UNIVERSIDADE DE COIMBRA

REVISTA

DA

FACULDADE DE CIÊNCIAS

VOL. V — N.º 3

COIMBRA
TIPOGRAFIA DA ATLÂNTIDA
1935

Cálculo Simbólico

CAPÍTULO I

OPERAÇÕES E OPERADORES

1. Operação matemática é o *acto* do espírito por meio do qual se faz corresponder, a certos seres matemáticos, outros seres matemáticos. Os seres de que se parte, são os *dados*. Aqueles a que se chega, os *resultados*.

2. Dizem-se *bem definidas* ou *uniformes*, as operações de resultado único.

NOTA: Quando se não declarar expressamente o contrário, suporemos as operações uniformes.

3. Chama-se *operador*, o *sinal* representativo duma operação.

4. Quando a operação tem apenas um *dado*, como sucede muitas vezes, indica-se o seu resultado escrevendo o operador antes do dado. Assim, se fôr ρ o operador e A o dado da operação ou *operando*, representaremos o resultado a que se chega, pondo ρA ou $\rho . A$, expressão que se lê: ρ que multiplica A, ou ρA.

5. Segundo esta convenção, ρA vem a ser o resultado a que se chega, executando sobre A a operação indicada pela letra ρ. Assim, por exemplo, 3 é um operador que significa a passagem do *simples* para o *triplo*, e $3\,A$ significa o triplo de A.

Do mesmo modo, $\frac{1}{3}$ é um operador que significa qualquer das partes que se obteem dividindo em três partes iguais uma quantidade dada. Portanto, $\frac{1}{3}A$ representa uma qualquer das partes que se obteem dividindo A em três partes iguais; etc.

6. NOTA: Suporemos sempre no que vai seguir-se que tanto os *dados*, como os *resultados* das operações, são *números*, *quantidades*, ou *funções*. Conseqüentemente, tanto os dados das operações que vamos considerar, como os seus resultados, são *adicionáveis*.

7. Chamaremos, em geral, *quantidades* aos seres desta espécie, isto é, aos números, funções e quantidades quaisquer.

8. **Operadores aditivos.** — Se o operador ρ fôr tal que, quaisquer que sejam as quantidades A e B, se tenha sempre

$$\rho(A+B)=\rho A+\rho B,$$

êste operador diz-se *aditivo* e a operação que êle representa diz-se também *aditiva*.

9. A *medida* é uma operação aditiva como é sabido.

10. No que vai seguir-se, só trataremos de *operações aditivas*.

11. **Zero.** — Chama-se *zero* o operador a que corresponde sempre um resultado *nulo*. O sinal por que se representa êste operador é o algarismo do mesmo nome.

12. **Identidade.** — A operação que faz corresponder qualquer quantidade a si mesma, diz-se *identidade* e o seu sinal é o algarismo 1.

13. **Igualdade.** — Dois operadores dizem-se *iguais* quando, aplicados a quantidades iguais e quaisquer, levam a resultados também iguais.

14. Logo, se ρ e ρ' forem operadores tais que

$$\rho=\rho',$$

será também:

$$\rho A=\rho' A,$$

qualquer que seja A. E, reciprocamente, se fôr $\rho A = \rho' A$, qualquer que seja a quantidade A, será, por def.,

$$\rho = \rho'.$$

Adição simbólica

15. Adição de operadores. — Se ρ e σ forem operadores, $\rho + \sigma$ é também um operador que se define pela relação

$$(\rho + \sigma) A = \rho A + \sigma A.$$

Como o segundo membro é conhecido logo que se conhecem ρ e σ, o 1.º membro também ficará conhecido.

16. A definição para mais parcelas dá-se do modo costumado.

17. É claro que $\rho + O = \rho$, visto que (15)

$$(\rho + O) A = \rho . A + O . A = \rho . A$$

Logo: *a adição de operadores tem ainda* zero *por* módulo.

18. *A adição de operadores é uma operação comutativa.* Com efeito, como por hipótese $\rho . A$ e $\sigma . A$ são quantidades (n.^{os} 6 e 7), teremos:

$$(\rho + \sigma) . A = \rho . A + \sigma . A = \sigma . A + \rho . A = (\sigma + \rho) . A$$

qualquer que A seja. Logo (13):

$$\rho + \sigma = \sigma + \rho,$$

c. d. d.

19. É claro que *a adição é também associativa:*

$$\begin{aligned}[\rho + \sigma + \tau] A &= [(\rho + \sigma) + \tau] A \\ &= (\rho + \sigma) A + \tau A \\ &= \rho A + \sigma A + \tau A \\ &= \rho A + (\sigma A + \tau A) \\ &= \rho A + (\sigma + \tau) A \\ &= [\rho + (\sigma + \tau)] A.\end{aligned}$$

Logo:

$$(\rho+\sigma)+\tau=\rho+(\sigma+\tau),$$

c. d. d.

20. Teorema. — *A soma de operadores aditivos é um operador aditivo.*

Sejam ρ e σ os operadores dados. Por hipótese, quaisquer que seja A e B, teremos:

$$\rho\,(A+B)=\rho\, A+\rho\, B$$
$$\sigma\,(A+B)=\sigma\, A+\sigma\, B.$$

Por outo lado,

$$\begin{aligned}(\rho+\sigma)\,(A+B)&=\rho\,(A+B)+\sigma\,(A+B)\\&=(\rho\, A+\rho\, B)+(\sigma\, A+\sigma\, B)\\&=(\rho\, A+\sigma A)+(\rho\, B+\sigma B)\\&=(\rho+\sigma)\, A+(\rho+\sigma)\, B,\end{aligned}$$

c. d. d.

21. Teorema. — *Se a operadores iguais adicionarmos operadores iguais, os operadores resultantes são ainda iguais.*

Com efeito: sejam ρ, σ, τ, e ν os operadores dados, e seja

$$\rho=\sigma \quad \text{e} \quad \tau=\nu.$$

Digo que

$$\rho+\tau=\sigma+\nu.$$

Com efeito, qualquer que seja A, teremos:

$$\rho A=\sigma A \quad \text{e} \quad \tau A=\nu A$$

Logo:

$$\rho A+\tau A=\sigma A+\nu A$$

e

$$(\rho+\tau)\, A=(\sigma+\nu)\, A.$$

Conseqüentemente:

$$\rho+\tau=\sigma+\nu.$$

c. d. d.

Multiplicação simbólica

22. Produto de operadores. — Se ρ e σ forem operadores, com $\rho\sigma$ ou $\rho.\sigma$ representaremos ainda um operador que se define pela seguinte relação:

$$(\rho\sigma)\,A=\rho\,(\sigma A).$$

O 2.º membro desta relação tem sentido conhecido: significa que ao dado A se aplica a operação σ; e que ao resultado obtido se aplica a operação ρ. O produto de operações resulta dá aplicação sucessiva delas.

Os operadores (factores do produto) escrevem-se pela ordem inversa da que se executam. Assim, no caso de três factores:

$$(\rho\sigma\tau)\,A=\rho\,[\sigma\,(\tau A)].$$

A 1.ª operação que se executa sôbre A, é representado por τ que é o último factor escrito, etc.

23. O produto de *operadores* é ainda um operador e o produto de *operações* é ainda uma operação.

24. Os números reais são *operadores*, como é manifesto, representativos das operações que consistem na passagem do *simples* para o *múltiplo*, na divisão em partes iguais e na *passagem ao limite;* ou no produto destas operações.

25. Os números complexos são também operadores, mas nesses entram outros operadores, além dos números reais.

26. Módulo. — *O módulo da multiplicação de operadores é* 1. Com efeito,

$$1\,.\,A=A.$$

Logo:

$$(1\,.\rho)\,A=1\,.\,(\rho\,A)=\rho\,A\,;$$

e

$$1\,.\,\rho=\rho,$$

c. d. d.

27. Propriedade associativa. — *O produto de operadores é sempre associativo*[1]. Com efeito, pondo

$$B = \tau A, \quad C = \sigma B \quad \text{e} \quad D = \rho C,$$

vem:

$$C = \sigma(\tau A) = (\sigma\tau) A$$

e

$$D = \rho(\sigma B) = (\rho\sigma) B.$$

Logo:

$$D = (\rho\sigma)\tau A.$$

Por outro lado,

$$D = \rho(\sigma B) = \rho[\sigma(\tau A)] = \rho[(\sigma\tau) A]$$
$$= \rho(\sigma\tau) A.$$

Logo:

$$(\rho\sigma)\tau = \rho(\sigma\tau),$$

c. d. d.

NOTA: A propriedade *comutativa* é que nem sempre se verifica, como depois veremos.

28. Dois operadores dizem-se *permutáveis* quando forem comutativos.

29. Propriedade distributiva. — *A multiplicação de operadores aditivos é distributiva a respeito da adição.*

Com efeito:

$$\rho(\sigma + \tau) A = \rho[\sigma A + \tau A]$$

(por 8 e 10)

$$= \rho(\sigma A) + \rho(\tau A)$$

(por 22)

$$= (\rho\sigma) A + (\rho\tau) A$$

(por 15)

$$= (\rho\sigma + \rho\tau) A$$

qualquer que A seja. Logo:

$$\rho(\sigma + \tau) = \rho\sigma + \rho\tau,$$

c. d. d.

---

[1] E' preciso não esquecer que só consideramos operadores bens definidos e aplicados a um só dado.

30. Do mesmo modo:

$$(\sigma+\tau)\,\rho=\sigma\rho+\tau\rho,$$

como é fácil de ver.

31. Teorema. *O produto de operadores aditivos é também um operador aditivo.* Com efeito, sejam ρ e σ dois operadores aditivos. Teremos:

$$\rho\,(A+B)=\rho A+\rho B.$$

Multiplicando ambos os membros desta igualdade por σ, vem:

$$\sigma\rho\,(A+B)=\sigma(\rho A+\rho B)=\sigma\rho A+\sigma\rho B,$$

por σ ser também aditivo e uniforme. Logo: $\sigma\rho$ também é aditivo,

c. d. d.

32. Teorema. *Multiplicando operadores iguais por operadores iguais, obtemos operadores iguais*, se êstes operadores fôrem todos bem definidos.

Com efeito, se

$$\rho=\sigma \quad \text{e} \quad \tau=\nu,$$

teremos, quaisquer que sejam A e B:

$$\rho A=\sigma A \quad \text{e} \quad \tau B=\nu B.$$

Ponhamos: $A=\tau B$. Teremos:

$$(\rho\tau)\,B=\rho\,(\tau B)=\rho A=\sigma A=\sigma\,(\tau B)=\sigma(\nu B)=(\sigma\nu)\,B.$$

Logo:

$$\rho\tau=\sigma\nu,$$

c. d. d.

Potenciação

33. Definição. — A potência de expoente inteiro e positivo define-se como produto de factores iguais e representa-se como na aritmética e gosa das mesmas propriedades, como é evidente. Assim:

34. *Para multiplicar potências com a mesma base, somam-se os expoentes.*

35. *Para elevar uma potência a outra potência, multiplicam-se os expoentes.*

36. Para já, só estas duas propriedades se podem demonstrar. Das outras falaremos depois.

NOTA: Para que tenha sentido a potenciação, seja qual fôr o seu expoente, é necessário que a base seja um operador susceptível de ser aplicado uma infinidade de vezes sucessivas a uma quantidade dada. Todos os operadores se suporão gozarem desta propriedade.

37. **Teorema.**—*As potências dum operador aditivo, também são operadores aditivos,* como resulta imediatamente do n.º 31.

Geração de operadores por adição e multiplicação

38. A adição e a multiplicação permitem criar operadores novos a partir doutros já conhecidos. Como os números são operadores, nós podemos combiná-los com outros operadores para formar operadores novos.

Assim, se ρ fôr um operador (sinal de derivação, por exemplo) podemos formar com ele, tomado para variável, um polinómio $P(\rho)$ que será um novo operador, perfeitamente conhecido, logo que seja conhecido o polinómio.

39. Uma série de potências de ρ, $\sum_{n=0}^{\infty} A_n \rho^n$, também representará, por vezes, um *operador,* no caso de a série resultante da sua aplicação a certo *dado,* ser convergente. É o que sucede aliás com as séries ordinárias que ora são convergentes, ora divergentes.

40. Se a função $f(x)$ fôr susceptível de ser desenvolvida segundo as potências inteiras e positivas de x e fôr

$$f(x)=\sum_{n=o}^{\infty} A_n x^n,$$

representaremos por $f(\rho)$ o operado $\sum_{n=o}^{\infty} A_n \rho^n$ e poremos:

$$f(\rho)=\sum_{n=o}^{\infty} A_n \rho^n$$

Assim, por exemplo, poremos:

$$\frac{1}{1-\rho}=1+\rho+\rho^2+. \qquad (1)$$

$$log\,(1+\rho)=\rho-\frac{\rho^2}{2}+\frac{\rho^3}{3}-\dots \qquad (2)$$

$$sen\;\rho=\rho-\frac{\rho^3}{|\underline{3}}+\frac{\rho^5}{|\underline{5}}-\dots \qquad (3)$$

$$e^{\rho}=1+\rho+\frac{\rho^2}{|\underline{2}}+\dots \qquad (4)$$

etc.

NOTA: Um polimio formado com operadores bem definidos, é um operador bem definido e o mesmo sucede com as séries de operadores.

Pode, pois, acontecer que a série seja o desenvolvimento duma função $f(\rho)$ com sentido próprio, como sucede com o desenvolvimento (1) e depois veremos que, se ρ fôr o signal de derivação, a série é um operador bem definido, mas que $\frac{1}{1-\rho}$ o não é. A série representará então um dos valores do operador funcional.

41. Teorema. — *Um polinómio em ρ, sendo ρ um operador bem definido e aditivo, é também um operador bem definido e aditivo,* por força dos n.[os] 20, 31, 37, e 40 (nota).

42. Entre as funções de operadores é notável pela sua simplicidade e propriedades, a série

$$e^{h\frac{d}{dx}} = 1 + h\frac{d}{dx} + \frac{h^2}{\underline{|2}}\left(\frac{d}{dx}\right)^2 + \ldots + \frac{h^n}{\underline{|n}}\left(\frac{d}{dx}\right)^n + \ldots$$

que dá o desenvolvimento de Taylor

$$e^{h\frac{d}{dx}} f(x) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{\underline{|2}} f''(x) + \ldots + \frac{h^n}{\underline{|n}} f^{(n)}(x) + \ldots$$

43. Êste operador, aplicado a uma função $f(x)$, terá sentido, quando a série de Taylor o tiver também.

44. O operador $e^{h\frac{d}{dx}}$, aplicado a um polinómio inteiro, tem sempre sentido.

Teorema. — *O operador* $e^{h\frac{d}{dx}}$ *é aditivo.*

Com efeito:

$$e^{h\frac{d}{dx}}[\rho(x) + \psi(x)] = \rho(x+h) + \psi(x+h)$$
$$= e^{h\frac{d}{dx}}\rho(x) + e^{h\frac{d}{dx}}\psi(x),$$

c. d. d.

Operações permutáveis

Já vimos (n.º 28) o que se entende por operadores permutáveis. Vamos estudar agora algumas das suas propriedades.

45. Teorema. — *Se um operador fôr permutável com outros dois, também é permutável com a sua soma.*

Com efeito, se ρ for aditivo, como supomos sempre, teremos:

$$\rho(\sigma + \tau) = \rho\sigma + \rho\tau,$$

pela propriedade destributiva já demonstrada (n.º 29). Mas por hipótese,

$$\rho\sigma = \sigma\rho \quad \text{e} \quad \rho\tau = \tau\rho.$$

Logo:

$$\rho.(\sigma + \tau) = \sigma\rho + \tau\rho = (\sigma + \tau).\rho,$$

c. d. d.

46. Teorema. — *Se um operador é permutável com outros dois, também é permutável com o seu produto.* Com efeito, em virtude da propriedade associativa e das hipóteses, temos:

$$\rho\,(\sigma\tau) = (\rho\sigma)\,\tau = (\sigma\rho)\,\tau = \sigma\,(\rho\tau) = \sigma\,(\tau\rho) = (\sigma\tau)\,\rho.$$

Logo:

$$\rho\,(\sigma\tau) = (\sigma\tau)\,\rho.$$

c. d. d.

47. Teorema. — *O operador* 1 *é permutável com todos os outros,* como é evidente.

48. Só consideraremos *operadores* permutáveis com os números reais e com os números complexos.

49. Teorema. — *Os polinómios em* ρ *são operadores permutáveis entre si.*

Com efeito, ρ é permutável consigo mesmo e com as suas potências inteiras e positivas; e estas, permutáveis umas com as outras. Logo: em virtude dos teoremas 45 e 46, os polinómios, sendo somas de operadores permutáveis serão permutáveis também.

50. Teorema. — *Todo o operador da forma* P (ρ) *se pode decompor em factores binómios.*

Com efeito, se fôr

$$P(X) \equiv P_0 (X - a_1)^{\alpha_1} (X - a_2)^{\alpha_2} \ldots (X - a_k)^{\alpha_k},$$

efectuando as operações indicadas no segundo membro, obtem-se, depois de feitas as reduções convenientes, o polinómio $P(X)$ com a forma que tem no 1.º membro. Ora, substituindo X pelo operador ρ, podemos executar, com o mesmo rigor, as mesmas operações, pois que, em virtude das propriedades da adição e multiplicação dos operadores uniformes, aditivos e permutáveis com os números, o resultado não vem alterado. Logo: *os operadores representados por* P (ρ), *ordenado ou não segundo as potências de* ρ, *mas posto debaixo da forma* $\Sigma A \rho^k$; *e por* P (ρ), *decomposto em factores binómios, são iguais* (n.º 13).

51. Dum modo geral, se os operadores $\varphi(\rho)$ e $\psi(\rho)$ forem tais que se possa obter um deles do outro, efectuando adições algébricas e multiplicações, em número finito, eles serão iguais, porque levarão sempre a resultados iguais, pelo que fica dito.

52. Se $\varphi(\rho)$ e $\psi(\rho)$ forem dados por desenvolvimentos em série que, aplicados a certa quantidade A, dão origem a polinómios em ρ, por os restantes termos se anularem; e se, neste caso, se puder passar duma das séries para a outra por adições e multiplicações que afectem os termos não nulos das séries um número finito de vezes, teremos ainda:

$$\varphi(\rho)\, f(x) = \psi(\rho)\, f(x)$$

porque ficamos reduzidos ao caso anterior.

53. Sejam, por exemplo, os operadores

$$\varphi(\rho) = 1 + \frac{1}{2}\rho + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{\underline{|2}}\rho^2 + \ldots \equiv (1+\rho)^{\frac{1}{2}}$$

$$\psi(\rho) = 1 + \frac{1}{2}\left(\rho - \frac{\rho^2}{2} + \frac{\rho^3}{3}\ldots\right) + \frac{1}{2^2\underline{|2}}\left(\rho - \frac{\rho^2}{2} + \frac{\rho^3}{3}\ldots\right)^2 +$$

$$+ \ldots \equiv e^{\frac{1}{2}\log(1+\rho)}$$

Se $\rho = \dfrac{d}{dx}$ e $f(x)$ fôr um polinómio inteiro, teremos:

$$\left(1 + \frac{d}{dx}\right)^{\frac{1}{2}} f(x) \equiv e^{\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{d}{dx}\right)} f(x).$$

Na verdade, êstes desenvolvimentos anulam-se a partir das potências de $\dfrac{d}{dx}$ de grau superior ao de $f(x)$ e poder-se-à passar da parte útil duma qualquer das séries em $\dfrac{d}{dx}$, para a outra, mediante um número finito de adições e multiplicações legítimas.

NOTA. Esta forma de transformação de operadores presta relevantíssimos serviços.

Operações inversas

54. Definição. — Se ρ e σ forem operadores tais que $\rho\sigma = 1$, a operação σ diz-se *inversa* da operação ρ.

55. Pode dizer-se que toda a operação destroi os efeitos da sua *inversa.*

56. A operação inversa de ρ costuma representar-se pelo signal ρ^{-1}.

57. Teremos então, por difinição,

$$\rho\rho^{-1} = 1$$

58. A operação inversa duma operação bem definida, pode não ser bem definida. É o que sucede com a derivação, por exemplo.

NOTA: As operações directas supô-las hemos sempre bem definidas. As operações inversas é que poderão ser multiformes.

59. De $A = \rho^{-1}B$, deduz-se sempre, $\rho A = \rho\rho^{-1}B = B$, quer ρ^{-1} seja uniforme quer não, como resulta da definição $\rho\rho^{-1} = 1$.

60. Teorema. — *Todo o operador é permutável com o seu inverso se ambos forem bem definidos.* Com efeito, seja $A = \rho^{-1}B$ e, consequentemente (n.º 57), $B = \rho A$. Sendo ρ^{-1} bem definido, podemos multiplicar pelo operador ρ^{-1} e teremos: $\rho^{-1}(\rho A) = {}^{-1}B = A$. Logo:

$$\rho\rho^{-1} = 1 = \rho\rho^{-1},$$

c. d. d.

