

34

UNIVERSIDADE DE COIMBRA

# REVISTA

DA

# FACULDADE DE CIÊNCIAS

VOL. VIII — N.º 1



COIMBRA

TIPOGRAFIA DA ATLÂNTIDA

1939-40

A  
9  
13  
2  
4

REVISTA DE CIENCIAS

REVISTA

REVISTA DE CIENCIAS

VOL. VII



REVISTA DE CIENCIAS

REVISTA DE CIENCIAS

REVISTA  
DA  
FACULDADE DE CIÊNCIAS



REVISTA

FACULDADE DE CIÊNCIAS

UNIVERSIDADE DE COIMBRA

---

**REVISTA**  
DA  
**FACULDADE DE CIÊNCIAS**

---

VOL. VIII



COIMBRA  
TIPOGRAFIA DA ATLÂNTIDA

1939

UNIVERSIDADE DE COIMBRA

REVISTA

FACULDADE DE CIENCIAS

VOL. VIII



COIMBRA

IMPRESSÃO DE ALVARO

1932

## Dimensões, forma e posição dos caninos inferiores do hipopótamo.

No Museu Zoológico da Universidade de Coimbra conserva-se um par de dentes de hipopótamo que surpreendem já pela sua dimensão, mas sobretudo pela sua forma, por serem torcidos à maneira dum saca-rolhas. Estes dentes — trata-se de dois caninos da maxila inferior, que formavam em vida provavelmente um par — foram comprados em Fevereiro de 1906, juntamente com dois incisivos internos da maxila inferior. Os quatro dentes foram então montados na parte anterior duma maxila inferior, bastante habilmente modelada em madeira, e estão assim expostos no Museu. Têm o número de catálogo 50 d.

Dentes de dimensão e forma anormais são na verdade há muito conhecidos em determinados Mamíferos. Trata-se sobretudo de dentes de raiz aberta, isto é de crescimento perpétuo. Os exemplos mais conhecidos são os dentes incisivos dos Roedores, e não haverá Museu Zoológico de importância que não disponha dum crânio de coelho com dentes roedores anormais. No hipopótamo um tal caso não me era conhecido até então, de modo que os dentes do Museu de Coimbra me interessaram muito, considerando eu nessa altura o caso como único. Formei o propósito de publicar uma reprodução e uma curta notícia a este respeito. Surgiram, porém, dúvidas logo de início sobre se teriam dado ou não aos dentes a posição exacta na maxila artificial. Para poder decidir isto, vi-me levado a ocupar-me um pouco mais de perto com a forma e posição de caninos inferiores normais do hipopótamo, para o que o material relativamente rico armazenado nos museus portugueses oferecia oportunidade excelente. Além disso procurei casos paralelos na bibliografia.

O resultado foi chegar ao conhecimento de que dentes anormais de hipopótamo não são, de modo algum, tão raros como

eu julgava anteriormente e que existem mesmo casos paralelos àquela particularidade de forma que apresentam os exemplares do Museu de Coimbra. E assim fui encontrar um dente isolado duma forma muito semelhante no Museu da Sociedade de Geografia de Lisboa e mais um outro — trata-se dum dente fóssil — no Museu Mineralógico e Geológico da Universidade de Coimbra. Encontrei finalmente também na bibliografia citado e ilustrado um caso paralelo.

Verifiquei simultâneamente que também anormalidades de outra espécie não são raras, por exemplo dentes de forma circular ou anomalias na direcção dos dentes, de maneira que a curta notícia projectada a princípio tomou as proporções duma pequena monografia. Refiro todos estes casos de caninos anormais de hipopótamo num trabalho à parte, a publicar na «Zeitschrift für Anatomie und Entwicklungsgeschichte». Aqui, pelo contrário, desejo expôr os resultados dos meus estudos relativamente aos dentes normais.

Visto ter chegado no exame dos dentes anormais ao resultado de que a anormalidade pode consistir primeiramente no tamanho do dente, em segundo lugar na sua forma, em terceiro lugar na sua direcção, tive que levar a efeito, claro está, também o estudo dos dentes normais sôbre estes três aspectos. Começo, pois, pelas dimensões dos dentes.

*Dimensão.* Aqui interessava sobretudo a questão: Qual o máximo do comprimento de dentes, normais quanto a forma e posição? Onde se encontra, dito doutra maneira, o limite entre dentes «muito grandes» e dentes «anormalmente grandes»?

Para poder responder a esta questão medi em todos os crânios à minha disposição o comprimento dos caninos inferiores, a saber na aresta anterior do dente, desde o bordo alveolar até à ponta do dente. A tabela 1 reproduz na coluna 4 e 5 os resultados da medição.

Na tabela os crânios estão dispostos e numerados segundo o comprimento basal decrescente. Por «comprimento basal» dum crânio entende-se o comprimento a partir do bordo anterior do foramen occipitale magnum até à linha transversal que liga os pontos mais anteriores dos intermaxillaria. Êste comprimento basal parece-me ser melhor medida do tamanho dum crânio de hipopótamo do que o comprimento dorsal, desde a

TABELA 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
N.º	abrevia- tura adoptada	comprim. do crânio	comprim. do canino		comp. can. comp. crân.	corte transversal	100√corte tr. comp. crân.	comp. can. √corte tr.	A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>2</sub> -A <sub>1</sub>	τ		σ		δ		β		
			dir.	esq.								dir.	esq.	dir.	esq.	dir.	esq.			
		cm.	cm.	cm.		cm. <sup>2</sup>			cm.	cm.	cm.									
1	Geo. 1	73	34	34 <sup>1</sup> / <sub>2</sub>	0,47	30,84	7,6	6,1	42,5	37	-5,5	87°	81°	94°	94°	32°	25°	35°	37°	
2	Col. 6	72	26	25	0,36	22,07	6,5	5,4	38	40	+2	93°	93°	102°	102°	40°	43°	40°	37°	
3	Geo. 19	70 <sup>1</sup> / <sub>2</sub>	27	27 <sup>1</sup> / <sub>2</sub>	0,39	26,35	7,3	5,3	34,5	42,5	+8	103°	97°	75°	78°	29°	29°	63°	56°	
4	Geo. 4	70	34	31	0,46	29,43	7,8	6,0	38	42	+4	96°	93°	90°	93°	48°	36°	36°	43°	
5	A. 1	69	27 <sup>1</sup> / <sub>2</sub>	26	0,39	17,94	6,1	6,3	37,5	40	+2,5	90°	98°	79°	69°	32°	30°	29°	46°	
6	Col. 10	68 <sup>1</sup> / <sub>2</sub>	26	26	0,38	23,32	7,1	5,4	35,5	43	+7,5	100°	100°	89°	90°	29°	34°	49°	52°	
7	Z. 50 a.	68	19	19 <sup>1</sup> / <sub>2</sub>	0,28	21,73	6,9	4,1	33,5	38,5	+5	92°	104°	83°	82°	23°	32°	49°	61°	
8	Col. 2	(68)	28	28	0,41	25,44	7,4	5,6	38	35	-3	85°	95°	86°	87°	19°	16°	37°	32°	
9	Geo. 24	(68)	23	23 <sup>1</sup> / <sub>2</sub>	0,34	19,18	6,4	5,3	36	40	+4	94°	98°	87°	85°	27°	25°	49°	48°	
10	Boc. c.	67 <sup>1</sup> / <sub>2</sub>	26 <sup>1</sup> / <sub>2</sub>	26 <sup>1</sup> / <sub>2</sub>	0,39	21,43	6,9	5,8	38	38,5	+0,5	92°	87°	96°	98°	37°	35°	36°	30°	
11	Col. 1	67 <sup>1</sup> / <sub>2</sub>	25	23 <sup>1</sup> / <sub>2</sub>	0,36	25,55	7,5	4,8	34	36	+2	91°	96°	87°	89°	23°	33°	48°	50°	
12	Boc. g	67	28	27	0,41	28,26	7,9	5,2	36	37	+1	92°	90°	76°	83°	27°	31°	63°	60°	
13	Boc. d	67	33 <sup>1</sup> / <sub>2</sub>	30 <sup>1</sup> / <sub>2</sub>	0,48	31,52	8,4	5,7	36	39	+3	94°	93°	94°	95°	37°	40°	50°	31°	
14	Geo. 10	67	28 <sup>1</sup> / <sub>2</sub>	30 <sup>1</sup> / <sub>2</sub>	0,44	26,68	7,7	5,7	36,5	40	+3,5	94°	96°	95°	93°	35°	40°	37°	38°	
15	Geo. 13	66 <sup>1</sup> / <sub>2</sub>	25 <sup>1</sup> / <sub>2</sub>	24 <sup>1</sup> / <sub>2</sub>	0,38	26,72	7,8	4,8	37,5	41	+3,5	103°	88°	85°	90°	24°	15°	45°	38°	
16	Geo. 5	(66)	27	25	0,40	19,19	6,6	5,9	34	33,5	-0,5	87°	93°	84°	87°	38°	45°	58°	42°	
17	Geo. 21	65 <sup>1</sup> / <sub>2</sub>	28 <sup>1</sup> / <sub>2</sub>	29	0,44	25,66	7,7	5,7	36,5	38,5	+2	96°	91°	95°	96°	42°	27°	23°	36°	
18	A. 3	65 <sup>1</sup> / <sub>2</sub>	20 <sup>1</sup> / <sub>2</sub>	20	0,31	17,09	6,3	4,9	34	36	+2	90°	96°	85°	85°	22°	21°	55°	54°	
19	Col. 3	65	19	19	0,29	13,27	5,6	5,2	30	35	+5	103°	96°	84°	87°	36°	33°	52°	52°	
20	Geo. 23	(65)	26 <sup>1</sup> / <sub>2</sub>	26	0,40	24,55	7,6	5,3	34	35	+1	92°	91°	86°	87°	36°	38°	42°	37°	
21	Boc. f	64	21 <sup>1</sup> / <sub>2</sub>	23 <sup>1</sup> / <sub>2</sub>	0,35	22,26	7,4	4,8	32	37	+5	102°	95°	84°	86°	26°	27°	59°	52°	
22	Z. 50 b	64	19	19 <sup>1</sup> / <sub>2</sub>	0,30	21,00	7,2	4,2	33,5	38	+4,5	96°	98°	86°	87°	26°	28°	38°	39°	
23	Geo. 12	63	12	12	0,19	9,10	4,8	4,0	33	33	0	91°	90°	89°	92°	33°	29°	24°	35°	
24	Col. 9	63	22	24	0,37	19,15	7,0	5,3	34,5	39,5	+5	98°	97°	96°	99°	29°	29°	54°	54°	
25	Geo. 11	63	23	23	0,37	21,37	7,3	5,0	31,5	34,5	+3	94°	93°	91°	92°	22°	28°	52°	53°	
26	Geo. 18	62 <sup>1</sup> / <sub>2</sub>	17	17 <sup>1</sup> / <sub>2</sub>	0,28	12,78	5,7	4,8	32	34,5	+2,5	98°	93°	88°	91°	27°	30°	45°	41°	
27	A. 2	62	18	18 <sup>1</sup> / <sub>2</sub>	0,29	16,18	6,5	4,5	34,5	36	+1,5	92°	95°	95°	92°	26°	24°	26°	30°	
28	Geo. 7	(61)	15	15	0,25	9,96	5,2	4,7	30,5	30	-0,5	89°	93°	89°	86°	44°	52°	49°	49°	
29	Geo. 3	61	26	25	0,42	25,11	8,2	5,1	31	37	+6	99°	99°	103°	103°	46°	49°	23°	26°	
30	Geo. 6	60	17	17	0,28	14,68	6,4	4,4	30	34,5	+4,5	100°	98°	78°	80°	24°	24°	50°	44°	
31	Boc. i	60	19 <sup>1</sup> / <sub>2</sub>	20	0,33	18,26	7,1	4,6	32,5	35	+2,5	94°	94°	86°	88°	22°	31°	49°	41°	
32	A. 5	59	17	18	0,30	11,24	5,7	5,2	25	32	+7	100°	107°	87°	93°	31°	34°	59°	50°	
33	Geo. 2	59	20	20	0,34	15,64	6,7	5,1	30	31	+1	92°	91°	87°	88°	33°	30°	46°	57°	
34	Geo. 16	59	23	23	0,39	22,33	8,0	4,9	30,5	38	+7,5	102°	102°	87°	84°	21°	22°	55°	54°	
35	Boc. b	59	19 <sup>1</sup> / <sub>2</sub>	19	0,33	16,17	6,8	4,8	30,5	36	-5,5	102°	99°	79°	81°	25°	25°	50°	48°	
36	Geo. 14	58	14 <sup>1</sup> / <sub>2</sub>	15	0,25	11,61	5,9	4,3	33	35	+2	99°	92°	94°	93°	38°	39°	—	—	
37	Z. 50 c.	58	18	19	0,32	13,53	6,3	5,0	31,5	34	+2,5	96°	93°	95°	95°	34°	32°	52°	49°	
38	Geo. 9	(58)	12 <sup>1</sup> / <sub>2</sub>	12 <sup>1</sup> / <sub>2</sub>	0,22	10,09	5,5	3,9	29,5	29,5	0	83°	100°	91°	91°	22°	32°	43°	45°	
39	Geo. 8	57 <sup>1</sup> / <sub>2</sub>	17	16 <sup>1</sup> / <sub>2</sub>	0,29	13,40	5,8	4,6	29,5	33	+3,5	98°	96°	81°	83°	34°	37°	48°	54°	
40	Col. 7	(57)	13	13	0,23	7,83	4,9	4,6	28,5	32	+3,5	99°	102°	88°	85°	27°	27°	44°	50°	
41	Col. 8	57	16 <sup>1</sup> / <sub>2</sub>	16	0,29	10,10	5,6	5,1	30,5	31,5	+1	86°	97°	90°	88°	19°	21°	39°	42°	
42	Boc. k	57	11 <sup>1</sup> / <sub>2</sub>	12 <sup>1</sup> / <sub>2</sub>	0,21	11,86	6,0	3,5	29,5	35,5	+6	106°	106°	82°	88°	21°	28°	42°	38°	
43	Boc. a	53 <sup>1</sup> / <sub>2</sub>	10	11	0,20	5,95	4,6	4,3	25,5	31,5	+6	108°	105°	79°	79°	41°	41°	57°	53°	
44	A. 4	49	14	12 <sup>1</sup> / <sub>2</sub>	0,27	7,84	5,7	4,7	28,5	32,5	+4	100°	104°	101°	102°	32°	33°	29°	34°	
45	Geo. 15	43	10 <sup>1</sup> / <sub>2</sub>	—	0,24	5,38	5,4	4,5	19	—	—	97°	—	91°	—	27°	—	—	—	



crista occipitalis até os pontos mais anteriores dos nasalia, pois que o contôrno anterior destes últimos é variável. Quando o comprimento do crânio se indica na tabela entre parêntesis, então quer isto dizer que este comprimento não pôde ser medido directamente, mas teve que ser calculado pelo comprimento dorsal, comprimento da maxila inferior e algumas outras medidas de comparação.

Os crânios pertencem a vários museus portugueses: Museu Zoológico de Coimbra (abreviado: Z.), Instituto Antropológico de Coimbra (A.), Museu Bocage de Lisboa (Boc.), Colecção da Agência Geral das Colónias, actualmente conservada no Museu Bocage (Col.) e Museu da Sociedade de Geografia de Lisboa (Geo.) (1).

A tabela mostra que como máximo do comprimento dos caninos se achou o valor de 34,5 cm. (crânio N.º 1) e que o comprimento de 30 cm. é ultrapassado apenas por três crânios ao todo. Caninos muito maiores do que os do crânio N.º 1 mal são de esperar, pelo que respeita a dentes de forma e posição normal, visto que o crânio em questão pertenceu seguramente a um animal muito velho (suturas na maioria fechadas) e representa também quanto ao comprimento cranial o maior de todos os crânios de hipopótamo que até hoje tenho encontrado. Contudo, num material ainda maior, temos que contar com a possibilidade de o nosso «record» vir a ser batido por um pouco. Mas não ficaremos muito longe da realidade considerando 36 cm. o máximo absoluto do comprimento de caninos normais. Tudo o que fôr além disto, teremos de designá-lo como «anormalmente grande», e desejaria mencionar aqui que o aumento de dimensão pode ser muito considerável em dentes de forma anormal. Assim, verifica-se nos dois dentes do Museu Zoológico de Coimbra um comprimento da parte de fora do alvéolo de 65 cm. e 80 cm., e estes números não representam ainda o máximo. Em breve voltarei a este assunto.

Os dentes mais pequenos por mim medidos tinham um com-

---

(1) Pela amável permissão de estudar os crânios nos respectivos museus e pelo grande auxílio recebido nesta ocasião, queria exprimir os meus melhores agradecimentos aos Srs. Dr. EUSÉBIO TAMAGNINI, Dr. A. RICARDO JORGE e Coronel LOPES GALVÃO.

primento (parte livre do dente) de respectivamente 10 e 11 cm. (N.º 43), restringindo-nos a crânios que temos de designar como «adultos», posto que ainda não completamente desenvolvidos. Os dentes dum animal acentuadamente jovem do Museu Bocage (comprimento do crânio 36,5 cm.) apresentam comprimentos de 8-9 cm.

Entre o comprimento do dente canino inferior direito e esquerdo existe uma concordância relativamente grande. Como diferença máxima encontrei, em 44 crânios com caninos normais, duas vezes a de 3 cm. (N.º 4 e 13); trata-se aliás de dentes muito grandes. A diferença média entre direito e esquerdo era no meu material de  $0,77 \pm 0,12$  cm. (1) (desvio-padrão = 0,8 cm.).

Em crânios com caninos inferiores grandes, vistos de frente, a impressão geral pode tornar-se muito diferente da dum crânio com caninos pequenos, por os caninos grandes se erguerem muito mais para cima ao longo dos maxillaria. O maxilar mostra, acima dos alvéolos dos caninos superiores, uma giba dorsal. Ora, em crânios com caninos pequenos as pontas destes ficam bastante abaixo do nível das gibas maxilares, enquanto que as pontas de caninos grandes se encontram ao mesmo nível das gibas maxilares ou até as ultrapassam consideravelmente, por vezes em 4 cm. É verdade que esta diferença não depende unicamente do comprimento variável dos caninos inferiores, mas essencialmente também da posição baixa ou alta dos seus alvéolos. A este respeito existem, aliás, diferenças bastante notáveis. Se medirmos a distância vertical entre o bordo anterior do alvéolo e o plano da mesa, obtemos valores que oscilam entre 3 cm. e 11 cm. Estes valores são independentes da dimensão do crânio e do comprimento do canino, como se vê pelo seguinte: o valor médio é nos 15 crânios com caninos maiores (de mais de 25 cm.) 7,2 cm., nos 15 crânios com os caninos mais pequenos (menos de 18,5 cm.), 7,3 cm.

Em todos os caninos que puderam ser tirados dos alvéolos, verifiquei também a relação entre o comprimento da parte livre e o da parte alveolar. A tabela 2 mostra o resultado destas medições. Vê-se que dentes grandes apresentam naturalmente comprimentos maiores tanto na parte livre (coluna 3) como na

---

(1) Todos os erros calculados são erros médios.

parte alveolar (coluna 4); mas verifica-se também que, por outro lado, não existe de modo algum um valor de relação de qualquer maneira fixo entre estas duas partes, oscilando este valor entre 0,51:1 e 0,85:1 (coluna 5). Vê-se mais que a relação

TABELA 2

1	2	3	4	5	6	7	8
N.º	comprimento do dente			p. livre p. alveol.	r	comp. dent. r	ε
	total	parte livre	parte alveolar				
	cm.	cm.	cm.	cm.	cm.		
1	80	34,5	45,5	0,76	21,8	3,7	209°
2	79	33	46	0,72	22,2	3,6	205°
3	73	30,5	42,5	0,72	21	3,5	200°
4	67	27,5	39,5	0,70	20,6	3,3	184°
5	66,5	27	39,5	0,68	20,3	3,3	186°
6	64,5	24	40,5	0,59	19,4	3,3	192°
7	64	29	35	0,83	19,6	3,3	186°
8	63	25,5	37,5	0,68	20	3,2	180°
9	62,5	28,5	34	0,84	19,8	3,2	181°
10	62,5	24,5	38	0,64	19,9	3,2	182°
11	61,5	23,5	38	0,62	20,5	3,0	171°
12	59,5	23,5	36	0,66	18,3	3,3	183°
13	59,5	24	35,5	0,68	19,3	3,1	175°
14	58	22	36	0,66	18,9	3,1	174°
15	54,5	25	29,5	0,85	18,3	3,0	172°
16	54	19,5	34,5	0,56	18,3	3,0	171°
17	50	17	33	0,52	16,7	3,0	168°
18	49	19	30	0,63	16,6	3,0	167°
19	48	17	31	0,55	14,7	3,3	180°
20	41	17	24	0,71	14,5	2,8	157°
21	40	16,5	23,5	0,70	14,3	2,8	158°
22	35,5	12	23,5	0,51	11,8	3,0	170°
23	35,5	12	23,5	0,51	11,8	3,0	170°
24	34,5	12,5	22	0,57	11,6	3,0	168°
25	34	12	22	0,55	11,8	2,9	171°

entre a parte alveolar e a parte livre é, em geral, tanto menor quanto maior é o dente. Ou, dito doutra maneira: do aumento de dimensão dos caninos participa a parte livre do dente de maneira predominante. Se dividirmos os 25 dentes, conforme o comprimento total, em 3 grupos (I = N.º 1-8, II = N.º 9-17,

aos da tabela 1, em três grupos (grupo I «crânios grandes», N.º 1-15; grupo II «crânios de dimensão média», N.º 16-30; grupo III «crânios pequenos», N.º 31-45), então veremos que 14 crânios do grupo I possuem caninos superiores a 20 cm. e só 1 caninos inferiores, no grupo II há 8 crânios com caninos dum comprimento superior a 20 cm., 7 de inferior, no grupo III só 1 de superior, 14 de inferior. Mas, como já disse, uma correlação, mesmo de rigor aproximado, não existe. Assim se encontra, por exemplo, no grupo médio um crânio (N.º 23) que apresenta um comprimento dos dentes de apenas 12 cm. e está assim só pouco acima do mínimo absoluto de 10,5 cm.; e encontramos doutro lado no grupo dos crânios pequenos um com a dimensão dental respeitável de 23 cm.

Não nos devemos admirar desta correlação deficiente, atendendo à não-uniformidade do material em dois sentidos. Trata-se, em primeiro lugar, nos nossos crânios de animais de proveniência diferente; e infelizmente só na minoria se pôde verificar a proveniência. A maioria dos crânios deriva ou de Moçambique, ou de Angola; e exactamente em Angola distingue-se na Sistemática moderna uma espécie particular, *Hippopotamus constrictus* MILLER, enquanto os cavalos marinhos de Angola pertencem à espécie primitiva *Hippopotamus amphibius* L. Em segundo lugar, o material também não é uniforme, por se encontrarem nêle juntos animais masculinos e femininos; e indica-se frequentemente como característico de animais femininos a posse de caninos inferiores menores. É infelizmente também caso excepcional encontrar-se num crânio de hipopótamo a indicação do sexo.

Se calcularmos para os nossos 45 crânios a relação entre comprimento dos caninos e comprimento do crânio, então obteremos valores que oscilam entre 0,19 e 0,48 (cf. tabela 1, coluna 6). Quer dizer isto que o comprimento dos caninos pode importar em  $1/5$  até  $1/2$  do comprimento do crânio, aproximadamente. É claro que obteríamos um valor mínimo ainda menor, se tomassemos em consideração os crânios de animais muito jovens. O mínimo encontrado por mim não pertence, porém, a um tal crânio jovem, mas ao N.º 23, que possui o comprimento considerável de 63 cm., encontrando-se o máximo num crânio de 67 cm. (N.º 13). Repartindo mais uma vez os 45 crânios estudados em três grupos e calculando para cada grupo a média, obteremos  $M_1 = 0,40 \pm 0,01$ ,  $M_2 = 0,33 \pm 0,02$ ,  $M_3 = 0,28 \pm 0,01$ .

Visto em conjunto observa-se que também existe uma correlação entre o comprimento *relativo* dos caninos e o comprimento do crânio, correlação esta, é verdade, mais uma vez pouco rigorosa. Os animais grandes têm portanto em geral não só os caninos maiores em sentido absoluto, mas também caninos relativamente maiores do que animais menores.

Falámos até agora só do *comprimento* dos caninos. Que há quanto à *espessura*?

Como medida da espessura poderíamos aproveitar o perímetro. Mas, visto que a forma do corte transversal dos dentes varia, prefiro estabelecer a comparação com base na área do corte transversal ao nível do bordo do alvéolo. Êste valor pode ser calculado da maneira seguinte: Tira-se primeiramente a forma do dente imediatamente por cima do bordo alveolar, por meio dum arame de cobre de 1 mm. de calibre. A forma passa-se a uma fôlha rectangular de cartão. A fôlha pesa-se e verifica-se além disso a sua área total. Agora recorta-se o corte transversal do dente no cartão, pesa-se o recorte e calcula-se assim a sua área.

A tabela 1 reproduz na coluna 7 os valores assim obtidos nos 45 caninos (foi usado sempre o canino direito). Vemos oscilar a área do corte transversal entre 5,38 e 31,52 cm<sup>2</sup>. Também aqui se verifica, como é natural, que um crânio maior tem em geral também caninos mais espessos do que um crânio menor. Visto, porém, haver também crânios grandes com caninos relativamente delgados e crânios pequenos com caninos relativamente espessos, não se pode falar mais uma vez duma correlação rigorosa.

Se calcularmos a proporção  $\frac{100 \sqrt{\text{corte transversal}}}{\text{comprimento do crânio}}$ , obtere-

mos valores entre 4,6 e 8,4 (cf. tabela 1, col. 8); quer dizer: a raiz quadrada do corte transversal do canino importa em 4,6% a 8,4% do comprimento do crânio. O valor médio é de  $6,64 \pm 0,14$ . Dos 15 crânios maiores estão 12 acima e 3 abaixo do valor médio; dos 15 crânios médios 7 acima, 8 abaixo; dos 15 crânios mais pequenos 4 acima, 11 abaixo. Os valores médios dos três grupos são:  $M_1 = 7,29 \pm 0,16$ ,  $M_2 = 6,63 \pm 0,24$ ,  $M_3 = 6,00 \pm 0,22$ . Também aqui resulta portanto o facto de crânios maiores terem em geral os caninos não só mais espessos absolutamente, mas

também mais espessos relativamente. Mas isto é uma regra com muitas excepções. Encontramos por exemplo num crânio relativamente pequeno, de 59 cm. de comprimento basal (N.º 34), o valor elevado de 8,0, mas num crânio de 69 cm. (N.º 5) apenas 6,1.

Como se relaciona agora o comprimento com a espessura dos caninos? Se estabelecermos a proporção entre o comprimento do canino e a raiz quadrada do corte transversal, obteremos os valores da tabela 1, coluna 9. Vemos que os caninos são no mínimo 3,5 vezes mais compridos do que a raiz do seu corte transversal ao nível do bordo alveolar, no máximo 6,3 vezes. Verifica-se, além disso, que caninos mais compridos apresentam em geral valores maiores do que os mais curtos, isto é, que eles são relativamente mais delgados. Se reunirmos mais uma vez os 15 caninos mais compridos, os 15 médios e os 15 mais curtos, então os valores médios destes três grupos serão respectivamente  $5,43 \pm 0,14$ ,  $4,92 \pm 0,13$  e  $4,61 \pm 0,12$ . Em sentido absoluto, caninos mais compridos tem naturalmente em geral um corte transversal maior do que os mais curtos.

Dos resultados do meu exame de dentes anormalmente compridos desejava apenas mencionar aqui que nêles aumenta também a espessura, o que era de esperar; mas que o aumento de espessura não é de modo algum paralelo ao aumento de comprimento, o que igualmente era de admitir *a priori*: o limitado espaço dentro da maxila inferior torna o caso compreensível sem mais. Para dar alguns números, queria referir que dos dois dentes isolados 50 d do Museu Zoológico de Coimbra o direito tem uma área do corte transversal de 35,97 cm.<sup>2</sup>, o esquerdo de 33,22 cm.<sup>2</sup>, e que um dente anormalmente comprido e igualmente em forma de saca-rolhas do Museu da Sociedade de Geografia apresenta um corte transversal de 34,33 cm.<sup>2</sup>. Doutro lado encontrei também dentes de forma e comprimento anormais que não ultrapassam de modo algum o valor normal quanto à área do corte transversal.

*Forma.* Um canino de forma normal causa à primeira vista a impressão dum arco de círculo bastante regular. Para poder dizer em que medida isto corresponde à realidade, desenhei sobre papel o contôrno de todos os caninos que podiam ser tirados dos alvéolos. Calculei depois o raio, segundo a fórmula  $AD^2 = CD \cdot 2r$  (cf. fig. 2), marquei, com o seu auxílio, o

centro do círculo ideal correspondente, tracei o arco circular e comparei este último com a curvatura do contorno do dente. Surpreende a exactidão com que o contorno anterior corresponde ao arco circular ideal. Doutro lado é também evidente que só assim é possível tirar facilmente os caninos dos alvéolos numa percentagem tão grande. A circunferência representa a linha de grau de curvatura constante, e só assim é que se torna possível, dado o corte transversal dum dente adulto não aumentar na direcção da raiz, a extracção sem dificuldade, facilitando igualmente, está claro, também o natural crescimento do dente para fora.

A tabela 2 indica na coluna 6 a dimensão do raio para os 25 dentes assim examinados. Vemos que o raio oscila entre 11,6 e 22,2 cm. e que é proporcional ao comprimento dos dentes, pelo menos em geral. Dentes menores têm pois um raio menor, quer dizer, uma curvatura mais acentuada, do que dentes grandes. A relação entre o comprimento do dente e o raio (coluna 7) está entre 2,8 e 3,7, correspondendo também aqui os valores maiores aos dentes maiores. A média desta relação é  $M=3,2\pm 0,05$ , com um desvio-padrão de 0,23. Para os primeiros 8 dentes resulta  $M_1=3,4\pm 0,06$ , para os 9 dentes do grupo médio  $M_2=3,1\pm 0,04$ , para os 8 últimos dentes  $M_3=3,0\pm 0,05$ .

Verifiquei também para todos os restantes dentes, isto é, os que se não podem tirar dos alvéolos, a dimensão do raio. Visto nestes casos o cálculo se basear numa parte do dente inferior à metade do comprimento total, os valores obtidos têm de ser menos exactos, de forma que prefiro renunciar à sua reprodução. Encontrei aqui raios ainda um pouco maiores, isto é dentes menos curvados, do que no material restrito dos 25 dentes atrás citados. O máximo é um raio de 23,8 cm. Encontrei, por outro lado, num crânio ainda muito jovem do Museu Bocage, um mínimo de 7,0 cm.

Queria mencionar que também investiguei se existe uma relação constante entre o comprimento da mandíbula e o raio

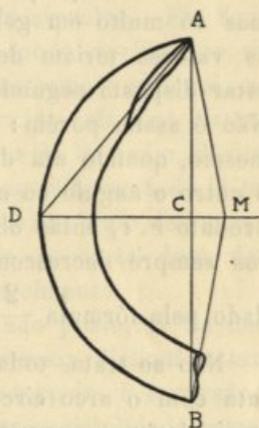


FIG. 2

do dente. Não é este o caso de modo algum. Encontro, por exemplo, numa mandíbula relativamente pequena dum comprimento máximo de 48,5 cm. um raio de 18,3 cm. e doutro lado numa mandíbula consideravelmente maior (comprimento máximo 55,7 cm.) um raio apenas de 11,8 cm.; no primeiro caso resultaria a proporção de 2,7, no segundo a de 4,7.

O ângulo ao centro ( $\varepsilon$ ) que pertence ao arco de círculo dos dentes isolados, isto é, o ângulo AMB da figura 2, oscila entre 157° e 209°. Vê-se na tabela 2, coluna 8, que os ângulos aumentam proporcionalmente ao comprimento dos dentes, mas só muito em geral. Se existisse um paralelismo exacto, os valores teriam de diminuir continuamente, visto a tabela estar disposta segundo o comprimento decrescente dos dentes. Não é assim porém: o comprimento de dois dentes pode ser o mesmo, quando um deles apresenta o raio um pouco maior, e o outro o ângulo ao centro um pouco maior. Se calcularmos o produto  $r \cdot \varepsilon$ , então obteremos naturalmente uma série de números sempre decrescentes, pois que o comprimento do dente é dado pela fórmula  $\frac{2r \cdot \pi \cdot \varepsilon}{360^\circ}$ .

Não se trata, todavia, nos dentes duma concordância absoluta com o arco circular ideal. Do facto de dentes menores (mais jovens) apresentarem uma curvatura maior do que os dentes grandes (mais velhos), pode-se concluir já teòricamente que a curvatura da metade apical dum dente tem que ser um pouco maior do que a da metade basal, pois que a parte apical se desenvolveu mais cedo do que a parte basal. Se verificarmos nos dentes isolados, separadamente, o raio da metade apical e o da metade basal, então obteremos, com efeito, para a primeira valores menores em alguns milímetros do que os da metade basal. É de esperar que esta diferença se note mais nos dentes jovens do que nos dentes de animais completamente adultos; deveríamos até esperar nestes últimos uma curvatura absolutamente uniforme em tóda a extensão do dente. Tenho, porém, que notar que mesmo nos maiores dos dentes estudados por mim, provenientes, a julgar pelo comprimento e aspecto de todo o crânio, seguramente de animais velhos, se verificou sempre uma curvatura um pouco maior da metade apical.

Ao tratar da forma do dente e do cálculo do seu raio de curvatura tomámos em consideração apenas o bordo anterior

convexo. Um estudo particular do bordo posterior côncavo é supérfluo, pois que este decorre quasi exactamente paralelo ao bordo anterior. Isto vale sobretudo para dentes adultos. Se medirmos nêles com uma craveira — a exactidão dos desenhos de contôrno não é bastante para este fim — a distância entre o bordo anterior e o posterior, dum lado à altura da raiz, doutro lado à altura do bordo alveolar ou ainda mais na direcção da ponta (mas, claro, ainda abaixo da região da face de desgaste), então obteremos valores ou absolutamente iguais ou que divergem apenas em 1-2 mm. O valor maior pode pertencer aqui, tanto ao nível da raiz como ao do bordo alveolar. Em dentes mais jovens (dentes menores), porém, pode verificar-se uma divergência mais acentuada. No caso extremo verifiquei, num dente de 50 cm. de comprimento, à altura da raiz uma distância entre o bordo anterior e o bordo posterior de 70,5 mm., à altura do bordo alveolar de 59,5 mm., isto é, uma diferença de 11 mm. Assim pode-se às vezes concluir já da forma dum dente, independentemente do seu comprimento, se se trata dum dente adulto ou dum dente jovem ainda em crescimento.

Na região da face de desgaste ao lado posterior do dente a distância entre bordo anterior e posterior diminui naturalmente em grau considerável. No que respeita à extensão da face de desgaste, temos que constatar uma variabilidade extraordinária. Há dentes com face de desgaste curta e dentes em que esta face desce quasi até ao bordo posterior do alvéolo, nos quais, portanto, foi desgastado pelo antagonista todo o bordo posterior da parte livre do dente, quer dizer, da parte que sai da gengiva. Alguns números esclarecerão a grande variabilidade na extensão da face de desgaste e na proporção entre esta e a parte não-desgastada do dente. Como comprimento máximo da face de desgaste verifiquei num material de 88 dentes 19 cm., como comprimento mínimo 3 cm. A parte não-desgastada do dente, medida no bordo posterior desde o alvéolo, foi no máximo 13 cm., no mínimo 0,5 cm.; neste último caso a face de desgaste alcança, pois, a gengiva. O valor médio do comprimento de tôdas as faces de desgaste importa em 10,9 cm., o valor médio das partes não-desgastadas em 5,6 cm. Podemos portanto dizer que a face de desgaste abrange 2,3 do comprimento do bordo posterior do dente, em média. Em dentes com face de desgaste invulgarmente pequena esta, porém, ocupa apenas 1/3 do dente.

Vários são os factores que concorrem para estas diferenças de comprimento absoluto e relativo da face de desgaste: raio de curvatura do dente e do seu antagonista, posição dos dentes nas maxilas, comprimento da maxila inferior em comparação com a maxila superior, etc. Mas mal valerá a pena discutir isto em pormenor.

Em contraste com o comprimento da face de desgaste, a sua posição é, em dentes normais, muito constante. Encontra-se sempre na face posterior do dente e dirige-se ou exactamente para trás, ou, e isto é o mais freqüente, simultâneamente um pouco para dentro. Isto pode ser diferente no dente direito e esquerdo da mesma mandíbula, e em grau notável. A face de desgaste é, na maioria dos casos, absolutamente lisa; raramente se apresenta formada por duas faces em ângulo muito aberto, com aresta longitudinal. A face é ou absolutamente plana ou levemente côncava, nunca convexa.

A forma do corte transversal do dente, imediatamente acima do alvéolo, pode designar-se como aproximadamente triangular. Apresenta uma variabilidade bastante grande. Para evitar uma descrição extensa reproduzo na figura 3 *a-d* quatro cortes transversais característicos de caninos esquerdos. Dêstes podemos designar (*a*) como forma normal, (*b*) pertence a um dente especialmente grosso, (*c*) a um dente mais jovem, invulgarmente delgado e de corte transversal arredondado, ao passo que em (*d*) uma das arestas é particularmente saliente. Podemos falar, como se vê, duma aresta anterior, duma exterior e duma interior, e podemos distinguir uma face externa, uma posterior e uma antero-interna. O lado do triângulo que corresponde à face antero-interna é por via de regra o mais comprido; só muito raramente, em dentes especialmente grossos, é que o lado externo o iguala em comprimento. Das três arestas do dente a anterior é a mais acentuada; a aresta posterior e, sobretudo, a exterior são mais arredondadas. Em casos extremos, como no da figura (*c*), já não se pode falar duma aresta exterior. Na maioria das vezes encontra-se nas faces posterior e interior do dente um sulco longitudinal, que aparece no corte transversal como depressão. A face externa só muito raramente mostra uma formação correspondente, sendo de ordinário uniformemente convexa. A face externa tem uma posição quasi sagital; dirige-se muitas vezes simultâneamente um pouco para diante, raras vezes para trás.

Além dos dois sulcos longitudinais mencionados, observamos com bastante regularidade nas faces exterior e interior do dente um sistema de sulcos longitudinais mais estreitos, de forma que estas duas faces apresentam um aspecto canelado. A canelatura provém da formação de numerosas cristas longitudinais, que correm quasi paralelamente, mas convergindo, em parte, para cima. A face porterior não é canelada.

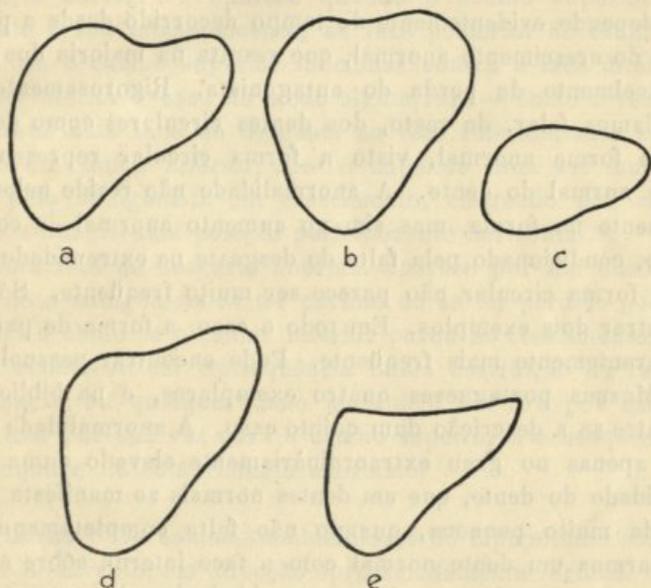


FIG. 3

Cortes transversais de caninos inferiores direitos do hipopótamo; *a-d* ao nível do bordo alveolar, e ao meio da face de desgaste (redução  $\frac{1}{2}$ )

A forma do corte transversal do dente quasi não se modifica desde a raiz até o começo da face de desgaste; na região desta última, porém, modifica-se consideravelmente, como é natural. A figura (*e*) reproduz um corte transversal ao meio da face de desgaste. Mais para cima o aspecto modificar-se-ia evidentemente, visto a face de desgaste avançar cada vez mais em direcção à aresta anterior do dente.

Queria referir-me mais uma vez só de passagem aos dentes de forma anormal; para uma informação mais detalhada pode recorrer-se à minha publicação na «*Zeitschrift für Anatomie*

und Entwicklungsgeschichte». Podemos distinguir três grupos no meu material de dentes de forma anormal: dentes de forma circular, dentes em parafuso e dentes com face de desgaste anormal ou sem ela. Os dentes circulares ou formam um círculo fechado, de maneira que a ponta do dente vai tocar na raiz, depois de ter perfurado a mandíbula, ou então apenas ultrapassam, quanto ao ângulo ao centro, consideravelmente aquele máximo de  $209^\circ$  que se encontra em dentes normais. Isto depende evidentemente do tempo decorrido desde a provocação do crescimento anormal, que resulta na maioria dos casos provavelmente da perda do antagonista. Rigorosamente não deveríamos falar, de resto, dos dentes circulares como de dentes de forma anormal, visto a forma circular representar a forma normal do dente. A anormalidade não reside neles propriamente na forma, mas sim no aumento anormal de comprimento, condicionado pela falta de desgaste na extremidade livre.

A forma circular não parece ser muito freqüente. Só pude encontrar dois exemplos. Em todo o caso, a forma de parafuso é aparentemente mais freqüente. Pude encontrar pessoalmente nos Museus portuguezes quatro exemplares, e na bibliografia encontra-se a descrição dum quinto caso. A anormalidade reside aqui apenas no grau extraordinariamente elevado duma particularidade do dente, que em dentes normais se manifesta só em medida muito pequena, quando não falta completamente. Se collocarmos um dente normal com a face interna sobre a mesa e se apertarmos fortemente a extremidade da raiz contra a mesa, então veremos que muitas vezes se levanta ou a ponta do dente ou a sua parte média um pouco acima da mesa, sinal de que o dente se não conserva exactamente no mesmo plano. Mas, como já disse, trata-se sempre apenas dum valor muito pequeno, alguns milímetros até um centímetro no máximo. Nos dentes em parafuso este desvio do plano inicial do dente aumenta em tal medida, que resulta uma distância entre as voltas de quasi 60 cm. no máximo, se calcularmos o desvio para uma volta completa. Em todos os casos estudados por mim o parafuso desenvolve-se num sentido tal que a ponta do dente se desloca, com o crescimento progressivo, cada vez mais para fora. Um dente em parafuso não encontra o antagonista; resulta daqui, como consequência secundária, o aumento anormal de comprimento. Os mais compridos de todos os dentes de tamanho anormal são justamente

os dentes em parafuso. O parafuso pode ter três voltas completas.

Irregularidades da face de desgaste e, sobretudo, a falta duma tal face, podem ser mesmo designadas nos caninos inferiores do hipopótamo como freqüentes. Temos de considerá-las na maioria dos casos como consequência secundária duma anormalidade da forma ou direcção do dente. É que uma face de desgaste normal só aparece quando o canino superior toca, durante o seu funcionamento, na face posterior do canino inferior. Se o canino superior funcionar contra a face interna do canino inferior — caso de modo algum raro — então o resultado não será uma face de desgaste na face referida, mas sim um recuo do canino inferior, que é impellido cada vez mais para fora pelo antagonista em crescimento, chegando por vezes o dente a atingir uma posição perfeitamente horizontal.

Uma face de desgaste anormal aparece por fim também no caso de o antagonista se ter partido ou se ter perdido por completo, ou então se o canino inferior parou no crescimento, como pode acontecer em consequência duma destruição da raiz por inflamação ou qualquer dano mecânico, um tiro por exemplo. Isto tem por sua vez para o canino superior a consequência de êle adquirir um comprimento anormal.

*Posição.* Os caninos mandibulares do hipopótamo sobem, a partir do alvéolo, em direcção aproximadamente vertical. É esta a primeira impressão que surge ao examinar um maior número de crânios. Mas em breve notaremos que a posição só em casos excepcionais é rigorosamente vertical. Se supusermos a ponta do dente ligada por uma recta ao ponto alveolar anterior, quer dizer, ao ponto onde a aresta anterior do dente desaparece no alvéolo, então a linha em questão desvia-se, por via de regra, e em grau diferente, da perpendicular tirada da ponta do dente, tanto na direcção transversal como sagital. Isto diz respeito sobretudo à direcção transversal, dirigindo-se a ponta do dente mais ou menos para fora. A maneira mais simples de verificar o grau dêste desvio é medir por um lado a distância dos dois pontos alveolares anteriores — na tabela 1 indicada por  $A_1$  — por outro lado a distância entre as pontas dos dois dentes — indicada na tabela por  $A_3$ . Estas duas distâncias deveriam ser iguais, se as pontas dos dentes fôsem, na realidade, perpendi-

culares aos pontos alveolares anteriores. Isto sucede, porém, apenas 5 vezes em 44 casos examinados para êste fim, se considerarmos ainda iguais a 0 desvios de 0,5 cm. Em 37 crânios,  $A_3$  supera  $A_1$  de 1 até 8 cm.; em dois crânios  $A_3$  é inferior a  $A_1$ , num deles de 3 cm., no outro de 5,5 cm. Se calcularmos a média de todos os 44 crânios, obteremos  $A_3 - A_1 = +3$  cm.; as pontas dos dentes não são, portanto, perpendiculares aos pontos alveolares anteriores, mas estão, em média, 1,5 cm. para fora dêstes pontos, de ambos os lados.

Nota-se, porém, a êste respeito uma assimetria considerável, estando por exemplo a ponta do canino direito a uma distância maior do plano médio do que a do dente esquerdo. Para calcular esta assimetria é preferível, em vez da determinação directa das distâncias em questão, a verificação dos ângulos formados pela recta ponta do dente — ponto alveolar anterior com a recta transversal que liga os dois pontos alveolares anteriores. Êste ângulo é, de resto, preferível, também, para medida do desvio do dente da perpendicular, visto ser independente do comprimento do dente. O ângulo em questão, a que chamaremos  $\tau$ , pode ser medido directamente, ou calculado. Empreguei ambos os métodos por maior segurança. Fiz o cálculo projectando a ponta do dente e o ponto alveolar anterior sôbre o plano horizontal (plano da mesa), obtendo assim o desvio transversal ( $tr$ ) da ponta do dente em face do ponto alveolar. Partindo do valor  $tr$  e das distâncias acima do plano da mesa da ponta do dente ( $h_1$ ) e do ponto alveolar anterior ( $h_2$ ), podemos calcular o ângulo, segundo a fórmula  $tg\tau = \frac{h_1 - h_2}{tr}$ . Os valores calculados coincidem mais ou menos com os valores medidos. Os valores de  $\tau$  dados na tabela 1, colunas 13 e 14, obtiveram-se pela combinação dos valores medidos e calculados. Vemos que os valores oscilam entre  $81^\circ$  e  $108^\circ$ . A média é de  $95,6 \pm 0,6^\circ$ , o desvio-padrão =  $5,4^\circ$ . A dimensão de  $\tau$  é independente do comprimento do crânio. Agora ressalta também perfeitamente a assimetria entre direito e esquerdo, podendo a diferença entre o  $\tau$  à direita e à esquerda atingir o valor de  $17^\circ$  (n.º 38). A média da assimetria é de  $4,3 \pm 0,6^\circ$ , o desvio-padrão  $3,9^\circ$ .

De maneira correspondente foram medidos e calculados também os ângulos de desvio sagital dos caninos em relação à perpendicular, isto é, a projecção sôbre o plano mediano do

ângulo formado pela recta ponta do dente — ponto alveolar anterior com a recta horizontal que, partindo do ponto alveolar anterior, se dirige para trás, paralelamente ao plano mediano. Sob  $\sigma$  encontram-se indicados na tabela 1 colunas 15 e 16 mais uma vez os ângulos obtidos pela combinação de medição e cálculo. O desvio em relação à perpendicular é neste caso menos considerável, de forma que podemos dizer que a ponta do dente se encontra, vista de lado, quasi exactamente acima do ponto alveolar anterior. A média de todos os ângulos, que oscilam entre  $75^\circ$  e  $103^\circ$ , é de  $88,6 \pm 0,7^\circ$ , o desvio-padrão de  $6,6^\circ$ . A assimetria entre direito e esquerdo é, neste caso, menor, importando em  $2,3 \pm 0,3^\circ$  em média,  $10^\circ$  no máximo. O ângulo  $\sigma$  é independente do comprimento cranial.

Temos que determinar a posição do dente na maxila ainda em mais um sentido. É que não fica determinada inequivocamente a sua posição só por meio da recta ponta do dente — ponto alveolar anterior, visto o dente poder girar em tórno desta recta como eixo, tomando ora uma posição aproximadamente paralela ao plano mediano, ora uma que se desvia mais ou menos dêste plano, como na realidade acontece. Vimos já ao estudar a forma do dente, que ele está inserido na maxila de maneira a podermos distinguir na parte livre do dente uma face externa, uma posterior e uma antero-interna. Trata-se agora ainda de determinar o ângulo entre uma destas faces e o plano mediano ou também o plano transversal. A face antero-interna é a mais apropriada para êste fim.

Mediu-se portanto em primeiro lugar o ângulo  $\alpha$  da face antero-interna do dente com a linha transversal, quer dizer a recta que liga os dois pontos alveolares anteriores dos dois dentes. Esta medição faz-se da maneira mais cômoda por meio de duas réguas de dimensão desigual, das quais a mais curta gira em volta dum ponto junto da extremidade da mais comprida. Esta última applica-se às arestas anteriores dos dois dentes, immediatamente por cima dos alvéolos, emquanto a régua mais curta se ajusta à face antero-interna dum dos dentes, imediatamente por cima do bordo alveolar interno.

