction telle que $f(n)-f(n-1)$ augmente avec n au delà de toute limite. Si $\zeta(n)$ est la totalité des nombres entiers, non superieurs à n, qui jouissent d'une propriété Ω, appartenant à une infinité de nombres entiers, la série dont le terme generale est

$$u_n = q^n x^{f[\zeta(n)]}, \quad (0 < q < 1 < x)$$

est certainement convergente, si $\frac{f[\zeta(n)]}{n}$ tend vers zéro, bien que le rapport $\frac{u_n}{u_{n-1}}$ surpasse toute limite lorsque n parcourt la succession des nombres entiers doués de la propriété Ω. La série est encore convergente lorsque $\frac{f[\zeta(u)]}{n}$ tend vers une limite finie autre quezéro; mais, dan ce cas, x ne peut être aussi grand qu'on le veut. En particulier, la série, dont le terme générale est

$$u_n = q^n x^{[\sqrt{n}]^2}, \quad \left(0 < q < 1 < x < \frac{1}{q}\right),$$

est convergente, bien que le rapport $\frac{u_n}{u_{n-1}}$ surpasse toute limite lorsque n parcourt la succession des *carrés parfaits*. C'est probablement cette série que M. Lerch avait en vue, ou plutôt la série qui a pour terme générale

$$u_n = q^{n-[\sqrt{n}]} x^{\frac{1}{2}[\sqrt{n}]\{[\sqrt{n}]+1\}}.$$

Quoi qu'il en soit, il est certain que, si la propriété Ω cessait d'être *infiniment rare* parmi les nombres entiers, la série perdrait sa convergence.

2. J'ai donné dans le même *Jornal*, vol. VII, pag. 172, des exemples moins compliqués. Les voici:

$$\frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\beta} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\beta} + \ldots \quad (1 < \alpha < \beta)$$

$$\alpha + \beta^2 + \alpha^3 + \beta^4 + \ldots \quad (0 < \alpha < \beta < 1).$$

M. A. Gützmer dit que ces exemples sont *moins remarquables* que celui de M. Lerch. Cette appréciation est inexacte. Voici pourquoi. Dans le série de M. Lerch les valeurs de n, qui font croître $\frac{u_n}{u_{n-1}}$ au delà de toute limite, *deviennent de plus en plus rares*. Dans mes exemples, comme dans d'autres séries de M. Lerch, il est tout aussi probable de voir $\frac{u_n}{u_{n-1}}$ tendre vers l'infini que vers zéro. C'est justement sur cette observation que M. Gützmer s'appuie pour dire que la série de M. Lerch est la plus remarquable de toutes. Or il me semble que *la convergence d'une série est d'autant plus surprenante que les symptômes de divergence s'y manifestent plus frequemment*. On devrai plutôt s'attacher à multiplier ces symptômes d'autant que possible, en s'efforçant d'obtenir, melgré cela, une série convergente. Il est certain qu'on peut construire des séries dans lesquelles $\frac{u_n}{u_{n-1}}$ surpasse toute limite pour des valeurs de n, dont la fréquence parmi les nombres entiers est aussi considérable qu'on le veut. Il suffit de prendre la série

$$q_1+q_2^2+\ldots+q_r^r+q_1^{r+1}+q_2^{r+2}+\ldots+q_r^{2r}+q_1^{2r+1}+\ldots$$

où

$$0<q_1<q_2<\ldots<q_r<1.$$

Ici la convergence est manifeste. Cependant, la probabilité de voir $\frac{u_n}{u_{n-1}}$ surpasser toute limite est $1-\frac{1}{r}$: elle est aussi voisine de l'unité qu'on le veut. Est-il possible de *construire des séries convergentes dans lesquelles les valeurs de* n, *qui ne font pas croître* $\frac{u_n}{u_{n-1}}$ *à l'infini soient infiniment rares?*

3. Dans le *Jornal de Sciencias Mathematicas*, vol. VIII, p. 33, M. Gützmer a montré que les singularités de la série de M. Lerch peuvent être *enlevées* par un groupement convenable des termes. Ce fait est vrai pour toutes les séries convergentes.

J'ai établi cela, en faisant voir par des considérations analogues à celles dont on fait usage pour démontrer le *théorème de Riemann,* comme on doit s'y prendre pour *calquer,* pour ainsi dire, une série convergente sur une progression géométrique donnée. Mais M. Weyr, dans le même *Jornal,* vol. VIII, pag. 97, vient d'arriver au même résultat par des considérations beaucoup plus simples que les miennes. Je vais les reproduire en les modifiant quelque peu. Soit

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$$

une série convergente à termes positifs. Le rapport $\frac{S_n}{R_n}$ croit à l'infini avec n, et, par suite, on peut toujours assigner une valeur de n à partir de laquelle on ait constamment $q\,S_n > R_n$, q étant positif. Cela est encore vrai, si l'on considère la série à partir de l'un quelconque de ses termes. Il en résulte qu'on peut grouper les termes de la série

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots,$$

en les laissant dans l'ordre où ils se trouvent, de manière à former une nouvelle série

$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots$$

dont les termes satisfont à l'inégalité

$$q\,v_n > v_{n+1} + v_{n+2} + v_{n+3} + \ldots$$

On voit que $\frac{v_n}{v_{n-1}}$ sera constamment inférieur au nombre positif q, arbitrairement petit. Plus généralement, ayant pris des nombres quelconques, positifs et finis, la remarque de M. Weyr conduit à affirmer qu'il existe une suite de nombres positifs $q_1, q_2, q_3, \ldots$ non supérieurs aux nombres donnés, et tels que l'on puisse écrire

$$v_n = \frac{S\,q_1\,q_2\,q_3 \ldots q_{n-1}}{(1+q_1)(1+q_2)\ldots(1+q_n)}.$$

Au moyen de cette égalité, nous pouvons faire en sorte que *l'allure* de la série donnée se modèle, d'autant que possible, sur celle d'une autre série.

4. On a reproduit dans le même *Jornal*, vol. VIII, pag. 116, quelques-unes de mes précédentes remarques (*Nouvelles Annales*, pag. 50, 1888). À propos de l'une d'elles, je signalerai une généralisation asses intéressante. Si la fontion a^n croit sans cesse et indéfiniment, on sait, d'après Cauchy, que l'on a

$$\lim \frac{a_1 S_1 + (a_2 - a_1) S_2 + \ldots + (a_n - a_{n-1}) S_n}{a_n} = S,$$

ou bien

$$\lim \left(S_n - \frac{a_1 u_2 + a_2 u_3 + \ldots + a_{n-1} u_n}{a_n} \right) = S;$$

d'où

$$\lim \frac{a_1 u_2 + a_2 u_3 + \ldots + a_{n-1} u_n}{a_n} = 0;$$

car $\lim u_n = 0$. Donc

$$\lim \frac{a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_n u_n}{a_n} = 0.$$

Voici une curieuse conséquence de cette égalité. Si la série

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots$$

n'est par *moins divergente* que la série harmonique, on peut substituer n au dénominateur a_n. Si l'on prend ensuite $a_n u_n = \pm 1$, on arrive à cette condusion: *pour que la série*

$$\pm \frac{1}{a_1} \pm \frac{1}{a_2} \pm \frac{1}{a_3} \pm \ldots$$

soit convergente, il faut que les signes — s'y présentent aussi fréquemment que les signes +. Cela généralise une proposition énoncée précédemment (*Nouvelles Annales*, pag. 57, 1888).

5. Il vient de peraître dans les *Nouvelles Annales*, pag. 196, 1888, un théorème de convergence que son auteur, M. J. L. W. V. Jensen, croit nouveau. On a l'habitude d'enoncer la première partie du *théorème de Kummer comme il suit: Soit* a_n *une fontion positive de* n. *La série*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$$

à termes positifs, est convergente si

$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1}$$

tend, pour n *infini, vers une limite positive.* Cet énoncé a le défaut d'être plus restrictif que ne l'exige la démonstration; car, dans celle-ci, on commence par admettre l'existence d'une limite positive λ pour $a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1}$ dans le seul but d'en conclure que cette expression finit par surpasser tout nombre *positif* k inférieur à λ. M. Jensen a donc raison d'énoncer le théorème de Kummer comme il le fait, mais on ne saurait accorder à son article des *Nouvelles Annales* d'autre valeur que celle d'une utile remarque. Voici comme je démontre dans mon *Cours*, depuis deux ans, le théorème en question. L'inégalité

$$a_n u_n - a_{n+1} u_{n+1} > k\, u_{n+1},$$

qui a lieu à partir d'une valeur de n, montre d'abord que la fonction *positive* $a_n u_n$ finit par décroître. Donc $a_n u_n$ admet une limite finie, et, par suite, la série

$$(a_1 u_1 - a_2 u_2) + (a_2 u_2 - a_3 u_3) + (a_3 u_3 - a_4 u_4) + \ldots$$

est *convergente.* La série donnée converge donc aussi, puisque ses termes, multipliés par la constant k, finissent par être inférieurs aux termes correspondants d'une série convergente *à termes positifs.* Quant à la seconde partie du théorème, j'observe que, si l'expression considérée devient négative à partir d'une certaine valeur de n, la fonction $a_n u_n$ croît au-dessus de quelque nombre positif k. Il en résulte que la série donnée est divergente, puisque ses termes finissent par surpasser les termes correspondants de la série

$$\frac{k}{a_1}+\frac{k}{a_2}+\frac{k}{a_3}+\ldots$$

qu'on suppose divergente.

NOTA SU DUE APPLICAZIONI ALGEBRICHE DELL'ELIMINAZIONE

DI

GINO LORIA

I

Sia data un' equazione algebrica ad un' incognita x

$$f(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0.$$

Il problema più generale che si può proporre relativamente alle funzioni simmetriche algebriche razionali semplici delle sue radici consiste nel determinare in funzione dei coefficienti $a_0 a_1 \ldots a_n$ la somma degli n valori che prende la funzione

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \equiv \frac{b_0 x^p + b_1 x^{p-1} + \ldots + b_p}{c_0 x^p + c_1 x^{p-1} + \ldots + c_p}$$

quando al posto di x si mettano successivamente le n radici dell'equazione proposta. Ora questo problema si può risolvere immediatamente ricorrendo alle teoria dell'eliminazione.

Notiamo anzitutto che si può suppone $p < n$ perchè ove questa condizione non fosse verificata dalle funzioni $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ si potrebbero far scomparire le potenze di esponente eguale o superiore ad n tenendo conto dell'equazione $f(x) = 0$.

Se ora poniamo

$$y = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

ed eliminiamo x fa le due equazioni

$$f(x)=0, \quad y\psi(x)-\varphi(x)=0$$

ottenemo un'equazione in y le cui radici sono i valori assunti dalla funzione $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ quando x si fa eguale successivamente alle radici di $f(x)=0$, onde la somma delle radici dell'equazione risultante sarà appunto la cercata funzione simmetrica.

Quest'equazione si scrive immediatamente sotto forma di un determinante d'ordine $n+p$ applicando il metodo dialitico e si vede senza stento che in essa:

I, il coefficiente di y^n non è che il risultante R di $f(x)$ e $\psi(x)$,

II, il coefficiente di $-y^{n-1}$ è la somma degli n determinanti che nascono da R scrivendo successivamente in ciascuna delle sue prime n orizzontali, invece dei coefficienti delle funzione $\psi(x)$, gli omologhi della $\varphi(x)$;

onde si conclude tosto l'espressione della funzione richiesta.

Così p. es. se

$$f(x)=a_0x^2+a_1x+a_2, \quad \varphi(x)=b_0x+b_1, \quad \psi(x)=c_0x+c_1,$$

il valore di quella funzione è

$$\frac{\begin{vmatrix} b_0 & b_1 & 0 \\ 0 & c_0 & c_1 \\ a_0 & a_1 & a_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 \\ a_0 & a_1 & a_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_0 & c_1 & 0 \\ 0 & c_0 & c_1 \\ a_0 & a_1 & a_2 \end{vmatrix}} = \frac{2a_0b_1c_1 - a_1(b_0c_1+c_0b_1)+2a_2b_0c_0}{a_0c_1^2 - 2a_1c_0c_1 + a_2c_0^2}$$

Osserviamo che se si calcolano le somme dei prodotti r ad r dell'anzidetta equazione in y si ottengono i valori di funzioni r ple delle radici di $f(x)=0$ del tipo seguente

$$\sum_{i_1 i_2 \ldots i_2} \frac{\varphi(x_{i_1}) \ldots \varphi(x_{i_r})}{\psi(x_{i_1}) \ldots \psi(x_{i_r})}.$$

II

Lo studio delle equazioni algebriche particolari esige che si sappia risolvere il problema: Trovare la relazione fra i coefficienti di un'equazione algebrica, necessaria e sufficiente affinchè fra due radici di essa passi una relazione algebrica prestabilita.

Or anche questa questione si può sciogliere invocando la teoria dell'eliminazione. Infatti se y e z sono due radici della data equazione $f(x)=0$, affinchè fra esse passi una relazione

$$F(y, z)=0$$

bisogna e basta che coesistano le tre relazioni

$$f(y)=0, \quad f(z)=0, \quad F(y, z)=0;$$

quindi il risultante di queste tre equazioni col suo annullari annuncerà l'esistenza della prestibilita relazione fu due radici della equazione data.

Esempio I. Condizione affinchè l'equazione

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

abbia due radici eguali e di segni contrarii.

Dovranno coesistere le tre relazioni

$$\begin{array}{ll} a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \ldots + a_n = 0 & \\ & y+z=0 \\ a_0 z_n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n = 0 & \end{array}$$

o le due equivalenti

$$a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \ldots + a_{n-1} y + a_n = 0$$

$$a_0 y^n - a_1 y^{n-1} + \ldots + (-1)^{n-1} a_{n-1} y + (-1)^n a_n = 0.$$

Se $n = 2k$ queste due equazioni equivalgono alle altre

$$a_0 y^k + a_2 y^{k-1} + \ldots + a_{2k-2} y + a_{2k} = 0$$

$$a_1 y^{k-1} + \ldots + a_{2k-3} y + a_{2k-1} = 0$$

ed hanno per risultante

$$\begin{vmatrix}
a_0 & a_1 & a_4 & \cdot & a_{2k-4} & a_{2k-2} & a_{2k} & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & a_0 & a_2 & \cdot & a_{2k-6} & a_{2k-4} & a_{2k-2} & a_{2k} & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 & \cdot & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdot & a_{2k-4} & a_{2k-2} & a_{2k} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \cdot & a_{2k-6} & a_{2k-4} & a_{2k-2} & a_{2k} \\
a_1 & a_3 & a_5 & \cdot & a_{2k-3} & a_{2k-1} & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & a_1 & a_3 & \cdot & a_{2k-5} & a_{2k-3} & a_{2k-1} & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \cdot & a_{2k-5} & a_{2k-3} & a_{2k-1} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & a_1 & a_3 & \cdot & a_{2k-7} & a_{2k-5} & a_{2k-3} & a_{2k-1}
\end{vmatrix};$$

se invere $n = 2k + 1$ le dette equazioni equivalgono a

$$a_0 y^k + a_2 y^{k-1} + \ldots + a_{2k-2} y + a_{2k} = 0$$

$$a_1 y^k + a_3 y^{k-1} + \ldots + a_{2k-1} y + a_{2k+1} = 0$$

ed hanno per risultante

$$\left|\begin{array}{ccccccccccccc}
a_0 & a_2 & a_4 & . & a_{2k-4} & a_{2k-2} & a_{2k} & 0 & . & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & a_0 & a_2 & . & a_{2k-6} & a_{2k-4} & a_{2k-2} & a_{2k} & . & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & . & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & . & a_{2k-4} & a_{2k-2} & a_{2k} & 0 \\
0 & 0 & 0 & . & 0 & a_0 & a_2 & a_4 & . & a_{2k-6} & a_{2k-4} & a_{2k-2} & a_{2k} \\
a_1 & a_3 & a_5 & . & a_{2k-3} & a_{2k-1} & a_{2k+1} & 0 & . & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & a_1 & a_3 & . & a_{2k-5} & a_{2k-3} & a_{2k-1} & a_{2k+1} & . & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & . & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & . & a_{2k-3} & a_{2k-1} & a_{2k+1} & 0 \\
0 & 0 & 0 & . & 0 & a_1 & a_3 & a_5 & . & a_{2k-5} & a_{2k-3} & a_{2k-1} & a_{2k+1}
\end{array}\right| .$$

II Esempio. Condizione affinchè l'equazione

$$a_0 x^n + a_1 n^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

abbia due radici reciproche.

Dovranno coesistere le tre relazioni

$$a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \dots + a_n = 0 \qquad yz = 1$$

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

equivalenti alle due

$$a_0 y^n + a_1 \quad y^{n-1} + \dots + a_{n-1} y + a_n = 0$$

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 \quad z + a_0 = 0.$$

Ne viene che la condizione domandata è

$$\left|\begin{array}{cccccccccccc}
a_0 & a_1 & a_2 & . & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & 0 & 0 & . 0 & 0 & 0 \\
0 & a_0 & a_1 & . & a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & 0 & . 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & a_0 & . & a_{n-4} & a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & . 0 & 0 & 0 \\
\multicolumn{12}{c}{\dotfill} \\
0 & 0 & 0 & . & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & . a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\
a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & . & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & . 0 & 0 & 0 \\
0 & a_n & a_{n-1} & . & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & . 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & a_n & . & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & . 0 & 0 & 0 \\
\multicolumn{12}{c}{\dotfill} \\
0 & 0 & 0 & . & 0 & a_n & a_{n-2} & a_{n-2} & a_{n-3} & . a_2 & a_1 & a_0
\end{array}\right| = 0.$$

Genova 19 Aprile 1889.

ALGUNS PONTOS DA THEORIA DOS INTEGRAES DEFINIDOS

(Fragmentos de um Curso de Analyse)

POR

F. Gomes Teixeira

I

Valores medios dos integraes definidos

1. Theorema de Tchebycheff. — *Se $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ representarem funcções, cada uma das quaes varía n'um determinado sentido, quando* x *varía desde* x = a *até* x = X, *a expressão*

$$(X-a)\int_a^X \varphi(x)\,\psi(x)\,dx - \int_a^X \varphi(x)\,dx \,.\int_a^X \psi(x)\,dx$$

é positiva se as duas funcções variam no mesmo sentido e negativa se variam em sentido contrario.