61. Dêste teorema conclui-se que se ρ e ρ^{-1} forem uniformes, serão inversos um do outro: $(\rho^{-1})^{-1} = \rho$.

62. Daqui resulta que de

$$A = \rho^{-1}B \quad \text{se deduz} \quad B = \rho A;$$

e de

$$B = \rho A \quad \text{se deduz} \quad A = \rho^{-1} B.$$

63. Teorema. — *O inverso dum operador aditivo, se fôr bem definido, é também aditivo.*

Seja ρ o operador e ρ^{-1} o seu inverso, ambos uniformes por hipótese. Teremos:

$$\rho(\rho^{-1} A + \rho^{-1} B) = \rho\rho^{-1} A + \rho\rho^{-1} B = A + B.$$

Consequentemente, pelo n.º 62, será

$$\rho^{-1} A + \rho^{-1} B = \rho^{-1}(A + B). \quad \text{Logo}\ldots$$

64. Teorema. — *Se ρ e σ forem dois operadores, teremos sempre: $(\rho\sigma)^{-1} = \sigma^{-1} \cdot \rho^{-1}$ sejam ou não, uniformes σ^{-1} e ρ^{-1}.*

Com efeito:

$$(\rho\sigma) \cdot (\rho\sigma)^{-1} = 1, \quad \text{por def.}$$

Mas (n.º 27),

$$\begin{aligned}(\rho\sigma)(\sigma^{-1} \cdot \rho^{-1}) &= \rho\sigma\sigma^{-1}\rho^{-1} \\ &= \rho(\sigma\sigma^{-1}) \cdot \rho^{-1} \\ &= \rho \cdot 1 \cdot \rho^{-1} \\ &= \rho \cdot \rho^{-1} \\ &= 1\end{aligned}$$

Logo: $(\rho\sigma)^{-1} = \sigma^{-1} \cdot \rho^{-1}$. Conseqùentemente: *O inverso dum produto é igual ao produto dos inversos dos factores, escritos por ordem inversa.*

65. Teorema. — *Todo o operador permutavel com outro, é permutável com o seu inverso, se todos forem uniformes.* Com efeito, se for $\rho\sigma = \sigma\rho$, teremos:

$$\begin{aligned}\rho\sigma^{-1} &= (\sigma^{-1}\sigma)(\rho\sigma^{-1}) = \sigma^{-1}(\sigma\rho)\sigma^{-1} \\ &= \sigma^{-1}(\rho\sigma)\sigma^{-1} = (\sigma^{-1}\rho)(\sigma\sigma^{-1}) = \sigma^{-1}\rho\end{aligned}$$

Logo:

$$\rho\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\rho$$

c. d. d.

66. Teorema. — *Se dois operadores forem permutáveis, os seus inversos também o serão, se forem uniformes.*

Com efeito, se fôr $\rho\sigma = \sigma\rho$, teremos $(\rho\sigma)^{-1} = (\sigma\rho)^{-1}$ e (n.º 64).

$$\sigma^{-1}\,\rho^{-1} = \rho^{-1}\,\sigma^{-1}$$

c. d. d.

Quebrados

67. Ao produto da forma $\rho\sigma^{-1}$, em que ρ, σ e σ^{-1}, são operadores uniformes, aditivos e permutáveis, chamaremos *quebrado* e poremos

$$\rho\sigma^{-1} = \frac{\rho}{\sigma}$$

como é de uso.

68. O *quebrado* assim definido é um operador uniforme, aditivo e permutável com os seus termos.

69. Teorema. — *É verdadeira a relação:* $\sigma\frac{\rho}{\sigma} = \rho$. Com efeito:

$$\sigma\frac{\rho}{\sigma} = \sigma\,(\rho\sigma^{-1}) = \sigma\,(\sigma^{-1}\,\rho) = (\sigma\sigma^{-1})\,\rho = \rho,$$

c. d. d.

70. Escólio 1.º. — Pondo $\tau = \frac{\rho}{\sigma}$, virá: $\rho = \sigma\tau$, como é evidente.

71. Escólio 2.º. — É também evidente que $\frac{a}{a} = 1$.

72. Teorema. — *É verdadeira a relação* $\rho + \frac{\sigma}{\tau} = \frac{\rho\tau + \sigma}{\tau}$. Com efeito:

$$\frac{\rho\tau + \sigma}{\tau} = (\rho\tau + \sigma)\,\tau^{-1} = \rho\tau\tau^{-1} + \sigma\tau^{-1} = \rho + \frac{\sigma}{\tau},$$

c. d. d.

73. Teorema. — *É verdadeira a relação* $\rho\frac{\sigma}{\tau} = \frac{\rho\sigma}{\tau}$. Com efeito:

$$\frac{\rho\sigma}{\tau} = (\rho\,\sigma)\,\tau^{-1} = \rho\,(\sigma\tau^{-1}) = \rho\,\frac{\sigma}{\tau}$$

c. d. d.

74. Igualdade de quebrados. — *Dois quebrados são iguais quando forem iguais os produtos cruzados dos seus termos.*

Com efeito: se fôr

$$\rho\nu = \sigma\tau,$$

virá

$$\rho\nu \, . (\sigma\nu)^{-1} = \sigma\tau(\sigma\nu)^{-1};$$

e

$$\rho\nu \, . \nu^{-1}\sigma^{-1} = \sigma\tau\nu^{-1}\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma\tau\nu^{-1};$$

e

$$\rho\sigma^{-1} = \tau\nu^{-1} \quad \text{ou} \quad \frac{\rho}{\sigma} = \frac{\tau}{\nu},$$

c. d. d.

75. Corolário. — Dêste teorema se conclúi que num quebrado se podem suprimir os factores comuns aos seus termos: $\frac{\rho\tau}{\sigma\tau} = \frac{\rho}{\sigma}$.

76. Adição. — *A adição de quebrados faz-se como na aritmética:*

$$\frac{\rho}{\sigma} + \frac{\tau}{\nu} = \frac{\rho\nu + \sigma\tau}{\sigma\nu}.$$

Com efeito:

$$\frac{\rho\nu + \sigma\tau}{\sigma\nu} = (\rho\nu + \sigma\tau)\,(\sigma\nu)^{-1} = \rho\sigma^{-1} + \tau\nu^{-1} = \frac{\rho}{\sigma} + \frac{\tau}{\nu}$$

c. d. d.

77. Multiplicação. — Com igual facilidade se prova que a regra da multiplicação é a mesma da aritmética.

78. Inverso dum quebrado. — *O operador inverso de* $\frac{\rho}{\sigma}$ *é* $\frac{\sigma}{\rho}$.

Com efeito:

$$\frac{\rho}{\sigma} \cdot \frac{\sigma}{\rho} = \frac{\rho\sigma}{\sigma\rho} = 1.$$

79. Divisão. — A divisão define-se e executa-se como na aritmética, como é fácil de ver também.

80. Potência de expoente negativo. — Agora fàcilmente se define a potência de expoente negativo:

$$\rho^{-n} = \frac{1}{\rho^n}$$

81. Com a mesma facilidade se demonstram também as regras para multiplicar e dividir potências de expoente inteiro, positivo ou negativo.

Os operadores e os números

82. Pelo que fica exposto, se vê que os operadores que sejam bem definidos (bem como os seus inversos) e que sejam aditivos e permutáveis, estão sujeitos a relações de igualdade e às mesmas operações dos números, gosando estes das mesmas propriedades daqueles. As igualdades de operadores nestas condições, podem adicionar-se algèbricamente, podem multiplicar-se e dividir-se, membro a membro, como as igualdades dos números, chegando-se sempre a resultados verdadeiros. O Cálculo Simbólico, se usar só operadores desta natureza, tem fôrça demonstrativa como a Álgebra vulgar.

83. No caso de aparecerem, em dada questão, operadores que não gosem de todas estas propriedades, ainda o Cálculo Simbólico pode ser usado como instrumento de investigação de resultados cuja legitimidade ou ilegitimidade se demonstrará depois por outros métodos.

84. Aos operadores uniformes, aditivos e permutáveis entre si e com os números reais e complexos, e ainda sendo uniformes os seus inversos, chamaremos, para abreviar a linguagem, *operadores numéricos*.

85. Podemos, pois, dizer que o Cálculo Simbólico tem fôrça demonstrativa quando usa só de operadores numéricos.

Inversão dos operadores

86. O conceito de operação inversa, dá origem ao problema da inversão dos operadores, de grande generalidade e importância prática. Êsse problema consiste no seguinte. Dado o operador ρ e uma quantidade (n.º 7) A, determinar a quantidade X tal que

$$\rho X = A$$

87. Conhecido que seja o operador ρ^{-1}, calcula se X efectuando sôbre A as operações indicadas pelo símbolo ρ^{-1}, isto é,

$$X = \rho^{-1} A$$

88. A *existência* e a *forma* das soluções da equação

$$\rho X = A$$

é, em geral, um problema que se estuda na Análise Matemática e que nada tem com o Cálculo Simbólico. Êste apenas intervem no cálculo das soluções.

89. Teorema. — Dada a equação

$$\rho \sigma \ldots v X = A,$$

a sua solução geral tem a forma (n.º 64)

$$X = v^{-1} \ldots \sigma^{-1} \rho^{-1} A$$

Se conhecermos os operadores ρ^{-1}, σ^{-1}, $- v^{-1}$, saberemos calcular X.

Logo: *Para inverter um produto, basta saber inverter os seus factores.*

90. Todas as vezes que seja possível decompor um operador em factores mais simples do que êle, o problema da inversão simplifica-se.

91. É o que sucede com os operadores que teem a forma dum polinómio, como vimos em o n.º 47.

92. Êste teorema é independente do facto dos operadores inversos que nele entram, serem ou não bem definidos e portanto pode aplicar-se sempre, sem receio de chegar a conclusões erradas.

Mas raras vezes sucede que êle baste para resolver um problema dado. Em geral é preciso recorrer ao uso daqueles teoremas que só se aplicam legìtimamente no caso dos operadores e dos seus inversos serem bem definidos, aditivos e permutáveis.

Ora, sendo os próprios operadores de que se vai usar, desconhecidos, pelo menos em parte, é evidente que não podemos saber *à priori* se eles gosam ou não, das propriedades referidas. Poderemos, porém, aplicar-lhe o cálculo, como se êles gosassem dessas propriedades, com a condição de dar por duvidosos os resultados a que chegarmos. A verdade ou falsidade, dos resultados obtidos é já outro problema, por vezes mais simples do que o primeiro. No caso, por exemplo, de se tratar de obter as soluções duma equação dada, bastará verificar se o resultado satisfaz à equação e tem a generalidade requerida.

Equação sem 2.º membro

93. Uma equação da forma $\rho X = 0$, em que ρ é um operador qualquer e X uma função desconhecida, diz-se *sem segundo membro*. Estas equações são muito freqüentes e a sua solução simplifica-se muito por vezes.

94. Assim, se o operador ρ se puder decompor num produto da forma

$$\rho = \rho_1 . \rho_2 \ldots \rho_k$$

sendo $\rho_1, \rho_2 \ldots \rho_k$ tais que

$$\rho_1 . 0 = \rho_2 . 0 = \ldots = \rho_k . 0 = 0$$

as soluções das equações

$$\begin{gathered} \rho_k \, X_k = 0 \\ \rho_{k-1} \, \rho_k \, X_{k-1} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \rho_2 \, \rho_3 \ldots \rho_k \, X_2 = 0 \end{gathered}$$

satisfazem à equação proposta, como é evidente.

95. Se estes factores $\rho_1, \rho_2 \ldots \rho_k$ forem permutáveis entre si, o sistema anterior simplifica-se; ou melhor, as soluções do sistema

$$\begin{array}{c} \rho_1 X_1 = 0 \\ \rho_2 X_2 = 0 \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ \rho_k X_k = 0 \end{array}$$

satisfazem também a equação proposta.

96. Se o operador ρ fôr aditivo, e $X_1, X_2 \ldots X_n$ forem soluções da equação

$$\rho X = 0,$$

a função

$$X = X_1 + X_2 \ldots + X_n$$

também é solução da proposta.

97. Se, além disso, ρ fôr permutável com os números, a função

$$X = A_1 X_1 + A_2 X_2 + - + A_n X_n,$$

onde $A_1, A_2, \ldots A_n$, são constantes arbitrárias, também será solução da proposta.

98. Se fôr dada a equação

$$\rho X = U,$$

onde U é uma função conhecida, e se fôrem X_1 e X_2 tais que

$$\rho X_1 = 0$$

e

$$\rho X_2 = U,$$

será também

$$\rho (X_1 + X_2) = U,$$

caso ρ seja aditivo.

99. E se ρ fôr permutável com os números, será também

$$\rho (A X_1 + X_2) = U,$$

sendo A constante arbitrária.

100. Por esta forma se obtém integrais da equação completa, por meio dos integrais da equação sem 2.º membro.

101. Depois veremos a utilidade que se pode tirar dêstes teoremas, no caso dos operadores diferenciais.

102. Como conseqüência imediata do que fica exposto, se tira o seguinte:

103. Teorema. — *Se* ρ *fôr um operador aditivo, permutável com os números e susceptível de ser aplicado uma infinidade de vezes, e* P(ρ) *um polinómio em* ρ, *a equação*

$$P(\rho)\,X = A \tag{1}$$

admite as raizes das equações (ver n.º 47)

$$\begin{gathered}(\rho - a_1)^{i_1}\, X_1{}^{i_1} = 0 \\ (\rho - a_2)^{i_2}\, X_2{}^{i_2} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ (\rho - a_k)^{i_k}\, X_k{}^{i_k} = 0\end{gathered}$$

quaisquer que sejam $i_1, i_2 \dots i_k$, *inteiros e positivos e sujeitos às limitações*

$$\begin{gathered}i_1 \overline{<} \alpha_1 \\ i_2 \overline{<} \alpha_2 \\ \dots\dots \\ i_k \overline{<} \alpha_k\end{gathered}$$

104. Além disso, a função

$$X = A_1\, X_1{}^{i_1} + A_2\, X_2{}^{i_2} \dots + A_k\, X_k{}^{i_k},$$

quaisquer que sejam as constantes $A_1, A_2 \dots A_k$, *satisfaz à equação* (1).

105. Dada a equação

$$P(\rho)\, X = U, \tag{2}$$

onde U é uma função dada, se X' fôr solução dela, isto é, se fôr

$$P(\rho)\, X' = U,$$

também a função

$$X = X' + A_1 X_1^{\alpha_1} + A_2 X_2^{\alpha_2} + \dots + A_k X_k^{\alpha_k}$$

o será, como é fácil de verificar.

106. Se representarmos por

$$\Sigma \Sigma \frac{A_i}{(X - a_j)^i}$$

a decomposição da função racional $\frac{1}{P(X)}$ em elementos simples, isto é, se

$$\frac{1}{P(X)} = \Sigma \Sigma \frac{A_i}{(X - a_j)^i}.$$

e pusermos

$$y = \Sigma \Sigma \frac{A_i}{(\rho - a_j)^i} U,$$

a função y será conhecida quando soubermos calcular os termos $\frac{A_i}{(\rho - a_i)^i} U$. Supondo que se sabe calcular um valor X_i tal que

$$(\rho - a_j)^{i,} X_i = U \tag{3}$$

para todos os valores de i e para todas as raizes a_j, conheceremos um valor de y, e êste valor satisfaz a equação (2). Com efeito,

$$\begin{aligned}
P(\rho) \Sigma \Sigma A_i X_i &= \Sigma \Sigma P(\rho) A_i X_i \\
&= \Sigma \Sigma A_i P(\rho) X_i \\
&= \Sigma \Sigma A_i . P(\rho) \frac{1}{(\rho - a_j)^i} U \\
&= \Sigma \Sigma A_i . \frac{Po(\rho - a_1)^{\alpha_1} \dots (\rho - a_i)^{\alpha_i} \dots (\rho - a_k)^{\alpha_k}}{(\rho - a_i)^i} U \\
&= Po \Sigma \Sigma A_i (\rho - a_1)^{\alpha_1} \dots (\rho - a_i)^{\alpha_i - i} \dots (\rho - a_k)^{\alpha_k} U \\
&= Po [\Sigma \Sigma A_i (\rho - a_1)^{\alpha_i} \dots (\rho - a_i)^{\alpha_i - i} \dots (\rho - a_k)^{\alpha_k}] U \\
&= U
\end{aligned}$$

visto que $P(A) \Sigma \Sigma \frac{X_i}{(X - a_j)^i} = 1$.

107 Conseqüentemente, sabendo calcular um valor para a incógnita de cada uma das equações (3), podemos obter imediatamente um valor para a incógnita da equação proposta.

108. NOTA: Para aplicar tôda a doutrina dos n.^{os} 98, 99, 100, 101 e 102, basta que ρ seja aditivo, permutável com os números e susceptível de ser aplicado à mesma função uma infinidade de vezes, e além disso que $\rho \, . \, o = o$.

109. Daqui resulta o seguinte *teorema: A equação simbólica*

$$\rho \, (\rho) \, A = U$$

onde ρ é um operador nas condições expressas em o número anterior, pode resolver-se simbòlicamente em ordem a X *e na expressão obtida, substituir $\frac{1}{P\,(\rho)}$ pelo seu desenvolvimento em elementos simples. Sabendo interpretar a expressão simbólica obtida, o resultado correspondente é solução da equação proposta.*

Esta solução, porém, pode não ser a mais geral.

(Continua).

DOUTOR PACHECO DE AMORIM.

Contribuição para o estudo das Influências lunares na Declinação Magnética

Alguns meses após a publicação, na *Revista da Faculdade de Ciências da Universidade de Coimbra* (vol. II, n.º 3 de 1932), do nosso estudo àcêrca das — *Influências lunares sôbre o Magnetismo terrestre* —, e quando já estava no prelo a nossa — *Contribuição para o estudo das influências lunares sôbre fenómenos geofísicos* —, publicada no vol. IV — N.º 1 de 1934 da mesma Revista, recebemos de Mr. J. Egedal uma carta contendo sugestões quanto à orientação que melhor conviria dar a êstes trabalhos, orientação que não podia deixar de merecer o nosso apoio, não só por motivo da categoria científica de quem a propunha, mas ainda, e sobretudo, porque a achámos fundamentada num critério muito ponderável.

Quando procedemos àqueles estudos, aproveitámos os elementos catalogados nas publicações do Magnetismo terrestre do Instituto Geofísico, sem quaisquer alterações. Desta forma, servimo-nos dos mapas referidos à hora e ao dia solar, contando o mês lunar pela idade da lua, ou, seja, de novilúnio a novilúnio.

Mais rigoroso seria transformar êsses mapas noutros, referidos, não à hora e ao dia solar, mas, sim, à hora e ao dia lunar, ou, mais rigorosamente ainda, proceder a uma nova tabulação das curvas dos magnetógrafos, referindo-a às horas e dias lunares, visto não coincidirem com as horas e dias solares.

Ambos êstes processos demandam muito tempo para a organização de novos mapas; entretanto, seguindo a orientação proposta por Mr. J. Egedal, resolvemos executar esse trabalho, não excluindo, como no primeiro, os dias perturbados e, bem assim, referindo os nossos resumos e conclusões a mapas que reorganizámos, aproveitando, para simplicidade, os dados das publicações do Instituto Geofísico, e deslocando, por aproximação, para horas lunares os valores registados em horas solares. Para êsse fim, tomando para dia lunar o tempo decorrido entre duas passagens sucessivas da lua pelo meridiano inferior, contamos, para cada mês lunar, os dias lunares a partir daquele em que a lua faz, à hora do meio dia, — ou, seja, no novilúnio —, a sua passagem pelo meridiano superior; e assim, para cada mês, iniciar-se-à o primeiro dia doze horas antes da passagem da lua (na fase da lua nova) por êste meridiano.

Assim procedendo, encontrámos gradualmente a confirmação das nossas mais importantes conclusões anteriores, como veremos pela análise dos mapas que elaborámos e dos gráficos que lhes correspondem.

É muito morosa a transformação dos mapas das publicações anuais do Instituto Geofísico nêstes outros que obtivemos em harmonia com a forma acima exposta. Por tal motivo apenas nos foi permitido concluir êsse trabalho para a Declinação, não nos tendo sido possível proceder concomitantemente a idêntico estudo relativamente à Componente horizontal, por nos falhar o tempo para tanto. Teremos que o reservar para mais tarde. A análise dos elementos respeitantes à Declinação, pela clareza com que nos falam, merecem, — parece-nos —, ser divulgados.

No resumo do nosso estudo, — *Influências lunares sôbre o Magnetismo Terrestre* — (*Revista da Faculdade de Ciências*, vol. II-n.º 3, 1932, pág. 192), chegámos, entre outras conclusões, à seguinte:

1.ª) — « As variações diurnas lunares desviam-se da variação média no sentido positivo, na vizinhança do novilúnio e do plenilúnio, e no sentido negativo, na vizinhança dos quartos. »

Se confrontarmos entre si os valores fornecidos pelo mapa n.º 1, no qual se expõem os desvios médios da variação diurna em relação à média anual, não só para cada um dos anos (1921-25), como também para o agrupamento dêsses cinco anos, confirma-se com tôda a nitidez aquela conclusão, pois que, como no referido mapa se observa, — e mais nitidamente ainda no gráfico I que o reproduz —, predominam os desvios positivos na vizinhança da lua nova e da lua cheia, enquanto os desvios negativos se acentuam na vizinhança dos quartos.

Aproximando, pois, os dados dêste novo estudo com os que fôram publicados em 1932, vemos que se mantém em plena concordância quanto ao sentido dos desvios da variação da Declinação Magnética. Há, entretanto, uma pequena discordância quanto à posição do desvio máximo que, encontrando-se, como vimos no nosso primeiro trabalho, na vizinhança da lua cheia (1), o vamos agora achar na passagem da lua nova.

Desenvolvemos, porém, a curva em períodos de 7 dias, correspondentes aos períodos de influência de cada uma das fases, segundo a orientação de D. G. Dalgado, por nós seguida no trabalho, — *Contribuição para o estudo das influências lunares sôbre fenómenos geofísicos* —, publicado, em 1934, na *Revista da Faculdade de Ciências* (vol. IV, n.º 1), isto é, dividindo cada lunação em quatro períodos, começando o *primeiro* três dias antes da lua nova e acabando três dias depois, *o segundo* três dias antes e três dias depois do 1.º quarto (crescente), e equivalentemente para a lua cheia (3.º período) e para o quarto minguante (4.º período). Fazendo isso, na curva dos desvios da variação já não se nota a discordância acima pontada pois que, como se verifica no mapa n.º 1 e no gráfico II, é no período de influência da lua cheia (3.º período) que se regista o desvio máximo da variação.

Uma outra discordância se manifesta, ao compararmos a nossa segunda conclusão de 1932 com a curva agora obtida, com as médias dos desvios de cada grupo de sete dias, correspondentes a cada uma das fases. Com efeito, vimos em 1932 que a variação mínima se observava na passagem do quarto crescente, — e isso mesmo se verifica hoje no gráfico I —, ao passo que o gráfico II, assente na divisão em ciclos de 7 dias, regista êsse mínimo no período de influência do quarto minguante (4.º período).