Êste ângulo, está claro, não pode ser aproveitado como tal, pois a linha transversal corre paralela ao plano horizontal, mas não assim o outro lado do ângulo, que corre ao longo do bordo alveolar interno; na verdade, êste lado desvia-se para

cima e para trás, em medida variável. Êste desvio ( $\delta$ ) calcula-se facilmente colocando uma régua ao longo do bordo alveolar interior e medindo a altura de dois pontos da régua acima do plano da mesa. A tabela mostra nas colunas 17 e 18, que  $\delta$  oscila entre  $15^\circ$  e  $52^\circ$  (média =  $30,9 \pm 0,8^\circ$ , desvio-padrão =  $7,6^\circ$ ), não se mostrando nisto uma dependência clara do comprimento do crânio, mas verificando-se mais uma vez uma assimetria notável (máximo =  $15^\circ$ , média =  $4,0 \pm 0,5^\circ$ , desvio-padrão =  $3,6^\circ$ ).

A projecção requerida do ângulo  $\alpha$  sobre o plano horizontal, a que chamaremos  $\beta$ , pode se calcular agora pela fórmula  $\cos \beta = \frac{\cos \alpha}{\cos \delta}$ . Os valores de  $\beta$  que se encontram nas colunas 19 e 20 da tabela 1, oscilam entre  $23^\circ$  e  $63^\circ$ .

Não se manifesta uma regularidade na seqüência dos ângulos, seguindo-se ângulos maiores e menores indistintamente. Falta pois, mais uma vez, uma correlação com o comprimento cranial, facto que se revela também com evidência, se representarmos gráficamente a relação entre  $\beta$  e o comprimento do crânio. Existe, porém, uma relação indubitável, ainda que fraca, entre  $\beta$  e a largura relativa da mandíbula. Como medida da largura relativa escolheu-se a proporção entre a distância dos dois pontos alveolares anteriores ( $A_1$ ) e o comprimento da mandíbula no plano mediano. Os valores da largura relativa variam no meu material entre 0,55 e 0,81. Estabelecendo a relação entre êstes valores e  $\beta$  verifica-se que em geral a um valor maior da largura relativa corresponde um valor menor de  $\beta$ . Quanto mais larga, portanto, a parte anterior da mandíbula, tanto mais as faces antero-internas dos caninos se voltam para diante. Se é a largura da mandíbula que aqui causa o grau de obliquidade dos caninos em relação ao plano mediano, ou vice-versa, difficilmente se poderá decidir.

Mais uma palavra ainda sobre os dentes de posição anormal! O desvio da norma mais freqüente consiste aqui indubitavelmente no facto de os dentes se voltarem mais ou menos para o lado, de modo que se dirigem não para cima, mas obliquamente para cima e para fora, ou mesmo exactamente para fora. Pude encontrar tôda uma série de exemplos que mostram esta anormalidade em vários graus. Nêstes crânios aumenta, pois, consideravelmente o valor de  $\tau$ . Num crânio (Col. 4), que mostra esta anormalidade em grau médio, encontrei por exemplo para

$\tau$  128° à direita, 121° à esquerda. Mas o valor de  $\tau$  pode ir até 180° (posição horizontal).

Quanto ao ângulo  $\sigma$  parece não haver uma anormalidade primária. Mas o valor de  $\sigma$  modifica-se secundariamente em crânios com os caninos colocados para o lado, visto esta deslocação ter como consequência o desencontro com o antagonista e, com isto, um crescimento prolongado do dente. A ponta do dente chega assim a uma posição cada vez mais posterior, diminuindo correspondentemente o ângulo  $\sigma$ . Encontrei por exemplo no crânio Col. 4, mencionado atrás, para  $\sigma$  o valor de 45° à direita, de 61° à esquerda, valores estes que estão muito abaixo do mínimo de dentes em posição normal. O mesmo resulta também, naturalmente, no caso dum aumento anormal do comprimento, em consequência da perda do antagonista.

Em dentes voltados para o lado pode-se verificar, por fim, como consequência secundária desta deslocação, também um aumento do ângulo  $\beta$ . Dirigindo-se neles a face antero-interna originária do dente obliquamente para cima, mesmo puramente para cima, aumenta evidente e consideravelmente o ângulo  $\alpha$ , e por consequência aumentará também o ângulo  $\beta$ , que é dependente de  $\alpha$ .

Esta modificação da direcção das faces do dente traz consigo mais uma consequência. Num dente de posição normal o limite entre a parte amarelada do dente, isto é a parte protegida pelo alvéolo e a gengiva, e a parte livre acastanhada circunda o dente quasi à mesma altura. Em dentes de desvio lateral, porém, esse limite sobe consideravelmente desde a aresta anterior até a aresta posterior. Isto fornece-nos um meio de ajuizar, também em casos de dentes *isolados*, da sua provável posição na maxilla: ou posição normal ou posição horizontal. Desta maneira foi possível dar agora aos dentes isolados anormais do Museu Zoológico de Coimbra uma orientação que corresponde com grande probabilidade à posição que tinham em vida, posição essa que significa uma correcção bastante considerável da orientação que se havia dado há anos aos dentes dentro da mandíbula artificial.

Com isto ficou resolvida a questão que eu me havia pôsto inicialmente e regressei assim ao ponto de partida d'este estudo, pois que, ao encontrar no Museu os dois dentes anormais, montados numa mandíbula de madeira, não tive primeiro, além duma pequena notícia acompanhada duma figura, outra intenção que

não fôsse a de obter a certeza se se havia dado realmente aos dentes a posição exacta na mandíbula artificial.

Julgava a principio que seria sufficiente para alcançar êste fim medir muito simplesmente em alguns dentes normais o ângulo entre a face antero-interna do dente e o plano transversal; mas tive que reconhecer em breve que êste ângulo só em dentes de posição normal torna possível a orientação do dente na maxila. Reconheci mais que a forma anormal anda freqüentemente ligada à posição anormal. E assim se tornou indispensável um estudo pormenorizado da forma e posição de dentes normais e de todos os outros casos de dentes anormais que pude encontrar. A curta notícia em projecto tomou assim proporções muito mais largas. Talvez não seja, porém, sem certo valor ficar-se conhecendo assim mais exactamente a forma e posição normais dos caninos do hipopótamo e possuir além disso, no meu artigo da «*Zeitschrift für Anatomie und Entwicklungsgeschichte*», um estudo de conjunto de todos os dentes anormais, conhecidos até agora.

DR. ERNST MATTHES

(Coimbra, Museu e Laboratório Zoológico).

## Um novo Museu em Coimbra: o Museu pombalino de Física da Faculdade de Ciências da Universidade

(Comunicação apresentada à Academia das Ciências de Lisboa em Junho de 1938)

Senhor Presidente:

Ilustres Confrades:

Quando, há anos, tomei conta da Direcção do Laboratório de Física da Universidade de Coimbra, estava bem longe de pensar que no desempenho, por assim dizer, das minhas funções, me seria dado empreender um trabalho de investigação e de reconstituição históricas que os meus antecessores, professores e directores ilustres que foram dêste Laboratório, não só não tiveram o menor interêsse em fazer, como até, inexplicavelmente, o prejudicaram, deixando que se perdessem alguns dos mais valiosos elementos do seu estudo. Felizmente, nem tudo se perdeu, e daí a razão do meu trabalho.

Quero referir-me ao antigo Gabinete de Física criado em Coimbra pelos Estatutos pombalinos de 1772, ao que êle foi, no tempo em que, com tôda a magnificência, foi instalado pelo Marquês de Pombal; quero referir-me sobretudo às vicissitudes por que passou até hoje, ao estado lamentável em que o fui encontrar, mutilado e disperso, e ao estado em que actualmente se encontra, depois da reconstituição que me foi dado empreender. Se êste estado, hoje, mal reflecte a antiga grandeza, permite-nos contudo ainda admirar algumas das suas curiosidades, incontestáveis elementos de valor, quer consideradas no ponto de vista artístico, quer no ponto de vista da história da Ciência, susceptíveis de constituirem no seu conjunto, tal como foram reunidas, um museu digno de ser conservado, um valioso Museu de Física do século XVIII.

Já por muitos historiadores foi devidamente considerado o especial cuidado que teve o Marquês de Pombal na instalação do Gabinete de Física em Coimbra, depois de ter feito suprimir, pela carta régia de 10 de Novembro de 1772, o estudo da Matemática e da Física no Colégio dos Nobres, em Lisboa.

Vale a pena transcrever aqui tudo o que se estabelece nos velhos Estatutos pombalinos, de páginas 392 a 394, do volume 3.º, sobre o que lá se encontra designado com o nome de *Gabinete de Física Experimental*:

«Para que as Lições de Fysica, que Mando dar no Curso Filosófico da Universidade, se façam com o aproveitamento necessário dos Estudantes; os quais não sòmente devem ver executar as Experiências, com que se demonstram as verdades até o presente conhecidas na mesma Fysica; mas também adquirir o hábito de as fazer com a sagacidade, e destreza. que se requer nos Exploradores da Natureza; haverá também na Universidade huma Collecção das Máquinas, Aparelhos, e Instrumentos necessarios para o dito fim.

Como porém nesta parte se tem observado algum género de excesso; fazendo-se despesas consideraveis em Máquinas de nenhuma importancia, e consequencia; as quais servem tão somente de espectáculo, e passa-tempo: Sou servido ordenar, que se não proceda a mandar fazer Máquina alguma da Fysica Experimental, sem primeiro se tomar deliberação sobre a utilidade della na Congregação Geral das Sciencias; ouvindo-se o Parecer dos Deputados de todas as tres Faculdades das Sciencias Filosóficas.

Haverá huma Sala, ou Casa destinada para a dita Collecção das Máquinas, a qual tenha a capacidade necessária, para nella se fazerem todas as Experiencias, relativas ao Curso das Lições, com assistência dos Estudantes: Sendo as ditas Máquinas ordenadas em Armarios, quanto for possível, pela mesma ordem das Lições, para que as Demonstrações se façam mais commodamente, e sem alguma confusão.

O Professor de Fysica Experimental terá a Intendencia sobre

a Casa das Máquinas debaixo da Inspeção do Reitor com a Congregação da Faculdade, e com a Congregação Geral das Sciencias. E terá á sua ordem hum official subalterno, ou Demonstrador de Fysica Experimental, o qual será provido pelo Reitor com o Conselho da Faculdade: Concorrendo nelle as circunstancias; de saber tratar das Máquinas; e de fazer as operações de mais trabalho todas as vezes que pelo Lente lhe fôr ordenado. Será mais obrigado a ter sempre todas as Máquinas limpas, e asseadas: Tomando entrega dellas por Inventário assinado pelo Reitor, e Director da Faculdade: Dando conta dellas pelo mesmo Inventário no fim do Ano lectivo, quando for visitado o Gabinete pelo Reitor com a Congregação: Formando-se no mesmo Acto novo Inventario: E ajuntando-se-lhe os Máquinas, que tiverem acrescido no mesmo Anno.

O mesmo Demonstrador trabalhará tambem ás ordens do Professor da Historia Natural na arrumação, e preparação dos Produtos relativos ao Gabinete da Historia. O qual, sendo possível <sup>(1)</sup>, estará contiguo, e immediato ao da Fysica Experimental».

Foi relativamente rápida a instalação do Gabinete. Foi toda a colecção de máquinas e aparelhos do Colégio dos Nobres que passou para Coimbra. Do valor desta colecção dá-nos uma ideia o próprio Marquês de Pombal numa carta enviada ao Reitor D. Francisco de Lemos, em Novembro de 1772, em que diz: «Sua Magestade fez á mesma Universidade a Mercê de mandar transportar a ella o Gabinete da Physica Experimental, em que ha muitos annos se trabalha nesta Côrte, com o effeito de o Constituir o mais completo, que hoje tem a Europa. Porque sendo o melhor delles o de Padua; não tem mais que quatrocentas Machinas; passando o Nosso de quinhentas, e tantas.»

Uma outra referência importante a esta colecção encontra-se no livro que o conhecido botânico Link escreveu sobre as suas viagens em Portugal durante os anos 1793 a 1795. Eis como José Silvestre Ribeiro, no tomo v da sua Historia dos Estabe-

---

(1) Que foi possível, sabemos-lo nós hoje. Assim se dá a razão curiosa de estarem instalados lado a lado, no mesmo edificio, o Laboratório de Física e o Museu de Zoologia — a razão foi a do melhor aproveitamento do tempo do Demonstrador comum aos dois gabinetes.

lecimentos scientificos, literários e artisticos de Portugal descreve e apresenta esta referència :

«Acertou de visitar a Universidade de Coimbra, no último ano do século XVIII um viajante illustrado que depois publicou as impressões que recolhera do seu exame. Quero fallar de Link, professor distinto de uma das universidades da Alemanha, botânico de grande nomeada; severo e caustico em suas apreciações, e por isso muito de ser acreditado no que succede dizer de favoravel a respeito das pessoas ou das coisas. Pondo de parte o que Link escreveu acerca da organisação dos cursos da Universidade, regimen administrativo e policial, traje dos estudantes, etc., vou reproduzir aqui o que elle pensou e disse dos primeiros estabelecimentos scientificos dependentes da Universidade :

Ha muitos estabelecimentos públicos no extinto Collegio dos Jesuítas que Pombal doara à Universidade. O collegio é sito no bairro alto da cidade, do mesmo modo que o são as dependencias da mesma Universidade. O gabinete de historia natural é pouco consideravel, e contem muito poucas coisas notaveis. Está classificado pelo ex-inspector Vandelli, segundo o sistema de Linneu. Mas é preciosa a collecção de instrumentos de physica feitos alguns em Inglaterra sendo os construidos em Portugal, pela maior parte, de madeira do Brazil e dourados. Esta collecção é, em geral, uma das mais brilhantes, sendo o gabinete precioso no que respeita à Mecânica».

Êste depoimento do professor alemão é importante, visto que, como faz notar Silvestre Ribeiro, Link, nas suas apreciações, raras vezes nos foi favorável.

Poderíamos citar ainda outras referências à collecção pombalina, às quinhentas e tantas máquinas de que nos fala o Marquês. Mas o melhor testemunho que podemos apresentar sôbre o valor da collecção, é, incontestavelmente, o Catálogo da época, catálogo manuscrito, que tivemos a sorte de encontrar bem guardado no Laboratório e em estado de perfeita conservação <sup>(1)</sup>.

Êste Catálogo foi um auxiliar preciosíssimo no nosso trabalho. A sua leitura é cheia de ensinamentos; em vez de uma simples enumeração e indicação dos nomes das máquinas, encon-

---

(1) Êste catálogo foi reproduzido por dalla Bella no 3.º volume da sua obra *Physices Elementa*.

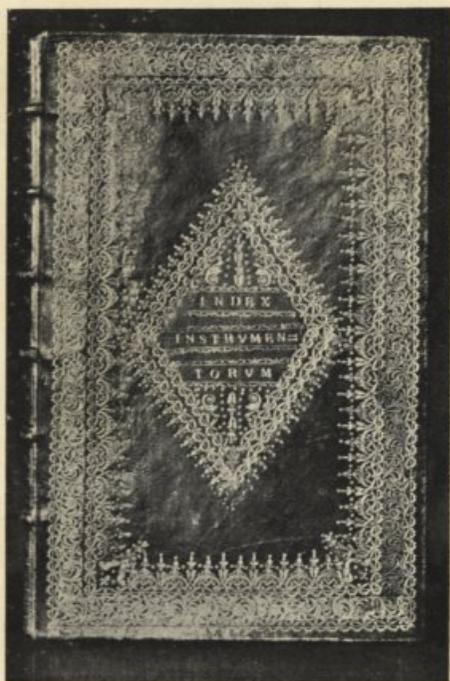
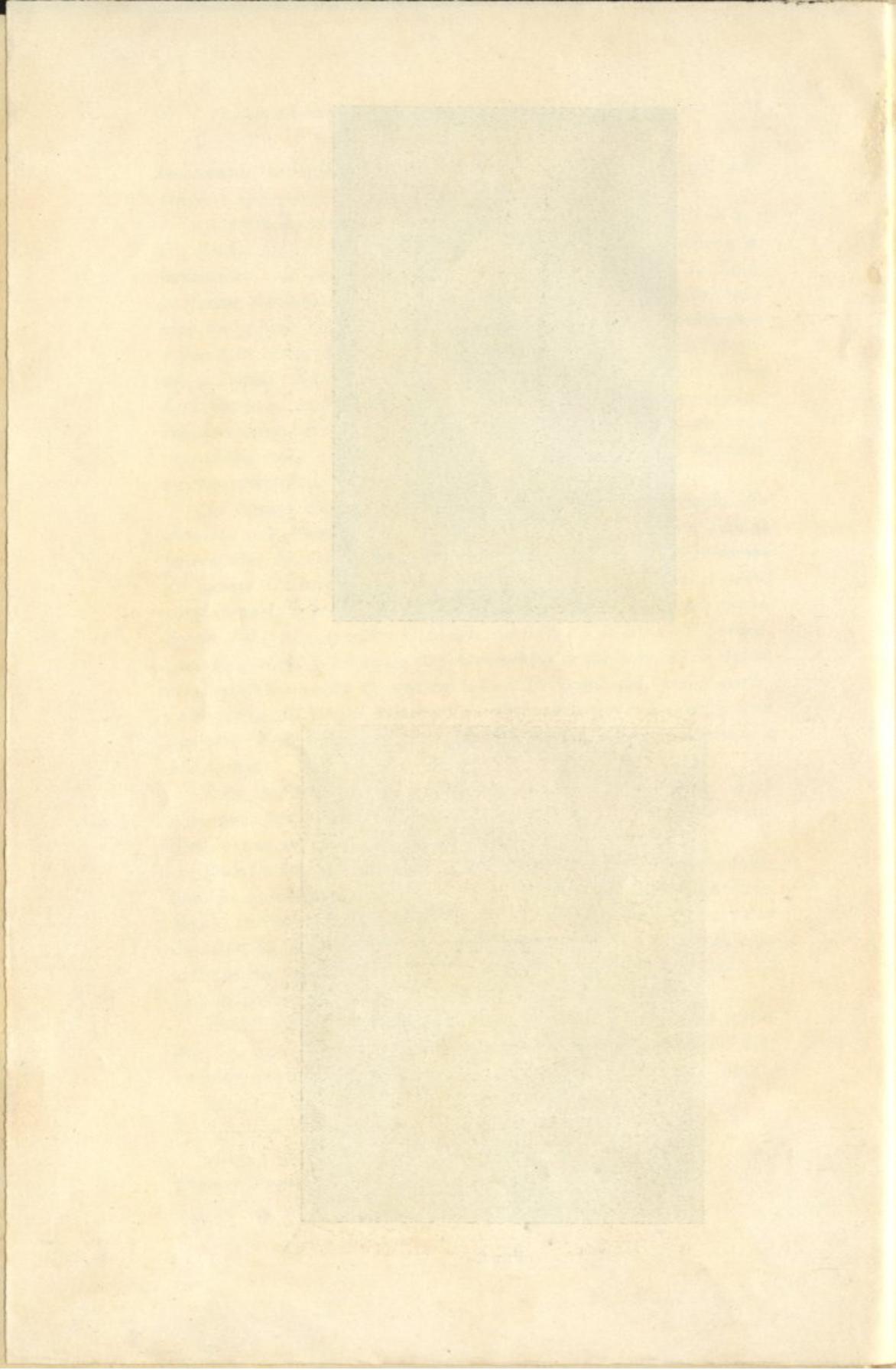


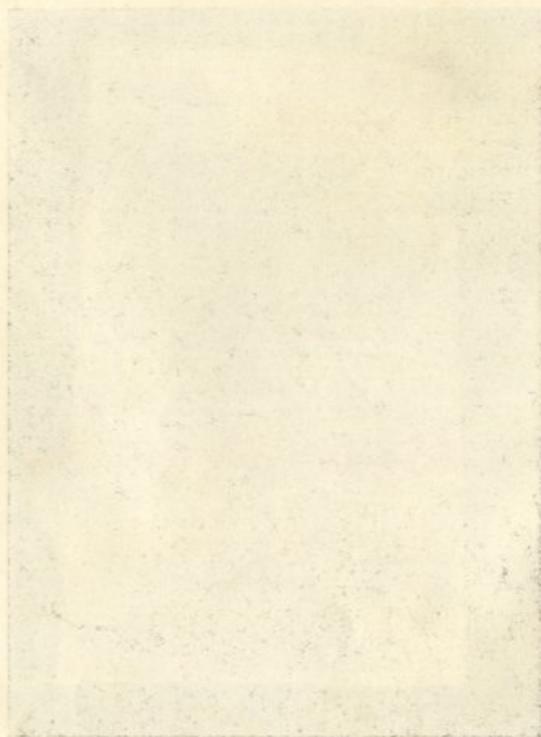
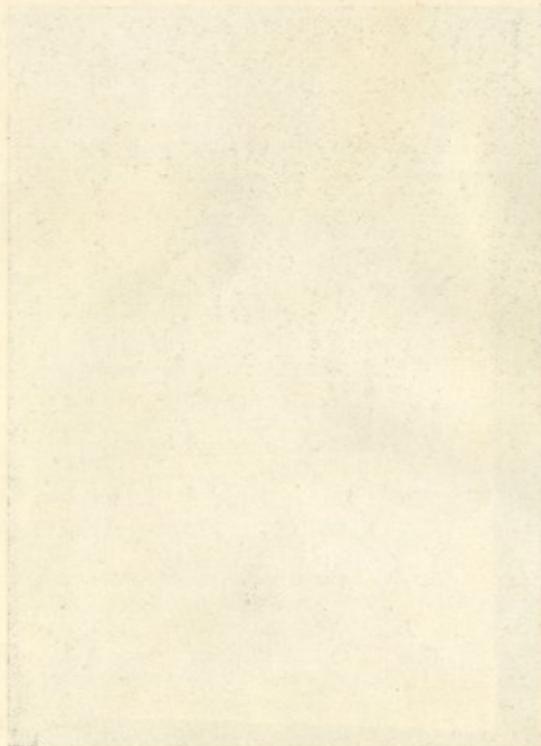
FIG. 1

*Este Livro contém cento e setenta  
e oito folhas, as quaes são así numeradas,  
e Subscritas pelo D.º João António da Silva  
Lembra 27 de Agosto de 1788*  
*Principal Factor Reformado Rector*

FIG. 2







tramos nele descrições, por vezes completas, do funcionamento e dos fins a que os aparelhos se destinam; e quando esta descrição se não faz, são indicadas as páginas e mesmo os números das gravuras dos livros dos autores, então mais conhecidos, e que expõem a doutrina que os aparelhos pretendem exemplificar ou demonstrar. Por isso se pode dizer que a leitura atenta d'êste Catálogo dá uma ideia clara do que foi, no seu conjunto, o antigo gabinete pombalino.

A figura 1 reproduz uma fotografia da capa do Catálogo; os desenhos que se vêem são gravados a ouro sobre carneira vermelha, e ao centro lê-se a indicação: *Index Instrumentorum*.

A figura 2 reproduz a primeira página; nela se vê a data do Catálogo, 27 de Agosto de 1788, a assinatura do principal Castro, reformador-reitor, e a indicação do nome do Dr. João António dalla Bella, professor italiano que o Marquês de Pombal contratou para, empregando os próprios termos da sua carta de Novembro de 1772, «*reger o Gabinete e explicar a Physica Experimental*»; foi nesta qualidade que êste professor redigiu o Catálogo e rubricou tôdas as fôlhas.

A figura 3 reproduz o frontispício onde novamente se vê o nome do Dr. João Antonio dalla Bella.

Todo o Catálogo é escrito em latim, e nele se encontram as seguintes divisões:

*De Subtilitate partium Materiae; De Impenetrabilitate; De Porositate; De Vi Inertiae; De Attractione; De Magnete; De Gravitate; De Centro Gravitatis; De Machinis Simplicibus et Compositis; De Attritu Machinarum; De Motu simplici et composito; De Motorum Corpõrum Viribus; De Percussione; De Viribus Centralibus; De Cohaerentia et Firmitate Solidorum; De Hydrostatica et Hydraulica; De Igne; De Luce; De Dioptrica; De Catoptrica; De Aere; De Electricitate; Omissa; Utensilia.* A estas divisões correspondem, no total, 580 aparelhos descritos. Aqui está o número exacto das quinhentas e tantas de que nos fala o Marquês.

De passagem, não se pode deixar de fazer notar a grande extensão que ocupa a Mecânica em relação às outras partes da Física, o que está bem de harmonia com o estado desta Ciência na época.

Reproduzo, ao acaso, uma das fôlhas do Catálogo, a fôlha 35 (figura 4): o primeiro número que se vê ao alto da página, à

esquerda, é o 119. Segue-se a descrição da máquina: «*Machina, qua ostenditur quid valeant vires obliquae, si vecti tertii generis aptentur; inservit etiam ad vires Musculorum aestimandas. Desumpta fuit ex Munch. Institut. cit. § 432. Tab. 6. Fig. 1. 2. G. I.*».

Como se vê, depois de uma descrição rápida da máquina, está indicado o livro que deve ser consultado, citado o parágrafo, e são dados os números das figuras correspondentes; por fim, indica-se uma letra e um algarismo romano. O aparelho considerado é o G. I. 119: a letra indica o armário e o algarismo romano a prateleira.

As letras que, por todo o Catálogo, indicam os armários são em número de vinte e duas: A, B, C, D, E, F, G, H, I, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, V, X, Y, Z. Vinte e dois portanto também deviam ser os armários da colecção pombalina. Indico este número porque elle permitiu, logo no início do nosso trabalho, localisar, no vasto edificio do Museu, a instalação primitiva do Gabinete. A esta indicação, outras depois se juntaram, e hoje podemos com toda a certeza indicar, no chamado andar nobre do edificio, a última sala do lado sul, de 17,63 metros de comprimento por 9,5 metros de largura, como a sala onde dalla Bella fez a instalação das quinhentas e oitenta máquinas entregues à sua guarda, com todas as precauções e todos os cuidados recomendados pelo próprio Marquês! Lá encontramos ainda os vinte e dois armários referidos, bem pombalinos no seu aspecto, construidos em magnífica madeira do Brasil, de proporções elegantes e com artísticas decorações. O que lá, infelizmente, não encontramos, há um ano, foram as quinhentas e oitenta máquinas de dalla Bella. Veja-se a fotografia (fig. 5) que justamente há um ano, portanto antes do trabalho de restauração que empreendemos, fizemos desta sala, e que mostra bem qual era então o seu aspecto curioso. Vêem-se os armários pombalinos, mas os aparelhos guardados é que não são os primitivos. Fora dos armários, não pode deixar de ser impressionante o contraste que oferecem, com a decoração da sala, os caixotes deselegantes que servem de resguardo a alguns aparelhos e as mesas de construção pobre em que assentam outros. Vêem-se máquinas eléctricas, electro-imans, bobinas de Ruhmkorff, mas de aparelhos pombalinos mal se distingue um, à direita, junto de uma das janelas: uma corôa real que serve de cobertura a um grande iman natural.

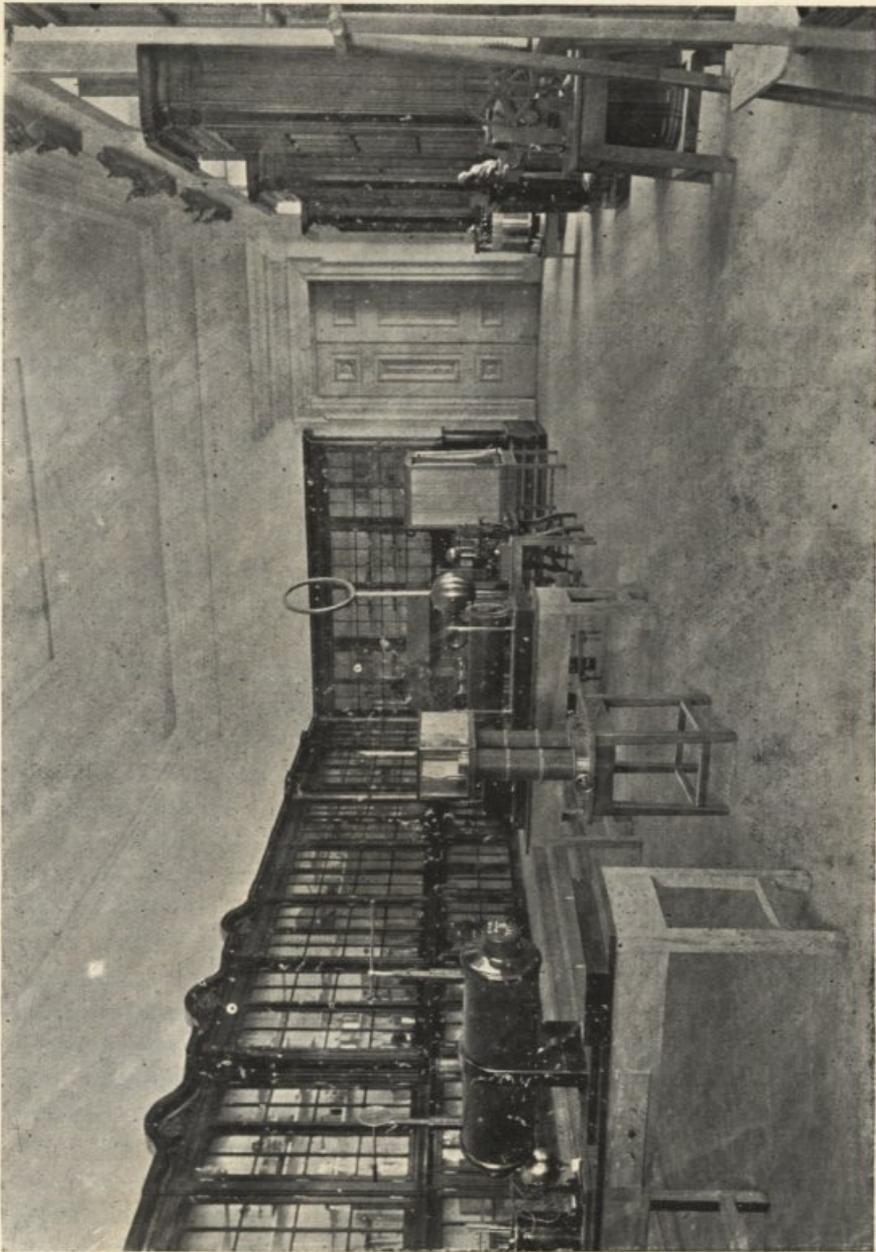


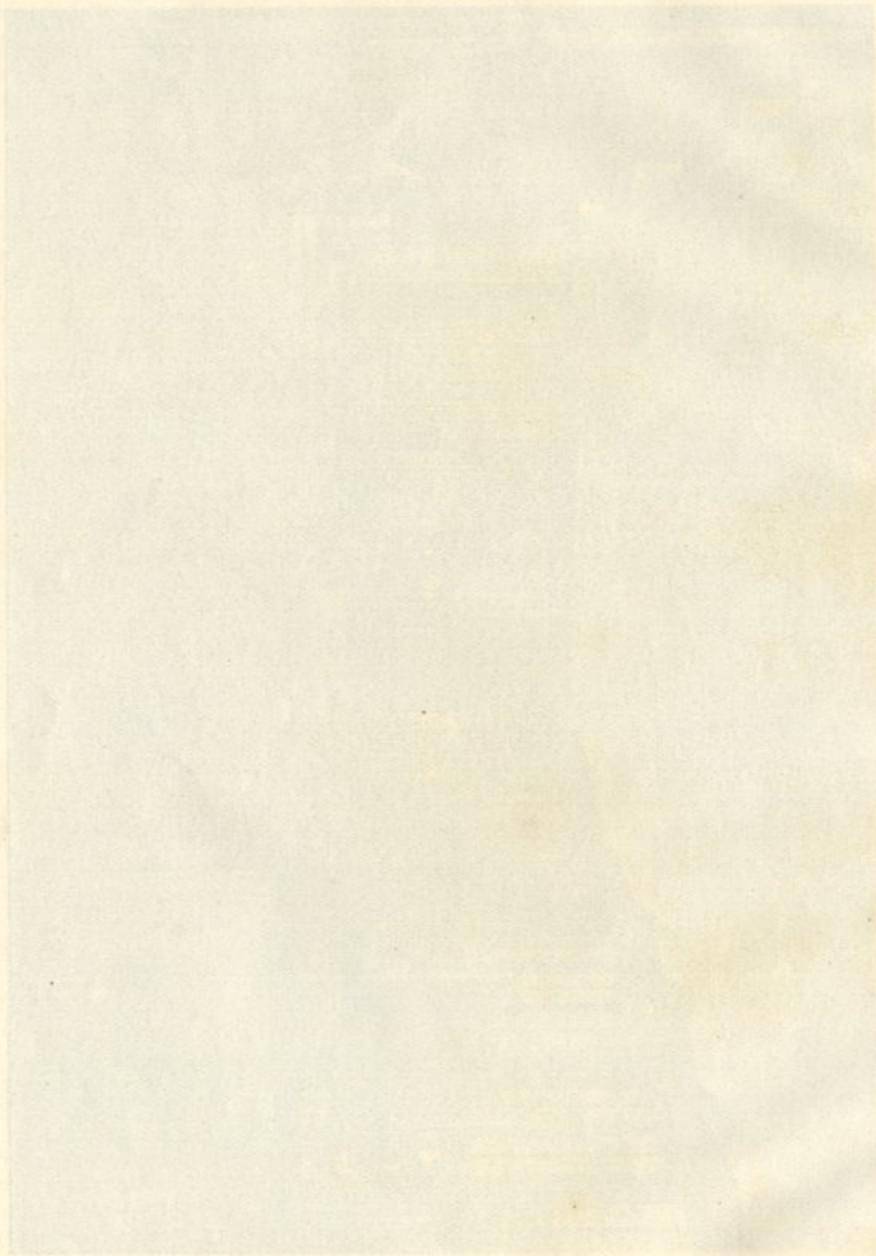
FIG. 5

12

THE HISTORY OF THE UNITED STATES OF AMERICA

BY

JOHN B. HENNINGSEN



NEW YORK: THE CENTURY CO., 1900.

Perante este aspecto tão insólito, pode naturalmente perguntar-se o que foi feito daquele Gabinete que, no dizer do Marquês, «era melhor que o de Pádua», o que foi feito das suas quinhentas e oitenta máquinas; pode e deve perguntar-se porque razão se não conservou tudo no seu aspecto primitivo, porque motivo se não fez de um Gabinete que, no seu tempo, foi o melhor da Europa, um Museu de Física que seria, hoje, o melhor do mundo?

É velho o hábito de tudo derruir para de novo construir. Sucedeu aqui o mesmo que se deu em tantos outros domínios da nossa actividade cultural, onde certo espírito, dito renovador, para nosso mal, sempre entendeu dever substituir as velhas coisas pelas novas. Pouco a pouco, lentamente, foram-se partindo as velhas máquinas, foram-se inutilizando, pelo uso descuidado, os aparelhos mais delicados e mais frágeis, e uma vez partidos ou desmantelados, ou foram postos completamente de lado como sucata inútil, ou adaptados a outros fins. Parece nunca ter havido o cuidado de consertar ou de restaurar o quer que fôsse: para quê... se novas máquinas podiam substituir as antigas, depressa julgadas inúteis? Isto quanto ao material; quanto ao seu arranjo e disposição na primitiva sala, cêdo se manifestou o propósito de não manter a catalogação primitiva. Foi o professor António Sanches Goulão, que por mais de 20 anos regeu a cadeira de Física, por sinal com brilho excepcional segundo nos conta Simões de Carvalho na sua *Memoria histórica da Faculdade de Filosofia*, o primeiro Director do Laboratório que entendeu não dever manter o aspecto e o arranjo do Gabinete de dalla Bella. Os aparelhos foram, à volta de 1840, mudados para outras salas do Laboratório, misturados com os novos, e de novo numerados e catalogados. Se, ao menos, tivessem sido todos catalogados, e se se tivesse aproveitado a catalogação para mandar reparar os aparelhos partidos, o mal não teria sido tão grande como foi. Sucedeu, com efeito, que o material inutilizado foi pôsto inteiramente fora de uso e abatido ao Inventário, considerado talvez como velharia sem valor. São perto de 200 aparelhos que nesta época se perdem para a colecção pombalina. Retirados das estantes, desmantelados e partidos, devem ter sido acumulados no rez do chão do Laboratório, numa casa que então servia de armazém.

Não foi contudo só relativamente ao material partido que se

verificou tão pouco interesse. Mesmo em relação ao que foi catalogado, o interesse não deve ter sido maior. Há a este respeito uma referência que é bem elucidativa e para que chamou recentemente a minha atenção o meu estimado amigo e conhecido bibliófilo, senhor Cândido Nazaré. Encontra-se, com efeito, no livro de Júlio César Machado — *Scenas da minha Terra* — publicado em 1862, a seguinte passagem curiosa:

«No dia seguinte visitei o Museu. O edificio é magnífico, e tem verdadeiras riquezas da antiguidade. O gabinete de physica, principalmente, está precioso, e é pena unicamente que as máchinas aliás riquissimas estejam accumuladas de tal forma que se torne impossivel observá-las. Na parte histórica principalmente o gabinete está rico e um russo que visitou o museu exclamou maravilhado: *Voilà des instruments de la vieille physique.*»

Como se vê, máquinas riquissimas mas accumuladas, empilhadas...

Ao Catálogo do Dr. Sanches Goulão, seguiu-se mais tarde, em 1878, um novo Inventário. Agrava-se então ainda mais a situação. Se no Catálogo do Dr. Sanches Goulão ainda lampejam reflexos da antiga opulência do Gabinete, e se encontram marcadas as mais curiosas características da Física do século XVIII, neste novo Catálogo tudo desaparece. A nomenclatura das máquinas é, em grande parte, actualisada, mais uma boa centena de aparelhos deixa de ser mencionada, propõe-se novo arranjo e nova numeração. O Catálogo é impresso, e no prefácio, o autor não faz a menor referência ao valor da antiga colecção, e apenas o interessa o novo material adquirido. Votados ao esquecimento, perdidos no meio de material moderno, não admira pois que os velhos aparelhos tivessem começado a desaparecer, saindo dos armários que os guardavam para o armazém em que pouco a pouco vão sendo amontoados. A colecção diminui então de ano para ano num ritmo implacável de destruição. O armazém, pelo contrário, êsse enche-se cada vez mais. E cheio, finalmente, cheio, do chão até ao tecto, segundo o testemunho de dezenas de pessoas ainda vivas, dá-se então o desastre que foi a pior machadada vibrada na preciosa colecção: as velhas máquinas pombalinas, ainda com os seus dourados, todo um bric-à-brac curiosíssimo com os mais variados exemplares, montes enormes de madeiras e de metais, tudo é pôsto fora de casa, em leilão, à porta do Laboratório, e vendido ao desbarato.

Compreende-se agora que semelhantes destruições tenham feito desaparecer da antiga sala o seu aspecto primitivo e tenham produzido o estado que a fotografia da fig. 5 tristemente nos representa.

\*

\*

\*

Para chegar a este ponto da minha exposição devo dizer que tive que ser particularmente discreto sobre certos pormenores e propositadamente omitir outros mais aborrecidos. Não interessa, com efeito, neste momento, descrever do passado senão o estritamente sufficiente para dar uma ideia das condições desfavoráveis em que me encontrei quando há um ano tive necessidade, para cumprir instruções enviadas pela Direcção Geral da Fazenda Pública, de fazer uma revisão do Inventário do Laboratório. Absorvido anteriormente por outros trabalhos, com outras preoccupações, mal conhecendo ainda então os factos que acabei de expôr, estava longe de pensar que se tornava urgente acudir a alguns velhos aparelhos que desde a minha entrada para o Laboratório me tinha por assim dizer habituado a ver accumulados pelos armários e em estado de completo abandono. Dêstes velhos aparelhos, apenas uns três ou quatro tinham uma certa aparência agradável, e estes foram talvez por isso os únicos que mereceram uma referência especial ao Senhor Dr. Teixeira Bastos num estudo que há anos publicou sobre os incios da Física e da Química na Universidade de Coimbra. Foi assim com a maior surpresa que tendo mandado retirar dos armários os aparelhos amontoados, comecei a encontrar as mais curiosas máquinas que não tardei em reconhecer como restos valiosos da antiga collecção pombalina. Tudo então foi rapidamente reunido para poder ser devidamente estudado e classificado. Logo a seguir fui informado da venda a que aludi e que até então eu ignorara por completo. Na esperança logo formada de reaver o material vendido, puz-me immediatamente em contacto com os compradores da época. As primeiras informações foram contudo bastante desanimadoras. Os aparelhos leiloados tinham sido previamente desmontados, talvez para encobrir a sua origem, separadas as partes de madeira, das partes em ferro e em metal. Portanto, só peças soltas seria possível encontrar. Pior

e mais desanimadora informação do que esta, foi a que logo me deram sobre o metal amarelo: inútil procurar a mais pequena parcela — comprado todo ou quasi todo por Charles Lepierre para os serviços municipalizados, a sua fundição deve ter sido feita imediatamente a seguir à sua compra. Quanto ao resto, fomos mais felizes. Algumas coisas começaram desde logo a aparecer. Infelizmente, não foram as melhores. Essas devem ter passado a fronteira, levadas por estrangeiros, segundo informações que colhi. Muitas outras devem ainda estar em Coimbra mas os seus possuidores não as denunciam. O Laboratório tem no entanto comprado tudo o que tem aparecido.

A este material tivemos a sorte de juntar outro encontrado em dois estabelecimentos do Estado, no Museu Machado de Castro e no Liceu D. João III. No Museu Machado de Castro encontramos, em depósito, 4 figuras aladas em bronze dourado a que daqui a pouco terei ocasião de me referir, e uma grande balança romana, em ferro. No Liceu D. João III também algumas peças curiosas, cujas fotografias reproduzimos adiante.

Foi com tudo isto que pode ampliar-se desde logo o nosso trabalho que orientámos então decididamente no sentido de fazer um estudo completo de todo o material existente; trabalho este de identificação e de restauração que rapidamente pode progredir graças à boa vontade, direi mesmo à dedicação cheia de entusiasmo, que encontrei em todos os que comigo trabalham no Laboratório de Física. Devo sobretudo salientar que todos os trabalhos de restauração, em ferro, foram e continuam a ser executados na Oficina do Laboratório pelo preparador-conservador António Ferreira, auxiliado pelo preparador Francisco Galvão e pelo maquinista Danilo Costa. Os trabalhos, em madeira, por falta de artista especializado, é que não têm sido feitos no Laboratório; têm sido feitos fora, mas subordinados às nossas indicações.

Não foram fáceis os primeiros trabalhos de restauração. Poucos aparelhos encontramos completos. Em muitos casos felizmente, tem sido possível completá-los com o material encontrado fora do Laboratório, circunstância esta que tem valorizado as aquisições feitas.

Em muitos casos tem também sido difícil o trabalho de identificação. Neste trabalho é que nos tem sido extremamente precioso o Catálogo da época, o *Index Instrumentorum*. Como

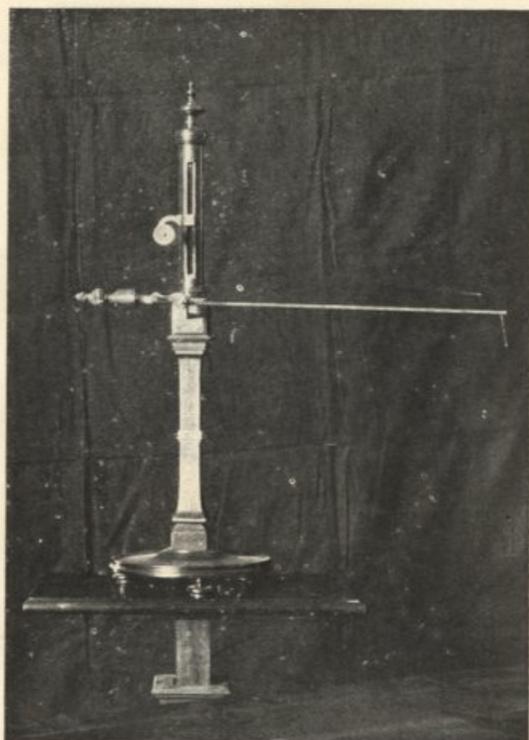


FIG. 6

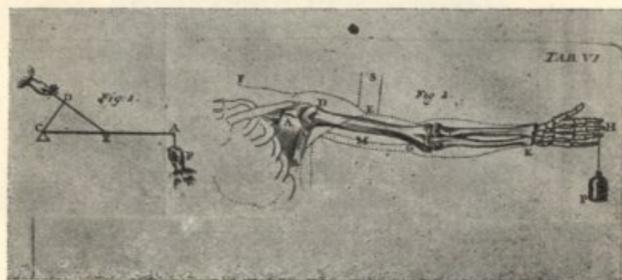
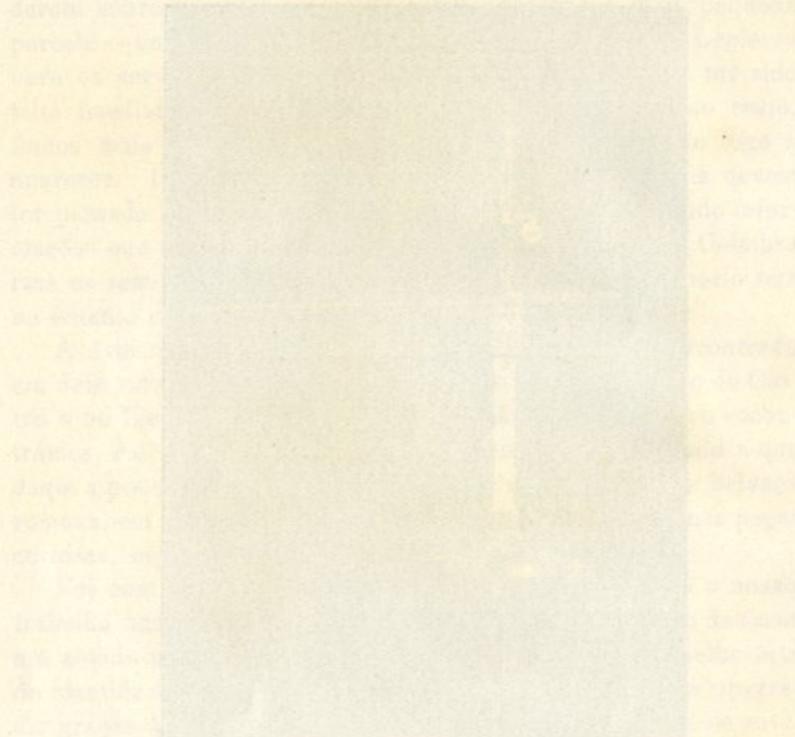
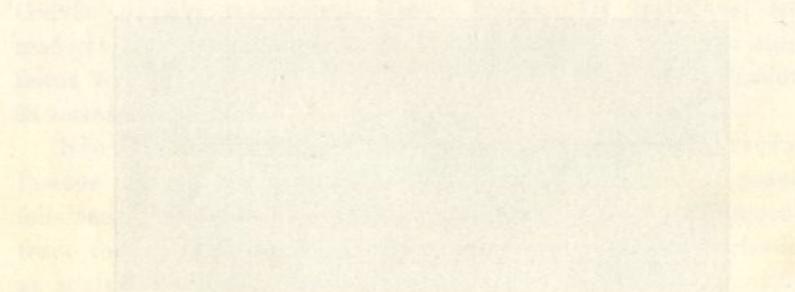


FIG. 7

...the ... of ...



...the ... of ...



...the ... of ...

& A K; soit que ces deux puissances soient en-mêmes & entre elles, & tant qu'on ait la proportion suivante, R : P :: P C : C R, qui font deux perpendiculaires abaissées du centre C du mouvement sur les deux directions de ces lignes; ou il faut que l'on ait R : P :: le sinus de l'angle P A C : au sinus de l'angle R A C.