Este theorema importante foi demonstrado por Franklin, n'um artigo publicado no *American Journal of Mathematics* (t. VII), do modo seguinte:

Integrando relativamente a x ambos os membros da identidade

$$[\varphi(x)-\varphi(y)]\,[\psi(x)-\psi(y)] = \varphi(x)\,\psi(x)$$
$$-\varphi(x)\,\psi(y) - \varphi(y)\,\psi(x) + \varphi(y)\,\psi(y)$$

vem

$$\int_a^X [\varphi(x)-\varphi(y)]\,[\psi(x)-\psi(y)]\,dx = \int_a^X \varphi(x)\,\psi(x)\,dx$$
$$-\psi(y)\int_a^X \varphi(x)\,dx - \varphi(y)\int_a^X \psi(x)\,dx + (X-a)\,\varphi(y)\,\psi(y).$$

Integrando de novo esta segunda identidade relativamente a y e tomando os integraes entre os limites a e X, vem

$$\int_a^X dy \int_a^X [\varphi(x)-\varphi(y)][\psi(x)-\psi(y)]\,dx = (X-a)\int_a^X \varphi(x)\psi(x)\,dx$$

$$-\int_a^X \psi(y)\,dy \,.\int_a^X \varphi(x)\,dx - \int_a^X \varphi(y)\,dy \,.\int_a^X \psi(x)\,dx$$

$$+(X-a)\int_a^X \varphi(y)\psi(y)\,dy$$

e portanto

$$\int_a^X dy \int_a^X [\varphi(x)-\varphi(y)][\psi(x)-\psi(y)]\,dx$$

$$=2(X-a)\int_a^X \varphi(x)\psi(x)\,dx - 2\int_a^X \varphi(x)\,dx \,.\int_a^X \psi(x)\,dx.$$

Se as duas funcções $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ variam no mesmo sentido quando x cresce desde a até X, as duas differenças $\varphi(x)-\varphi(y)$ e $\psi(x)-\psi(y)$ têem o mesmo signal, e o primeiro membro da identidade precedente é uma somma de termos positivos. Logo o segundo membro da mesma identidade é positivo, o que demonstra a primeira parte do theorema.

Se as funcções $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ variam em sentido contrario quando x cresce desde a até X, as differenças $\varphi(x)-\varphi(y)$ e $\psi(x)-\psi(y)$ têm signaes contrarios, e o primeiro membro da egualdade precedente é uma somma de termos negativos. Logo o segundo membro da mesma egueldade é negativo, o que demonstra a segunda parte do theorema.

Vejamos algumas consequencias d'este theorema.

1) Por serem as funcções

$$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},\quad 1-k^2x^2$$

uma crescente e outra decrescente, quando x varía desde 0 até 1, temos

$$X\int_0^X \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx < \int_0^X (1-k^2x^2)\,dx \,.\int_0^X \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

quando $X < 1$, ou

$$X\int_0^X \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx < \left(X - \frac{1}{3}k^2X^3\right)\int_0^X \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

d'onde se tira a relação seguinte entre os integraes ellipticos de primeira e segunda especie de Legendre

$$F(k,\varphi) - E(k,\varphi) > \frac{1}{3}k^2 \operatorname{sen}^2\varphi\, F(k,\varphi).$$

2) Se X e a forem positivos e maiores do que a maior das raizes reaes da equação do gráo n

$$y = (x-\alpha)(x-\beta)\ldots(x-\lambda) = 0,$$

temos a relação seguinte entre os integraes hyperellipticos de primeira e segunda especie

$$(X-a)\int_a^X \frac{x^m\,dx}{\sqrt{y}} < \int_a^X x^m\,dx \,.\int_a^X \frac{dx}{\sqrt{y}}.$$

No fim do seu trabalho sobre o theorema de Tchebycheff apresenta o sr. Franklin uma lista de desegualdades interessantes que se obtêem por meio d'este theorema. D'esta lista vamos extrahir algumas.

1) $\operatorname{arc\,sen} x < \frac{4}{\pi}(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-\sqrt{1-x^2}-1).$

2) $(\operatorname{arc\,sen} x)^2 < \frac{x}{2}\log\frac{1+x}{1-x}.$

3) $\log x > 2\,\frac{x-1}{x+1},\ (x>1).$

4) $\log x < 2\,\frac{x-1}{x+1},\ (x<1).$

5) $\log x < \frac{x-1}{\sqrt{x}},\ (x>1).$

6) $\Gamma(a+1)\,\Gamma(b+1) < \Gamma(a+b).$

7) $$X\int_0^X \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

$$<\int_0^X \frac{dx}{\sqrt{(1-2)(1-kx)}}\int_0^X \frac{dx}{\sqrt{(1+x)(1+kx)}}.$$

8) $$X\int_0^X \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} > \int_0^X \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\int_0^X \frac{dx}{\sqrt{1-x^2k^2}}.$$

9) $E(k,\varphi)\,F(k,\varphi) > \varphi^2.$

2. A desegualdade de Tchebycheff dá só um limite superior ou só um limite inferior do integral $\int_a^X \varphi(x)\,\psi(x)\,dx$. A desegualdade seguinte, que nós publicámos no *Bulletin des Sciences Mathématiques* (2.ª serie, t. XII),

$$\int_a^X \varphi^2(x)\,dx \int_a^X \psi^2(x)\,dx > \left[\int_a^X \varphi(x)\,\psi(x)\,dx\right]^2$$

dá ao mesmo tempo um limite superior e um limite inferior do mesmo integral.

Para a demonstrar, parto da identidade

$$[\varphi(x)\,\psi(y) - \varphi(y)\,\psi(x)]^2 = \varphi^2(x)\,\psi^2(y)$$
$$-2\,\varphi(x)\,\psi(x)\,\varphi(y)\,\psi(y) + \varphi^2(y)\,\psi^2(y),$$

que, integrando ambos os membros relativamente a x entre os limites a e X, dá

$$\int_a^X [\varphi(x)\,\psi(y) - \varphi(y)\,\psi(x)]^2\,dx = \psi^2(y)\int_a^X \varphi^2(x)\,dx$$
$$-2\,\varphi(y)\,\psi(y)\int_a^X \varphi(x)\,\psi(x)\,dx + \varphi^2(y)\int_a^X \psi^2(x)\,dx.$$

Integrando esta segunda identidade relativamente a y, vem a egualdade

$$\frac{1}{2}\int_a^X dy \int_a^X [\varphi(x)\,\psi(y) - \varphi(y)\,\psi(x)]^2\,dx$$
$$= \int_a^X \varphi^2(x)\,dx \,.\int_a^X \psi^2(x)\,dx - \left[\int_a^X \varphi(x)\,\psi(x)\,dx\right]^2,$$

da qual se tira o theorema enunciado, visto que o primeiro membro é uma somma de termos positivos.

Por meio da deseguualdade que vimos de deduzir acha-se um limite superior

$$+\left[\int_a^X \varphi^2(x)\,dx \int_a^X \psi^2(x)\,dx\right]^{\frac{1}{2}}$$

e um limite inferior

$$-\left[\int_a^X \varphi^2(x)\,dx \,.\int_a^X \psi^2(x)\,dx\right]^{\frac{1}{2}}$$

do integral $\int_a^X \varphi(x)\,\psi(x)\,dx$, em quanto que a desegualdade de Tchebycheff dá só um limite superior ou só um limite inferior d'este integral.

Por ser, em virtude do theorema de Tchebycheff,

$$\int_a^X \varphi^2(x)\,dx > \frac{1}{X-a}\left(\int_a^X \varphi(x)\,dx\right)^2$$

$$\int_a^X \psi^2(x)\,dx > \frac{1}{X-a}\left(\int_a^X \psi(x)\,dx\right)^2$$

temos

$$\left[\int_a^X \varphi^2(x)\,dx \,.\int_a^X \psi^2(x)\,dx\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$> \frac{1}{X-a}\left|\int_a^X \varphi(x)\,dx\right|\left|\int_a^X \psi(x)\,dx\right|,$$

d'onde se conclue que a desegualdade de Tchebycheff dá um limite mais proximo de $\int_a^X \varphi(x)\,\psi(x)\,dx$ do que a nossa desegualdade, que por isso deve ser empregada conjunctamente com a de Tchebycheff para calcular aquelle dos limites que esta não dá.

Assim, por exemplo, se no caso do integral elliptico

$$\int_0^X \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

onde $X < 1$, a desegualdade de Tchebycheff dá

$$\int_0^X \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} > \frac{1}{X}\int_0^X \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \int_0^X \frac{dx}{\sqrt{1-k^2x^2}}$$

e a minha desegualdade dá

$$\int_0^X \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} < \left(\int_0^X \frac{dx}{1-x^2} \cdot \int_0^X \frac{dx}{1-k^2x^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Do mesmo modo,

$$\int_0^X \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} > \frac{X^2}{3}\int_0^X \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

$$\int_0^X \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} < \sqrt{\frac{X^5}{5}}\left(\int_0^X \frac{dx}{(1-x^2)(1-k^2x^2)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

O integral

$$u = \int_1^x \frac{e^{-x}\,dx}{x}$$

dá

$$u < \left(\int_1^x e^{-2x}\,dx \cdot \int_1^x \frac{dx}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

e portanto

$$u < \left(\frac{e^{2x}-e^x}{2e^2e^{2x}} \cdot \frac{x-1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} < \frac{1}{e\sqrt{2}}.$$

Deduz-se d'aqui que u é finito e determinado quando é $x=\infty$, porque u augmenta com x e é

$$\int_1^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{x} < \frac{1}{e\sqrt{2}}.$$

II

Differenciação dos integraes definidos

3. Se a funcção $f(x,y)$ e sua derivada $\frac{df(x,y)}{dy}$ são continuas nos intervallos de $x=a$ a $x=\mathrm{X}$ e de $y=b$ a $y=\mathrm{Y}$, e se no primeiro intervallo a funcção $\varphi(x)$ é continua ou discontinua n'um numero limitado de pontos, é

$$\frac{d\int_a^{\mathrm{X}} \varphi(x) f(x,y)\,dy}{dy} = \int_a^{\mathrm{X}} \varphi(x) \frac{df(x,y)}{dy}\,dx,$$

mesmo quando uma ou ambas as quantidades a e X são infinitas, se os integraes

$$\int_a^{\mathrm{X}} |\varphi(x)|\,dx, \quad \int_a^{\mathrm{X}} \varphi(x) \frac{df(x,y)}{dy}\,dx$$

são finitos e determinados nos intervallos considerados.

Com effeito, a fórmula de Taylor com a expressão do resto de Lagrange dá

$$f(x,y+h) = f(x,y) + h\frac{df(x,y+\theta h)}{dy},$$

onde θ representa uma quantidade comprehendida entre zero e a unidade; e portanto temos

$$\int_a^X f(x, y+h)\,dx = \int_a^X f(x, y)\,dx + h\int_a^X \frac{df(x, y+\theta h)}{dy}$$

d'onde se deduz

$$\frac{d\int_a^X \varphi(x) f(x, y)\,dx}{dy} = \lim_{h=0} \frac{\int_a^X \varphi(x)\,[f(x, y+h) - f(x, y)]\,dx}{h}$$

$$= \lim_{h=0} \int_a^X \varphi(x) \frac{df(x, y+\theta h)}{dy}\,dx$$

$$= \lim_{h=0} \left[\int_a^X \varphi(x) \frac{df(x, y)}{dy}\,dx + \int_a^X \varepsilon\varphi(x)\,dx\right].$$

Mas, por ser continua a funcção $\dfrac{df(x, y)}{dy}$, a cada valor da quantidade positiva α, por mais pequeno que seja, corresponde um valor h_1 de h tal que a desegualdade

$$\left|\frac{df(x, y+\theta h)}{dy} - \frac{df(x, y)}{dy}\right| = |\varepsilon| < \alpha$$

é satisfeita pelos valores de h inferiores em valor absoluto a h_1, qualquer que seja o valor que se dê a x no intervallo de $x=a$ a $x=X$.

Temos pois

$$\left|\int_a^X \varepsilon\varphi(x)\,dx\right| < \int_a^X |\varepsilon|\,|\varphi(x)|\,dx < \alpha\int_a^X |\varphi(x)|\,dx,$$

e portanto

$$\lim_{h=0}\int_a^X \varepsilon\,\varphi(x)\,dx = 0.$$

Logo

$$\frac{d\int_a^X \varphi(x) f(x,y)\,dx}{dx} = \int_a^X \varphi(x)\frac{df(x,y)}{dy}\,dx + \lim_{h=0}\int_a^X \varepsilon\varphi(x)\,dx$$

$$= \int_a^X \varphi(x)\frac{df(x,y)}{dy}\,dx.$$

4. A demonstração que precede baseia-se em que toda a funcção continua é uniformemente continua.

Empregando no desenvolvimento de que se partiu mais um termo, póde-se tomar a demonstração independente d'este theorema, como vamos vêr.

Temos primeiramente

$$f(x, y+h) = f(x,y) + h\frac{df(x,y)}{dy} + \frac{1}{2}h^2\frac{d^2 f(x, y+\theta h)}{dy^2},$$

suppondo que as funcções

$$f(x,y),\quad \frac{df(x,y)}{dy},\quad \frac{d^2 f(x,y)}{dy^2}$$

são finitas e determinadas no intervallo de $x=a$ a $x=X$ e de $y=b$ a $y=Y$.

Logo

$$\int_a^X \varphi(x) f(x, y+h)\,dx = \int_a^X \varphi(x) f(x,y)\,dx$$

$$+ h\int_a^X \varphi(x)\frac{df(x,y)}{dy}\,dx + \frac{1}{2}h^2\int_a^X \varphi(x)\frac{d^2 f(x, y+\theta h)}{dy^2}\,dx,$$

d'onde se tira

$$\frac{d\int_a^X \varphi(x) f(x,y)\,dx}{dy} = \lim_{h=0} \frac{\int_a^X \varphi(x)\left[f(x,y+h)-f(x,y)\right]dx}{h}$$

$$=\int_a^X \varphi(x)\frac{df(x,y)}{dy}dx + \lim_{h=0}\frac{1}{2}h\int_a^X \varphi(x)\frac{d^2f(x,y+\theta h)}{dy^2}dx.$$

Mas, chamando M o maior valor que toma $\left|\frac{d^2f(x,y)}{dy^2}\right|$ quando x varía desde a até X e y desde b até Y, temos

$$\left|\frac{d^2f(x,y+\theta h)}{dy^2}\right| < M$$

e portanto

$$\left|\int_a^X \varphi(x)\frac{d^2f(x,y+\theta h)}{dy^2}dx\right| < \int_a^X |\varphi(x)|\left|\frac{d^2f(x,y+\theta h)}{dy^2}\right|dx$$

$$< M\int_a^X |\varphi(x)|\,dx,$$

o que dá

$$\int_a^X \varphi(x)\frac{d^2f(x,y+\theta h)}{dy^2}dx = M\varepsilon\int_a^X |\varphi(x)|\,dx,$$

onde ε representa uma quantidade comprehendida entre -1 e $+1$.

Logo

$$\frac{d\int_a^X \varphi(x) f(x,y)\,dx}{dy}$$

$$=\int_a^X \varphi(x)\frac{df(x,y)}{dy}dx + \frac{1}{2}\lim hM\varepsilon\int_a^X |\varphi(x)|\,dx.$$

D'esta egualdade conclue-se que, se o integral $\int_a^X |\varphi(x)|\, dx$ tem um valor finito e determinado, é

$$\frac{d\int_a^X \varphi(x) f(y, y)\, dx}{dy} = \int_a^X \varphi(x) \frac{df(x, y)}{dy} dx.$$

(*Continúa*).

BIBLIOGRAPHIA

F. P. Horta.— *Estudo elementar dos determinantes, seguido de uma parte complementar relativa principalmente aos determinantes funccionaes.*— *Lisboa, 1889.*

A collecção de obras portuguezas para o ensino das mathematicas vem de ser enriquecida com mais uma, devida ao illustre professor jubilado da Escola Polytechnica de Lisboa, sr. F. da Ponte Horta. O distincto geometra, que tanto enriqueceu as collecções da Academia das Sciencias de Lisboa com trabalhos importantes, quiz tambem concorrer para o aperfeiçoamento do ensino com o presente trabalho, do qual vamos dar uma noticia rapida.

No capitulo 1.º define o auctor os determinantes, faz conhecer a notação para os representar, e demonstra algumas propriedades que decorrem immediatamente da definição.

No capitulo 2.º vêem os processos para o desenvolvimento dos determinantes em ordem aos elementos de uma dada columna ou linha; em ordem aos determinantes menores do grão p, comprehendidos em p columnas ou em p linhas; e finalmente em ordem aos productos binarios dos elementos de uma dada columna pelos elementos de uma dada linha.

Nos capitulos 3.º, 4.º e 5.º occupa-se o sr. Horta das operações sobre determinantes, quando é possivel exprimir o resultado d'estas operações por meio de determinantes, considerando no primeiro d'estes capitulos a somma e subtracção, no segundo a multiplicação, no terceiro a extracção de raiz.

Passa em seguida o auctor ás applicações da theoria dos determinantes á Algebra e á Geometria. Assim no capitulo 6.º vem a applicação dos determinantes á resolução das equações do primeiro grão; no capitulo 7.º vem a applicação dos determinantes a algumas questões de Geometria, taes como a determinação da mais curta distancia entre duas rectas, a determinação da área do triangulo sob differentes condições, a determinação do volume do tetraedro, etc.

Termina a obra por uma parte complementar, em que o auctor se occupa da differenciação dos determinantes e das propriedades mais importantes dos determinantes funccionaes.

Dada assim uma idéa rapida dos assumptos de que tracta o sr. Horta no seu bello livro, devemos accrescentar que, pela boa escolha d'estes assumptos e pela clareza e elegancia com que são expostos, deve este livro ser da maior utilidade para o ensino da theoria dos determinantes nos nossos estabelecimentos de instrucção.

J. C. Medeiros. — Processo geral de Clairaut para achar o valor approximado inicial das raizes da equação do 3.º grão no caso irreductivel (*Instituto de Coimbra*, t. XXXVI).