Poderemos atribuir estas discordâncias ao facto de não termos nêste, como no primeiro trabalho, excluido os dias perturbados? Para tal concluirmos parece-nos indispensável verificar se, nesta diminuta série de anos, se encontrará alguma relação entre as fases da lua, o número das perturbações e a sua intensidade, exame que a falta de tempo não permitiu, ficando assim impossivel tirar conclusões a tal respeito.

A par da confirmação a que acima aludimos, quanto à marcha da variação diurna lunar da Declinação Magnética no decor-

---

(1) Veja a 2.ª conclusão da pág. 192 da *Revista da Faculdade de Ciências*, vol. II — n.º 3, 1932.

rer das fases do nosso satélite, outros elementos, não menos interessantes, conseguimos colher relativamente à evolução dos seus valores horários.

De facto, analizando o mapa n.º 2 e, melhor ainda, os gráficos da estampa III, verifica-se com tôda a nitidez o seguinte:

1.º) — O máximo valor da Declinação regista-se no novilúnio, 3 horas após a passagem da lua pelo meridiano inferior; e, no plenilúnio, 2 horas após a sua passagem pelo meridiano superior;

2.º) — Nos quartos, antecedem-se êsses máximos de 3 horas à passagem pelo meridiano inferior, no crescente; pelo meridiano superior, no minguante;

3.º) — Os valores mínimos registam-se, no novilúnio e no plenilúnio, 5 horas antes das passagens, respectivamente, pelos meridianos inferior e superior;

4.º) — No minguante, desenha-se o valor mínimo 2 horas depois da passagem da lua pelo meridiano inferior e, no crescente, da uma às duas horas após a sua passagem pelo meridiano superior.

Em resumo, os valores máximos, no novilúnio e no plenilúnio, sofrem um atrazo de 2 a 3 horas em relação à sua passagem pelo meridiano, enquanto que, nos quartos, em vez dum atrazo, há um avanço correspondente também a 3 horas; inversamente, registam-se os valores mínimos, no plenilúnio e no novilúnio, com uma antecedência de 5 horas e, nos quartos, com um atrazo de uma a duas horas sôbre a passagem da lua pelo meridiano respectivo (superior ou inferior).

Resulta, em última análise, do que fica exposto, o reconhecimento de que as curvas dos valores horários da Declinação Magnética se desenvolvem em sentido inverso, tanto no período de influência da lua nova em relação ao da lua cheia, como entre o do quarto crescente em relação ao do quarto minguante.

Artur Dias Pratas.

Observador Chefe no Instituto Geofísico

DECLINAÇÃO

VARIAÇÃO DIURNA

Dias	1922	1923	1923	1924	1925	1921-25
	′	′	′	′	′	′
1	+ 0,44	+ 1,02	+ 0,39	+ 0,09	+ 0,53	+ 0,49
2	1,21	0,22	0,82	1,01	0,45	0,74
3	0,71	0,14	1,17	1,27	+ 0,26	0 71
4	+ 0,58	0,46	0,71	1,33	− 0,18	0,58
5	− 0,35	1,04	0,52	0,23	+ 0,24	0,34
6	+ 0,29	+ 0,23	0,88	+ 1,14	0,44	+ 0,60
7	0,02	− 0,34	0,38	− 0,41	+ 0,25	− 0,02
8	2,12	0,52	+ 0,22	0,46	− 0,62	+ 0,15
9	+ 0,08	0,68	− 0,50	0,64	1,14	− 0,57
10	− 1,10	1,04	0,68	0,85	1,12	0,96
11	− 0,77	− 0,12	1,23	1,28	1,07	0,89
12	+ 0,96	+ 1,11	− 1,00	0,95	0,69	0,11
13	0,09	0,25	+ 0,05	0,96	0,59	− 0,23
14	0,62	0,27	− 0,14	0,40	− 0,10	+ 0,05
15	+ 0,12	0,47	− 0,26	− 0,26	+ 0,71	0,16
16	− 0,28	1,05	+ 0,82	+ 0,37	0,50	0,49
17	− 0,23	+ 0,97	1,12	1,09	0,65	0,72
18	+ 1,12	− 0,73	1,21	1,11	0,61	0,66
19	+ 0,41	+ 0 21	+ 0,08	0,72	0,73	+ 0,43
20	− 0,33	+ 0,15	− 0,32	0,21	0,14	− 0,05
21	0,16	− 0,85	0,35	+ 0,41	0,19	0,17
22	0,59	0,69	0,70	− 1,16	+ 0,40	0,55
23	0,67	1,01	0,18	0,56	− 0,25	0,53
24	0,14	0,25	0,65	− 0,75	0,42	0,44
25	0,60	1,04	1,27	+ 0,32	0,06	0,53
26	− 1,52	+ 0,97	0,25	0,63	0,66	− 0,43
27	+ 0,23	+ 0,34	0,19	+ 0,33	− 0,30	+ 0,08
28	− 0,20	+ 0,62	− 0,33	− 0,23	+ 0,08	− 0,26
1.° período	+ 0,24	+ 0,25	+ 0,45	+ 0,53	+ 0,18	+ 0,33
2.° »	− 0,05	− 0,38	− 0,15	− 0,49	− 0,43	− 0,29
3.° »	+ 0,41	+ 0,71	+ 0,38	+ 0,12	+ 0,28	+ 0,38
4.° »	− 0,60	− 0,56	− 0,69	− 0,21	− 0,03	− 0,42

Mapa n.° 1

VALORES HORÁRIOS DA DECLINAÇÃO

	Anos	1h	2h	3h	4h	5h	6h	7h	8h	9h	10h	11h	P. M. super.	1h	2h	3h	4h	5h	6h	7h	8h	9h	10h	11h	P. M. infer.	Média (a)
1.° Período — Lua Nova	1921	5,7	6,2	6,3	6,1	5,4	4,6	3,9	3,3	2,8	2,6	2,5	2,3	2,3	2,4	2,3	2,2	1,8	1,5	1,5	1,6	2,0	2,8	3,8	5,2	3,6
	1922	4,6	5,2	5,3	4,8	4,1	3,5	2,8	2,1	1,8	1,7	1,7	1,7	1,7	1,7	1,6	1,5	1,4	1,2	1,0	1,1	1,6	2,4	3,3	4,6	
	1923	6,6	7,2	7,2	7,4	6,0	5,4	4,9	4,5	4,2	4,1	3,9	3,8	3,9	4,0	3,8	3,7	3,5	3,2	2,9	2,8	3,3	3,9	4,9	6,1	
	1924	5,0	5,6	5,6	5,1	4,5	3,9	3,1	2,8	2,5	2,2	2,1	1,9	1,7	1,6	1,6	1,4	1,2	1,1	0,9	1,0	1,3	2,1	3,2	4,6	
	1925	6,5	7,1	7,4	7,1	6,6	5,9	5,2	4,6	4,3	4,0	3,7	3,7	3,8	3,7	3,6	3,5	3,2	2,8	2,5	2,5	2,9	3,8	5,0	6,2	
	Médias:	5,7	6,3	6,4	6,1	5,3	4,7	4,0	3,5	3,1	2,9	2,8	2,7	2,7	2,7	2,6	2,5	2,2	2,0	1,8	1,8	2,2	3,0	4,0	5,3	
	desvios da média (a)	+2,1	+2,7	+2,8	+2,5	+1,7	+1,1	+0,4	−0,1	−0,5	−0,7	−0,8	−0,9	−0,9	−0,9	−1,0	−1,1	−1,4	−1,6	−1,8	−1,8	−1,4	−0,6	+0,4	+1,7	
2.° Período — Q. Crescente	1921	4,8	4,1	3,5	3,1	2,6	2,4	2,0	2,0	2,1	2,0	1,9	2,0	2,1	1,9	2,3	2,9	3,6	4,7	5,6	6,1	6,2	6,0	5,6	5,0	3,7
	1922	3,4	2,7	2,4	2,2	1,9	1,7	1,6	1,7	1,7	1,8	1,8	1,7	1,6	1,6	2,0	2,5	3,2	4,0	4,8	5,3	5,3	5,1	4,6	3,6	
	1923	5,1	4,8	4,5	4,0	3,8	3,7	3,6	3.6	3,6	3,6	3,8	3,8	3,6	3,7	3,7	4,2	4,8	5,4	6,3	7,0	7,1	6,8	6,2	5,6	
	1924	3,7	3,2	2,7	2,4	2,2	1,9	1,8	1,6	1,7	1,5	1,4	1,3	1,2	1,3	1,6	2,0	2,6	3,4	4,0	4,6	5,0	5,0	4,6	3,9	
	1925	5,8	5,2	4,7	4,3	4,0	3,7	3,5	3,4	3,3	3,3	3,2	3,1	2,9	2,9	3,2	3,7	4,5	5,5	6,5	7,1	7,3	7,1	6,5	5,8	
	Médias:	4,6	4,0	3,6	3,2	2,9	2,7	2,5	2,5	2,5	2,4	2,4	2,4	2,3	2,3	2,6	3,1	3,7	4,6	5,4	6,0	6,2	6,0	5,5	4,8	
	desvios da média (a)	+0,9	+0,3	−0,1	−0,5	−0,8	−1,0	−1,2	−1,2	−1,2	−1,3	−1,3	−1,3	−1,4	−1,4	−1,1	−0,6	0,0	+0,9	+1,7	+2,3	+2,5	+2,3	+1,8	+1,1	
3.° Período — Lua Cheia	1921	2,5	2,3	2,2	2,3	2,2	1,8	1,6	1,6	2,0	2,9	3,8	5,0	5,8	6,4	6,2	5,7	5,0	4,2	3,6	3,1	2,5	2,3	2,5	2,5	3,5
	1922	1,5	1,6	1,7	1,5	1,3	1,1	1,2	1,4	2.0	2,9	3,9	5,0	5,7	5,9	5,4	4,7	4,0	3,1	2,4	1,9	1,6	1,5	1,2	1,3	
	1923	3,7	3,6	3,5	3,4	3.2	3,0	2,8	3,0	3,4	4,1	5,1	6,1	6,8	7,1	7,0	6,4	5,7	5,1	4,6	4,1	3,9	3,7	3,7	3,6	
	1924	1,9	1,8	1,7	1,3	1,1	0,9	0,8	0,9	1,2	2,0	3,1	4,1	4,8	5,2	5,1	4,6	4,0	3,3	2,9	2,5	2,2	2,0	1,8	1,9	
	1925	3,7	3,7	3,5	3,3	3,1	2,8	2,5	2,4	2,7	3,3	4,4	6,1	7,1	7,5	7,4	6,9	5,9	5,2	4,5	4,0	3,8	3,6	3,6	3,6	
	Médias:	2,7	2,6	2,5	2,4	2,2	1,9	1,8	1,9	2,3	3,0	4,1	5,3	6,0	6,4	6,2	5,7	4,9	4,2	3,6	3,1	2,8	2,6	2,6	2,6	
	desvios da média (a)	−0,8	−0,9	−1,0	−1,1	−1,3	−1,6	−1,7	−1,6	−1,2	−0,5	+0,6	+1,8	+2,5	+2,9	+2,7	+2,2	+1,4	+0,7	+0,1	−0,4	−0,7	−0,9	−0,9	−0,9	
4.° Período — Q. Minguante	1921	1,6	1,3	1,4	1,9	2,7	3,6	4,5	5,3	5,7	5,7	5,2	4,6	4,0	3,5	3,1	2,8	2,6	2,3	2,3	2,3	2,2	2,1	1,9	1,6	3,3
	1922	1,3	1,2	1,5	2,0	2,8	3,8	4,4	4,8	5,0	4,8	4,3	3,7	3,0	2,5	1,9	1,7	1,5	1,3	1,2	1,3	1,3	1,4	1,3	1,2	
	1923	2,9	2,9	3,3	3,7	4,2	5,0	5,8	6,3	6,5	6,3	5,8	5,3	4,7	4,3	4,0	3,8	3,6	3,5	3,3	3,3	3,2	3,2	3,1	2,9	
	1924	0,9	1,0	1,2	1,8	2,4	3,4	4,2	4,9	5,0	4,9	4,4	4,0	3,5	2,9	2,5	2,1	1,9	1,6	1,5	1,5	1,4	1,3	1,1	0,9	
	1925	2,7	2,5	2,7	3,0	3,7	4,7	5,7	6,6	6,9	7,0	6,4	5,4	4,6	4,1	3,7	3,2	2,9	2,9	2,9	3,0	2,9	2,9	3,0	2,9	
	Médias:	1,9	1,8	2,0	2,5	3,2	4,1	4,9	5,6	5,8	5,7	5,2	4,6	4,0	3,5	3,0	2,7	2,5	2,3	2,2	2,3	2,2	2,2	2,1	1,9	
	desvios da média (a)	−1,4	−1,5	−1,3	−0,8	−0,1	+0,8	+1,6	+2,3	+2,5	+2,4	+1,9	+1,3	+0,7	+0,2	−0,3	−0,6	−0,8	−1,0	−1,1	−1,0	−1,1	−1,1	−1,2	−1,4	

Mapa n.° 2

DECLINAÇÃO MAGNÉTICA

VARIAÇÃO DIURNA (1921-1925)

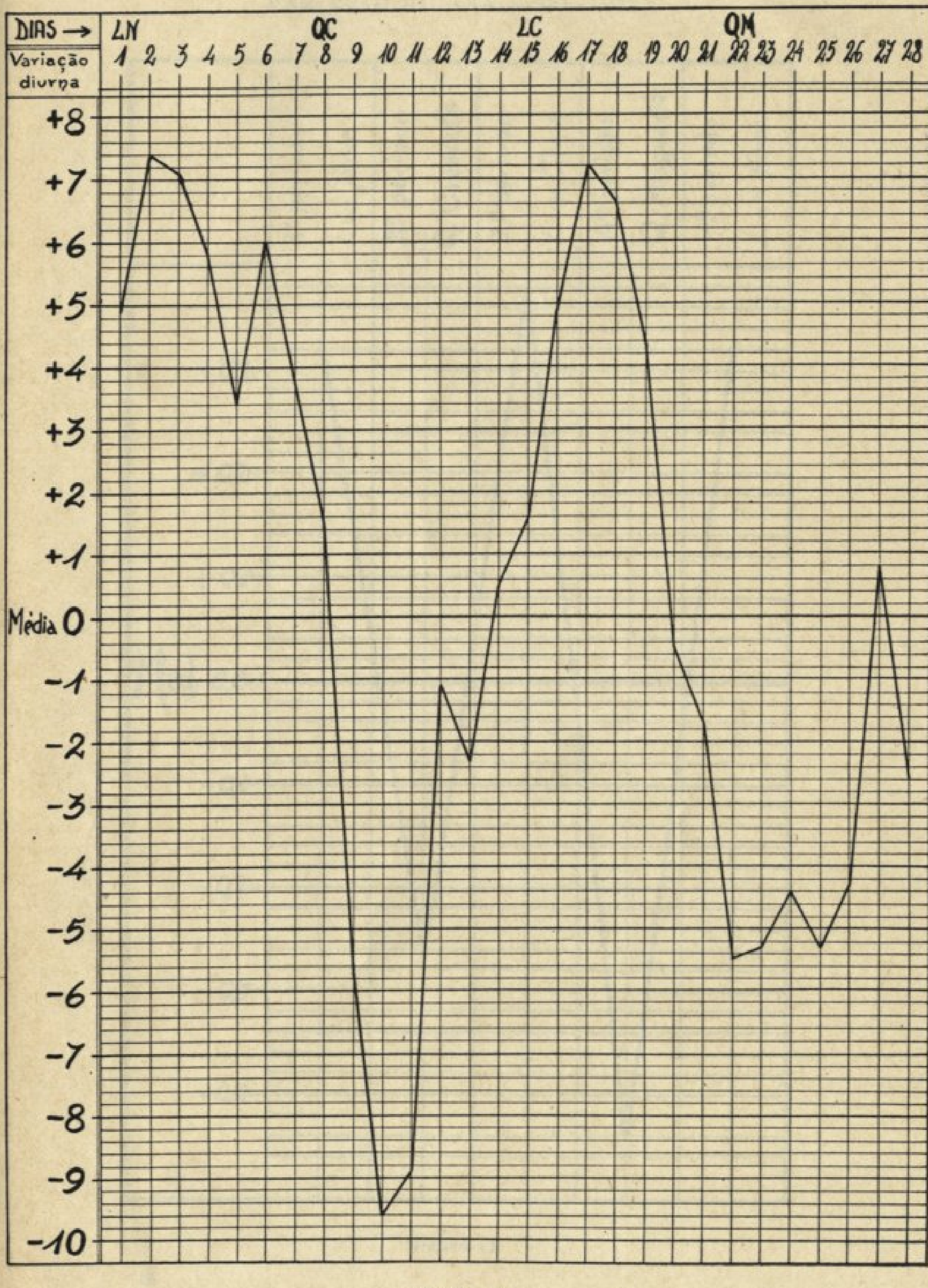


Gráfico I

DECLINAÇÃO MAGNÉTICA

VARIAÇÃO DIURNA (1921-1925)

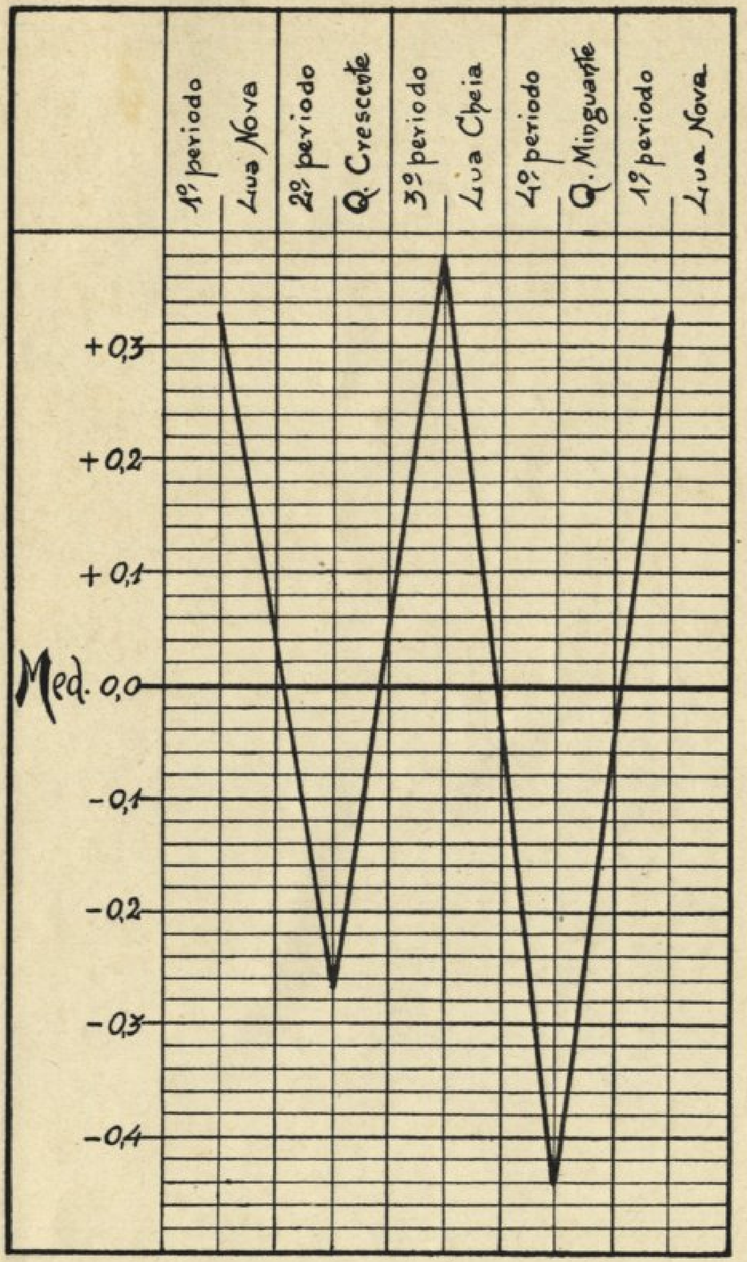


Gráfico II

VALORES HORÁRIOS DA DECLINAÇÃO MAGNETICA

MÉDIAS DOS ANOS (1921-1925)

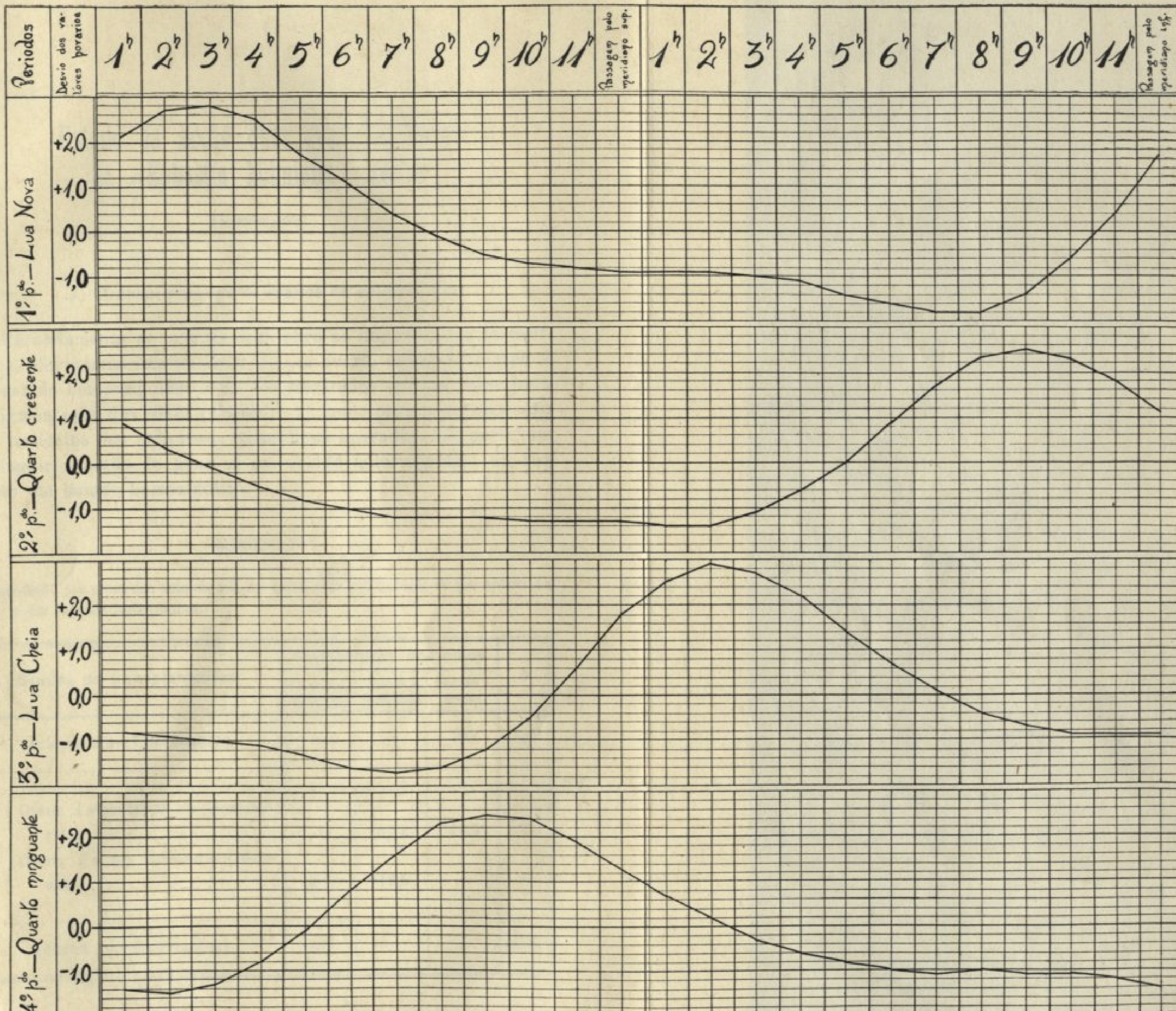


Gráfico III

Estudo da acção dum gene pleiotropo na «Ephestia kühniella» Zeller

(CONTINUAÇÃO)

b) **Transplantações de ovários de animais *A a*.**

Paralelamente ao que fizemos para as implantações de testículos, efectuámos implantações de um ovário contendo o gene *A* em estado heterozigótico *A a*. Os resultados obtidos, quer para a pigmentação dos olhos (Quadro IV), quer para a pigmentação dos testículos dos individuos masculinos operados, não permitem distinguir a acção do gene *A* em estado heterozigótico da sua acção em estado homozigótico.