§. CCCCXXXII. Soit le levier AC (Tab. 6 fig. 1.), qui soit lié par les deux puissances P & D, selon les directions A F, & E D; si on conduit des points E & A, les perpendiculaires C D, & C A sur les lignes de direction de ces puissances, il y aura équilibre entre ces deux puissances, si D : P :: C D : C A. Cette proportion est d'une grande utilité pour déterminer la force des muscles qui font mouvoir les bras lorsqu'on veut élever quelques poids. En effet, soit A B (Tab. 6, fig. 2.) l'omoplate, qui reçoit dans sa cavité la tête C D de l'humérus; que C G représente cet os, G K le cubitus, ou l'os du coude, auquel est attaché le carpe, où sont jointes les phalanges des doigts, aux extrémités desquelles H, pend un poids P. Le muscle deltoidé E D F, qui, par sa contraction, élève le bras, s'attache, par ce mouvement, à la tête de l'humérus sous la cavité de l'omoplate au point C, qui est le centre de ce mouvement; si de ce point C on mène la perpendiculaire C D, qui rencontre le ventre du deltoïde au point D, où il est en contact avec la tête de l'humérus; alors C D pourra être considéré comme une partie d'un levier, à l'extrémité D de laquelle est appliquée la puissance motrice de C H comme l'autre partie du même levier, à l'extrémité de laquelle pend la puissance P. Dans cette hypothèse, pour qu'il y ait équilibre entre la puissance & le poids qu'elle doit soutenir, il faut que l'on ait cette proportion, D P : H C : C D, ou trois quelconques que H C : C D :: 100 : 14. Mais cette proportion n'est pas constante; parceque le diamètre de la tête de l'humérus est différent dans différents sujets, & même dans le même homme, suivant qu'il avance en âge, pendant tout le temps de sa croissance. En admettant néanmoins cette proportion, si un adulte soutient en H un poids de 20 lb, son bras étant tendu, la force de la puissance en D est de  $\frac{100 \times 14}{100} = 14$  666; mais la force du deltoïde est bien encore plus grande; parcequ'il non-seulement il touche la tête de l'os, vers sa partie supérieure, mais encore

FIG. 8

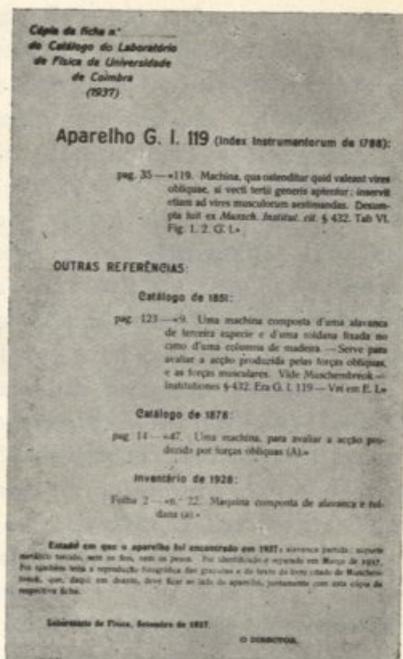
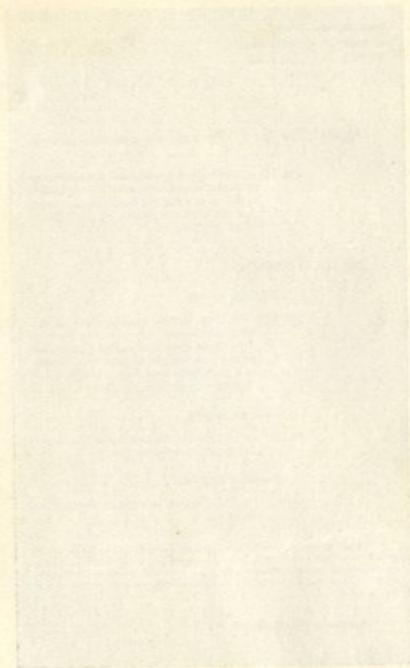
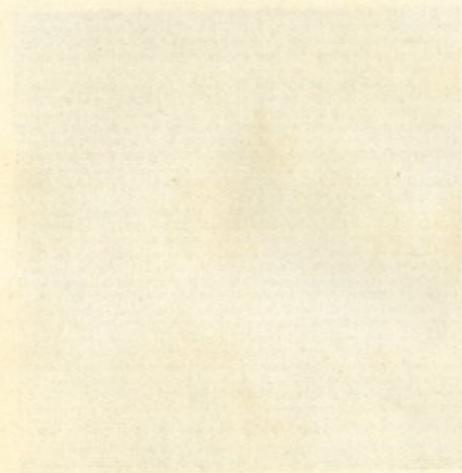


FIG. 9



vimos há pouco, todos os aparelhos têm, no Catálogo, um número de ordem e a indicação do armário e da prateleira; houve o louvável cuidado, por parte de dalla Bella, de gravar estas mesmas indicações nos aparelhos. Assim, o aparelho que há pouco indicámos (veja-se a fig. 4) é o aparelho G. I. 119. Pertence ao número dos «salvados». Pode vêr-se a sua fotografia na figura 6; encontrámo-lo partido, coberto de bolôr, em monte com restos de outros aparelhos. Apesar de ser um aparelho de aspecto simples, sem partes complicadas, confessamos hoje que quando pela primeira vez lhe pegámos, ficámos um pouco sem saber qual poderia ser o seu funcionamento e para que poderia servir. A sua identificação e o seu estudo puderam contudo ser feitos com o auxílio do *Index Instrumentorum* porque encontrámos bem gravada, quer na base do aparelho, quer na alavanca, a indicação G. I. 119. Fomos ao *Index Instrumentorum*, ao n.º 119, e lêmos o que atrás ficou transcrito e que também se vê na figura 4. A idéia que logo colhemos, foi depois completada com a leitura do texto citado pelo Catálogo, e com a observação das gravuras também citadas; reproduzimos a fotografia do texto e das gravuras nas figuras 7 e 8. O aparelho considerado serve para avaliar a acção de fôrças applicadas a uma alavanca inter-potente, no caso em que a potência tem uma direcção que faz um certo ângulo com a alavanca. Como applicação prática, indica-se no texto a acção do músculo deltoide no movimento do braço. (De passagem notamos um erro curioso no texto e que na fotografia marcámos com uma cruz: a proporção escrita está errada; deve ser  $D : P :: CA : CD$ ). Foi com tôdas estas indicações que se tornou possível fazer a restauração imediata do aparelho, mandando reparar o que estava partido e montando-o tal como êle deve funcionar.

Desde o princípio do nosso trabalho, logo nos convencemos da necessidade que havia de registrar, em fichas próprias, tôdas as indicações dos aparelhos restaurados, e por forma a fazer-se, ao mesmo tempo, o inventário do novo Museu. Veja-se, por exemplo, para o aparelho que acabamos de considerar, a fotografia da ficha que foi feita (figura 9). Hoje, o aparelho está guardado no seu armário e prateleira, e tem ao lado uma cópia desta ficha e também reproduções fotográficas das gravuras e do texto que indicámos.

Pelo que acabamos de dizer se pode concluir que em nenhum

caso é possível duvidar da autenticidade da origem dos aparelhos encontrados e restaurados; o cuidado que teve dalla Bella na sua marcação, permite hoje incluí-los, com tóda a segurança, na colecção pombalina. Pena é que da antiga e riquíssima colecção, apenas tivesse sido possível encontrar um bem pequeno número. Mas o que resta justifica largamente todo o trabalho que tivemos. Vejam-se agora, com efeito, as duas fotografias que reproduzimos nas figuras 10 e 11, e que mostram o aspecto actual da sala pombalina. Nada de parecido com o seu aspecto de há um ano. Mobiliário e aparelhos, tudo é da mesma época. Já não há contrastes arripantes. Ao valor artístico das decorações e ao valor material das estantes, das mesas de trabalho e das peanhas em pau preto e pau setim, junta-se harmoniosamente o valor científico dos aparelhos em ferro ou em latão primorosamente trabalhados. O conjunto constitui bem um magnífico Museu de Física do século XVIII, e bem nosso pelo seu aspecto caracterizadamente pombalino.

Ocupemo-nos, por último, de algumas das suas curiosidades. Entre os primeiros aparelhos ou dispositivos experimentais do *Index Instrumentorum*, vejamos o n.º 16. Lêmos no *Index*: «*Paterae binae, altera ex auro, altera ex ferro multis et aequalibus pertusae foraminibus. Tripōdi ferreo impositae, quibus cernitur per poros corpōrum amplos non transire aliquando materiae particulas multo subtiliores. A. II.*».

Trata-se portanto de dois crivos, «um de ferro, outro de ouro, com muitos furos iguais, que se montam numa trempe, e servem para mostrar que pelos poros grandes dos corpos não passam muitas vezes particulas muito mais pequenas». Aqui está uma explicação que não deixará de surpreender quem nunca tenha lido livros de Física do século XVIII, quem nunca tenha admirado as engenhosas explicações que então se davam de fenómenos cuja causa era atribuída à chamada porosidade dos corpos. Mas vejam-se essas explicações e logo se compreenderá que a experiência dos crivos tem a sua justificação. Tomemos um

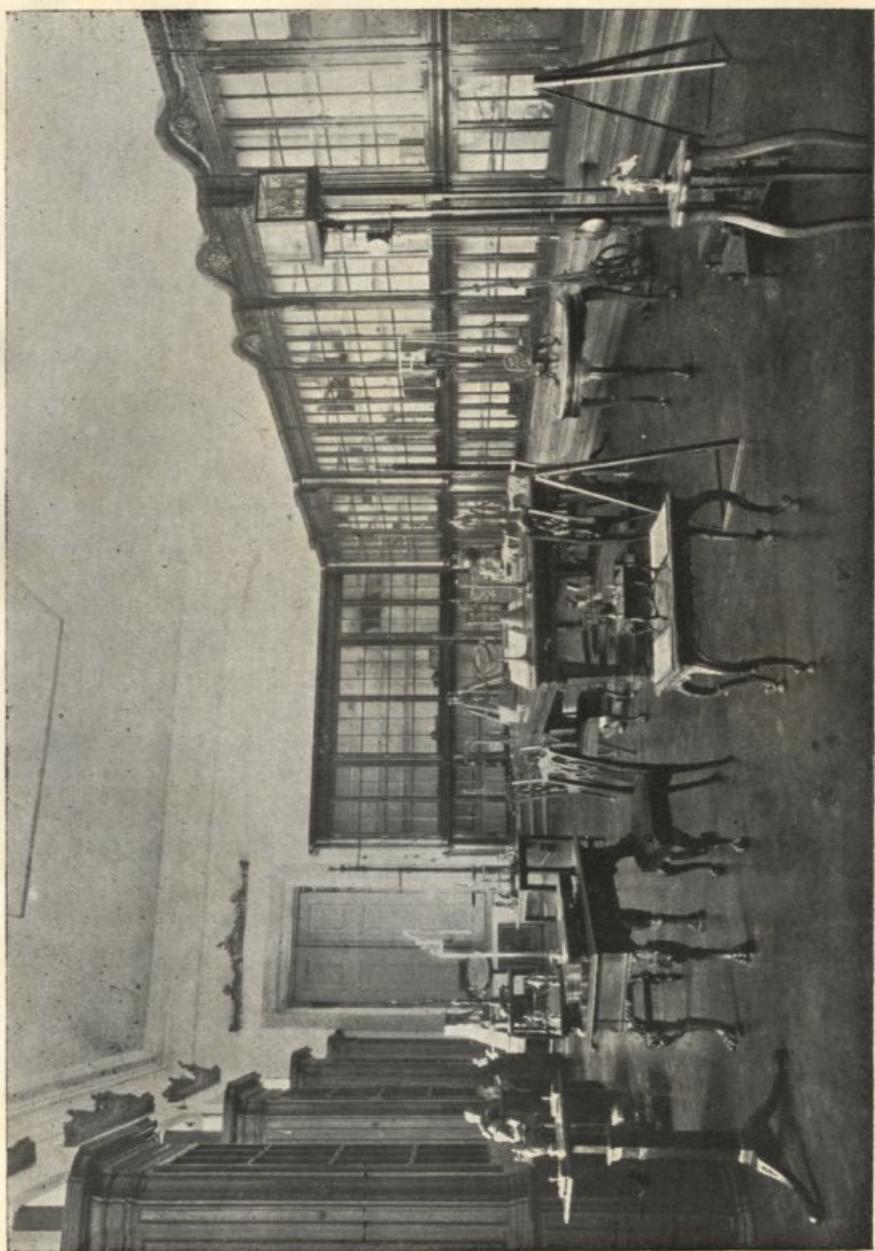
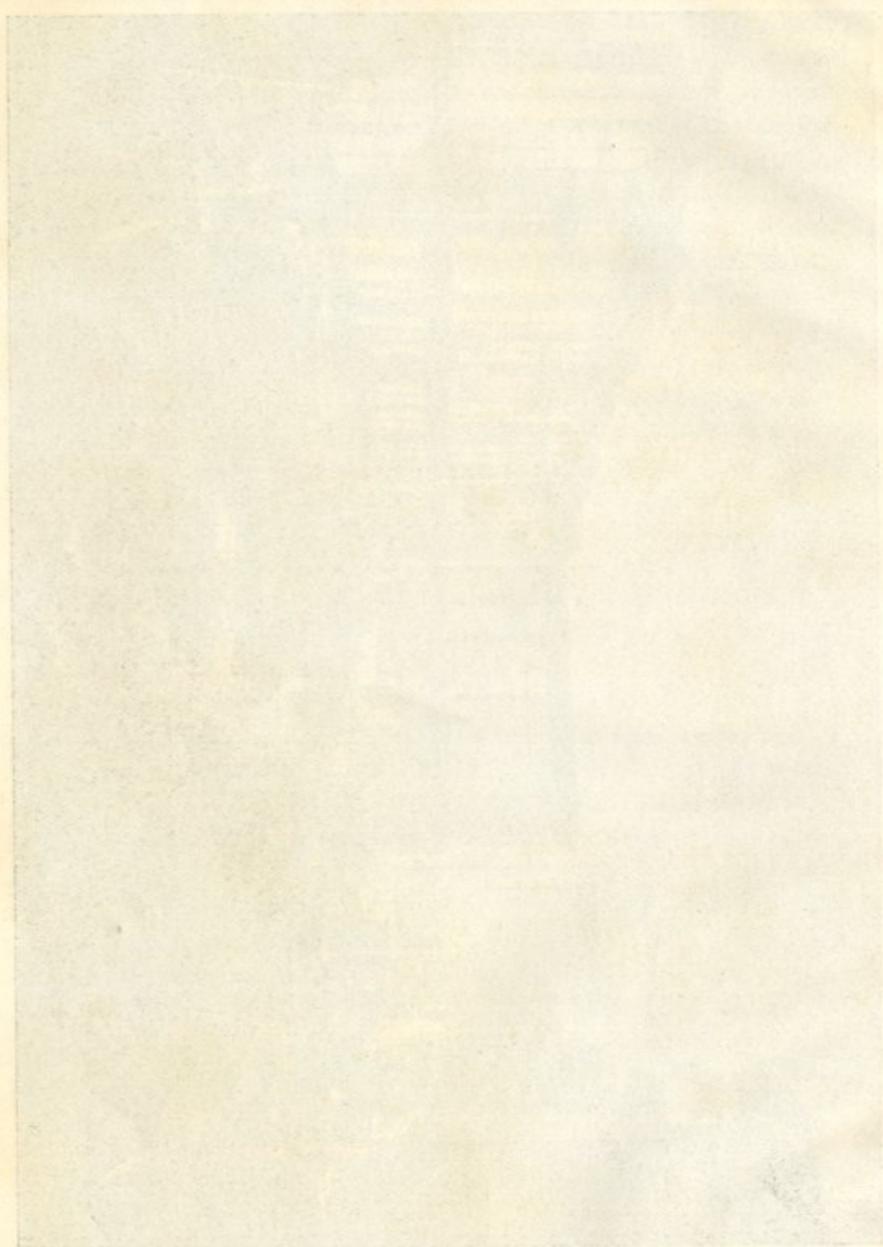


FIG. 10



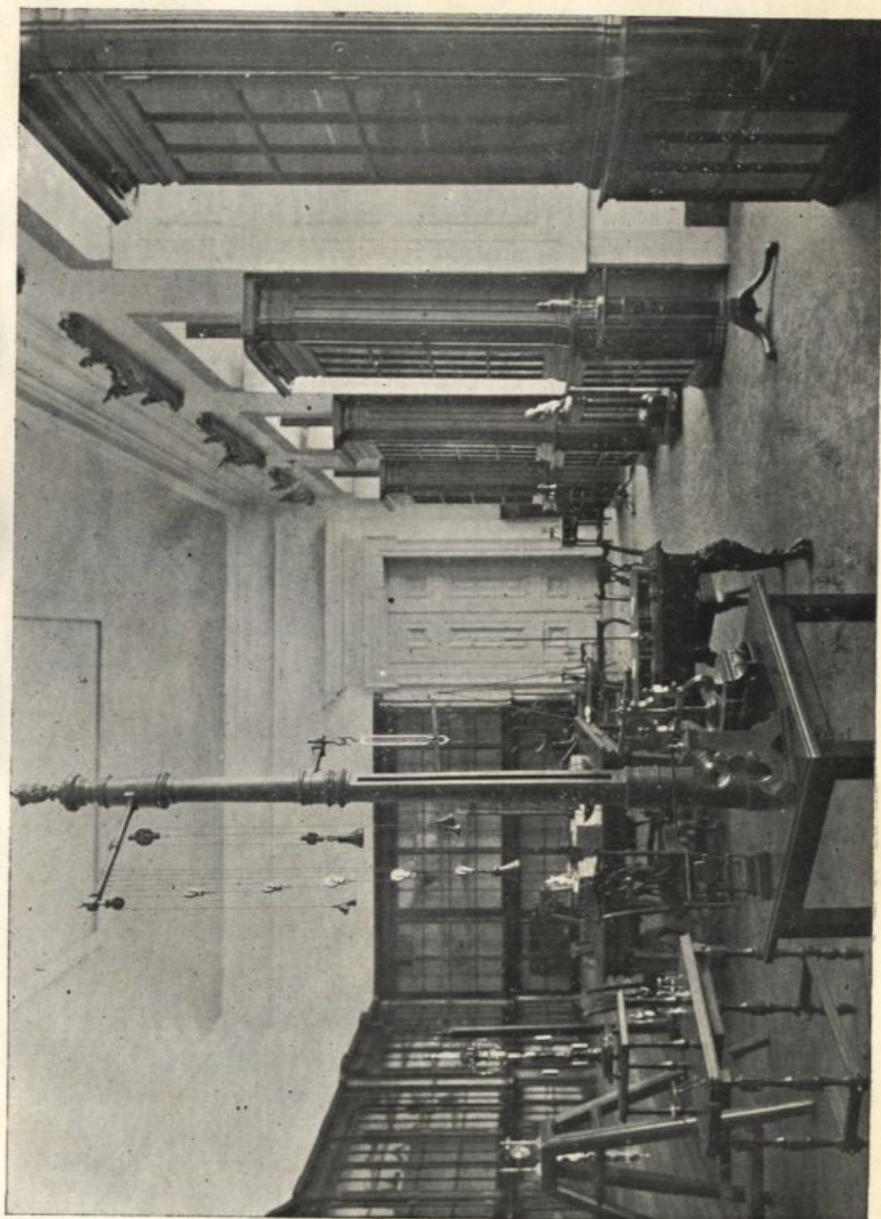
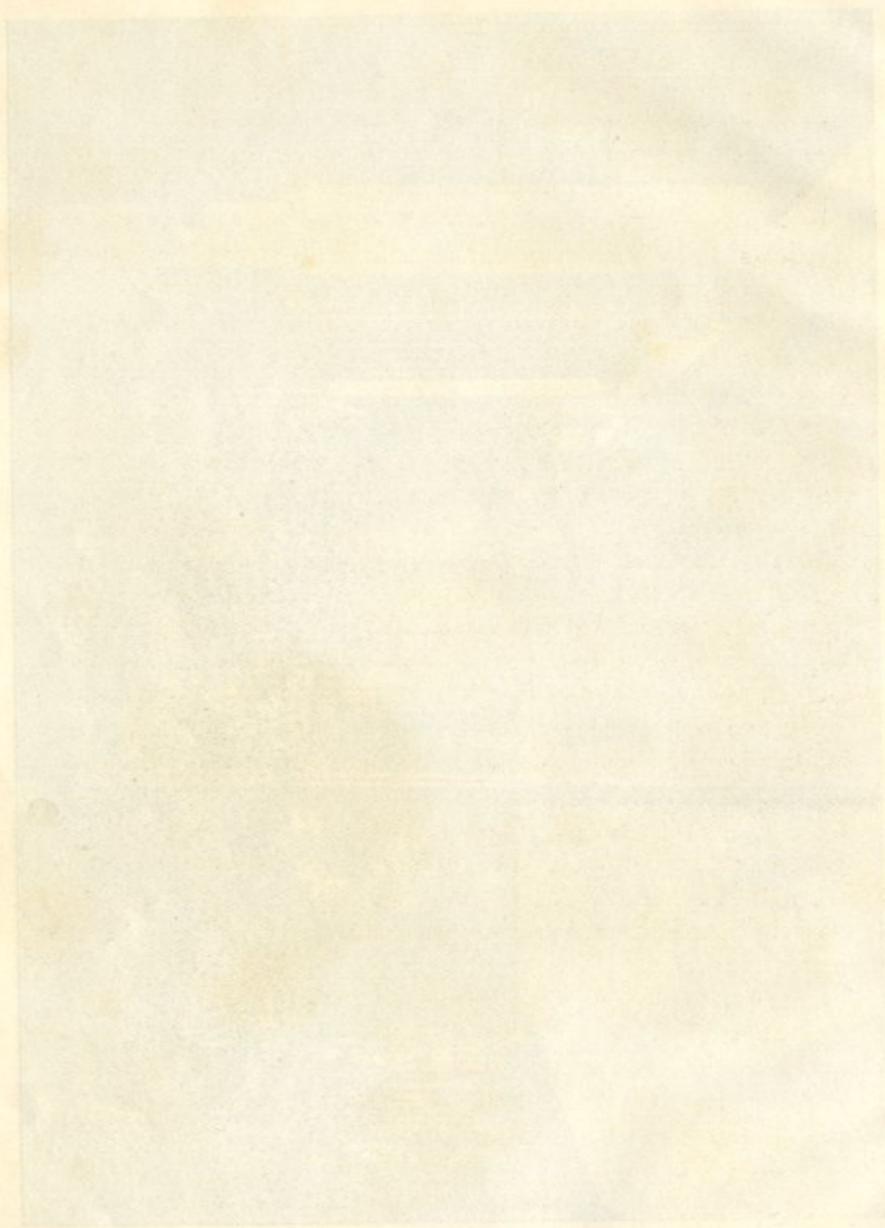


FIG. 11



exemplo muito comentado nos livros antigos: porque razão ataca o mercúrio o ouro? Nada mais simples de explicar para os Físicos do século XVIII. Não diz Newton, no seu Tratado de Optica, livro 2, parte 3.<sup>a</sup>, proposição 8, página 313, que o ouro tem mais poros que partes sólidas? Por outro lado, não é o mercúrio mais poroso, isto é, menos denso que o ouro? Qualquer Físico do século XVIII compreende então que as partículas do mercúrio se podem insinuar pelos poros do ouro e provocar o seu ataque. O pior está em explicar que outros corpos com partículas ainda mais pequenas do que as do mercúrio não atacam com a mesma facilidade o ouro. Mas justamente intervém então a experiência dos crivos. Não mostram êles, com efeito, por assim dizer, em ponto grande, que «*per poros corporum amplos non transire aliquando materiae particulas multo subtiliores*»?

É claro que não podemos, hoje, deixar de sorrir com a feição ingénua de uma tal demonstração. Que êste sorriso nos não impeça, porém, de admirar o conjunto do dispositivo experimental descrito no *Index Instrumentorum*. Reproduzimos a sua fotografia na fig. 12. O conjunto tem incontestável beleza. Os crivos estão suspensos, elegantemente, por duas figuras aladas que são de bronze donrado. Foram estas figuras, juntamente com outras duas perfeitamente iguais, que encontramos como dissemos atrás, no Museu Machado de Castro onde tinham sido depositadas no tempo de Antonio Augusto Gonçalves pelo Dr. Teixeira Bastos. Os crivos e a trempe estavam no Laboratório: o crivo de ouro bem guardado, mas o de ferro e a trempe, só por acaso se não perderam — enegrecidos por uma oxidação de muitos anos, perdidos no fundo de um armário, estavam de mistura com sucata sem valor.

Passemos ao número 121 do *Index Instrumentorum*.

Lemos: «*Machina constans ex Vecte recurvo, ex lamina triangulari metallica, ex tribus rotis in capsula ferrea, et ex lamina lignea ad Paradoxum mechanicum Mariotti demonstrandum*». A máquina serve para a demonstração do paradoxo mecânico de Mariotte.

Que é o paradoxo mecânico de Mariotte? Aqui está uma pergunta capaz de embarçar qualquer eminente físico do século XX. Ninguém hoje fala no paradoxo mecânico de Mariotte.

Vejamos rapidamente em que consiste. Para isso socorramo-nos da citação feita pelo *Index Instrumentorum*. Além das obras de Mariotte, o Catálogo manda ver S. Gravesande, Tab. xiv, figs. 2, 3, 4. Reproduzimos a fotografia desta estampa na fig. 13, onde se vêem as figuras citadas do livro n.ºs 2, 3 e 4. Na figura considerada, *ABC* representa uma alavanca com os braços formando entre si um ângulo de  $120^\circ$ ; em *A* e *B* estão suspensos os pesos, respectivamente *Q* e *P* (fig. 2). O primeiro é de 1 onça, o segundo de 2 onças. Como *Cf* é metade de *AC*, os pesos equilibram-se. Verificado isto, troquem-se os pesos: o péso *P* de 2 onças suspende-se em *A* (fig. 4); quanto ao péso *Q*, em vez de o suspender em *B*, encoste-se simplesmente à alavanca por meio da roldana central, mais pequena do que as duas exteriores; estas, por sua vez, ficam apoiadas sobre a prancha *T*. O paradoxo consiste em que o equilíbrio se mantém nestas condições apesar de estar agora o péso *Q* que é menor do que *P*, aplicado ao braço menor, e o péso *P* que é maior do que *Q* estar aplicado ao braço maior. É curioso realmente que o equilíbrio se mantenha mas a explicação nem sequer a damos: qualquer aluno é hoje capaz de explicar, sem a menor dificuldade, o paradoxo mecânico de Mariotte.

Como há pouco, mostremos também agora a fotografia do aparelho que existe no Laboratório. Reproduzimo-la na fig. 14. Se a compararmos com a do livro de S. Gravesande mais uma vez nos poderemos certificar do gosto artístico do material pombalino.

Vejamos um outro aparelho. Seja agora o n.º 181 da colecção.

Lêmos no *Index Instrumentorum*: «*Bilanz P. Marini Mersenni, quae optime representatur a Fig. 4. Tab. XXXV. Physices Elementa Gravesande, et ab eodem describitur pag 292 § 1072. Vid Mersenni Novarum observationum Physico-Mathematicarum. Tom III. pag 63 et pag 108.*»

Trata-se pois da balança de Mersenne. A balança de Mersenne também hoje não é conhecida. Embora o caso pareça estranho, a balança de Mersenne não é uma balança que sirva para pesar. Leibnitz diria que não é destinada a avaliar *fôrças mortas*; diria antes que serve para avaliar *fôrças vivas*. Cito Leibnitz para desde logo fazer compreender que a balança de Mersenne é um dos muitos aparelhos e dispositivos experimentais imaginados engenhosamente para resolver a «grave» ques-

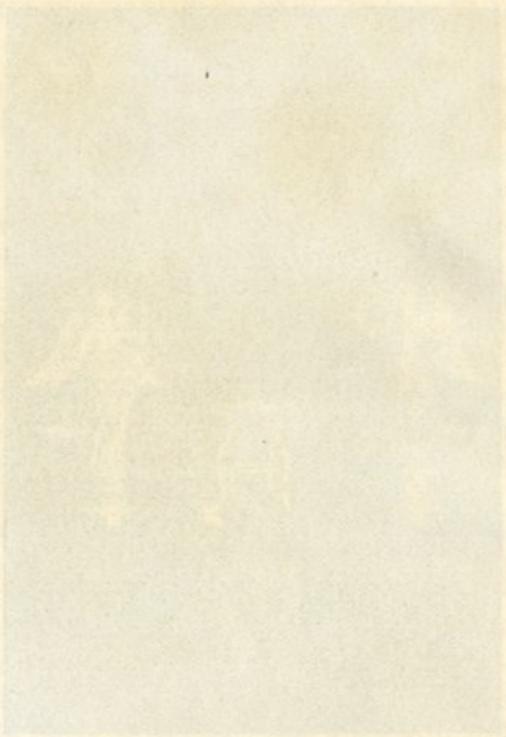


FIG. 12

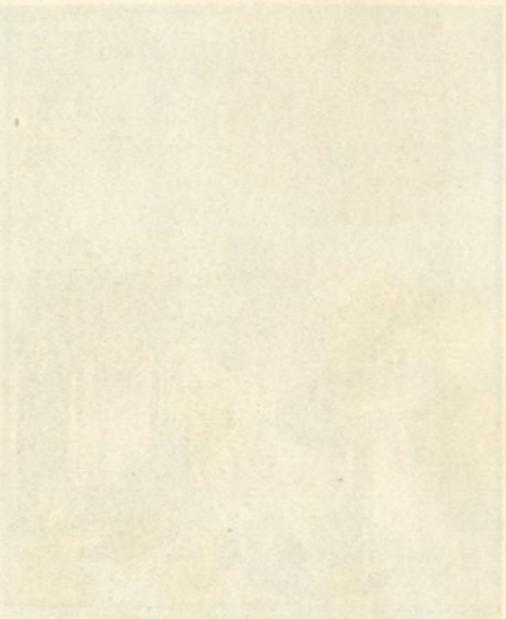


FIG. 13

Faint, illegible text on the left side of the page, possibly bleed-through from the reverse side.



Faint, illegible text on the left side of the page, continuing from the upper section.



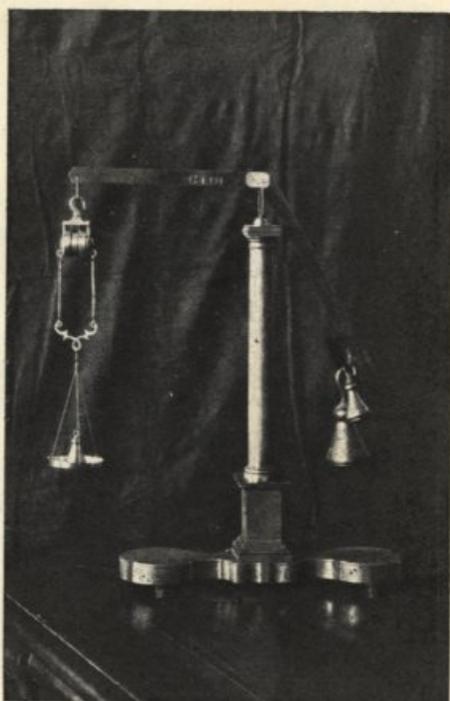
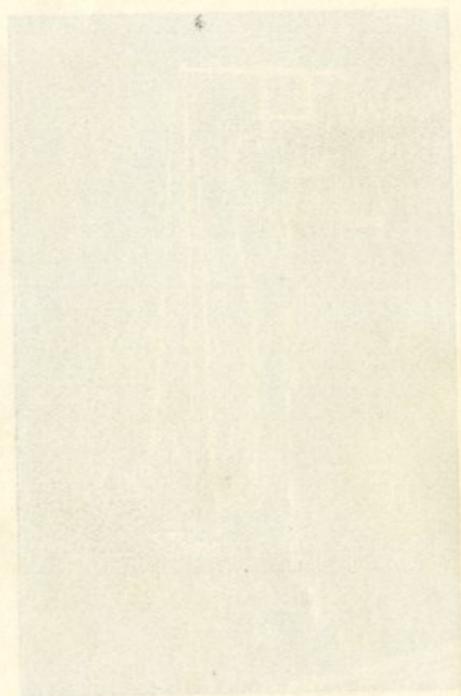
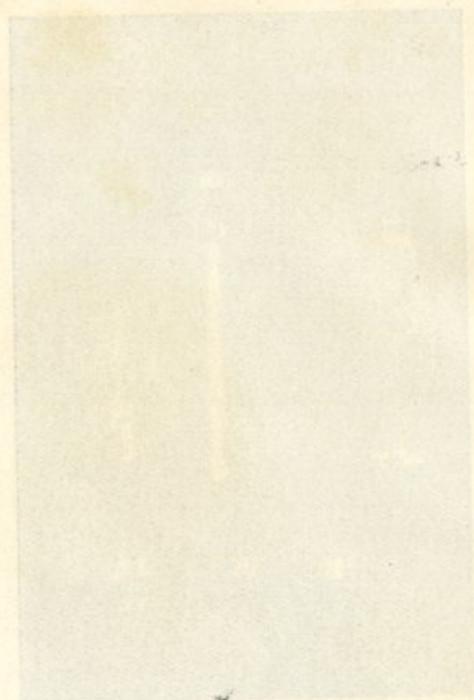


FIG. 14



FIG. 15



tão que durante parte dos séculos XVII e XVIII tanto apaixonou não só os físicos da época, como literatos como Voltaire. Trata-se da célebre avaliação do que então chamavam «a força de um corpo em movimento». E conhecida a origem da questão. Descartes afirmou que essa força se determina pela quantidade de movimento, quere dizer, é proporcional à massa e à velocidade. Leibniz, pelo contrário, na sua célebre nota *Brevis demonstratio erroris memorabilis Cartesii, et aliorum*, publicada em 1681, afirmou que essa força, a que então deu o nome de força viva em oposição à força morta, manifestada, segundo êle, nos corpos em repouso, se determina pelo produto da massa pelo quadrado da velocidade. Tudo isto é bem sabido, e bem sabido é também como o bom senso de d'Alembert, em 1741, fez terminar a questão, esclarecendo-a por completo. Á data, portanto, da redacção do nosso *Index Instrumentorum*, em 1788, já não havia polémica, embora ainda se fizessem as demonstrações experimentais mais curiosas aduzidas em favor de um ou do outro ponto de vista antagónico. Por isso se verifica a descrição no *Index*, de aparelhos inventados pelos cartesianos e de aparelhos inventados pelos leibnitzianos. Deviam servir a dalla Bella para expôr nos seus cursos um e outro ponto de vista. Com a balança de Mersenne nota-se a coisa curiosa de, apesar de Mersenne ter sido um cartesiano convicto, a balança servir, segundo Gravesande, para mostrar a razão do ponto de vista leibnitziano. Embora dalla Bella nos seus *Physices Elementa* não faça uma referência expressa à balança de Mersenne, é de presumir que êle a utilisasse como Gravesande. Recordamos a propósito que dalla Bella foi discípulo de Poleni, e êste foi um dos mais ardentes defensores de Leibnitz.

O modelo da balança de Mersenne, descrito por Gravesande, nada tem de notável. Pelo contrário, o modelo do Laboratório é de uma elegância agradável. Reproduzimos a sua fotografia na fig. 15.

\*

\* \*

Não seria possível dar aqui, no curto tempo desta comunicação, uma descrição pormenorizada de todo o material que constitúi hoje o novo museu. Nesta impossibilidade, mas dado

por outro lado o desejo de apresentar, pelo menos, os exemplares mais interessantes, vamos, para terminar, passar em revista os que nos parecem mais dignos de nota, dando apenas o seu nome, as referências que lhes são feitas no *Index Instrumentorum*, e, para um ou outro, alguns pormenores mais curiosos.

A fig. 16 reproduz a fotografia do n.º 269: «*Digestor Papini aeneus, cujus operculum crassis clauditur et retinetur ferramentis emolliendis corporibus serviens vaporum aquae rarefactorum ope: et ad hujusce Machinae usum, clibanus adest ferreus cum craticula, et tripode mobili, in quo ponuntur carbones accensi. Vid. Papin, la Manière d'amolir les os. O. V.*»

Trata-se da Marmita de Papin, com o seu forno. A marmita tinha sido conservada no Laboratório e foi logo encontrada. O forno é que não; tinha sido vendido no leilão a que atrás nos referimos. Durante muito tempo julgámo-lo perdido até que um dia tivemos a sorte de o ir encontrar na loja de um canalizador que o utilizava no seu officio para fundir metais. Pode imaginar-se o estado em que o encontrámos: coberto de ferrugem e enegrecido pelo fumo. De entrada, quasi duvidámos que se tratasse de peça que nos pudesse interessar, tanto mais que o canalizador, cioso da sua prêsca e meio desconfiado pela nossa visita, não permitiu que o tirássemos do canto escuro onde servia. Correndo o risco de comprar algum velho forno sem interesse, tivemos que o pagar adiantadamente, e só depois disso é que conseguimos mandá-lo transportar para o Laboratório. Uma vez aí, uma ligeira limpeza fez logo aparecer, debaixo de uma camada de ferrugem, a desejada indicação do *Index*: O. V. 269.

A fig. 17 reproduz a fotografia do n.º 146: «*Parva Machina ferrea constans ex Rota dentata, et cochlea sine fine. Haec Machina imponitur basi ligneae, ac adjuncto Polypasto n.º 135 descripto, lapidem 512 librarum pondo attolit, adhibita vi admodum exigua. D. II. 1.*»

Trata-se de uma das mais curiosas máquinas que foi possível reconstituir e completar. As diferentes peças não foram, evidentemente, encontradas juntas. Do conjunto, separaram, em tempos, o cadernal e a roda dentada, em ferro, com o parafuso sem fim; o suporte, em madeira, foi encontrado todo sujo num lojão, ao lado da Oficina do Laboratório; quanto à pedra

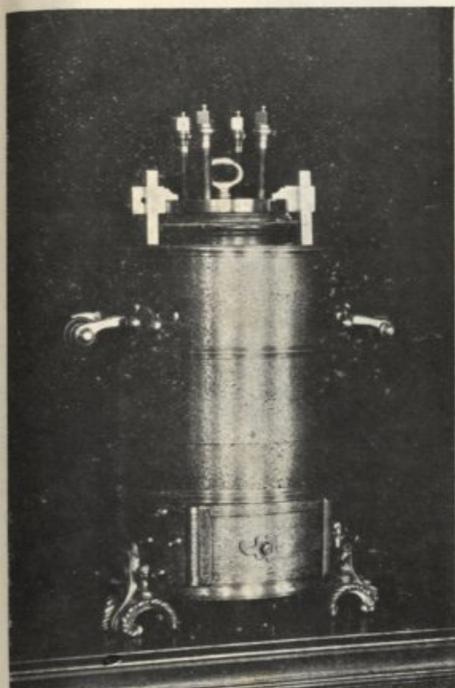


FIG. 16

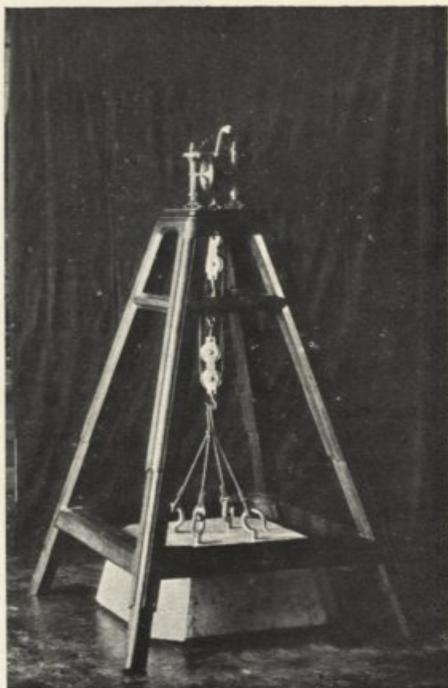


FIG. 17

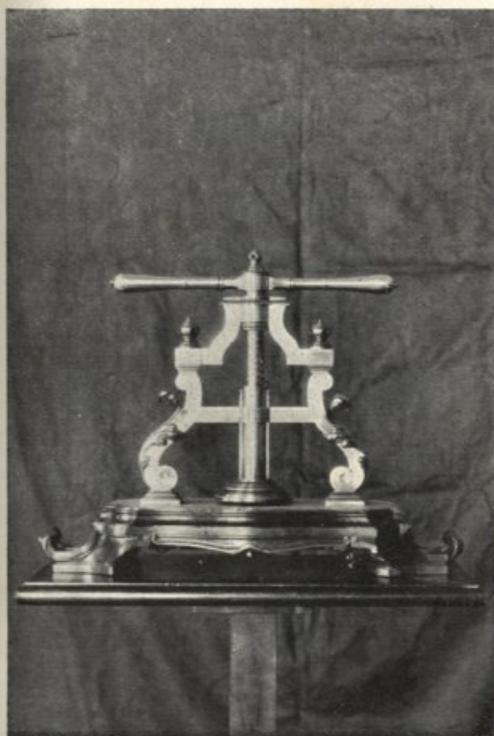
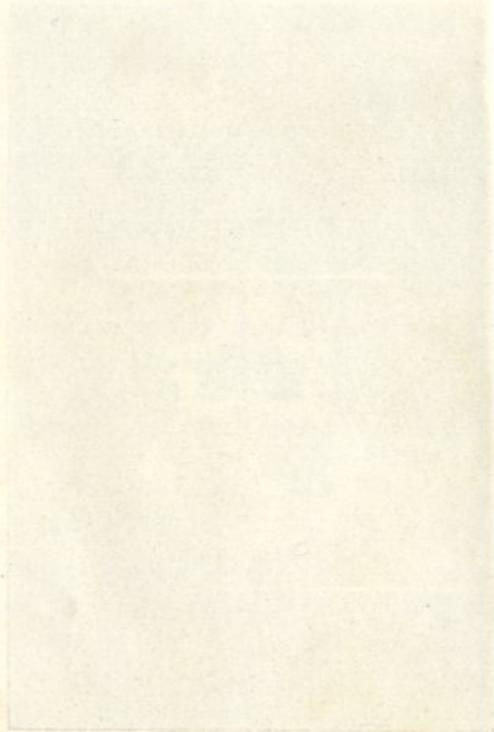
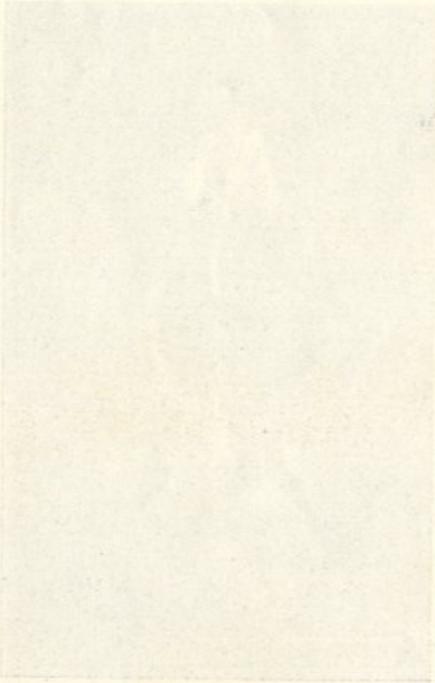
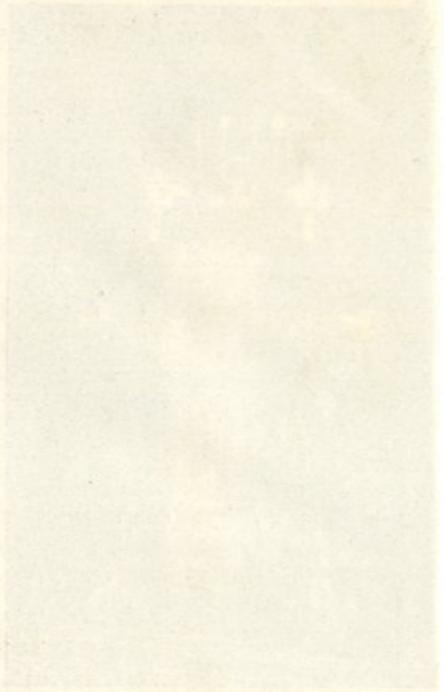


FIG. 18



FIG. 19



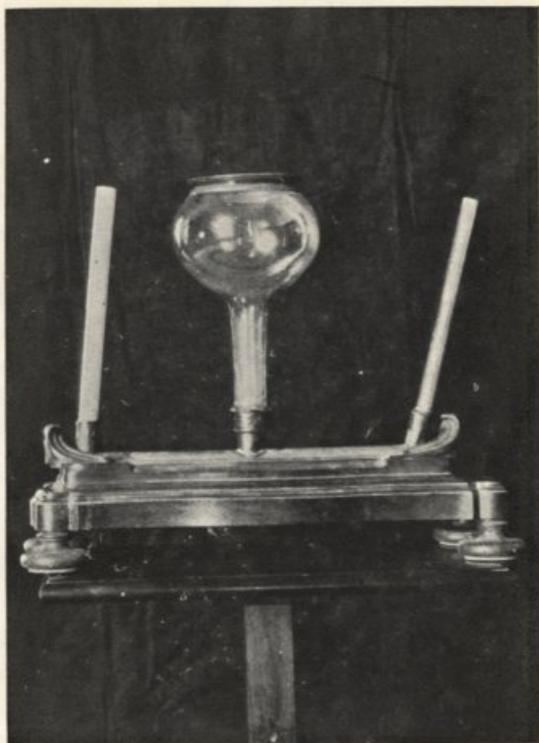


FIG. 20

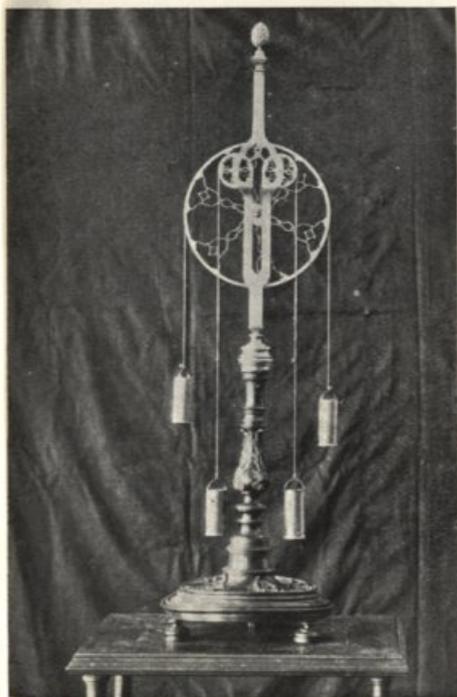
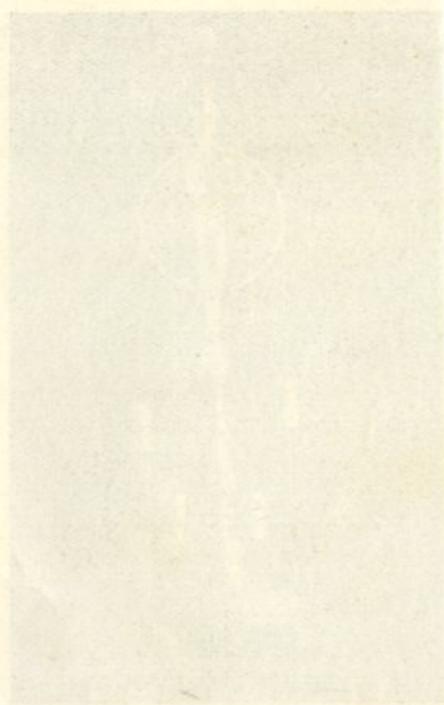
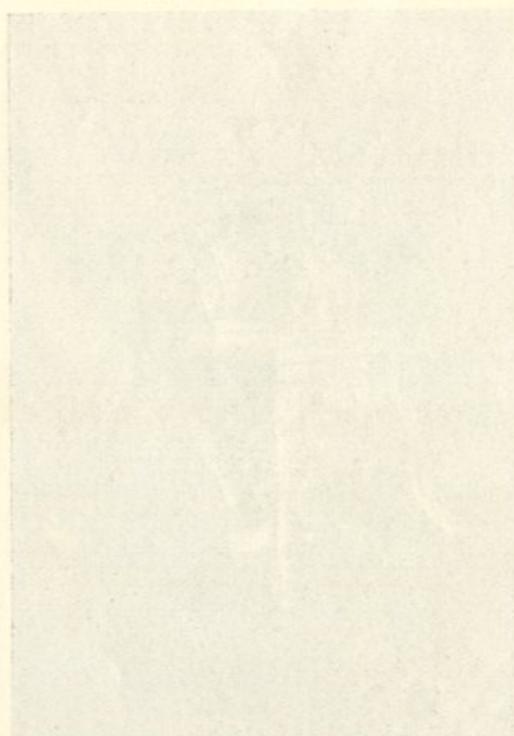
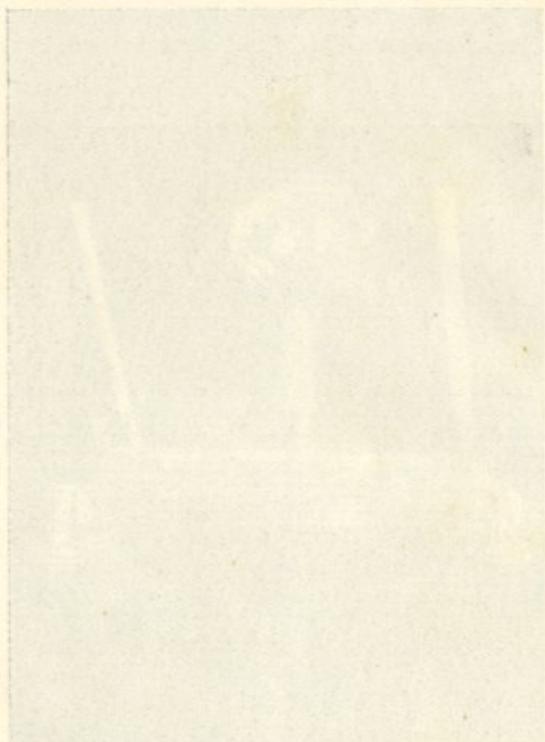


FIG. 21



FIG. 22



de 512 libras, fomos um dia encontrá-la numa quinta dos arredores de Coimbra onde era utilizada como motivo decorativo, visto tratar-se de uma boa pedra mármore. O seu proprietário teve a gentileza de no-la oferecer.

A fig. 18 reproduz a fotografia do n.º 13: «*Praelum partim ex ferro, partim ex orichalco, ad comprimendas pilas aqua fere impletas. Vide Musschembroek Tentamina pág. 63. Tab. XXVI. Fig. 3 A. II. b. 13.*».

Trata-se de uma linda prensa em ferro e em latão; a parte encontrada é a que se refere à indicação do Catálogo A. II. 13; a parte a que se refere a letra *b* não foi encontrada — devia tratar-se de uma mesa em pau preto, relativamente grande, (as letras pequenas do *Index* indicam peças grandes, fora dos armários) e que devia servir de suporte à prensa. A própria prensa ficou no Laboratório e não foi vendida porque foi retirada do monte em que tinha sido posta para leilão, e escondida em lugar seguro no Laboratório, pelo velho empregado dêsse tempo, há anos falecido, Fernando Esteves Vizeu.

As duas figs. 19 e 20 reproduzem as fotografias de dois aparelhos encontrados no liceu D. João III, o primeiro é um equilibrista (n.º 95 do *Index*) — «*homunculus ligneus a Teichemezero inventus*» —, e o segundo é um sistema de vasos comunicantes (n.º 225 do *Index*) — «*machina ex duobus tubis angustioribus, et vase vitreo ampliori composita, cum basi lignea, qua demonstratur fluidum in vasis secum communicantibus, etiam si fuerint diversae amplitudinis, superficiem formare ad libellam*».

A fig. 21 reproduz a fotografia do n.º 179: «*Rota affabre elaborata eo constructa artificio, ut eodem tempore, quo ejus axis ascendit vel descendit, ipsa rota in orbem vertatur. Vid. Nollet. Tom. III. Leçon IX. pág. 84. Plan. IV. Fig. 38. H. I.*».

A fig. 22 reproduz a fotografia do n.º 164: «*Machina ex invento Ab. Nollet. Vid. Tom. 1. Leçon III. pág. 240. Pl. III. Fig. 9. G. III.*».

É um dos mais lindos aparelhos do museu; encontrámo-lo em sofrível estado de conservação, apenas tendo partida a mola que faz girar o sistema móvel, o que foi fácil de reparar.

O *Index Instrumentorum*, como vemos, atribui a máquina a Nollet, mas um outro inventário do Laboratório designa-a com o nome de tribómetro de Desaguilliers. O inventário do Dr. Sanches Goulão descreve-a assim: «*Uma machina elegantemente construida. Compõem-se de uma mēsa com oito pés. Sôbre o plano da mēsa está fixado o aparelho de latão, constando de duas colunas sôbre as quais está fixado um eixo cujas extremidades giram na circumferência de duas rodas. No meio do eixo há uma roda maior, e ao lado desta um elasterio*».