N'este artigo interessante occupa-se o auctor da deducção do valor approximado inicial de uma das raizes da equação do 3.º grão, no caso irreductivel.

Sendo

$$x^3 - px - q = 0 \quad (p > 0,\ q > 0)$$

a equação dada, e pondo para brevidade

$$\frac{q}{p\sqrt{p}} = m,$$

os valores iniciaes achados são

$$\frac{2\sqrt{1+3m}}{3}\sqrt{p}$$

$$\frac{2+\sqrt{1+3m-3\left(\frac{2}{\sqrt{3}}-1\right)^3}}{3}\sqrt{p},$$

dos quaes o primeiro é maior e o segundo menor do que x. O erro correspondente é menor do que $0{,}001856\ldots \times \sqrt{p}$.

M. d'Ocagne. — Sur certaines courbes qu'on peut adjoindre aux courbes planes pour l'étude de leurs propriétés infinitésimales (*Jornal da Academia das Sciencias de Lisboa*, t. XII).

Dada uma curva plana c e dous pontos O e P no plano da curva, se por um ponto M variavel da curva tirarmos a recta OM, e se pelo ponto P tirarmos parallelas á normal e á tangente á curva c no ponto M, estas rectas cortam a recta OM em dous pontos H e H_1 que, quando M varía, descrevem duas curvas n e t, que o sr. d'Ocagne estuda na sua importante memoria.

Principia o auctor por deduzir algumas propriedades da curva n, e em seguida determina quaes são as curvas c que correspondem ao caso de n ser uma recta e ao caso de ser um circulo.

No caso de n ser uma recta $y = mx + n$, a equação differencial das curvas c correspondentes é homogenea, e integra-se pelos methodos conhecidos, que levam n'um caso á equação

$$\frac{(y-px)^p}{(y-qx)^q} = C,$$

da qual o sr. d'Ocagne tira alguns theoremas interessantes; n'outro caso, á equação

$$y - px = ce^{\frac{px}{y-px}};$$

e ainda n'um terceiro caso á equação

$$(y+ax)^2 + b^2x^2 = ce^{\frac{a}{b}\operatorname{arc\,tang}\frac{y+ax}{bx}}.$$

Se a curva n é uma circumferencia, a equação differencial das curvas c é ainda homogenea, mas a sua integração conduz a calculos muito complicados. Por isso o auctor limita-se a considerar dous casos particulares que levam a resultados interessantes.

Depois de estudar a curva n, passa o sr. d'Ocagne ao estudo da curva t, a respeito da qual resolve os mesmos problemas que para a curva n. Acha d'este modo que á recta cuja equação é

$$y = mx + n$$

corresponde uma familia de curvas t, cuja equação é

$$y^p = C(y - mx)^q.$$

No caso de t ser um circulo, a integração da equação differencial das curvas c leva a calculos complicados, por isso o auctor limita-se a considerar o caso importante de o circulo t ter para centro o ponto O.

J. Peano. — *Arithmetices principia nova methodo exposita.* — *Augustae Taurinorum, 1889.*

N'este trabalho, do mais alto interesse, o sr. Peano reduz os principios da Arithmetica a um numero minimo de noções fundamentaes, e representa por signaes todas as idéas que occorrem n'estes principios. D'este modo, cada proposição é escripta simplesmente por meio de signaes, dos quaes uns pertencem á logica outros á arithmetica. De cada proposição, escripta com signaes, são deduzidas outras por processos comparaveis aos que se empregam em Algebra para resolver as equações.

J. Casey. — *Tratado de Geometria Analytica (traduzido do inglez para hespanhol por V. Balbin).* — *Buenos Aires, 1888.*

A originalidade, clareza e concisão com que está escripto o *Tratado de Geometria Analytica*, publicado, em lingua ingleza, em 1885 pelo sr. J. Casey, professor na Universidade de Dublin, fazem d'esta obra uma das mais recommendaveis para o ensino d'esta sciencia. O auctor, além de expôr as proposições que se acham geralmente nos tratados de geometria analytica, apresenta muitas proposições novas e tracta muitas questões por methodos completamente novos. Foi por isso escolhida pela Faculdade de sciencias physico-mathematicas da Universidade de Buenos-Ayres para servir de texto aos alumnos d'esta Faculdade, e foi para isso encarregado de a traduzir em hespanhol o distincto professor d'aquella Universidade sr. V. Balbin. Com esta traducção fez o sr.

Balbin um serviço importante ao ensino das mathematicas, concorrendo para augmentar o numero das pessoas que possam lêr a obra do sabio geometra inglez.

J. Schlotke. — Elementos de Estática graphica (traduzidos do allemão para hespanhol por V. Balbin).

É bem conhecida hoje a importancia que tem o estudo da *Estatica graphica* para os que se dedicam ás profissões de engenheiro e architecto. Por isso a Universidade de Buenos-Ayres, seguindo o exemplo das principaes universidades e escolas technicas da Europa, a encorporou no plano dos seus cursos. O ensino d'ella foi confiado ao sr. V. Balbin, que adoptou para texto a importante obra de Schlotke, traduzindo-a para isso em lingua hespanhola. Esta obra contém, na verdade, uma exposição clarissima de todos os principios de Estatica graphica indispensaveis para o engenheiro e uma serie de exemplos practicos relativos principalmente á arte das construcções.

V. Retali. — Richerche sopra l'immaginario in Geometria (*Memorie della R. Accademia di Bologna,* série IV, t. IX).

Deve-se, como é bem sabido, ao eminente geometra allemão Staudt a interpretação do imaginario em Geometria e a constituição da theoria das conicas tendo em attenção os imaginarios. Depois varios geometras se têem occupado do mesmo assumpto, sem todavia se preoccuparem com a facilidade das construcções a que leva o methodo de Staudt. No seu interessante trabalho o sr. Retali considera alguns problemas do 1.º e 2.º grão em que intervêem os imaginarios, e dá meios para simplificar as construcções a que leva o methodo de Staudt quando se applica a estes problemas. Baseia-se, para conseguir este fim, em resultados obtidos nas duas importantes memorias sobre as conicas, por elle anteriormente publicadas:

Osservazioni analitico-geometriche sulla projezione immaginaria

delle curve del second'ordre (*Memorie della R. Accademia di Bologna*, série IV, t. VII);
Sulle coniche conjugate (*Item*, t. VI).

A. Rebière. — *Mathématiques et mathématiciens.* — *Paris, 1889.*

Na primeira parte d'este livro interessante o auctor reune uma serie de conceitos, devidos aos mathematicos e philosophos mais eminentes, relativamente aos principios, aos methodos, á classificação, ao ensino e á historia das mathematicas.

Na segunda parte expõe o auctor algumas anedoctas relativas a mathematicos celebres, que deixam vêr o seu caracter, a sua vida intima, as suas opiniões, etc.

Na terceira parte vem alguns paradoxos e alguns resultados curiosos a que levam as mathematicas.

Finalmente na quarta parte dá noticia de alguns problemas interessantes de que se têem occupado os mathematicos.

A. Tartinville. — *Cours d'Arithmétique.* — *Paris, 1889.*

Vamos dar uma rapida noticia d'esta excellente obra.

N'uma introducção ao livro faz vêr primeiramente o auctor como a medida do cumprimento de uma porção de recta leva á consideração dos numeros inteiros, dos numeros fraccionarios e dos numeros incommensuraveis.

Em seguida vem o estudo dos numeros inteiros. A este respeito occupa-se o auctor das operações sobre numeros inteiros, dos caracteres de divisibilidade, da theoria dos numeros primos, etc.

A segunda parte do livro é destinada ao estudo dos numeros fraccionarios.

A terceira parte é destinada ao estudo dos numeros incommensuraveis, que o auctor expõe seguindo o methodo de Dedekind. Principia por definir de um modo claro e preciso o que se deve entender por numero incommensuravel, e em seguida expõe desenvolvidamente a doutrina relativa ás operações feitas com estes numeros.

Na quarta parte vem o calculo dos radicaes, a doutrina das razões e proporções, e finalmente o calculo dos numeros approximados.

Terminando esta breve noticia devemos dizer que a riqueza das doutrinas, o rigor e clareza com que são tractadas e a boa ordem com que estão dispostas tornam este livro muito recommendavel.

Gino Loria. — L'opera scientifica di Ettore Caporali (*Giornale de Battaglini*, 1889).

O fim do sr. Loria, publicando o seu interessante artigo, é fazer conhecer o logar que occupa na historia da Geometria moderna o fallecido professor da Universidade de Napoles, E. Caporali. Refere-se o auctor aos trabalhos de Caporali sobre as curvas de 3.ª ordem, sobre as de 4.ª ordem, sobre as de ordem n, sobre as superficies de 3.ª ordem, sobre a representação das superficies sobre um plano, sobre a geometria da recta, sobre a geometria a quatro dimensões, sobre a applicação geometrica da doutrina das fórmas algebricas, etc. Para fazer vêr a importancia dos trabalhos de Caporali sobre cada um d'estes assumptos, o sr. Loria dá noticia rapida d'aquelles que immediatamente os precederam e d'aquelles que se lhes seguiram.

F. Folie e *L. Niesten. — Nouveaux résultats relatifs à la détermination des constantes de la nutation diurne* (*Bulletins de l'Académie de Belgique*, 3.ᵉ série, t. XVII).

A. Bassani. — Sulle curve $r^m \cos m\theta = a^m$ (*Giornale de Battaglini*, t. XXIV).

São muitos os trabalhos que têem sido publicados até hoje a respeito das curvas cuja equação em coordenadas polares é $r^m \cos m\theta = a^m$, a qual comprehende como caso particular muitas curvas notaveis. Na interessante memoria que o sr. Bassani dedica a estas curvas, reune as principaes propriedades anteriormente conhecidas e outras por elle descobertas.

A. Bassani. — *Nota di Cinematica* (*Giornale de Battaglini*, t. XXIII).

— *Curve piane derivate* (*Item*, t. XXIV).

— *Sopra un problema di Analisi infinitesimale delle curve piane* (*Item*).

— *Una formola di Analisi* (*Item*, t. XXV).

S. Pincherle. — *I sistemi ricorrenti di prim'ordine e di secondo grado* (*Rendiconti dei Lincei*, 1889).

— *Sur le développement d'une fonction analytique en série de polynômes* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 1888).

Annales de la Licence ès sciences (Session de juillet 1888), Paris, 1888.

Annales de la Licence ès sciences (Session de novembre 1888), Paris, 1889.

Gino Loria. — *Nota sur una classe di determinanti* (*Giornale de Battaglini*, t. XXVI).

O objecto d'esta nota é o calculo dos determinantes de ordem n formados com n potencias, de expoente inteiro, de n indeterminadas.

Gino Loria. — *Sulle curve razionali normali in uno spazio a* n *dimensioni* (*Giornale de Battaglini*, t. XXVI).

— *Intorno alle curve razionali d'ordine* n *dello spazio a* n—1 *dimensioni* (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. II).

G. B. Guccia. — *Sulla classe e sul numero dei flessi di una forma* *algebrica dotata di singolarità qualunque* (*Rendiconti dei Lincei*, 1889).

—— *Théorème général concernant les courbes algébriques planes* (*Comptes rendus de l'Académie de Paris*, 1888).

Ed. Weyr. — Remarque sur la décomposition des fonctions doublement périodiques en éléments simples (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2.ª serie, t. XII).

O auctor apresenta uma nova demonstração da fórma de decomposição, devida ao sr. Hermite, de que se deu noticia na pag. 15.

G. T.

NOTE SUR UN POINT DE LA THÉORIE DES SÉRIES [1]

PAR

M. Auguste Gutzmer

Dans ses *Remarques sur divers articles concernant la théorie des séries* [2], M. Cesàro s'occupe de telles séries où le quotient de deux termes consécutifs peut devenir aussi grand que l'on vaudra, bien que la série soit convergente. Peut-être n'est-il pas sans intérêt de constater qu'on connait depuis longtemps des séries jouissant de cette propriété. Ainsi M. Stern dit, dans une Note de son *Lehrbuch der algebraichen Analysis* [3]: *Wenn die Glieder theils zunehmen, theils abnohmen, lassen sie sich, wie sich von selbst versteht, bei der grossen Mannigfaltigkeit der hier möglichen Fälle, eine allgemeine Regel geben.* Cette propriété remarquable prouve que M. Stern a en vue, en effet, des séries jouissant de la dite propriété; mais il ne donne aucun exemple.

De même M. Eugène Catalan a considéré ces séries et il a consacré, dans son *Traité élémentaire des séries* [4], un paragraphe à *des séries à termes croissants et décroissants.* Dans les n.os 40 et 41 de son Livre il dit: Jusqu'à présent, nous avons supposé que les termes de la série proposée décroissent indéfiniment, du moins à partir de l'un deux: et nous avons indiqué divers règles au moyen desquelles on peut, en tout les cas, réconnaitre la convergence ou divergence. Mais il peut arriver que le terme général u_n, tout en ayant pour limite zéro, soit exprimé par une fon-

(1) Extrahimos este artigo dos *Nouvelles Annales des Mathématiques* (3.a serie, t. VIII, p. 22), que se refere a assumptos tractados n'este jornal.

(2) *Nouvelles Annales*, 3.a série, t. VII, p. 401 à 407.—*Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas*, t. IX, p. 3 e seguintes.

(3) Leipzig, 1860, p. 91.

(4) Paris, 1860, p. 27.

ction de n tantôt croissante et tantôt décroissante. Il parait très difficile de trouver des règles simples, relatives à ce cas singulier. Nous nous contenterons d'enoncer la proposition suivante:

THÉORÈME XV. — *Si les quantités*

$$u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$$

en nombre infini, peuvent former des groupes

$$g_1 = u_1 \quad + u_2 \quad + \ldots + u_p$$
$$g_2 = u_{p+1} + u_{p+2} + \ldots + u_q$$
$$g_3 = u_{q+1} + u_{q+2} + \ldots + u_r$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

que diminuent indéfiniment (en valeur absolue); les séries

$$\text{(U)} \quad u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$
$$\text{(G)} \quad g_1 + g_2 + \ldots + g_n + \ldots$$

sont en même temps convergentes, divergentes ou indéterminées. De plus, si elles sont convergentes, elles ont même somme.

M. Catalan n'a pas énoncé le théorème démontré par M. E. Weyr [1]. Mais il en a donné, dans le n.° 42 de son Traité, trois exemples. En premier lieu, il considère la série

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{8^2} + \ldots$$

dont le terme général est

$$u_n = \frac{1}{(n + 1 + \cos n\pi)^2}.$$

[1] *Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas*, t. VIII, p. 97.

En posant généralement

$$g_i = \frac{1}{(2i-1)^2} + \frac{1}{(2i+1)^2},$$

M. Catalan conclut que

$$g_i < \frac{1}{2(i-1)^2};$$

et par conséquent la série (G) est convergente et, d'après le théorème cité ci-dessus, de même la série (U). En second lieu, M. Catalan démontre, par un groupement analogue, la divergence de la série dont le terme général est

$$u_n = \frac{1}{n+1+\cos n\pi},$$

et, en dernier lieu, il démontre, de la même manière, la convergence de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sin \frac{n\pi}{2} - n^2 \cos \frac{n\pi}{2}}.$$

Cette remarque littéraire montre qu'on a déjà connu depuis longtemps des séries jouissant de la dite propriété; mais il restait dans la théorie de ces séries une lacune, remplie maintenant par les nouvelles recherches provoquées par les deux articles de M. Lerch ([1]). Quant à ces derniers, ajoutons quelques remarques tirées d'une lettre que M. Lerch m'a adressée.

Dans les *Contributions à la théorie des séries infinies*, M. Lerch a employé la notion, un peu généralisée, du dérivée d'un ensemble de points *(Punktmenge)*, dans le sens de M. G. Cantor, pour les éléments de la théorie des séries. En particulier, il a considéré

([1]) *Contributions à la théorie des séries infinies* (*Comptes rendus des séances de la Société royale des Sciences de Bohême*, Prague, 13 mars 1885).— *Remarque sur la théorie des séries* (*Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas*, t. VII, p. 79).

l'ensemble caractérisé par la formule $\frac{u_{\nu+1}}{u_\nu}$, où les u_ν sont les termes positifs de la série infinie

$$U = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots .$$

Il a reconnu alors que la convergence de la série u n'a pas pour conséquence l'existance d'une limite de $\frac{u_{\nu+1}}{u_\nu}$ (pour ν infini), mais que ce quotient peut surpasser même toute quantité donnée. Il a montré cela pour quelques cas particuliers qui sont de la forme

$$(1) \qquad a_0 + b_0 + a_1 + b_1 + a_2 + b_2 \ldots,$$

où Σa_ν et Σb_ν sont des séries convergentes; les exemples *plus simples* de M. Cesàro sont du même type.

M. Lerch m'a écrit qu'il n'aurai pas publié ces séries-là s'il n'avait pas eu, pour son but, un autre exemple. Pour démontrer le théorème que la série $\Sigma \nu a_\nu x^{\nu-1}$ est convergente dans la même région que la série $\Sigma a_\nu x^\nu$, on s'appuie sur la remarque [1] que le quotient de deux termes consécutifs, du moins à partir de l'un d'eux, *doit* être inférieur à l'unité, ce qui n'est vrai. Mais, si l'on avait pas d'autres séries que celles de la forme (1), on s'appliquerai seulement la démonstration à chaqu'un des séries régulières

$$a_0 + a_1 x^2 + a_2 x^4 + \ldots$$

$$b_0 x + b_1 x^3 + b_2 x^5 + \ldots$$

pour conclure de la convergence de la série

$$a_0 + b_0 x + a_1 x^2 + b_1 x^3 + a_2 x^4 + b_2 x^5 + \ldots$$

---

(1) Voir, par exemple, Harnack, *Die Elemente der Differential und Integralrechnung*, Leipzig, 1881.

celle de la dérivée. C'est pourquoi M. Lerch a construit la série

$$(2) \qquad \sum_n \delta^{n-(\log n)} g^{\frac{1}{2}(\log n)[1+(\log n)]} \quad (0<\delta<1<g)$$

où $(\log n)$ désigne la partie entière du logarithme vulgaire de n ou le nombre des chiffres de n; et c'est pourquoi celle-ci me semble être plus remarquable que celle de la forme (1).