QUADRO IV

Pigmentação dos olhos dos animais *aa*, operados com implantação de um ovário *Aa* e dos animais testemunhos.

Grupos de transplantações	Pigmentação dos olhos			n
	Classe 1 vermelhos	Classe 2 castanhos	Classe 3 pretos	
Animais *A a* (Testemunhos)	—	—	100	147
Transplantações: Ovário *A a* em larvas *a a* (desenvolvido)	—	85,8	14,2	7
Transplantações: Ovário *A a* em larvas *a a* (resorvido)	87,5	12,5	—	8
Animais *aa* (Testemunhos)	100	—	—	116

c) Transplantações de dois ovários *A A*.

Vimos que os efeitos das implantações dos ovários não eram quantitativamente equivalentes aos das implantações das gonadas masculinas. Com o fim de investigar qual a causa de tal diferença, efectuámos uma série de implantações simultâneas de ovários *A A* em larvas *a a*.

QUADRO V

Pigmentação dos olhos dos animais *a a*, operados com implantação de dois ovários *A A*, e dos animais testemunhos.

	Grupos de transplantações	Pigmentação dos olhos: Classe 1 vermelhos	Classe 2 castanhos	Classe 3 pretos	n
	Animais *A A* (Testemunhos)	—	—	100	182
Transplantações	Dois ovários *A A* em larvas *a a*. (Os dois ovários impl. desenvolvidos)	—	—	100	9
	Dois ovários *A A* em larvas *a a*. (Um só ovário impl. desenvolvido) . .	—	100	—	8
	Dois ovários *A A* em larvas *a a*. (Os dois ovários impl. resorvidos) . .	90	10	—	10
	Animais *a a* (Testemunhos)	100	—	—	143

Dêste modo foram operadas 170 larvas no último período larvar, das quais 27 atingiram o estado de imago.

A dissecção dos animais obtidos revelou que, em alguns dêles, os dois ovários implantados se tinham desenvolvido, noutros apenas um, noutros ainda, nenhum dos ovários se desenvolvera. Quási sempre os ovários implantados cresciam conjuntamente com os testículos e ovários do animal hospedeiro. Nas Fig. 9 e 10, estão representados dois casos de ovários implantados coalescentes com os testículos do hospedeiro. O desenvolvimento dos ovários implantados é contudo bem diferente nos dois casos. No caso representado na Fig. 11, os dois ovários implantados cresceram conjuntamente com os ovários do hospedeiro, distinguindo-se bem dêstes pelo seu menor desenvolvimento.

A Fig. 12 mostra-nos dois ovários implantados, bem desenvolvidos e livres na cavidade abdominal do hospedeiro.

Os ovários implantados eram, em regra, de dimensões menores que os do hospedeiro que por sua vez se encontravam algo atrofiados. Uma diferença das dimensões dos implantados, com os sexos dos hospedeiros, observada por MEISENHEIMER e por KOPEČ, não foi por nós encontrada.

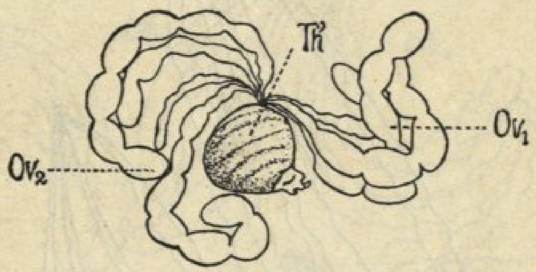


FIG. 9 — Dois ovários *A A* implantados, em coalescência pelas câmaras terminais com o testículo *aa* do hospedeiro. Ov_1 e Ov_2, ovários implantados; *Th*, testículo do hospedeiro. $\times$ 20.

No Quadro V vão reunidos os resultados obtidos pela implantação de dois ovários. Os animais nos quais os dois ovários implantados se desenvolveram, apresentavam, sem excepção, os seus olhos com côres que os faziam incluir na classe 3 de pigmentação e que iam até 6 *pp* e 7 *pp*, isto é, preto normal do fenotipo de *A A*.

Reunimos num segundo grupo, aqueles animais nos quais um só dos ovários implantados se desenvolveu e cujos olhos possuiam pigmentações que estão dentro dos limites da classe 2 e portanto castanhos, tais como os obtidos nas implantações de um só ovário.

No terceiro grupo incluímos os animais, nos quais implantado algum se desenvolveu. Apresentavam, com excepção de um só, olhos pertencendo à classe 3, olhos vermelhos, não modificados. O caso de excepção, olhos castanhos, classe 2, é explicável, como já anteriormente vimos, pela acção dos ovários implantados antes da sua reabsorção.

Verificámos assim que a acção de dois ovários implantados é quantitativamente equivalente à resultante da implantação de um testículo. Ficámos agora com elementos suficientes para a discussão da diferença de acção de um ovário e de um testículo, que faremos adiante.

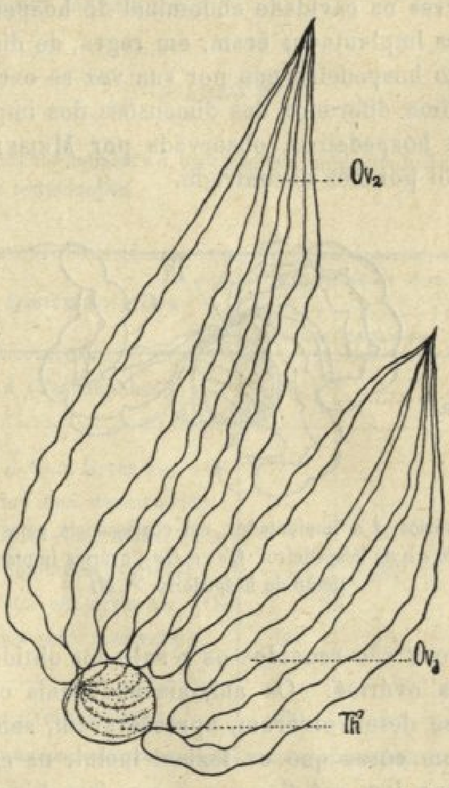


Fig. 10 — Dois ovários *A A* implantados, em relação com o testículo *a a* do hospedeiro. Todos os ovaríolos bem desenvolvidos. Ov_1 e Ov_2, ovaríolos implantados; *Th*, testículo do hospedeiro. × 14

A acção sobre os testículos dos animais ♂ hospedeiros verificava-se também. Os testículos pigmentavam-se e na sua maior parte pertenciam às classes de pigmentação 3 a 5; mas o pequeno número de casos não nos permite estabelecer a comparação dos efeitos, sôbre os testículos, das implantações de um e de dois ovários, que aliás resulta claramente pela comparação dos efeitos da modificação da pigmentação dos olhos, de mais fácil e segura avaliação.

d) Descendência dos animais $a\,a$, com olhos escuros, obtidos por implantações de gonadas.

CASPARI efectuou cruzamentos de dois indivíduos, um ♀ e outro ♂, genotipicamente $a\,a$ e fenotipicamente de olhos pretos, pela implantação de testículos $A\,A$, com animais $a\,a$ normais. As gonadas dos primeiros, não tendo sido afectadas pela operação produzirão normalmente óvulos a e espermatozoides a. Com

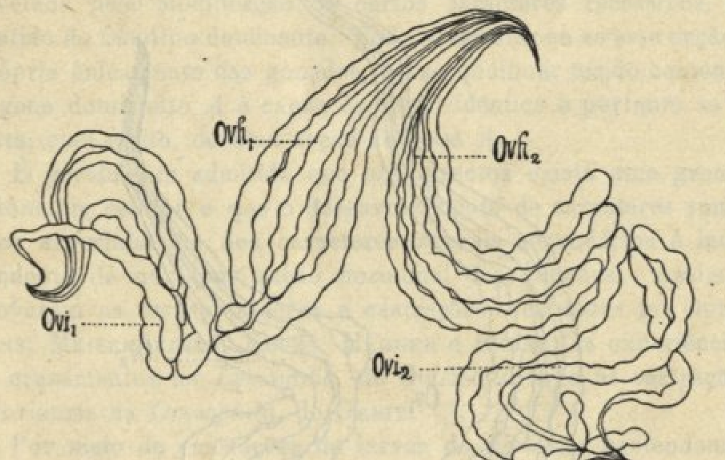


FIG. 11 — Dois ovários implantados em relação com os ovários do animal hospedeiro. Ovi_1 e Ovi_2, ovários implantados; Ovh_1 e Ovh_2, ovários do hospedeiro. $\times$ 14.

efeito, de ambos os cruzamentos, CASPARI obteve ùnicamente borboletas com olhos vermelhos.

Tentámos tambem cruzar alguns dos animais de olhos castanhos, obtidos por implantações de ovários. Os cruzamentos tornavam-se dificeis em virtude das operações afectarem algumas vezes as gonadas e diminuirem, em geral, a vitalidade dos animais. Conseguimos num único caso obter 83 borboletas, do cruzamento de uma fêmea genotipicamente $a\,a$, operada com implantação de um ovário e cujos olhos possuiam a coloração 7 $p\,l$ (castanho escuro), com um macho $a\,a$ normal. Todas as borboletas da descendência obtida, apresentavam os olhos vermelhos e eram portanto genotipicamente $a\,a$.

Assim se prova que a modificação da côr dos olhos não foi transmitida à descendência e também que os indivíduos de olhos escuros obtidos têm a constituição genotípica *a a* e portanto a

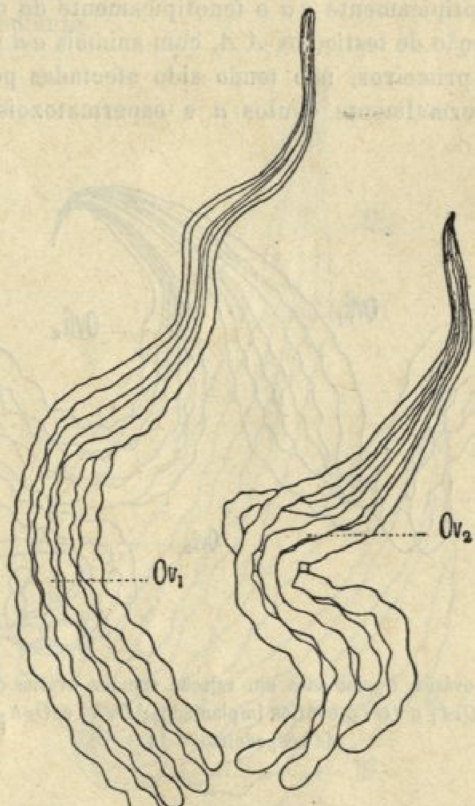


FIG. 12 — Dois ovários implantados Ov_1 e Ov_2, desigualmente desenvolvidos e livres na cavidade abdominal do hospedeiro. $\times$ 14.

modificação é devida, sem dúvida, à implantação das gonadas, quer masculinas, quer femininas.

CAPITULO V

Castração de larvas. Implantação de testículos em larvas castradas.

Demonstrámos nas experiências dos capítulos anteriores a existência de uma acção entre as gonadas implantadas e o organismo hospedeiro, de constituição genética diferente. Essa acção era revelada pela modificação de certos caracteres recessivos, no sentido do fenotipo dominante. Pode preguntar-se se essa acção é própria ùnicamente das gonadas, ou se qualquer tecido contendo o gene dominante A é capaz de acção idêntica e portanto se se trata, com efeito, de uma acção do gene A.

É geralmente admitido que nos insectos existe uma grande autonomia celular e que o desenvolvimento de caracteres somáticos especialmente dos caracteres sexuais secundários é independente de qualquer acção hormonal das gonadas. Assim o provaram as transplantações e castrações efectuadas po OUDEMANS, MEISENHEIMER, KOPEČ, HEGNER e REGEN, as experiências de cruzamentos na *Lymantria,* de GOLDSCHMIDT e as castrações embrionais na *Drosophila,* de GEIGY.

Por meio de castrações de larvas da *Ephestia* pretendemos pois, verificar se o aparecimento dos caracteres somáticos determinados pelo gene A era ou não dependente das gonadas.

Para concluir se outros tecidos, que não os das gonadas, contendo o gene A, seriam capazes de acções análogas às das gonadas, bastaria proceder a implantações de tecidos ou orgãos não sujeitos à metamorfose. Para êsse efeito pareceram-nos convenientes os discos imaginais e os gânglios nervosos. O método era no entanto delicado e dificil, já pela implantação em si, já pela dificuldade de verificação da presença dos tecidos implantados, requerendo quási sempre o exame histológico. Abandonámos êste método e preferimos o seguinte: Verificado que fôsse (por castração) que o aparecimento dos caracteres determinados pelo gene A era independente das gonadas, efectuavamos implantações de testículos $a\,a$ em larvas $A\,A$ ou $a\,A$ prèviamente castradas. Assim sujeitava tecidos com o gene recessivo à acção dos tecidos dum organismo, com excepção das gonadas, contendo o gene dominante A.

Os trabalhos de castração de insectos de OUDEMANS (1898), MEISENHEIMER (1907, 1909) e Kopeč (1908, 1910, 1911) sôbre lepidópteros e REGEN (1909, 1910) sôbre o *Gryllus campestris*, foram efectuados com o fim de demonstrar que o aparecimento e desenvolvimento dos caracteres sexuais secundários eram independentes das gonadas. Com efeito todos estes autores observaram que das larvas castradas se desenvolviam insectos adultos que diferiam dos normais, apenas na falta de gonadas. A implantação de gonadas em animais de sexo diferente não influía também no desenvolvimento normal dos caracteres sexuais secundários.

São dois os métodos geralmente seguidos para a castração de larvas de insectos: extracção das gonadas por meiò de uma fina pinça introduzida por uma incisão dorsal no segmento correspondente ou destruïção das gonadas *in loco* por cauterização.

Seguimos o primeiro dêstes métodos e procedemos à castração de larvas masculinas no fim do 5.º e princípio do 6.º estado larvar. A castração de larvas femininas, mostrou-se extremamente difícil, pois as pequenas dimensões dos ovários e a coloração que os não distingue dos tecidos adiposos circunjacentes dificultam a sua localização e extracção. Mas, estabelecida que seja a semelhança de acções dos organismos masculinos e femininos sôbre os implantados de constituição genética diferente, são-nos suficientemente comprovativas as castrações de larvas masculinas.

A castração de larvas ♂ não oferece dificuldades de maior. Uma incisão transversal na parte média dorsal do quinto segmento do abdómen, permitia a introdução duma pinça de pontas extremamente finas com a ajuda da qual se retiravam os dois testículos, fáceis de reconhecer pela sua pigmentação. O corte do coração ocasionava a perda de grande quantidade de hemolinfa e conseqüentemente uma elevada mortalidade dos animais castrados. Das 115 larvas *A A* castradas, obtivemos apenas 6 insectos adultos e que não apresentavam quaisquer alterações em relação aos insectos normais. Os olhos apresentavam se pretos, normalmente pigmentados. A presença ou ausência das gonadas não influi, pois, na pigmentação dos olhos.

Procedemos depois à implantação de testículos *a a* em larvas *A A* castradas. Pela mesma incisão efectuada para a extracção dos testículos se introduzia um testículo *a a*. Assim obtivemos apenas 8 insectos, provenientes das 190 larvas operadas. Os animais obtidos foram cuidadosamente dissecados e depois de verificada a sua completa castração, extraíam-se os testículos implantados e media-se a sua pigmentação. Na Fig. 13, vão representados dois dos testículos implantados que obtivemos.

A média das pigmentações dos testículos dos oito animais eclodidos, nesta série de operações, está compreendida entre 4 e 5. A média não é, pois, distinta da obtida por implantação em larvas não castradas.

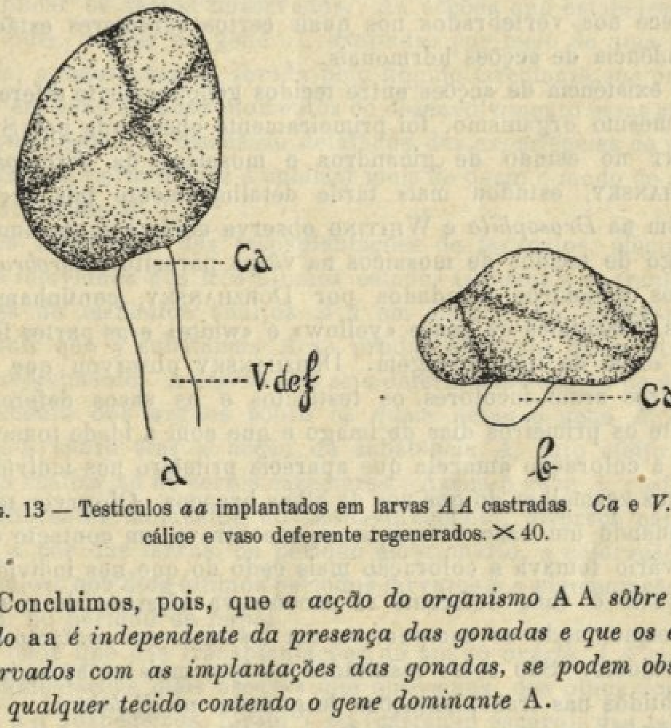


Fig. 13 — Testículos *aa* implantados em larvas *AA* castradas. *Ca* e *V. def.*, cálice e vaso deferente regenerados. × 40.

Concluimos, pois, que *a acção do organismo* A A *sôbre o testículo* a a *é independente da presença das gonadas e que os efeitos observados com as implantações das gonadas, se podem observar com qualquer tecido contendo o gene dominante* A.

CAPITULO VI

Discussão

Os resultados obtidos nas nossas experiências estão em desacôrdo com o que geralmente se admitia do comportamento dos insectos em transplantações. Com efeito, Caspari e agora nós, verificámos, pela primeira vez, a modificação de um hospedeiro pela influência de um implantado.

Das experiências de transplantações já citadas e em especial das de Kopeč e de Meisenheimer e dos cruzamentos na *Lymantria,* de Goldschmidt, se tinha concluido a independência dos caracteres sexuais, de qualquer influência hormonal das gonadas e era afirmada a autonomia celular dos insectos, nos quais os caracteres fenotípicos das diferentes células do organismo seriam devidas ùnicamente ao genómio que contêm, ao contrário do que acontece nos vertebrados nos quais certos caracteres estão na dependência de acções hormonais.

A existência de acções entre tecidos genèticamente diferentes dum mesmo organismo, foi primeiramente observada por Sturtevant no estudo de ginandros e mosaicos da *Drosophila.* Dobzhansky, estudou mais tarde detalhadamente tais acções, também na *Drosophila* e Whiting observa ainda comportamento análogo de tecidos de mosaicos na vêspa parasita *Habrobracon.*

Nos ginandros estudados por Dobzhansky, continham as partes masculinas os genes «yellow» e «white» e as partes femininas eram de tipo selvagem. Dobzhansky observou que nos ginandros eram incolores os testículos e os vasos deferentes durante os primeiros dias de imago e que com a idade tomavam então a coloração amarela que aparecia primeiro nos indivíduos de olhos vermelhos do que nos de olhos brancos. Observou mais, que quando um vaso deferente se encontrava em contacto com um ovário tomava a coloração mais cedo do que nos indivíduos nos quais o vaso deferente se encontrava afastado do ovário. Do mesmo modo se comportava um testículo em contacto com um oviducto. São estes resultados os que mais se aproximam dos obtidos nás transplantações de gonadas na *Ephestia.*

De facto, nos ginandros de Dobzhansky, as acções entre tecidos genèticamente diferentes, em contacto, originando o aparecimento da coloração nos testículos e nos vasos deferentes, são comparáveis às acções de pigmentação dos testículos implantados *aa*, em contacto com as gonadas do hospedeiro *AA* ou *Aa*, ou de pigmentação dos testículos do animal hospedeiro *aa*, por implantação de gonadas *AA* ou *Aa*.

E o facto do mais rápido aparecimento da coloração dos testículos e vasos deferentes nos ginandros com olhos vermelhos, faz supor uma acção a distância, dos olhos contendo o alelo dominante, sôbre a coloração dos testículos. Tal facto será comparável ao observado nas nossas experiências, da acção a distância das gonadas implantadas AA e Aa sôbre a pigmentação dos olhos.