Foi êste um dos aparelhos que mereceu uma referência especial no trabalho atrás citado do Dr. Teixeira Bastos. Eis como êste professor descreve a máquina: «*uma pequena mesa octogonal, de pau preto — estilo rocaille —, servindo de suporte a um tribómetro, com embutidos de pau setim e delicada obra de talha, apresentando conchas nas oito faces laterais, e tendo oito pés, quatro graciosamente encurvados para fora, e outros quatro, alternando com os primeiros, recurvos para dentro, até atingirem os vértices dum quadrilátero de lados curvos, sôbre que a mesa também assenta*».

A fig. 23 reproduz a fotografia do n.º 494: «*Machina ex orichalco super lignea mensula, constans axe instructo lamina spirali elastica, et quatuor alis versatilibus mobilibusque, qua ostenditur aeris resistentia. Hanc Machinam invenit Abbas Nolletus, eamque fabrefactam voluit duplici axe alis munito, duplicique lamina elastica: nostrae autem Machinae alae versatiles sic disponuntur, ut aerem findere possint, utraque superficie, et latiore, et minus lata quemadmodum a Nolletto proponitur. Vid. Nollet. Tom. I, Leç. III. pág. 223. Pl. III. Fig. 7. R. I.*».

Foi também descrita esta máquina pelo Dr. Teixeira Bastos da seguinte maneira: «*outra pequena mesa rectangular de pau preto, semelhante à precedente (n.º 164), mas mais sôbriamente decorada, sôbre a qual assenta um aparelho de latão para experiências de resistência do ar, apresentando conchas nas quatro faces laterais e tendo quatro pés recurvados para fora e ligados diagonalmente no quarto inferior a uma peça central em forma de boceta*».

A fig. 24 reproduz a fotografia do n.º 101: «*Libra ocularis accuratissima, cum duabus lancibus argenteis. Hastae item ex*



FIG. 23

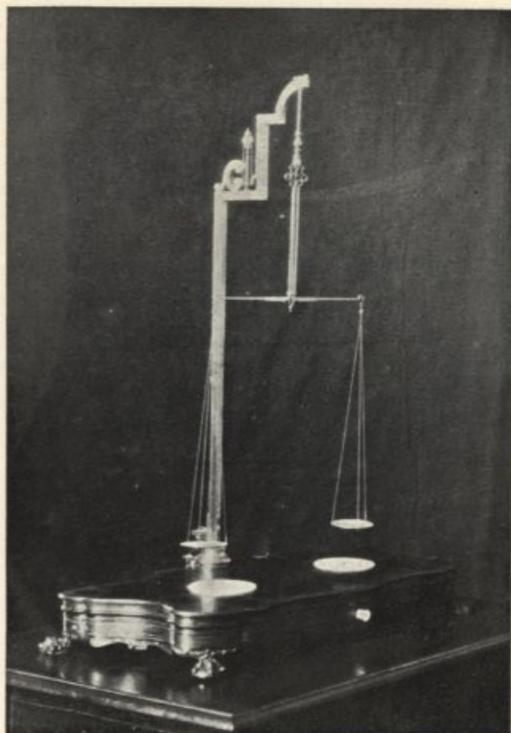


FIG. 24

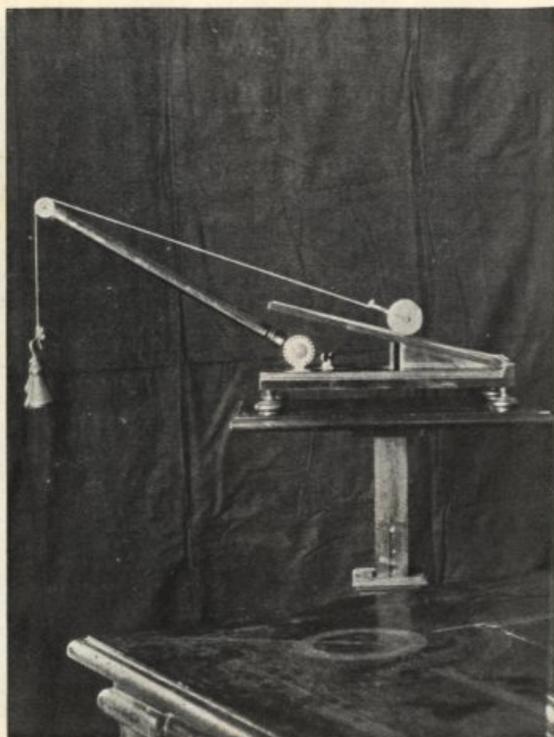
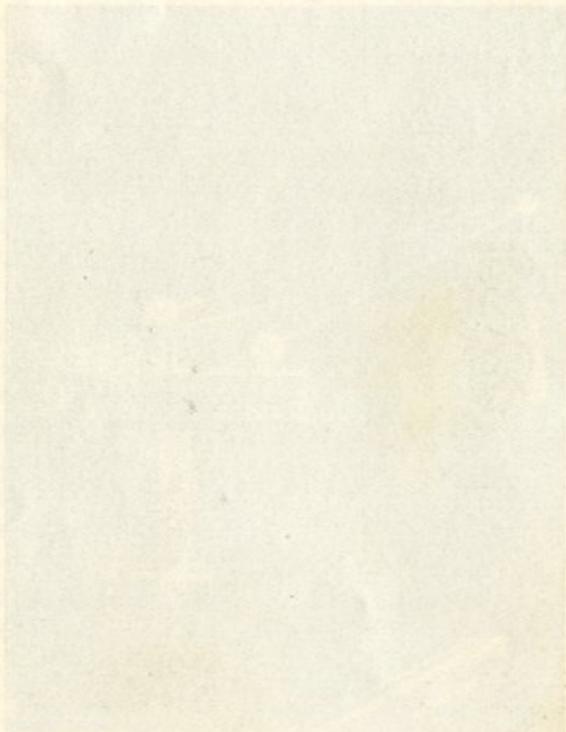
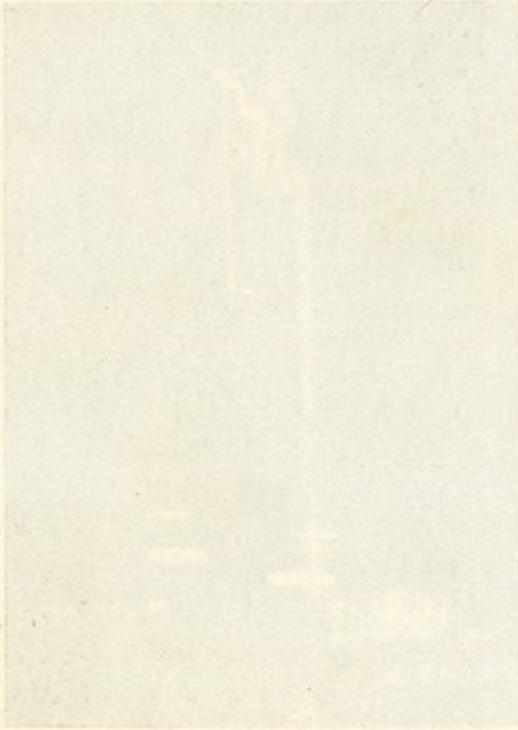


FIG. 25



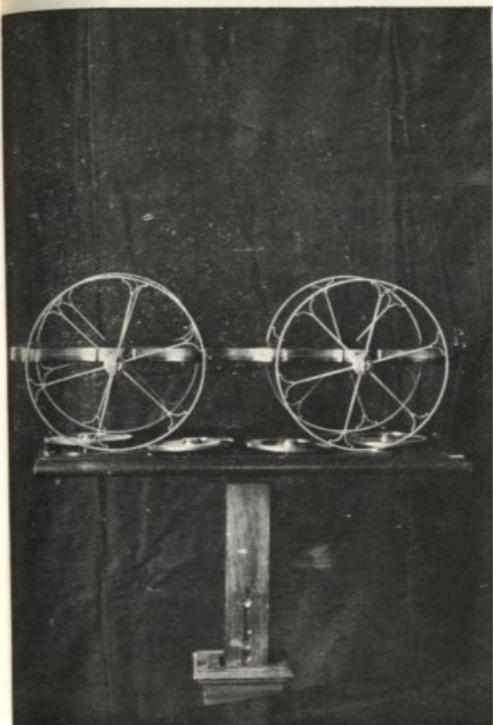


FIG. 26

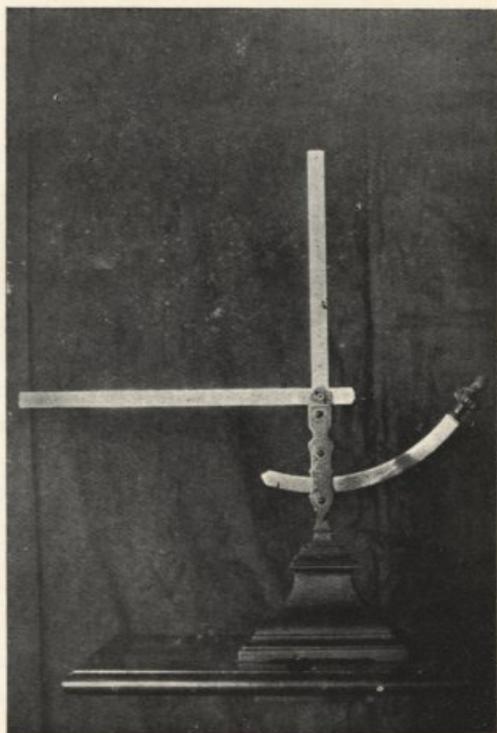


FIG. 27



FIG. 28

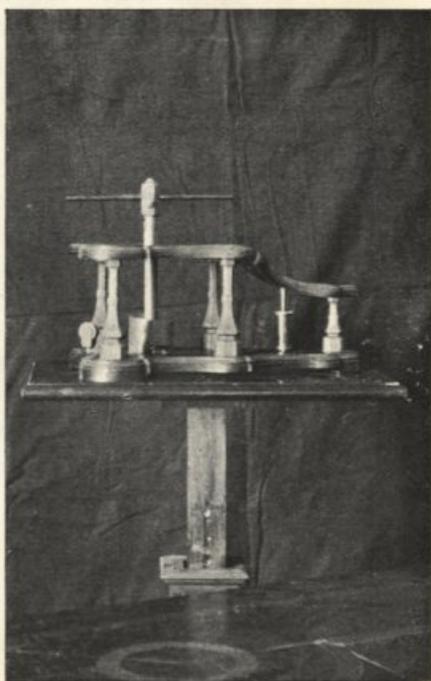
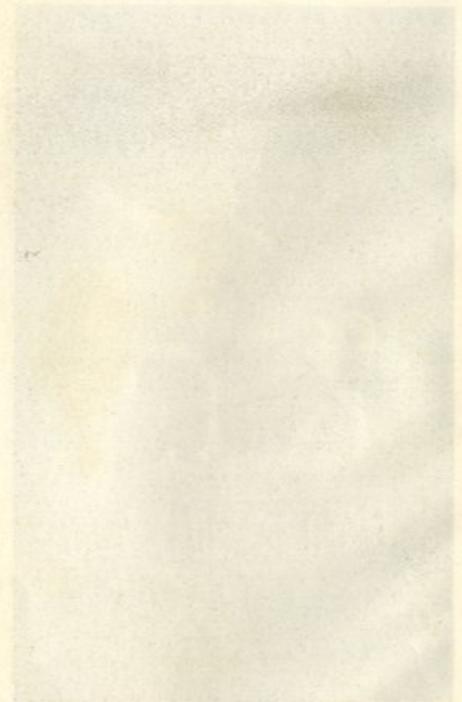
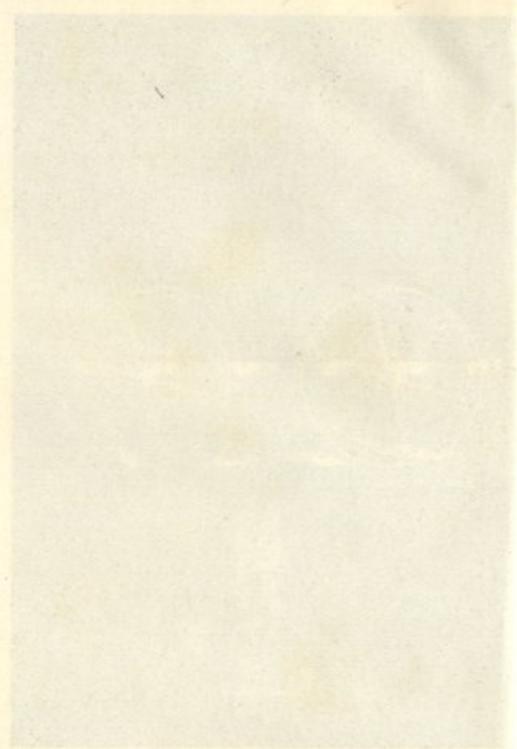
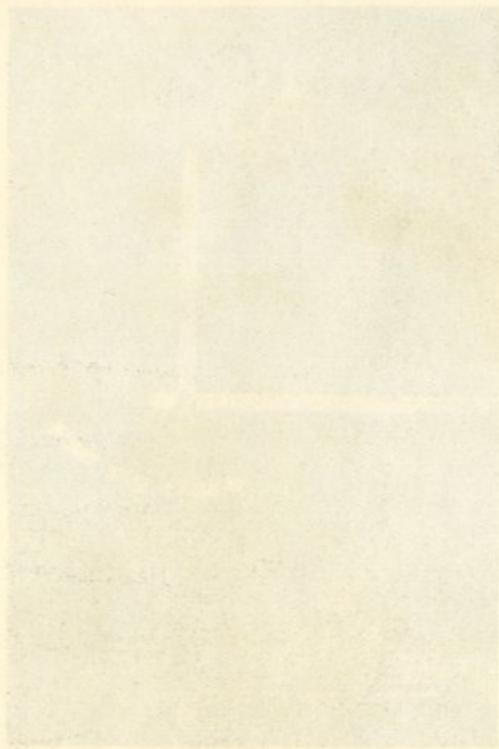


FIG. 29



*orichalco duae cum Trochleis et stylobata elegantissimo, inserviens demonstrandis librarum proprietatibus. Vid. Grav. cit. Cap. X. et Matei Instruzione per li Fabricatori et Aggiustatori delle Bilance C. IV.»*

Trata-se de uma das balanças mais elegantes da colecção; faltam-lhe algumas applicações em prata que desapareceram. A base em pau preto com embutidos em pau setim estava muito estragada—foi reparada com todo o cuidado por um artista entalhador que levou, só pelo trabalho de reparação, 150\$000 escudos.

A fig. 25 reproduz a fotografia do n.º 151: «*Planum inclinatum mobile cum subnexo quadrante ante a indicato. Cylindrus plumbeus cum duabus rotis et axiculo ex orichalco, alioque apparatu. Vid. Desaguliers cit. Leçon III, pág. 115. Pl. II. Fig. 2. D. III.»*

Trata-se de um plano inclinado com um dispositivo curioso para estudar as condições do equilibrio no plano inclinado. As diferentes peças não estavam juntas, foi preciso repará-las e ajustá-las convenientemente, de forma a constituírem o conjunto que se vê na figura e que deve corresponder à forma primitiva.

A fig. 26 reproduz a fotografia do n.º 150: «*Parvus currus cum quatuor rotis ex orichalco, pro quibus substitui possunt aliae quatuor diametro minores sed ponderis ejusdem. Planum instructum quadrante, et fulcro ligneo sustentatum, super quod trahitur curriculum: varie inclinari potest. Vid. Mussch. Introduct. § 456. Tab. VII. Fig. 6. D. IV.»*

Dêste conjunto, só appareceu o carro com as suas 4' rodas maiores (são as que se vêem na figura) e as 4 mais pequenas, por sinal, estas dispersas; foram facilmente identificadas por terem, como diz o catálogo, pêsos iguaes ao das rodas maiores.

A fig. 27 reproduz a fotografia do n.º 123: «*Vectis ex orichalco, ex duobus brachiis compositus gnomonis instar, qui circum axem libere vertitur, et arcus ponderosioris ope subtus cum ipso vecte conjuncti ponitur in aequilibrio, ad proprietates vectis angularis determinandas. Vid. Mussch. cit. § 436. Tab. VI. Fig. 6. B. IV.»*

A alavanca foi encontrada separada da base; esta, em mau estado, poude contudo ser reparada.

A fig. 28 reproduz a fotografia do n.º 159: «*Automaton, quod centauri figuram argenteam profert. Dum movetur sagitam ejaculatur. F. III.*»

Trata-se de uma peça aparatosa, em prata, um automato que representa a figura de um centauro. Foi encontrado em sofrível estado de conservação, apenas a prata um pouco oxidada.

A fig. 29 reproduz a fotografia do n.º 143: «*Ergata cum quatuor phalangis axem permeantibus ad onera moventa. Vid. Mussch. Institut. § 452. Tab. VII. Fig. 3.*».

A fig. 30 reproduz a fotografia do n.º 178: «*Machina lignea qua ostenditur corpora secundum horizontem projecta ferri in linea parabolica, dum annulos quinque in hac curva dispositos pertranseunt. Vid. Grav. § 543. Tab. XIX. Fig. 3. G. IV.*».

A fig. 31 reproduz a fotografia do n.º 323: «*Machina praecedenti (n.º 322) similis: differt tamen in eo, quod parallelogrammum sustineat Prisma ad horizontem perpendicularare. V. III.*»

Trata-se de um suporte de prisma; foi encontrado todo desmantelado; a máquina n.º 322 também foi encontrada: é igual mas o prisma está numa posição perpendicular à dêste.

A fig. 32 reproduz a fotografia do n.º 461: «*Fons aeneus magnus et firmus, in quo aere vehementer compressus ope Antliae n.º 452 memoratae, egerit aquam ad magnam altitudinem. Vid. Nollet, Tom. III. Leç. X. pág. 229. Pl. III. Fig. 16. R. II.*».

A fig. 33 reproduz a fotografia do n.º 358: «*Aliud Microscopium praecedenti simile, cujus lentes differentis magnitudinis, et aliae partes metallicaee, et eburneae in capsula lignea separatim servantur. V. IV.*».

Encontrámos o microscópio em razoável estado de conservação; a caixa tinha sido vendida — fomos encontrá-la, juntamente com outros objectos, em casa do antigo bedel da Faculdade, Abílio Marques dos Santos, que nos disse tê-la adquirido no leilão atrás referido. O microscópio está hoje guardado, no Museu, dentro da sua caixa.

Êste instrumento, curioso na sua forma, tem para nós um interesse especial, pois é uma oferta feita à Universidade, em



FIG. 30

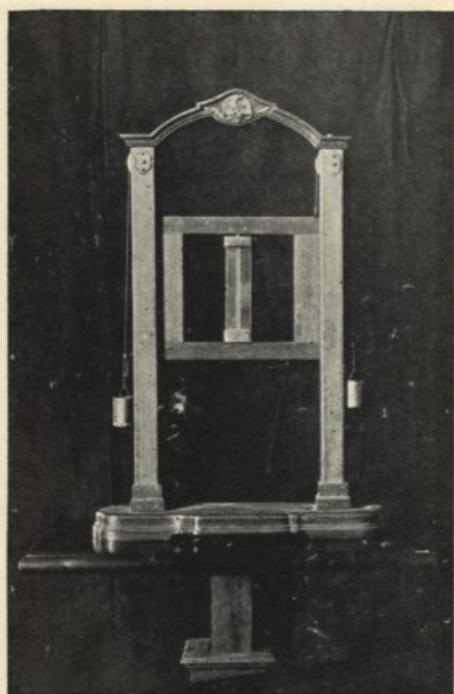


FIG. 31



FIG. 32



FIG. 33

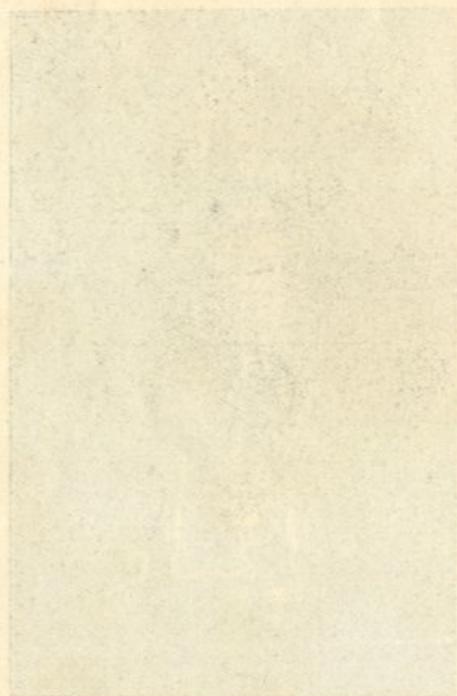
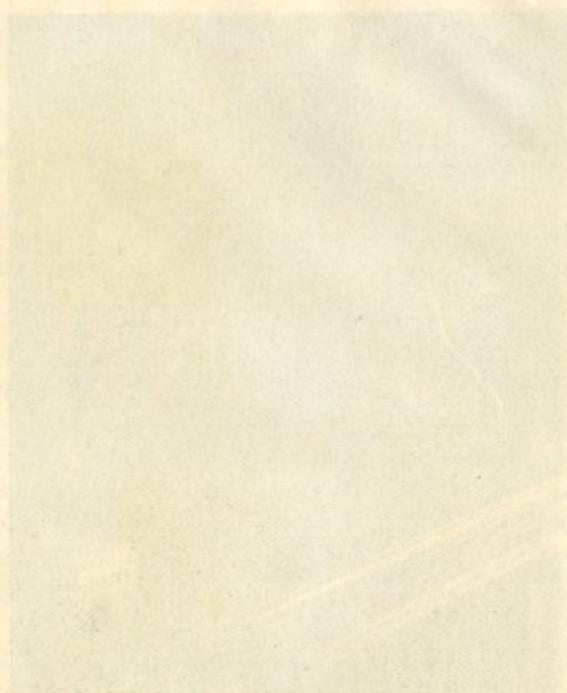
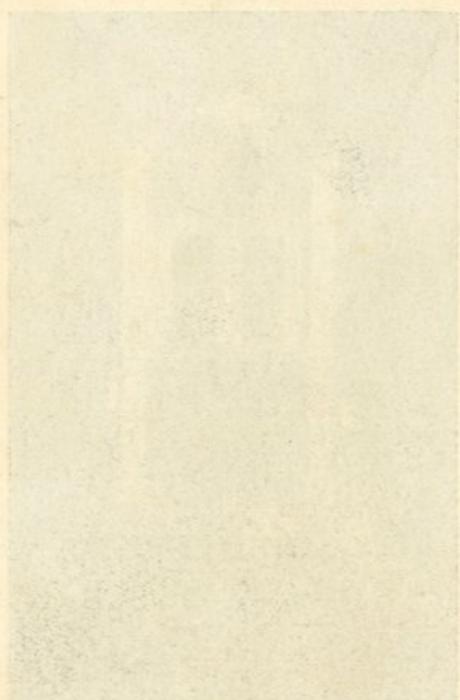




FIG. 34



FIG. 35

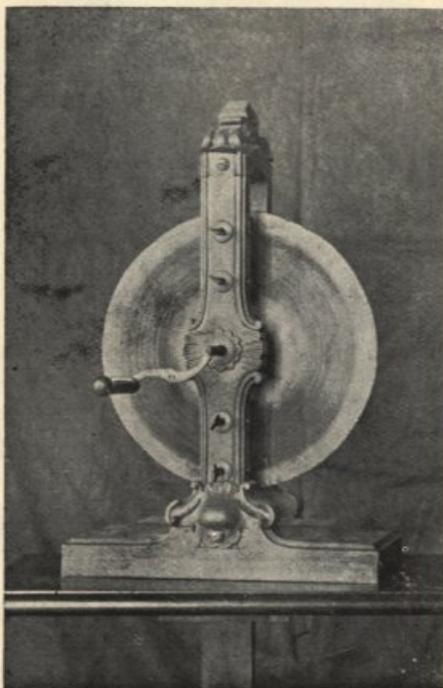
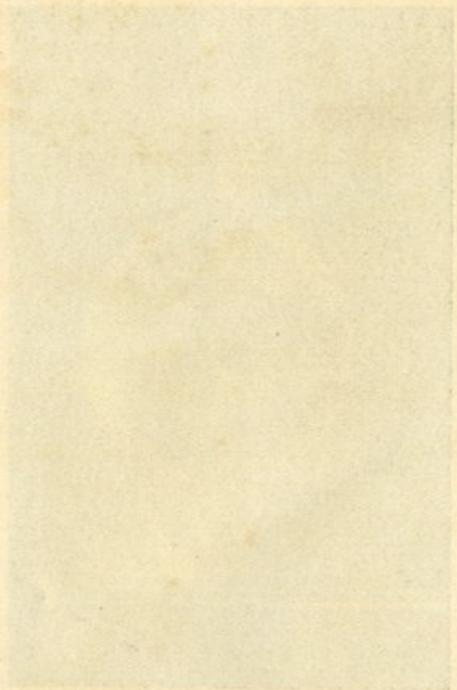


FIG. 36



FIG. 37



1731, pelo conhecido autor da *Teórica verdadeira das marés*, o Dr. Jacob de Castro Sarmiento. A êste facto se refere o sr. Dr. Teixeira Bastos no estudo que já citámos, nos seguintes termos: «Existe no Laboratório de Física um microscópio construído em Londres e oferecido em 1731 à Universidade pelo Dr. Castro Sarmiento, para uso dos professores de medicina nas observações botânicas e anatómicas. Lê-se no pé do instrumento a seguinte inscrição: Jacob de Castro Sarmiento, medicus lusitanus, regali collegii medicorum londinensium collega, regiaeque societatis socius, donavit academiae conimbricensi, in usum medicinae professorum ad observationes botanicas et anatómicas conficiendas. M. D. C. C. XXXI. (Cuepeper, londineus, invenit et fecit). — Era então reitor da Universidade, Francisco Carneiro de Figueirôa, que não alude ao facto nas suas Memórias. — Mostra esta inscrição o alto valor em que era tida a oferta pelo próprio oferente; e todavia, ao lê-la hoje, não podemos deixar de sorrir: trata-se dum instrumento primitivo com objectiva simples e ocular simples, e uma ampliação de 60 apenas».

A fig. 34 reproduz a fotografia do n.º 270: «*Annulus cupreus tribus pedibus insistens, et pila ferrea, quae frigida per annulum transit, calefacta non transit. Vid. Grav. § 2127. Tab. LXXVII. Fig. 1. O. IV.*»

Trata-se do conhecido anel de S. Gravesande.

A fig. 35 reproduz a fotografia do n.º 44: «*Magnes alter figuræ sphericæ diametro linearum 17. pondere unciarum 7. Hic armatus est laminis chalybeis, quae ope quarundam zonarum ex Argento cum Magnete arte conjunguntur. Sustulit pondus unciarum 170. Suspenditur a columna ex orichalco super basim ligneam stabili. M. IV.*»

A fig. 36 reproduz a fotografia do n.º 532: «*Machina Electrica, in qua planum crystallinum orbiculare locum tenet Cylindri vel Globi vitrei. Planum hoc movetur inter quatuor pulvillos duabus parastatis ligneis sustentatos, qui ejusdem plani circumferentiae respondent. Peculiarem habet conductorem ex orichalco, qui insistit pyramidi crystallinae. Vid. De la Fond Traité de l'Electricité, pág. 54. Pl. IV. Fig. 5.*»

A máquina foi encontrada incompleta e em mau estado.

A fig. 37 reproduz a fotografia de uma máquina que tem um aspecto diferente do que apresenta de um modo geral o material pombalino. Com efeito o *Index Instrumentorum*, manuscrito, não faz qualquer referência a esta máquina. Contudo dalla Bella ao imprimir o seu livro *Physices Elementa* descreve-a com o n.º 83: «*Nova Dynamices Machina ab Atwoodio inventa, quae praecipue confirmantur experientia leges, quas sequuntur corpora motu rectilineo ac rotatorio agitata. Vid Atwoodii Opus, cujus titulus est a Treatise on the rectilinear motion and rotation of bodies, Cambridge 1784, pag. 291. Fig. 78. vel Magellan. Description d'une Machine nouvelle de Dynamique inventée par Mr. G. Atwood a Londres 1780. B. III. IV.*»

Trata-se da máquina de Atwood; êste modelo construido em Inglaterra tem para nós o grande interesse de ter sido enviado para Portugal pelo conhecido João Jacinto de Magalhães. A esta máquina se referiu o sr. Dr. Teixeira Bastos no estudo já várias vezes citado; também recentemente a êle se referiu o sr. Dr. Sousa Pinto num estudo que publicou sobre J. J. Magalhães.

Guardámos para o fim uma referência que tem incontestável interesse artístico.

Com o n.º 392 descreve o *Index Instrumentorum* o seguinte: *Theca cum 16 asserculis mobiles, atque immobiles figuras excipientibus elegantissimas, pictas a Zais Veneto in laminis crys tallinis.*

Trata-se de uma colecção que encontrámos felizmente quasi completa, e que é extremamente interessante, de imagens vivamente coloridas pintadas sobre vidro; pela indicação do catálogo verifica-se que constituíam motivos diversos destinados à projecção de uma lanterna mágica. O importante da colecção é que ella é obra de um pintor conhecido da escola italiana *Giuseppe Zais*, paisagista, nascido em Veneza e falecido em Treviso em 1784. No *Dictionnaire Critique et Documentaire des Peintres, Sculpteurs et Dessinateurs de tous les temps et de tous les pays, par un groupe d'Écrivains spécialistes Français et Étrangers sous la Direction de E. Bénézit*, tomo terceiro, pág. 1094, lê-se:

«*Zais (Giuseppe) — élève de F. Zuccherelli. On voit de lui à l'Académie Carrara, à Bergame, un Paysage, et au musée de Venise, Paysage avec fontaine.*»

A estas duas obras de Guiseppe Zais podemos nós agora juntar as que pintou para a colecção pombalina, até agora completamente ignoradas. Nenhum dos Catálogos do Laboratório, mesmo o do Dr. Sanches Goulão, faz a menor referência à colecção. Identificadas agora as curiosas imagens coloridas, ficarão daqui em diante a constituir mais um elemento valioso do novo Museu pombalino.

DR. MÁRIO AUGUSTO DA SILVA

329. O cálculo simbólico apresenta-se mais variado e mais rico, devido à sua grande plasticidade. Vamos dar agora um exemplo importante. Seja

um operador complexo. Se o aplicarmos a uma função homogênea em  $x, y, z$ , de grau  $n$ ,  $w(x, y, z) = x^n + y^n + z^n$ , nos resulta a função de Euler  $E(x, y, z) = nx^{n-1} + ny^{n-1} + nz^{n-1}$ . A função  $E(x, y, z)$  é o operador  $\Delta$  aplicado a  $w(x, y, z)$ . Para a função  $w(x, y, z) = x^n + y^n + z^n$ , temos  $\Delta w = nx^{n-1} + ny^{n-1} + nz^{n-1}$ . Para a função  $w(x, y, z) = x^n + y^n + z^n$ , temos  $\Delta w = nx^{n-1} + ny^{n-1} + nz^{n-1}$ .

330. Por outro lado, é um operador para derivadas parciais. Se o aplicarmos a uma função homogênea de grau  $n$ ,  $w(x, y, z) = x^n + y^n + z^n$ , nos resulta a função  $E(x, y, z) = nx^{n-1} + ny^{n-1} + nz^{n-1}$ . Para a função  $w(x, y, z) = x^n + y^n + z^n$ , temos  $\Delta w = nx^{n-1} + ny^{n-1} + nz^{n-1}$ . Para a função  $w(x, y, z) = x^n + y^n + z^n$ , temos  $\Delta w = nx^{n-1} + ny^{n-1} + nz^{n-1}$ .

## Cálculo Simbólico

(CONTINUAÇÃO)

358. É claro que se o primeiro membro duma equação simbólica se puder decompor num produto de factores mais simples, o cálculo das suas soluções poderá, em geral, simplificar-se. Por exemplo, no caso de a equação ser sem segundo membro, e o primeiro membro se puder decompor em factores, nas condições expressas em os n.ºs 94 e seguintes, o cálculo das soluções da proposta torna-se mais simples, como é manifesto. É o caso da equação do n.º 338.

359. O cálculo simbólico presta-se aos mais variados artificios, devido à sua grande plasticidade. Vamos dar disso mais um exemplo importante. Seja

$$\rho = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + x_n \frac{\partial}{\partial x_n}$$

um operador complexo. Se o applicarmos a uma função homogénea em  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , de grau  $m$ ,  $u_m(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , teremos (pelo teorema de Euler):

$$\begin{aligned} \rho u_m &= x_1 \frac{\partial u_m}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial u_m}{\partial x_2} + \dots + x_n \frac{\partial u_m}{\partial x_n} \\ &= m u_m \end{aligned} \quad (1)$$

360. Por outro lado,  $\rho$  é um operador bem definido, aditivo e permutável com os números, como facilmente se verifica. Além disso pode aplicar-se a uma função dada uma infinidade de vezes. Conseqüentemente,

$$\rho^k u_m = m^k u_m; \quad (2)$$

e, se  $P(\rho)$  fôr um polinómio inteiro em  $\rho$ , teremos do mesmo modo

$$P(\rho) u_m = P(m) u_m \quad (3)$$

361. Suponhamos agora que temos uma equação de derivadas parciais redutível à forma

$$P(\rho) u = X_p + X_q + \dots \quad (4)$$

sendo  $u$  uma função desconhecida das variáveis  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , e  $X_p, X_q, \dots$  funções homogêneas dadas, das mesmas variáveis, de graus  $p, q, \dots$

O cálculo simbólico dá imediatamente uma solução da proposta (que é um integral singular, por não depender de nenhum parâmetro arbitrário) que é

$$u_1(x_1 \dots x_n) = P^{-1}(p) X_p + P^{-1}(q) X_q + \dots \quad (5)$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} P(\rho) u_1 &= P^{-1}(p) P(\rho) X_p + P^{-1}(q) P(\rho) X_q + \dots \\ &= X_p + X_q + \dots \end{aligned}$$

c. d. d.

362. Substituindo na equação proposta,  $u$  por  $u + u_1$ , desaparece o segundo membro e a equação fica reduzida à forma

$$P(\rho) u = 0 \quad (6)$$

363. Como  $P(\rho)$  é decomponível em factores binómios, a resolução de (6) fica reduzida à resolução de equações do tipo (n.º 103)

$$(\rho - a)^\alpha u = 0 \quad (7)$$

sendo  $\alpha$  inteiro e positivo.

Esta equação é muito mais simples do que a proposta (4).

364. Há um caso em que é fácil de reconhecer se uma dada equação de derivadas parciais se pode reduzir à forma (4). Para reconhecer isso, vamos ainda recorrer ao cálculo simbólico.

365. Representemos por

$$\rho' = x_1 \frac{\partial'}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial'}{\partial x_2} + \dots + x_n \frac{\partial'}{\partial x_n}$$

um operador em que os sinais de derivação só affectam as variáveis da função  $u$ ; e por

$$\rho'' = x_1 \frac{\partial''}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial''}{\partial x_2} + \dots + x_n \frac{\partial''}{\partial x_n}$$

outro operador em que os sinais de derivação affectam apenas as variáveis que entram no operador  $\rho$ . É evidente que

$$\rho = \rho' + \rho''$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} \rho \pi(\rho) u &= \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i} [\pi(\rho) u] \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \left[ \frac{\partial \pi(\rho)}{\partial x_i} u + \pi(\rho) \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i} \right] \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \left[ \frac{\partial''}{\partial x_i} [\pi(\rho) u] + \frac{\partial'}{\partial x_i} [\pi(\rho) u] \right] \\ &= (\rho' + \rho'') \pi(\rho) u. \end{aligned}$$

366. Nestas condições é claro que

$$\rho' = \rho - \rho'' \quad \text{e} \quad \rho' u = (\rho - \rho'') u = \rho u.$$

Conseqüentemente, quando applicados a  $u$ , teremos:

$$\rho'^2 = \rho' \rho = (\rho - \rho'') \rho = \rho^2 - \rho'' \rho;$$

mas como  $\rho''$  só affecta as variáveis que entram no operador  $\rho$  e este é, nessas variáveis, uma função homogénea do 1.º grau, segue-se que  $\rho'' \rho = \rho$  (teorema de Euler). Logo:

$$\rho'^2 = \rho^2 - \rho;$$

do mesmo modo

$$\begin{aligned}\rho'^3 &= (\rho - \rho'')(\rho^2 - \rho) \\ &= \rho(\rho^2 - \rho) - \rho''(\rho^2 - \rho) \\ &= \rho(\rho^2 - \rho) - \rho''\rho^2 + \rho''\rho \\ &= \rho(\rho^2 - \rho) - 2\rho^2 + \rho \\ &= \rho^3 - 3\rho^2 + \rho\end{aligned}$$

quando estes operadores são aplicados a  $u$ .

É claro que todas as potências inteiras e positivas de  $\rho'$  se podem exprimir, como as anteriores, em polinômios inteiros do mesmo grau em  $\rho$ .

367. Mas é fácil de conhecer se uma dada equação de derivadas parciais se pode representar simbolicamente pela forma

$$P(\rho')u = X.$$

Na verdade, qualquer termo deste polinômio simbólico, aplicado à função desconhecida  $u$ , dá uma expressão simbólica da forma

$$A \rho'^p u = A \left( x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + x_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^p u$$

cujo desenvolvimento é homogêneo em  $x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}$ ,  $x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$ , ...,  $x_n \frac{\partial}{\partial x_n}$ , sendo os coeficientes os mesmos do desenvolvimento da potência  $p$  dum polinômio. Estes desenvolvimentos reconhecem-se à simples vista.

368. De modo que, se uma equação dada se pode reduzir à forma  $P(\rho')u = X$ , substituindo as diversas potências de  $\rho'$  pelos polinômios em  $\rho$  equivalentes, ficaremos com a equação reduzida à forma

$$P(\rho)u = X.$$

369. Exemplo: A equação

$$\begin{aligned}x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - n \left( x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ + nu = x^2 + y^2\end{aligned}$$

está nos casos do número anterior. Com efeito, esta equação pode escrever-se simbòlicamente

$$(\rho'^2 - n\rho' + n)u = x^2 + y^2,$$

sendo

$$\rho' = x \frac{\partial'}{\partial x} + y \frac{\partial'}{\partial y},$$

com os sinais de derivação apenas aplicáveis às variáveis contidas em  $u$ . E ainda, pelo n.º 366,

$$\rho'^2 - n\rho' - n = \rho^2 - \rho - n\rho + n = (\rho - 1)(\rho - n).$$

Logo, a equação proposta pode representar-se simbòlicamente por

$$(\rho - 1)(\rho - n)u = x^2 + y^2,$$

sendo

$$\rho = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}$$

onde os sinais de derivação affectam tôdas as variáveis, tanto as contidas em  $u$  como as contidas nos operadores.

370. Pelo n.º 361 temos o integral singular

$$u_1(x, y) = \frac{1}{2-n} (x^2 + y^2).$$

371. Fazendo na proposta

$$U = u + u_1$$

vem a equação

$$(\rho - 1)(\rho - n)U = 0$$

que se desdobra em duas:

$$(\rho - 1)U = 0 \quad \text{e} \quad (\rho - n)U = 0,$$

ou seja

$$x \frac{\partial U}{\partial x} + y \frac{\partial U}{\partial y} - U = 0$$

e

$$x \frac{\partial U}{\partial x} + y \frac{\partial U}{\partial y} - nU = 0,$$

equações estas que se poderão integrar imediatamente.

## II PARTE

### CÁLCULO DAS DIFERENÇAS FINITAS

#### CAPÍTULO IX

##### DIFERENÇAS FINITAS

372. Dada uma função de uma ou mais variáveis independentes,  $f(x, y, z, \dots)$ , e atribuindo às variáveis valores em progressão aritmética e, portanto, da forma  $x_0 + h \Delta x_0, y_0 + k \Delta y_0, \dots$  em que  $h, k, \dots$  são números inteiros, sucede que os valores que a função assume, estão sujeitos a relações importantes cujo estudo é o objecto do *Cálculo das Diferenças Finitas*.

373. O estudo destas relações começa-se pelo caso das funções duma variável que se supõe inteira, ou passando por valores em progressão aritmética de razão igual à unidade.

374. No estudo destas relações desempenha papel fundamental a *diferença*  $f(x+1) - f(x)$ , chamada *finita* em oposição ao acréscimo infinitamente pequeno que entra na definição de derivada. Daqui nasceu o nome d'este ramo das ciências matemáticas.

375. Êste conceito de *diferença finita* dá origem a uma *operação* que faz corresponder a qualquer função  $f(x)$  e sua *diferença finita*:  $f(x+1) - f(x)$ . O operador correspondente representa-se pela letra grega  $\Delta$ . Temos, pois:

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x).$$

376. Ê evidente que êste operador se pode aplicar a qualquer função definida em todo o plano, uma infinidade de vezes, qualquer que seja  $x$ , real ou complexo (1).

---

(1) Diremos *iterativo* todo o operador que gosar desta propriedade.

377. Também é evidente que o operador  $\Delta$  é bem definido, se a função a que se aplica o fôr.

378. O operador  $\Delta$  é aditivo.

Com efeito:

$$\begin{aligned}\Delta [\varphi(x) + \psi(x)] &= [\varphi(x+1) + \psi(x+1)] - [\varphi(x) + \psi(x)] \\ &= [\varphi(x+1) - \varphi(x)] + [\psi(x+1) - \psi(x)] \\ &= \Delta\varphi(x) + \Delta\psi(x),\end{aligned}$$

c. d. d.

379. O operador  $\Delta$  é permutável com os números. Com efeito:

$$\Delta [A f(x)] = A f(x+1) \quad A f(x) = A \Delta f(x)$$

380. A diferença do produto é:

$$\Delta [\varphi(x) \psi(x)] = \varphi(x) \cdot \Delta\psi(x) + \psi(x) \cdot \Delta\varphi(x) + \Delta\varphi(x) \cdot \Delta\psi(x).$$

381. Do mesmo modo se obtêm:

$$\Delta \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\psi(x) \cdot \Delta\varphi(x) - \varphi(x) \Delta\psi(x)}{\psi(x) \cdot \psi(x+1)}$$

#### Diferenças das funções elementares

382. No *Cálculo das Diferenças Finitas* representa papel importante a função

$$x^{(m)} = x(x-1) \dots (x-m+1)$$

que se lê *x factorial m* e que goza neste cálculo de propriedades semelhantes às da potência  $x^m$  no Cálculo Diferencial.

383. Assim

$$\Delta x^{(m)} = mx^{(m-1)}$$

Com efeito:

$$\Delta x^{(m)} = (x+1)^{(m)} - x^{(m)},$$

donde se deduz imediatamente

$$\begin{aligned}\Delta x^{(m)} &= mx(x-1)\dots(x-m+2) \\ &= mx^{(m-1)},\end{aligned}$$

c. d. d.

384. Pondo, por definição,

$$x^{(-m)} = \frac{1}{x(x+1)\dots(x+m-1)}$$

vem igualmente

$$\Delta x^{(-m)} = -mx^{(-m-1)}$$

385. Por definição

$$x^{(0)} = 1.$$

Conseqüentemente,

$$\Delta x^{(0)} = 0.$$

visto que a diferença duma constante é evidentemente nula.

386. Logo, seja qual fôr  $m$ , inteiro, positivo, negativo ou nulo, é sempre:

$$\Delta x^{(m)} = mx^{(m-1)}.$$

387. Por definição,

$$\binom{x}{m} = \frac{x(x-1)\dots(x-m+1)}{|m|},$$

para  $m$  inteiro e positivo.

388. Esta função  $\binom{x}{m}$  lê-se:  $x$  binomial  $m$ .

389. Combinando a doutrina do n.º 382 com a do n.º 387, teremos:

$$\binom{x}{m} = \frac{x^{(m)}}{|m|}$$

390. Conseqüentemente,

$$\Delta \binom{x}{m} = \binom{x}{m-1}.$$

Com efeito,

$$\begin{aligned}\Delta \binom{x}{m} &= \Delta \frac{x^{(m)}}{|m|} \\ &= \frac{mx^{(m-1)}}{|m|} \\ &= \frac{x^{(m-1)}}{|m-1|}.\end{aligned}$$

391. Por definição,

$$\binom{x}{-m} = (-1)^{m-1} \frac{|m-1|}{|m-1|} x^{(-m)}$$

392. Conseqüentemente,

$$\Delta \binom{x}{-m} = \binom{x}{-m-1}$$

Com efeito,

$$\begin{aligned}\Delta \binom{x}{-m} &= (-1)^{m-1} \frac{|m-1|}{|m-1|} \Delta x^{(-m)} \\ &= (-1)^m \frac{|m|}{|m|} x^{(-m-1)} \\ &= \binom{x}{-m-1},\end{aligned}$$

393. Por definição

$$\binom{x}{0} = 1.$$

394. Conseqüentemente, teremos

$$\Delta \binom{x}{m} = \binom{x}{m-1}$$

para  $m$  inteiro, positivo ou negativo; exceptua-se apenas o caso de  $m = 0$ .

395. Analogamente se define:

$$(ax + b)^{(m)} = (ax + b) [a(x-1) + b] \dots [a(x-m+1) + b]$$

que se lê:  $ax + b$  factorial  $m$ .

396. Com a maior facilidade se calcula

$$\Delta (ax + b)^{(m)} = ma (ax + b)^{m-1}$$

397. Analogamente se define

$$(ax + b)^{(-m)} = \frac{1}{(ax + b) \cdot [a(x + m - 1) + b]}$$

e se tem

$$\Delta (ax + b)^{(-m)} = -ma (ax + b)^{(-m-1)},$$

398. Conseqüentemente

$$\Delta (ax + b)^{(m)} = ma (ax + b)^{(m-1)}$$

qualquer que seja  $m$  inteiro, positivo, negativo ou nulo.

399. Por definição

$$\binom{ax + b}{m} = \frac{(ax + b)^m}{|m|}$$

Esta função lê-se:  $ax + b$  binomial  $m$ .

400. Conseqüentemente,

$$\Delta \binom{ax + b}{m} = a \binom{ax + b}{m-1},$$

como é evidente.

401. Analogamente se define

$$\binom{ax + b}{-m} = (-1)^{m-1} \frac{|m-1|}{|m|} (ax + b)^{(-m)}.$$

402. Logo:

$$\Delta \binom{ax + b}{-m} = a \binom{ax + b}{-m-1}$$

403. Teremos, portanto,

$$\Delta \binom{ax+b}{m} = a \binom{ax+b}{m-1}$$

para  $m$  inteiro, positivo ou negativo, mas não nulo.

404. A qualquer polinómio inteiro de grau  $n$ ,  $P_n(x)$ , se pode dar a forma:

$$P(x) = A_0 + A_1x + A_2x^{(2)} + \dots + A_nx^{(n)}$$

bastando determinar  $A_0, A_1, \dots, A_n$ , pelo método dos coeficientes indeterminados, por exemplo.

405. E é evidente que o desenvolvimento anterior, chamado *desenvolvimento do polinómio em factoriais*, é único.

406. Podem-se obter os coeficientes do desenvolvimento dum polinómio em factoriais por meio de divisões sucessivas por factores binómios.

Com efeito, pondo

$$\begin{aligned} p_0 + p_1x + p_2x^2 + \dots + p_nx^n &= \\ &= A_0 + A_1x + A_2x(x-1) + \dots, \end{aligned}$$

teremos:

$$A_0 = p_0.$$

Simplificando a igualdade anterior, vem:

$$p_1 + p_2x + \dots = A_1 + A_2(x-1) + \dots$$

Dividindo ambos os membros desta identidade por  $x-1$ , obtem-se em ambos os membros quocientes e restos idênticos. Ora, o resto obtido no 2.º membro é  $A_1$ ; o obtido no 1.º, será conhecido e dará o valor de  $A_1$ . Representando  $Q_1(x)$  o quociente do 1.º membro dividido por  $(x-1)$ , teremos

$$Q_1(x) = A_2 + A_3(x-2) + \dots$$

Dividindo por  $x - 2$  o 1.º membro, obtem-se certo quociente  $Q_2(x)$  e o resto que é igual a  $A_2$ : etc., etc.

407. A um polinómio inteiro também se pode dar a forma

$$P(x) = A_0 + A_1 \binom{x}{1} + A_2 \binom{x}{2} + \dots + A_n \binom{x}{n},$$

análoga à do n.º 404.

É o *desenvolvimento em binomiais*, ou *desenvolvimento de Newton*.

408. Para diferenciar um polinómio inteiro, basta desenvolvê-lo em factoriais ou em binomiais, e diferenciar termo a termo.

409. Se

$$P_n(x) = A_0 + A_1 \binom{x}{1} + \dots + A_n \binom{x}{n}$$

será

$$\Delta P_n(x) = A_1 + A_2 \binom{x}{1} + \dots + A_n \binom{x}{n-1}$$

410. A diferença dum polinómio inteiro de grau  $n$  é um polinómio inteiro de grau  $n - 1$ .

411. As funções racionais podem diferenciar-se por meio da regra do n.º 381. Há, porém, um caso importante em que esta operação se pode fazer mais facilmente. É aquela em que a função dada se pode reduzir à forma:

$$F(x) = P(x) \cdot (ax + b)^{(-m)}$$

$$= \frac{P(x)}{(ax + b)[a(x + 1) + b] \dots [a(x + m - 1) + b]}$$

para o que basta que as raízes do denominador da função racional dada façam parte duma progressão aritmética de razão igual a 1.

Uma função racional nestas condições pode reduzir-se à forma

$$F(x) = Q(x) + \frac{R(x)}{(ax + b) \dots [a(x + m - 1) + b]}$$

sendo  $Q(x)$  o quociente inteiro e  $R(x)$  o resto da divisão de  $P(x)$  pelo seu denominador; e à parte fraccionária pode dar-se a forma

$$R(x) \cdot (ax + b)^{(-n)} = \\ = A_1 (ax + b)^{(-1)} + A_2 (ax + b)^{(-2)} + \dots + A_m (ax + b)^{(-n)}$$

Para isto basta desembaraçar dos denominadores e aplicar o método dos coeficientes indeterminados ao cálculo das constantes  $A_1, A_2 \dots A_m$ .