En ontre, les séries de la forme (1) et les séries analogues de la forme

$$a_0^{(1)}+a_0^{(2)}+\ldots+a_0^{(r)}+a_1^{(1)}+a_1^{(2)}+\ldots+a_1^{(r)}$$
$$+a_\nu^{(1)}+a_\nu^{(2)}+\ldots+a_\nu^{(r)}$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

ont la propriété que, si le quotient de deux termes consécutifs peut devenir infiniment grand, il doit aussi devenir nécessairement infiniment petit. Cette circonstance ne s'offre pas dans la série (2) de M. Lerch.

La convergence de la série (2) n'exige pas, en effet, la condition

$$g<\frac{1}{\delta^2}.$$

Pour avoir une exemple d'une série irrégulière, il suffit de prendre

$$u_n=\delta^{n-(n)}g^{(n)^2} \qquad (0<\delta<1<g),$$

où (n) est le nombre des chiffres de n. Mais, si n est de la forme $10^\nu-1$, on aura $\frac{u_{n+1}}{u_n}=g^{2(n)+1}$; par conséquent, le quotient peut surpasser toute quantité donnée.

SUR LES LIGNES SPHÉRIQUES

PAR

GEMINIANO PIRONDINI

(Professeur à l'Institut thecnique de Parme)

§. 1.

Formules génèrales—Applications. Soit L une ligne placée sur une sphère dont le rayon est k; désignons par s, ρ, ρ_g, r, R respectivement l'arc, le rayon de courbure absolue, le rayon de courbure géodésique, le rayon de torsion et le rayon sphérique de L. On sait que les quantités que l'on vient de considérer sont liées entre elles par les relations

$$\frac{1}{\rho}=\sqrt{\frac{1}{k^2}+\frac{1}{\rho_g{}^2}},\quad k^2=\rho^2+r^2\left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2,\quad \rho_g=k\,.\,\mathrm{tang}\left(\frac{\mathrm{R}}{k}\right),\qquad (1)$$

d'ou il suit *«une ligne sphérique est connue de forme lorsqu'on donne un de ses rayons ρ, ρ_g, r, R en fonction de l'arc.»*

Exemples.—Si L est une hélice coupant les génératrices rectilignes du cylindre sous l'angle constant i, il doit être

$$\rho_g=\frac{k\sqrt{k^2\,\mathrm{tang}^2 i-s^2}}{s}.$$

Si L est une lignes dont le rayon de torsion r est constant, on a

$$\rho_g=k\,.\,\mathrm{tang}\left(a+\frac{s}{r}\right),$$

a étant une constante arbitraire.

Si l'on remarque que des relations (1) il dérive

$$R = k \,.\, \text{arc} \,.\, \text{tang}\, \frac{\rho_g}{k},$$

la dernière égalité nous donne

$$R = k\left(\frac{s}{r} + a\right).$$

Donc «*toute ligne sphérique dont le rayon sphérique est une fonction linéaire de l'arc, est une ligne à torsion constante.*»

§. 2.

Développée sphérique. — La ligne sphérique L_1 enveloppée par les grands cercles perpendiculaires à une ligne sphérique donnée L, est la développée sphérique de L. Soient A e B deux points infiniment rapprochés de L et A_1, B_1 les points correspondants de L_1; si l'on désigne par $d\varepsilon_1$ l'angle de contingence géodésique de L_1, on a

$$ds = AB = k \sin\left(\frac{AA_1}{k}\right) d\varepsilon_1 = k \sin\left(\frac{R}{k}\right) d\varepsilon_1,$$

d'où

$$\frac{1}{d\varepsilon_1} = \frac{k \sin \frac{R}{k}}{ds}.$$

D'ailleurs $ds_1 = A_1 B_1 = dR$, par conséquent

$$(2) \qquad \rho_{1_g} = \frac{ds_1}{d\varepsilon_1} = k \sin \frac{R}{k} \cdot \frac{dR}{ds};$$

et si l'on a égard aux formules (1)

$$(2') \qquad \rho_{1_g} = k^3 \frac{\rho_g}{(k^2 + \rho_g^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{d\rho_g}{ds} = -k^3 \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\sqrt{k^2 + \rho_g^2}}\right).$$

On peut donner une interprétation géométrique de la formule (2'); en effet les (1) nous donnent

$$\frac{1}{\sqrt{k^2+\rho_g{}^2}}=\frac{1}{k}\,\frac{\rho}{\rho_g}=\frac{1}{k}\cos\theta,$$

θ étant l'angle sous lequel le plan osculateur de L coupe la sphère; on a donc

$$(3) \qquad \rho_{1g}=-k^2\frac{d\cos\theta}{ds}.$$

Par exemple, lorsque $\rho_{1g}=\text{const}=a$, il vient

$$\frac{d\cos\theta}{ds}=-\frac{a}{k^2}, \quad \text{d'où} \quad \cos\theta=b-\frac{a}{k^2}s;$$

la ligne L_1 est un petit cercle de la sphère et sa développante L est une hélice sphérique.

Donc *«la ligne sphérique qui jouit de la propriété que le cosinus de l'angle sous lequel le plan osculateur coupe la sphère est une fonction linéaire de l'arc, est l'hélice sphérique.»*

Si l'on désigne par i l'inclinaison de L sur la droite rectifiante, les (1) nous donnent

$$\cot i=\frac{\rho}{r}=\frac{k^2\rho_g\rho'_g}{(k^2+\rho_g{}^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\rho_{1g}}{k};$$

par conséquent

$$\rho_{1g}=k\cot i$$

est une autre expression de ρ_{1g}.

Si l'on suppose i constant, la ligne L est une hélice et il résulte ρ_{1g} constant; donc *«une hélice sphérique est toujours une développante d'un petit cercle et vice versâ.»*

Si l'on suppose $\frac{\rho}{r}=as+b$, a et b étant des constantes, la ligne L est une géodésique d'un cône (*), et il résulte

$$\rho_{1g}=k\,(as+b).$$

(*) *Studi geometrici relativi specialmente alle superficie gobbe—Journal de M. Battaglini,* 1885.

Donc *«si le rayon de courbure géodésique de la développée sphérique* L_1 *d'une ligne* L *est une fonction linéaire de l'arc de* L, *cette ligne* L *est sur la sphère une géodésiqne d'un cône, et vice versâ.»*

Si l'on pose la condition que l'arc s_1 de L_1 soit proportionnel à l'arc de L, on a

$$ads = ds_1 = dR, \quad \text{d'où il suit} \quad R = as + b.$$

Donc *«lorsque l'arc d'une ligne sphérique est proportionnel à l'arc de sa développée sphérique, la ligne est à torsion constante et vice versâ.»*

Si l'on remarque que $ds_1 = dR = k \,.\, d \operatorname{arc tang}\left(\frac{\rho_g}{k}\right)$, on obtient par intégration

$$s_1 + a = k \,.\, \operatorname{arc tang}\left(\frac{\rho_g}{k}\right). \tag{4}$$

On peut, par le moyen des formules (2′), (4) déterminer la développée sphérique d'une ligne donnée.

Exemple. — Soit $\rho_g = ms$ l'équation de la ligne L; on a

$$s = \frac{k}{m} \operatorname{tang}\left(\frac{s_1 + a}{k}\right)$$

et la ligne L_1 a pour équation

$$\rho_{1g} = mk \,.\, \sin\left(\frac{s_1 + a}{k}\right) . \cos^2\left(\frac{s_1 + a}{k}\right).$$

§. 3.

Courbes sphériques parallèles. — Les lignes sphériques L, L_1 sont parallèles lorsqu'entre les rayons sphériques R, R_1 de ces lignes on a la relation

$$R_1 = R + m,$$

m étant une constante. Soient A et A_1 deux points correspondants des lignes L, L_1 et a, a_1 leurs projections sur le diamètre de la sphère qui passe au centre de courbure sphérique des lignes L, L_1. On a

$$Aa = k \sin \frac{R}{k}; \quad A_1 a_1 = k \sin \frac{R_1}{k} = k \sin \frac{R+m}{k};$$

$$ds_1 = \frac{A_1 a_1 \, ds}{Aa} = \frac{\sin\left(\frac{R+m}{k}\right)}{\sin\left(\frac{R}{k}\right)} ds,$$

et conséquemment

$$ds_1 = \left(\cos \frac{m}{k} + \sin \frac{m}{k} \cot \frac{R}{k}\right) ds,$$

d'où par intégration

$$s_1 + a = s \,.\, \cos \frac{m}{k} + k \,.\, \sin \frac{m}{k} \int \frac{ds}{\rho_g},$$

a étant une constante. On a d'ailleurs

$$\rho_{1g} = k \operatorname{tang} \frac{R_1}{k} = \frac{k \operatorname{tang} \frac{R}{k} + k \operatorname{tang} \frac{m}{k}}{\frac{1}{k}\left(k - k \operatorname{tang} \frac{m}{k} \operatorname{tang} \frac{R}{k}\right)},$$

c'est-à-dire

$$(6) \qquad \rho_{1g} = \frac{k\left(\rho_g + k \operatorname{tang} \frac{m}{k}\right)}{k - \operatorname{tang} \frac{m}{k} \,.\, \rho_g}.$$

On peut, moyennant les formules (5), (6) déterminer la ligne sphérique parallèle à une ligne donnée, lorsqu'on donne la distance constante de ces lignes.

Courbes sphériques polaires. — Lorsque $m = k\frac{\pi}{2}$, les deux lignes parallèles L, L_1 sont polaires et les formules (5) (6) deviennent

$$(5') \quad s_1 + a = k\int \frac{ds}{\rho_g}, \qquad (6') \quad \rho_{1g} = -\frac{k^2}{\rho_g},$$

Exemples. — Si l'on suppose $\rho_g = ms + n$, les (5'), (6') nous donnent

$$s = \frac{ce^{\frac{ms_1}{k}} - n}{m}, \quad \rho_{1g} = -\frac{k^2}{c} e^{\frac{-ms_1}{k}};$$

telle est l'équation de la ligne polaire de la courbe sphérique donnée.

Si la ligne donnée est à torsion constante, on a

$$\rho_g = k \operatorname{tang}\left(a + \frac{s}{r}\right), \quad \text{d'où} \quad s = r \,.\, \operatorname{arc}\sin\left(be^{\frac{s_1}{r}}\right) - ar$$

et l'équation de la ligne polaire est

$$\rho_{1g} = -\frac{k}{b}\sqrt{e^{\frac{-2s_1}{r}} - b^2}.$$

§. 4.

Deux lignes sphériques polaires L, L_0 peuvent se considérer comme les indicatrices sphériques respectivement des tangentes et des binormales d'une même courbe de l'espace. L'indicatrice sphérique L_1 des normales principales de cette courbe est le lieu des extrémités des quadrants géodésiques tangents à la ligne L; allons déterminer la ligne L_1.

Soient L_2 la développée sphérique de L et considérons les points correspondants A, A_1, A_2 sur les trois lignes L, L_1, L_2; le point A_1 est le pôle de l'arc AA_2 et conséquemment l'arc de grand cercle A_1A_2 est un quadrant perpendiculaire à L_2; les lignes L_1, L_2 sont donc polaires.

Pour la ligne L_2, développée de L, on a

$$\rho_{2g}=k^3\frac{\rho_g\rho_g'}{(k^2+\rho_g^2)^{\frac{3}{2}}}=-k^3\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\sqrt{k^2+\rho_g^2}}\right);\quad ds_2=\frac{k^2\rho'_g}{k^2+\rho_g^2}ds.$$

Pour la ligne L_1, polaire de L_2, on a

$$\rho_1=-\frac{k^2}{\rho_{2g}};\quad ds_1=\frac{k\,ds_2}{\rho_{2g}},$$

et si l'on élimine, entre ces équations, les quantités ρ_{2g}, ds_2 on obtient

$$\rho_{1g}=-\frac{(k^2+\rho_g^2)^{\frac{3}{2}}}{k\rho_g\rho'_g}=\frac{1}{k\frac{ds}{d}\left(\frac{1}{\sqrt{k^2+\rho_g^2}}\right)},\tag{7}$$

$$s_1+\text{const}=\int\frac{\sqrt{k^2+\rho_g^2}}{\rho_g}ds.\tag{8}$$

Les (7), (8) servent à la détermination de la ligne sphérique L_1 lieu des extrémités des quadrants géodésiques tangents à une ligne sphérique donnée L.

Exemples. — Lorsque L est un hélice, $\rho_g=\frac{k}{s}\sqrt{k^2\operatorname{tang}^2 i-s^2}$ et conséquemment

$$\rho_{1g}=k\operatorname{tang} i=\text{const}.$$

Donc «*lorsque la ligne* L *est un hélice sphérique, la* L_1 *est un petit cercle.*»

Si ρ_g est constant, on a $\rho_{1g}=\infty$, c'est-à-dire «*lorsque la ligne* L *est un petit cercle, la ligne* L_1 *est un grand cercle.*»

§. 5.

THÉORÈME. — «*La forme d'une ligne sphérique est conue lorsqu'on a le rayon vecteur sphérique exprimé en fonction de l'arc de la ligne.*»

Soit L une ligne sphérique quelconque, H le rayon vecteur sphérique issu d'un point A de la sphère, L_1 la ligne que l'on obtient par la projection de L du point A sur le plan tangent à la sphère au point B antipode de A.

Si M, M_1 sont deux points correspondants des lignes L, L_1, on a

$$\mathrm{AM} \,.\, \mathrm{AM}_1 = \overline{\mathrm{AB}}^2;$$

et puisque

$$\mathrm{AM} = 2k \sin \frac{\mathrm{H}}{2k}, \quad \mathrm{AM}_1 = \sqrt{4k^2 + \mathrm{H}_1^2},$$

H_1 étant le rayon vecteur BM_1 de la ligne plane L_1, nous avons la relation suivante entre les rayons vecteurs H, H_1

$$\sqrt{4k^2 + \mathrm{H}_1^2} \,.\, \sin \frac{\mathrm{H}}{2k} = 2k. \tag{9}$$

D'ailleurs la ligne plane L_1 est l'inverse de L par rapport au centre A et à la sphère donnée; on a donc

$$\frac{ds_1}{ds} = \frac{\overline{\mathrm{AM}}^2}{\overline{\mathrm{AB}}^2} = \sin^2 \frac{\mathrm{H}}{2k}, \tag{10}$$

$$\frac{ds_1}{ds} = \frac{\overline{\mathrm{AM}_1}^2}{\overline{\mathrm{AB}}^2} = \frac{4k^2 + \mathrm{H}_1^2}{4k^2}, \tag{11}$$

ds et ds_1 étant l'arc élémentaire des lignes L, L_1.

Si l'on suppose que H soit donné en fonction de s, les équations (9) (10) donnent H_1 en fonction de s_1; en effet on déduit de la (9)

$$\mathrm{H}_1 = 2k \,.\, \cot \frac{\mathrm{H}}{2k} \tag{12}$$

et la (10) nous donne par intégration

$$s_1 + \text{const} = \int \frac{ds}{\sin^2 \frac{\mathrm{H}}{2k}}. \tag{13}$$

Si l'on effectue l'intégration (13), il vient

$$s_1 = f(s), \quad \text{d'où} \quad s = \varphi(s_1),$$

φ étant le symbole d'une fonction convenable; la (12) devient alors

$$H_1 = \psi(s) = \psi[\varphi(s_1)] = \theta(s_1),$$

ce qui donne H_1 exprimé par s_1; cela suffit à la détermination de la ligne plane L_1 (Voir le §. VI), ce qui entraîne la détermination de L.

Exemples.— Déterminer la ligne sphérique H = as, a *étant une constante.*

Dans ce cas

$$H_1 = 2k \cot\left(\frac{a}{2k}s\right), \quad s_1 + \text{const} = -\frac{2k}{a}\cot\left(\frac{a}{2k}s\right),$$

ce qui nous donne

$$as_1 + b = -2k \cot\left(\frac{a}{2k}s\right).$$

Donc

$$H_1 = -(as_1 + b),$$

équations d'une spirale logarithmique dont le pôle est à l'origine des rayons vecteurs H_1; la ligne sphérique L, inverse de L_1, est donc une trajectoire isogonale des lignes méridiennes issues du point A.

Donc *«l'équation* H = as *entre le rayon vecteur sphérique* H *et l'arc* s *d'une ligne sphérique caractérise une loxodromie.»*

Si l'on calcule par la relation $H = as$, la longueur de s correspondante à $H = k\pi$, on a $s = \frac{k\pi}{a}$. C'est l'expression de la longueur totale de la loxodromie sphérique.

Si la ligne sphérique L est donnée par l'équation

$$H = 2k \text{ arc sin } (as + b),$$

on a

$$s_1 + \text{const} = -\frac{1}{a}\frac{1}{as + b}, \quad \text{d'où} \quad as + b = -\frac{1}{as_1 + c},$$

c étant une constante. La courbe plane L_1 est donc représentée par l'équation

$$H_1 = 2k \cot \frac{R}{2k} = -2k\sqrt{(as_1+c)^2 - 1}.$$

Les formules (9), (11) servent à la détermination de la ligne sphérique L lorsqu'on connaît la courbe plane L_1; en effet ces équations nous donnent

$$(12') \qquad H = 2k \operatorname{arc.sin}\left(\frac{2k}{\sqrt{4k^2 + H_1{}^2}}\right);$$

$$(13') \qquad s + \text{const} = 4k^2 \int \frac{ds_1}{4k^2 + H_1{}^2},$$

et si l'on suppose d'avoir effectué la quadrature (13'), on a

$$s = f(s_1), \quad \text{d'où} \quad s_1 = \varphi(s),$$

φ étant le symbole d'une fonction convenable. La (12') nous donne alors

$$H = \psi(s_1) = \psi[\varphi(s)] = \theta(s);$$

c'est l'équation de L.

Exemple. — La ligne L_1 soit la développante de cercle $R_1 = \sqrt{as_1}$; nous avons

$$s + \text{const} := \frac{4k^2}{a} \log(as_1 + 4k^2), \quad \text{d'où} \quad \sqrt{as_1 + 4k^2} = ce^{\frac{as}{8k^2}},$$

c étant une constante quelconque.

La ligne sphérique L, inverse de la ligne plane considérée, est représentée par l'équation

$$H = 2k \operatorname{.arc.sin}\left(\frac{2k}{c} . e^{-\frac{a}{8k^2} . s}\right).$$

§. 6.