Dobzhansky, baseado nas suas observações, supõe que o alelo normal de «w» e «y» exerce a sua acção sôbre os tecidos que contêm estes genes, por meio de substâncias que são lançadas no líquido circulante.

Pelas transplantações efectuadas na *Ephestia* se demonstrou experimentalmente que a hipótese de Dobzhansky era de molde a explicar os factos observados. As acções que estabelecemos são, pois, acções do gene A, exercidas por meio de uma substância, a *substância A*, levada pelo líquido circulante aos orgãos onde em determinados momentos do desenvolvimento essas acções se evidenciam. A discussão detalhada das experiências de transplantações, permitir-nos-á analisar mais de perto o modo de acção da substância A.

Os resultados das transplantações de testículos, efectuadas entre indivíduos nos três últimos estados larvares e as transplantações de testículos adultos AA em animais aa, levam-nos a concluir que a substância A se produz em todos os estados do desenvolvimento. Atingido que seja determinado estado de desenvolvimento dos orgãos sôbre os quais actua o gene A, exercer-se-á sôbre êles a acção da substância A, cujo efeito final será a realização de certos caracteres. Assim o gene A, realizava em diferentes momentos do desenvolvimento, diversos caracteres: a côr das larvas, no período embrionário, a coloração dos testículos, nos dois últimos períodos larvares e a pigmentação dos olhos, no período de pupa.

Vimos que nas transplantações de um só ovário AA ou Aa as pigmentações mais escuras que obtivemos, dos olhos dos animais aa hospedeiros, foram 7 pl (castanho escuro), das tabelas de Ostwald, ainda mesmo nos casos em que o ovário implantado se desenvolvia completamente. Apesar das suas maiores dimensões, um ovário exercia uma acção inferior à de um testículo. As transplantações simultâneas de dois ovários levavam, porém, a animais com olhos pretos, tais como os obtidos nas transplantações de testículos e os dos fenotipos de AA e Aa. Estas experiencias permitem-nos tirar uma conclusão importante: a acção quantitativa da substância A. A acção final é, pois, proporcional a quantidade de substância A formada.

A diferença de intensidade das acções das gonadas masculinas e femininas, deve explicar-se do seguinte modo: Sendo a substância *A* um produto do gene *A* localizado nos cromosomas, a quantidade de substância *A* formada depende da quantidade de substância nuclear dos tecidos implantados. Uma gonada masculina contém grande número de células sexuais, de pequenas dimensões, e pobres em citoplasma. As gonadas femininas contêm menor número de células sexuais e estas de maiores dimensões devido à grande quantidade de vitêlo que possuem. Assim, conterá um testículo apesar das suas menores dimensões, maior quantidade de substância nuclear; produzindo maior quantidade de substância *A* a sua acção será mais intensa que a de um ovário.

A última série de experiências que efectuámos, castrações e implantações de testículos em larvas castradas, demonstrou-nos que as acções observadas não eram devidas a qualquer acção hormonal das gonadas, mas sim a quaisquer tecidos contendo o gene *A*, e que se tratava, portanto, de uma acção dêste gene.

Estabelecemos assim experimentalmente a acção do gene pleiotropo *A*, por meio de uma substância, a substância *A*, que actua em quantidades mínimas e possui uma acção quantitativa.

A sua acção evidenciava-se em diferentes momentos do desenvolvimento e em diferentes orgãos, quer no próprio orgão onde era produzida (pigmentação dos testículos *A A* em animais *a a*), quer por difusão de célula a célula (gonadas *A A* ou *A a* implantadas, em contacto com testículos *a a*) ou ainda, era levada a todo o organismo pelo líquido circulante (pigmentação dos olhos e dos testículos de animais *a a*, não em contacto com as gonadas implantadas *A A* ou *A a*).

Nada sabemos sôbre a constituição química da substância *A* e da natureza das suas acções bioquímicas. Conhecemos apenas algumas das suas propriedades e os seus efeitos. Pelo seu modo de acção aproxima-se do grupo de activadores orgânicos das hormonas. Tomando esta designação num sentido lato, chamaremos à substância *A*, produto do gene *A*, uma hormona do desenvolvimento. O desconhecimento da sua constituição química e da natureza das suas acções bioquímicas não invalida a nossa afirmação. Toda a investigação dos activadores orgânicos, hormonas e vitaminas, se efectuou a princípio sem que se conhecesse a sua composição química, como ainda hoje se conhece muito pouco sôbre a constituïção química das enzimas. No entanto o seu estudo e classificação baseou-se sôbre os efeitos das suas acções bioquímicas, de natureza íntima mal conhecida.

Á Biologia competirá, pois, a investigação dos efeitos das acções bioquímicas das substâncias análogas às hormonas, por meio das quais os genes efectuam as suas acções. Á Química, especialmente à Bioquímica, competirá, em estreita colaboração com a Biologia, a investigação da composição química e natureza íntima das acções bioquímicas dessas substâncias, cujos efeitos apenas nos são conhecidos.

Sumário e conclusões

I — Efectuámos transplantações de gonadas entre duas raças da *Ephestia kühniella,* com o fim do estudo do mecanismo da acção de um gene pleiotropo.

II — O gene pleiotropo em questão evidencia-se em diferentes fases do desenvolvimento, determinando a côr dos olhos, a pigmentação dos testículos, a côr das larvas e modificando caracteres fisiológicos, tais como: vitalidade e velocidade do desenvolvimento. Os animais *A A* possuem olhos pretos e testículos intensamente pigmentados, *a a,* olhos vermelhos e testículos não ou fracamente pigmentados; as larvas *A A* possuem uma côr avermelhada, côr de carne, e *a a,* uma côr branca amarelada. Os animais *a a* têm menor vitalidade e menor velocidade de desenvolvimento. O gene *A* é dominante sôbre *a.*

III — As transplantações de testículos entre larvas homozigóticas *a a* e *A A*, em todos os estados larvares e independentemente da idade do testículo implantado em relação à da larva operada, levaram aos seguintes resultados:

1) As transplantações de testículos *A A* em animais *a a,* conduziam a insectos perfeitos com olhos pretos. Os testículos implantados pigmentávam se segundo o seu genotipo, não atingindo contudo a pigmentação normal. Os testículos do animal hospedeiro pigmentavam-se também sem atingir a pigmentação de um testículo *A A.*

2) As transplantações de testículos *a a* em animais *A A,* conduziam a testículos *a a* pigmentados, ainda que não tão intensamente como os de *A A.* Os resultados obtidos são independentes do sexo da larva hospedeira.

3) As transplantações de testículos *a a*, em larvas *a a*, conduziram sempre a testículos não pigmentados e a animais com olhos vermelhos.

4) As transplantações de testículos *A A* em animais *A A*, deram como resultados, uma diminuição, ainda que ligeira, da pigmentação dos testículos implantados e uma pigmentação normal dos olhos e dos testículos do animal operado.

IV — As transplantações de testículos *A A* de insectos perfeitos, em larvas *a a*, deram lugar, em dois dos três animais eclodidos (de 140 larvas operadas), ao aparecimento de olhos castanhos.

V — As transplantações de testículos *A a* deram resultados idênticos aos dos testículos *A A*.

1) Os testículos *A a*, implantados em animais *a a*, conduziam a insectos com olhos pretos e testículos pigmentados.

2) Os testículos *a a* pigmentavam-se pela implantação em larvas *A a*.

VI — Por transplantações de um ovário *A A*, em larvas *a a*, obtivemos também uma modificação da côr dos olhos dos animais operados. As côres obtidas iam até castanho escuro e em caso algum se chegou à côr preta normal dos animais *A A*.

VII — As transplantações de ovários *A a* deram resultados idênticos aos obtidos com ovários *A A*.

VIII — As transplantações simultâneas de dois ovários *A A*, em larvas *a a*, levaram ao aparecimento de animais com olhos pretos, nos casos em que os dois ovários implantados se desenvolviam. Se apenas um dos ovários se desenvolvia, os animais apresentavam então os olhos castanhos.

IX — A descendência do cruzamento de um animal *a a*, de olhos castanhos pela implantação de um ovário *A A*, com um animal *a a*, normal, possuia os olhos vermelhos.

X — Os animais *A A*, castrados nos últimos períodos larvares, não apresentavam qualquer modificação. Os olhos de tais animais eram pretos.

XI — A transplantação de testículos *a a*, em larvas *A A*, castradas, deu lugar à pigmentação dos testículos transplantados.

XII — Da discussão dos resultados podemos concluir que o gene *A* efectua as suas acções por meio duma substância, *a substância A*, lançada no líquido circulante. A substância *A* actua em quantidades mínimas e os seus efeitos são proporcionais às quantidades de substância produzidas. Pelo seu modo de acção, a substância *A* deve aproximar-se das substâncias do grupo das hormonas.

Résumé et conclusions

I — Nous avons effectué des transplantations de gonades entre deux races de *Ephestia kühniella,* dans le but de l'étude du mécanisme de l'action d'un gène pléiotrope.

II — Le gène pléiotrope en question se fait remarquer par différentes phases du développement, en déterminant la couleur des yeux, la pigmentation des testicules, la couleur des larves et en modifiant des caractères physiologiques, tels que: vitalité et rapidité du développement. Des animaux *A A* possèdent des yeux noirs et des testicules intensément pigmentés, *a a* des yeux rouges et des testicules non ou faiblements pigmentés; des larves *A A* ont une couleur rougeâtre, couleur chair, et *a a* une couleur blanche jaunâtre. Des animaux *a a* ont une vitalité moindre, et une moindre rapidité de développement. Le gène *A* est dominant sur *a*.

III — Les transplantations de testicules entre larves homozygotiques *a a* et *A A,* dans tous les états larvaires opérés et indépendemment de l'âge du testicule implanté en relation à celui de la larve opérée ont conduit aux résultats suivants:

1) Les transplantations de testicules *A A* en des animaux *a a,* conduisaient à des insectes parfaits aux yeux noirs. Les testicules implantés se pigmentaient selon leur génotype sans toutefois obtenir la pigmentation normale. Les testicules de l'animal opéré se pigmentaient aussi sans atteindre la pigmentation d'un testicule *A A*.

2) Les transplantations de testicules *a a* en des animaux *A A* ont abouti à des testicules *a a* pigmentés quoique moins intensément que ceux de *A A*. Les résul-

tats obtenus sont indépendants du sexe de la larve opérée.

3) Les transplantations des testicules *a a*, en des larves *a a*, ont toujours donné des testicules non pigmentés et des animaux aux yeux rouges.

4) Les transplantations des testicules *A A*, en des animaux *a a*, ont donné comme résultat une diminution — légère il est vrai — de la pigmentation des testicules implantés et de la pigmentation normale des yeux et des testicules de l'animal opéré.

IV — Les transplantations de testicules *A A* d'insectes parfaits, en des larves *a a*, ont donné lieu, en deux des trois animaux nés (de 140 larves opérées), a l'apparition d'yeux marron.

V — Les transplantations de testicules *A a* ont donné des résultats identiques à ceux des testicules *A A*.

1) Les testicules *A a* implantés en des animaux *a a*, ont conduit à des insectes aux yeus noirs et aux testicules pigmentés.

2) Les testicules *a a* se sont pigmentés après l'implantation en des larves *A a*.

VI — A la suite de la transplantation d'un ovaire *A A* en des larves *a a*, nous avons obtenu aussi une modification de la couleur des yeux des animaux opérés. Les couleurs obtenues se sont modifiées jusqu'à marron et dans aucun cas on ne réussit à avoir la couleur noire normale des animaux *A A*.

VII — Les transplantations des ovaires *A a* ont donné des résultats identiques à ceux obtenus avec des ovaires *A A*.

VIII — Les transplantations simultanées de deux ovaires *A A* en des larves *a a*, ont fait apparaître, dans les cas où les deux ovaires implantés se sont développés, des animaux aux yeux noirs. Dans les cas où il ne se développait qu'un seul des ovaires, les animaux possédaient alors des yeux marrons.

IX — La descendance du croisement d'un animal *a a*, aux yeux marron par l'implantation d'un ovaire *A A*, avec un animal *aa*, normal, avait des yeux rouges.

X — Les animaux *A A*, châtrés dans les dernieres périodes de larve, ne présentaient aucune modification. Les yeux de ces insectes étaient noirs.

XI — La transplantation de testicules *a a* en des larves *A A*, châtrées, a conduit à la pigmentation des testicules implantés.

XII — De la discussion des résultats nous pouvons conclure que le gène *A*, réalise ses actions au moyen d'une substance, *la substance A*, lancé dans le liquide circulant. La substance *A* agit en des quantités minimes et ses effets sont proportionaux aux quantités de substance produites. Par le mode de son action, la substance *A*, doit s'approcher des substances du groupe des hormones.

ALBERTO XAVIER DA CUNHA

Assistente de Zoologia na Faculdade de Ciências da Universidade de Coimbra

BIBLIOGRAFIA

Baur (E.), 1930. — «Einführung in die Vererbungslehre», 11.ª edição. — Berlim.

Caspari (E.), 1933 — «Über die Wirkung eines pleiotropen Gens bei der Mehlmotte *Ephestia kühniella* Zeller». — Roux'Arch. Entw. mech. der Org., CXXX.

Cunha (A. X. da), 1935. — «Über die Entwicklung der Geschlechtsdrüsen bei der *Ephestia kühniella* Zeller». — (Em publicação).

Demerec (M.), 1933. — What is a gene? — J. of Genetics, xxiv.

Dobzhansky (Th.), 1924. — «Über den Bau des Geschlechtsapparates einiger Mutanten von *Drosophila melanogaster*». — Zeit. Ind. Ab. Ver., XXXIV.

— 1927. — «Studies on the the manifold effect of certain genes in *Drosophila melanogaster*». — Zeit. Ind. Ab. Ver, XLIII.

— 1931. — «Interaction between female and male parts of gynandromorphs of *Drosophila simulans*». — Roux'Arch. Ent. mech. der Org., CXXIII.

Ferwerda (F. P.), 1929. — «Genetische Studien am Mehlkäfer *Tenebrio molitor*» L. — Genetica, xi.

Geigy, 1931. — Action de l'ultra-violet sur le pôle germinal dans l'œuf de *Dr. melanogaster*. — Rev. Suisse de Zool. XXXVIII.

Gierke (E. von), 1932. — «Uber die Häutungen und die Entwicklungsgeschwindigkeit der Larven der Mehlmotte *Ephestia kühniella* Zeller». — Roux'Arch. Ent. mech. der Org, CXXVII.

Goldschmidt (R.), 1927. — «Physiologische Theorie der Vererbung». — Berlim.

— 1928. — «Einführung in die Vererbungswissenschaft», 5.ª edição — Berlim.

— 1928. — «Gen und Aussencharakter». — Zeit. Ind. Ab. Ver., Supl. Vol. I.

Gottschewski (G.), 1934 — «Untersuchungen an *Dosophila melanogaster* über die Umstimmbarkeit des Phänotypus und des Genotypus durch Temperatureinflüsse». — Zeit. Ind. Ab. Ver, LXVII.

Greb (R. J.), 1934. — «Quantitative analysis of the modification of some genetic characters in *Habrobracon*». J. of Genetics. XXIX.

GUIÉNOT (E.), 1930. — «L'Hérédité». — Paris.

JOHANNSEN (W.), 1926. — «Elemente der exakten Erblichkeitslehre mit Grundzügen der biologischen Variationsstatistik», 3.ª edição. — Jena.

KLATT (B.), 1919. — «Keimdrüsentransplantationen beim Schwammspinner». — Zeit. Ind. Ab. Ver., XXII.

KÖHLER (W.), 1932. — «Die Entwicklung der Flügel bei der Mehlmotte *Ephestia kühniella* mit besonderer Berücksichtigung des Zeichnungsmusters». — Zeit. Morph. und Ökol der Tiere, XXIV.

KOPEČ (St.), 1911. — «Untersuchung über Kastration und Transplantation bei Schmetterlingen». — Roux'Arch. Entw. mech. der Org., XXXIII.

KORSCHELT (E.), 1931. — Renegeration und Transplantation», II Vol. Transplantation. — Berlim.

KÜHN (A.) und HENKE (K.), 1929. — «Genetische und entwicklungsphysiologische Untersuchungen an der Mehlmotte *Ephestia kühniella*, I-VII». Abh. Ges. Wiss. zu Göttingen, XV, 1.

— 1932. — «Genetische und entwicklungsphysiologische Untersuchungen an der Mehlmotte *Ephestia kühniella*, VIII-XII». — Abh. Ges. Wiss. zu Göttingen, XV, 2.

— 1930. — «Eine Mutation der Augenfarbe und der Entwicklungsgeschwindigkeit bei der Mehlmotte *Ephestia kühniella*». — Roux. Arc. Ent. mech. der Org., CXXII.

MEISENHEIMER (J.), 1909. — «Experimentelle Studien Zur Soma-und Geschlechtsdifferenzierung. I. Beitrag. Über den Zusammenhang primärer und sekundärer Geschlechtsmerkmale bei den Schmetterlingen und den übrigen Gliedertieren». Jena.

— 1910. — «Zur Ovarialtrasplantation bei Schmetterlingen». — Zool. Anzeiger, XXXV.

— 1922 — «Kastration und Gonadentransplantation bei Insekten». Abderhaldens'Handbuch der Biol. Arbeitsmethoden. Abt. IX, Teil 4.

MORGAN (T. H.), 1926. — «The theory of the gene». — New Haven. Yale University Press.

OSTWALD (W.), 1922. — «Der Farbkörper und die Farbenfibel». — Leipzig.

OUDEMANS (J. TH.), 1898. — «Falter aus kastrierten Raupen, wie sie aussehen und wie sie sich benehmen». — Zool. Jahrb. Abt. Syst., XII.

PLUNKETT (Ch.), 1926. — «The interaction of genetic and environmental factores in development». — J. of exp. Zool., XLVI.

Regen (J.), 1909 e 1910. — «Kastration und ihre Folgeerscheinungen bei *Grillus campestris*, I e II». — I. Mitt. Zool. Anzeiger, XXXIV. II Mitt. Zool. Anzeiger, XXXV.

Sturtevant (A. H.), 1920. — «The vermillion gene and gynandromorphism». — Proc. Soc. Exp. Biol. and Med., XVII.

— 1927. — «The effect of the bar gene of *Drosophila* in mosaic eyes». — J. of Exp. Zool., XLVI.

— 1932. — «The use of mosaics in the study of the developmental effect of genes».
— Proc. Sixth Int. Cong. Gen., I.

Tammes (T.), 1934. — «Die Übereinstimmung Zwischen Entwicklungsstadien und Phaenotypen verschiedener Genotypen». — Genetica, XV.

Timoféeff-Ressovsky (H.), 1931. — «Über phänotypische Manifestierung der polytopen (pleiotropen) Genovariationen «Polyphän» von *Drosophila funebris*». — Naturwissenschaften, XIX.

— 1934. — «Über die Vitalität einiger Genmutationen bei *Drosophila funebris* und ihre abhängigkeit von «genotypischen» und von äusseren Milieu». — Zeit. Ind Ab. Ver., LXVI.

Whiting (A. R.), 1934. — «Eye colours in the parasitic wasp *Habrobracon* and their behaviour in multiple recessives and in mosaics». — J. of Genetics, XXIX.

Whiting (P. W.), 1928. — «The relation between gynandromorphism and mutation in Habrobracon». — Amer. Nat. LXII.

— and Whiting (A. R.), 1934. — «A unique fraternity in *Habrobracon*». — J. of Genetics XXIX.

EXPLICAÇÃO DA ESTAMPA

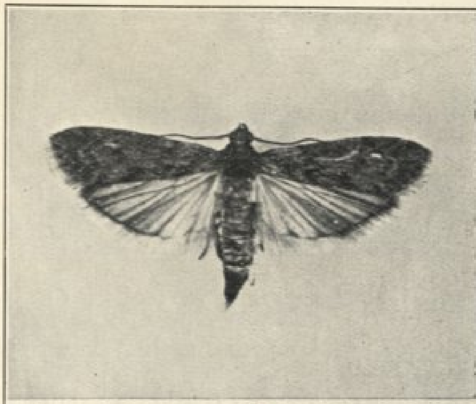
Fig. 1 — *Ephestia kühniella* Zeller. ×2

Fig. 2 — Larvas das raças *a a* e *A A*, no último período larvar. ×2

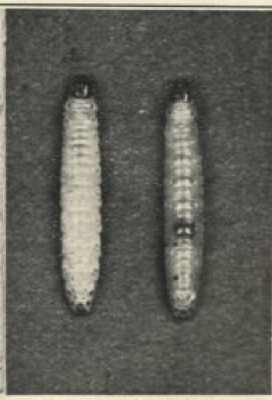
Fig. 3 — Imago da raça *A A*; olhos pretos. ×18

Fig. 4 — Imago da raça *a a*; olhos vermelhos.

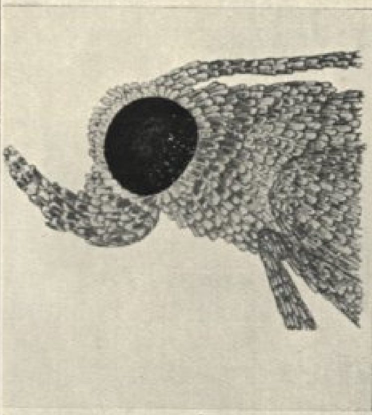
Fig. 5 — Imago da raça *a a*, com olhos castanhos obtidos por implantação de um ovário.