Neste caso teremos, pois:

$$P(x) \cdot (ax + b)^{(-m)} = Q(x) + A_1 (ax + b)^{(-1)} + \dots + A_m (ax + b)^{(-m)}$$

Com esta forma, a função racional *diferença-se* imediatamente.

412. Exemplo — Calcular a diferença de  $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$ .

Como as raízes do denominador de  $f(x)$  são  $+1$  e  $-1$ , elas fazem parte duma progressão aritmética de razão igual a 1, e  $f(x)$  está nos casos do número anterior.

Como

$$f(x) = 1 + \frac{1}{(x-1) \cdot (x+1)} = 1 + \frac{x}{(x-1)x(x+1)},$$

ponhamos:

$$\frac{x}{(x-1)x(x+1)} = \frac{A_0}{x-1} + \frac{A_1}{(x-1)x} + \frac{A_2}{(x-1)x(x+1)}.$$

Pelo método dos coeficientes indeterminados, obtem-se:

$$A_0 = 0 \quad ; \quad A_1 = 1 \quad ; \quad A_2 = -1.$$

Conseqüentemente:

$$f(x) = 1 + \frac{1}{(x-1) \cdot x} - \frac{1}{(x-1) \cdot x \cdot (x+1)} \\ = 1 + (x-1)^{(-2)} - (x-1)^{(-3)}$$

e

$$\Delta f(x) = -2(x-1)^{(-3)} + 3(x-1)^{(-4)} = \frac{-2x-1}{(x-1)x(x+1)(x+2)}$$

413. A diferença da exponencial também se calcula facilmente:

$$\begin{aligned}\Delta a^{\alpha x + \beta} &= a^{\alpha(x+1) + \beta} - a^{\alpha x + \beta} \\ &= a^{\alpha x + \beta} (a^\alpha - 1)\end{aligned}$$

414. Para  $\alpha = 1$  e  $\beta = 0$ , vem:

$$\Delta a^x = a^x (a - 1)$$

415. Para  $a = 2$ , vem:

$$\Delta 2^x = 2^x$$

416. Do n.º 413, tira-se:

$$\Delta e^{i(\alpha x + \beta)} = e^{i(\alpha x + \beta)} (e^{\alpha i} - 1)$$

Mas,

$$e^{\alpha i} - 1 = 2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \cdot e^{i \frac{\alpha + \pi}{2}};$$

logo

$$\Delta e^{i(\alpha x + \beta)} = 2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \cdot e^{i \left( \alpha x + \beta + \frac{\alpha + \pi}{2} \right)}.$$

Conseqüentemente:

$$\Delta \cos(\alpha x + \beta) = 2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \left( \alpha x + \beta + \frac{\alpha + \pi}{2} \right)$$

$$\Delta \operatorname{sen}(\alpha x + \beta) = 2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{sen} \left( \alpha x + \beta + \frac{\alpha + \pi}{2} \right)$$

417. Do mesmo modo se tira do n.º 413,

$$\Delta e^{Ax + B + i(\alpha x + \beta)} = e^{Ax + B + i(\alpha x + \beta)} (e^{A + i\alpha} - 1).$$

Pondo

$$e^{A + i\alpha} - 1 = \rho e^{i\varphi},$$

ou seja

$$\rho e^{i\varphi} = e^A (\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha) - 1 = e^A \cos \alpha - 1 + i e^A \operatorname{sen} \alpha,$$

vem 
$$\rho^2 = e^{2A} - 2 e^A \cos \alpha + 1 \quad (1)$$

e 
$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{e^A \operatorname{sen} \alpha}{e^A \cos \alpha - 1}. \quad (2)$$

Estas duas equações determinam  $\rho$  e  $\varphi$ . Temos, pois:

$$\Delta e^{Ax+B+i(\alpha x+\beta)} = \rho e^{Ax+B+i(\alpha x+\beta+\varphi)}$$

Logo:

$$\Delta e^{Ax+B} \cos(\alpha x + \beta) = \rho e^{Ax+B} \cos(\alpha x + \beta + \varphi) \quad (3)$$

$$\Delta e^{Ax+B} \operatorname{sen}(\alpha x + \beta) = \rho e^{Ax+B} \operatorname{sen}(\alpha x + \beta + \varphi) \quad (4)$$

#### Diferenças de ordem $k$

418. Como já dissemos, o operador  $\Delta$  é iterativo, isto é, pode aplicar-se uma infinidade de vezes a qualquer função que seja definida em todo o plano, ou pelo menos ao longo do eixo dos  $XX$ , se se tratar duma função de variável real.

Daf a consideração das diferenças de ordem superior à primeira, ou diferenças de diferenças.

A diferença de ordem  $k$  da função  $f(x)$  representa-se por  $\Delta^k f(x)$  e define-se pela igualdade simbólica:

$$\Delta^k f(x) = \Delta [\Delta^{k-1} f(x)]$$

419. É evidente que a diferença de ordem  $k$  duma soma é igual à soma das diferenças de ordem  $k$  das parcelas:

$$\Delta^k [\varphi(x) + \dots + \theta(x)] = \Delta^k \varphi(x) + \dots + \Delta^k \theta(x).$$

420. Para o cálculo da diferença de ordem  $k$  do produto pode obter-se uma expressão simbólica simples, a partir da diferença 1.<sup>a</sup>, a que se pode dar a forma:

$$\Delta(uv) = u \cdot \Delta v + v \cdot \Delta u + \Delta u \cdot \Delta v$$

Representemos por  $\Delta_1$  um operador que só actua sobre o primeiro factor e por  $\Delta_2$  outro operador que só actua sobre o segundo factor, de modo que

$$\Delta_1(uv) = v \Delta u \quad \text{e} \quad \Delta_2(uv) = u \Delta v.$$

Nestas condições,

$$\Delta (uv) = (\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_1 \Delta_2) (uv).$$

Mas é manifesto que tanto  $\Delta_1$  como  $\Delta_2$ , são bem definidos, aditivos e permutáveis com os números.

Logo :

$$\Delta^k (uv) = (\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_1 \Delta_2)^k (uv). \quad (1)$$

421. Do resultado do n.º 383, tira-se :

$$\Delta^k x^{(m)} = m^{(k)} x^{(m-k)}$$

422. Do n.º 384 deduz-se análogamente,

$$\Delta^k x^{(-m)} = (-1)^k m(m+1) \dots (m+k-1) \cdot x^{(-m-k)}.$$

423. Conseqüentemente, para  $m=1$ , vem :

$$\Delta^k x^{(-1)} = \Delta^k \left( \frac{1}{x} \right) = \frac{(-1)^k |k|}{x(x+1) \dots (x+k)}$$

424. E ainda do n.º 394 se deduz

$$\Delta^k \binom{x}{m} = \binom{x}{m-k} \quad (1)$$

para  $m \neq 0$  e  $k \leq m$ . E

$$\Delta^k \binom{x}{-m} = \binom{x}{-m-k}, \quad (2)$$

para  $m \neq 0$  e  $k$  qualquer.

425. Do mesmo modo (n.º 395 e seguintes) :

$$\Delta^k (ax+b)^{(m)} = m^{(k)} a^k (ax+b)^{(m-k)} \quad (1)$$

para  $k \leq m$ . E

$$\Delta^k (ax+b)^{(-m)} = (-1)^k m(m+1) \dots (m+k-1) \cdot a^k (ax+b)^{(-m-k)} \quad (2)$$

para  $k$  qualquer.

426. Igualmente se deduz

$$\Delta^k \binom{ax+b}{m} = a^k \binom{ax+b}{m-k} \quad (1)$$

para  $k < m$ . E

$$\Delta^k \binom{ax+b}{-m} = a^k \binom{ax+b}{-m-k} \quad (2)$$

para  $k$  qualquer.

427. A diferença de ordem  $k$  dum polinómio desenvolvido em factoriais obtém-se imediatamente. O mesmo se diz duma função racional do tipo

$$P(x)(ax+b)^{(-m)}.$$

428. É claro que a diferença de ordem  $k$  dum polinómio de grau  $n$ , é um polinómio de grau  $n-k$ , para  $n > k$ . Para  $n = k$ , a diferença é uma constante. Para  $n < k$ , a diferença é zero.

429. A diferença de ordem  $k$  da exponencial tira-se imediatamente da diferença de 1.<sup>a</sup> ordem (n.º 413):

$$\Delta^k a^{ax+\beta} = (a^a - 1)^k a^{ax+\beta}; \quad (1)$$

$$\Delta^k a^x = (a - 1)^k a^x; \quad (2)$$

e

$$\Delta^k 2^x = 2^x. \quad (3)$$

430. Do mesmo modo se deduz do n.º 416:

$$\Delta^k \cos(\alpha x + \beta) = \left(2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}\right)^k \cos\left(\alpha x + \beta + k \frac{\alpha + \pi}{2}\right)$$

$$\Delta^k \operatorname{sen}(\alpha x + \beta) = \left(2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}\right)^k \operatorname{sen}\left(\alpha x + \beta + k \frac{\alpha + \pi}{2}\right)$$

431. Semelhantemente (n.º 417):

$$\Delta^k e^{Ax+B} \cos(\alpha x + \beta) = \rho^k e^{Ax+B} \cos(\alpha x + \beta + k \varphi) \quad (1)$$

$$\Delta^k e^{Ax+B} \operatorname{sen}(\alpha x + \beta) = \rho^k e^{Ax+B} \operatorname{sen}(\alpha x + \beta + k \varphi) \quad (2)$$

## CAPÍTULO X

OPERADOR  $E$ 

432. O operador  $E$  representa a operação que consiste na passagem de  $f(x)$  para  $f(x+1)$ :

$$E f(x) = f(x+1).$$

433. É evidente que este operador é bem definido, aditivo e permutável com os números, com  $\Delta$  e com o sinal de derivação.

434. Como

$$\Delta f(x) = (E - 1) f(x),$$

segue-se que

$$\Delta = E - 1.$$

435. Por sua vez, pelo n.º 42,

$$e^{\frac{d}{dx}} f(x) = f(x+1).$$

Logo:

$$E = e^{\frac{d}{dx}} \quad (1)$$

e

$$\Delta = e^{\frac{d}{dx}} - 1. \quad (2)$$

436. A relação (1) do n.º anterior permite-nos dar um sentido ao símbolo  $E^h$  qualquer que seja  $h$ . Com efeito

$$E^h = \left( e^{\frac{d}{dx}} \right)^h = e^{h \frac{d}{dx}} \quad (1)$$

e, conseqüentemente (n.º 42):

$$E^h f(x) = e^{h \frac{d}{dx}} f(x) = f(x+h) \quad (2)$$

437. Estas relações simbólicas são utilísimas no Cálculo das Diferenças Finitas.

438. Mostram as relações (1) e (2) do n.º 435 que os operadores  $\Delta$  e  $E$ , se podem exprimir no operador  $\frac{d}{dx}$  por meio de séries. Os operadores do Cálculo das Diferenças Finitas são, pois, operadores diferenciais definidos por séries e, portanto, mais complicados do que os operadores diferenciais que entrem no estudo das equações diferenciais e de derivadas parciais.

439. Da fórmula do n.º 434 tira-se

$$\Delta^n = (E - 1)^n = \sum_{h=0}^n \binom{n}{h} (-1)^{n-h} E^h$$

e

$$\begin{aligned} \Delta^n f(x) &= \sum_{h=0}^n \binom{n}{h} (-1)^{n-h} E^h f(x) \\ &= \sum_{h=0}^n \binom{n}{h} (-1)^{n-h} f(x+h); \end{aligned}$$

ou seja :

$$\Delta^n f(x) = (-1)^n f(x) + (-1)^{n-1} n f(x+1) + \dots + f(x+n)$$

fórmula esta que exprime a diferença de ordem  $n$  de  $f(x)$ , em  $f(x)$ ,  $f(x+1)$ ,  $\dots$ ,  $f(x+n)$ .

440. Da fórmula (1) do n.º 434, tira-se :

$$E^n = (1 + \Delta)^n$$

e

$$E^n f(x) = (1 + \Delta)^n f(x)$$

ou seja :

$$f(x+n) = \sum_{h=0}^n \binom{n}{h} \Delta^h f(x)$$

ou

$$f(x+n) = f(x) + n \Delta f(x) + \dots + \binom{n}{h} \Delta^h f(x) + \dots + \Delta^n f(x),$$

fórmula esta que exprime  $f(x+n)$  em  $f(x)$  e nas suas diferenças até à ordem  $n$ .

441. Da fórmula anterior tira-se

$$f(n) = f(o) + n \Delta f(o) + \binom{n}{2} \Delta^2 f(o) + \dots \\ + \binom{n}{i} \Delta^i f(o) + \dots + \Delta^n f(o)$$

que é válida para qualquer valor de  $n$  inteiro e positivo.

442. O polinómio de grau  $n$

$$P(x) = f(o) + x \Delta f(o) + \binom{x}{2} \Delta^2 f(o) + \dots \\ + \binom{x}{i} \Delta^i f(o) + \dots + \binom{x}{n} \Delta^n f(o)$$

passa pelos mesmos valores que  $f(x)$  nos pontos  $o, 1, \dots, n$  e, portanto, coincide com êle em todos os outros pontos:

$$P(x) \equiv f(x).$$

Conseqüentemente, os coeficientes do desenvolvimento dum polinómio em binomiais, são as diferenças sucessivas dêsse polinómio no ponto *zero*.

443. Para calcular êsses coeficientes bastará, portanto, calcular os valores do polinómio nos pontos  $o, 1, \dots, n$  e com êles formar as diferenças sucessivas, como se vê no seguinte exemplo, em que se procuram as diferenças sucessivas, até à 3.<sup>a</sup> ordem, do polinómio

$$f(x) = x^3 - x + 1,$$

no ponto zero:

$x$	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$
0	1	0	6	6
1	1	6	12	
2	7	18		
3	25			

É claro que o cálculo se faz aplicando a definição de diferença. Teremos, portanto:

$$\begin{aligned} x^3 - x + 1 &= f(o) + \binom{x}{1} \Delta f(o) + \binom{x}{2} \Delta^2 f(o) + \binom{x}{3} \Delta^3 f(o) \\ &= 1 + 6 \binom{x}{2} + 6 \binom{x}{3}. \end{aligned}$$

444. Aplicando êste desenvolvimento à potência  $x^k$  obtem-se:

$$x^k = x \cdot \Delta o^k + \binom{x}{2} \Delta^2 o^k + \dots + \binom{x}{k} \Delta^k o^k$$

que nos põe em evidência as chamadas *diferenças de zero* de que a diante falaremos.

445. Pondo, como no cap. IV,  $\frac{d}{d\theta} = D$ , teremos simbòlicamente:

$$D^k = \frac{\Delta o^k}{1} D + \frac{\Delta^2 o^k}{|2} D^2 + \dots + \frac{\Delta^k o^k}{|k} D^k.$$

Mas, pelo n.º 170, fórmula (4),

$$D^h = x^h \left( \frac{d}{dx} \right)^h.$$

Logo:

$$D^k = \frac{\Delta o^k}{1} x \left( \frac{d}{dx} \right) + \frac{\Delta^2 o^k}{|2} x^2 \left( \frac{d}{dx} \right)^2 + \dots + \frac{\Delta^k o^k}{|k} x^k \left( \frac{d}{dx} \right)^k.$$

446. Esta fórmula é útil para transformar os polinómios em  $D$ , nos polinómios em  $\frac{d}{dx}$ .

447. A diferença de ordem  $k$  dum produto pode exprimir-se de vários modos em fórmulas simbòlicas por intermédio de  $E$  e de  $\Delta$ .

448. Assim, representando por  $E_1$  um símbolo que só actua sôbre o 1.º factor e por  $E_2$  outro que só actua sôbre o 2.º, teremos:

$$\begin{aligned} \Delta [\varphi(x) \psi(x)] &= \varphi(x+1) \psi(x+1) - \varphi(x) \psi(x) \\ &= [E_1 E_2 - 1] \varphi(x) \psi(x) \end{aligned} \quad (1)$$

É claro que estes operadores são bem definidos, aditivos e permutáveis entre si e com os números. Logo:

$$\Delta^h [\varphi(x) \psi(x)] = (E_1 E_2 - 1)^k \varphi(x) \psi(x) \quad (1)$$

449. Desenvolvendo em (1) o binómio de expoente  $k$ , obtem-se a diferença de ordem  $k$  do produto expressa nos valores sucessivos do mesmo produto nos pontos  $x, x+1, \dots, x+k$ , ou seja:

$$\begin{aligned} \Delta^k [\varphi(x) \psi(x)] &= \sum_{h=0}^k \binom{k}{h} (-1)^{k-h} (E_1 E_2)^h [\varphi(x) \psi(x)] \\ &= \sum_{h=0}^k \binom{k}{h} (-1)^{k-h} \varphi(x+h) \psi(x+h) \\ &= (-1)^k [\varphi(x) \psi(x) - k \varphi(x+1) \psi(x+1) + \dots]. \end{aligned}$$

450. Atribuindo a  $\Delta_1$  e  $\Delta_2$  as significações que lhes foram dadas em o n.º 420, teremos:

$$E_1 = 1 + \Delta_1 \quad \text{e} \quad E_2 = 1 + \Delta_2.$$

Logo (n.º 448), fórmula (1):

$$\begin{aligned} \Delta^k [\varphi(x) \psi(x)] &= [\Delta_1 + E_1 \Delta_2]^k \varphi(x) \psi(x) \\ &= \sum_{h=0}^k \binom{k}{h} \Delta_1^h (E_1 \Delta_2)^{k-h} \varphi(x) \psi(x) \\ &= \sum_{h=0}^k \binom{k}{h} \Delta^h \varphi(x+k-h) \cdot \Delta^{k-h} \psi(x) \\ &= \varphi(x+k) \cdot \Delta^k \psi(x) + k \Delta \varphi(x+k-1) \cdot \Delta^{k-1} \psi(x) + \dots \end{aligned}$$

que é outra fórmula simbólica da diferença de ordem  $k$  dum produto.

451. Aplicando a fórmula anterior ao cálculo da diferença de ordem  $k$  do produto  $a^x \psi(x)$ , e atendendo ao n.º 429, (2), vem:

$$\begin{aligned} \Delta^k [a^x \psi(x)] &= \sum_{h=0}^k \binom{k}{h} a^{x+k-h} (a-1)^h \Delta^{k-h} \psi(x) \\ &= a^x [a^k \Delta^k \psi(x) + k a^{k-1} (a-1) \Delta^{k-1} \psi(x) + \dots] \\ &= a^x \sum_{h=0}^k \binom{k}{h} (a-1)^h a^{k-h} \Delta^{k-h} \psi(x). \end{aligned}$$

452. A este resultado ainda pode dar-se outra forma. Com efeito, o desenvolvimento anterior pode escrever-se

$$\begin{aligned} \Delta^k [a^x \psi(x)] &= a^x \left[ \sum_{h=0}^k \binom{k}{h} (a-1)^h (a\Delta)^{k-h} \right] \psi(x) \\ &= a^x (a-1 + a\Delta)^k \psi(x) \\ &= a^x [aE - 1]^k \psi(x) \\ &= a^x \sum_{h=0}^k \binom{k}{h} a^h E^h (-1)^{k-h} \psi(x) \\ &= a^x \sum_{h=0}^k \binom{k}{h} (-1)^{k-h} a^h \psi(x+h) \\ &= a^x [(-1)^k \psi(x) + (-1)^{k-1} k a \psi(x+1) + \dots]. \end{aligned}$$

## CAPÍTULO XI

### DIFERENÇAS DE ZERO

453. Chamam-se *diferenças de zero* os valores das diferenças de  $x^n$  no ponto zero. Estes números representam-se por símbolos da forma  $\Delta^k o^n$  e por definição:

$$\Delta^k o^n = [\Delta^k x^n]_{x=0}.$$

454. É claro que para  $k > n$  é  $\Delta^k o^n = 0$ ; para  $k \leq n$ ,  $\Delta^k o^n > 0$ .

455. Em particular, teremos (n.º 435)

$$\Delta^n o^n = \underline{n}.$$

456. Para calcular os valores de  $\Delta^k o^n$  para  $k < n$ , pode recorrer-se à fórmula:

$$\Delta^k o^n = (E-1)^k o^n = \sum_{h=0}^k \binom{k}{h} (-1)^h E^{k-h} o^n;$$

ou

$$\begin{aligned} \Delta^k o^n &= \sum_{h=0}^k (-1)^h \binom{k}{h} (k-h)^n \\ &= k^n - k \cdot (k-1)^n + \binom{k}{2} (k-2)^n + \dots \end{aligned}$$

457. Esta fórmula dá-nos:

$$\underline{n} = n^n - n \cdot (n-1)^n + \binom{n}{2} (n-2)^n \dots$$

458. Os valores de  $\Delta^k o^n$  foram calculados por De Morgan até  $\Delta^{10} o^{10}$ . Os valores achados foram :

	$\Delta$	$\Delta^2$	$\Delta^3$	$\Delta^4$	$\Delta^5$	$\Delta^6$	$\Delta^7$	$\Delta^8$	$\Delta^9$	$\Delta^{10}$
$o^1$	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$o^2$	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0
$o^3$	1	6	6	0	0	0	0	0	0	0
$o^4$	1	14	36	24	0	0	0	0	0	0
$o^5$	1	30	150	240	120	0	0	0	0	0
$o^6$	1	62	540	1.560	1.800	720	0	0	0	0
$o^7$	1	126	1.806	8.400	16.800	15.120	5.040	0	0	0
$o^8$	1	254	5.796	40.824	126.000	191.520	141.120	40.320	0	0
$o^9$	1	510	18.150	186.480	794.120	1.905.120	2.328.480	1.451.520	362.880	0
$o^{10}$	1	1.022	55.080	818.520	5.108.000	16.435.440	29.615.200	30.240.000	16.829.600	3.628.800

459. A série conjugada de Maclaurin dá grande relêvo às diferenças de *zero*. Por exemplo, as funções do tipo  $f(e^x)$  que possam ser desenvolvidas segundo as potências inteiras e positivas de  $x$ , tem um desenvolvimento que pode exprimir-se assim:

$$f(e^x) = f(1) + x \cdot f(1 + \Delta)o + \dots + \frac{x^n}{|n} \cdot f(1 + \Delta)o^n + \dots$$

Com efeito, pelas séries de Maclaurin, podemos escrever :

$$\begin{aligned} f(e^x) &= f(1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{|n} \left[ \left( \frac{d}{do} \right)^n f(e^o) \right] \\ &= f(1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{|n} \left[ f \left( e^{\frac{d}{do}} \right) o^n \right] \\ &= f(1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{|n} f(1 + \Delta)o^n, \end{aligned} \quad \text{c. d. d.}$$

Este desenvolvimento é devido a Sir John Herschell.

460. Para

$$f(e^x) = (e^x - 1)^k$$

com  $k$  inteiro e positivo, vem :

$$f(1 + \Delta) = \Delta^k$$

e

$$(e^x - 1)^k = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{x^n}{n} \Delta^k o^n = x^k + \frac{\Delta^k o^{k+1}}{k+1} x^{k+1} + \dots \\ + \frac{\Delta^k o^n}{n} x^n + \dots$$

461. Para  $f(e^x) = e^{e^x}$ , obtem-se do mesmo modo :

$$f(1 + \Delta) = e^{1+\Delta} = e \cdot e^\Delta$$

e

$$e^{e^x} = e \left[ 1 + x \cdot e^\Delta o + \frac{x^2}{2} \cdot e^\Delta o^2 + \dots + \frac{x^n}{n} \cdot e^\Delta o^n + \dots \right].$$

462. A função  $\frac{1}{e^x - 1}$  é do tipo  $f(e^x)$ , mas não pode desenvolver-se segundo as potências inteiras e positivas de  $x$ . Porém, a função  $\frac{x}{e^x - 1}$  é susceptível dêsse desenvolvimento, tendo a série resultante um círculo de convergência de raio  $2\pi$ , pois que o ponto singular desta função mais próximo de zero é  $2\pi i$ . Teremos, pois,

$$\frac{x}{e^x - 1} = A_0 + A_1 x + A_2 \frac{x^2}{2} + \dots$$

sendo  $A_0 = 1$ .

Mas, por outro lado, pondo  $x = \log(1 + t)$ , vem

$$\frac{x}{e^x - 1} = \frac{\log(1+t)}{t} = 1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{3} - \dots + (-1)^n \frac{t^n}{n+1} + \dots \\ = 1 - \frac{e^x - 1}{2} + \frac{(e^x - 1)^2}{3} - \dots + (-1)^n \frac{(e^x - 1)^n}{n+1} + \dots$$

expressão esta que é da forma  $f(e^x)$  e à qual se pode aplicar o desenvolvimento de Herschell (n.º 459).

Ora ;

$$f(1 + \Delta) = 1 - \frac{\Delta}{2} + \frac{\Delta^2}{3} - \dots + (-1)^n \frac{\Delta^n}{n+1} + \dots$$

Logo,

$$A_n = f(1 + \Delta) 0^n = 0^n - \frac{\Delta 0^n}{2} + \dots + (-1)^n \frac{\Delta^n 0^n}{n+1}, \quad (1)$$

visto que  $\Delta^i 0^n = 0$ , para  $i > n$ .

O termo  $0^n$  será nulo para  $n > 0$  e é igual a 1 para  $n = 0$ .

463. Pondo

$$\frac{x}{e^x - 1} = -\frac{x}{2} + R,$$

deduz-se :

$$R = \frac{x}{2} \cdot \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$$

expressão esta que é uma função par de  $x$ . Logo, os coeficientes de ordem impar do desenvolvimento de  $R$  são nulos.

464. O mesmo sucederá, portanto, na função  $\frac{x}{e^x - 1}$  para os termos de grau superior ao primeiro. Logo :

$$f(1 + \Delta) o^{2k+1} = o, \quad (1)$$

para  $k \geq 1$ . Conseqüentemente :

$$\begin{aligned} \frac{x}{e^x - 1} &= 1 - \frac{x}{2} + \frac{B_1}{2} x^2 - \frac{B_2}{4} x^4 + \dots + \\ &+ (-1)^{n+1} \frac{B_n}{2n} x^{2n} + \dots \end{aligned} \quad (2)$$

sendo

$$B_n = (-1)^{n+1} \left[ o^{2n} - \frac{\Delta o^{2n}}{2} + \frac{\Delta^2 o^{2n}}{3} - \dots + \frac{\Delta^{2n} o^{2n}}{2n+1} \right] \quad (3)$$

465. Estes coeficientes  $B_n$  são chamados *números de Bernoulli*. Os primeiros dezoito constam do quadro seguinte: <sup>1</sup>

$B_1 = \frac{1}{6}$	$B_{10} = \frac{174.611}{330}$
$B_2 = \frac{1}{30}$	$B_{11} = \frac{854.513}{138}$
$B_3 = \frac{1}{42}$	$B_{12} = \frac{23.636.091}{2.730}$
$B_4 = \frac{1}{30}$	$B_{13} = \frac{8.553.103}{6}$
$B_5 = \frac{5}{66}$	$B_{14} = \frac{23.749.461.029}{870}$
$B_6 = \frac{691}{2.730}$	$B_{15} = \frac{8.615.841.276.005}{14.322}$
$B_7 = \frac{7}{6}$	$B_{16} = \frac{7.709.321.041.217}{510}$
$B_8 = \frac{3.617}{510}$	$B_{17} = \frac{2.577.687.858.367}{6}$
$B_9 = \frac{43.867}{798}$	$B_{18} = \frac{26.315.271.553.053.477.373}{1.919.190}$

466. Do desenvolvimento que acabamos de obter, deduz-se:

$$\frac{1}{e^x - 1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} + \frac{B_1}{2}x - \frac{B_2}{14}x^3 + \dots +$$

$$+ (-1)^{n+1} \frac{B_n}{|2n|} x^{2n-1} + \dots \quad (1)$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{B_n}{|2n|} x^{2n-1} \quad (2)$$

que adiante utilizaremos <sup>2</sup> e que converge dentro dum círculo de raio  $2\pi$  (n.º 462).

<sup>1</sup> Adams publicou no tomo LXXXV do *Jornal de Crelle* uma táboa com os primeiros 62 números de Bernoulli.

<sup>2</sup> Há certos autores que representam os números de Bernoulli por  $B_1, B_3, B_5, \dots$ ; outros por  $B_2, B_4, \dots$ , conforme partem do desenvolvimento (2) n.º 464 ou do (1) do n.º 466. Parece-nos mais natural usar dos índices seguidos: 1, 2, ...

467. Note-se que

$$\begin{aligned} \cot x &= i \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{e^{ix} - e^{-ix}} = i \left( 1 + \frac{2}{e^{2ix} - 1} \right) \\ &= i \left\{ 1 + 2 \left[ \frac{1}{2ix} - \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{B_n}{|2n|} (2ix)^{2n-1} \right] \right\} \\ &= \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} i^{2n} \frac{2^{2n} \cdot B_n}{|2n|} x^{2n-1} \\ &= \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} \cdot B_n}{|2n|} \cdot x^{2n-1} \end{aligned}$$

468. Por outro lado<sup>1</sup>, tem-se

$$\cot x = \frac{1}{x} + 2x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 - k^2 \pi^2},$$

desenvolvimento este a que se pode dar a forma

$$\begin{aligned} \cot x &= \frac{1}{x} + 2x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-1}{k^2 \pi^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x^2}{k^2 \pi^2}} \\ &= \frac{1}{x} + 2x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-1}{k^2 \pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{k^{2n} \pi^{2n}} \\ &= \frac{1}{x} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 \cdot x^{2n+1}}{\pi^{2n+2}} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n+2}} \\ &= \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot x^{2n-1}}{\pi^{2n}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}} \end{aligned}$$

469. Comparando este desenvolvimento de  $\cot x$  com o do n.º anterior, acha-se:

$$\frac{2^{2n} B_n}{|2n|} = \frac{2}{\pi^{2n}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}}$$

e

$$B_n = \frac{2 |2n|}{(2\pi)^{2n}} \left( 1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \dots \right)$$

<sup>1</sup> Ver Goursat, Cours d'Analyse, vol. II, pág. 166, 2.ª edição.

470. Esta expressão dos números de Bernoulli permite-nos ver facilmente que eles crescem indefinidamente com  $n$  a partir de certa altura.

Com efeito,

$$\frac{B_{n+1}}{B_n} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{4\pi^2} \cdot \frac{1 + \frac{1}{2^{2n+2}} + \frac{1}{3^{2n+2}} + \dots}{1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \dots}$$

relação esta que se torna infinita para  $n$  infinito.

Porisso se diz que a sucessão dos números de Bernoulli é divergente.

## CAPÍTULO XII

### DESENVOLVIMENTO DAS FUNÇÕES EM SÉRIE DE NEWTON

471. Da igualdade simbólica

$$E = 1 + \Delta,$$

deduz-se a relação

$$E^h = (1 + \Delta)^h = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{h}{i} \Delta^i \quad (1)$$

que nos dá o operador  $E^h$  expresso em diferenças finitas.

Aplicando estes operadores iguais a uma mesma função  $f(x)$ , vem:

$$f(x+h) = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{h}{i} \Delta^i f(x)$$

ou

$$f(x+h) = f(x) + h \Delta f(x) + \binom{h}{2} \Delta^2 f(x) + \dots$$

A esta série pode ainda dar-se a forma (fazendo  $x=0$  e  $h=x$ ):

$$f(x) = f(0) + x \Delta f(0) + \binom{x}{2} \Delta^2 f(0) + \dots + \binom{x}{n} \Delta^n f(0) + \dots \quad (2)$$

472. É o chamado *desenvolvimento de Newton* a que o cálculo simbólico leva muito fácil e naturalmente, como acaba de se ver.

473. Dum modo geral, chama-se *série de Newton*, ou de *coeficientes binómiais*, a qualquer série da forma

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{x}{n} \quad (3)$$

474. Esta série reduz-se a um desenvolvimento finito, para todos os valores inteiros e positivos, ou nulos, de  $z$ , mas é manifesto que dêste facto nada se pode concluir quanto à convergência da série, nem tão pouco quanto à validade do desenvolvimento da função  $f(x)$  segundo (2).

Demonstra-se, porém, que <sup>1</sup> se esta série for convergente no ponto  $z_0 = \sigma_0 + i\tau_0$  (não inteiro e positivo, nem nulo), se verificam os seguintes teoremas:

I. *A série converge em qualquer outro ponto que esteja à direita duma recta paralela ao eixo dos  $yy$  e de abscissa  $\sigma_0$ .*

II. *Esta série é uniformemente convergente num sector circular de raio arbitrário tendo o vértice em  $z_0$  e os raios que o limitam fazendo com a parte positiva do eixo dos  $xx$  ângulos menores do que  $\frac{\pi}{2}$  um valor absoluto.*

475. Consideremos o conjunto das abscissas dos pontos em que uma dada série de Newton é convergente, e seja  $\lambda$  o seu limite inferior. A série proposta será convergente em todos os pontos interiores ao semi-plano limitado à esquerda por uma recta paralela ao eixo dos  $yy$  e de abscissa  $\lambda$  (teorema I) que se chamada *semi-plano de convergência*. A recta que o limita, chama-se *recta de convergência*; e a abscissa  $\lambda$  dessa recta, chama-se *abscissa de convergência*.

476. Á esquerda da recta de convergência, a série é divergente. Se a série for convergente em todo o plano, será  $\lambda = -\infty$ .

477. Se a série divergir em todo o plano, será  $\lambda = \infty$ .

<sup>1</sup> V. Nördlung, « Leçons sur les séries d'interpolation » — 1926 — Gauthier Villars — pág. 100.

478. Dentro de qualquer região finita interior ao semi-plano de convergência a série de Newton define uma função holomorfa, por ser uma série uniformemente convergente de funções holomorfas, e pode derivar-se termo a termo.

479. Se a série convergir em todo o plano, será inteira a função por ela definida.

480. Se a abscissa de convergência  $\lambda$  for positiva e maior do que o número inteiro e positivo  $k$ , a série converge nos pontos  $z=0, 1, 2, \dots, k$ , situados fora do domínio de convergência, mas estes valores podem não ter relação com os valores que a função analítica  $F(z)$ , definida pela série no seu domínio de convergência, possa ter nos mesmos pontos  $0, 1, 2, \dots, k$ .

481. Nos pontos da recta de convergência, a série pode ser ou não convergente; mas se ela converge num ponto  $z_0$  desta recta, o teorema II mostra-nos que  $F(z)$  tende para um limite quando  $z$  tende para  $z_0$ , dentro do sector circular já mencionado, e que este limite é igual à soma da série em  $z_0$  (consequência da convergência uniforme gerar a continuidade da função definida pela série).

482. Claro que esta conclusão se não aplica no caso de  $z_0$  ser inteiro e positivo ou nulo, porque a demonstração do teorema II pressupõe a exclusão dessa hipótese.

483. Se  $\lambda$  for menor do que zero, os coeficientes da série podem exprimir-se em função dos valores que a série toma nos pontos  $0, 1, 2, \dots$ . A função  $F(z)$  terá um desenvolvimento de Newton e um só que a representa em todo o campo de convergência da série. No caso de  $\lambda$  ser positivo, o desenvolvimento de Newton deixa de ser único <sup>1</sup>.

484. A série  $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{z \cdot (z - \omega) \dots [z - (n-1)\omega]}{|n|}$  que compreende a de Newton como caso particular, é susceptível de representar funções que a série de Newton não pode representar.

<sup>1</sup> Ver Nördlung, *ob. cit.*, pág. 103 e seguintes.

485. Teorema. — É condição necessária e suficiente para que uma função  $F(z)$  admita um desenvolvimento desta forma que ela seja holomorfa num semi-plano de abscissa  $\lambda$  e nele satisfaça à desigualdade

$$|F(z)| < C e^{k|z|} \quad (1)$$

onde  $k$  é um número positivo (1).

Os números  $k$  e  $\omega$  estão sujeitos à relação

$$k\omega < \log 2.$$

486. Segundo o teorema anterior, são susceptíveis d'êste desenvolvimento os polinómios inteiros, as funções racionais, os polinómios inteiros no *seno* e no *coseno*, bem como as exponenciais da forma  $e^{ax}$ , etc.

487. O desenvolvimento de Newton, em que  $\omega = 1$ , poderá ter a forma (2) do n.º 471, quando a função  $F(z)$  fôr holomorfa em todo o semi-plano à direita do eixo dos  $yy$ , incluindo a origem das coordenadas. Estão neste caso os polinómios inteiros, as funções racionais em que as raizes do denominador estejam situadas à esquerda do eixo dos  $yy$ ,  $e^{ax}$ ,  $\cos(ax + b)$ ,  $\sin(ax + b)$ , em que  $|a| < \log 2$ , etc.

488. Toda a função  $F(z)$  que possa representar-se por uma série do 2.º tipo (n.º 484), isto é, tal que

$$|F(z)| < C e^{k|z|}$$

qualquer que seja  $z$ , à direita duma dada recta paralela ao eixo dos  $yy$ , e  $k\omega < \log 2$ , se pode transformar noutra susceptível do desenvolvimento de Newton, por meio duma simples mudança de variável, pondo

$$z = \omega u + \alpha,$$

sendo  $\alpha$  escolhido de modo que todos os pontos singulares

(1) Ver Nördlung, *o. c.*, pág. 148.

de  $F(z)$  passem para a esquerda do eixo dos  $yy$ . Nestas condições será

$$|F(\omega u + \alpha)| < C' e^{k\omega|u|}$$

e o desenvolvimento de Newton é possível e único (n.º 487).

489. Os polinómios inteiros dão um desenvolvimento de Newton finito, como já vimos (n.º 442), porque as diferenças de ordem superior ao seu grau anulam-se tódas.

490. As funções de variável inteira são sempre susceptíveis do desenvolvimento de Newton, porque, qualquer que seja o inteiro  $n$  e qualquer que seja a função  $f(x)$ , teremos sempre:

$$\begin{aligned} f(n) &= E^n f(o) = (1 + \Delta)^n f(o) \\ &= f(o) + n \Delta f(o) + \dots + \binom{n}{i} \Delta^i f(o) + \\ &\quad + \dots + \binom{n}{n} \Delta^n f(o) \end{aligned}$$

### CAPÍTULO XIII

#### RELAÇÕES ENTRE DIFERENÇAS FINITAS E DERIVADAS

491. Da fórmula simbólica (2) do n.º 434 tiram-se facilmente as expressões que dão as *diferenças* em função das derivadas e as derivadas em função das *diferenças*. Com efeito, de

$$\Delta = e^{\frac{d}{dx}} - 1$$

tira-se

$$\Delta^k = \left( e^{\frac{d}{dx}} - 1 \right)^k$$

Logo (n.º 460):

$$\Delta^k f(x) = \left( e^{\frac{d}{dx}} - 1 \right)^k f(x)$$

$$= f^{(k)}(x) + \frac{\Delta^k 0^{k+1}}{|k+1|} f^{(k+1)}(x) + \dots + \frac{\Delta^k 0^{k+n}}{|k+n|} f^{(k+n)}(x) + \dots$$

relação esta que nos dá as diferenças de qualquer ordem expressas nas derivadas sucessivas.

492. A expressão das derivadas nas diferenças tira-se com igual facilidade. Com efeito, de

$$e^{\frac{d}{dx}} = 1 + \Delta,$$

deduz-se simbólicamente

$$\frac{d}{dx} = \log(1 + \Delta) \quad (1)$$

$$= \Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} \dots \quad (2)$$

e

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^k = [\log(1 + \Delta)]^k \quad (3)$$

$$= \left[\Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \dots\right]^k \quad (4)$$

493. É claro que o cálculo simbólico, pelo menos na forma em que acabamos de o aplicar, não basta por si só para demonstrar os resultados que acabamos de obter, nem as condições da sua validade, mas foi suficiente para chegar a eles com extrema facilidade.

Para determinar condições suficientes da validade destes resultados bastaria desenvolver  $f(x)$  pelas séries de Taylor e Newton e igualar os resultados:

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + h f'(x) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) + \dots \\ &= f(x) + \binom{h}{1} \Delta f(x) + \dots + \binom{h}{n} \Delta^n f(x) + \dots \end{aligned}$$

Substituindo no 2.º desenvolvimento  $\binom{h}{2}, \dots, \binom{h}{n}, \dots$  pelo seu desenvolvimento segundo as potências de  $h$  e ordenando os resultados segundo essas mesmas potências, obtem-se um desenvolvimento igual ao 1.º. Igualando os coeficientes das mesmas potências de  $h$ , obtemos as relações que exprimem as derivadas de qualquer ordem nas diferenças sucessivas.

Se substituirmos no desenvolvimento de Taylor, as potências de  $h$  pelos seus desenvolvimentos em binomiais, e em seguida ordenarmos os resultados segundo êsses mesmos binomiais, obtemos um desenvolvimento igual ao 2.º. Igualando os coeficientes dos mesmos binomiais de  $h$ , obtemos relações que exprimem as

diferenças de qualquer ordem, nas derivadas sucessivas. Fazendo as operações, chega-se às fórmulas dadas pelo Cálculo Simbólico, como era de esperar.

As condições de validade destas fórmulas são as mesmas dos respectivos desenvolvimentos em série que as justificam.

O cálculo dos restos das respectivas séries é problema complicado e de grande importância na teoria da interpolação, mas dispensável num curso geral de Cálculo das Probabilidades.

494. Como aplicação interessante dos resultados dos n.ºs 491 e 492, podem calcular-se

$$\Delta^k \frac{x^n}{|n} \text{ e } \frac{d^k}{dx^k} \left( \frac{x}{n} \right).$$

Tem-se:

$$\begin{aligned} \Delta^k \frac{x^n}{|n} &= \frac{x^{n-k}}{|n-k} + \frac{\Delta^k 0^{k+1}}{|k+1} \cdot \frac{x^{n-k-1}}{|n-k-1} + \dots \\ &+ \frac{\Delta^k 0^{k+i}}{|k+i} \cdot \frac{x^{n-k-i}}{|n-k-i} + \dots \\ &+ \frac{\Delta^k 0^n}{|n}. \end{aligned} \quad (1)$$

Por sua vez

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{x}{n} \right) = \binom{x}{n-1} - \frac{1}{2} \binom{x}{n-2} + \dots + (-1)^{i-1} \frac{1}{i} \binom{x}{n-i} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

## CAPÍTULO XIV

### TRANSFORMAÇÃO DAS SÉRIES

495. Os símbolos  $\Delta$  e  $E$  permitem-nos transformar certos tipos de séries noutros por vezes mais rapidamente convergentes.

São notáveis os casos que passamos a considerar. Seja

$$S(x) = a_0 + a_1 x + \dots + \frac{a_n x^n}{|n} + \dots \quad (1)$$

uma série de potências de  $x$ . Como  $a_n$  é uma função da variável inteira  $n$ , podemos escrever:

$$a_n = E^n a_0$$

e, conseqüentemente,

$$\begin{aligned} S(x) &= \left( 1 + xE + \dots + \frac{x^n E^n}{\underline{n}} \right) a_0 \\ &= e^{xE} a_0 = e^x \cdot e^{x\Delta} a_0 \\ &= e^x \left[ 1 + x\Delta + \frac{x^2 \Delta^2}{\underline{2}} + \dots + \frac{x^n \Delta^n}{\underline{n}} + \dots \right] a_0 \\ &= e^x \left[ a_0 + x\Delta a_0 + \frac{x^2}{\underline{2}} \Delta^2 a_0 + \dots + \frac{x^n}{\underline{n}} \Delta^n a_0 + \dots \right] \end{aligned}$$

Teremos, pois:

$$a_0 + a_1 x + \dots + \frac{a_n x^n}{\underline{n}} + \dots = e^x \left( a_0 + x\Delta a_0 + \dots + \frac{x^n}{\underline{n}} \Delta^n a_0 + \dots \right)$$

ou abreviadamente:

$$\sum_0^{\infty} \frac{a_n x^n}{\underline{n}} = e^x \sum_0^{\infty} \frac{x^n}{\underline{n}} \Delta^n a_0. \quad (2)$$

496. Teremos também:

$$\varphi(0) - \varphi(1) + \varphi(2) - \dots = \frac{\varphi(0)}{2} - \frac{\Delta\varphi(0)}{2^2} + \frac{\Delta^2\varphi(0)}{2^3} - \dots$$

ou abreviadamente,

$$\sum_0^{\infty} (-1)^n \varphi(n) = \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{\Delta^n \varphi(0)}{2^{3+1}}. \quad (1)$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} \sum_0^{\infty} (-1)^n \varphi(n) &= \left[ \sum_0^{\infty} (-1)^n E^n \right] \varphi(0) \\ &= \frac{1}{1+E} \varphi(0) \\ &= \frac{1}{2+\Delta} \varphi(0) \\ &= \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{\Delta}{2} + \frac{\Delta^2}{4} - \dots \right] \varphi(0) \\ &= \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{\Delta^n \varphi(0)}{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

497. É também fácil de ver que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n \Delta^n a_0}{(1-x)^{n+1}}. \quad (1)$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \cdot E^n a_0 = \frac{1}{1-x \cdot E} a_0 \\ &= \frac{1}{1-x-x\Delta} a_0 = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-\frac{x\Delta}{1-x}} a_0 \\ &= \frac{1}{1-x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n \Delta^n}{(1-x)^n} a_0 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n \Delta^n a_0}{(1-x)^{n+1}}, \end{aligned}$$

c. d. d.

498. Se  $a_n$  for um polinómio inteiro em  $n$ , de grau  $k$ , será  $\Delta^p a_n = 0$  para  $p > k$  e o 2.º membro de (1) será finito. A soma da série  $\sum_{n=0}^{\infty} P(n) x^n$ , em que  $P(n)$  é um polinómio inteiro de  $n$ , é uma função racional de  $x$ .

499. Por sua vez, uma função racional da forma

$$R(x) = \frac{A_0}{1-x} + \frac{A_1 x}{(1-x)^2} + \dots + \frac{A_k x^k}{(1-x)^{k+1}}$$

é susceptível de desenvolvimento segundo as potências inteiras e positivas de  $x$ , da forma

$$R(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P(n) \cdot x^n$$

sendo

$$P(n) = A_0 + A_1 \binom{n}{1} + \dots + A_k \binom{n}{k}.$$

## DIFERENÇAS PARCIAIS

500. As *diferenças parciais* têm definições e notações análogas às derivadas parciais.

Assim :

$$\Delta_x f(x, y) = f(x + 1, y) - f(x, y)$$

$$\Delta_y f(x, y) = f(x, y + 1) - f(x, y).$$

501. Fácilmente se vê que

$$\Delta_x \cdot \Delta_y = \Delta_y \cdot \Delta_x$$

502. É evidente que

$$\Delta_x^h \cdot \Delta_y^k = \Delta_x^h \Delta_y^k,$$

segundo as convenções feitas para estas notações.

503. Temos ainda

$$E_x = 1 + \Delta_x = e^{\frac{\partial}{\partial x}}$$

$$E_y = 1 + \Delta_y = e^{\frac{\partial}{\partial y}}$$

504. Conseqüentemente :

$$\begin{aligned} f(x + h, y + k) &= E_x^h E_y^k f(x, y) \\ &= (1 + \Delta_x)^h (1 + \Delta_y)^k f(x, y) \\ &= \left[ \sum_{i=0}^{\infty} \binom{h}{i} \Delta_x^i \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \binom{k}{j} \Delta_y^j \right] f(x, y) \\ &= f(x, y) + h \Delta_x f(x, y) + k \Delta_y f(x, y) + \\ &+ \binom{h}{2} \Delta_x^2 f(x, y) + h k \Delta_{xy}^2 f(x, y) + \binom{k}{2} \Delta_y^2 f(x, y) + \dots \end{aligned}$$

que é o desenvolvimento de Newton para duas variáveis.

505. É claro que qualquer função de diversas variáveis pode ser desenvolvida em série de Newton em relação a qualquer delas

separadamente. Assim, a qualquer função de duas variáveis,  $f(x, y)$ , pode dar-se qualquer das formas:

$$f(x, y) = A_0(y) + x A_1(y) + \binom{x}{2} A_2(y) + \dots + \binom{x}{n} A_n(y) + \dots$$

em que

$$A_0(y) = f(0, y)$$

$$A_1(y) = \Delta_x f(0, y)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$A_n(y) = \Delta^n x^n f(0, y).$$

E, semelhantemente,

$$f(x, y) = B_0(x) + y B_1(x) + \dots + \binom{y}{n} B_n(x) + \dots$$

*Continua*

DOUTOR PACHECO DE AMORIM

## Relatório apresentado à Faculdade de Ciências da Universidade de Coimbra

PELO

PROF. DR. ERNST MATTHES

Ex.<sup>mo</sup> Senhor Director da Faculdade de Ciências  
da Universidade de Coimbra :

Fui incumbido no mês de Maio de 1936 pelo Ministério da Educação Nacional de elaborar um relatório sobre os aparelhos e outros utensílios necessários para o conveniente apetrechamento do Laboratório Zoológico da Universidade de Coimbra. O referido relatório foi entregue a Sua Ex.<sup>a</sup> o Senhor Ministro no dia 19 de Junho do mesmo ano. Permitti-me enviar ao Ex.<sup>mo</sup> Senhor Director da Faculdade no mesmo dia cópia deste relatório, que teve a honra de ser publicado na *Revista da Faculdade de Ciências*, vol. VII.

No meu relatório cheguei à conclusão de que, para a aquisição dos aparelhos mais indispensáveis, seria precisa a quantia de 117.577\$50. Para minha satisfação, o Senhor Ministro considerou como justas e razoáveis as minhas propostas, o que se conclui do facto de êle ter concedido como subsídio extraordinário a quantia de 128.000\$00, incluída no artigo 153.º 1.ª (aquisição de máquinas, aparelhos, livros, etc.) do orçamento para o ano de 1937. Visto a verba ordinária incluir para o mesmo fim, no ano de 1937, 20.000\$00, no ano de 1938 40.000\$00, ficava disponível nos dois anos para a nova instalação do Laboratório a quantia total de 188.000\$00, ou, feito o desconto prescrito de 10<sup>o</sup>%, a quantia de 169.200\$00.

Desejava hoje dar conta a V. Ex.<sup>a</sup> da maneira como empreguei essa quantia para a instalação do Laboratório, e qual o resultado geral que neste sentido se alcançou.