Les coordonnées rectangulaires d'un point quelconque d'une ligne sphérique s'expriment en fonction de l'arc s par les équations

$$x = \mathrm{D} \cos \int \sqrt{\frac{k^2 (1 - \mathrm{D}'^2) - \mathrm{D}^2}{k^2 - \mathrm{D}^2}} \cdot \frac{ds}{\mathrm{D}},$$

$$y = \mathrm{D} \,.\, \sin \int \sqrt{\frac{k^2 (1 - \mathrm{D}'^2) - \mathrm{D}^2}{k^2 - \mathrm{D}^2}} \cdot \frac{ds}{\mathrm{D}},$$

$$z = \sqrt{k^2 - \mathrm{D}^2},$$

D étant la distance entre les points de la ligne et l'axe de la sphère (axe coordonné des z) et k le rayon de la sphère.

Si l'on remarque que la courbure $\frac{1}{\rho}$ de la ligne a pour expression

$$\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right) + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2},$$

on a

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{(k^2 - \mathrm{D}^2)\left\{\mathrm{DD}''(k^2 - \mathrm{D}^2) - k^2(1 - \mathrm{D}'^2) + \mathrm{D}^2\right\}^2 + \mathrm{D}^2\left\{\mathrm{DD}''(k^2 - \mathrm{D}^2) + k^2\mathrm{D}'^2\right\}^2}{\mathrm{D}^2 (k^2 - \mathrm{D}^2)^3} +$$

$$+ \frac{1}{\mathrm{D}^2}\left\{\frac{d}{ds} \cdot \mathrm{D}\sqrt{\frac{k^2 (1 - \mathrm{D}'^2) - \mathrm{D}^2}{k^2 - \mathrm{D}^2}}\right\}.$$

et cette formule démontre le théorème *«une ligne sphérique est déterminée lorsqu'on connaît la distance entre ses points et un diamètre de la sphère, exprimé en fonction de l'arc.»*

Si dans la formule que l'on vient d'écrire on passe à la limite pour $k = \infty$, on obtient l'autre formule

$$(14) \qquad \rho = \frac{\mathrm{D}\sqrt{1 - \mathrm{D}'^2}}{\mathrm{DD}'' + \mathrm{D}'^2 - 1},$$

qui donne le rayon de courbure d'une ligne plane lorsqu'on a le rayon vecteur D exprimé en fonction de l'arc.

Application. — Nous allons déterminer les courbes planes remarquables de la famille caractérisée par l'équation

$$D\sqrt{as^2+2bs+c}.$$

Dans ce cas

$$D'=\frac{as+b}{(as^2+2bs+c)^{\frac{1}{2}}},\quad D''=\frac{ac-b^2}{(as^2+2bs+c)^{\frac{3}{2}}},$$

et conséquemment

$$\rho=\sqrt{\frac{a}{1-a}s^2+\frac{2b}{1-a}s+\frac{c-b^2}{(1-a)^2}}.$$

Pour que cette équation représente une courbe cicloïdale (épicicloïde, cicloïde, ipocicloïde) il faut que le coefficient de s^2 soit négatif; si a est positif, cette condition est remplie lorsque $a>1$; si au contraire a est négatif, la condition précédente est toujours remplie.

I.° soit $a>1$. — La courbe représentée par la dernière équation est une épicicloïde, une cicloïde, une ipocicloïde selon que la quantité $\frac{a}{1-a}$ est <1, $=1$, >1; mais les conditions $\frac{a}{1-a}<1$, $\frac{a}{1-a}=1$ donnent respectivement $a<\frac{1}{2}$, $a=\frac{1}{2}$ qui sont en opposition avec l'autre $a>1$; la condition $\frac{a}{1-a}>1$ donne $a>\frac{1}{2}$, qui est contenue dans l'autre condition $a>1$. Dans le cas $a>1$ on a donc toujours l'ipocicloïde.

II.° soit $a<0$. — La quantité $\frac{a}{1-a}$ a une valeur numérique plus petite que 1 et la courbe est une épicicloïde.

Lorsque $a=1$, il résulte $\rho=\infty$ et la ligne est une droite.

Lorsque $a=0$, il résulte

$$\rho=\sqrt{2bs+(c-b^2)},$$

équation d'une développante de cercle.

La ligne est une spirale logarithmique si l'expression de ρ se réduit à la forme $ms+n$; cela a lieu lorsque $b^2-ac=0$.

Donc «*entre les lignes planes représentées par l'équation*

$$D=\sqrt{as^2+2bs+c}$$

entre le rayon vecteur D *et l'arc* s, *on trouve:*

a) *l'ipocicloïde lorsque* a *est positif et* >1,

b) *l'épicicloïde lorsque* a *est négatif*,

c) *la droite lorsque* $a=1$,

d) *la développante de cercle lorsque* $a=0$,

e) *la spirale logarithmique lorsque* $b^2-ac=0$.»

Exemple. — Comme exemple de la détermination d'une ligne plane moyennant une relation entre le rayon vecteur et l'arc, nous allons résoudre le problème suivant «*déterminer l'hélice qui, dans une rotation autour d'un axe parallèle aux génératrices du cylindre qui la contient, forme sur la surface engendrée un système de lignes parallèles.*»

Il faut exprimer que les trajectoires orthogonales des lignes génératrices sont des géodesiques.

Les coordonées d'un point quelconque d'une ligne L de l'espace sont exprimables en fonction de l'arc s de la projection l de la ligne sur le plan coordonné $z=0$ de la manière suivante:

$$x=D\cos\int\frac{\sqrt{1-D'^2}}{D}ds,\quad y=D.\sin\int\frac{\sqrt{1-D'^2}}{D}ds,\quad z=\varphi(s),$$

D étant le rayon vecteur de l et $\varphi(s)$ une fonction arbitraire de s.

Si l'on fait tourner cette ligne autour de l'axe des z, les coordonnées d'un point quelconque de la surface engendrée sont

$$X=x\cos\upsilon-y\sin\upsilon,\quad Y=x.\sin\upsilon+y\cos\upsilon,\quad Z=z,$$

υ étant un paramètre indépendant de s. On en déduit

$$E=\sum\left(\frac{dX}{ds}\right)^2=1+\varphi'^2;\quad F=\sum\frac{dX}{ds}\frac{dX}{d\upsilon}=D\sqrt{1-D'^2};$$

$$G=\sum\left(\frac{dX}{d\upsilon}\right)^2=D^2,$$

et les quantités E, F, G doivent être liées entre elles par la relation

$$\sqrt{\frac{EG - F^2}{E}} = \text{fonction de } v.$$

Mais dans notre cas E, F, G sont indépendants de v; donc la fonction de v de l'égalité précédente se réduit à une constante a et la relation que l'on vient d'écrire nous donne

$$\varphi(s) = z = \int \sqrt{\frac{a^2 - D^2 D'^2}{D^2 - a^2}} \, . \, ds.$$

D'ailleurs L est une hélice, et conséquemment $z = s \, . \cot i$, i étant l'inclinaison constante de la ligne sur les génératrices du cylindre; en comparant les deux expressions de z, on a

$$\sin i \frac{DD'}{\sqrt{a^2 - D^2 \cos^2 i}} = 1,$$

d'où en intégrant

$$D = \frac{1}{\operatorname{sen} i \cos i} \sqrt{a^2 \sin^2 i - (s \cos^2 i + b)^2},$$

b étant une constante arbitraire.

Cette équation démontre que «*l'hélice demandée est placée sur un cylindre dont la section droite est une épicicloïde.*»

La formule (14) peut être généralisée de manière à la rendre applicable aux lignes sphériques. En effet si L, L_1 sont deux lignes de l'espace inverses par rapport à l'origine des axes, les coordonnes x_1, y_1, z_1 d'un point de L_1 sont liées aux coordonnées x, y, z du point correspondant de L par les relations

$$x = \frac{a^2}{R_1{}^2} x_1, \quad y = \frac{a^2}{R_1{}^2} y_1, \quad z = \frac{a^2}{R_1{}^2} z_1,$$

a étant une constante et R_1 le rayon vecteur de L_1.

Si, après ces formules, on calcule le rayon de courbure ρ de L, on a

$$(15) \qquad \frac{1}{\rho^2} = \left(\frac{1}{\rho_1{}^2} + \frac{4}{R_1} \frac{d^2 R_1}{ds_1{}^2} \right) \frac{R_1{}^4}{a^4}.$$

Mais si l'on a égard à la figure du §. V. et on prend la ligne sphérique pour ligne L et la ligne plane pour ligne L_1, on a

$$a=2k, \quad R_1=\sqrt{4k^2+H_1^2}, \quad s_1+\text{const}=\int \frac{ds}{\sin^2\left(\frac{2k}{R}\right)},$$

$$\rho_1=\frac{H_1\sqrt{1-\left(\frac{dH_1}{ds_1}\right)^2}}{H_1\frac{d^2H_1}{ds_1^2}+\left(\frac{dH_1}{ds_1}\right)^2-1}.$$

Si, après ces formules, on calcule les quantités qui paraissent dans la (15), on peut dire «*dans une ligne sphérique quelconque le rayon de courbure* ρ *est lié au rayon vecteur sphérique* H *par la relation*

$$\frac{1}{\rho^2}=\frac{\left[-2k\sin\frac{H}{2k}\cos\frac{H}{2k}\frac{d^2H}{ds^2}+\left(\frac{dH}{ds}\right)^2-1\right]^2}{4k^2\left[1-\left(\frac{dH}{ds}\right)^2\right]\sin^2\frac{H}{2k}\cos^2\frac{H}{2k}}-\frac{4}{\sin\frac{H}{2k}}\frac{d^2}{ds^2}\sin\frac{H}{2k}.$$

C'est une généralisation de la formule (14).

§. 7.

Distance entre deux cercles osculateurs consécutifs d'une ligne sphérique.

Nous allons déterminer la différence entre l'arc infinitésimal ds d'une ligne sphérique et l'arc $d\sigma$ du grand cercle ayant les mêmes extrémités. Si l'on prend pour axes coordonnés la tangente, la normale principale et la binormale d'une ligne L au point O, nous avons dans ce point

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)_0=1, \quad \left(\frac{dy}{ds}\right)_0=\left(\frac{dz}{ds}\right)_0=0;$$

$$\rho_0\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)_0=\rho_0\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)_0=0, \quad \rho_0\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)_0=1$$

et puisque

$$\frac{1}{\rho^2} = \sum \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2,$$

il résulte

$$\sum \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 = 1, \quad \sum \frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{ds^2} = 0, \quad \sum \frac{dx}{ds}\frac{d^3x}{ds^3} + \frac{1}{\rho^2} = 0.$$

Au point 0 nous avons donc

$$\left(\frac{d^3x}{ds^3}\right)_0 = -\frac{1}{\rho_0{}^2}.$$

Si l'on désigne par ds l'arc élémentaire de la ligne L issu de 0 et par dx, dy, dz les coordonnées de son extrémité, on a par le développement de Maclaurin

$$dx = (dx)_0 + \left(\frac{dx}{ds}\right)_0 ds + \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)_0 \frac{ds^2}{2} + \left(\frac{d^3x}{ds^3}\right)\frac{ds^3}{6} + \dots$$

$$= ds + \left(\frac{d^3x}{ds^3}\right)_0 \frac{ds^3}{6} + \dots$$

$$dy = (dy)_0 + \left(\frac{dy}{ds}\right)_0 ds + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)_0 \frac{ds^2}{2} + \left(\frac{d^3y}{ds^3}\right)\frac{ds^3}{6} + \dots$$

$$= \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)_0 \frac{ds^2}{2} + \left(\frac{d^3y}{ds^3}\right)_0 \frac{ds^3}{6} + \dots$$

$$dz = (dz)_0 + \left(\frac{dz}{ds}\right)_0 ds + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)_0 \frac{ds^2}{2} + \left(\frac{d^3z}{ds^3}\right)\frac{ds^3}{6} + \dots$$

$$= \left(\frac{d^3z}{ds^3}\right)_0 \frac{ds^3}{6} + \dots.$$

Soit δ la corde élémentaire correspondante à l'arc ds; on a

$$\delta^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2 + \left(\frac{d^3x}{ds^3}\right)_0^2 \frac{ds^4}{3} + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)_0^2 \frac{ds^4}{4} + \dots$$

$$= ds^2 - \frac{1}{12\rho_0{}^2} . ds^4,$$

d'où l'on dérive

$$ds - \delta = \frac{ds^4}{12\rho_0^2(ds+\delta)}.$$

Mais si l'on substitue ds à δ au deuxième membre de cette égalité, on vient à negliger des infiniment petits d'ordre supérieur; conséquemment à un point quelconque d'une courbe de l'espace on a

$$ds - \delta = \frac{1}{24\rho^2}ds^3.$$

Cette formule peut aussi s'appliquer au grand cercle qui passe par les extrémités de l'arc ds de la ligne sphérique donnée L; on a donc

$$d\sigma - \delta = \frac{1}{24k^2}d\sigma^3,$$

k étant le rayon de la sphère. On en conclut

$$ds - d\sigma = \frac{1}{24}\left(\frac{ds^3}{\rho^2} - \frac{d\sigma^3}{k^2}\right);$$

mais si l'on substitue ds^3 à $d\sigma^3$ on vient à négliger des infiniment petits d'ordre supérieur. On a donc

$$ds - d\sigma = \frac{1}{24}\left(\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{k^2}\right)ds^3 = \frac{1}{24\rho_g^2}ds^3.$$

Cela posé, soit L_1 une ligne sphérique quelconque autour de laquelle on a enroulé un fil; si l'on déroule ce fil avec la condition qu'il soit toujours dirigé suivant le grand cercle tangent à L_1, un point quelconque du fil engendre une courbe L développante géodésique de L_1.

Soient A, B deux points consécutifs de L et A_1, B_1 les points correspondants de L_1; les cercles dont les rayons sphériques sont les arcs A_1A, B_1B, sont deux cercles osculateurs consécutifs de L; la différence $B_1B - A_1A$ de ces rayons est rigoureusement égale à l'arc $ds_1 = A_1B_1$ de la développée, tandis que la distance sphérique entre les centres de ces cercles est l'arc $d\sigma_1$ du grand cercle qui a les mêmes extrémités de ds_1.

Mais $d\sigma_1 < ds_1$, donc *«deux cercles osculateurs consécutifs d'une ligne sphérique sont extérieurs l'un à l'autre.»*

Nous allons déterminer la plus courte distance sphérique Δ entre ces deux cercles; si l'on désigne par R, R + dR les rayons sphériques de ces cercles et si l'on remarque que la distance sphérique des centres des cercles est $d\sigma_1$, on a

$$\Delta = d\mathrm{R} - d\sigma_1 = ds_1 - d\sigma_1 = \frac{1}{24\,\rho_{1g}}\,ds_1{}^3.$$

Si l'on remarque que (§. 2):

$$ds_1 = d\mathrm{R}, \quad \rho_{1g} = k \sin\left(\frac{\mathrm{R}}{k}\right)\frac{d\mathrm{R}}{ds},$$

on a

$$\Delta = \frac{1}{24}\,\frac{\dfrac{d\mathrm{R}}{ds}}{k^2 \sin^2\left(\dfrac{\mathrm{R}}{2k}\right)}\,.\,ds^3 \tag{17}$$

ou bien, par l'application des formules (1),

$$\Delta = \frac{1}{24}\,\frac{1}{\rho_g{}^2}\,\frac{d\rho_g}{ds}\,.\,ds^3. \tag{17'}$$

Ces formules démontrent que la plus courte distance entre deux cercles osculateurs consécutifs d'une ligne sphérique est, par rapport à l'arc élémentaire ds, un infiniment petit de troisième ordre.

Exemple. — Si $\rho_g = ms$, m étant une constante, on a

$$\frac{\Delta}{ds^3} = \frac{1}{24m}\cdot\frac{1}{s^2},$$

c'est-à-dire *«dans la courbe sphérique dont le rayon de courbure géodésique est proportionnel à l'arc, le rapport* $\dfrac{ds^3}{\Delta}$ *est proportionnel à la deuxième puissance de l'arc.»*

Si l'on désigne par $d\varepsilon$ l'angle de contingence géodésique de L, on a $ds=\rho_g d\varepsilon$ et la formule (17′) devient

$$\Delta=\frac{1}{24}\rho_g\rho'_g\,.\,d\varepsilon^3,$$

d'où

$$\frac{\Delta}{d\varepsilon^3}=\frac{1}{24}\rho_g\rho'_g.$$

Or la formule (2′) nous donne

$$\rho_g\rho'_g=\frac{\rho_{1g}}{k^3}(k^2+\rho_g{}^2)^{\frac{3}{2}}$$

et d'ailleurs nous avons trouvé au §. 2:

$$(k^2+\rho_g{}^2)^{\frac{1}{2}}=\frac{k}{\cos\theta},\quad \rho_{1g}=-k\frac{d\cos\theta}{ds},$$

θ étant l'angle sous lequel le plan osculateur de la ligne coupe la sphère. On a donc

$$\frac{\Delta}{d\varepsilon^3}=-\frac{k^2}{24}\cdot\frac{1}{\cos^3\theta}\cdot\frac{d\cos\theta}{ds}. \tag{18}$$

L'équation (18) donne une relation remarquable entre l'angle sous lequel le plan osculateur de la ligne coupe la sphère et le rapport $\frac{\Delta}{d\varepsilon^3}$ de la distance infinitésimale entre deux cercles osculateurs consécutifs à la troisième puissance de l'angle de contingence géodésique.

Exemple. — Si $\frac{\Delta}{d\varepsilon^3}=\text{const}=a$, il résulte

$$\frac{1}{\cos^3\theta}d\,.\cos\theta=-\frac{24a}{k^2}ds,$$

d'où par intégration

$$\frac{1}{\cos^2\theta}=\frac{48a\,.\,s+b}{k^2},$$

b étant une constante.

Donc «*dans la ligne sphériqae pour laquelle le rapport* $\frac{\Delta}{d\varepsilon^3}$ *est une constante* a, *l'angle* θ *sous lequel le plan osculateur coupe la sphère est défini par l'égalité*

$$\cos\theta = \frac{k}{\sqrt{48a\,.\,s+b}}.$$

§. 8.