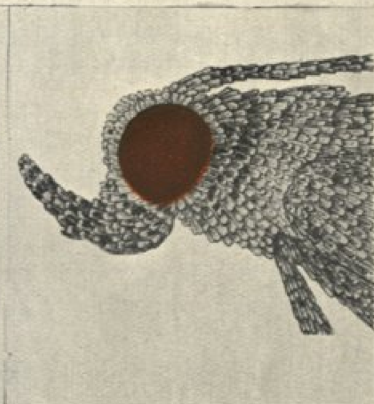
1



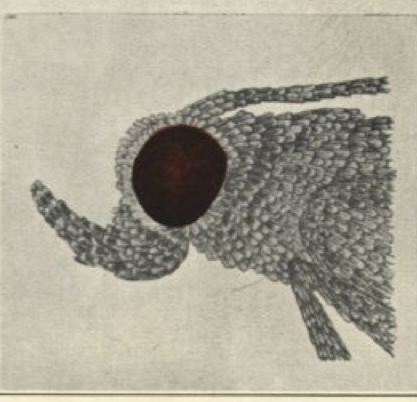
2



3



4



5

Contribuição para o estudo da teoria das funções

CAPÍTULO VI

LIMITES DE CONJUNTOS

(CONTINUAÇÃO)

I

SEGUNDA EXTENSÃO DO TEOREMA DE BOLZANO-WEIERSTRASS

65. Limite dum conjunto (A) de conjuntos quaisquer. — Consideremos um conjunto (**A**) de conjuntos quaisquer **A**. *Conjunto limite de* (**A**), ou simplesmente *limite de* (**A**), é, por definição, qualquer conjunto que seja limite duma sucessão convergente, pròpriamente infinita, constituída por elementos de (**A**). A êste respeito eis a seguinte extensão do teorema do *v.* IV, *p.* 140, *l.* 3:

Qualquer conjunto de conjuntos, pròpriamente infinito e quási-limitado, admite um conjunto limite.

Com efeito, seja (**A**) um conjunto pròpriamente infinito e quási-limitado constituído por conjuntos quaisquer **A**. Consideremos o caso em que a soma dos conjuntos **A** é ilimitada [1], e comecemos por fixar uma sucessão

$$(1) \qquad \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_i, \ldots$$

de elementos de (**A**) determinados de tal maneira que dois quaisquer deles não sejam juxtapostos um ao outro. Notemos que

---

[1] Já considerámos no *v.* IV, *p.* 140, *l.* 8, o caso em que a soma dos conjuntos **A** é limitada.

existe uma tal sucessão porque $(\mathbf{A})$ é um conjunto pròpriamente infinito. Para a justificação do enunciado basta agora demons trar que esta sucessão admite uma subsucessão convergente.

Para tanto imaginemos uma sucessão de esferóides concêntricos

$$\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_i, \ldots$$

cujos raios cresçam para infinito. Seja $\mathbf{c}$ o centro de cada um dêstes esferóides. Suponhamos que o raio de $\mathbf{F}_1$ é maior do que o limite superior das distâncias reduzidas $\overline{\mathbf{c}\,\mathbf{A}_i}$ $(i=1, 2, \ldots)$, limite superior êste que é finito porque o conjunto $(\mathbf{A})$ é quási-limitado; determinado dêste modo o raio de $\mathbf{F}_1$, podemos afirmar que existem os produtos de cada um dos esferóides $\mathbf{F}_i$ por cada têrmo da sucessão (1).

Consideremos agora uma infinidade numerada de sucessões de conjuntos

$$
\begin{array}{ll}
(2_1) & \mathbf{A}_{1,1}, \mathbf{A}_{1,2}, \ldots, \mathbf{A}_{1,i}, \ldots \\
(2_2) & \mathbf{A}_{2,1}, \mathbf{A}_{2,2}, \ldots, \mathbf{A}_{2,i}, \ldots \\
\vdots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(2_i) & \mathbf{A}_{i,1}, \mathbf{A}_{i,2}, \ldots, \mathbf{A}_{i,i}, \ldots \\
\vdots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{array}
$$

sendo a primeira uma subsucessão de (1) e cada uma das outras uma subsucessão da imediatamente anterior, determinadas de tal forma que sejam convergentes as seguintes sucessões de produtos

$$
\begin{array}{ll}
(3_1) & \mathbf{F}_1\times\mathbf{A}_{1,1}, \mathbf{F}_1\times\mathbf{A}_{1,2}, \ldots, \mathbf{F}_1\times\mathbf{A}_{1,i}, \ldots \\
(3_2) & \mathbf{F}_2\times\mathbf{A}_{2,1}, \mathbf{F}_2\times\mathbf{A}_{2,2}, \ldots, \mathbf{F}_2\times\mathbf{A}_{2,i}, \ldots \\
\vdots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(3_i) & \mathbf{F}_i\times\mathbf{A}_{i,1}, \mathbf{F}_i\times\mathbf{A}_{i,2}, \ldots, \mathbf{F}_i\times\mathbf{A}_{i,i}, \ldots \\
\vdots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

Para determinar tais sucessões raciocinemos do modo seguinte: A sucessão

$$\mathbf{F}_1\times\mathbf{A}_1, \mathbf{F}_1\times\mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{F}_1\times\mathbf{A}_i, \ldots$$

é constituída por conjuntos de soma limitada, e admite, por isso, uma subsucessão convergente [*v.* IV, *p.* 140, *l.* 10]. Seja (3_1)

esta subsucessão; corresponde-lhe a (2_1). Procedendo da mesma maneira para a sucessão (2_1) e esferóide F_2 como procedemos para a sucessão (1) e esferóide F_1 obtemos as sucessões (3_2) e (2_2), e, se continuarmos assim indefinidamente, obteremos as duas infinidades de sucessões (3_i) e (2_i) $(i=1, 2, \ldots)$.

Dito isto, consideremos a sucessão

(4) $$\mathsf{A}_{1,1}, \mathsf{A}_{2,2}, \ldots, \mathsf{A}_{i,i}, \ldots$$

formada pelo primeiro têrmo da sucessão (2_1), pelo segundo têrmo da (2_2), etc. A sucessão (4) é uma subsucessão da (2_1); suprimindo-lhe o primeiro têrmo obtemos uma subsucessão da (2_2); suprimindo-lhe os dois primeiros termos obtemos uma subsucessão da (2_3); em geral, suprimindo os $i-1$ primeiros termos da sucessão (4) obtemos uma subsucessão da (2_i). Logo a sucessão dos produtos de F_i por cada têrmo de (4) será, depois de lhe suprimirmos os $i-1$ primeiros termos, uma subsucessão da (3_i). Essa sucessão de produtos é, pois, convergente, e o mesmo sucede à (4) em virtude da proposição da *p.* 157, *l.* 12. Como vemos, a referida sucessão (4) satisfaz às condições desejadas: é uma subsucessão convergente da sucessão (1).

Para que exista um conjunto limite dum conjunto (A) *de conjuntos quaisquer é necessário e suficiente que* (A) *admita um subconjunto pròpriamente infinito e quási-limitado.*

A condição é necessária, porque um limite do conjunto (A) é limite duma sucessão de elementos de (A), convergente e pròpriamente infinita, e porque uma sucessão de conjuntos que seja convergente é necessàriamente quási-limitada [*p.* 145, *l.* 25].

A condição é suficiente, como se conclui do teorema anterior.

Qualquer conjunto de conjuntos, limitado e pròpriamente infinito, admite um conjunto limite.

Com efeito, qualquer conjunto limitado (A) também é quási-limitado [*p.* 142, *l.* 13].

66. Derivado duma sucessão de conjuntos quaisquer. — Chamemos *limite duma sucessão* de conjuntos quaisquer a todo o limite duma subsucessão convergente dessa sucessão [1]. Chamemos *derivado duma sucessão* de conjuntos quaisquer ao conjunto dos respectivos limites.

Tôda a sucessão de conjuntos que seja quási-limitada admite necessàriamente um derivado.

Esta afirmação torna-se evidente quando a sucessão proposta admite uma subsucessão de termos juxtapostos entre si; no caso contrário resulta do teorema da *p.* 281, porque a proposta é, então, pròpriamente infinita [*v.* IV, *p.* 14, *nota*].

Para que exista o derivado duma dada sucessão de conjuntos quaisquer é necessário e suficiente que admita uma subsucessão quási-limitada.

A condição é necessária porque tôda a sucessão convergente de conjuntos é quási-limitada, e é suficiente em virtude da proposição anterior.

Para que exista o derivado duma sucessão de conjuntos quaisquer é necessário e suficiente que exista o limite integral da mesma sucessão.

Com efeito, para que uma sucessão de conjuntos admita uma subsucessão quási-limitada é necessário e suficiente que exista o limite integral da mesma sucessão [*p.* 143, *l.* 19].

Para que exista o derivado duma dada sucessão de conjuntos quaisquer é necessário e suficiente que esta sucessão não divirja para infinito.

Com efeito, para que exista o limite integral duma sucessão de conjuntos é necessário e suficiente que esta não divirja para infinito [*p.* 148, *l.* 34].

67. Relações entre o derivado e os limites integral e comum duma sucessão de conjuntos. Outros modos de definir estes limites. — *O limite integral duma sucessão de conjuntos é a soma dos limites da mesma sucessão.*

---

(1) Notemos que um limite duma dada sucessão de conjuntos pode não ser limite do conjunto dos respectivos termos. Em caso de convergência, um limite da sucessão só será limite do conjunto dos termos quando êste conjunto fôr pròpriamente infinito

Consideremos uma sucessão de conjuntos quaisquer

(5) $$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_i, \ldots,$$

e sejam

(6) $$\mathbf{A}_r, \mathbf{A}_s, \ldots, \mathbf{A}_u, \ldots$$

e

(7) $$\mathbf{A}_{r'}, \mathbf{A}_{s'}, \ldots, \mathbf{A}_{u'}, \ldots$$

respectivamente uma subsucessão de (5) e uma subsucessão convergente de (6), escolhidas arbitràriamente. É claro que esta última pode considerar-se também escolhida arbitràriamente entre as subsucessões convergentes de (5).

São evidentes as relações

$$\dot{\lim}\, \mathbf{A}_u \mid< [\lim \mathbf{A}_{u'}] \quad \text{e} \quad \lim \mathbf{A}_{u'} \mid< \dot{\lim}\, \mathbf{A}_{u'},$$

das quais se deduz

$$\sum \dot{\lim}\, \mathbf{A}_u \mid \sum \lim \mathbf{A}_{u'},$$

sendo o primeiro somatório estendido a tôdas as subsucessões (6) de (1) e o segundo a tôdas as que são convergentes [1].

Mas sabemos que é

$$\ddot{\lim}\, \mathbf{A}_i \mid \sum \dot{\lim}\, \mathbf{A}_u \quad [v.\ \text{IV},\ p.\ 115,\ l.\ 27],$$

relação esta que, de combinação com a anterior, dá

$$\ddot{\lim}\, \mathbf{A}_i \mid \sum \lim \mathbf{A}_w,$$

como desejávamos demonstrar.

O limite comum duma sucessão de conjuntos, quando existe, é o produto dos limites totalmente fechados da mesma sucessão.

Consideremos, com efeito, uma sucessão (5) de conjuntos quaisquer; seja (6) uma das suas subsucessões e (7) uma subsucessão

---

[1] Para estabelecermos a coincidência dessas duas somas podemos aplicar a seguinte proposição evidente: ***dadas duas somas de conjuntos, se cada parcela de qualquer destas somas é um subconjunto duma parcela da outra, as duas somas coincidem.***

convergente desta última, escolhidas arbitràriamente. Sabemos que o limite $\overset{\cdot}{lim}\,\mathbf{A}_i$, que supomos existir, é o produto dos diversos limites $\overset{\cdot\cdot}{lim}\,\mathbf{A}_u$ [*v.* IV, *p.* 115, *l.* 31]. Mas, atendendo às relações evidentes

$$\overset{\cdot\cdot}{lim}\,\mathbf{A}_u \,|\!\!> [lim\,\mathbf{A}_{u'}] \quad \text{e} \quad [lim\,\mathbf{A}_{u'}] \mid \overset{\cdot\cdot}{lim}\,\mathbf{A}_{u'},$$

e à circunstância de a sucessão (7) ser arbitràriamente escolhida entre as subsucessões convergentes de (5), resulta que o produto dos diversos limites $\overset{\cdot\cdot}{lim}\,\mathbf{A}_u$ é o produto dos limites $[lim\,\mathbf{A}_{u'}]$ relativos a tôdas as subsucessões convergentes de (5) ([1]). Logo o limite comum da sucessão (5) é o produto dos limites totalmente fechados da mesma sucessão.

Para que uma dada sucessão quási-limitada de conjntos (5) *admita um limite comum é necessário e suficiente que exista o produto dos limites totalmente fechados da mesma sucessão.*

A condição é evidentemente necessária. Para demonstrar que é suficiente notemos primeiro que, por se tratar duma sucessão (5) quási-limitada, qualquer das suas subsucessões admite necessàriamente um limite integral [*p.* 143, *l.* 19]; depois a demonstração precedente mostra que, existindo o produto dos limites totalmente fechados da sucessão proposta, como estamos a supor, também existe o produto de todos aquêles limites integrais. Logo existe $\overset{\cdot}{lim}\,\mathbf{A}_i$, em virtude da proposição do *v.* IV, *p.* 120, *l.* 20 ([2]).

Para que uma dada sucessão quási-limitada de conjuntos (5) *admita um limite comum é necessário e suficiente que exista o produto de quaisquer limites totalmente fechados da mesma sucessão tomados em número finito, supondo limitado um dêstes produtos.*

Na verdade, o enunciado precedente toma esta forma de harmonia com a proposição do *v.* IV, *p.* 134, *l.* 22.

([1]) Efectivamente, é fácil reconhecer que: *dados dois produtos de conjuntos, se cada factor de qualquer dêstes produtos contém um factor do outro, os dois produtos coincidem necessàriamente; se um dêsses produtos é desprovido de elementos o mesmo sucede ao outro.*

([2]) Notemos que pode existir o produto dos limites totalmente fechados duma dada sucessão de conjuntos que não seja quási-limitada; no entanto tal sucessão não admite limite comum, como sabemos [*p.* 143, *l.* 17].

O limite integral duma sucessão de conjuntos é o menor limite totalmente fechado que podemos obter com sucessões convergentes cujos termos contenham os da mesma ordem da sucessão dada.

Com efeito, seja $\ddot{\mathbf{A}}$ o limite integral duma dada sucessão de conjuntos (5). Se atendermos à definição de convergência duma sucessão de conjuntos, fàcilmente veremos que a sucessão

$$\ddot{\mathbf{A}} + \mathbf{A}_1,\ \ddot{\mathbf{A}} + \mathbf{A}_2,\ \ldots,\ \ddot{\mathbf{A}} + \mathbf{A}_i,\ \ldots$$

converge para o limite $\ddot{\mathbf{A}}$. Mas é evidente que o limite totalmente fechado de qualquer outra sucessão convergente cujos termos contenham os da mesma ordem da sucessão (5) também contém necessàriamente o limite integral $\ddot{\mathbf{A}}$. Logo $\ddot{\mathbf{A}}$ é o menor limite totalmente fechado que podemos obter com sucessões convergentes cujos termos contenham os da mesma ordem da sucessão (5).

O limite comum duma sucessão de conjuntos é o maior limite que podemos obter com sucessões convergentes de subconjuntos dos termos correspondentes da sucessão dada.

Consideremos uma sucessão (5) de conjuntos quaisquer e suponhamos que existe o limite comum $\dot{\mathbf{A}}$. O enunciado é evidentemente verdadeiro quando o conjunto $\dot{\mathbf{A}}$ é limitado, como resulta da proposição da *p.* 158, *l.* 22. Resta considerar o caso de $\dot{\mathbf{A}}$ ser ilimitado.

A partir duma sucessão de esferóides concêntricos cujos raios cresçam para infinito,

$$\mathbf{F}_1,\ \mathbf{F}_2,\ \ldots,\ \mathbf{F}_h,\ \ldots,$$

formemos a sucessão de conjuntos

$$\mathbf{F}_1,\ \mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_1,\ \ldots,\ \mathbf{F}_h - \mathbf{F}_{h-1},\ \ldots.$$

Estes conjuntos dividem $\dot{\mathbf{A}}$ numa infinidade de conjuntos limitados

$$\dot{\mathbf{A}} \times \mathbf{F}_1,\ \dot{\mathbf{A}} \times (\mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_1),\ \ldots,\ \dot{\mathbf{A}} \times (\mathbf{F}_h - \mathbf{F}_{h-1}),\ \ldots\ (^1).$$

(1) Todos os conjuntos $\dot{\mathbf{A}} \times (\mathbf{F}_h - \mathbf{F}_{h-1})$ serão providos de elementos se determinarmos convenientemente os raios dos esferóides $\mathbf{F}_h$.

Por fôrça da citada proposição da *p.* 158, cada conjunto parcial $\dot{A} \times (F_h - F_{h-1})$ é limite duma sucessão convergente

$$(8) \qquad A_{h,1}, A_{h,2}, \ldots, A_{h,i}, \ldots$$

de subconjuntos dos termos correspondentes da sucessão proposta. Para cada valor de h há uma ordem k a partir da qual os conjuntos $A_{h,i}$ são exteriores ao esferóide F_{h-2} [*p.* 147, *l.* 24]. Sujeitemos a sucessão (8) à condição de os primeiros k termos serem desprovidos de elementos, como é permitido.

Assim determinadas tôdas as sucessões análogas a (8) podemos afirmar que a soma

$$S_h \mid A_{h,1} + A_{h,2} + \cdots + A_{h,i} + \cdots$$

é exterior a F_{h-2}, e que a sucessão

$$S_1, S_2, \ldots, S_h, \ldots$$

diverge para infinito. Por conseguinte a soma de tôdas as sucessões (8), que representamos por

$$A'_1, A'_2, \ldots, A'_i, \ldots,$$

converge para a soma dos limites das parcelas [*p.* 152, *l.* 27]:

$$\dot{A} \mid \sum \dot{A} \times (F_h - F_{h-1}).$$

Os primeiros termos desta sucessão soma poderão ser desprovidos de elementos, mas, se os preenchermos com subconjuntos quaisquer dos termos da mesma ordem da proposta, obteremos uma sucessão de conjuntos que satisfaz às condições do enunciado; na verdade, é evidente que todo o limite de qualquer outra sucessão convergente de subconjuntos dos termos correspondentes da sucessão dada pertence necessàriamente ao limite $\dot{A}$.

Qualquer subconjunto do limite comum duma dada sucessão de conjuntos é limite duma sucessão convergente de subconjuntos dos termos correspondentes da primeira.

Efectivamente, como já demonstrámos esta proposição para o caso particular de considerarmos um subconjunto limitado do limite comum da sucessão dada [*p.* 158, *l.* 22], e, como a demonstração anterior é evidentemente válida quando em vez do limite comum $\dot{\mathbf{A}}$ se considera qualquer dos seus subconjuntos ilimitados, segue-se que a presente proposição é verdadeira duma maneira geral.

Em particular temos a proposição seguinte, já encontrada na *p.* 167, *l.* 2.

Qualquer subconjunto do limite totalmente fechado duma dada sucessão convergente de conjuntos quaisquer é limite duma sucessão convergente de subconjuntos dos termos correspondentes da primeira.

II

CRITÉRIOS DE CONVERGÊNCIA DUMA SUCESSÃO DE CONJUNTOS

68. Alguns casos de convergência. — Consideremos uma sucessão de conjuntos quaisquer

$$(9) \qquad \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_i, \ldots$$

pertencentes a um dado espaçóide, limitado ou não. Além das condições de convergência que se encontram expostas nos *n.*os 59 e 60, *p.* 149 e 155, demonstremos mais as seguintes:

Se os diversos limites duma sucessão quási-limitada de conjuntos quaisquer forem juxtapostos entre si, a sucessão será convergente.

Com efeito, consideremos uma sucessão quási-limitada de conjuntos (9), e suponhamos que tôdas as suas subsucessões convergentes admitem o mesmo limite totalmente fechado $\mathbf{A}$. Como o limite integral $\ddot{\mathbf{A}}$ dessa sucessão é a soma dos respectivos limites totalmente fechados [*p.* 284, *l.* 29], e o limite comum $\dot{\mathbf{A}}$, que então existe [*p.* 286, *l.* 23], o produto dêsses limites [*p.* 285 *l.* 22], temos $\ddot{\mathbf{A}} \mid \dot{\mathbf{A}} \mid \mathbf{A}$ e a sucessão proposta converge para $\mathbf{A}$.

Se fôr $lim\, \overrightarrow{\mathbf{A}_i\mathbf{A}_{i'}} = 0$ $(i < i')$, *a sucessão* (9) *será convergente.*

Porque, dada esta condição, existem os limites $\ddot{\mathbf{A}}$ e $\dot{\mathbf{A}}$ e temos $\ddot{\mathbf{A}} \mid \dot{\mathbf{A}}$ [*v.* IV, *p.* 119, *l.* 10].

Se fôr $lim\, \overrightarrow{\mathbf{A}_i\mathbf{A}_{i'}} = 0$ $(i > i')$ *e se existir o limite* $\ddot{\mathbf{A}}$, *a sucessão* (9) *será convergente.*

Nestas condições, com efeito, também existe o limite $\dot{\mathbf{A}}$ e temos $\ddot{\mathbf{A}} \mid \dot{\mathbf{A}}$ [*v.* IV, *p.* 120, *l.* 13].

Se fôr $lim\, \overline{\mathbf{A}_i\mathbf{A}_{i'}} = 0$, *a sucessão* (9) *será convergente.*

Com efeito, se fôr $lim\, \overline{\mathbf{A}_i\mathbf{A}_{i'}} = 0$, também será $lim\, \overrightarrow{\mathbf{A}_i\mathbf{A}_{i'}} = 0$ com $i < i'$.

A sucessão (9) *convergirá para o limite* $\mathbf{A}$ *tôdas as vezes que fôr* $lim\, \overline{\mathbf{A}_i\mathbf{A}} = 0$.

Dada a hipótese $lim\, \overline{\mathbf{A}_i\mathbf{A}} = 0$, temos

$$lim\, \overrightarrow{\mathbf{A}_i\mathbf{A}} = 0 \quad \text{e} \quad lim\, \overrightarrow{\mathbf{A}\mathbf{A}_i} = 0\,,$$

donde resulta

$$\ddot{\mathbf{A}} \mid < [\mathbf{A}] \mid < \dot{\mathbf{A}} \quad [v.\ \text{IV}, p.\ 122, l.\ 6] \quad \text{e} \quad \ddot{\mathbf{A}} \mid [\mathbf{A}] \mid \dot{\mathbf{A}}\,.$$

Por exemplo, se $\mathbf{A}_i$ representar a soma de todos os esferóides de centros nos diversos elementos dum dado conjunto $\mathbf{A}$ e de raios iguais a $\frac{1}{i}$ teremos

$$\overline{\mathbf{A}_i\mathbf{A}} < \frac{1}{i} \quad \text{e} \quad lim\, \overline{\mathbf{A}_i\mathbf{A}} = 0\,;$$

logo a sucessão de têrmo geral $\mathbf{A}_i$ convergirá para o conjunto $\mathbf{A}$.