Permito-me lembrar em primeiro lugar os princípios de orientação do meu relatório anterior. Foram os seguintes, pouco mais ou menos :

- 1) A instalação de um laboratório zoológico que satisfizesse às mais elevadas exigências quanto à perfeição do apetrechamento exigiria aproximadamente a quantia de 600.000\$00. Julgando não poder contar com a concessão de uma quantia tão considerável, restrinjo as minhas propostas ao mais indispensável.
- 2) Contudo, deve-se tentar alcançar que o laboratório fique suficientemente equipado, dentro dos limites impostos, para permitir trabalhos científicos em *todos* os ramos da Zoologia; a instalação dum laboratório especializado não parece aconselhável.
- 3) As necessidades do ensino devem de momento colocar-se antes das de investigação.

Queria enumerar agora as compras realizadas, acrescentando sempre que seja necessário algumas explicações.

## I. Ensino

a) **Aulas práticas.** — Em 1936 havia na sala das aulas práticas :

20 lugares de trabalho.

10 microscópios utilizáveis.

Compraram-se, pois, em primeiro lugar, 10 microscópios novos (Leitz G. T. 20/92, com três objectivas:  $8\times$ ,  $20\times$ ,  $45\times$ ). Compraram-se além disso 12 lâmpadas de microscopia que faltavam por completo. Substituíram-se, por fim, os bancos fixos de madeira existentes, pouco apropriados para trabalhos microscópicos, por 20 bancos de rotação. Visto uma lâmpada de microscópio chegar para dois lugares de trabalho, encontram-se agora todos os lugares dotados de microscópio, banco e iluminação apropriada. Dado, porém, que as condições de espaço na nossa sala das aulas práticas permitem a instalação de mais

lugares de trabalho, e correspondendo isto às exigências do ensino — a aula prática da Zoologia médica abrangia, nos anos 1937-1938, 60-70 estudantes — adquiriram-se mais 4 mesas de trabalho, com dois lugares cada uma, de forma que a sala das aulas práticas contém actualmente 28 lugares. Faltam pois para o seu apetrechamento completo mais 8 microscópios, 8 bancos e 2 lâmpadas. Provisoriamente temos recorrido a empréstimo de microscópios, etc. dos outros gabinetes de trabalho. A instalação completa da sala das aulas práticas poderá ser levada a cabo nos anos seguintes gradualmente e com os meios do orçamento ordinário.

Para tornar frutífero o ensino nas aulas práticas era preciso organizar uma grande colecção de preparações microscópicas, que faltavam até então quasi completamente. A compra duma tal colecção teria custado muito dinheiro. Felizmente o meu discípulo Dr. Helling, que esteve nestes dois anos em Coimbra como estudante de troca, encarregou-se desta tarefa, organizando no seu tempo livre uma colecção de 1652 preparações microscópicas. Para sua instalação construiu um carpinteiro hábil um armário especial.

Para as disseccções comprámos das Estações Zoológicas de Nápoles e de Helgoland um grande lote de animais fixados que se não podem obter nas costas portuguesas.

b) **Aulas teóricas.** — O estado de coisas era: uma grande sala de aulas, sem instalação eléctrica, sem aparelho de projecção, e uma colecção de quadros murais muito deficiente. Adquiriu-se em primeiro lugar um bom aparelho de dia-e episcopia (Busch), munido de lâmpadas muito fortes (500 Watt e 1000 Watt) e provido dum dispositivo de resfriamento. Este aparelho permite projectar dispositivos sem apagar as luzes da sala, projectar imagens episcópicas (figuras de compêndios, tabelas) no estado de semi-obscuridade que se pode alcançar fechando as janelas. Este aparelho foi utilizado com grande proveito, desde a sua instalação, em quasi tôdas as aulas.

Para poder projectar também preparações microscópicas, adquiriu-se além disso o excelente aparelho de microprojecção da casa Zeiss. Este aparelho é provido duma lâmpada de arco de regulação automática e permite projecções na ampliação de 60 a 2100 vezes. Possui, em contraste com outros aparelhos

dêste género, a grande vantagem de se poder adaptar automaticamente a cada objectiva o respectivo condensador. Êste aparelho foi utilizado não só para a projecção de preparações microscópicas, mas também para a de animais pequenos vivos e de experiências fisiológicas com Protozoários.

Pôde satisfazer-se, por economias em outro lugar, mais um objectivo, designado no meu relatório como desejável, ainda que não urgente: a compra dum projector para filmes de 16<sup>mm</sup>. Escolheu-se a marca «Eumig», que a-pesar do preço relativamente baixo dá resultado excelente, projectando imagens de grande luminosidade com as dimensões de 1<sup>m</sup>,50 por 2<sup>m</sup>,00. Êste aparelho não é, naturalmente, empregado em tôdas as aulas, mas provou em cada experiência quão mais impressiva é a imagem viva em relação à palavra, também no ensino universitário. Dado o número sempre crescente de bons filmes, feitos especialmente para o ensino universitário, a importância dêste aparelho para as aulas aumentará de futuro consideravelmente.

Para poder aproveitar as instalações de projecção, tornou-se preciso, é claro, a organização duma colecção de diapositivos e a compra de filmes. Os diapositivos foram feitos no próprio laboratório, poupando-se assim muito dinheiro. A colecção abrange hoje aproximadamente 600 diapositivos, escolhidos em primeiro lugar pelo Dr. A. Xavier da Cunha Marques, e executados pelo preparador Arnaldo Alves dos Santos. Quanto a filmes puderam obter-se da «Reichsstelle für den wissenschaftlichen Hochschulfilm» 6 exemplares por um preço muito reduzido.

Para aumentar gradualmente também a colecção de preparações microscópicas, próprias para o ensino, compraram-se 60 frascos de face anterior polida. Algumas preparações puderam já ser realizadas, mas neste campo fica ainda muito para fazer nos anos seguintes.

A colecção de quadros murais recebeu um incremento muito notável. Comprámos 62 quadros, e o infatigável desenhador da Faculdade, Sr. Lourenço Martins, fez além disso sob a minha indicação 64 quadros; o aumento da colecção de quadros por êste meio continua ainda.

Para poder fornecer aos estudantes também material elucidativo de Zoogeografia compraram se alguns dos carimbos geo-

gráficos da casa Westermann. De aquisições mais pequenas queria mencionar além disso a dum dispositivo hectográfico. Obtive com êle bons resultados, entregando aos estudantes, ao fim das aulas mais difíceis um resumo da respectiva lição, em forma de sumário, de maneira que o estudante se viu assim liberto por um lado do trabalho estúpido de tirar apontamentos, ficando por outro lado afastado o perigo de decorar uma *sebenta* deficiente e errada. Dada a falta de um compêndio escrito em português para o ensino universitário da Zoologia, o aperfeiçoamento dêste sistema parece-me ter uma certa importância. Tenciono completar êste método no ano lectivo seguinte, fornecendo aos estudantes também uma fotocópia de cada quadro mural e de cada figura importante projectada. Atenção na aula, resumo hectográfico de cada aula e uma rica colecção de figuras deveriam então substituir com vantagem a falta de um compêndio.

## II. Investigação

Na aquisição dos microscópios para as aulas práticas não se atendeu à aquisição do tipo mais barato, mas sim de um tipo que chegue também, quanto a equipamento óptico e aparelho de iluminação, para a maioria das investigações científicas. Para possuir contudo pelo menos um microscópio que satisfaça as mais elevadas exigências dos estudos citológicos, adquiriu-se um grande suporte moderno de Zeiss (LCE) com objectiva acromática  $3\times$ , objectivas apocromáticas  $20\times$  e  $40\times$ , imersão de óleo apocromática  $90\times$  (1,3) e 3 oculares. Para exame estereoscópico, tão vantajoso em muitos casos, puderam ser comprados ainda dois microscópios binoculares, a saber um tipo mais simples (Leitz, Ludas) para ampliações de  $3,5$   $10,5\times$  e um tipo muito aperfeiçoado (Zeiss Binocular XV) que permite ampliações de  $24-144\times$  com revólver e quatro pares de objectivas, e com dispositivo de iluminação para luz incidente.

Entre as aquisições de aparelhos ópticos mais pequenos queria mencionar a dum dispositivo para medir exactamente ângulos em objectos microscópicos e a de dois micrómetros.

Para trabalhos histológicos comprou-se em primeiro lugar um bom micrótomo (Leitz, Timor), de que havia muita falta, e, visto até agora existirem só, para a inclusão em parafina de

objectos microscópicos, estufas muito primitivas, aquecidas a petróleo, comprou-se uma estufa de funcionamento eléctrico e termoregulador automático e além disso uma autoclave. Por fim uma balança de precisão, um aparelho «Kipp», um relógio conta-segundos, 7 gaiolas para cobaias e um grande número de frascos, vidros, escalpelos, pinças e outros utensílios de laboratório, bem como matérias químicas que ainda faltavam.

### III. Instalação fotográfica

Também a instalação fotográfica, de igual interesse para a investigação e para o ensino, pôde completar-se consideravelmente. Existia um bom aparelho de microfotografia (Busch, Citophot), que apenas precisava do complemento de mais uma objectiva (Glyptar 3,5<sup>cm</sup>).

Para a macrofotografia e o fabrico de diapositivos e cópias de figuras de livros comprou-se o grande aparelho fotográfico «Bischoff» da casa Busch, com câmara de posição dupla, horizontal e vertical, dispositivo de iluminação e todos os outros dispositivos auxiliares pertencentes a este excelente aparelho. Como equipamento óptico escolheram-se as objectivas Glyptar 10,5<sup>cm</sup> e Macro-Glyptar 21<sup>cm</sup>, de maneira que podemos abrançar agora fotograficamente por meio do Citophot e da câmara Bischoff todo o espaço entre a redução muito forte, passando pelo tamanho natural, até à ampliação mais forte que se pode obter com as objectivas microscópicas de imersão. Tenho prazer em verificar que dispomos agora de aparelhagem fotográfica que já não deixa nada a desejar. Entende-se, sem mais, que esta aparelhagem está também de bom grado à disposição de outros laboratórios da nossa Universidade.

Para positivos adquiriu-se um excelente aparelho de ampliação (Müller und Wetzig, Fam VI), com focagem automática, que permite obter de negativos 6 × 9<sup>cm</sup> e menores, com grande facilidade e exactidão, ampliações até 36 × 54<sup>cm</sup>. De aquisições fotográficas mais pequenas desejava mencionar a dum fotómetro «Sixtus» e de duas lâmpadas «Nitraphot» com reflectores. As numerosas aquisições para revelação, retoque, montagem de diapositivos etc. não precisam de ser enumeradas em pormenor.

#### IV. Biblioteca

O equipamento absolutamente insuficiente da biblioteca representava sem dúvida a falta mais poderosa que se opunha à investigação frutífera, e a mais difícil de superar. Faltavam quasi completamente as mais importantes revistas científicas (ou existiam só em séries incompletas), faltava uma sufficiente collecção de separatas, faltavam até os mais importantes compêndios ou monografias científicas. Já os anteriores chefes do Museu e Laboratório Zoológico e os seus colaboradores tinham reconhecido este lamentável estado de coisas e haviam tentado corrigi-lo dentro dos limites restritos do orçamento. E isto em dois sentidos. Compraram-se ou assinaram-se em primeiro lugar compêndios (por exemplo o «Handbuch der Zoologie», a «Faune de France», os «Genera Insectorum»), iniciou-se em segundo lugar um largo serviço de troca com sociedades científicas, Museus e grêmios estrangeiros, com o resultado de que a nossa biblioteca recebe actualmente cêrca de 400 revistas e outras publicações. O principal mérito no aperfeiçoamento dêste serviço de trocas, iniciado em 1924, cabe ao Sr. Dr. A. F. de Seabra. Mas como immediatamente vê qualquer especialista, trata-se, na maioria dêstes jornais, de publicações que não podem ser consideradas rigorosamente científicas ou nas quais se não reflecte, pelo menos, o trabalho de investigação do nosso tempo.

Para de certa maneira preencher as faltas existentes, nos limites das possibilidades actuais, attribuiu-se da quantia total disponível para a nova instalação do laboratório nada menos do que um quarto, a saber a quantia de 43.059\$85, para a biblioteca. Também aqui pus mais uma vez as exigências do ensino em primeiro lugar, empregando quasi metade da quantia citada na compra de compêndios, monografias e separatas de valor especial.

Não se tomaram em consideração exclusivamente livros que se referem à Zoologia geral; esforcei-me, pelo contrário, por tomar em consideração *todos* os ramos da Zoologia, também aqueles que actualmente podem não ser designados como em moda. Adquiriu-se sobretudo um número notável de estudos sobre a sistemática e a distribuição geográfica dos Invertebrados, que pareciam indispensáveis para o trabalho científico do Museu.

Aumentar também o número de revistas de carácter rigorosamente científico, isto é de revistas independentes e não publicadas por Muscos, Sociedades etc., até ao grau desejável e necessário, adquirir sobretudo séries completas de revistas que se publicam já desde há muitos decénios — claro que isto não era possível com os meios à minha disposição. Neste campo só pouco a pouco se poderá alcançar resultado satisfatório, e só com a larga ajuda do Ministério da Educação Nacional ou do Instituto para a Alta Cultura. Tomei por consequência como objectivo complementar em primeiro lugar aquelas revistas de importância que existiam já na nossa biblioteca em colecções truncadas. Para este fim gastou-se a verba parcial relativamente elevada de 10.500\$ pouco mais ou menos. Renunciei, porém, por princípio, à substituição de revistas já existentes em assinatura por outras que me interessariam talvez mais. Pois que nada me parece mais prejudicial a uma biblioteca do que submeter a escolha de revistas às inclinações e interesses variáveis dos sucessivos directores. Por consequência, o número das revistas cuja assinatura se podia iniciar, ao lado das já existentes, tornou-se pequeno: trata-se de 5 revistas que me pareciam as mais desejáveis, aumentando assim o número total de revistas em assinatura de 10 para 15.

## V. Aquisições várias

De aquisições que se não podem rubricar nos capítulos anteriores desejo enumerar as seguintes:

a) **Aquários.** — A qualquer laboratório zoológico pertence propriamente um aquário, instalado em aposentos especiais, visto um tal aquário ser indispensável para determinadas investigações fisiológicas e possibilitar além disso aos estudantes a observação de animais vivos, tão impressionante e valiosa. Para satisfazer a este objectivo, pelo menos em parte, instalou-se uma série de aquários, colocados nos quartos de trabalho do laboratório. As despesas foram pequenas, pois já existia um certo número de aquários velhos que apenas precisavam de conserto. Para os aquários marinhos comprou-se um aparelho eléctrico de compressão de ar, sistema «Elu», e um filtro de

carvão. Estes dois dispositivos deram o melhor resultado: temos animais marinhos que vivem já há um ano nestes aquários e que até se reproduziram neles. Tenho a intenção de colocar alguns aquários, dotados sobretudo de animais da costa portuguesa, também no Museu, para prazer e ensinamento dos seus numerosos visitantes.

b) **Excursões.** — Para as excursões à costa e às serras do país — pude levar a efeito 13 excursões mais largas — arranjaram-se as necessárias caixas, latas e frascos de transporte, uma rede de plancton e um bom altímetro.

## VI. Melhoramentos do edifício

Pela Direcção Geral dos Edifícios e Monumentos Nacionais realizaram-se nestes dois anos os melhoramentos seguintes:

1) Receberam iluminação eléctrica a sala de aulas, a biblioteca, mais dois quartos do Laboratório e tôdas as divisões do Museu. Em outros dois gabinetes de trabalho instalou-se água corrente.

2) Na sala de aulas substituiu-se o quadro de pedra insufficiente por três grandes pedras móveis, que deixam ver, puxadas para baixo, uma superfície de projecção.

3) Efectuou-se em vários gabinetes a instalação necessária para a ligação dos novos aparelhos, sobretudo para os aparelhos de projecção na sala de aulas.

## VII. Objectivos ainda não alcançados

Lancemos primeiro um olhar ao que se pôde alcançar. Julgo poder afirmar que o Laboratório Zoológico possui hoje uma instalação que corresponde a tôdas as exigências do ensino moderno e que permite realizar, dentro de certos limites, também investigações frutíferas. Estou igualmente persuadido de que o orçamento do Museu e Laboratório, sobretudo se fôr aumentado segundo a minha proposta para o ano económico de 1940, garante um bom funcionamento e florescimento do Laboratório. Por isto me sinto muito obrigado a Sua Excelên-

cia o Senhor Ministro da Educação Nacional e ao Senhor Director Geral do Ensino Superior, que liberalmente concederam as verbas necessárias. Emquanto o orçamento (despêsas com o material) importava no ano de 1936 em 53.480\$00, temos para o ano de 1939 um orçamento de 105.980\$00.

Contudo, é evidente que existe ainda uma série de objectivos maiores ou menores a alcançar. O mais urgente, em minha opinião, é o seguinte:

1) Começando com as exigências de construção, seria muito urgente, em primeiro lugar, o conserto ou renovação do telhado de algumas divisões do laboratório. Tenciono instalar numa destas divisões o laboratório fotográfico, reunindo nela todos os novos aparelhos para micro- e macrofotografia e para ampliação. Não posso realizar este projecto, visto nesta e nas outras divisões citadas a água das chuvas correr pelas paredes abaixo ou, gotejando do tecto, formar grandes charcos no soalho. Isto parece-me ser um estado efectivamente indigno dum laboratório científico. É claro que em tais condições os valiosos aparelhos se estragariam dentro de poucos meses.

Seria desejável além disso instalar na sala de aulas um dispositivo para escurecimento de funcionamento eléctrico. Sem um tal dispositivo vemo-nos forçados a fechar e abrir continuamente as janelas, o que é incómodo para o ensino, ou a fazer toda a aula de janelas fechadas e com luz artificial. Igual dispositivo seria conveniente também para a sala de aulas práticas.

Precisa-se além disso de instalação de água corrente nesses gabinetes de trabalho onde ainda a não há. Água corrente não representa neste caso comodidade ou luxo, mas grande necessidade para determinados trabalhos científicos.

Muito agradecido ficaria a V. Ex.<sup>a</sup> se se dignasse ajudar-me nas minhas aspirações, enviando à repartição competente um requerimento quanto às necessidades do edificio, sobretudo quanto à renovação o mais rápida possível do telhado.

2) Agora as necessidades de equipamento do laboratório. Aqui é sobretudo desejável o seguinte:

a) Aumento do número de microscópios. Estado actual: 28 lugares de trabalho, 20 microscópios utilizáveis. Faltam pois 8 microscópios para o pleno aproveitamento da sala. Os meios do orçamento ordinário permitirão a compra de 1-2 microscópios por ano.

b) Um aparelho de projecção para a sala de aulas práticas. Torna-se preciso só depois da instalação do dispositivo de escurecimento na respectiva sala. A vantagem de projecções para as aulas práticas é incontestável: o professor pode explicar tudo o que se observa na respectiva preparação microscópica antes de o estudante a examinar e desenhar.

c) Uma câmara de filmar, para filmes de 16<sup>mm</sup>. O filme torna-se cada vez mais estimado e valioso para a investigação zoológica, sobretudo no campo da fisiologia dos sentidos e da psicologia animal. Além disso, a posse duma tal câmara tornaria muito menos dispendiosa a organização duma colecção de filmes para o ensino. Êste desejo só será realizável por meio dum subsídio extraordinário.

d) Aperfeiçoamento da aparelhagem fisiológica. Trata-se de aparelhos mais pequenos, adquiríveis pelos meios do orçamento ordinário.

e) Alargamento da biblioteca. Uma solução ideal não pode atingir-se só com as próprias fôrças dum laboratório isolado. O que se pode alcançar é o seguinte:

Tomando como base a verba actual para «aquisições de utilização permanente» (36.900,500) e atendendo ao facto de a instalação nova do laboratório estar agora essencialmente pronta, pode o quinhão do leão da verba citada, digamos 24.000,500, ser atribuído à biblioteca. Desta quantia cabem actualmente cêrca de 10.000,500 às revistas e compêndios de assinatura, 4.000,500 são reservados à compra de livros e separatas, de maneira que ficam disponíveis para outros fins 10.000,500. Esta quantia empregar-se-ia nos primeiros anos para completar as revistas já existentes em colecções truncadas até fechar as últimas lacunas, a partir dum ano determinado, digamos o ano de 1900. Serão precisos para êste fim 80.000,500 pouco mais ou menos. Chega-se pois ao fim dentro de dez anos. A partir de então os citados 10.000,500 podem ser utilizados para a assinatura de mais revistas. Calculo que o número das revistas assinadas poderá ser assim aumentado de 15 para 25.

Assim ficariam abrangidas, não todas as revistas de carácter predominantemente zoológico, mas em todo o caso as mais importantes. Se o orçamento para o ano 1940 fôr aumentado de 20.000,500, segundo a minha proposta, então o preenchimento destas lacunas será alcançado já dentro de três anos e o número

de novas assinaturas poderá elevar-se consideravelmente, ou poderá utilizar-se uma parte maior da verba para a compra de livros e separatas, ou para o apetrechamento aperfeiçoado do Laboratório e Museu.

3) Por fim um só desejo relativo ao pessoal do museu e laboratório, mas desejo êste que tenho de designar como muito urgente. À minha chegada a Coimbra o Laboratório Zoológico tinha um assistente jovem na pessoa do Dr. A. Xavier da Cunha. Visto o Dr. Xavier da Cunha ter ascendido entretanto a professor auxiliar e visto o lugar assim livre ter sido ocupado por um Assistente de Antropologia, ficou o Museu e Laboratório Zoológico sem qualquer auxiliar de quem possa esperar e exigir serviços como cabem a um assistente jovem. Esta falta foi em parte resolvida pela circunstância feliz de o Dr. Helling ter pôsto à disposição do laboratório todo o seu tempo livre e tôda a sua boa vontade de trabalho, e isto durante os primeiros dois anos sem qualquer gratificação. O Instituto para a Alta Cultura possibilitou-lhe, a seguir, a continuação do seu estágio em Portugal e com isto a dos seus trabalhos, tanto de organização como científicos, por mais um ano, concedendo-lhe um subsídio de investigação. Conseguiu-se obter um tal estipêndio também para os últimos cinco meses do ano corrente. Mas o Instituto para a Alta Cultura fez notar nesta altura, e, parece-me, com tôda a justiça, que não era das suas atribuições mas sim das da Universidade de Coimbra, cuidar da gratificação de um auxiliar, quando falte a um laboratório da Universidade. Já não podendo contar, por conseqüência, com o auxílio do Instituto para a Alta Cultura, peço a V. Ex.<sup>a</sup> se digne dedicar o seu melhor interesse a êste assunto, requerendo da repartição competente a verba necessária para a gratificação dum assistente do Museu e Laboratório Zoológico para o ano económico de 1940. É evidente que um laboratório que se encontra em reorganização não pode dispensar a ajuda de um assistente jovem. Abstraindo mesmo da sua falta para a preparação das aulas teóricas e das projecções, queria mencionar só a colecção das preparações microscópicas que carece dum aumento notável quanto à Anatomia comparada dos Vertebrados — trata-se de 1000 preparações pouco mais ou menos —, a colecção das preparações anatómicas só agora iniciada e a dos diapositivos. Acaba de surgir mais uma tarefa, penosa e morosa, mas que não pode

protelar se: a organização dum catálogo geral da biblioteca, abrangendo livros, revistas e folhetos. Não chega para este fim um empregado que saiba preencher as fichas, precisam-se também auxiliares com os convenientes conhecimentos científicos. Acresce também a circunstância de o infatigável auxiliar de naturalista do Museu, Sr. Rogério Nogueira de Carvalho, que, graças ao seu conhecimento íntimo da nossa biblioteca e ao real interesse que o liga desde há 35 anos ao destino do nosso Instituto, nos poderia ser neste caso do maior valor, se encontrar ocupado temporariamente nos Serviços de Contabilidade da Universidade.

Por fim, desejaria exprimir a V. Ex.<sup>a</sup> e a todos os meus colaboradores que me ajudaram nestes três anos, os meus mais sinceros agradecimentos, esperando que me concedam também no futuro o seu valioso auxílio, de maneira que ao acabar a minha actividade em Coimbra se possa dizer: fez-se bom trabalho e não se deitou o dinheiro pela janela. É este o meu objectivo único.

Coimbra, Museu e Laboratório Zoológico  
da Universidade de Coimbra,  
em 25 de Novembro de 1939.

# Contribuição para o estudo da teoria das funções

(CONTINUAÇÃO)

## CAPÍTULO VIII

### CONCEITO DE FUNÇÃO

#### I

### TEOREMAS GERAIS

84. **Vizinhança dum conjunto.** — Sejam **A** e **B** conjuntos ligados entre si. Damos o nome de *vizinhança de B relativamente a A*, definida por um número positivo  $\varepsilon$ , ao conjunto **U** dos elementos **u** de **A** tais que seja  $uB \leq \varepsilon$ . Cada elemento de **U** é um elemento de **A** que se caracteriza por lhe corresponder um elemento de **[B]** cuja distância ao primeiro não excede o número  $\varepsilon$  [v. iv, p. 89, l. 24]. O conjunto **U** é a soma dos produtos de **A** pelos esferóides de centros nos diversos elementos de **[B]** e de raios iguais a  $\varepsilon$ .

Verifica-se evidentemente a relação  $\bar{u}B \leq \varepsilon$ . A vizinhança **U** ainda pode definir-se como sendo o maior subconjunto de **A** cujo desvio a **B** não excede o número  $\varepsilon$ .

Em particular, vizinhança dum elemento **b** de **[A]** relativamente a **A**, definida pelo número positivo  $\varepsilon$ , é o produto de **A** pelo esferóide de centro **b** e raio  $\varepsilon$ .

Entendemos por vizinhança dum conjunto **B** definida por um número positivo  $\varepsilon$ , sem mais indicação, a vizinhança de **B** relativamente ao espaçóide de que tratamos e definida por  $\varepsilon$ , ou seja a soma dos esferóides de centros nos elementos de **[B]** e de raios iguais a  $\varepsilon$ .

Qualquer vizinhança de **B** em relação a **A** é um conjunto limitado quando **B** é limitado [v. iv, p. 95, l. 29], e é um conjunto fechado, totalmente ou não, ao mesmo tempo que o conjunto **A**.

São manifestamente as mesmas as vizinhanças relativas a **A**

de conjuntos juxtapostos a  $\mathbf{B}$  quando definidas por um mesmo número  $\varepsilon$  [v. IV, p. 89, l. 1].

Dada uma vizinhança  $\mathbf{U}$  de  $\mathbf{B}$  em relação a  $\mathbf{A}$ , os termos de qualquer sucessão de subconjuntos de  $\mathbf{A}$  (ou de elementos, em particular)

$$(1) \quad \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_i, \dots$$

para a qual seja  $\lim \mathbf{X}_i \mathbf{B} = \mathbf{O}$  pertencem a  $\mathbf{U}$  a partir da ordem em que temos  $\mathbf{X}_i \mathbf{B} < \mathbf{U} \mathbf{B}$ . Quando  $\mathbf{B}$  é limitado, os termos da sucessão precedente, a partir de certa ordem, constituem, pois, um conjunto limitado.

Concluimos também que, se o limite integral duma sucessão de subconjuntos de  $\mathbf{A}$ , de soma limitada, pertence a  $[\mathbf{B}]$ , os termos da mesma sucessão pertencem a  $\mathbf{U}$  a partir de certa ordem [v. IV, p. 123, l. 17].

Se  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{U}'$  são as vizinhanças de  $\mathbf{B}$  em relação a  $\mathbf{A}$  definidas respectivamente pelos números  $\varepsilon$  e  $\varepsilon'$  ( $\varepsilon < \varepsilon'$ ), o conjunto  $\mathbf{U}'$  contém a vizinhança de  $\mathbf{U}$  em relação a  $\mathbf{A}$  definida pelo número  $\varepsilon' - \varepsilon$ . Na verdade, se  $\mathbf{u}$  é um elemento desta vizinhança de  $\mathbf{U}$ , temos  $\mathbf{u} \mathbf{U} < \varepsilon' - \varepsilon$ , e, como  $\mathbf{U} \mathbf{B} < \varepsilon$ , vem  $\mathbf{u} \mathbf{B} < \mathbf{u} \mathbf{U} + \mathbf{U} \mathbf{B} < \varepsilon'$  [v. IV, p. 99, (6)].

Seja  $\mathbf{U}$  a vizinhança de  $\mathbf{B}$  em relação a  $\mathbf{A}$  definida pelo número  $\varepsilon$ . A vizinhança  $(\mathbf{V})$ , definida pelo mesmo número  $\varepsilon$ , do conjunto dos subconjuntos limitados de  $\mathbf{B}$  em relação ao conjunto dos subconjuntos limitados de  $\mathbf{A}$  é o conjunto  $(\mathbf{U}')$  dos subconjuntos limitados  $\mathbf{U}'$  de  $\mathbf{U}$ . Com efeito, da relação  $\mathbf{U} \mathbf{B} < \varepsilon$  conclui-se que a um subconjunto  $\mathbf{U}'$  de  $\mathbf{U}$  corresponde sempre um subconjunto  $\mathbf{B}'$  de  $[\mathbf{B}]$  tal que  $\mathbf{U}' \mathbf{B}' < \varepsilon$  [v. IV, p. 110, l. 24] e por isso  $\mathbf{U}'$  pertence à vizinhança  $(\mathbf{V})$  [v. V, p. 136, l. 35]. Mas a cada conjunto  $\mathbf{V}$  de  $(\mathbf{V})$  corresponde um subconjunto  $\mathbf{B}'$  de  $[\mathbf{B}]$  tal que  $\mathbf{V} \mathbf{B}' < \varepsilon$ , sendo pois  $\mathbf{V} \mathbf{B} = \mathbf{V} [\mathbf{B}] < \mathbf{V} \mathbf{B}' < \varepsilon$ , donde  $\mathbf{V} \mathbf{B} < \varepsilon$ , razão porque  $\mathbf{V}$  é um subconjunto de  $\mathbf{U}$ . Dá-se pois a coincidência  $(\mathbf{U}') | (\mathbf{V})$ .

Consideremos o caso particular de  $\mathbf{B}$  ser um subconjunto de  $[\mathbf{A}]$ . A vizinhança  $\mathbf{U}$  de  $\mathbf{B}$  relativamente a  $\mathbf{A}$ , definida pelo número positivo  $\varepsilon$ , é tal que  $\mathbf{U} \mathbf{B} < \varepsilon$ , pois temos agora  $\mathbf{B} \mathbf{U} = \mathbf{O}$ . A vizinhança  $\mathbf{U}$  pode então definir-se como sendo o maior subconjunto de  $\mathbf{A}$  que satisfaz àquela condição.

Neste caso os conjuntos  $U$  e  $B$  ou são ambos limitados ou ambos ilimitados [v. iv, p. 192, l. 10].

Quando é  $B < [A]$ , converge para  $B$  qualquer sucessão de vizinhanças deste conjunto relativas a  $A$  e definidas por números positivos que tendam para zero.

Seja  $\delta$  a desconexão do conjunto  $B$ . Quando é  $B < [A]$ , a vizinhança  $U$  de  $B$  relativa a  $A$  e definida por  $\varepsilon$  tem uma desconexão que não excede o maior dos números  $\delta$  e  $\varepsilon$ . Com efeito, os conjuntos  $U + B$  e  $U$  são nesse caso juxtapostos entre si, tendo por isso a mesma desconexão [v. vi, p. 318, l. 5], e é evidente que a do primeiro não excede o maior dos números  $\delta$  e  $\varepsilon$ . Em particular, quando  $B$  é conexo, a desconexão de  $U$  não excede  $\varepsilon$ .

Seja  $A$  um conjunto qualquer (um elemento, em particular). Seja  $C$  um conjunto tal que dois quaisquer dos seus elementos pertençam a um contínuo limitado contido em  $C$ . Suponhamos que existe o produto  $[A] \times C$  e que o conjunto  $C$  não é um subconjunto de  $[A]$ . Cada vizinhança  $V$  de  $A$  relativa a  $C$  contém um contínuo ligado a  $A$  mas não contido neste conjunto.

Tomemos dois elementos  $x'$  e  $x$  de  $C$ , sendo o primeiro um elemento de  $[A]$  e o segundo estranho a este conjunto. Seja  $K$  um contínuo limitado contido em  $C$  a que pertençam os elementos  $x'$  e  $x$ . Unamos estes elementos por uma sucessão de elementos de  $K$ , em número finito, tais que as distâncias entre cada um e o seguinte sejam inferiores ao número  $\frac{1}{i}$ . Designemos por  $X_i$  o conjunto dos elementos desta sucessão contidos na vizinhança considerada  $V$  mas que sejam consecutivos a partir de  $x'$ . Ponhamos  $i=1, 2, \dots$  e designemos por  $X$  um limite fechado, contido em  $K$ , da sucessão

$$X_1, X_2, \dots, X_i, \dots$$

O conjunto  $X$  é um contínuo [v. vi, p. 319, l. 3]. Este contínuo, manifestamente ligado a  $A$ , pertence a  $V$ ; contém o elemento  $x'$  e alguns elementos de  $K$  distintos dos de  $[A]$ .

Seja  $C$  um conjunto tal que dois quaisquer dos seus elementos pertençam a um contínuo limitado contido em  $C$ . Consideremos uma coleção constituída por alguns desses contínuos. Suponha-

mos que um contínuo limitado qualquer contido em  $\mathcal{C}$  que se juxtaponha a uma soma de contínuos da colecção pertence à mesma colecção <sup>(1)</sup>. Admitamos também que um qualquer dos contínuos da colecção determina uma vizinhança  $V$  em relação a  $\mathcal{C}$  tal que os contínuos contidos em  $V$  ainda pertencem à mesma colecção. Nestas condições a soma dos contínuos da colecção é o conjunto  $\mathcal{C}$ .

Demonstremos que um elemento qualquer  $c$  de  $\mathcal{C}$  pertence a um dos contínuos da colecção a que se refere o enunciado. Seja  $K_1$  um destes contínuos. Se nenhum elemento de  $K_1$  se juxtapõe a  $c$  (no caso afirmativo o elemento  $c$  pertenceria ao contínuo  $c + K_1$  da colecção), unamos  $c$  a um elemento de  $K_1$  por meio dum contínuo limitado  $K$  contido em  $\mathcal{C}$ . Efectuemos a soma de todos os contínuos da colecção contidos em  $K_1 + K$  mas que admitam  $K_1$  por subconjunto. Tal soma, por ser um conjunto conexo, admite por lugar um contínuo. Este juxtapõe-se elemento a elemento a um contínuo  $K'$  contido em  $K_1 + K$  e que contém aquela soma. Por hipótese  $K'$  é um contínuo da colecção; é o maior contido em  $K_1 + K$  e que contém  $K_1$ .

Terminamos a demonstração provando que é  $K' \mid > K$ , e que por conseguinte o elemento  $c$  pertence ao contínuo  $K'$  da colecção. Consideremos para isso uma vizinhança  $V$  de  $K'$  relativa a  $K$  tal que os contínuos nela contidos pertençam à colecção. Se o contínuo  $K$  não fôsse um subconjunto de  $K'$ , a vizinhança  $V$  conteria um contínuo  $K''$  ligado a  $K'$  mas não contido neste conjunto (como resultaria da proposição precedente pondo nela  $A \mid K'$  e  $\mathcal{C} \mid K$ ). Existiria pois um contínuo  $K' + K''$  da colecção contido em  $K_1 + K$  e maior do que  $K'$ .

85. Demonstração dum lema. — Consideremos uma sucessão de conjuntos

$$(2) \quad A_1, A_2, \dots, A_i, \dots,$$

um conjunto limitado  $B$  <sup>(2)</sup>, uma família de conjuntos  $F$  e um número não negativo  $\alpha$ . Representemos em geral por

$$(3) \quad x_r, x_s, \dots, x_u, \dots$$

(1) Resulta desta condição que uma soma dum número finito de contínuos da colecção ligados entre si é ainda um contínuo da colecção.

(2) Dispensa-se a hipótese da limitabilidade de  $B$  quando a soma dos conjuntos (2) é limitada.

qualquer sucessão de elementos extraída duma subsucessão da (2) <sup>(1)</sup>, mas que seja limitada e cujo derivado <sup>(2)</sup> seja um subconjunto de  $[B]$  de diâmetro não superior a  $\alpha$ . Suponhamos que existe uma ordem para cada sucessão <sup>(3)</sup> a partir da qual os seus elementos pertençam a um dos conjuntos  $F$ .

É possível determinar uma vizinhança  $U$  de  $B$ , um número  $\beta$  superior a  $\alpha$  e uma ordem  $i$  tais que: elementos de  $U$  em número finito, que determinem um diâmetro inferior a  $\beta$  <sup>(3)</sup>, extraídos de termos distintos da sucessão (2) de ordens superiores a  $i$ , pertençam sempre a um dos conjuntos da família.

Se a família dos conjuntos  $F$  é finita ou numerável, podemos determinar uma vizinhança  $U'$  de  $B$ , um número  $\beta'$  superior a  $\alpha$  e uma ordem  $i'$  tais que: um subconjunto de  $U'$ , de diâmetro inferior a  $\beta'$ , contido na soma  $A_i + A_{i+1} + \dots$ , pertença sempre a um dos conjuntos da família.

Admitamos, com efeito, que não é possível determinar uma vizinhança de  $B$ , um número superior a  $\alpha$  e uma ordem que verifiquem a primeira parte do enunciado. Existe em tal caso uma sucessão

$$(4) \quad X_1, X_2, \dots, X_i, \dots$$

de conjuntos que fazem  $\lim X_i B = 0$ , cujos diâmetros têm um limite máximo não superior a  $\alpha$ , sendo cada um  $X_i$  constituído por elementos em número finito, não contidos num mesmo conjunto  $F$ , extraídos de termos distintos da sucessão (2) de ordens crescentes com  $i$  <sup>(4)</sup>.

A sucessão (4) é limitada [p. 103, l. 8]; seja

$$(5) \quad X_r, X_s, \dots, X_u, \dots$$

uma das suas subsucessões convergentes [v. iv, p. 140, l. 10], e representemos por  $X$  o respectivo limite totalmente fechado.

Mas  $X$  é um subconjunto de  $[B]$ , porque temos  $\lim X_u B = 0$

(1) Recordem-se as definições dadas no v. iv, p. 112, n. 33.

(2) Chamamos derivado duma sucessão de elementos ao respectivo limite integral, isto é, ao conjunto dos seus elementos limites [v. iv, p. 17, n. 6].

(3) É claro que nos referimos ao diâmetro do conjunto desses elementos.

(4) Isto é, tôlas superiores a cada uma das ordens dos termos da (2) que deram origem ao conjunto  $X_{i-1}$ .

[v. v, p. 296, l. 12], e o seu diâmetro não excede  $\alpha$  [v. v, p. 134, l. 17]. Logo a sucessão que resulta de numerarmos convenientemente a totalidade dos elementos dos termos da sucessão (5), além de ser limitada e extraída duma subsucessão da (2), tem por derivado o subconjunto  $\mathbf{X}$  de  $[\mathbf{B}]$  cujo diâmetro não excede  $\alpha$ , e no entanto não há ordem alguma a partir da qual os seus elementos pertençam a um mesmo conjunto da família.

Semelhantemente reconhecemos que, se não é possível determinar uma vizinhança de  $\mathbf{B}$ , um número superior a  $\alpha$  e uma ordem que satisfaçam à segunda parte do lema, existe uma sucessão de conjuntos de soma limitada

$$(6) \quad \mathbf{X}'_r, \mathbf{X}'_s, \dots, \mathbf{X}'_u, \dots$$

que tende para um subconjunto  $\mathbf{X}'$  de  $[\mathbf{B}]$  de diâmetro não superior a  $\alpha$ , sendo cada um  $\mathbf{X}'_u$  um subconjunto duma soma de termos da sucessão (2) nos quais a ordem mínima cresce com  $u$ , e não pertencendo cada um deles a nenhum dos conjuntos  $\mathbf{F}$ .

Depois de numerarmos os conjuntos  $\mathbf{F}$ , determinemos uma sucessão de elementos

$$(7) \quad \mathbf{x}'_r, \mathbf{x}'_s, \dots, \mathbf{x}'_u, \dots$$

extraída duma subsucessão da (6) mas de maneira que tais elementos não pertençam aos conjuntos  $\mathbf{F}$  cujas ordens são dadas respectivamente pelos números 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, ... (4) elementos êsses que sejam extraídos de termos da sucessão (2) de ordens sucessivamente crescentes.

A sucessão (7) assim extraída duma subsucessão da (2) é limitada, o seu derivado (contido em  $\mathbf{X}'$ ) é um subconjunto de  $[\mathbf{B}]$  de diâmetro não superior a  $\alpha$ , mas não existe uma ordem a partir da qual todos os seus elementos pertençam a um mesmo conjunto da família.

(4) Quando os conjuntos  $\mathbf{F}$  são em número finito  $n$ , suprimimos nesta sucessão os números superiores a  $n$ .

**Observações.** — 1) *A família dos conjuntos  $F$  pode ser constituída, em particular, pelos conjuntos dos elementos das diversas sucessões (3) tomadas a partir de certas ordens.*

ii) *Se a partir de certa ordem para cada sucessão (3), quaisquer dos seus elementos em número finito [ou apenas em número  $k$ , para um determinado  $k$ ], e não necessariamente todos, pertencem a um dos conjuntos  $F$ , é possível determinar uma vizinhança  $U$  de  $B$ , um número  $\beta$  superior a  $\alpha$  e uma ordem  $i$  tais que: elementos de  $U$  em número finito [ou apenas em número  $k$ ], que determinem um diâmetro inferior a  $\beta$ , extraídos de termos distintos da sucessão (2) de ordens superiores a  $i$  pertençam sempre a um dos conjuntos da família. Efectivamente, considerando a família dos conjuntos  $F$  dos elementos de cada sucessão (3) a partir da ordem em que se dá a propriedade expressa neste enunciado, diz a primeira parte do lema, aplicada à nova família de conjuntos  $F'$ , que é possível determinar uma vizinhança  $U$  de  $B$ , um número  $\beta$  superior a  $\alpha$  e uma ordem  $i$  tais que: elementos de  $U$  em número finito [ou apenas em número  $k$ ], que determinem um diâmetro inferior a  $\beta$ , extraídos de termos distintos da sucessão (2) de ordens superiores a  $i$  pertençam sempre a um dos conjuntos  $F'$ , e por isso a um dos conjuntos  $F$ .*

iii) *Quando a soma dos termos da sucessão (2) é limitada e quando o limite integral pertence a  $B$ , podemos simplificar o enunciado do lema, pois não é necessário nele aludir às vizinhanças  $U$  e  $U'$ . Em tal caso, com efeito, existem ordens a partir das quais os termos da sucessão (2) pertencem àquelas vizinhanças de  $B$  [p. 103, l. 11].*

iv) *Quando o produto de  $B$  pelo limite integral da sucessão (2) pertence ao limite comum da mesma (4), basta fazer figurar no enunciado do lema sucessões de elementos extraídas da sucessão (2) em vez de sucessões (3) extraídas das diversas sub-sucessões da (2). Consideremos, com efeito, uma qualquer das sucessões (3). Um elemento do seu derivado é agora limite duma sucessão de elementos*

$$x'_1, x'_2, \dots, x'_i, \dots$$

(4) O que sucede em particular quando a sucessão é convergente ou quando  $B$  pertence ao limite comum.

extraída da (2). Substituamos nesta sucessão os elementos de ordens  $r, s, \dots$  respectivamente por  $x_r, x_s, \dots$ . A nova sucessão assim extraída da (2), que representamos por

$$(8) \quad x_1'', x_2'', \dots, x_i'', \dots,$$

é limitada, e o seu derivado (o mesmo que o da (3)) tem o diâmetro não superior a  $\alpha$ . Logo, se existe, como estamos a supor, uma ordem a partir da qual os termos da sucessão (8) pertencem a um dos conjuntos  $F$ , o mesmo podemos dizer relativamente à sucessão (3) donde partimos.

v) É duma grande generalidade o lema de que nos temos ocupado. Obtêm-se casos particulares sucessivos, que mais directamente intervêm em certas proposições, introduzindo uma ou mais das simplificações seguintes:  $\alpha = 0$ ;  $\alpha$  igual ao diâmetro de  $B$ ;  $k = 1$ ; existência de  $\lim A_i \parallel A; B \mid < [A]; A_i \mid A$  ( $i = 1, 2, \dots$ );  $A \mid P$  (espaçoide de que tratamos); família constituída por um só conjunto; conjunto  $B$  reduzido a um só elemento; etc.

No caso de  $\alpha = 0$ , as sucessões de elementos (3) são as que, sendo extraídas das diversas subsucessões da (2), convergem para elementos de  $[B]$ . No caso de  $\alpha$  igual ao diâmetro de  $B$ , as sucessões (3) são as extraídas das subsucessões da (2) e tais que seja  $\lim x_n B = 0$ .

Eis alguns desses casos particulares, todos relativos à hipótese  $\alpha = 0$ :

*Consideremos uma sucessão convergente (2) de conjuntos de soma limitada e uma família de conjuntos  $F$ . Se os elementos de qualquer sucessão convergente, extraída da (2), pertencem a partir de certa ordem a um dos conjuntos  $F$ , é possível determinar um número positivo  $\varepsilon$  e uma ordem  $i$  tais que: elementos em número finito, que determinem um diâmetro inferior a  $\varepsilon$ , extraídos de termos distintos da sucessão (2) de ordens superiores a  $i$ , pertençam sempre a um dos conjuntos da família.*

*Se além disso a família dos conjuntos  $F$  é finita ou numerável, podemos determinar um número positivo  $\varepsilon'$  e uma ordem  $i'$  tais que um conjunto de diâmetro inferior a  $\varepsilon'$  contido na soma  $A_i + A_{i+1} + \dots$ , pertença sempre a um dos conjuntos da família.*

*Consideremos uma sucessão de conjuntos (2), um subconjunto  $B$  limitado e fechado do limite comum da mesma e um conjunto  $F$ .*

*Se, qualquer que seja a sucessão de elementos que tenda para um elemento de  $B$ , extraída da sucessão (2), esses elementos pertencem a  $F$  a partir de certa ordem, é possível determinar uma ordem  $i$  e uma vizinhança  $U$  de  $B$  tais que o produto de  $U$  pela soma  $A_i + A_{i+1} + \dots$  pertença a  $F$ .*

*Consideremos uma sucessão convergente (2) de conjuntos de soma limitada e um conjunto  $F$ . Se os elementos de qualquer sucessão convergente, extraída da (2), pertencem a partir de certa ordem ao conjunto  $F$ , os termos da sucessão (2) pertencem a  $F$  a partir de certa ordem.*

*Consideremos dois conjuntos  $A$  e  $B$  ligados entre si, sendo este fechado e um deles limitado. Consideremos ainda uma família de conjuntos  $F$  e um número inteiro positivo  $k$ . Se, qualquer que seja a sucessão de elementos de  $A$  que tenda para um elemento de  $B$ , quaisquer  $k$  desses elementos pertencem, a partir de certa ordem, a um dos conjuntos  $F$  (1), é possível determinar um número positivo  $\varepsilon$  e uma vizinhança  $U$  de  $B$  relativa a  $A$  tais que um conjunto de  $k$  elementos de  $U$ , de diâmetro inferior a  $\varepsilon$ , pertença sempre a um dos conjuntos  $F$  (2).*

*Se os termos de qualquer sucessão de elementos de  $A$  que tenda para um de  $B$  pertencem a um dos conjuntos  $F$  a partir de certa ordem e se a família destes conjuntos é finita ou numerável, podemos determinar um número positivo  $\varepsilon'$  e uma vizinhança  $U'$  de  $B$  relativa a  $A$  tais que um subconjunto de  $U'$  de diâmetro inferior a  $\varepsilon'$  pertença sempre a um dos conjuntos  $F$  (3).*

(1) Esta condição exige que o produto  $A \times B$ , quando existe, seja coberto pelos conjuntos  $F$ .

(2) Não é necessário aludir ao número  $\varepsilon$  quando  $B$  se reduz a um só elemento.

(3) Também não é necessário aludir a  $\varepsilon'$  quando  $B$  se reduz a um único elemento. Se ainda neste caso  $A$  se converte no espaço de de que tratamos, vem a proposição:

*Dados um elemento  $b$  e uma família finita ou numerável de conjuntos  $F$ , se os elementos de qualquer sucessão que tenda para  $b$  pertencem a um dos conjuntos  $F$  a partir de certa ordem, existe um esferóide de centro  $b$  contido num desses conjuntos.*

Notemos que o presente enunciado pode deixar de ser verdadeiro para uma infinidade não numerável de conjuntos  $F$ , afirmação esta que se transmite ao enunciado da segunda parte do lema. É fácil citar exemplos neste sentido.

A cada sucessão convergente de elementos dum dado conjunto limitado **A** façamos corresponder o conjunto **F** dos elementos da mesma sucessão tomados a partir de certa ordem. Existe um número positivo  $\varepsilon$  tal que: elementos quaisquer de **A**, em número finito, de distâncias dois a dois inferiores a  $\varepsilon$  pertencem a um dos conjuntos **F**.

Sejam **A** e **B** conjuntos ligados entre si, sendo este fechado e um deles limitado. Seja **F** um conjunto qualquer. Se os termos de cada sucessão de elementos de **A** que tenda para um elemento de **B** pertencem a **F** a partir de certa ordem, existe uma vizinhança de **B** relativa a **A** contida em **F**.

Seja **b** um elemento limite dum dado conjunto **A**. A cada sucessão de elementos de **A** que tenda para **b** façamos corresponder o conjunto **F** dos elementos da mesma tomados a partir de certa ordem. Existe uma vizinhança **U** de **b** relativa a **A** tal que: elementos quaisquer de **U**, em número finito, pertencem a um dos conjuntos **F**.

Consideremos um conjunto qualquer **A** e um subconjunto **B** de **A** limitado e fechado. Associemos a cada elemento de **B** uma vizinhança deste elemento relativa a **A**. Existem uma vizinhança **U** de **B** relativa a **A** e um número positivo  $\varepsilon$  tais que um subconjunto qualquer de **U** de diâmetro inferior a  $\varepsilon$  pertence a uma dessas vizinhanças.