Lignes planes. — Si l'on suppose que le rayon de la sphère augmente indéfiniment, la sphère a pour limite un plan et la ligne sphérique une ligne plane; le rayon de courbure géodésique ρ_g de la ligne sphérique a pour limite le rayon de courbure de cette ligne plane.

Donc «*dans une ligne plane deux cercles osculateurs consécutifs sont extérieurs l'un à l'autre et la plus courte distance* Δ *entre eux est donnée ainsi*

$$(19)\qquad \Delta = \frac{1}{24}\frac{1}{\rho^2}\frac{d\rho}{ds}\,.\,ds^3.$$

La quantité Δ_1 relative à la développée L_1 de L est

$$\Delta_1 = \frac{1}{24}\frac{1}{\rho_1{}^2}\frac{d\rho_1}{ds_1}ds_1{}^3$$

et puisque

$$ds_1 = \frac{d\rho}{ds}ds, \quad \rho_1 = \rho\frac{d\rho}{ds},$$

il vient

$$\Delta_1 = \frac{1}{24}\frac{1}{\rho^2}\frac{d}{ds}\left(\rho\frac{d\rho}{ds}\right)ds^3,$$

d'où

$$\frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\rho\frac{d}{ds}\left(\rho\frac{d\rho}{ds}\right)}{\rho\frac{d\rho}{ds}} = \frac{\rho_2}{\rho_1},$$

ρ_1 et ρ_2 étant les rayons de courbure de la développée L_1 et de la deuxième développée L_2 de L.

Si l'on désigne donc par $\Delta_2, \Delta_3, \ldots \Delta_{n-1}, \Delta_n$ les quantités analogues à Δ relatives aux développés successives $L_2, L_3, \ldots L_{n-1}, L_n$ de L, on a les équations

$$\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{\rho_1}{\rho_2},\quad \frac{\Delta_1}{\Delta_2}=\frac{\rho_2}{\rho_3},\quad \frac{\Delta_2}{\Delta_3}=\frac{\rho_3}{\rho_4},\quad \ldots\quad \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}=\frac{\rho_n}{\rho_{n+1}},$$

qui par multiplication nous donnent

$$\frac{\Delta_n}{\Delta}=\frac{\rho_1}{\rho_{n+1}}.$$

Donc «*le rapport de la distance* Δ *relative à une ligne* L *à la distance analogue* Δ_n *relative à l'* n^ème^ *développée* L_n *de* L *est égal au rapport du rayon de courbure de la première développée de* L *au rayon de l'* $(n+1)^{\text{ème}}$ *développée de* L.»

Si l'on pose $\frac{\Delta}{\Delta_1}=a$, a étant une constante, on a $\rho_1=a\rho_2$ c'est-à-dire

$$\rho_1=a\rho_1\frac{d\rho_1}{ds_1},$$

ce qui nous donne

$$\rho_1=\frac{1}{a}s_1+b.$$

Donc «*les lignes planes pour lesquelles* $\Delta=a\Delta_1$ *sont des développantes d'une spirale logarithmique.*»

Si $\frac{\Delta}{\Delta_2}=a$, a étant une constante, il vient $\rho_1=a\rho_3$, c'est-à-dire

$$\rho_1=a\rho_2\frac{d\rho_2}{ds_2}=a\rho_1\frac{d}{ds_1}\left(\rho_1\frac{d\rho_1}{ds_1}\right),$$

ou bien

$$\frac{d}{ds_1}\left(\rho_1\frac{d\rho_1}{ds_1}\right)=\frac{1}{a},$$

d'où par intégration

$$\rho_1 \frac{d\rho_1}{ds_1} = \frac{s_1}{a} + b.$$

La multiplication pour ds_1 et une nouvelle intégration nous donnent

$$\rho_1^2 = \frac{s_1^2}{a} + 2bs_1 + c,$$

b etc c étant deux constantes quelconques.

Donc «*les lignes planes pour lesquelles* $\Delta = a\,\Delta_2$ *sont des développantes de la ligne définie par l'équation* $\rho_1 = \sqrt{\frac{s_1^2}{a} + 2bs_1 + c}$.»

Cette ligne est une courbe cicloïdale lorsque $a < 0$.

Si l'on pose la condition $\frac{\Delta}{ds^3} = -a$, a étant une constante, on a

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{d\rho}{ds} = -24a, \quad \text{d'où} \quad \frac{1}{\rho} = 24a \,.\, s + b,$$

c'est-à-dire «*les lignes planes dans lesquelles le rapport* $\frac{\Delta}{ds^3}$ *est une constante, ont pour courbure une fonction linéaire de l'arc.*»

La formule (19) qui donne la plus courte distance entre deux cercles osculateurs consécutifs d'une ligne plane, est analogue à celle qui donne la plus courte distance entre deux tangentes consécutives d'une ligne à double courbure; en effet si l'on appelle δ cette distance, on a

$$\delta = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{\rho r} ds^3, \tag{20}$$

ρ étant le rayon de courbure et r celui de torsion de la ligne.

Les formules (19), (20) peuvent être appliquées à la résolution du problème suivant: «L *étant une ligne plane donnée, on veut la réduire à une ligne à double courbure* L_1 *par des rotations infinitésimales du plan de la ligne autour ses tangentes successives, avec la condition que la distance infinitésimale entre deux cercles oscula-*

teurs consécutifs de la ligne plane L *soit proportionnelle à la distance infinitésimale entre deux tangentes consécutifs de* L_1.»

Si l'on remarque que, dans les rotations infinitésimales susdites, les quantités s, ρ restent invariables, les formules (19), (20) donnent

$$\frac{\Delta}{\delta}=\frac{\rho' r}{2\rho}=a,$$

a étant une constante. Il en dérive

$$\frac{\rho'}{\rho}=\frac{2a}{r},$$

d'où par intégration

$$\log\rho=\log b+2a\int\frac{ds}{r},$$

b étant une constante arbitraire; cette égalités peut s'écrire

$$\text{(21)}\qquad \rho=be^{2a\int\frac{ds}{r}}.$$

Telle est la relation entre le rayon de courbure ρ et celui de torsion r de la ligne à double courbure L_1 que l'on dérive de la ligne plane L.

Exemple. — Si l'on suppose que la ligne L_1 soit un hélice, on a

$$\frac{r}{\rho}=\operatorname{tang} i,$$

i étant l'inclinaison constante de la ligne sur les génératrices du cylindre, et puisque la (21) nous donne

$$\frac{r}{\rho}=\frac{2a}{\rho'},$$

il vient

$$\rho'=2a\,.\cot i,$$

d'où par intégration

$$\rho = 2a \,.\, \cot i \,.\, s + \text{const.}$$

La ligne plane est donc une spirale logarithmique coupant les rayons vecteurs issus du pôle sous l'angle θ défini par l'équation

$$\cot \theta = 2a \,.\, \cot i.$$

La ligne L_1 à laquelle se réduit la spirale L est une hélice cylindro-conique.

Si la ligne L_1 est une géodésique d'un cône, nous avons (V. la citation du §. 2.):

$$\frac{\rho}{r} = ms + n,$$

m et n étant des constantes; on a donc dans ce cas

$$\frac{\rho}{r} = ms + n = \frac{\rho'}{2a}, \quad \text{d'où} \quad \rho' = 2ams + 2an,$$

et en intégrant

$$\rho = ams^2 + 2ans + p. \tag{22}$$

La ligne plane L est donc définie par l'égalité que l'on vient d'écrire et la géodésique L_1 du cône, à laquelle se réduit L, est définie par les égalités

$$\rho = ams^2 + 2an \,.\, s + p, \quad r = \frac{ams^2 + 2ans + p}{ms + n},$$

qui donnent le rayon de courbure et de torsion en fonction de l'arc.

Entre les lignes planes représentées par l'équation (22) il y a la chaînette; en effet dans la chaînette on a

$$\rho = a + \frac{s^2}{a},$$

relation qui, par le changement de l'origine des arcs s peut s'écrire

$$\rho = a + \frac{(s+b)^2}{a} = \frac{s^2}{a} + \frac{2b}{a}s + \frac{b^2}{a} + a,$$

b étant une constante.

Si l'on compare cette formule à la suivante

$$\rho = ms^2 + ns + p,$$

on voit que la deuxième se réduit à la forme de la première lorsque

$$4(mp-1) = n^2.$$

On conclut que la courbe plane L est une chaînette lorsque la constante a est liée aux constantes m, n, p par la relation

$$a^2n^2 - amp + 1 = 0.$$

L'angle de contingence $d\varepsilon$ d'une ligne est donné par l'équation

$$d\varepsilon = \frac{ds}{\rho},$$

ce qui réduit la (19) à la suivante

$$\frac{\Delta}{d\varepsilon^3} = \frac{1}{24}\rho\frac{d\rho}{ds}.$$

Donc «*la plus courte distance* Δ *entre deux cercles osculateurs consécutifs d'une ligne plane* L *est, par rapport à l'angle de contingence* $d\varepsilon$, *un infiniment petit de troisième ordre. Le raport* $\frac{\Delta}{d\varepsilon^3}$ *est égal à la* 24eme *partie du rayon de courbure* ρ_1 *de la développée* L_1 *de la ligne donnée.*»

Lorsque $\frac{\Delta}{d\varepsilon^3}$ est constant, ρ_1 l'est aussi et la ligne L est une développante de cercle.

En général si l'on suppose

$$\frac{\Delta}{d\varepsilon^3} = \sum_0^n a_i s^{n-i},$$

il vient

$$\rho = 4\sqrt{3}\sqrt{\sum_0^n \frac{a_i}{1+n-i} s^{1+n-i} + a_{n+1}},$$

c'est-à-dire «*lorsque le rapport* $\frac{\Delta}{d\varepsilon^3}$ *est exprimé par une fonction de l'arc, algébrique, rationnelle, entière du dégré* n, *le rayon de courbure de* L *est exprimé par la puissance du dégré* $\frac{1}{2}$ *d'une fonction de l'arc algébrique, rationnelle, entière du dégré* n + 1.»

§. 9.

Un théorème général sur les lignes sphériques. — Soit L_0, L_1, L_2, ... L_{n-1}, L_n une suite de lignes telles, que l'une quelconque L_i d'entre elles soit une géodésique de la développable osculatrice de la ligne précédente L_{i-1}; on dira que L_n est une géodésique de l' n^eme développable osculatrice de L_0. Soient l_0, l_1, l_2, ... l_{n-1}, l_n les indicatrices des tangentes des lignes données; l'une quelconque l_i d'entre elles est une développante géodésique de la ligne précédente l_{i-1}.

Si l'on suppose que la ligne L_n soit placée sur la sphère des indicatrices, la ligne l_n est le lieu des extremités des quadrants géodésiques tangents à L_n, et l'indicatrice des binormales de L_n est la développé géodésique Λ_n de L_n. En effet la tangente à la ligne L_n à un point quelconque est parallèle au rayon de la sphère qui aboutit au point correspondant de l_n; au surplus la ligne Λ_n est évidémment la courbe polaire de l_n.

On peut donc énoncer le théorème «*lorsqu'on a une serie de lignes L_0, L_1, L_2, ... L_{n-1}, L_n telles, que l'une quelconque L_i d'entre elles soit une géodésique de la développable osculatrice de la précédente L_{i-1}, si la ligne L_n est placée sur une sphère, sa développée géodésique Λ_n est la ligne polaire de l'indicatrice l_n d'une géodésique de l'n^{eme} développable osculatrice de L_0.*»

Nous allons appliquer ce théorème à quelques cas particuliers.

Si la ligne L_0 infiniment petite s'éloigne à l'infini, sa développable osculatrice se réduit à un cylindre, L_1 est un hélice de cette surface, L_2 une géodésique d'un hélicoïde développable (développable dont l'arête de rebroussement est une hélice quelconque), L_3 est une géodésique de la développable dont l'arête de rebroussement est une géodésique d'un hélicoïde développable, etc.

Dans ce cas considérons les deux lignes L_0, L_1 et supposons que L_1 soit sphérique; l'indicatrice de l'hélice L_1 est un petit cercle et la ligne Λ_1 l'est aussi; la ligne L_1 est donc sur la sphère une développante géodésique de ce cercle.

Donc «*les hélices sphériques sont des développantes géodésiques d'un petit cercle* (théorème connu).»

On peut dire encore «*les lignes de l'espace dont l'indicatrice des tangentes est une hélice sphérique sont des géodésiques d'un hélicoïde développable.*»

Que l'on suppose d'avoir les trois lignes L_0, L_1, L_2 dont la dernière est sphérique; la ligne L_2 est une géodésique d'un hélicoïde développable et son indicatrice l_2 est, en force du théorème précédent, une hélice sphérique; la ligne Λ_2, polaire de l_2, l'est aussi.

Donc «*les géodésiques des hélicoïdes développables placées sur une sphère, sont des développantes géodésiques d'une hélice sphérique.*»

On peut dire encore «*les lignes de l'espace dont l'indicatrice des tangentes est une développante géodésique d'une helice sphérique, sont des geodésiques d'une développable dont l'arête de rebroussement est une géodésique d'un hélicoïde développable.*»

Que l'on suppose d'avoir les quatre lignes L_0, L_1, L_2, L_3 dont la dernière est sphérique; la ligne L_3 est alors une géodésique d'un hélicoïde développable et son indicatrice l_3 est, en force du théorème précédent, une développante géodésique d'une hélice sphérique; la ligne Λ_3 est de la même nature.

Donc «*les géodésiques d'une développable dont l'arête de rebroussement est une geodésiques d'un hélicoïde développable, qui* *sont placées sur une sphère, sont des deuxièmes développantes géodésiques d'une hélice sphérique.»*

On peut dire encore *«les lignes de l'espace dont l'indicatrice est une deuxième développante géodésique d'une hélice sphérique, sont des géodésiques d'une développable dont l'arête de rebroussement est une géodésiques d'une développable dont l'arête de rebroussement est une géodésique d'un hélicoïde développable.»*

Ainsi de suite.

Parme, mai 1889.

BIBLIOGRAPHIA

Mansfield Merriman. — *Método de los cuadrados minimos (traduzido do inglez para hespanhol por V. Balbin).* — *Buenos-Aires, 1889.*

Diz o sr. Merriman no prologo do seu excellente livro:

«Os *Elementos do methodo dos menores quadrados* foram escriptos tendo em vista dois objectos: 1.°, apresentar os principios fundamentaes do methodo de uma maneira tão clara, illustrando-a com exemplos tão practicos e simples, de modo a tornal-a accessivel á maior parte dos engenheiros civis que não tiverem extensos conhecimentos das mathematicas; e 2.°, dar uma exposição elementar da theoria, que satisfaça ás necessidades de uma grande classe de alumnos, cada dia mais numerosa.»

Por satisfazer a estes requisitos foi traduzida pelo sr. V. Balbin, do inglez para hespanhol, para servir de texto aos alumnos da Faculdade de sciencias exactas da Universidade de Buenos-Aires.

Consta a obra de dez capitulos.

Nos capitulos I a IV expõe o auctor os principios do methodo dos menores quadrados; nos capitulos V a IX faz applicação d'estes principios a diversas classes de observações. O capitulo X contém um resumo historico, e uma serie de táboas proprias a facilitar a applicação do methodo.

Cada capitulo é seguido de uma lista de problemas proprios para exercicio do alumno.

Gino Loria. — *I poligoni di Poncelet.* — *Torino, 1889.*

Contém este interessante opusculo um discurso, sobre os polygonos de Poncelet, pronunciado pelo sr. Gino Loria na occasião da sua recepção solemne como Doutor aggregado á Faculdade de Sciencias da Universidade de Genova.

Em 1817 enunciou Poncelet pela primeira vez o problema seguinte: determinar um polygono de determinado numero de lados que esteja inscripto n'uma secção conica e circumscripto a outra. Cinco annos depois mostrou este grande geometra que este problema não admitte sempre solução, e que, quando admitte solução, admitte um numero infinito d'ellas. É da historia d'este problema notavel que o sr. Gino Loria se occupa no seu bello trabalho.

Refere-se primeiramente aos trabalhos que a este respeito escreveu Jacobi. Este grande geometra, associando este problema á theoria das funcções ellipticas, achou por meio d'esta theoria a relação que deve existir entre os raios de duas circumferencias e a distancia dos seus centros para que haja um polygono de um numero n de lados que possa ser inscripto n'uma e circumscripto á outra.

Depois de Jacobi occupou-se dos polygonos de Poncelet o seu illustre discipulo Richelot. Este geometra apresentou uma regra simples para obter os raios e a distancia dos centros de duas circumferencias taes que n'uma se possa inscrever um polygono de $2n$ lados circumscripto á outra, quando se conhece a relação analoga para um polygono de n lados; estendeu á esphera alguns dos theoremas de Poncelet; e apresentou tres methodos para pôr a solução do problema debaixo de fórma algebrica.

Quarenta annos depois de Jacobi se occupar do problema de Poncelet, no caso de um systema de duas circumferencias, foi o seu methodo estendido pelos srs. Rosanes e Pasch ao caso de um systema de duas secções conicas. Estes geometras apresentaram, com effeito, pela primeira vez uma solução, por meio das funcções ellipticas, do problema que consiste em determinar os coefficientes de duas secções conicas, de modo que um polygono possa ser inscripto n'uma e circumscripto a outra.

Refere-se tambem o sr. Gino Loria aos trabalhos de Cayley sobre este assumpto. O illustre geometra inglez descobriu a fórma geral do invariante simultaneo de duas secções conicas que, quando se annulla, traz como consequencia que estas secções conicas admittem polygonos de Poncelet de um numero dado de lados.

Occupa-se depois o sr. Gino Loria dos trabalhos para resolver o problema de Poncelet por meios puramente algebricos, referindo-se aos trabalhos de Mention, Puiseux e Moutard.

Refere-se ainda o auctor a muitos trabalhos, que aqui não podemos enumerar, tendo em vista dar outras demonstrações dos theoremas de Poncelet, applicar a theoria dos polygonos de Poncelet á theoria da transformação das funcções ellipticas, desenvolver consequencias d'aquella theoria, etc.

F. Casorati. — *Nuova definizione della curvatura delle superficie* (*Rendiconti del R. Istituto Lombardo*, serie 2.ª, t. XXII).