Se a cada elemento do limite $\ddot{\mathbf{A}}$ *da sucessão* (9) *corresponder uma ordem a partir da qual êsse elemento pertença a qualquer dos lugares dos termos da mesma sucessão, esta será convergente.*

Porque, dada a hipótese do enunciado, cada elemento de $\ddot{\mathbf{A}}$ pertence ao limite comum da sucessão dos lugares dos termos da proposta, e é, por isso, um elemento de $\dot{\mathbf{A}}$ [*v.* IV, *p.* 122, *l.* 14]. Logo temos $\ddot{\mathbf{A}} \mid \dot{\mathbf{A}}$.

Como caso particular podemos dizer que:

Se o limite $\ddot{\mathbf{A}}$ *da sucessão* (9) *fôr um subconjunto de qualquer dos lugares dos termos a partir de certa ordem a sucessão será convergente. O produto dêstes lugares será o limite totalmente fechado da sucessão.*

Se cada têrmo $\mathbf{A}_i$ *duma sucessão de conjuntos, quási-limitada, contiver os termos seguintes a partir de certa ordem* $i+h$, *a sucessão será convergente. O produto dos lugares dos termos será o limite totalmente fechado da sucessão.*

Nestas condições, com efeito, o limite $\ddot{\mathbf{A}}$, que então existe, pertence a qualquer dos lugares dos termos da sucessão, porque um elemento de $\ddot{\mathbf{A}}$ é, neste caso, limite duma sucessão de elementos dum têrmo qualquer. A sucessão proposta converge, pois, para o produto dos lugares dos respectivos termos.

É simples reconhecer que esta sucessão divergirá para infinito se não fôr quási-limitada mas satisfizer às restantes condições do enunciado: efectivamente, dado um elemento $\mathbf{b}$, existirá um têrmo $\mathbf{A}_i$ a uma distância reduzida de $\mathbf{b}$ superior a um número positivo prèviamente dado, e o mesmo sucederá aos restantes termos da sucessão a partir de certa ordem $i+h$.

Se dissermos que a sucessão (9) é monótona decrescente quando fôr

$$\mathbf{A}_1 \mid> \mathbf{A}_2 \mid> \mathbf{A}_3 \mid> \dots,$$

teremos o seguinte caso particular da proposição anterior:

Qualquer sucessão de conjuntos, quási-limitada e monótona decrescente, converge para o produto dos lugares dos termos, produto êste que existe necessàriamente. Qualquer sucessão de conjuntos não quási-limitada e monótona decrescente diverge para infinito.

Por exemplo, se um certo conjunto limitado A de pontos dum espaço ordinário de n dimensões admite derivados de qualquer ordem finita, a sucessão dêstes derivados converge para o produto de todos êles (1).

---

(1) Êste produto chama-se derivado de ordem ω do conjunto A (Baire, *Leçons sur les fonctions discontinues*, *p.* 19, *l.* 3).

Observação. — *O limite integral* $\ddot{\mathbf{A}}$ *da sucessão de conjuntos* (9) *é o limite totalmente fechado da sucessão monótona decrescente*

$$(10) \quad (\mathbf{A}_1+\mathbf{A}_2+\ldots),\ (\mathbf{A}_2+\mathbf{A}_3+\ldots),\ \ldots,\ (\mathbf{A}_i+\mathbf{A}_{i+1}+\ldots),\ \ldots,$$

Com efeito, o limite $\ddot{\mathbf{A}}$ da sucessão (9) pertence evidentemente ao limite integral da sucessão (10). Por outro lado êste último limite integral também pertence a $\ddot{\mathbf{A}}$ como se reconhece sem dificuldade.

Tôda a sucessão convergente pode transformar-se, dêste modo, numa sucessão monótona decrescente com os mesmos limites que a primeira.

Se cada têrmo da sucessão (9) *fôr um subconjunto de qualquer dos termos seguintes a partir de certa ordem* $i+h$, *esta será convergente. A soma dos termos será um dos limites da sucessão.*

Neste caso, com efeito, temos

$$\mathbf{A}_1+\mathbf{A}_2+\ldots \mid \mathbf{A}_i+\mathbf{A}_{i+1}+\ldots$$
$$(i=1,\ 2,\ \ldots),$$

e a observação anterior mostra que é

$$\ddot{\mathbf{A}} \mid [\mathbf{A}_1+\mathbf{A}_2+\ldots];$$

por outro lado é evidentemente verdadeira a relação

$$\dot{\mathbf{A}} \,|\!> \mathbf{A}_1+\mathbf{A}_2+\ldots,$$

da qual se deduz

$$\dot{\mathbf{A}} \,|\!> [\mathbf{A}_1+\mathbf{A}_2+\ldots].$$

Logo temos

$$\ddot{\mathbf{A}} \mid \dot{\mathbf{A}} \mid [\mathbf{A}_1+\mathbf{A}_2+\ldots],$$

e a sucessão (9) converge para a soma dos seus termos.

Mais particularmente, se chamarmos sucessão de conjuntos monótona crescente a qualquer sucessão (9) tal que seja

$$\mathbf{A}_1 \,|\!< \mathbf{A}_2 \,|\!< \mathbf{A}_3 \,|\!< \ldots,$$

teremos a proposição seguinte:

Qualquer sucessão de conjuntos que seja monótona crescente converge para a soma dos seus termos.

69. Outros casos de convergência. Comparação dos limites de certas sucessões convergentes de conjuntos. — Comecemos por considerar k sucessões de conjuntos

$$\mathbf{A}_{h,1}\mathbf{A}_{h,2}, \ldots, \mathbf{A}_{h,i}, \ldots \qquad (h=1, 2, \ldots, k), \tag{11}$$

e seja

$$\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \ldots, \mathbf{B}_i, \ldots \tag{12}$$

uma sucessão formada de termos dessas sucessões; cada um dos conjuntos $\mathbf{A}_{h,i}$ que figure como têrmo da (12) poderá repetir-se, mas apenas um número finito de vezes, como têrmo desta sucessão.

Se atendermos às proposições do *v.* IV, *p.* 123 a-propósito das referidas sucessões, fàcilmente demonstraremos que:

Se as sucessões (11) *convergem para o mesmo limite* $\mathbf{A}$, *a sucessão* (12) *também converge para* $\mathbf{A}$.

Com efeito, temos $\ddot{\mathbf{B}} \mid< \mathbf{A} \mid< \dot{\mathbf{B}}$, donde vem $\ddot{\mathbf{B}} \mid \dot{\mathbf{A}} \mid \mathbf{A}$ [1].

Paralelamente a êste enunciado e com uma demonstração muito simples temos o seguinte:

Se as sucessões (11) *divergem para infinito, o mesmo acontece à sucessão* (12).

Como casos particulares temos que:

Se uma sucessão de conjuntos converge para um limite $\mathbf{A}$, *também converge para êste limite tôda a sucessão formada de termos da primeira e dispostos por qualquer ordem.*

Se uma sucessão de conjuntos diverge para infinito, o mesmo acontece a tôda a sucessão formada de termos da primeira e dispostos por qualquer ordem.

Nestes enunciados entende-se que certos termos da sucessão proposta poderão não figurar como termos da sucessão assim constituída, mas cada um dos que figurem sòmente poderá repetir-se um número finito de vezes.

---

[1] Chegaremos ao mesmo resultado, em virtude da proposição da *p.* 289, *l.* 23, se notarmos que, dadas as condições supracitadas, a sucessão (12) é quási-limitada e os seus limites juxtapõem-se a $\mathbf{A}$.

Citemos mais uma operação por meio da qual ainda se transforma uma sucessão convergente de conjuntos numa outra que também converge para os mesmos limites que a primeira.

A partir duma sucessão de conjuntos quaisquer

$$(13) \qquad \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_i, \ldots$$

formemos uma outra

$$(14) \qquad \mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \ldots, \mathbf{S}_i, \ldots$$

cujos termos sejam somas de termos da primeira nas seguintes condições: certos termos de (13) podem não figurar como parcelas em soma alguma $\mathbf{S}_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$, e cada um dos outros termos pode figurar como parcela de duas ou mais destas somas, mas necessàriamente em número finito.

Se a sucessão (13) *fôr convergente, a sucessão* (14) *também convergirá para os mesmos limites que a primeira.*

Para a demonstração consideremos um elemento $\mathbf{a}$ do limite totalmente fechado $\mathbf{A}$ da sucessão convergente (13). Êste elemento é limite duma sucessão convergente de elementos

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_i, \ldots$$

extraídos dos termos correspondentes da (13). Tomando uma parcela $\mathbf{A}_r$ da soma $\mathbf{S}_1$, uma parcela $\mathbf{A}_s$ da soma $\mathbf{S}_2$, e assim sucessivamente, a correspondente sucessão

$$\mathbf{a}_r, \mathbf{a}_s, \ldots, \text{(1)},$$

que é formada por elementos dos termos correspondentes da sucessão de conjuntos (14), converge ainda para o limite $\mathbf{a}$ [*v.* IV, *p.* 19, *l.* 7 e 14]. Logo $\mathbf{a}$ é um elemento do limite comum $\dot{\mathbf{S}}$, o que demonstra a relação $\mathbf{A} \mid < \dot{\mathbf{S}}$. Por outro lado também é fácil estabelecer a relação $\ddot{\mathbf{S}} \mid < \ddot{\mathbf{A}} \mid \mathbf{A}$, que, juntamente com a anterior, dá $\ddot{\mathbf{S}} \mid \dot{\mathbf{S}} \mid \mathbf{A}$, como desejávamos demonstrar.

---

(1) Os índices r, s, ... não se encontram necessàriamente por ordem crescente; alguns deles podem repetir-se, mas apenas um número finito de vezes.

Como aplicação dêste último resultado podemos verificar mais uma vez que uma dada sucessão convergente (13) admite os mesmos limites que a correspondente sucessão monótona decrescente

$$(\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \ldots),\ (\mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3 + \ldots),\ \ldots,\ (\mathbf{A}_i + \mathbf{A}_{i+1} + \ldots),\ \ldots$$

Se a primeira e terceira das sucessões de conjuntos

$$\begin{gathered} \mathbf{A}_1,\ \mathbf{A}_2,\ \ldots,\ \mathbf{A}_i,\ \ldots \\ \mathbf{B}_1,\ \mathbf{B}_2,\ \ldots,\ \mathbf{B}_i,\ \ldots \\ \mathbf{B}_1,\ \mathbf{C}_2,\ \ldots,\ \mathbf{C}_i,\ \ldots \end{gathered}$$

convergirem para o mesmo limite totalmente fechado $\mathbf{A}$, *e se, a partir de certa ordem, fôr* $\mathbf{A}_i \mid< \mathbf{B}_i \mid< \mathbf{C}_i$, *a segunda sucessão também convergirá para o limite* $\mathbf{A}$.

Com efeito, nestas condições temos evidentemente

$$\mathbf{A} \mid \dot{\mathbf{A}} \mid< \dot{\mathbf{B}} \mid< \ddot{\mathbf{B}} \mid< \ddot{\mathbf{C}} \mid \mathbf{A},$$

relações estas que dão $\dot{\mathbf{B}} \mid \ddot{\mathbf{B}} \mid \mathbf{A}$.

Consideremos agora duas sucessões de conjuntos

$$(15) \qquad \begin{gathered} \mathbf{A}_1,\ \mathbf{A}_2,\ \ldots,\ \mathbf{A}_i,\ \ldots \\ \mathbf{B}_1,\ \mathbf{B}_2,\ \ldots,\ \mathbf{B}_i,\ \ldots \end{gathered}$$

Se existir lim $\mathbf{A}_i$ *e se fôr lim* $\overline{\mathbf{A}_i \mathbf{B}_i} = 0$, *existirá lim* $\mathbf{B}_i$ *e teremos lim* $\mathbf{A}_i \parallel$ *lim* $\mathbf{B}_i$.

Com efeito, se fôr $\ddot{\mathbf{A}} \mid \dot{\mathbf{A}}$ e *lim* $\overline{\mathbf{A}_i \mathbf{B}_i} = 0$ teremos $\ddot{\mathbf{B}} \mid \dot{\mathbf{B}} \mid \ddot{\mathbf{A}}$ em virtude da proposição do *v.* IV, *p.* 122, *l.* 11, ou seja *lim* $\mathbf{A}_i \parallel$ *lim* $\mathbf{B}_i$.

Como conseqüências simples temos que:

Dadas duas sucessões convergentes (15), *a condição lim* $\overline{\mathbf{A}_i \mathbf{B}_i} = 0$ *é suficiente para que seja lim* $\mathbf{A}_i \parallel$ *lim* $\mathbf{B}_i$.

Convergem ou divergem ao mesmo tempo duas sucessões de conjuntos (15) *tais que sejam lim* $\overline{\mathbf{A}_i \mathbf{B}_i} = 0$; *as duas sucessões admitem então o mesmo derivado.*

Se os termos correspondentes de duas sucessões de conjuntos se juxtapõem entre si, estas convergem ou divergem ao mesmo tempo; o derivado duma das sucessões é o derivado da outra.

Uma sucessão de conjuntos e a sucessão dos respectivos lugares são convergentes ou divergentes ao mesmo tempo; o derivado duma das sucessões é o derivado da outra.

Dadas duas sucessões convergentes (15), *se fôr lim* $\overrightarrow{\mathbf{A}_i\mathbf{B}_i} = 0$ *teremos*

$$[lim\ \mathbf{A}_i] \,|\!< [lim\ \mathbf{B}_i]\,.$$

Com efeito, se fôr *lim* $\overrightarrow{\mathbf{A}_i\mathbf{B}_i} = 0$ teremos $\ddot{\mathbf{A}} \,|\!< \ddot{\mathbf{B}}$ [*p.* 121, *l.* 16].
Desta proposição decorrem imediatamente as seguintes:

Supondo convergente a primeira das sucessões (15), *se fôr lim* $\overrightarrow{\mathbf{A}_i\mathbf{B}} = 0$ *teremos*

$$[lim\ \mathbf{A}_i] \,|\!< [\mathbf{B}]\,;$$

se fôr lim $\overrightarrow{\mathbf{B}\mathbf{A}_i} = 0$ *teremos*

$$[\mathbf{B}] \,|\!< [lim\ \mathbf{A}_i]\,.$$

Dadas duas sucessões convergentes (15), *se os termos da primeira forem subconjuntos dos termos correspondentes da segunda, teremos*

$$[lim\ \mathbf{A}_i] \,|\!< [lim\ \mathbf{B}_i]\,.$$

Mais geralmente:

Dadas duas sucessões convergentes (15), *se existir uma subsucessão da primeira cujos termos sejam subconjuntos dos termos correspondentes duma subsucessão da segunda, teremos*

$$[lim\ \mathbf{A}_i] \,|\!< [lim\ \mathbf{B}_i]\,.$$

Porque, se as sucessões (15) são convergentes, o mesmo acontece às duas subsucessões mencionadas, que representamos por

$$\mathbf{A}_r\,,\ \mathbf{A}_s\,,\ \ldots\,,\ \mathbf{A}_u\,,\ \ldots$$

e

$$\mathbf{B}_{r'}\,,\ \mathbf{B}_{s'}\,,\ \ldots\,,\ \mathbf{B}_{u'}\,,\ \ldots,$$

e as relações

$$[lim\,\mathbf{A}_i]\mid[lim\,\mathbf{A}_u]\mid<[lim\,\mathbf{B}_u]\mid[lim\,\mathbf{B}_i]$$

dão

$$[lim\,\mathbf{A}_i]\mid<[lim\,\mathbf{B}_i]\,.$$

Suponhamos que é convergente a primeira das sucessões (15). *Se os termos* $\mathbf{A}_u$ *duma das suas subsucessões verificarem a condição*

$$\mathbf{A}_u\mid<\mathbf{B}\quad(u=r\,,\,s\,,\,\ldots),$$

teremos

$$[lim\,\mathbf{A}_i]\mid<[\mathbf{B}]\,;$$

se fôr

$$\mathbf{A}_u\mid>\mathbf{B}\quad(u=r\,,\,s\,,\,\ldots),$$

teremos

$$[lim\,\mathbf{A}_i]\mid>[\mathbf{B}]\,.$$

Suponhamos que as sucessões (15) *são convergentes. Se, qualquer que seja o número inteiro* $k>0$, *pudermos determinar em cada sucessão um têrmo que seja um subconjunto dum têrmo da outra, ambos os termos de ordem superior a* k, *teremos* $lim\,\mathbf{A}_i \parallel lim\,\mathbf{B}_i$.

Com efeito, nas condições do presente enunciado é evidente que uma qualquer das sucessões propostas admite uma subsucessão cujos termos são subconjuntos dos termos correspondentes duma subsucessão da outra; logo são verdadeiras as relações

$$[lim\,\mathbf{A}_i]\mid<[lim\,\mathbf{B}_i]$$

e

$$[lim\,\mathbf{A}_i]\mid>[lim\,\mathbf{B}_i]\,,$$

das quais resulta

$$[lim\,\mathbf{A}_i]\mid[lim\,\mathbf{B}_i]\quad\text{ou}\quad lim\,\mathbf{A}_i\parallel lim\,\mathbf{B}_i\,.$$

Sejam dadas duas sucessões de conjuntos (15), *uma das quais supomos quási-limitada. Se cada têrmo de qualquer delas contém os termos da outra a partir de certa ordem, as duas sucessões convergem para os mesmos limites.*

Demonstremos primeiro que, admitidas as condições do enunciado, as duas sucessões propostas são quási-limitadas. Com efeito, suponhamos que a primeira das sucessões (15), por exemplo, é quási-limitada. A um dado elemento **a** corresponde então um número $\rho > 0$ que faz

$$\underline{\mathbf{a}\,\mathbf{A}_i} < \rho \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

Mas, em virtude das condições do enunciado, cada têrmo $\mathbf{B}_h$ da segunda sucessão contém um têrmo $\mathbf{A}_i$ da primeira; logo temos

$$\underline{\mathbf{a}\,\mathbf{B}_h} \lesseqgtr \underline{\mathbf{a}\,\mathbf{A}_i} < \rho \quad (h = 1, 2, \ldots),$$

e a segunda sucessão também é quási-limitada.

Mostremos agora que duas subsucessões convergentes quaisquer, uma de cada sucessão, admitem necessàriamente os mesmos limites. Ora, como duas destas subsucessões satisfazem ainda às hipóteses do presente enunciado, segue-se que os limites duma são os limites da outra [*prop. prec.*], motivo porque as sucessões propostas convergem para os mesmos limites [*p.* 289 *l.* 23].

Também se reconhece a convergência das sucessões dadas notando que, por fôrça das condições do enunciado, cada têrmo de qualquer das duas sucessões contém os termos da mesma a partir de certa ordem [*p.* 291 *l.* 6].

70. Lugar dum conjunto (A) de conjuntos quaisquer. Conjuntos (A) fechados. — O conjunto dos subconjuntos dum dado espaçóide ilimitado **P** não é um outro espaçóide; basta notar que a distância entre dois conjuntos, um dos quais supomos limitado e o outro ilimitado, é necessàriamente infinita. O conjunto dos subconjuntos ilimitados de **P** também não é um espaçóide; efectivamente, já vimos que é possível determinar dois subconjuntos ilimitados de **P** a uma distância infinita um do outro [*p.* 102, *nota*]. Um conjunto fechado **A** (1) de subconjuntos ilimitados de **P** mas de distâncias finitas dois quaisquer deles, pode não constituir um espaçóide, como se depreende da observação que fizemos na *p.* 78.

Todavia algumas definições e propriedades gerais relativas aos espaçóides subsistem, como é de esperar, para o conjunto de todos os subconjuntos de **P**. Por exemplo, a definição de conjuntos juxtapostos, em geral, enuncia-se tal qual como se

(1) A definição de conjunto fechado (**A**) vem poucas linhas depois.

êsses conjuntos fôssem elementos dum espaçóide. As definições também já dadas de conjunto limitado e de diâmetro dum conjunto, de elemento limite dum conjunto e de derivado duma sucessão, admitem os mesmos enunciados quer nestas definições se considere um conjunto $(\mathbf{A})$ de conjuntos quaisquer e uma sucessão formada por tais conjuntos, quer um conjunto $\mathbf{A}$ de elementos dum espaçóide e uma sucessão dêstes mesmos elementos.

Anàlogamente estabelecemos as seguintes definições: o *lugar* $[(\mathbf{A})]$ dum conjunto $(\mathbf{A})$ de conjuntos quaisquer $\mathbf{A}$ é o conjunto dos limites de tôdas as sucessões convergentes que podemos construir com os elementos $\mathbf{A}$ de $(\mathbf{A})$; um conjunto $(\mathbf{A})$ de conjuntos quaisquer é *fechado* quando tôda a sucessão convergente formada com elementos de $(\mathbf{A})$ tende necessàriamente para um elemento dêste mesmo conjunto; um conjunto $(\mathbf{A})$ de conjuntos quaisquer é totalmente fechado quando temos $(\mathbf{A}) \mid [(\mathbf{A})]$, isto é, quando $(\mathbf{A})$ contém os limites de tôdas as sucessões convergentes que sejam formadas com os seus próprios elementos.