Cada elemento de **B** é, com efeito, centro dum esferóide cujo produto por **A** constitui a vizinhança desse elemento. Mas como o conjunto **B** é coberto interiormente com uma infinidade numerável dos mesmos esferóides [lema de LINDELÖF], segue-se que os termos de qualquer sucessão de elementos de **A** que tenda para um elemento de **B** pertencem, a partir de certa ordem, a um dos esferóides dessa infinidade numerável. Existem pois uma vizinhança **U** de **B** relativa a **A** e um número positivo  $\varepsilon$  tais que um subconjunto qualquer de **U** de diâmetro inferior a  $\varepsilon$  pertence a um desses esferóides, e portanto a uma das vizinhanças consideradas (1).

(1) Também serve de justificação a mesma da proposição do v. vi, p. 526, l. 10, convenientemente adaptada ao presente caso.

Logo o conjunto  $U$  decompõe-se num número finito de partes cada uma das quais pertence a uma das vizinhanças dadas, isto é, o conjunto  $U$  cobre-se apenas com um número finito das mesmas vizinhanças.

Quando o conjunto  $A$  coincide com o espaçoide que estamos considerando vem o enunciado seguinte:

Associemos a cada elemento dum conjunto limitado e fechado  $B$  um esferóide de centro no mesmo elemento. Existem uma vizinhança  $U$  de  $B$  e um número positivo  $\varepsilon$  tais que um subconjunto qualquer de  $U$  de diâmetro inferior a  $\varepsilon$  seja interior a um desses esferóides.

A vizinhança  $U$  é pois coberta interiormente apenas com um número finito dos esferóides considerados (1).

Consideremos uma sucessão de conjuntos (2), um conjunto  $B$  e uma família de conjuntos  $F$ . Seja em geral (3) qualquer sucessão de elementos extraída duma subsucessão da (2) e tal que se tenha  $\lim x_n B = 0$ . Suponhamos que existe uma ordem para cada sucessão (3) a partir da qual os seus elementos pertençam a um dos conjuntos  $F$ .

É possível determinar uma vizinhança  $U$  de  $B$  e uma ordem  $i$  tais que: elementos quaisquer de  $U$ , em número finito, extraídos de termos distintos da sucessão (2) de ordens superiores a  $i$  pertençam a um dos conjuntos da família.

Se a família dos conjuntos  $F$  é finita ou numerável, podemos determinar uma vizinhança  $U'$  de  $B$  e uma ordem  $i'$  tais que o produto de  $U'$  pela soma  $A_{i'} + A_{i'+1} + \dots$  pertença a um dos conjuntos da família.

Quando o conjunto  $B$  é limitado, esta proposição deduz-se do lema, introduzindo nêlo a condição de  $\alpha$  representar o diâmetro de  $B$ . Mas a mesma proposição estende-se para o caso de  $B$  ser ilimitado, e por conseguinte de  $\alpha$  se tornar infinito. A demonstração é mais simples que a do lema, e dela se obtém suprimindo as passagens que resultam das hipóteses das limitabilidades de  $B$  e do conjunto dos diâmetros dos derivados das diversas sucessões (3).

(1) Esta proposição completa o lema de BOREL enunciado no v. VI, p. 528, l. 19.

Limitamo-nos a enunciar só dois casos particulares :

Sejam  $A$  e  $B$  conjuntos ligados entre si. A cada sucessão  $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$  de elementos de  $A$  para a qual seja  $\lim x_i B = 0$  façamos corresponder o conjunto  $F$  de todos os elementos da mesma sucessão mas tomados a partir de certa ordem. Existe uma vizinhança  $U$  de  $B$  relativa a  $A$  tal que: elementos quaisquer de  $U$  em número finito pertencem a um dos conjuntos  $F$ .

Sejam  $A, B$  e  $F$  conjuntos quaisquer, sendo os dois primeiros ligados entre si. Se os termos de qualquer sucessão  $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$  de elementos de  $A$ , tal que  $\lim x_i B = 0$ , pertencem a  $F$  a partir de certa ordem, existe uma vizinhança de  $B$  relativa a  $A$  contida em  $F$ .

Uma outra classe de proposições que se deduz ainda do mesmo lema é a que resulta de supormos que os elementos dos conjuntos  $A_i, B$  e  $F$  nêle figurados são subconjuntos limitados de elementos dum dado espaçóide [v. IV, p. 134, n. 44].

São verdadeiras por exemplo as seguintes proposições :

Consideremos uma sucessão de conjuntos (2), um conjunto limitado  $B$  e uma família de conjuntos  $F$ . Se, qualquer que seja a sucessão de subconjuntos limitados dos termos correspondentes duma subsucessão da (2), que tenda para um subconjunto limitado de  $B$ , existe uma ordem a partir da qual êsses conjuntos pertencem a um dos conjuntos  $F$ , é possível determinar uma vizinhança  $U$  de  $B$ , um número positivo  $\varepsilon$  e uma ordem  $i$  tais que: subconjuntos quaisquer de  $U$ , em número finito, de distâncias dois a dois inferiores a  $\varepsilon$ , extraídos de termos distintos da sucessão (2) de ordens superiores a  $i$  pertençam a um dos conjuntos da família [p. 103, l. 21].

Consideremos uma sucessão convergente de conjuntos (2) de soma limitada e uma família de conjuntos  $F$ . Se, qualquer que seja a sucessão de subconjuntos dos termos correspondentes da (2), que tenda para um elemento, cada um destes subconjuntos pertence a um dos conjuntos  $F$  a partir de certa ordem, é possível determinar um número positivo  $\varepsilon$  e uma ordem  $i$  tais que um subconjunto de diâmetro inferior a  $\varepsilon$  dum termo da sucessão de ordem superior a  $i$  pertença sempre a um dos conjuntos da família.

Consideremos uma infinidade de conjuntos  $A$  e um conjunto limitado  $B$ . A cada sucessão desses conjuntos  $A$ , de soma limitada, que tenda para  $B$  <sup>(1)</sup> façamos corresponder uma ordem. Existe um número positivo  $\varepsilon$  que satisfaz à seguinte condição: quaisquer dos conjuntos  $A$ , em número finito, cujas distâncias a  $B$  sejam inferiores a  $\varepsilon$  são termos duma das referidas sucessões tomados a partir da correspondente ordem <sup>(2)</sup>.

Sejam  $A$  e  $B$  conjuntos ligados entre si, sendo este fechado e um deles limitado. Consideremos uma família de conjuntos  $F$ . Se cada um dos termos de qualquer sucessão de subconjuntos de  $A$  de soma limitada, que tenda para um elemento de  $B$ , pertence a um dos conjuntos  $F$  a partir de certa ordem, existem uma vizinhança  $U$  de  $B$  relativa a  $A$  e um número  $\varepsilon$  tais que um subconjunto de  $U$  de diâmetro inferior a  $\varepsilon$  pertença sempre a um dos conjuntos da família.

O lema de BOREL, há pouco demonstrado com o auxílio do de LINDELÖF, apresenta-se também como uma aplicação directa da proposição agora enunciada. Efectivamente, se cada elemento dum conjunto limitado e fechado  $B$  é centro dum esferóide duma dada família, os termos de qualquer sucessão de conjuntos de soma limitada que tenda para um elemento de  $B$  pertencem a um desses esferóides a partir de certa ordem [v. VI, p. 482, l. 15], e por isso existem uma vizinhança  $U$  de  $B$  e um número positivo  $\varepsilon$  tais que um subconjunto de  $U$  de diâmetro inferior a  $\varepsilon$  pertença sempre a um dos mesmos esferóides. Pertence pois a um dos esferóides da família, em particular, qualquer subconjunto de  $B$  de diâmetro inferior a  $\varepsilon$ .

86. **Definição de função.** — Sejam  $P$  e  $Q$  dois espaçóides quaisquer, distintos ou não. Dado um subconjunto  $A$  de  $P$ , façamos corresponder a cada um dos seus elementos  $x$  um e um só elemento  $z$  de  $Q$ . A uma tal correspondência dá-se o nome de *função*, e dizemos que  $z$  é função de  $x$  no conjunto  $A$ .

(1) Supomos que existem tais sucessões.

(2) É claro que a proposição generaliza-se para o caso de  $B$  ser ilimitado, mas devemos supor que as sucessões  $A_1, A_2, \dots, A_i, \dots$  de conjuntos  $A$  que tendam para  $B$  satisfazem à condição  $\lim A_i B = 0$ .

Pelo símbolo  $f(\mathbf{x})$ , no qual a letra  $f$  pode substituir-se por qualquer outra, convencionamos representar então o elemento  $\mathbf{z}$  correspondente a  $\mathbf{x}$ , ou *elemento da função  $f$  no elemento  $\mathbf{x}$* . Podemos pois escrever  $\mathbf{z} | f(\mathbf{x})$  para indicar que a variável  $\mathbf{z}$ , ou variável dependente, é função de  $\mathbf{x}$ , também chamada variável independente <sup>(1)</sup>.

Diremos que a função  $f(\mathbf{x})$  é *definida* no conjunto  $\mathbf{A}$  e em cada um dos seus elementos.

A própria função faz corresponder a cada subconjunto  $\mathbf{X}$  de  $\mathbf{A}$  o conjunto  $\mathbf{Z}$  dos elementos de  $f(\mathbf{x})$  nos diversos elementos de  $\mathbf{X}$ . A função de conjuntos assim definida será representada por  $\mathbf{Z} | f(\mathbf{X})$  (com a mesma letra  $f$ ). Em virtude desta notação, o conjunto dos elementos de  $f(\mathbf{x})$  em todos os elementos de  $\mathbf{A}$  pode representar-se por  $f(\mathbf{A})$  <sup>(2)</sup>.

A correspondência unívoca que estabelece a função  $\mathbf{z} | f(\mathbf{x})$  pode ser também *biunívoca*, isto é, recíproca, o que sucede quando cada elemento  $f(\mathbf{x})$  de  $f(\mathbf{A})$  corresponde a um só elemento  $\mathbf{x}$  de  $\mathbf{A}$ . Em tal caso a função determinada por essa correspondência recíproca chama-se *inversa* da primeira.

Seja  $\varphi(\mathbf{z})$  uma segunda função mas definida no conjunto  $f(\mathbf{A})$ . À função  $\varphi(f(\mathbf{x}))$ , que faz corresponder a cada elemento  $\mathbf{x}$  de  $\mathbf{A}$  o elemento  $\varphi(\mathbf{z})$  correspondente a  $\mathbf{z} | f(\mathbf{x})$ , damos o nome de *função de função*. A  $\mathbf{z}$  chama-se então variável intermédia.

Dadas  $n$  funções

$$f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x})$$

<sup>(1)</sup> Recordemos que, relativamente às estruturas dos espaçóides  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{Q}$ , cada um deles pode considerar-se simples ou composto, ou constituído pelos subconjuntos limitados de certo espaçóide, e pode considerar-se mixto [v. iv, p. 136, n. 45].

A exposição que vamos desenvolver aplica-se em particular às funções que relacionam elementos de dois espaçóides numéricos [v. iv, p. 138, l. 3]; tais são as que põem em correspondência pontos de dois espaços ordinários, com o mesmo ou diferente número de dimensões, de coordenadas tôdas reais ou não, e as funções que fazem corresponder a subconjuntos limitados de um desses espaços subconjuntos limitados dum outro.

<sup>(2)</sup> Quando fôr necessário supor que  $f(\mathbf{X})$  estabeleça correspondência entre elementos de dois espaçóides, teremos de considerar apenas os subconjuntos limitados  $\mathbf{X}$  de  $\mathbf{A}$  e de supor que os correspondentes conjuntos  $\mathbf{Z}$  também são limitados [v. v, p. 141, l. 13].

definidas num mesmo conjunto  $\mathbf{A}$ , considera-se muitas vezes a função

$$(9) \quad (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x})),$$

ainda definida no conjunto  $\mathbf{A}$ , e que faz corresponder a cada elemento  $\mathbf{x}$  de  $\mathbf{A}$  o elemento composto representado em (9) [v. IV, p. 28, n. 11]. Dizemos que tal função é *composta*, e as funções dadas chamam-se então *componentes* <sup>(1)</sup>.

Se uma função  $\varphi(z_1, z_2, \dots, z_n)$  é definida no conjunto dos elementos da função (9), a função

$$\varphi(f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x})),$$

definida em  $\mathbf{A}$  e denominada ordinariamente função composta, será considerada como função de função, sendo a representada em (9) a intermédia; é uma função do elemento composto  $(z_1, z_2, \dots, z_n)$  que por sua vez é função de  $\mathbf{x}$  em  $\mathbf{A}$ .

Diremos que duas funções  $f(\mathbf{x})$  e  $j(\mathbf{x})$ , definidas respectivamente nos conjuntos  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{A}'$ , são *juxtapostas* entre si quando forem juxtapostos os conjuntos dos elementos de segunda ordem  $(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))$  e  $(\mathbf{x}, j(\mathbf{x}))$  correspondentes aos diversos elementos  $\mathbf{x}$  de  $\mathbf{A}$  e de  $\mathbf{A}'$  respectivamente. Tais funções caracte-

(1) Se as funções dadas, distintas ou não, são definidas em conjuntos quaisquer

$$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n,$$

distintos ou não, pertencentes ou não ao mesmo espaçoíde, a função

$$(1) \quad (f_1(\mathbf{x}_1), f_2(\mathbf{x}_2), \dots, f_n(\mathbf{x}_n)),$$

definida no conjunto composto [v. IV, p. 29, l. 19]

$$(2) \quad (\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n)$$

e que faz corresponder a cada elemento  $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$  dêste conjunto o elemento composto (1), tem uma construção que não é distinta da precedente; na verdade, podemos considerar tôdas as funções  $f_i(\mathbf{x})$  como sendo definidas no mesmo conjunto composto (2).

Note-se que o conjunto dos elementos da função (1) assim obtida resulta da composição dos conjuntos dos elementos das funções dadas, isto é, pode designar-se por  $(f_1(\mathbf{A}_1), f_2(\mathbf{A}_2), \dots, f_n(\mathbf{A}_n))$ .

rizam-se pela seguinte propriedade: dado um número positivo  $\delta$ , a cada elemento  $x$  de  $A$  corresponde um elemento  $x'$  de  $A'$  que faz  $xx' < \delta$  e  $f(x)j(x') < \delta$ ; a cada elemento  $x'$  de  $A'$  corresponde um  $x$  de  $A$  que verifica as mesmas desigualdades.

Duas funções juxtapostas a uma terceira são juxtapostas entre si.

Se  $f(x)$  e  $j(x)$ , definidas em  $A$  e  $A'$ , são juxtapostas entre si, verificam-se as seguintes juxtaposições:

$$A \parallel A' \text{ e } f(A) \parallel j(A') \quad [v. v, p. 138, l. 12].$$

**87. Funções limitadas.** — A função  $f(x)$ , definida em  $A$ , diz-se limitada num subconjunto  $X$  de  $A$ , por definição, quando é limitado o conjunto  $f(X)$ . Sempre que falarmos em função limitada  $f(x)$ , sem mais designação, entenderemos que  $f(x)$  é limitada no conjunto  $A$  onde a definimos.

Duas funções juxtapostas entre si ou são ambas limitadas ou ambas ilimitadas.

Fácilmente se reconhece que, dado um subconjunto  $B$  de  $[A]$ , se  $f(x)$  é ilimitada nas diversas vizinhanças de  $B$  em relação a  $A$ , existe uma sucessão  $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$  de elementos de  $A$  que faz  $\lim x_i B = 0$  e ao longo da qual os elementos de  $f(x)$  divergem para infinito [v. v, p. 144, l. 24]. Em particular, se  $f(x)$  é ilimitada nas vizinhanças dum elemento  $b$  de  $[A]$ , existe uma sucessão de elementos de  $A$  que tende para  $b$  ao longo da qual os elementos de  $f(x)$  divergem para infinito.

*Seja  $B$  um subconjunto de  $[A]$  limitado e fechado. Se  $f(x)$  é limitada numa vizinhança de cada elemento de  $B$ , existe uma vizinhança de  $B$  onde  $f(x)$  é igualmente limitada (1).*

Existe, com efeito, uma vizinhança  $U$  de  $B$  em relação a  $A$  que é coberta apenas com um número finito das vizinhanças a que se refere o presente enunciado [p. 112, l. 1]. Logo  $f(x)$  é limitada em  $U$ .

Por conseguinte, se  $f(x)$  é ilimitada nas vizinhanças dum subconjunto  $B$  de  $[A]$ , limitado e fechado, existe um elemento de  $B$  nas vizinhanças do qual  $f(x)$  é ilimitada.

(1) É claro que estas vizinhanças referem-se ao conjunto  $A$ .

Em particular:

Uma função  $f(\mathbf{x})$  definida num conjunto limitado  $\mathbf{A}$  é limitada neste conjunto sempre que o seja numa vizinhança de cada elemento de  $\mathbf{A}$ .

Sejam  $f(\mathbf{x})$  e  $j(\mathbf{x})$  funções juxtaponas entre si definidas nos conjuntos  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{A}'$ . Consideremos um subconjunto  $\mathbf{B}$  de  $\mathbf{A}$ . Se  $f(\mathbf{x})$  é ilimitada nas vizinhanças de  $\mathbf{B}$  relativas a  $\mathbf{A}$ , o mesmo sucede a  $j(\mathbf{x})$  nas vizinhanças de  $\mathbf{B}$  relativas a  $\mathbf{A}'$ .

Suponhamos, com efeito, que  $f(\mathbf{x})$  é ilimitada em qualquer vizinhança de  $\mathbf{B}$ . Existe nesse caso uma sucessão  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_i, \dots$  de elementos de  $\mathbf{A}$  que faz  $\lim \mathbf{x}_i \mathbf{B} = 0$  e ao longo da qual os elementos de  $f(\mathbf{x})$  divergem para infinito. Mas a cada elemento  $\mathbf{x}_i$  corresponde um elemento  $\mathbf{x}'_i$  de  $\mathbf{A}'$  que verifica as desigualdades  $\overline{\mathbf{x}_i \mathbf{x}'_i} < \frac{1}{i}$  e  $\overline{f(\mathbf{x}'_i) j(\mathbf{x}'_i)} < \frac{1}{i}$ . Temos ainda  $\lim \mathbf{x}'_i \mathbf{B} = 0$ , como mostra a relação  $\overline{\mathbf{x}'_i \mathbf{B}} < \overline{\mathbf{x}'_i \mathbf{x}_i} + \overline{\mathbf{x}_i \mathbf{B}}$  [v. IV, p. 90, (1)]. Os elementos de  $j(\mathbf{x})$  ao longo da sucessão  $\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2, \dots, \mathbf{x}'_i, \dots$  divergem para infinito. Logo  $j(\mathbf{x})$  também é ilimitada em qualquer vizinhança de  $\mathbf{B}$ .

Se em particular  $f(\mathbf{x})$  é ilimitada nas vizinhanças dum elemento  $\mathbf{b}$  de  $\mathbf{A}$  relativas a  $\mathbf{A}$ , também  $j(\mathbf{x})$  é ilimitada nas vizinhanças de  $\mathbf{b}$  em relação a  $\mathbf{A}'$ .

88. Limites de funções. — Seja  $f(\mathbf{x})$  uma função definida em certo conjunto  $\mathbf{A}$ . Designemos em geral por

$$(10) \quad \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_i, \dots$$

uma sucessão de elementos de  $\mathbf{A}$ . Consideremos a correspondente sucessão

$$(11) \quad f(\mathbf{x}_1), f(\mathbf{x}_2), \dots, f(\mathbf{x}_i), \dots$$

Chamamos *elemento limite de  $f(\mathbf{x})$*  num elemento  $\mathbf{y}$  do lugar  $\mathbf{A}$  a qualquer limite duma sucessão (11) correspondente a uma sucessão (10) que tenda para  $\mathbf{y}$ . O conjunto de todos os elementos limites de  $f(\mathbf{x})$  no elemento  $\mathbf{y}$  toma o nome de *conjunto limite em  $\mathbf{y}$  de  $f(\mathbf{x})$*  e é representado por  $\lambda(\mathbf{y})$ , ou por  $\lim_{\mathbf{y}} f(\mathbf{x})$ . Tal conjunto existirá tôdas as vezes que a função for limitada numa vizinhança de  $\mathbf{y}$ .

O conjunto  $\lambda(\mathbf{y})$  é o mesmo que em qualquer elemento juxtaposto a  $\mathbf{y}$  (4).

Mais geralmente, *conjunto limite de  $f(\mathbf{x})$  num subconjunto  $\mathbf{Y}$  de  $[\mathbf{A}]$*  é o conjunto dos elementos limites de tôdas as sucessões (11) correspondentes às diversas sucessões (10) para as quais seja  $\lim \mathbf{x}_i \mathbf{Y} = 0$ . Tal conjunto limite será designado por  $\lambda(\mathbf{Y})$ , ou por  $\overline{\lim}_{\mathbf{Y}} f(\mathbf{x})$ , e existirá sempre que  $f(\mathbf{x})$  fôr limitada numa vizinhança de  $\mathbf{Y}$ .

*Consideremos uma classe de sucessões*

$$(12) \quad \mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2, \dots, \mathbf{x}'_i, \dots$$

para cada uma das quais seja  $\lim \mathbf{x}'_i \mathbf{Y} = 0$ . Admitamos que, dada uma sucessão qualquer (10) tal que  $\lim \mathbf{x}_i \mathbf{Y} = 0$ , dela podemos sempre extrair uma sucessão da classe. O conjunto  $\lambda(\mathbf{Y})$  é constituído pelos limites das sucessões

$$(13) \quad f(\mathbf{x}'_1), f(\mathbf{x}'_2), \dots, f(\mathbf{x}'_i), \dots$$

correspondentes às diversas sucessões da classe.

Com efeito, os limites das diversas sucessões (13) pertencem a  $\lambda(\mathbf{Y})$ ; por outro lado, qualquer elemento  $\mathbf{z}$  de  $\lambda(\mathbf{Y})$  é limite duma sucessão convergente (11) correspondente a uma sucessão (10) tal que  $\lim \mathbf{x}_i \mathbf{Y} = 0$ , e, como da (10) podemos extrair uma sucessão (12) da classe, o mesmo elemento  $\mathbf{z}$  é também limite da correspondente sucessão (13).

Na definição de  $\lambda(\mathbf{Y})$  basta pois considerar as sucessões da referida classe (2).

(1) O elemento  $\mathbf{y}$ , quando pertence a  $\mathbf{A}$ , pode figurar na sucessão (10). Neste caso o elemento correspondente  $f(\mathbf{y})$  e os que lhe são juxtapostos consideram-se limites de  $f(\mathbf{x})$  em  $\mathbf{y}$ .

Observemos também que, na definição de  $\lim_{\mathbf{Y}} f(\mathbf{x})$ , interessa principalmente o caso de  $\mathbf{y}$  ser elemento limite de  $\mathbf{A}$ . Não sendo assim,  $\mathbf{y}$  juxtapõe-se a um elemento de  $\mathbf{A}$ , no qual o elemento correspondente para a função e os juxtapostos a este constituem o conjunto  $\lim_{\mathbf{Y}} f(\mathbf{x})$ .

(2) Se por exemplo a variável independente é constituída por números ou por pontos, de coordenadas tôdas reais ou não, basta considerar, para o cálculo de  $\lambda(\mathbf{Y})$ , as sucessões monótonas  $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$  tais que  $\lim x_i \mathbf{Y} = 0$  (dizemos que uma sucessão de números imaginários é monótona quando são monótonas as

Em particular :

Seja  $f(x)$  limitada numa vizinhança de  $Y$ . Para que  $\lambda(Y)$  se reduza a elementos juxtapostos a um certo elemento  $z$ , é necessário e suficiente que tendam para  $z$  todas as sucessões (13) correspondentes às diversas sucessões da classe.

Em virtude da definição de  $\lambda(Y)$ , qualquer dos seus elementos  $z$  caracteriza-se pela propriedade seguinte: a cada número positivo  $\delta$  corresponde um elemento  $x$  de  $A$  tal que  $x \in Y$  e  $f(x) - z < \delta$ .

É claro que  $[f(A)] \supset \lambda(Y)$  e  $[f(A)] \supset \lambda(A)$ .

Se  $U$  é uma vizinhança de  $Y$  em relação a  $A$ , temos  $[f(U)] \supset \lambda(Y)$ , porque os elementos de qualquer sucessão (10) que faça  $\lim x_i = Y = 0$  pertencem a  $U$  a partir de certa ordem.

Se  $X$  é um subconjunto de  $A$ , vem  $\lambda(X) \supset [f(X)]$ .

Se  $Y$  e  $Y'$  são subconjuntos de  $A$  juxtapostos entre si, temos  $\lambda(Y) \supset \lambda(Y')$ . Mais geralmente:

*São os mesmos os conjuntos limites em conjuntos juxtapostos de duas funções juxtapostas entre si* (14).

Consideremos duas funções juxtapostas entre si,  $f(x)$  e  $j(x)$ , definidas nos conjuntos  $A$  e  $A'$ . Basta demonstrar que são os mesmos os conjuntos limites destas funções num dado subconjunto  $Y$  de  $A$ . Designemos estes conjuntos limites por  $Z$  e

sucessões das partes reais e das partes imaginárias dos termos; dizemos que uma sucessão de pontos é monótona quando são monótonas as sucessões das primeiras coordenadas, das segundas, etc. As sucessões monótonas de números reais, ou de imaginários puros, são as nunca crescentes e as nunca decrescentes).

(14) A definição já apresentada de funções juxtapostas pode enunciar-se agora do seguinte modo: duas funções  $f(x)$  e  $j(x)$ , definidas respectivamente nos conjuntos  $A$  e  $A'$ , são juxtapostas entre si quando, seja qual fôr o elemento  $x'$  de qualquer dos conjuntos  $A$  ou  $A'$ , o elemento correspondente  $f(x')$  ou  $j(x')$  é um dos limites em  $x'$  de  $j(x)$  ou de  $f(x)$  [v. v, p. 138, l. 17].

Com o fim de citarmos um exemplo de funções juxtapostas, consideremos uma função  $f(x)$  definida num conjunto  $A$  não totalmente fechado. Seja  $B$  um conjunto de elementos de  $A$  estranhos a  $A$ , como por exemplo o conjunto  $B = [A] - A$ . Designemos por  $j(x)$  uma função definida em  $A + B$ , que em  $A$  coincida com  $f(x)$  e que faça corresponder a cada elemento de  $B$  um dos limites de  $f(x)$  no mesmo elemento, limite este que supomos existir. As funções  $f(x)$  e  $j(x)$ , a segunda das quais resultou de *prolongarmos* a primeira para o conjunto  $B$ , juxtapõem-se entre si.

por  $Z'$ . Qualquer elemento  $z$  de  $Z$  caracteriza-se pela condição de a cada número positivo  $\delta$  lhe corresponder um elemento  $x$  de  $A$  tal que  $xY < \delta$  e  $\overline{f(x)z} < \delta$ . Mas como o elemento  $f(x)$  é um dos limites em  $x$  de  $j(x)$ , vem da mesma maneira, para um certo  $x'$  de  $A'$ ,  $x'Y < \delta$  e  $\overline{j(x')f(x)} < \delta$ . Temos pois  $x'Y < 2\delta$  e  $\overline{j(x')z} < 2\delta$ , isto é, o elemento  $z$  pertence a  $Z'$ .

Pelas mesmas razões um elemento qualquer de  $Z'$  também é elemento de  $Z$ .

Se um dos conjuntos limites é desprovido de elementos, o mesmo sucede ao outro.

*O conjunto limite  $\lambda(Y)$  é totalmente fechado.*

Seja  $z'$  um elemento limite do conjunto  $\lambda(Y)$ . Dado um número positivo  $\delta$ , existe um elemento  $z$  deste conjunto tal que  $\overline{zz'} < \delta$ , e a  $z$  corresponde um elemento  $x$  de  $A$  tal que  $xY < \delta$  e  $\overline{f(x)z} < \delta$ . Temos pois  $xY < \delta$  e  $\overline{f(x)z'} < 2\delta$ , quer dizer,  $z'$  é um elemento de  $\lambda(Y)$ .

*O conjunto  $\lambda(Y)$  contém os conjuntos limites de  $f(x)$  nos diversos elementos de  $[Y]$ . Quando  $Y$  é limitado, o primeiro conjunto limite coincide com a soma dos segundos.*

É evidente que  $\lambda(Y)$  contém os conjuntos limites de  $f(x)$  nos diversos elementos de  $[Y]$ . Suponhamos que  $Y$  é limitado. Um elemento  $z$  de  $\lambda(Y)$  é limite duma sucessão (11) correspondente a uma sucessão (10) tal que  $\lim x_i Y = 0$ . Mas a (10) é limitada [p. 103, l. 8], e qualquer dos seus elementos limites  $y$  pertence a  $[Y]$  [v. IV, p. 122, l. 6]. Logo  $z$  é elemento do conjunto  $\lambda(y)$ .

*A função  $\lambda(Y)$  é aditiva para um número finito de parcelas, e ainda para uma infinidade de parcelas quando a soma destas é um conjunto fechado.*

A propriedade aditiva, expressa por

$$\lambda(Y_1 + Y_2 + \dots) \mid \lambda(Y_1) + \lambda(Y_2) + \dots,$$

é evidentemente verdadeira para qualquer número finito de parcelas. A propriedade aditiva generalizada para uma infinidade de parcelas verifica-se quando a soma destas é limitada e fechada, como resulta da proposição precedente. Pode porém deixar de ser verdadeira quando tal soma não é limitada e fechada.

Se  $f(x)$  é limitada e se  $Y$  e  $Y'$  são subconjuntos de  $[A]$  ligados entre si, os conjuntos  $\lambda(Y)$  e  $\lambda(Y')$  possuem um elemento comum.

Na verdade, se  $Y$  e  $Y'$  são subconjuntos de  $[A]$  ligados um ao outro, podemos determinar uma sucessão (10) de elementos de  $A$  tal que seja  $\lim x_i Y = 0$  e  $\lim x_i Y' = 0$ . Os limites da correspondente sucessão (11) são elementos comuns a  $\lambda(Y)$  e a  $\lambda(Y')$ .

Por conseguinte, se diversos subconjuntos  $Y$  de  $[A]$ , em número finito, são ligados entre si, o mesmo sucede aos correspondentes conjuntos  $\lambda(Y)$ , que se podem dispor por uma certa ordem, com repetições se fôr necessário, de tal maneira que dois conjuntos consecutivos quaisquer possuam um elemento comum [v. VI, p. 303, l. 32].

Seja  $B$  um subconjunto de  $[A]$ . Consideremos duas sucessões de vizinhanças de  $B$  que tendam para  $B$ ,

$$(14) \quad U_1, U_2, \dots, U_i, \dots$$

$$(15) \quad V_1, V_2, \dots, V_i, \dots,$$

sendo as primeiras relativas a  $A$  e as segundas a  $[A]$ . As sucessões

$$(16) \quad f(U_1), f(U_2), \dots, f(U_i), \dots$$

$$(17) \quad \lambda(U_1), \lambda(U_2), \dots, \lambda(U_i), \dots$$

$$(18) \quad \lambda(V_1), \lambda(V_2), \dots, \lambda(V_i), \dots$$

convergem para  $\lambda(B)$  (1).

Suponhamos que existe o conjunto  $\lambda(B)$ . A sucessão (16) é então quási-limitada, pois temos  $[f(U_i)] | > \lambda(B)$  [p. 120, l. 11], e é convergente porquanto cada um dos seus termos contém os termos seguintes a partir de certa ordem [v. v, p. 291, l. 6]. O seu limite totalmente fechado  $Z$  satisfaz à condição  $Z | > \lambda(B)$ , e como por outro lado qualquer elemento de  $Z$  pertence evidentemente a  $\lambda(B)$ , dá-se a coincidência  $Z | \lambda(B)$ .

Tomemos um termo qualquer  $U_k$  da sucessão (14). A partir da ordem em que os valores de  $i$  fazem  $U_k > U_i$ , o termo  $U_k$  con-

(1) Notemos que, em todo êste assunto, os conjuntos  $B, X, Y, X', Y', X_i$  e  $Y_i$  podem converter-se em simples elementos. Assim, na proposição que acabamos de enunciar podemos supor que  $B$  se reduz a um elemento  $b$  de  $[A]$ .

tém uma vizinhança de cada termo  $\mathbf{U}_i$  [p. 103, l. 15], sendo por isso  $[f(\mathbf{U}_k)] > \lambda(\mathbf{U}_i)$ . A partir da mesma ordem também temos  $\lambda(\mathbf{U}_k) > [f(\mathbf{U}_i)]$  [p. 120, l. 14]. O lugar de cada termo de qualquer das sucessões (16) ou (17) contém pois os termos da outra a partir de certa ordem, razão porque a (17) tende para o mesmo limite  $\lambda(\mathbf{B})$  que a (16) [v. v, p. 297, l. 27].

Demonstremos que a sucessão (18) também converge para  $\lambda(\mathbf{B})$ . Consideremos para isso uma função  $j(x)$  juxtaposta a  $f(x)$  que resulte de *prolongarmos*  $f(x)$  para o conjunto  $[\mathbf{A}] - \mathbf{A}$ . Os conjuntos  $\lambda(\mathbf{B})$  e  $\lambda(\mathbf{V}_i)$  relativos a  $f(x)$  não se alteram quando esta função se substitui por  $j(x)$  [p. 120, l. 17]. Logo a sucessão (18) — que se encontra relativamente a  $j(x)$  nas mesmas condições que a (17) a respeito de  $f(x)$  — tende ainda para  $\lambda(\mathbf{B})$ .

Se  $\lambda(\mathbf{B})$  é desprovido de elementos, facilmente se reconhece que a sucessão (16) não é quasi-limitada, e que por isso diverge para infinito [v. v, p. 291, l. 15]. Nesse caso as sucessões (17) e (18) também divergem para infinito.

Quando  $f(x)$  é limitada numa vizinhança de  $\mathbf{B}$ , existe  $\lambda(\mathbf{B})$  e temos

$$\lim f(\mathbf{U}_i) \lambda(\mathbf{B}) = \lim \overline{\lambda(\mathbf{U}_i)} \lambda(\mathbf{B}) = \lim \overline{\lambda(\mathbf{V}_i)} \lambda(\mathbf{B}) = 0.$$

Seja  $\mathbf{B}$  um subconjunto de  $[\mathbf{A}]$ . Consideremos duas sucessões

$$\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_i, \dots$$

$$\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \dots, \mathbf{Y}_i, \dots$$

de subconjuntos de  $\mathbf{A}$  e de  $[\mathbf{A}]$  respectivamente tais que seja  $\lim \mathbf{X}_i \vec{\mathbf{B}} = \lim \mathbf{Y}_i \vec{\mathbf{B}} = 0$ . O conjunto  $\lambda(\mathbf{B})$  contém os limites integrais das sucessões

$$(19) \quad f(\mathbf{X}_1), f(\mathbf{X}_2), \dots, f(\mathbf{X}_i), \dots$$

$$(20) \quad \lambda(\mathbf{Y}_1), \lambda(\mathbf{Y}_2), \dots, \lambda(\mathbf{Y}_i), \dots$$

Quando  $f(x)$  é limitada numa vizinhança de  $\mathbf{B}$ , temos

$$(21) \quad \lim f(\mathbf{X}_i) \vec{\lambda}(\mathbf{B}) = 0 \quad e \quad \lim \lambda(\mathbf{Y}_i) \vec{\lambda}(\mathbf{B}) = 0.$$

Podemos considerar, com efeito, os termos das sucessões (19) e (20) como sendo subconjuntos dos correspondentes termos de sucessões construídas como a (16) e a (18) da proposição precedente.

Quando as somas dos termos das (19) e (20) são limitadas verificam-se os limites (21) [v. IV, p. 123, l. 17].

Em particular: se  $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$  é uma sucessão de elementos de  $\mathbf{A}$  tais que  $\lim x_i \mathbf{B} = 0$ , temos também  $\lim f(x_i) \lambda(\mathbf{B}) = 0$ .

Suponhamos que  $f(x)$  é limitada numa vizinhança de  $\mathbf{B}$ . A cada número positivo  $\delta$  corresponde um número positivo  $\varepsilon$  de maneira que se verificam as desigualdades

$$\frac{f(\mathbf{U}) \lambda(\mathbf{B})}{f(\mathbf{U}) f(\mathbf{U}')} < \delta, \quad \frac{\lambda(\mathbf{U}) \lambda(\mathbf{B})}{\lambda(\mathbf{U}) \lambda(\mathbf{U}')} < \delta, \quad \frac{\lambda(\mathbf{V}) \lambda(\mathbf{B})}{\lambda(\mathbf{V}) \lambda(\mathbf{V}')} < \delta$$

para quaisquer vizinhanças  $\mathbf{U}, \mathbf{U}', \mathbf{V}$  e  $\mathbf{V}'$ , de  $\mathbf{B}$ , sendo as duas primeiras relativas a  $\mathbf{A}$  e as outras a  $[\mathbf{A}]$ , que distem de  $\mathbf{B}$  menos de  $\varepsilon$ .

Consideremos a infinidade das vizinhanças  $\mathbf{U}$  de  $\mathbf{B}$  relativas a  $\mathbf{A}$ . Dado um número positivo  $\delta$ , a cada sucessão (14) de vizinhanças  $\mathbf{U}$  que tenda para  $\mathbf{B}$  corresponde uma ordem a partir da qual é  $f(\mathbf{U}_i) \lambda(\mathbf{B}) < \delta$ . Logo existe um número positivo  $\varepsilon$  tal que seja  $f(\mathbf{U}) \lambda(\mathbf{B}) < \delta$  sempre que se tenha  $\mathbf{U} \mathbf{B} < \varepsilon$  [p. 114, l. 1].

Da mesma maneira se justificam as outras desigualdades que figuram no enunciado.

Se  $f(x)$  é limitada numa vizinhança de  $\mathbf{B}$ , a cada número positivo  $\delta$  corresponde um número  $\varepsilon$  de maneira que se verificam as desigualdades

$$f(\mathbf{X}) \vec{\lambda}(\mathbf{B}) < \delta \quad \text{e} \quad \lambda(\mathbf{Y}) \vec{\lambda}(\mathbf{B}) < \delta$$

para quaisquer subconjuntos  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y}$  de  $\mathbf{A}$  e de  $[\mathbf{A}]$  tais que  $\mathbf{X} \vec{\mathbf{B}} < \varepsilon$  e  $\vec{\mathbf{Y}} \mathbf{B} < \varepsilon$ .

É um corolário da proposição precedente. Em particular: Se  $f(x)$  é limitada numa vizinhança de  $\mathbf{B}$ , a cada  $\delta$  corresponde um  $\varepsilon$  de maneira que seja  $f(x) \lambda(\mathbf{B}) < \delta$  sempre que se tenha  $\mathbf{x} \mathbf{B} < \varepsilon$ .

Para que seja  $\mathbf{Z} \parallel \lambda(\mathbf{B})$ , sendo  $f(x)$  qualquer, é suficiente que a todo o número positivo  $\delta$  corresponda um positivo  $\varepsilon$  de maneira que se verifique uma das desigualdades

$$\overline{f(\mathbf{U}) \mathbf{Z}} < \delta, \quad \overline{\lambda(\mathbf{U}) \mathbf{Z}} < \delta, \quad \overline{\lambda(\mathbf{V}) \mathbf{Z}} < \delta$$

para quaisquer vizinhanças  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{V}$  de  $\mathbf{B}$  relativas a  $\mathbf{A}$  e a  $[\mathbf{A}]$  tais que  $\overline{\mathbf{UB}} < \varepsilon$  e  $\overline{\mathbf{VB}} < \varepsilon$ .

Uma qualquer destas condições é, com efeito, suficiente para que uma das sucessões (16), (17) ou (18) tenda para  $\mathbf{Z}$  [v. v, p. 290, l. 11].

Para que exista o conjunto  $\lambda(\mathbf{B})$  duma função qualquer  $f(\mathbf{x})$  é suficiente que a todo o número positivo  $\delta$  se oponha um positivo  $\varepsilon$  de maneira que seja

$$\overline{f(\mathbf{U}) f(\mathbf{U}')} < \delta$$

para tôdas as vizinhanças  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{U}'$  de  $\mathbf{B}$  tais que  $\overline{\mathbf{UB}} < \varepsilon$  e  $\overline{\mathbf{U'B}} < \varepsilon$ .

Esta condição é na verdade suficiente para que se dê a convergência da sucessão (16).

Para que duas funções limitadas  $f(\mathbf{x})$  e  $g(\mathbf{x})$ , definidas no conjunto  $\mathbf{A}$ , admitam o mesmo conjunto limite em  $\mathbf{B}$  é necessário e suficiente que a todo o número positivo  $\delta$  corresponda um positivo  $\varepsilon$  de maneira que se verifique a desigualdade

$$\overline{f(\mathbf{U}) g(\mathbf{U}')} < \delta$$

para quaisquer vizinhanças  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{U}'$  de  $\mathbf{B}$  tais que  $\overline{\mathbf{UB}} < \varepsilon$  e  $\overline{\mathbf{U'B}} < \varepsilon$ . Se  $f(\mathbf{x})$  e  $g(\mathbf{x})$  são ilimitadas, a condição é suficiente para que existam e sejam os mesmos os limites em  $\mathbf{B}$  dessas funções.

Se as funções limitadas  $f(\mathbf{x})$  e  $g(\mathbf{x})$  admitem em  $\mathbf{B}$  o mesmo conjunto limite, a sucessão (16) e a correspondente a  $g(\mathbf{x})$  convergem para os mesmos limites. Temos por isso, a partir de certa ordem,

$$\overline{f(\mathbf{U}_i) g(\mathbf{U}_i')} < \delta \quad [v. iv, p. 20, l. 22].$$

A primeira parte da proposição pode pois justificar-se aplicando o já citado lema [p. 114, l. 1] à infinidade das vizinhanças  $\mathbf{U}$ , ao conjunto  $\mathbf{B}$  e à família dos conjuntos dos termos de cada sucessão (14) a partir da ordem em que se verifica a desigualdade precedente.

A condição é suficiente, embora  $f(\mathbf{x})$  e  $g(\mathbf{x})$  possam representar funções ilimitadas nas vizinhanças de  $\mathbf{B}$ . Considerando,

com efeito, uma sucessão (14) de vizinhanças de  $\mathbf{U}$  que tenda para  $\mathbf{B}$ , temos, por força da referida condição,

$$\lim \overline{f(\mathbf{U}_i) g(\mathbf{U}_i)} = 0.$$

Logo existem e são os mesmos os limites  $[\lim f(\mathbf{U}_i)]$  e  $[\lim g(\mathbf{U}_i)]$  (1).

Para que as funções  $f(x)$  e  $g(x)$ , definidas no conjunto  $\mathbf{A}$ , admitam o mesmo conjunto limite em  $\mathbf{B}$  é suficiente que a todo o número positivo  $\delta$  se oponha um positivo  $\varepsilon$  de maneira que seja

$$\overline{f(\mathbf{U}) g(\mathbf{U})} < \delta$$

para qualquer vizinhança  $\mathbf{U}$  de  $\mathbf{B}$  tal que  $\overline{\mathbf{U}\mathbf{B}} < \varepsilon$ . Se uma das funções não admite conjunto limite em  $\mathbf{B}$ , o mesmo sucede à outra.

Efectivamente, considerando a sucessão (16) e a correspondente para  $g(x)$ , temos

$$\lim \overline{f(\mathbf{U}_i) g(\mathbf{U}_i)} = 0,$$

e as duas sucessões, quando convergentes, tendem para o mesmo limite totalmente fechado  $\lambda(\mathbf{B})$ ; quando uma das sucessões diverge para infinito, o mesmo acontece à outra [r. v, p. 295, l. 26].

(1) Baseamo-nos na seguinte proposição:

Para que duas sucessões de conjuntos quaisquer

$$\begin{aligned} & \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_i, \dots \\ & \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_i, \dots \end{aligned}$$

convirjam para os mesmos limites é suficiente que se verifique a condição  $\lim \overline{\mathbf{A}_i \mathbf{B}_i} = 0$ .

Na verdade, esta mesma condição dá em particular  $\lim \overline{\mathbf{A}_i \mathbf{B}_i} = 0$ , e por isso também temos

$$\lim \overline{\mathbf{A}_i \mathbf{A}_i'} < \lim (\overline{\mathbf{A}_i \mathbf{B}_i'} + \overline{\mathbf{A}_i' \mathbf{B}_i'}) = 0.$$

A primeira das sucessões dadas é pois convergente, e, em virtude da condição  $\lim \overline{\mathbf{A}_i \mathbf{B}_i} = 0$ , a segunda converge para o mesmo limite totalmente fechado que a primeira [r. v, p. 295, l. 19].

Dado um subconjunto  $B$  de  $[A]$ , suponhamos que existe uma sucessão de subconjuntos conexos de  $A$ ,

$$C_1, C_2, \dots, C_i, \dots$$

cada um dos quais contenha uma vizinhança de  $B$  e tais que seja  $\lim \overline{C_i B} = 0$ . Se  $f(x)$  é uma função limitada, definida em  $A$ , que faça corresponder aos conjuntos conexos  $C_i$  novos conjuntos conexos  $f(C_i)$ , o conjunto  $\lambda(B)$  é um contínuo (1).

Efectivamente, por ser  $\lim \overline{C_i B} = 0$ , os termos da sucessão

$$(22) \quad f(C_1), f(C_2), \dots, f(C_i), \dots$$

podem considerar-se subconjuntos dos termos correspondentes duma sucessão do tipo (16), e como por outro lado cada um dos conjuntos  $C_i$  contém uma vizinhança de  $B$ , existe também uma sucessão do tipo (16) cujos termos são subconjuntos dos termos correspondentes da (22). Logo temos

$$\lim \overline{f(C_i) \lambda(B)} = 0 \quad [v. v, p. 295, l. 6],$$

e por isso o conjunto fechado  $\lambda(B)$  é um contínuo [v. vi, p. 324, l. 7] (2).

Em particular: se a função limitada  $f(x)$ , definida em  $A$ , faz corresponder a conjuntos conexos novos conjuntos conexos, e se as diversas vizinhanças do subconjunto  $B$  de  $[A]$ , em relação a  $A$ , são conjuntos conexos, o conjunto  $\lambda(B)$  é um contínuo.

Suponhamos que o subconjunto  $B$  de  $[A]$  verifica a seguinte propriedade: seja qual for a sucessão  $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$  de elementos de  $A$  que faça  $\lim \overline{x_i B} = 0$ , há uma ordem a partir da qual dois elementos quaisquer  $x_i$  e  $x_{i'}$  pertencem a um subconjunto conexo  $C_{i,i'}$  de  $A$  de tal modo que se tenha  $\lim \overline{C_{i,i'} B} = 0$ . Se  $f(x)$  é uma função limitada, definida em  $A$ , que faça corresponder aos

(1) Este contínuo pode degenerar num só elemento ou em elementos juxtapostos entre si.

(2) Nas condições do enunciado o conjunto  $B$  é conexo, pois temos  $\lim \overline{C_i B} = 0$ .

conjuntos conexos  $C_{i,i'}$  novos conjuntos conexos  $f(C_{i,i'})$ , o conjunto  $\lambda(\mathbf{B})$  é um contínuo.

A cada número  $\frac{1}{i}$  fazamos corresponder uma vizinhança  $U_i$  de  $\mathbf{B}$  relativa a  $\mathbf{A}$  de maneira que dois elementos quaisquer de  $U_i$  pertençam a um subconjunto conexo  $\mathbf{C}$  de  $\mathbf{A}$  tal que  $\vec{\mathbf{C}}\mathbf{B} < \frac{1}{i}$  [p. 113, l. 2]. A soma  $\mathbf{C}_i$  de todos os conjuntos  $\mathbf{C}$  correspondentes aos diversos pares de elementos de  $U_i$  é manifestamente um conjunto conexo a que pertence  $U_i$ . Verifica-se a relação  $\vec{\mathbf{C}}_i\mathbf{B} < \frac{1}{i}$ . A sucessão

$$\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \dots, \mathbf{C}_i, \dots,$$

que resulta de pormos  $i = 1, 2, \dots$ , satisfaz ao enunciado da proposição precedente, razão porque  $\lambda(\mathbf{B})$  é um contínuo. Este pode reduzir-se a um elemento apenas, ou a elementos juxtapostos entre si <sup>(1)</sup>.

<sup>(1)</sup> Demonstrámos de passagem a seguinte proposição:

É conexo um subconjunto  $\mathbf{B}$  de  $[\mathbf{A}]$  que verifique a seguinte propriedade: a qualquer sucessão  $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$ , de elementos de  $\mathbf{A}$  que faça  $\lim x_i \mathbf{B} = 0$  corresponde uma ordem a partir da qual dois elementos  $x_i$  e  $x_{i'}$  unem-se sempre por um subconjunto conexo  $C_{i,i'}$  de  $\mathbf{A}$  de maneira que seja  $\lim C_{i,i'} \mathbf{B} = 0$ .

Transformando esta proposição por meio do lema já citado a p. 113, l. 2, damos-lhe o seguinte enunciado:

É conexo um subconjunto  $\mathbf{B}$  de  $[\mathbf{A}]$  que verifique a seguinte propriedade: a qualquer vizinhança  $U$  de  $\mathbf{B}$  relativa a  $\mathbf{A}$  corresponde uma outra  $U'$  tal que: dois elementos de  $U'$  unem-se sempre por um subconjunto conexo de  $U$ .

Fácilmente reconhecemos que a mesma proposição também pode deduzir-se como um corolário da seguinte:

É conexo um conjunto  $\mathbf{B}$  que satisfaça à seguinte propriedade: a cada par dos seus elementos  $b$  e  $b'$  corresponde uma sucessão de conjuntos conexos  $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \dots, \mathbf{C}_i, \dots$  tal que

$$\lim \underline{\mathbf{C}}_i b = \lim \underline{\mathbf{C}}_i b' = \lim \vec{\mathbf{C}}_i \mathbf{B} = 0.$$

Por outras palavras, é conexo um conjunto  $\mathbf{B}$  que satisfaça à seguinte condição: a cada par dos seus elementos  $b$  e  $b'$  e a cada número positivo  $\varepsilon$  corresponde um conjunto conexo  $\mathbf{C}$  tal que

$$\underline{\mathbf{C}} b < \varepsilon, \quad \underline{\mathbf{C}} b' < \varepsilon, \quad \vec{\mathbf{C}} \mathbf{B} < \varepsilon.$$

Basta notar que a soma  $\mathbf{S}$  de todos os conjuntos conexos  $\mathbf{C}$  que verificam as

**Observação.** — Quando os elementos da função  $f(x)$  considerada nas duas proposições precedentes são números reais, dispensa-se a hipótese da limitabilidade da mesma função.