A noção de curvatura de uma superficie n'um ponto dado foi definida por Gauss na sua memoria fundamental intitulada — *Disquisitiones generales circa superficies curvas* — do modo seguinte: Considera uma porção infinitesima da superficie que contenha o ponto dado e uma esphera de raio egual á unidade. Pelos pontos de contôrno da porção considerada da superficie tira normaes á superficie, e pelo centro da esphera tira parallelas a estas normaes, que determinam pela sua intersecção com a esphera uma curva limitando uma porção infinitesimal da esphera. Posto isto, chama Gauss curvatura da superficie no ponto considerado o limite para que tende a razão da área da porção considerada da superficie para a área da porção correspondente da esphera quando estas áreas tendem para zero. A curvatura de superficie assim definida é egual ao producto das curvaturas das secções principaes correspondentes ao ponto considerado.

Principia o sr. Casorati a sua bella Nota fazendo vêr os inconvenientes d'esta definição, um dos quaes é levar a considerar como privadas de curvatura as superficies planificaveis, que todavia se está habituado a considerar como superficies curvas desde os primeiros passos na escola.

Em seguida apresenta um novo conceito de curvatura para substituir ao de Gauss. Para isso imagina que no ponto O da superficie, ao qual se deve referir a curvatura, se colloca a extremidade de um fio, e que se faz mover a outra extremidade sobre a superficie conservando o fio sempre tenso. É a área descripta pelo fio que o sr. Casorati toma para denominador da fracção cujo limite representa a curvatura da superficie no ponto O. Para obter o numerador da mesma fracção imagina o auctor que sobre o fio se tomam cumprimentos proporcionaes aos angulos que a normal á superficie no ponto O faz com as normaes á superficie na outra extremidade do fio. A nova área obtida é o numerador da fracção considerada.

Depois de expôr as razões para se adoptar esta definição da medida de curvatura da superficie, o sr. Casorati passa a traduzil-a analyticamente, o que o leva á conclusão de que a medida da curvatura assim considerada é egual á media arithmetica dos quadrados das curvaturas das secções principaes.

Termina o auctor por fazer vêr a analogia que ha entre a sua definição de curvatura da superficie e a noção conhecida de curvatura de uma linha.

Y. Ptaszycki. — *Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, t. XII, 1888).

N'esta carta considera o sr. Ptaszycki o integral $\int F(x, \sqrt[m]{R})\, dx$, onde $F(x, \sqrt[m]{R})$ representa uma funcção racional de x e de $\sqrt[m]{R}$, e onde é $R = (x - a_1)^{n_1} \ldots (x - a_\lambda)^{n_\lambda}$, e procura qual deve ser o radical $\sqrt[m]{R}$ para que este integral seja exprimivel debaixo de fórma finita por meio de operações algebricas e logarithmicas, qualquer que seja a funcção F. Demonstra o auctor que, para que isto aconteça, é necessario e sufficiente que o radical $\sqrt[m]{R}$ tenha uma das fórmas

$$\sqrt[m]{(x - a_1)^{n_1}}, \quad \sqrt[m]{(x - a_1)^{n_1} (x - a_2)^{m - n_1}}.$$

G. T.

SUR UNE FONCTION CONTINUE DONT LA DÉRIVÉE EST PARTOUT DISCONTINUE

(Extrait d'une lettre adressée à F. Gomes Teixeira)

PAR

M. M. Lerch

Il peut avoir quelque intérêt de connaître une fonction finie et continue dont la derivée soit aussi finie et déterminée, mais partout discontinue. Une telle fonction s'obtient à l'aide d'un principe dû à M. Weierstrass et communiqué par M. G. Cantor (Math. Annalen, t. 19). Elle é donnée par la série

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu (x - a_\nu)^2 \sin \frac{\pi}{x - a_\nu},$$

dans laquelle les quantités $c_0, c_1, c_2, \ldots$ sont des termes d'une série absolument convergente et les quantités $a_0, a_1, a_2, \ldots$ constituent l'ensemble condensé dans toute partie d'un intervalle donné, par exemple $(0 \ldots 1)$.

On suppose ensuite que ces quantités a_ν sont différentes entre elles et qu'on remplace le produit

$$(x - a_\nu) \sin \frac{\pi}{x - a_\nu}$$

par sa limite zéro, lorsque $x = a_\nu$.

Cela étant la série considérée sera uniformément convergente et, puisqu'elle se compose de termes continues, la fonction $f(x)$ sera elle-même continue.

Posant, pour abréger,

$$c_\nu (x - a_\nu)^2 \sin \frac{\pi}{x - a_\nu} = \varphi_\nu (x),$$

nous aurons

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_\nu (x)$$

d'où

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\varphi_\nu (x+h) - \varphi_\nu (x)}{h}$$

d'où nous allons conclure que le premier membre s'approche d'une limite finie et déterminée lorsque h tend vers zéro.

J'observe à cet effet que la fonction $\varphi_\nu (x)$ a une dérivé finie et toujours déterminée. Car celle-ci est donnée par la formule

$$(1) \qquad \varphi'_\nu (x) = 2c_\nu (x - a_\nu) \sin \frac{\pi}{x - a_\nu} - \pi c_\nu \cos \frac{\pi}{x - a_\nu}$$

en supposant que x diffère de a_ν; mais lorsque $x = a_\nu$ cette dérivée sera, par definition,

$$\lim_{h=0} \frac{\varphi_\nu (a_\nu + h) - \varphi_\nu (a_\nu)}{h} = c_\nu \lim_{h=0} h \sin \frac{\pi}{h} = 0;$$

elle sera donnée encore par la formule (1) si l'on convient de prendre $\cos \frac{\pi}{0} = 0$, ce que je ferai dans ce qui suit.

D'après un théorème fondamental de la théorie des fonctions d'une variable réelle, démontré sous sa forme la plus général par

M. Dini dans son œuvre sur les fonctions, chaque intervalle $(x \ldots x+h)$ contient une quantité x_ν telle que

$$\frac{\varphi_\nu(x+h)-\varphi_\nu(x)}{h}=\varphi'_\nu(x_\nu),$$

ce qui donne

$$(2)\left\{\begin{aligned}&\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\varphi'_\nu(x_\nu)=\\&=2\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu(x_\nu-a_\nu)\sin\frac{\pi}{x_\nu-a_\nu}-\pi\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu\cos\frac{\pi}{x_\nu-a_\nu}.\end{aligned}\right.$$

En supposant maintenant que x ne coincide avec aucune des quantités a_ν je dis qu'on a

$$(3)\left\{\begin{aligned}&\lim_{h=0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\&=2\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu(x-a_\nu)\sin\frac{\pi}{x-a_\nu}-\pi\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu\cos\frac{\pi}{x-a_\nu}.\end{aligned}\right.$$

En représentant par A la valeur du second membre, j'aurai en effet

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\mathrm{A}$$

$$=2\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu\left[(x_\nu-a_\nu)\sin\frac{\pi}{x_\nu-x_\nu}-(x-a_\nu)\sin\frac{\pi}{x-a_\nu}\right]$$

$$-\pi\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu\left(\cos\frac{\pi}{x_\nu-a_\nu}-\cos\frac{\pi}{x-a_\nu}\right).$$

Etant donné une quantité positive δ aussi petite que l'on veut on peut déterminer un nombre entier p tel que la série

$$|c_p|+|c_{p+1}|+|c_{p+2}|+\ldots$$

soit inférieure á δ, de sorte que la valeur absolue du reste

$$R_p(x)=2\sum_{\nu=p}^{\infty}c_\nu\left[(x_\nu-a_\nu)\sin\frac{\pi}{x_\nu-a_\nu}-(x-a_\nu)\sin\frac{\pi}{x-a_\nu}\right]$$

$$-\pi\sum_{\nu=p}^{\infty}c_\nu\left(\cos\frac{\pi}{x_\nu-a_\nu}-\cos\frac{\pi}{x-a_\nu}\right)$$

sera moindre que

$$4\delta+2\pi\delta=(4+2\pi)\delta.$$

Mais on a

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-A=$$

$$=\left\{2\sum_{\nu=0}^{p-1}c_\nu\left[(x_\nu-a_\nu)\sin\frac{\pi}{x_\nu-a_\nu}-(x-a_\nu)\sin\frac{\pi}{x-a_\nu}\right]\right.$$

$$\left.-\pi\sum_{\nu=0}^{p-1}c_\nu\left(\cos\frac{\pi}{x_\nu-a_\nu}-\cos\frac{\pi}{x-a_\nu}\right)\right\}+R_p(x)$$

et on peut évidemment déterminer une quantité h_0 telle que l'intervalle $(x-h_0\ldots x+h_0)$ ne contient aucun des points a_0, a_1, $a_2,\ldots a_{p-1}$, desorte que la parenthèse } { sera une fonction continue dans cet intervalle.

On pourra donc trouver une quantité h_1, moindre que h_0, telle que la dite parenthèse sera inférieure en valeur absolue à δ pour chaque valeur de h satisfaisant à l'inégalité $|h| < h_1$. On aura donc pour $|h| < h_1$, l'inégalité

$$\left| \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \mathrm{A} \right| < (5+2\pi)\,\delta,$$

ce qui s'exprime par la formule

$$\lim_{h=0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \mathrm{A},$$

de sorte que l'équation (3) est démontrée.

Supposons en second lieu que $x = a_n$. Dans ce cas nous avons

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\varphi_n(a_n+h)-\varphi_n(a_n)}{h} + \sum_{\nu=0}^{\infty}{}' \frac{\varphi_\nu(x+h)-\varphi_\nu(x)}{h}$$

où la série Σ' ne contient pas le terme $\nu = n$. Puisque a_n diffère de tous les autres a_ν on voit comme précédemment que

$$\lim_{h=0} \sum_{\nu=0}^{\infty}{}' \frac{\varphi_\nu(x+h)-\varphi_\nu(x)}{h} = \mathrm{A}$$

et comme

$$\lim_{h=0} \frac{\varphi_n(a_n+h)-\varphi_n(a_n)}{h} = 0,$$

la dérivée

$$\lim \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

sera donnée comme précédemment par la formule (3).

La fonction $f(x)$ a, par conséquent, toujours une dérivée finie et déterminée, qu'on peut représenter par la formule

$$(3 \text{ bis}) \quad f'(x) = 2\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu (x - a_\nu) \sin \frac{\pi}{x - a_\nu} - \pi \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \cos \frac{\pi}{x - a_\nu},$$

avec la convention de prendre $\cos\frac{\pi}{0} = 0$. Mais on voit immédiatement que cette fonction $f'(x)$ est discontinue dans chaque point a_ν et par conséquent dans chaque partie de l'intervalle $(0 \ldots 1)$.

SOBRE AS FUNCÇÕES DUPLAMENTE PERIODICAS DE SEGUNDA ESPECIE

POR

José Pedro Teixeira

I

As series

$$\frac{\pi}{2i\mathrm{K}'}\Sigma_n \operatorname{cosec} \frac{\pi}{2i\mathrm{K}'}(x-z-2n\mathrm{K})=$$

$$=\frac{\pi}{\mathrm{K}'} e^{\frac{\pi}{2\mathrm{K}'}(x-z)} \Sigma_n \frac{q_1{}^n}{q_1{}^{2n} e^{\frac{\pi}{\mathrm{K}'}(x-z)}-1},$$

$$\frac{\pi}{2\mathrm{K}}\Sigma_{n'} \operatorname{cosec} \frac{\pi}{2\mathrm{K}}(x-z-2n'i\mathrm{K}')=$$

$$=\frac{\pi i}{\mathrm{K}} e^{\frac{\pi}{2\mathrm{K}}(x-z)} \Sigma_{n'} \frac{q^{n'}}{e^{\frac{\pi}{\mathrm{K}}(x-z)}-q^{2n'}},$$

$$\frac{\pi}{2\mathrm{K}}\Sigma_{n'}(-1)^{n'} \operatorname{cosec} \frac{\pi}{2\mathrm{K}}(x-z-2n'i\mathrm{K}')=$$

$$=\frac{\pi i}{\mathrm{K}} e^{\frac{\pi}{2\mathrm{K}}(n-z)} \Sigma_{n'} \frac{(-1)^{n'} q^{n'}}{e^{\frac{\pi}{\mathrm{K}}(x-z)}-q^{2n'}},$$

onde q_1 e q representam as exponenciaes $e^{-\pi\frac{K}{K'}}$, $e^{-\pi\frac{K'}{K}}$, são absolutamente convergentes em ambos os sentidos, excepto para os valores de x e z que satisfazem á equação

$$(1) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x - z = 2nK + 2n'iK'.$$

As funcções

$$(2) \ldots \varphi\,(x, z) = \frac{\pi}{2iK'} \Sigma_n \operatorname{cosec} \frac{\pi}{2iK'} (x - z - 2nK),$$

$$(3) \ldots \varphi_1(x, z) = \frac{\pi}{2K} \Sigma_n \operatorname{cosec} \frac{\pi}{2K} (x - z - 2niK'),$$

$$(4) \ldots \varphi_2(x, z) = \frac{\pi}{2K} \Sigma_n (-1)^n \operatorname{cosec} \frac{\pi}{2K} (x - z - 2niK')$$

considerando x como constante e z como variavel, têm, no interior do parallelogrammo dos periodos, como mostra a equação (1), o infinito x, ao qual corresponde o residuo -1, e gosam das propriedades

$$(5) \ldots\ldots\ldots\ldots \begin{cases} \varphi\,(x, z + 2K) = \varphi\,(x, z), \\ \varphi\,(x, z + 2iK') = -\varphi\,(x, z), \end{cases}$$

$$(6) \ldots\ldots\ldots\ldots \begin{cases} \varphi_1(x, z + 2K) = -\varphi_1(x, z), \\ \varphi_1(x, z + 2iK' = \varphi_1(x, z), \end{cases}$$

$$(7) \ldots\ldots\ldots\ldots \begin{cases} \varphi_2(x, z + 2K) = -\varphi_2(x, z), \\ \varphi_2(x, z + 2iK') = -\varphi_2(x, z) \end{cases}$$

que lhes permittem servir de elementos simples na decomposição das funcções duplamente periodicas cujos multiplicadores são $+1, -1$; $-1, +1$; $-1, -1$.

Seja $F(z)$ uma funcção uniforme, que satisfaça a (5), e tome-se o producto $F(z)\varphi(x,z)$ Este producto é evidentemente uma funcção duplamente periodica ordinaria, e por isso é nulla a somma dos residuos relativos aos infinitos que elle possue no interior do parallelogrammo dos periodos.

Sendo $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ os infinitos de $F(z)$, dentro do parallelogrammo, aquelle producto tem alem d'estes infinitos, o infinito x, ao qual corresponde o residuo $-F(x)$. Os residuos correspondentes aos β deduzem-se de

$$A^{(j)}\varphi(x,\beta_j),$$

fazendo $j=1,2,\ldots,m$.

Temos então

$$(8)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots F(x)=\sum_{1}^{m}{}_j A^{(j)}\varphi(x,\beta_j)$$

Se os infinitos β forem multiplos, e $p_1, p_2, \ldots, p_m$ seus graus de multiplicidade, então os residuos correspondentes deduzem-se de

$$\sum_{1}^{p_j}{}_g \frac{A_g^{(j)}}{(g-1)!}\frac{d^{g-1}\varphi(x,\beta_0)}{d\beta_j{}^{g-1}},$$

fazendo tambem $j=1,2,\ldots,m$, e a formula de decomposição será

$$(8')\ldots\ldots\ldots F(x)=\sum_{1}^{m}{}_j\sum_{1}^{p_j}\frac{A_g^{(j)}}{(g-1)!}\frac{d^{g-1}\varphi(x,\beta_j}{d\beta_j{}^{g-1}}.$$

Devemos advertir que nesta formula deve tomar-se a unidade pelo denominador nullo.

Se $F(z)$ satisfazer a (6) ou (7), as formulas de decomposição ainda são as mesmas, mudando φ em φ_1 ou em φ_2.

II

Appliquemos esta theoria á decomposição e desenvolvimento em serie das funcções ellipticas.

A funcção dnx satisfaz a (5) e tem o polo $i\mathrm{K}'$, ao qual corresponde o residuo $-\frac{i\theta\eta_1}{\theta_1\eta'}$, sendo θ e η as quantidades $\Theta(0)$ e $\mathrm{H}(0)$; teremos então

$$dnx = \frac{\pi\theta\eta_1}{2\mathrm{K}'\theta_1\eta'}\Sigma_n \frac{1}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2i\mathrm{K}'}(x - i\mathrm{K}' - 2n\mathrm{K})},$$

ou

$$dnx = \frac{\pi\theta\eta_1}{2\mathrm{K}'\theta_1\eta'}\Sigma_n \frac{1}{\cos\frac{\pi}{2i\mathrm{K}'}(x - 2n\mathrm{K})}.$$

snx satisfaz a (6) e tem tambem o infinito $i\mathrm{K}'$, com o residuo $\frac{\theta\theta_1}{\eta_1\eta'}$; por isso temos

$$snx = \frac{\pi\theta\theta_1}{2\mathrm{K}\eta_1\eta'}\Sigma_n \frac{1}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2\mathrm{K}}[x-(2n+1)i\mathrm{K}']}.$$

cnx satisfaz a (7) e tambem tem o infinito $i\mathrm{K}'$, com o residuo $-\frac{i\theta\theta_1}{\eta_1\eta'}$; por isso temos

$$cnx = -\frac{\pi i\theta\theta_1}{2\mathrm{K}\eta_1\eta'}\Sigma_n \frac{1}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2\mathrm{K}}[x-(2n+1)i\mathrm{K}']}.$$

Estas formulas differem apenas pela notação d'aquellas a que chegaram Briot e Bouquet seguindo o seu methodo (*).