Notemos que as presentes definições relativas a conjuntos $(\mathbf{A})$ de conjuntos quaisquer são, em geral, distintas das que já conhecíamos a-propósito dos conjuntos $(\mathbf{A})$ de conjuntos limitados $\mathbf{A}$ quando estes conjuntos $\mathbf{A}$ eram considerados elementos dum espaçóide de conjuntos, Como sabemos, as primeiras definições que apresentámos nasceram da definição de limite duma sucessão de conjuntos de soma limitada; estas últimas da definição de limite duma sucessão de conjuntos quaisquer. Por exemplo, a sucessão de conjuntos de números cujo têrmo geral $\mathbf{A}_i$ é constituído pelos números 1 e i não admite derivado conforme a primeira definição que demos, e admite o número 1 por derivado conforme a segunda. Um dado conjunto de conjuntos limitados, que seja fechado conforme a primeira definição, pode não o ser quando nos referimos à segunda; é o que sucede com o conjunto dos termos da sucessão precedente. O lugar dum conjunto de conjuntos limitados, conforme a primeira definição, é um subconjunto do lugar do mesmo conjunto quando adoptamos a segunda.

Continuemos a considerar a definição geral de limite duma sucessão de conjuntos e demonstremos algumas proposições sôbre os conjuntos $(\mathbf{A})$ de conjuntos quaisquer.

Seja $(\mathbf{A})$ *um conjunto de conjuntos quaisquer* $\mathbf{A}$. *Para que um dado conjunto* $\mathbf{A}'$ *pertença ao lugar* $[(\mathbf{A})]$ *é necessário e suficiente* *que, para qualquer esferóide* F *ou simplesmente para os duma determinada sucessão de esferóides concêntricos cujos raios cresçam para infinito, cada conjunto* $\mathsf{H}' \mid \mathsf{T} + (\mathsf{F} \times \mathsf{A}')$ *(onde* T *designa a estrema dê* F*) pertença ao lugar do conjunto dos conjuntos* $\mathsf{H} \mid \mathsf{T} + (\mathsf{F} \times \mathsf{A})$ *correspondentes do mesmo esferóide e dos diversos conjuntos* A *de* (A).

A condição é necessária porque, se A' é limite duma sucessão

$$\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \ldots, \mathsf{A}_i, \ldots$$

de elementos de (A), a sucessão

$$\mathsf{H}_1, \mathsf{H}_2, \ldots, \mathsf{H}_i, \ldots,$$

de têrmo geral $\mathsf{H}_i \mid \mathsf{T} + (\mathsf{F} \times \mathsf{A}_i)$, converge para o conjunto $\mathsf{H}' \mid \mathsf{T} + (\mathsf{F} \times \mathsf{A}')$ seja qual fôr o esferóide considerado F [*p.* 141, *l.* 30]; como vemos, o conjunto H' pertence ao lugar do conjunto dos conjuntos H relativos ao mesmo esferóide.

Para demonstrar que a condição é suficiente suponhamos que a um certo conjunto A' corresponde uma sucessão de esferóides

$$\mathsf{F}_1, \mathsf{F}_2, \ldots, \mathsf{F}_i, \ldots$$

que satisfaçam às condições do enunciado. Relativamente ao esferóide F_i de estrema T_i podemos determinar, por hipótese, um elemento A_i de (A) tal que, pondo

$$\mathsf{H}'_i \mid \mathsf{T}_i + (\mathsf{F}_i \times \mathsf{A}')$$

e

$$\mathsf{H}_i \mid \mathsf{T}_i + (\mathsf{F}_i \times \mathsf{A}_i),$$

seja

$$\overline{\mathsf{H}'_i \mathsf{H}_i} < \frac{1}{i}.$$

Para $i = 1, 2, \ldots$ obtemos as sucessões de conjuntos

$$\begin{array}{l} \mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \ldots, \mathsf{A}_i, \ldots \\ \mathsf{H}'_1, \mathsf{H}'_2, \ldots, \mathsf{H}'_i, \ldots \\ \mathsf{H}_1, \mathsf{H}_2, \ldots, \mathsf{H}_i, \ldots \end{array}$$

Mas temos $lim\, \mathsf{H}'_i \parallel \mathsf{A}'$ [*p.* 138, *l.* 21], donde resulta $lim\, \mathsf{H}_i \parallel \mathsf{A}'$ visto-que é $lim\, \overline{\mathsf{H}'_i \mathsf{H}_i} = 0$ [*p.* 295, *l.* 19]. Logo também temos $lim\, \mathsf{A}_i \parallel \mathsf{A}'$ [*p.* 138, *l.* 11], e assim demonstramos que o conjunto dado A' pertence ao lugar $[(\mathsf{A})]$, como tínhamos previsto.

Para que um conjunto A' *pertença ao lugar* $[(\mathsf{A})]$ *dum dado conjunto* (A) *de conjuntos quaisquer* A, *é suficiente que, para qualquer esferóide* F *duma determinada sucessão de esferóides concêntricos cujos raios cresçam para infinito, cada conjunto* $\mathsf{G}' \mid \mathsf{F} \times \mathsf{A}'$ *pertença ao lugar do conjunto dos conjuntos* $\mathsf{G} \mid \mathsf{F} \times \mathsf{A}$ *correspondentes do mesmo esferóide e dos diversos conjuntos* A *de* (A).

Efectivamente, se, para cada um dos esferóides considerados F, o conjunto $\mathsf{G}' \mid \mathsf{F} \times \mathsf{A}'$ é limite duma sucessão convergente

$$\mathsf{G}_1, \mathsf{G}_2, \ldots, \mathsf{G}_i, \ldots$$

de conjuntos $\mathsf{G} \mid \mathsf{F} \times \mathsf{A}$ correspondentes do mesmo esferóide, também o conjunto $\mathsf{H}' \mid \mathsf{T} + \mathsf{G}'$ é limite da sucessão convergente

$$\mathsf{H}_1, \mathsf{H}_2, \ldots, \mathsf{H}_i, \ldots$$

na qual é $\mathsf{H}_i \mid \mathsf{T} + \mathsf{G}_i$ [*p.* 149, *l.* 2]. O conjunto A' pertence, por conseguinte ao lugar do conjunto dos conjuntos $\mathsf{H} \mid \mathsf{T} + \mathsf{G}$, e A pertence ao lugar $[(\mathsf{A})]$ em virtude da proposição precedente.

O lugar dum conjunto (A) *de conjuntos quaisquer é totalmente fechado.*

Com efeito, seja A' um limite duma sucessão convergente

$$\mathsf{A}'_1, \mathsf{A}'_2, \ldots, \mathsf{A}'_i, \ldots$$

de elementos do lugar $[(\mathsf{A})]$ dum dado conjunto (A) de conjuntos quaisquer A. Consideremos um esferóide F de estrema T. Ponhamos

$$\mathsf{H} \mid \mathsf{T} + (\mathsf{F} \times \mathsf{A}),\ \mathsf{H}' \mid \mathsf{T} + (\mathsf{F} \times \mathsf{A}'),$$
$$\mathsf{H}'_i \mid \mathsf{T} + (\mathsf{F} \times \mathsf{A}'_i)$$
$$(i = 1, 2, \ldots),$$

e provemos que o conjunto H' pertence ao lugar do conjunto de todos os conjuntos H relativos aos diversos conjuntos A de (A).

Ora, da penúltima proposição que demonstrámos resulta que, dado um valor de i, é possível determinar um conjunto $\mathbf{H}_i$ entre os conjuntos $\mathbf{H}$ de forma que seja $\overline{\mathbf{H}_i \mathbf{H}'_i} < \frac{1}{i}$. Para os valores $i = 1, 2, \ldots$ a sucessão que se obtém

$$\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2, \ldots, \mathbf{H}_i, \ldots$$

satisfaz à condição $lim\, \overline{\mathbf{H}_i \mathbf{H}'_i} = 0$, e, visto-que é $lim\, \mathbf{H}'_i \parallel \mathbf{H}'$ [*p*. 141, *l*. 31] também temos $lim\, \mathbf{H}_i \parallel \mathbf{H}'$ [*p*. 295, *l*. 19]. Conseqüentemente o conjunto $\mathbf{H}'$ pertence ao lugar do conjunto dos conjuntos $\mathbf{H}$, e, como $\mathbf{F}$ é um esferóide qualquer, segue-se que $\mathbf{A}'$ é um elemento de $[(\mathbf{A})]$ por fôrça da penúltima proposição. O conjunto $[(\mathbf{A})]$ é, pois, totalmente fechado.

O conjunto $(\mathbf{A})$ *de todos os subconjuntos* $\mathbf{A}$ *dum dado conjunto* $\mathbf{B}$ *admite por lugar o conjunto dos subconjuntos do lugar* $[\mathbf{B}]$.

Seja $(\mathbf{A})$ o conjunto dos subconjuntos $\mathbf{A}$ dum dado conjunto $\mathbf{B}$. É manifesto que um limite qualquer duma sucessão convergente de conjuntos $\mathbf{A}$ é um subconjunto do lugar $[\mathbf{B}]$. Por outras palavras: qualquer elemento do lugar $[(\mathbf{A})]$ é um subconjunto do lugar $[\mathbf{B}]$. Recìprocamente, demonstremos que um dado subconjunto $\mathbf{A}'$ de $[\mathbf{B}]$ é um elemento de $[(\mathbf{A})]$. Para isso façamos corresponder a cada elemento de $\mathbf{A}'$ um elemento de $\mathbf{B}$ a uma distância do primeiro menor de que $\frac{1}{i}$, e designemos por $\mathbf{A}_i$ o conjunto constituído por tais elementos de $\mathbf{B}$. Temos evidentemente $\overline{\mathbf{A}_i \mathbf{A}'} \leqq \frac{1}{i}$, e a sucessão de subconjuntos de $\mathbf{B}$

$$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_i, \ldots$$

que resulta de darmos a i os valores $1, 2, \ldots$ verifica a condição $lim\, \overline{\mathbf{A}_i \mathbf{A}'} = 0$. Por conseguinte vem $lim\, \mathbf{A}_i \parallel \mathbf{A}'$ [*p*. 290, *l*. 11], donde se segue que o conjunto $\mathbf{A}'$ é um elemento de $[(\mathbf{A})]$.

A presente demonstração é idêntica à da proposição que se encontra na *p*. 120, *l*. 36.

É fechado o conjunto $(\mathbf{A})$ *de todos os subconjuntos dum dado conjunto fechado* $\mathbf{B}$.

Pode servir de demonstração a que se encontra na *p.* 121, *l.* 18; simplesmente devemos supor agora que os subconjuntos de **A** que ali consideramos são quaisquer, e não sòmente limitados.

É totalmente fechado o conjunto (**A**) *de todos os subconjuntos dum dado conjunto totalmente fechado* **B**.

Esta proposição pode justificar-se como procedemos na da *p.* 121, *l.* 30, admitindo neste caso, que se trata de subconjuntos quaisquer de **A** e de [**A**], e não necessàriamente de subconjuntos limitados.

(Continua).

LUÍS BEDA NETO.

Soles de ferro birefringentes por agitação

É bem conhecida a dupla refracção que se observa no sole de V_2O_5 entre nicois cruzados e quando se imprime ao líquido movimento de rotação. No sole de hidróxido de ferro não se tem observado fenómeno análogo. Por outros meios, por exemplo, pela acção dum campo mágnético ou eléctrico, é possível provocar a birefringência do último sole. Até hoje sòmente Zocher observou a formação espontânea de partículas anisotrópicas e tactoides num sole de hidróxido de ferro muito velho e de proveniência desconhecida.

Falharam porém tôdas as experiências deste autor feitas com o fim de preparar um sole de ferro análogo ao de pentóxido de vanádio. Os tactoides do sole de Zocher teem um aspecto completamente diferente do dos de pentóxido de vanádio. Emquanto êstes teem formas e contornos bem definidos, aqueles sòmente teem na espessura dimensões coloidais. A sua superfície é ilimitada e pode estender-se por tôda a secção do vaso. Dá se o interessante fenómeno da sedimentação das camadas tactoidais, sendo as distâncias entre elas da ordem de grandeza do comprimento de onda da luz.

Da interferência da luz reflectida resulta a côr verde observada por Zocher no seu sole. A radiografia do sedimento mostrou tratar-se de FeO (OH), que se encontra na natureza (Goethite) e apresenta o mesmo fenómeno.

Heller conseguiu obter camadas coloidais pela hidrólise lenta de soluções diluidas de $FeCl_3$; a côr da interferência depende da concentração. Jacobsohn observou fenómeno análogo com WO_3 pela hidrólise de soluções diluidas de tungstato de sódio.

Durante as nossas investigações recebemos da Alemanha um sole de hidróxido de ferro com aparência desusada e muito viscoso. O exame microscópico deste sole mostrou a presença, em grande número, de tactoides; observado entre nícois cruzados mostrou forte birefringência positiva de corrente.

Os tactoides observados teem forma idêntica à dos V_2O_5, sendo o movimento browniano dentro deles muito menos intenso. A côr dos tactoides é muito mais clara do que a do atactosole. Parece que as partículas formam discos, e não varetas, e os tactoides são mais resistentes à compressão do que os do pentóxido de vanádio.

O sole de pentóxido de vanádio, depois da destruição dos tactoides, mostra-se isotrópico no microscópico de polarização, e, passado algum tempo, recomeça a formação dos tactoides. No sole de $Fe(OH)_3$ a destruição completa dos tactoides é quási impossível; ficam sempre na preparação microscópica partes birefringentes onde há partículas orientadas paralelamente.

A-pesar-de os tactoides do sole de ferro serem fortemente birefringentes, não mostram dicroísmo na parte visível do espectro. Isto quere dizer que deve tratar-se dum composto muito menos córado do que a Goethite.

A análise química não pode dar indicações sôbre a constituïção das partículas. Num próximo trabalho conseguiremos obter esclarecimentos sôbre esta composição, altamente interessante debaixo de vários pontos de vista, com o emprêgo de raios X. Daqui por diante falaremos simplesmente do sole de ferro por não conhecermos o composto dêste elemento de que se trata.

Descobertos os tactoides de ferro, procurámos preparar uma solução que os contenha.

O sole que recebemos da Alemanha é um produto industrial preparado em grande escala. O processo de preparação geralmente usado é o de Graham. Parece-nos que a mesma preparação se pode fazer, também com caracter industrial, peptisando o hidróxido de ferro recentemente preparado com cloreto férrico. Quer seguindo o método de Graham, convenientemente modificado, quer seguindo o referido processo de preparação, conseguimos obter soles birefringentes por agitação, tendo o segundo dêstes apresentado tactoides.

Processo de peptisação

Dada a analogia do tactoide de ferro com o tactoide de vanádio, precipitamos pela amónia, a quente, o hidróxido de ferro numa solução de cloreto férrico a 30 %. Ao precipitado, depois de bem lavado por decantação e centrifugado, juntamos uma solução concentrada de cloreto férrico.

No fim de dois dias todo o hidróxido de ferro estava peptisado, e dez dias depois apresentava forte birefringência e começo de formação de tactoides. Passado mais tempo o sole apresentou tactoides bem definidos.

Se compararmos êste processo de preparação com o do pentóxido de vanádio, vemos o seguinte: no caso do sole de vanádio, precipita-se o V_2O_5, do metavanadato de amónio, por ácido clorídrico, lava-se o precipitado, que é peptisado pelo metavanadato-ião, resultante da dissolução na água do V_2O_5.

No caso do sole de ferro, como o hidróxido de ferro é muito insoluvel, não existe ferro-ião com a concentração necessária para se dar a peptisação; é necessário, por êste motivo, cloreto férrioc.

No caso do sole de vanádio, é absorvido o ião VO_3^-, ficando as partículas negativamente carregadas; no caso do sole de ferro, é adsorvido o ião Fe^{+++}, e as partículas apresentam carga positiva.

Modificação do método de Graham

Com o fim de acelerarmos o aparecimento de birefringência e de tactoides, introduzimos as seguintes modificações no método de Graham.

Partimos de soluções saturadas de cloreto férrico e de carbonato de amónio: a primeira foi obtida fundindo a 70° C o $FeCl_3$, $6H_2O$.

Chegámos assim à formação imediata dum sole de ferro, fortemente birefringente, mas sem tactoides.

Depois de muitos ensaios assentámos no seguinte método de preparação. A 10 cc. da solução de cloreto férrico, obtida como dissemos, depois de arrefecida, junta-se, agitando fortemente, 1 cc. da solução saturada de carbonato de amónio. Passados 25 a 30 minutos, forma-se um gele tixotrópico fortemente birefringente. Nesta altura junta-se, muito lentamente ao princípio, mais ràpidamente no fim da reacção, que deve levar 3-4 horas, 40 cc. de carbonato de amónio. A adição de mais de 40 cc. provoca a coagulação do sole.

O sole assim preparado deixa-se em repouso 2-3 dias. Durante êste tempo o sole, que se apresentava turvo e com côr amarela, torna-se mais escuro, límpido e fortemente birefringente. Nesta altura purificamos por electrodiálise e concentramos por ultrafiltração. Depois de purificado, o sole tem exactamente o mesmo aspecto daquele onde encontramos os tactoides. É de esperar que êstes com o tempo, se formem.

O estudo da constituição dos soles considerados apresenta dificuldades devidas principalmente a impossibilidade de determinar a constituição química das suas partículas. De harmonia com os ensaios que fizemos, propomos, provisòriamente a seguinte explicação.

As partículas que constituem o sole de Graham não são anisotrópicas; porém, sendo êste sole submetido a acção dum campo eléctrico ou magnético, apresentam-se anisotrópicas, ficando o sole birefringente e dicroico. Na caso do sole de Zocher, acima citado, as partículas apresentavam anisotropia espontânea, por serem constituidas por Goethite, $FeO(OH)$, que, como sabemos, é birefringente e dicroica. O sole por nós preparado, bem como o sole vindo da Alemanha, a pesar-de serem birefringentes, não apresentam dicroismo na parte visível do espectro. Sendo assim, é possível que a composição química das micelas dêstes soles sejam diferentes da composição química das micelas do sole de Graham e Zocher.

Verificámos que uma solução concentrada de cloreto férrico, aquecida, apresenta uma fraca birefringência de corrente. Esta deve atribuir-se à formação, por hidrólise, de cloretos bàsicos de ferro; a formação dêstes cloretos pode ser interpretada considerando a hidrólise progressiva do cloreto férrico:

$$FeCl_3 \rightleftarrows FeCl_2(OH) \rightleftarrows FeCl(OH)_2 \rightleftarrows Fe(OH)_3$$

Juntando lentamente carbonato de amónio à solução do cloreto férrico, favorecemos a formação dos cloretos básicos e do hidróxido férrico, funcionando as partículas já existentes como germens de cristalização. O sole resultante é anisotrópico. Se a adição da solução do carbonato de amónio fôr rápida, a velocidade de precipitação é maior do que a velocidade de ordenação (Haber), ao contrário do que acontece no caso anterior; o sole resultante não é auisotrópico.

O sole obtido pela adição rápida do carbonato de amónio apresenta a côr vermelho-escura, e o sole obtido pela adição lenta apresenta a côr amarela, possivelmente devido aos sais básicos formados. Com o tempo, ou por diálise, o sole amarelo escurece, lentamente no primeiro caso e mais ràpidamente no segundo. Êste fenómeno pode ser explicado supondo que se dá uma reacção topoquímica em que o cloreto ião micelar é substituido pelo hidroxilião, mantendo as micelas a sua forma, e aumentando a concentração do hidróxido férrico.

No sole formado pela peptização do $Fe(OH)_3$ com $FeCl_3$ supomos que anisotropia é devida à formação de cloretos básicos, segundo o esquema anterior, deslocando-se o equilíbrio para a esquerda, devido ao p_H ser mais baixo do que no caso de empregarmos carbonato de amónio.

ZUSAMMENFASSUNG:

Nachdem wir an einem fabrikmaessig hergestelltem Eisenhydroxydsol das Vorhandensein von Taktoiden und starker Stroemungsdoppelbrechung festgestellt haben, unternahmen wir Versuche zur Bestimmung der Entstehungsbedingungen dieses Sols. Auf zwei verschiedenen Wegen gelangten wir zu einem Ergebnis: Durch Peptisation von frisch gefaelltem und gut ausgewaschenem Eisenhydroxyd mit Eisenchlorid und durch geeignete Abaenderungen des Graham-Prozesses

Die Bildungsweise dieses Sols wird erklaert durch Keimwirkung eines basischen Eisenchlorides, entstanden durch Erhitzen der Eisenchloridloesung, und durch nachfolgende topochemische Umwandlung des basischen Eisenchlorides in Eisenhydroxyd bis zü einem gewissen Gleichgewichtszustand.

Kurt Coper

Coimbra, Laboratório Químico da Universidade.

BIBLIOGRAFIA

1) Zocher H. Zeitsch. fuer anorg. Chemmie, 147, 91, 1925.
2) Majorana, Atti Linc. 11, I 374, II 90, 1902.
3) Bergholm & Bjoernstahl, Physik Zeitsch. 21, 137, 1920.
4) Zocher H. & Jacobsohn K. Koll. Beihefte, 28, 167, 1929.
5) Zocher H. & Coper K. Zeitsch, fuer physik. Chemie, Haber-Festschrift, 1929.
6) Coper K. Esta revista, Vol. II, 4, 1932.
7) Haber F. Ber. Dtsch. chem. Ges. 55, 1717, 1922.

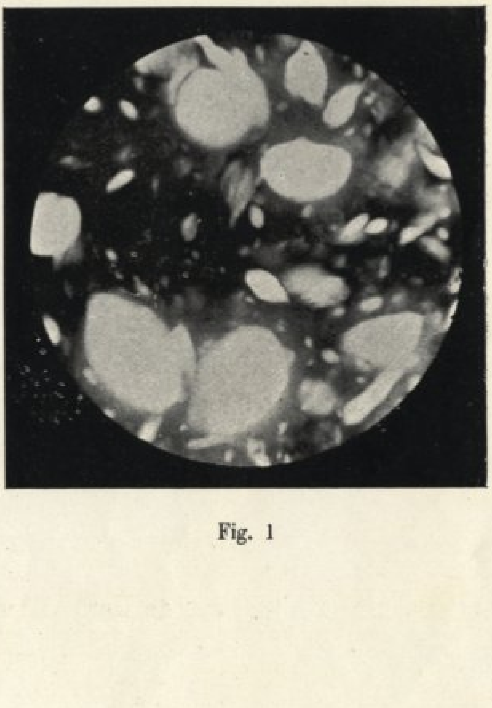


Fig. 1

AVISO

Tôda a correspondência relativa à redacção deve ser dirigida à Direcção da Faculdade de Ciências, com a indicação de que se refere à REVISTA.