De facto, o limite fechado duma sucessão convergente de conjuntos conexos de números reais é sempre um intervalo <sup>1</sup> porque o lugar dum conjunto conexo linear é um intervalo e o limite fechado duma sucessão convergente de intervalos é ainda um intervalo. No caso de os termos da sucessão (22) serem constituídos por números reais, o limite fechado, quando existe, é pois um intervalo <sup>2</sup>.

(Continua).

LUÍS BEDA NETO.

desigualdades anteriores para os diversos pares de elementos  $b$  e  $b'$  de  $B$  é um conjunto cuja desconexão não excede  $2\varepsilon$  e tal que  $\overline{SB} < \varepsilon$  [p. 208, l. 3].

É conexo, em particular, um conjunto  $B$  que satisfaça à seguinte condição: dados um número positivo  $\varepsilon$  e dois dos seus elementos, estes pertencem a um conjunto conexo  $C$  tal que  $\overline{CB} < \varepsilon$ .

Observemos que a última proposição desta nota dá-nos uma condição não só suficiente mas também necessária para que  $B$  seja conexo. A primeira dá-nos uma condição que pode deixar de ser necessária; é fácil imaginar um exemplo dum espaçoide cujos subconjuntos conexos não obedecem todos a tal condição.

<sup>1</sup> Chamamos intervalo, em geral, a qualquer contínuo linear. Pode reduzir-se a um só ponto, e as suas extremidades podem ser ambas finitas ou não.

<sup>2</sup> Seja por exemplo  $f(x)$  uma função real de variável real, definida nos pontos dum intervalo  $(\alpha, \beta)$ , de centro  $a$ , à excepção possível d'êste ponto. Suponhamos que  $f(x)$  faz corresponder a qualquer intervalo  $I$  interior ao primeiro (excluindo em  $I$  o ponto  $a$  quando  $f(x)$  não é nêle definida) um conjunto conexo  $f(I)$  (como succede com uma função derivada em  $(\alpha, \beta)$ ; recorde-se para isso o teorema de DARBOUX sôbre funções derivadas, por exemplo nas *Lições de Cálculo e Geometria* de J. VICENTE GONÇALVES, p. 209). O conjunto  $\lambda(a)$ , quando existe, é um intervalo. Os conjuntos limites de  $f(x)$  à esquerda e à direita de  $a$  também são intervalos.

# Determinações quantitativas de Vitamina A, Ergosterol, Vitamina B<sub>2</sub> (lactoflavina) e Vitamina C por Métodos Físico-Químicos

## Estudo do Vinho Tinto da Bairrada

por

KARL SCHÖN

Laboratório de Química Biológica e Físico-Química da Faculdade de Medicina

e

A. J. A. DE GOUVEIA E F. PINTO COELHO

Laboratório Químico da Universidade de Coimbra

## INTRODUÇÃO

O presente trabalho é continuação do estudo, que pretendemos fazer, de vitaminas em alimentos (1). Foi sugerido pelo saudoso Professor Doutor Egas F. Pinto Basto, então Director do Laboratório Químico da Universidade, que nos permitiu a aquisição do material necessário, e, com os seus conselhos sempre judiciosos, muito contribuiu para que se levasse a bom fim. À memória deste Professor mais uma vez prestamos a merecida homenagem.

Esperamos, em breve, ampliar estes estudos a outros tipos principais de vinhos portugueses, pois, apesar de as concentrações vitamínicas no vinho tinto da Bairrada não serem elevadas, são suficientemente importantes para justificar a necessidade de um estudo comparativo.

Como era de esperar, as quantidades de vitaminas lipo-solúveis, no vinho, são muito pequenas, e por esta razão tivemos de recorrer a métodos especiais, desenvolvidos nos últimos anos. Partimos de volumes elevados de vinho que por sucessivos tra-

tamentos nos conduziram a pequenas quantidades de substâncias concentradas em vitaminas.

Nas determinações de vitaminas podem ser utilizados métodos biológicos e físico-químicos. Seguimos os métodos físico-químicos por serem os adequados aos nossos Laboratórios e por darem resultados concordantes com os métodos biológicos.

As determinações da vitamina A e do ergosterol fizeram-se pelo método espectrofotométrico (1), na fracção insaponificável, do extracto etéreo do vinho, depois de submetida a separação cromatográfica. O ergosterol foi previamente separado por precipitação com digitonina. Os carotenoides foram determinados pelo método colorimétrico de Kuhn e Brockmann (2).

A vitamina B<sub>2</sub> (lactoflavina) separou-se do vinho por adsorção com terra de Fuller, em seguida foi eluída com piridina, e a determinação quantitativa fez-se por transformação em lumilactoflavina segundo Kuhn, Wagner-Jauregg e Kaltschmitt (3).

A vitamina C foi doseada pelo método de Tillmans (4) por redução de 2,6-diclorofenolindofenol, em solução ácida.

## Parte Experimental

### Vitaminas lipo-solúveis

1.º *Ensaio. Extracção de 12 litros de Vinho.* — 12 litros de vinho tinto, diluídos com cerca de 10 litros de água, foram extraídos 3 vezes com 9 litros de éter. O extracto apresentava-se ligeiramente amarelo. Foi lavado uma vez com água, depois repetidas vezes com uma solução aquosa de carbonato de sódio a 10%, até esta não se apresentar corada, e finalmente com água para eliminar o alcali. A solução etérea, agora incolor, foi concentrada no vazio, à temperatura de 20-25°, numa corrente de gás carbónico, até não destilar mais. Ficou, como resíduo, um óleo ligeiramente amarelo e alguma água. O óleo solidificou, parcialmente, por arrefecimento, e tinha um cheiro agradável, característico do vinho (bouquet). O resíduo foi então agitado com éter de petróleo (p. e. inferior a 50°) que dissolveu o óleo deixando na água as essências com cheiro característico. A solução de éter de petróleo, ligeiramente

amarela, foi evaporada à secura, no vazio. Ficou um resíduo de 1,5 gramas que foi dissolvido em 10 ml. de éter. À solução juntaram-se 40 ml. duma solução concentrada de potassa cáustica em metanol absoluto, recentemente destilado sobre hidróxido de potássio. A mistura guardou-se num frasco, bem cheio, durante dia e meio, à temperatura ambiente. Juntaram-se então 5 ml. de água e extraiu-se a mistura 2 vezes com 50 ml. de éter de petróleo. Esta solução foi lavada com água até à remoção total do alcali, filtrada por filtro seco, e evaporada no vazio.

I. Obteve-se um resíduo I, ligeiramente amarelo, com o peso de 0,275 grama.

II. A solução aquosa, alcalina, proveniente da saponificação, foi acidulada com HCl 2N e extraída com éter que dissolveu os ácidos orgânicos. Obteve-se uma solução II, amarela, que foi lavada com água, seca e evaporada. O resíduo é amarelo-escuro e de cheiro característico.

III. A água do primeiro concentrado do éter (antes da saponificação) depois de ser extraída com éter de petróleo, ainda contem substâncias de cheiro característico de *bouquet* de vinho. Foi extraída com éter, obtendo-se uma solução ligeiramente amarela. Lavou-se com uma solução de soda cáustica a 1%, que tirou o corante, ficando a solução incolor. Lavou-se depois com água e evaporou-se o éter, no vazio, ficando um pequeno resíduo III, oleoso e ligeiramente amarelado.

*Resíduo I (parte insaponificável).* — Foi estudado o espectro de absorção no visível e no ultra-violete, deste resíduo em solução alcoólica (Fig. 1).

0,250 grama deste resíduo foi submetido a adsorção cromatográfica, em óxido de alumínio activado (puriss., ligeiriss., Riedel). Para este fim dissolveu-se a substância em éter de petróleo, passou-se através da coluna e lavou-se esta com mais solvente. Formaram-se 4 zonas, de espessuras diferentes como mostra a Fig. 2. As zonas, depois de separadas, foram extraídas com éter de petróleo contendo 1% de metanol, e as soluções obtidas foram evaporadas à secura, no vazio. Obtiveram-se as seguintes fracções:

Zona a) Sólido, cerca de 40 miligramas; solução em clorofórmio ligeiramente amarela; reacção com tricolorito de antimónio: azul.

Zona b) Sólido, cêrca de 50 miligramas; pouco corado; com tricloreto de antimônio não dá côr; precipita com digitonina.

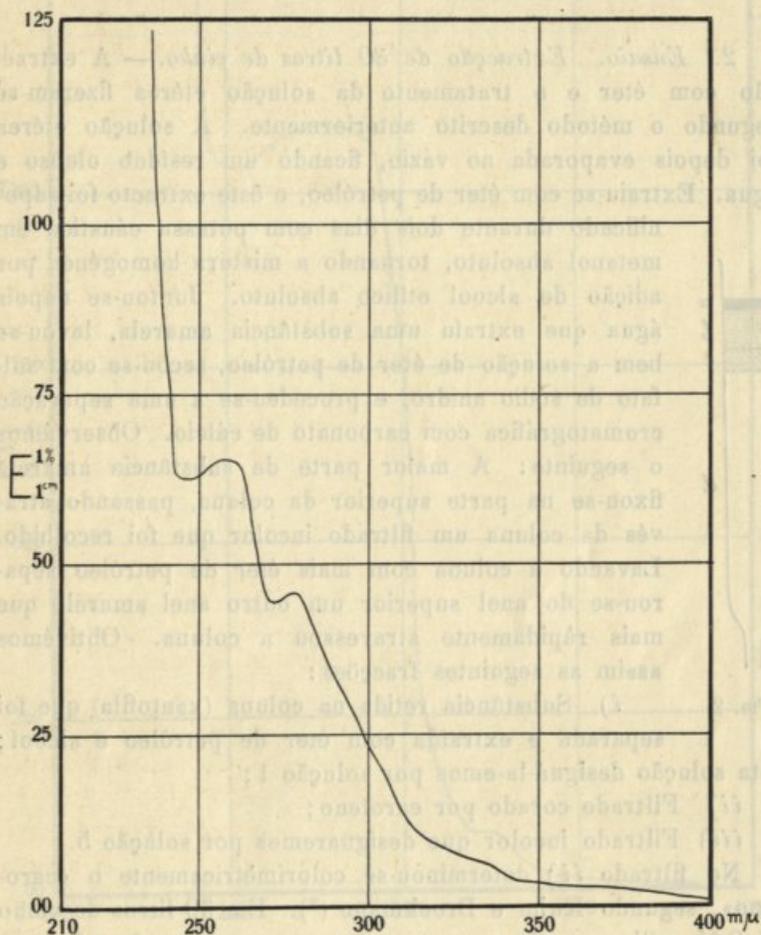


Fig. 1

Espectro de absorção do resíduo I, em álcool absoluto.

Zona c) Sólido, cêrca de 50 miligramas; dá solução muito amarela; com tricloreto de antimônio dá coloração intensa verde escuro-azul.

Zona d) Óleo com alguns cristais, cêrca de 5 miligramas; com tricloreto de antimônio dá côr azul fraca que intensifica com

o tempo; foi investigado o espectro de absorção na região ultravioleta (Fig. 3).

Filtrado e) Líquido, cêrca de 100 miligramas; não dá cor com tricloreto de antimónio.

2.º *Ensaio. Extracção de 30 litros de vinho.* — A extracção com éter e o tratamento da solução etérea fizeram-se segundo o método descrito anteriormente. A solução etérea foi depois evaporada no vazio, ficando um resíduo oleoso e água. Extraíu-se com éter de petróleo, e este extracto foi saponificado durante dois dias com potassa cáustica em metanol absoluto, tornando a mistura homogênea por adição de álcool etílico absoluto. Juntou-se depois água que extraíu uma substância amarela, lavou-se bem a solução de éter de petróleo, secou-se com sulfato de sódio anidro, e procedeu-se a uma separação cromatográfica com carbonato de cálcio. Observámos o seguinte: A maior parte da substância amarela fixou-se na parte superior da coluna, passando através da coluna um filtrado incolor que foi recolhido. Lavando a coluna com mais éter de petróleo separou-se do anel superior um outro anel amarelo que mais rapidamente atravessou a coluna. Obtivemos assim as seguintes fracções:

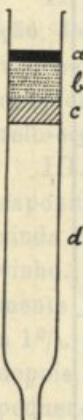


FIG. 2

i) Substância retida na coluna (xantofila) que foi separada e extraída com éter de petróleo e álcool; esta solução designá-la-emos por solução 1;

ii) Filtrado corado por caroteno;

iii) Filtrado incolor que designaremos por solução 5.

No filtrado ii) determinou-se colorimetricamente o «caroteno», segundo Kuhn e Brockmann (2). Em 30 litros de vinho há 0,15 miligrama de «caroteno» o que corresponde a 5 γ por litro. Se realmente esta substância é caroteno corresponde a 8 U. I. de vitamina A por litro de vinho. Este caroteno, porém, não mostra bandas de absorção bem definidas na região visível; a absorção aumenta consideravelmente para o violeta.

A solução ii) foi passada então através duma coluna de óxido de alumínio activado. Formou-se um anel nítido, amarelo, na parte superior da coluna (solução 2); no resto da coluna ficaram substâncias incolores (solução 3) e o filtrado forma a

solução 4. Temos, pois, no total, cinco soluções diferentes e provenientes das duas separações cromatográficas, ficando numera-

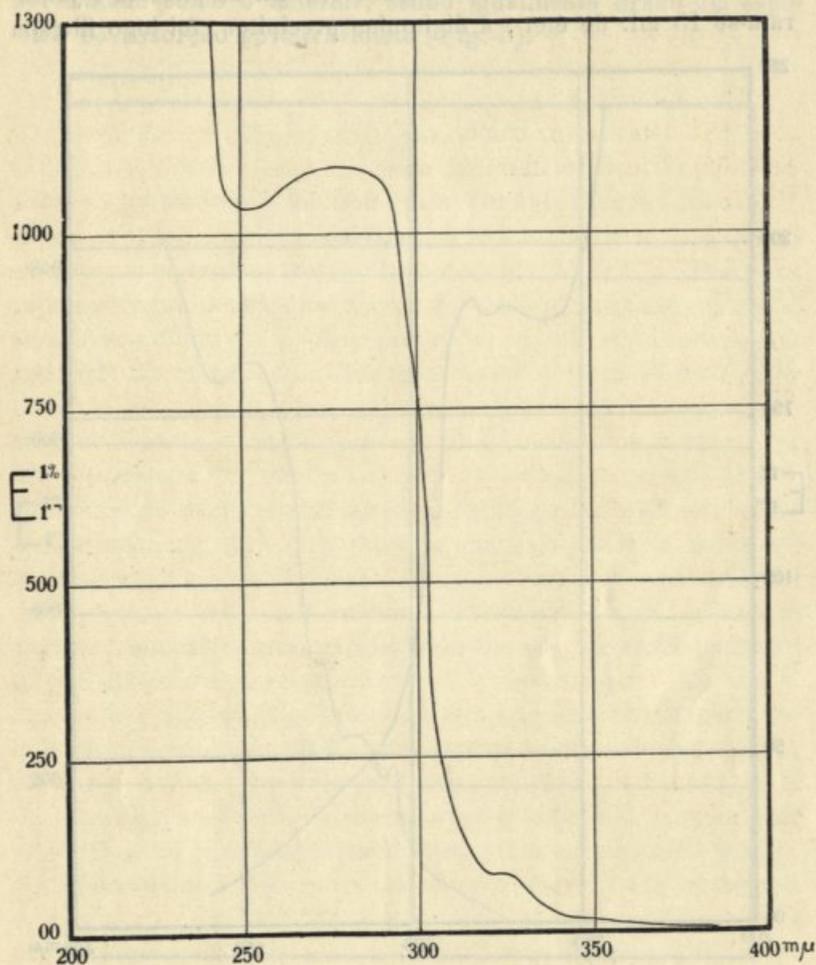


FIG. 3

Espectro de absorção da substância isolada na zona *d*, em álcool absoluto.

das segundo a facilidade de adsorção, a mais fortemente adsorvida N.º 1 e a mais fraca N.º 5.

As soluções 1 e 2 são amarelas, devido a conterem, respectivamente, xantofila e caroteno; as outras são incolores.

Solução 1. À solução alcoólica juntou-se uma solução alcoó-

lica de digitonina; formou-se no decurso de um dia um precipitado de cerca de 1 miligrama. Depois de centrifugado, o líquido foi decantado, o resíduo dissolvido em 0,3 ml. de piridina e juntaram-se 15 ml. de éter; a digitonina precipitou, foi logo filtrada

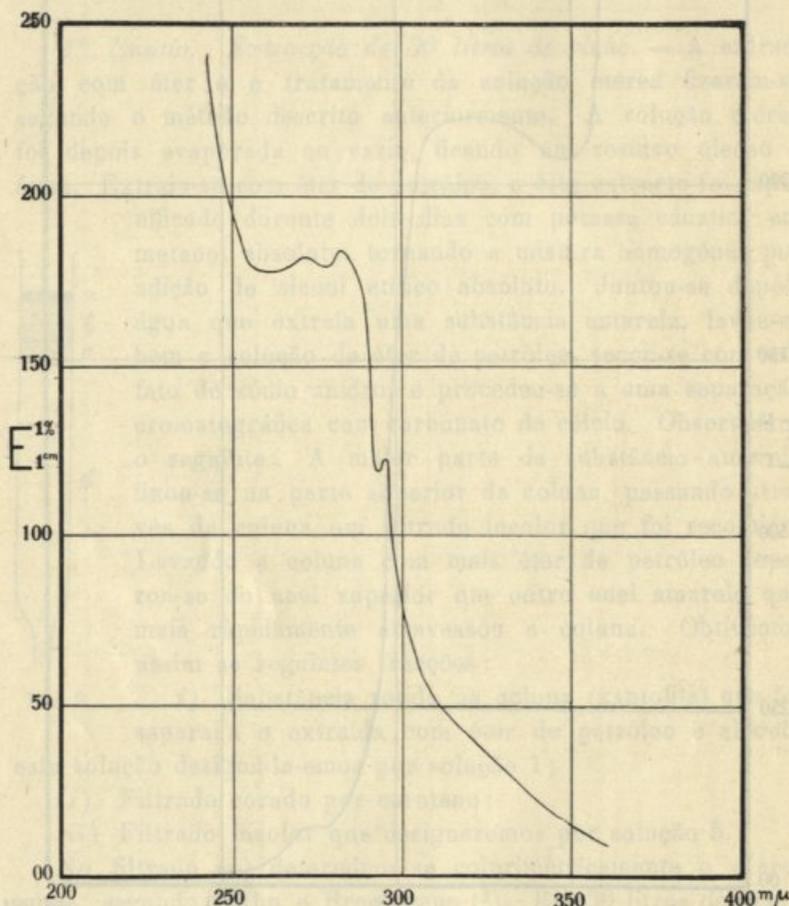


FIG. 4

Espectro de absorção, em álcool absoluto, dos esteróis separados da solução I por precipitação com digitonina.

e lavou-se o filtro com mais éter. A solução etérea que contém os esteróis foi então evaporada no vazio, o resíduo dissolvido em éter, a solução outra vez filtrada e evaporada no vazio; o resíduo foi dissolvido em álcool puríssimo; esta solução serviu para determinação do espectro de absorção no ultravioleta (Fig. 4).

Solução 2. Esta solução foi igualmente tratada com digitonina. Precipitaram cêrca de 2-3 miligramas. O precipitado foi tratado como o anterior, sendo igualmente tirado um espectro de absorção no ultravioleta (Fig. 5).

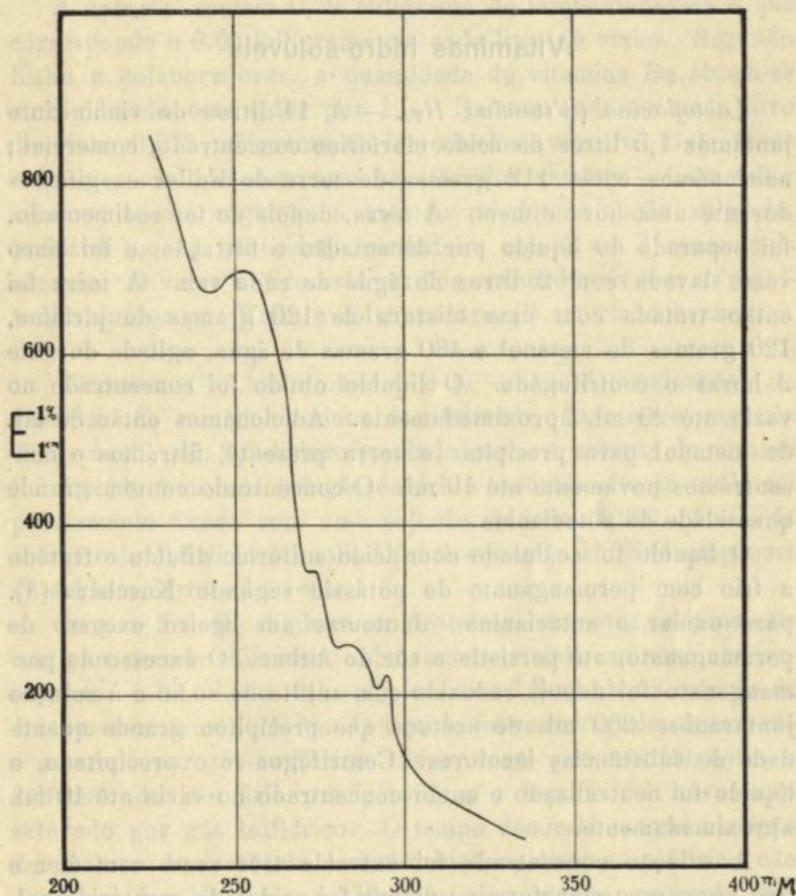


FIG. 5

Espectro de absorção, em álcool absoluto, dos esterois separados da solução 2 por precipitação com digitonina.

Solução 3. A solução tem pouca substância. Com tricloreto de antimônio dá uma reacção azul semelhante à da vitamina A.

Solução 4. A reacção com tricloreto de antimônio dá côr

violeta-vermelho menos semelhante à da vitamina A. Mais substância do que em 3, mas ainda muito pouca.

Solução 5. Reacção com tricloreto de antimónio positiva mas muito fraca.

Há cerca de 0,8 grama de substância.

### Vitaminas hidro-solúveis

*Lactoflavina (Vitamina B<sub>2</sub>)*. — A 14 litros de vinho tinto juntámos 1,5 litros de ácido clorídrico concentrado, comercial; adicionámos então 112 gramas de terra de Fuller e agitámos durante uma hora e meia. A terra, depois de ter sedimentado, foi separada do líquido por decantação e filtração, e foi cinco vezes lavada com 2 litros de água de cada vez. A terra foi então tratada com uma mistura de 120 gramas de piridina, 120 gramas de metanol e 480 gramas de água, agitada durante 2 horas e centrifugada. O líquido obtido foi concentrado no vazio até 20 ml. aproximadamente. Adicionámos então 80 ml. de metanol para precipitar a terra presente, filtrámos e concentrámos novamente até 10 ml. O concentrado contém grande quantidade de antocianina.

O líquido foi acidulado com ácido sulfúrico diluído e tratado a frio com permanganato de potássio segundo Koschura<sup>(5)</sup>, para oxidar a antocianina. Juntou-se um ligeiro excesso de permanganato, até persistir a cor do último. O excesso de permanganato foi depois reduzido com sulfito de sódio e à solução juntaram-se 250 ml. de acetona que precipitou grande quantidade de substâncias incolores. Centrifugou-se o precipitado, o líquido foi neutralizado e então concentrado no vazio até 10 ml. aproximadamente.

A solução concentrada foi extraída três vezes com éter e três vezes com clorofórmio; depois foi acidulada com ácido sulfúrico diluído e novamente extraída três vezes com clorofórmio. A solução aquosa ainda contém grande quantidade de corantes amarelos. Juntou-se NaOH 2N, suficiente para tornar a solução final, normal em NaOH. Esta solução foi então irradiada numa cápsula de porcelana branca, com uma lâmpada Nitra de 75 vátios, durante quatro horas, a uma distância de 20 centímetros.

Depois da irradiação, a solução foi acidulada com ácido acético e a lumilactoflavina, formada, foi extraída três vezes com

clorofórmio. Obteve-se um volume total de 60 ml. de solução em clorofórmio, que mostra a fluorescência verde característica da lumilactoflavina. A solução foi seca com sulfato de sódio anidro e a quantidade de lumilactoflavina presente determinada segundo o método colorimétrico de Kuhn, Wagner-Jauregg e Kaltschmitt<sup>(3)</sup>.

A solução contém 0,70 miligrama de lumilactoflavina o que corresponde a 0,05 miligrama em cada litro de vinho. Segundo Kuhn e colaboradores, a quantidade de vitamina B<sub>2</sub> obtém-se multiplicando este valor por 1,5. Existem pois em cada litro de vinho 0,075 miligrama de lactoflavina (vitamina B<sub>2</sub>). Este valor — como demonstraram os referidos autores — é um valor mínimo, sendo, segundo o método de determinação aplicado, provável que a quantidade verdadeira seja 2 ou 3 vezes mais elevada. O valor obtido está em boa concordância com os resultados obtidos por Kuhn e colaboradores<sup>(3)</sup> em vinho branco.

*Vitamina C (Ácido Ascórbico-l).* — As determinações da vitamina C, no vinho tinto da Bairrada, fizeram-se segundo Tillmans<sup>(4)</sup>, com 2,6-diclorofenolindofenol. A solução do corante foi titulada com uma solução de ácido ascórbico-l cujo título foi previamente fixado com uma solução de iodo N/200. 1 ml. da solução de 2,6-diclorofenolindofenol equivale a 0,099 miligrama de ácido ascórbico-l.

Com o fim de eliminar as proteínas, corantes, e possíveis vestígios de gás sulfuroso, submetemos o vinho ao seguinte tratamento: a 10 ml. de vinho adicionámos 2,5 ml. duma solução de acetato mercúrico a 20%. O líquido foi centrifugado, decantado e saturado por gás sulfídrico. Separou-se, por centrifugação, o sulfureto de mercúrio precipitado, e o líquido foi novamente saturado por gás sulfídrico. O tempo decorrido entre a adição do acetato de mercúrio e a saturação pelo gás sulfídrico não deve exceder 10 minutos. Mantem-se a solução, saturada pelo sulfídrico, durante 24 horas, e em seguida expulsa-se completamente o sulfídrico com uma corrente de gás carbónico até não dar reacção com o papel de acetato de chumbo. 5 ml. desta solução foram doseados com a solução de 2,6-diclorofenolindofenol.

Simultaneamente, fizemos o tratamento acima descrito, noutra volume de vinho, porém, antes da precipitação pelo sulfídrico destruimos a vitamina C com duas gotas duma solução de sulfato de cobre a 1% e duas gotas de potassa cáustica

a 40%<sup>(6)</sup>. No fim de 10 a 15 minutos a destruição da vitamina é completa; variando o tempo de oxidação de 15 minutos a 24 horas, o volume da solução de 2,6-diclorofenolindofenol, consumido na dosagem é precisamente o mesmo.

Os resultados obtidos estão resumidos no seguinte quadro:

TABELA I

Volumes da solução de 2,6-diclorofenolindofenol equivalentes a 1 ml. de vinho.			
Sem destruição da vitamina C		Com destruição da vitamina C	
1.º Ensaio	0,4 ml.		
2.º >	0,4 ml.		
3.º >	0,43 ml.	3.º e 4.º Ensaio	0,24 ml.
4.º >	0,47 ml.		
5.º >	0,41 ml.	5.º Ensaio	0,22 ml.

O exame da Tabela I mostra que, depois do tratamento pelo sulfídrico, no caso dos vinhos, o volume de 2,6-diclorofenolindofenol é maior do que o correspondente ao utilizado na oxidação da vitamina C. Há portanto necessidade de fazer em cada determinação dois ensaios, um sem destruição e outro com destruição da vitamina C, sendo as dosagens feitas nas mesmas condições (tempo, intensidade de cor, etc.). O volume de 2,6 diclorofenolindofenol correspondente à vitamina C será pois a diferença dos volumes obtidos nos dois ensaios.

A concentração da vitamina C no vinho tinto da Bairrada, segundo as determinações realizadas, é de 18 miligramas por litro ou sejam 360 Unidades Internacionais ou cerca de 2,4 Unidades Sherman.

## DISCUSSÃO

### *Vitaminas lipo-solúveis*

A análise cromatográfica, em coluna de óxido de alumínio, da solução do resíduo insaponificável I, permitiu-nos a separação de 5 fracções: zona a), amarela clara, reacção com  $SbCl_3$ ,

azul; zona *b*), quasi incolor, ensaio negativo com  $\text{SbCl}_3$ , precipita com digitonina; zona *c*), amarela intensa, reacção com  $\text{SbCl}_3$  verde azul, intenso; zona *d*) incolor, reacção com  $\text{SbCl}_3$  azul fraca; filtrado *e*) reacção negativa com  $\text{SbCl}_3$ .

O espectro de absorção do resíduo I, em solução alcoólica, apresenta uma inflexão entre 476-468  $m\mu$  (região de absorção selectiva de carotenóides e xantofilas), inflexão entre 379,5-364,6  $m\mu$ , inflexão entre 310-330  $m\mu$ , (região de absorção selectiva da vitamina A), uma banda estreita na vizinhança de 280  $m\mu$  (máximo principal da absorção selectiva do ergosterol), banda entre 255-260  $m\mu$  (região de absorção selectiva de vários esteróis); há ainda indicação duma banda de absorção entre 230-220  $m\mu$ .

Neste estudo preliminar, investigámos ainda o espectro de absorção da fracção cromatográfica *d*) obtida do resíduo I. Nesta fracção torna-se mais nítida a absorção na vizinhança de 320  $m\mu$ , aparecendo uma banda pouco persistente em 320-330  $m\mu$ ; em 260-290  $m\mu$  existe uma banda de grande intensidade, sem estrutura.

Comparando os resultados obtidos na análise cromatográfica, ensaios com  $\text{SbCl}_3$ , precipitação com digitonina e espectros de absorção, é possível concluir neste estudo preliminar que provavelmente a fracção *a*) é constituída por xantofila, na fracção *b*) existe ergosterol, na zona *c*) carotenóides, e temos evidência de que na zona *d*) há vitamina A, acompanhada de esteróis.

No 2.º ensaio feito sobre a fracção insaponificável, dissolvida em éter de petróleo, do extracto de 30 litros de vinho, determinámos a quantidade de carotenóides que referida a caroteno corresponde a 5 $\gamma$  por litro de vinho.

A adsorção cromatográfica, em colunas de carbonato de cálcio e óxido de alumínio activado, permitiu-nos a separação de cinco fracções.

*Ergosterol.* — Nas fracções 1 e 2, separámos o ergosterol por precipitação com digitonina. A fracção 1, por precipitação com digitonina, deu um precipitado de cerca de 1 miligramma que, por determinação espectrofotométrica, verificámos corresponder a 0,28 miligramma de ergosterol. A fracção 2 forneceu cerca de 2-3 miligrammas de digitonido que por determinação espectrofotométrica verificámos corresponder a 0,56 miligramma

de ergosterol. O total corresponde a 27% de ergosterol por litro de vinho.

A observação das figuras 4 e 5 mostra que o ergosterol isolado na zona 1 (fig. 4) é muito mais puro do que o ergosterol da zona 2 (fig. 5).

É conhecido que, geralmente, o ergosterol encontra-se nas plantas e nos animais, em percentagem muito pequena em relação aos esteróis totais. O ergosterol, devido à sua estrutura química, que tem como característica duas duplas ligações conjugadas no núcleo cíclico e outra na cadeia lateral, difere bastante dos outros esteróis naturais que em geral têm no núcleo uma só ou nenhuma dupla ligação. Por esta razão pode ser separado com relativa facilidade, dos outros esteróis, por cromatografia. Explica-se assim o facto de termos obtido na zona 1 uma fracção de ergosterol de elevado grau de pureza, como mostra o espectro de absorção. A zona 2 já contém o ergosterol misturado com outros esteróis.

Como a Unidade Internacional de vitamina D corresponde a 0,1% de ergosterol irradiado, um litro de vinho pode fornecer 270 U. I. de vitamina D.

TABELA II  
Concentrações das vitaminas A, B<sub>2</sub>, C e D nalguns alimentos

Alimentos	Miligramas de vitamina por 100 gramas de alimento			
	Vitamina A	Vitamina B <sub>2</sub>	Vitamina C	Vitamina D
Vinho da Bairrada (tinto)	0,0005	0,0075	1,8	0,0027 (ergosterol)
Uvas	0,021	0,006	2-5	—
Tomate	1,2-1,6	0,050	15	—
Laranja	0,055	0,009	50-100	—
Limão	—	—	50-100	—
Maçã	0,067	0,005	2-15	—
Leite	0,2-0,8	0,04-0,1	0,5-1	0,0002-0,0004
Manteiga	2-20	—	—	0,0004-0,020
Queijo	1,6-32	—	—	—
Gema de ovo	4-20	0,2-0,55	—	0,020
Óleo de fígado de bacalhau	4-200	—	—	0,04-0,4
Fígado de vaca	—	2	—	0,0012

*Vitamina A* — A presença da vitamina A é indicada pela reacção de Carr-Price na solução 3. A solução 3 é incolor e portanto não contem carotenóides. O espectro de absorção desta solução apresenta uma inflexão nítida na região 320-330  $m\mu$ . que contudo não nos permite a determinação quantitativa desta vitamina.

É interessante verificar a presença da vitamina A no vinho, embora em muito pequena quantidade, visto que, até hoje, não foi encontrada em produtos vegetais. Pensamos que a vitamina determinada é produto de metabolismo das bactérias de fermentação.

Como a quantidade de vitamina A no vinho é ínfima, interessantes, para a avaliação da sua actividade vitamínica, o conteúdo em pró-vitamina A, o caroteno. Verificámos que a quantidade de caroteno é de 5 $\gamma$  por litro. Na hipótese de este caroteno ter a mesma actividade do  $\beta$ -caroteno, cada litro de vinho teria 8 U. I.

#### *Vitaminas hidro-solúveis*

*Vitamina B<sub>2</sub> (lactoflavina)*. — Verificámos que cada litro de vinho contem o mínimo de 0,075 miligrama de lactoflavina ou sejam 35 U. de Sherman Bourghin. Verifica-se, por comparação com a tabela II, que o vinho contem, aproximadamente, a mesma quantidade desta vitamina do que a maior parte dos frutos.

*Vitamina C (ácido ascórbico l)*. — A concentração de vitamina C no vinho tinto é ligeiramente inferior ao mínimo de vitamina C determinado nas uvas, como se verifica na tabela II.

Embora a vitamina C seja facilmente oxidável, o pH baixo, dos vinhos, e possivelmente outros factores evitam a oxidação irreversível total durante os fenómenos da fermentação e conservação dos vinhos.

#### NOTA

Obtenção dum Hidrocarboneto e Verificação da Presença duma Substância com Fluorescência Azul, a partir do Vinho Tinto da Bairrada

No decurso das extracções, com éter, do vinho tinto da Bairrada, para a separação das vitaminas lipo-solúveis, verificámos que o éter apresentava fluorescência azul intensa por irradiação

com luz ultra-violete. O espectro de absorção do resíduo do extracto etéreo depois de submetido a adsorção cromatográfica (fig. 6, curva 1) apresenta duas bandas bem definidas com máximos em 336 e 278  $m\mu$  e mínimos em 313 e 250  $m\mu$ .

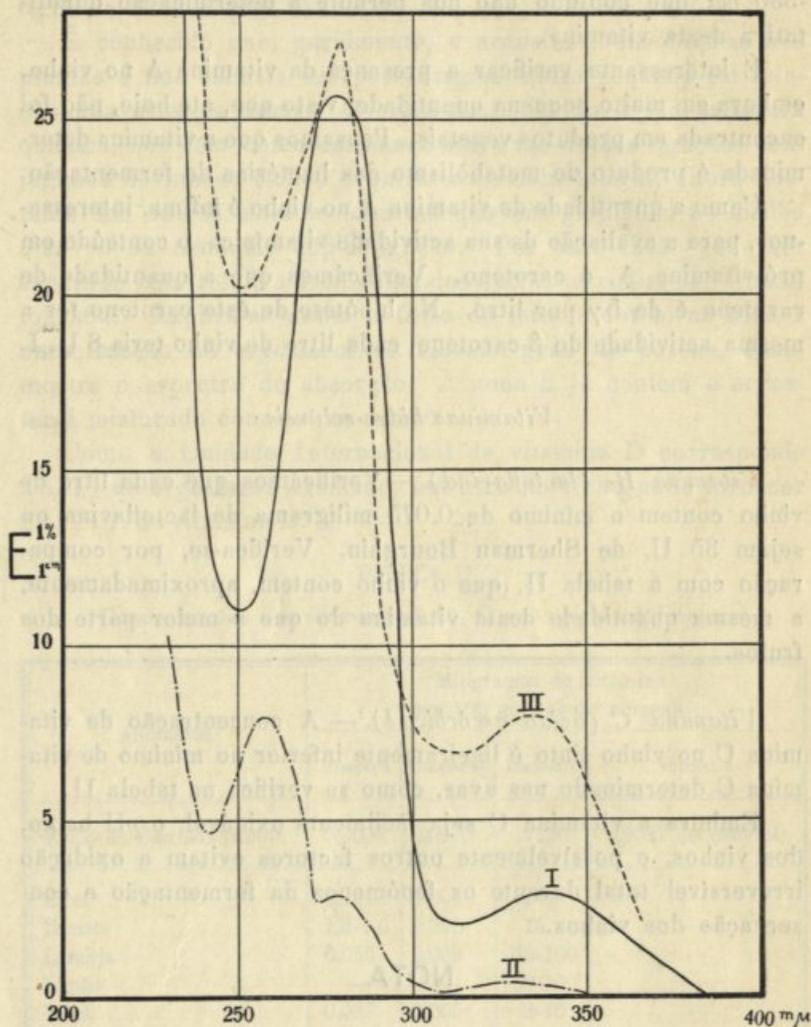


FIG. 6

Espectros de absorção, em álcool absoluto, de frações que contêm a substância com fluorescência azul: Curva I. Substância previamente obtida por adsorção cromatográfica. Curva II. Destilado, p. e., a 12 mm, 85° a 115°. Curva III. Destilado, p. e., a 12 mm, 120° a 160°. (A curva I não está expressa nas unidades indicadas no gráfico; desconhecemos a concentração da solução).

Numa tentativa para o esclarecimento desta questão procedemos aos seguintes ensaios:

45 litros de vinho tinto foram extraídos em porções de 15 litros, com éter, num aparelho de extracção contínua. O éter foi substituído todos os dias, e a extracção continuada até que o éter deixou de apresentar fluorescência azul. A solução etérea contém muitas substâncias coradas, carotenóides, flavonas, antocianinas e ainda os lipóides do vinho.

Verificámos que, de entre vários adsorventes, o hidróxido de cálcio era o melhor para a eliminação das substâncias coradas, assim como dos esteróis, não sendo adsorvida a substância com fluorescência azul.

A solução foi então passada através de colunas de hidróxido de cálcio tendo o cuidado de que a zona castanho-escura que se formou não ultrapassasse metade de cada coluna; as colunas foram lavadas com mais éter. As soluções etéreas obtidas, agora incolores, foram concentradas até pequeno volume. Depois de o éter ter sido removido quasi completamente, separou-se uma substância incolor que depois de ser duas vezes cristalizada apresentou-se em forma de pequenas agulhas finas com brilho argenteo. O ponto de fusão desta substância é  $52^{\circ}.54^{\circ}$  (não corr.).

A análise elementar deu os seguintes resultados:

Encontrado:	C: 84,92%	H: 13,99%
	85,0%	14,3%
Calculado para $C_{35}H_{70}$ :	C: 85,6%	H: 14,4%
$C_{35}H_{72}$ :	C: 85,25%	H: 14,75%

Peso molecular médio, encontrado 484. Calculado para  $C_{35}H_{70}$  490,6, para  $C_{35}H_{72}$  492,6.

A substância isolada é portanto um hidrocarbonato em  $C_{35}$ , saturado ou com uma ligação dupla.

A solução concentrada, que contém álcool e muitas substâncias de carácter terpénico, além da substância com fluorescência azul, foi então tratada com vapor de água, que arrastou parte dos óleos voláteis. O resíduo foi evaporado no vazio a uma temperatura que não excedeu  $50^{\circ}$ .

Ficou um óleo ligeiramente corado e de cheiro agradável. Este óleo foi submetido a uma destilação à pressão de 12 mm,

obtendo-se as seguintes fracções: 1) ponto de ebulição até 85°; 2) p. e. 85° a 115°; 3) p. e. 120° a 160°.

Ficou um resíduo que foi destilado a 10 mm de pressão, a temperatura superior a 200°; o destilado apresenta-se muito escuro.

A fracção 1, incolor, é bastante transparente no ultra-violete; o espectro de absorção da solução, a 1,082% em alcool, numa espessura de 1 cm., apresenta uma ligeira inflexão entre 275-280  $m\mu$ . A segunda fracção, ligeiramente amarela, apresenta uma absorção mais intensa; o espectro de absorção ultra-violete apresenta uma banda com o máximo em 257  $m\mu$ , uma banda mal definida com o máximo em 277  $m\mu$ , e outra também mal definida na região 310-340  $m\mu$ . (Fig. 6, curva II). A terceira fracção de côr amarela apresenta um espectro de absorção com duas bandas persistentes, com máximos em 278  $m\mu$  e 337  $m\mu$  (Fig. 6, curva III); estes máximos correspondem aos da substância previamente obtida.

Esperamos poder isolar esta substância no estado puro, para sua completa identificação.

## SUMÁRIO

- 1) Fizemos determinações quantitativas de vitamina A, carotenóides, ergosterol, vitamina B<sub>2</sub> (lactoflavina) e vitamina C, no vinho tinto da Bairrada.
- 2) As concentrações de carotenoides e vitamina A são muito pequenas. Não foi possível determinar se os carotenóides presentes são activos.
- 3) A concentração de vitamina B<sub>2</sub> é da ordem de grandeza das concentrações desta vitamina, em vários frutos.
- 4) A concentração de vitamina C é inferior à de muitos frutos e ligeiramente inferior ao mínimo de vitamina C que se encontra nas uvas,
- 5) Separámos um hidrocarboneto de fórmula molecular C<sub>35</sub>H<sub>70</sub> ou C<sub>35</sub>H<sub>72</sub>.
- 6) Conseguimos fracções concentradas e o espectro de absorção duma substância que por irradiação com luz ultra-violete apresenta fluorescência azul muito intensa.

Apresentamos os nossos agradecimentos ao Professor Doutor A. de Moraes Sarmiento e ao Professor Doutor R. Couceiro

da Costa pelas facilidades concedidas na execução deste trabalho. À Estação Viti-Vinicola da Beira Litoral agradecemos a oferta do vinho utilizado nos diferentes ensaios.

Muitas determinações feitas neste trabalho foram executadas com aparelhos adquiridos por subsídios do Instituto para a Alta Cultura e do Fundo Sá Pinto.

Uma bolsa que foi concedida a F. Pinto Coelho, pelo I. A. C. contribuiu para a realização deste trabalho.

#### BIBLIOGRAFIA

- 1) GOUVEIA, A. J. A. & PINTO COELHO, F. — Revista da Faculdade de Ciências, Coimbra 6, 191 (1936).
- 2) KUHN, R. & BROCKMANN, H. — Zeitschr. physiol. Chem. 206, 41 (1932).
- 3) KUHN, R., WAGNER-JAUREGG, TH. & KALTSCHMITT, H. — Ber. deut. chem. Ges. 67, 1452 (1934).
- 4) TILLMANS, J. e colaboradores, Zeitschr. f. Unters. Lebensmittel 63: 1, 21, 241, 267, 276 (1932). Biochem. Zeitschr. 250, 312 (1932).
- 5) KOSCHARA, W. — Ber. deut. chem. Ges. 67, 761 (1934).
- 6) MORTON, R. A., — The application of absorption spectra to the study of vitamins and hormones, pág. 59, London.

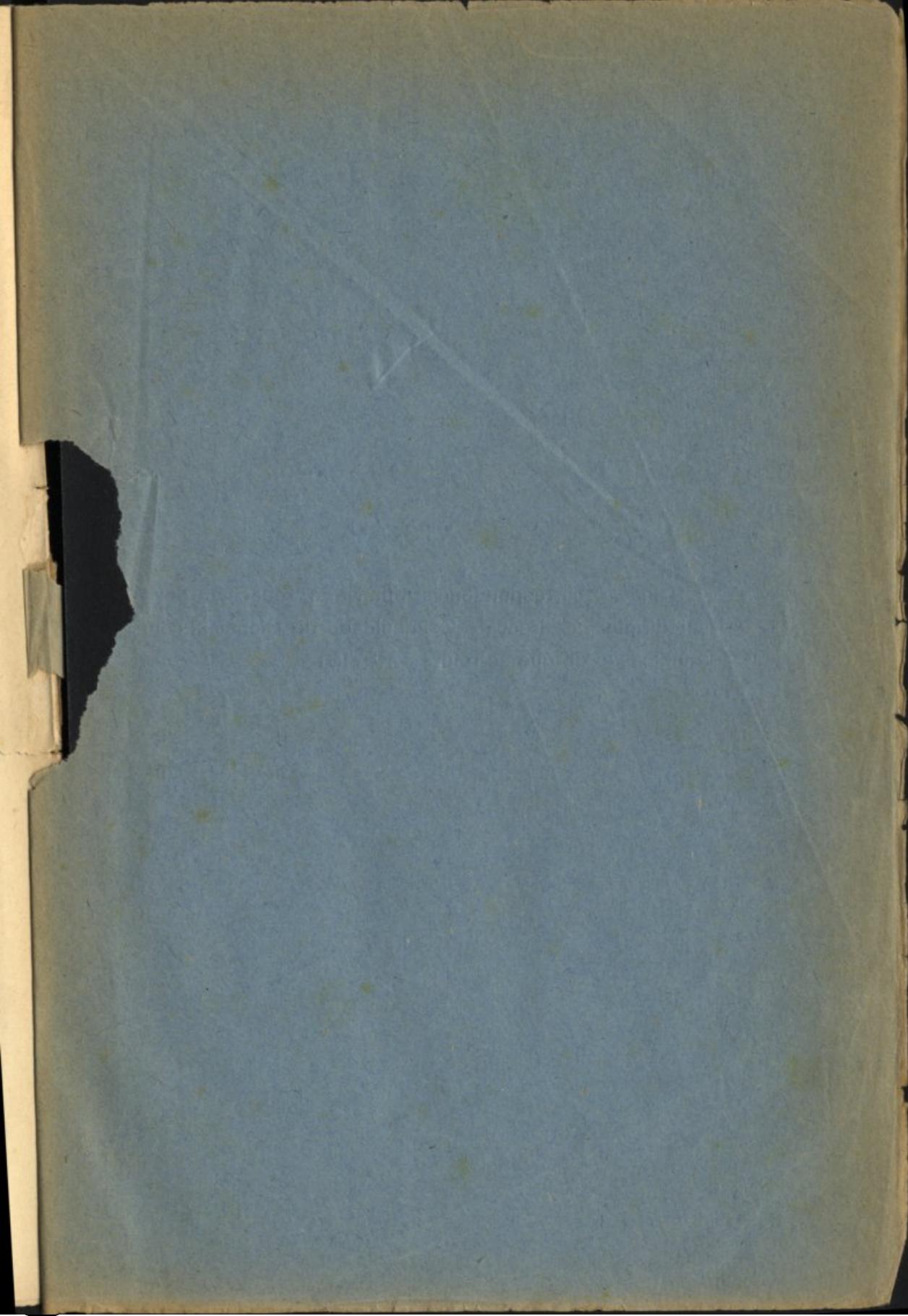
The first part of the paper deals with the general theory of the reaction between a radical and a molecule. It is shown that the rate of reaction is determined by the rate of formation of the radical and the rate of its reaction with the molecule. The rate of formation of the radical is determined by the rate of initiation and the rate of termination. The rate of reaction with the molecule is determined by the rate of propagation and the rate of termination.

The second part of the paper deals with the experimental results. It is shown that the rate of reaction is first order in the radical and first order in the molecule. This is in agreement with the theoretical predictions. The rate of reaction is also independent of the concentration of the initiator, which is also in agreement with the theoretical predictions.

The third part of the paper deals with the discussion of the results. It is shown that the results are in agreement with the theoretical predictions. The rate of reaction is determined by the rate of formation of the radical and the rate of its reaction with the molecule. The rate of formation of the radical is determined by the rate of initiation and the rate of termination. The rate of reaction with the molecule is determined by the rate of propagation and the rate of termination.

The authors are indebted to the National Science Foundation for the support of this work.

1. J. H. Goldstein, *J. Chem. Phys.*, **10**, 430 (1942).
2. J. H. Goldstein, *J. Chem. Phys.*, **11**, 271 (1943).
3. J. H. Goldstein, *J. Chem. Phys.*, **12**, 100 (1944).
4. J. H. Goldstein, *J. Chem. Phys.*, **13**, 100 (1945).
5. J. H. Goldstein, *J. Chem. Phys.*, **14**, 100 (1946).
6. J. H. Goldstein, *J. Chem. Phys.*, **15**, 100 (1947).
7. J. H. Goldstein, *J. Chem. Phys.*, **16**, 100 (1948).
8. J. H. Goldstein, *J. Chem. Phys.*, **17**, 100 (1949).
9. J. H. Goldstein, *J. Chem. Phys.*, **18**, 100 (1950).
10. J. H. Goldstein, *J. Chem. Phys.*, **19**, 100 (1951).



## AVISO

Tôda a correspondência relativa à redacção deve ser dirigida à Direcção da Faculdade de Ciências, com a indicação de que se refere à REVISTA.