Agrupando os termos dous a dous, os que correspondem a valores de n eguaes e de signaes contrarios em (9) e a valores

(*) Théorie des functions elliptiques, pag. 293 e 296.

de $2n+1$ tambem eguaes e de signaes contrarios em (10) e (11), chegamos a

$$dnx = \frac{\pi\theta\eta_1}{2K'\theta_1\eta'}\left[\sec\frac{\pi x}{2iK'} + 4\cos\frac{\pi x}{2iK'}\sum_1^\infty {}_n \frac{q_1{}^n(q+q_1{}^{2n})}{1+2q^{2n}\cos\frac{\pi x}{iK'}+q^{4n}}\right],$$

$$snx = \frac{2\pi\theta\theta_1\sqrt{q}}{K\eta_1\eta'}\sum_1^\infty {}_n \frac{q^n(1+q^{2n+1})\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2K}}{1-2q^{2n+1}\cos\frac{\pi x}{K}+q^{4n+2}},$$

$$cnx = \frac{2\pi\theta\theta_1\sqrt{q}}{K\eta_1\eta'}\sum_1^\infty {}_n \frac{q^n(1-q^{2n+1})\cos\frac{\pi x}{2K}}{1-2q^{2n+1}\cos\frac{\pi x}{K}+q^{4n+2}}.$$

As egualdades

$$\frac{1+q^n}{1+2q^n\cos z+q^{2n}} = 1+\sum_1^\infty {}_m q^{mn}\left(1+\sum_1^m {}_\mu (-1)^\mu \cos\mu z\right),$$

e como

$$\frac{1-q^n}{1-2q^n\cos z+q^{2n}} = 1+\sum_1^\infty {}_m(-1)^m q^{mn}+\sum_1^\infty {}_m(-1)^{m+1}q^{mn}\sum_1^m {}_\mu(-1)^{\mu+1}\cos\mu z,$$

que facilmente se demonstram empregando o processo de divisão, permittem-nos dar áquellas funcções os seguintes desenvolvimentos

$$dnx = \frac{\pi\theta\eta_1}{2K'\theta_1\eta'}$$

$$\left\{\sec\frac{\pi x}{2iK'} + 4\cos\frac{\pi x}{2iK'}\sum_1^\infty {}_n q_1{}^n\left[1+\sum_1^\infty {}_m q_1{}^{mn}\left(1+\sum_1^\infty {}_\mu(-1)^\mu\cos\frac{\mu\pi x}{iK'}\right)\right]\right\}$$

$$snx = \frac{2\pi\theta\theta_1\sqrt{q}\sin\frac{\pi x}{2K}}{K\eta_1\eta'} \sum_{1}^{\infty}{}_n q^n \left[1 + \sum_{1}^{\infty}{}_n q^{m(2n+1)} \left(1 + \sum_{1}^{\infty}{}_\mu \cos\frac{\mu\pi x}{K}\right)\right]$$

$$cnx = \frac{2\pi\theta\theta_1\sqrt{q}\cos\frac{\pi x}{2K}}{K\ {}_1\eta'}$$

$$\sum_{1}^{\infty}{}_n q^n \left[1 + \sum_{1}^{\infty}{}_m (-1)^m q^{m(2n+1)} + \sum_{1}^{\infty}{}_m (-1)^{m+1} q^{m(2n+1)} \sum_{1}^{m}{}_\mu (-1)^{\mu+1} \cos\frac{\mu\pi x}{K}\right].$$

A funcção *dnx* ainda é susceptivel d'outro desenvolvimento que não vem complicado com imaginarios, como o desenvolvimento precedente; porque

$$dnx = -\frac{i\pi\theta\eta_1}{K'\theta\eta'} e^{\frac{\pi}{2K'}(x-iK')} \Sigma_n \frac{q_1{}^n}{q_1{}^{2n} e^{\frac{\pi}{K'}(x-iK')} - 1}$$

$$= \frac{\pi\theta\eta_1}{K'\theta\eta'} e^{\frac{\pi x}{2K'}} \Sigma_n \frac{q_1{}^n}{1 + q_1{}^{2n} e^{\frac{\pi x}{K'}}};$$

e como

$$\frac{q^n}{1 + q^{2n} e^z} = \sum_{1}^{\infty}{}_m (-1)^m q^{(2m+1)n} e^{mz},$$

será

$$dnx = \frac{\pi\theta\eta_1}{K'\theta\eta'} \Sigma_n \sum_{1}^{\infty}{}_m (-1)^m q_1{}^{n(2m+1)} e^{\frac{(2m+1)\pi x}{2K}}.$$

SUR LA TRANSFORMATION ISOGONAL DE W. ROBERTS

PAR

M. M. D'OCAGNE

La transformation isogonale de W. Roberts consiste, comme on sait, à faire correspondre au point M dont les coordonnés polaires sont ρ et ω, le point M_m dont les coordonnés ρ_m et ω_m sont données par

$$\rho_m = k\rho^m, \qquad \omega_m = m\omega,$$

ou, en d'autres termes, au point dont l'affixe est z celui dont l'affixe est kz^m.

Dans un petit Mémoire consacré à cette transformation (*), j'ai démontré que si n est la normale polaire au point M (c'est-à-dire la portion de la normale à la courbe que décrit le point M, comprise entre ce point et la perpendiculaire élevée par le pôle O à OM) r le rayon de courbure correspondant, n_m et r_m les mêmes éléments pour le point M_m, on a

$$(1) \qquad m\frac{n_m}{r_m} - \frac{n}{r} = m - 1.$$

Je vais ici faire connaître une interprétation géométrique de cette formule qui permet de déduire très aisément du centre de courbure en un point d'une courbe le centre de courbure au point correspondant de sa transformée.

(*) *Jornal de Sciencias Mathematicas*, 1885.

Remarquons d'abord que la formule (1) peut s'écrire

$$\frac{n-r}{r}\cdot\frac{r_m}{n_m-r_m}=m,$$

ou, en appelant C et C_m les centres de courbure répondant aux points M et M_m,

$$\frac{CN}{CM}\cdot\frac{C_mM_m}{C_mN_m}=m.$$

Des points C et C_m abaissons sur OM et sur OM_m les perpendiculaires CD et C_mD_m. Nous avons

$$(2)\qquad \frac{DO}{DM}\cdot\frac{D_mM_m}{D_mO}=m.$$

Soit H le point où la droite DD_m coupe MM_m. Le théorème des transversales, appliqué au triangle OMM_m, donne

$$\frac{DO\,.\,D_mM_m\,.\,HM}{DM\,.\,D_mO\,.\,HM_m}=1,$$

ou en tenant compte de (2),

$$\frac{HM}{HM_m}=\frac{1}{m}.$$

Telle est la relation géométrique que nous voulions obtenir. Elle donne lieu à l'énoncé suivant:

La droite qui joint les projections des centres de courbure C *et* C_m *respectivement sur les vecteurs* OM *et* OM_m *divise la droite* MM_m, *au point* H, *dans un rapport constant. Les distances du point* H *à* M *et à* M_m *sont proportionnelles à* 1 *et à* m.

En particulier, pour $m=-1$, auquel cas les courbes (M) et (M_m) sont (à la symétrie près par rapport à Ox) inverses l'une de l'autre, le point H est le milieu de MM_m.

NOVA DEMONSTRAÇÃO DE UMA FORMULA DE KIRCHKOFF (*)

(Extracto de uma carta dirigida a A. Gutzmer)

POR

M. LERCH

. . A formula de Kirchkoff que se refere á serie (**)

$$R(x, y, z) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{y^\alpha}{1 - xz^\alpha},$$

da qual deu ha pouco uma demonstração, (***) fundada na serie de Heine, pode ser deduzida da maneira seguinte:

Tomando na serie anterior os valores absolutos de x, y e z menores do que a unidade, vem evidentemente

$$R(x, y, z) = \Sigma x^\beta y^\alpha z^{\alpha\beta} \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, 2, \ldots)$$

Divida-se agora os termos d'esta serie absolutamente convergente em dois grupos, o primeiro comprehendendo aquelles em que $\alpha \geqq \beta$, e o segundo aquelles em que $\alpha < \beta$. No primeiro pode-se portanto pôr $\alpha < \mu + \nu$, $\beta = \mu$, e no segundo $\alpha = \mu$, $\beta = \mu + \nu + 1$, onde μ e ν representam quantidades quaesquer não negativas. Temos

$$R(x, y, z) = \Sigma x^\mu y^{\mu+\nu} z^{(\mu+\nu)\mu}$$
$$+ \Sigma x^{\mu+\nu+1} y^\mu z^{\mu(\mu+\nu+1)}$$

(*) O artigo que segue é traduzido do volume do *Zeitschrift für Mathematik und Physik* (Dresde) correspondente a 1888. (G. T.)

(**) *Sitzungsberichte der Königl. Academie d. Wissenschaften zu Berlin*, 1885, pag. 1007-1013.

(***) *Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas* publicado pelo Dr. F. Gomes Teixeira, vol. VIII, pag. 81-88.

ou

$$R(x, y, z) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{x^\mu y^\mu z^{\mu^2}}{1 - yz^\mu} + \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{x^{\mu+1} y^\mu z^{\mu(\mu+1)}}{1 - xz^\mu},$$

d'onde se tira finalmente a formula de Kirchkoff:

$$R(x, y, z) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1 - xyz^{2\mu}}{(1 - xz^\mu)(1 - yz^\mu)} x^\mu y^\mu z^{\mu^2},$$

que queriamos deduzir (*).

Praga, 15 de maio de 1888.

(*) O methodo empregado é tirado de uma carta do sr. Hermite ao sr. Fuchs *(Sur les valeurs asymptotiques de quelques fonctions numériques; Journal für die reine und augewandte Mathematik*, t. 99). (M. L.)

SOBRE O INTEGRAL $\int_0^\pi \cot(x-\alpha)\,dx$

POR

F. GOMES TEIXEIRA

O integral $\int_0^\pi \cot(x-\alpha)\,dx$ tem uma importancia consideravel na theoria da integração das funcções racionaes de $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$, como fez vêr o sr. Hermite no seu *Cours d'Analyse* (pag. 342 e seguintes), onde determinou este integral por um methodo engenhoso, e em seguida n'um artigo publicado no tom. II d'este jornal, onde o determinou por um methodo mais elementar. Aqui vamos apresentar um meio tambem elementar para obter o mesmo integral, fazendo-o depender do integral

$$\int_0^\pi \frac{f'(x)\,dx}{1+[f(x)]^2}.$$

Seja $\alpha = a + bi$, o que dá

$$\int \cot(x-a-bi) = \int \frac{\cos(x-a-bi)\,dx}{\operatorname{sen}(x-a-bi)}$$

$$= \int \frac{\cos(x-a)\cos ib + \operatorname{sen}(x-a)\operatorname{sen} ib}{\operatorname{sen}(x-a)\cos ib - \cos(x-a)\operatorname{sen} bi}\,dx$$

ou, por ser

$$\cos ib = \frac{e^{-b}+e^{b}}{2},$$

$$\operatorname{sen} ib = \frac{e^{-b}-e^{b}}{2i},$$

$$\int \cot(x-\alpha) = \int \frac{(e^{-b}+e^{b})\cos(x-a) - i(e^{-b}-e^{b})\operatorname{sen}(x-a)}{(e^{-b}+e^{t})\operatorname{sen}(x-a) + i(e^{-b}-e^{b})\cos(x-a)}\,dx.$$

Multipliquemos agora o numerador e denominador da ultima fracção por

$$(e^{-b}+e^{b})\operatorname{sen}(x-a) - i(e^{-b}-e^{b})\cos(x-a),$$

o que dá

$$\int \cot(x-\alpha)\,dx = \int \frac{2\operatorname{sen}(x-a)\,dx}{e^{-2b}+e^{2b}-\cos 2(x-a)}$$

$$-i\int \frac{(e^{-2b}-e^{2b})\,dx}{(e^{-b}+e^{b})^2\operatorname{sen}^2(x-a)+(e^{-b}-e^{b})^2\cos^2(x-a)}$$

$$= \frac{1}{2}\log\left[e^{-2b}+e^{2b}-2\cos 2(x-a)\right]$$

$$-i\int \frac{(e^{-b}+e^{b})(e^{b}-e^{-b})\dfrac{dx}{\cos^2(x-a)}}{(e^{-b}-e^{b})^2+(e^{-b}+e^{b})^2\operatorname{tang}^2(x-a)}$$

$$= \frac{1}{2}\log\left[e^{-2b}+e^{2b}-2\cos 2(x-a)\right]$$

$$-i\int \frac{d\left[\dfrac{e^{-b}+e^{b}}{e^{-b}-e^{b}}\operatorname{tang}(x-a)\right]}{1+\left[\dfrac{e^{-b}+e^{b}}{e^{-b}-e^{b}}\operatorname{tang}(x-a)\right]^2}.$$

Mas por ser

$$e^{-2b}+e^{2b}>2,$$

a funcção

$$\log\left[e^{-2b}+e^{2b}-2\cos 2(x-a)\right]$$

tem um ramo real com valores iguaes no ponto $x=0$ e $x=\pi$. Logo teremos

$$\int_0^\pi \cot(x-\alpha)\,dx=-i\int_0^\pi \frac{d\left[\dfrac{e^{-b}+e^b}{e^{-b}-e^b}\operatorname{tang}(x-a)\right]}{1+\left[\dfrac{e^{-b}+e^b}{e^{-b}+e^b}\operatorname{tang}(x-a)\right]^2}.$$

O integral que entra no segundo membro é da forma

$$\int_0^\pi \frac{f'(x)\,dx}{1+[f(x)]^2}.$$

e vamos por isso applicar-lhe o theorema

$$\int_0^\pi \frac{f'(x)\,dx}{1+[f(x)]^2}=\operatorname{Arc\,tang} f(\pi)-\operatorname{Arc\,tang} f(0)+(n-m)\pi,$$

onde n representa o numero de vezes em que a funcção $f(x)$ passa pelo infinito indo do positivo para o negativo, e m o numero de vezes que $f(x)$ passa pelo infinito indo do negativo para o positivo. Pondo

$$f(x)=\frac{e^{-b}+e^b}{e^{-b}-e^b}\operatorname{tang}(x-a),$$

e notando: 1.º que, quando x varia desde 0 até π, $\operatorname{tang}(x-a)$ passa uma só vez pelo infinito indo do positivo para o negativo; 2.º que a fracção

$$\frac{e^{-b}+e^b}{e^{-b}-e^b}$$

..

é positiva ou negativa segundo b é menor ou maior do que zero, conclue-se que $f(x)$ passa uma só vez pelo infinito, indo de positiva para negativa quando $b<0$, e de negativa para positiva quando é $b>0$.

Temos pois

$$\int_0^{\pi} \cot(x-\alpha)\,dx = i\pi$$

quando $b>0$, e

$$\int_0^{\pi} \cot(x-\alpha)\,dx = -i\pi$$

quando $b<0$.

BIBLIOGRAPHIA

Annaes do Observatorio Astronomico do Rio de Janeiro, t. III, 1888.

O assumpto do tomo III dos *Annaes do Observatorio Astronomico do Rio de Janeiro* é a passagem de Venus que teve logar em 6 de dezembro de 1882. Sabe-se que entre os methodos empregados para determinar a distancia da Terra ao Sol nenhum ha que possa competir com o methodo fundado nas observações das passagens de Venus pelo disco solar. Desde que este methodo foi apresentado por Halley em 1677, quatro foram as passagens que tiveram logar, e durante todas ellas se fizeram as observações necessarias para deduzir aquelle elemento fundamental da Astronomia.

Entre os paizes que mandaram expedições observar a passagem de 1882 occupa logar importante o Brasil, que mandou tres expedições observar este phenomeno, estabelecendo-se uma na ilha de S. Thomaz (Antilhas), outra em Puenta Arenas, no estreito de Magalhães, outra em Pernambuco.

O tomo III dos *Annaes do Observatorio* contém os relatorios d'estas missões, escriptos em lingua portugueza e franceza.

O primeiro Relatorio é da missão de S. Thomaz e foi escripto pelo sr. Barão de Teffé, chefe da expedição, director dos trabalhos hydrographicos do Brasil. Segue-se o Relatorio da commissão de Pernambuco, cujo chefe foi o sr. J. de Oliveira Lacaille, astronomo do Observatorio do Rio de Janeiro. Finalmente vem o Relatorio do sr. Cruls, o illustre director do Observatorio do Rio de Janeiro, que dirigiu a commissão de Puenta Arenas.

O methodo empregado pelos astronomos brazileiros para determinar a parallaxe solar foi o methodo dos contactos obtidos por projecção, e o methodo fundado na medida da distancia dos centros do Sol e de Venus obtida por um processo devido ao antigo director do Observatorio sr. E. Liais. Cada Relatorio traz as observações que n'este sentido se fizeram e as observações astronomicas e metereologicas que se fizeram para determinar outros elementos necessarios para a resolução do problema proposto, taes como determinação das coordenadas do logar, estudo da marcha dos chronometros, etc.

Além d'isso o Relatorio do sr. Barão de Teffé contém informações interessantes relativas ao paiz em que teve logar a observação, á viagem effectuada para lá chegar, etc.; e o Relatorio do sr. Cruls é acompanhado por umas interessantes *Notas de viagem* em que o sr. L. F. de Saldanha da Gama descreve as regiões visinhas do Estreito de Magalhães.

O volume publicado pelo Observatorio astronomico do Rio de Janeiro a respeito da ultima passagem de Venus dá a maior honra a este importante estabelecimento, e é de natureza a occupar um logar dos mais distinctos entre as publicações relativas a este phenomeno.

Terminaremos por dizer que a edição é primorosa e mostra quanto no Brasil está adiantada a arte typographica.

G. de Longchamps. — Algèbre, 2.ᵉ edition. — Paris, 1889. — Supplément. — Paris, 1890.

Na pag. 109 do t. VIII d'este Jornal publicámos já uma noticia sobre a primeira edição da Algebra do sr. Longchamps. A respeito da nova edição d'este livro excellente só temos hoje a dizer que o auctor fez n'elle algumas modificações para o tornar conforme aos programmas para a admissão na Escola Polytechnica de Paris, e o aperfeiçoou em alguns pontos. Assim a nova edição contém, além das doutrinas que entravam na primeira, uma theoria da convergencia das series, noções sobre os infinitamente pequenos e sobre as differenciaes, alguns principios de calculo integral, o theorema de Maclaurin para o desenvolvimento das funcções em serie e sua applicação ás funcções $(1+x)^m$ e^x, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\log(1+x)$, os primeiros principios do calculo das differenças, etc. Cada capitulo da obra é seguido por uma lista de exercicios muito bem escolhidos.

Do *Supplemento* foi tambem já dada uma noticia rapida na pag. 111 do t. VIII d'este jornal. A nova edição contém, como a antiga, a theoria da convergencia das series, os principios da