applicando o mesmo méthodo a estes novos limites, acharemos outros dois cuja differença será

$$b''' - a''' = \frac{1}{10^{4n+3k}},$$

e assim por deante.

Para se obter por este processo a convergencia regular e rápida das approximações successivas, é necessario que seja $2n + k > n$ ou $n > -k$, isto é, $n \geqq 1 - k$; se esta condição não se verificar, estreitaremos mais os limites.

Pode acontecer que o valor de k, que suppozemos constante, augmente em alguma das operações; mas neste caso só ha a notar que a approximação se tornará então mais rapida.

181. *Exemplo.* — Appliquemos estes princípios á equação do n.° 179; as funcções de Fourier são:

$$f(x) = x^3 - 2x - 5$$
$$f'(x) = 3x^2 - 2,$$
$$f''(x) = 6x,$$
$$f'''(x) = 6.$$

Com os numeros da progressão décupla temos

	$f(x)$,	$f'(x)$,	$f''(x)$,	$f'''(x)$
(-1)	−	+	−	+
(<0)	−	−	−	+
(0)	−	−	0	+
$(>0$	−	−	+	+
(1)	−	+	+	+
(10)	+	+	+	+

Ha duas raizes indicadas entre -1 e 0, e uma entre 1 e 10; aquellas são imaginárias, por ser

$$|f(-1)| = 4,\ |f'(-1)| = 1,\ |f(0)| = 5,\ |f'(0)| = 2,$$

e $\frac{4}{1} + \frac{5}{2}$ maior que a differença 1 dos limites. Quanto á raiz real, para obter dois limites que a comprehendam e cuja differença seja uma unidade da ordem do seu último algarismo, substituiremos nas funcções precedentes numeros da ordem natural que darão

	$f(x)$,	$f'(x)$,	$f''(x)$,	$f'''(x)$
2...	$-$	$+$	$+$	$+$
	1	0	0	0
3...	$+$	$+$	$+$	$+$.

Aquella raiz fica, pois, entre 2 e 3; e a linha dos índices mostra que podemos desde já proceder á approximação. Mas, dividindo o maior valor de $f''(x)$ pelo menor de $2f'(x)$, achamos $\frac{18}{20} = 0{,}9$ e a unidade de ordem immediatamente superior ao primeiro algarismo d'este numero é $1 = \frac{1}{10^0}$; donde resulta $k = 0$. Por outra parte, a differença 1 dos limites dá $n = 0$; isto é, a condição $n \overline{\gtrless} 1 - k$ não é satisfeita e devemos estreitar mais o intervallo.

Fazendo então $x = 2$ e $x = 2{,}1$, temos

	$f(x)$,	$f'(x)$,	$f''(x)$,	$f'''(x)$
2...	$-$	$+$	$+$	$+$.
2,1...	$+$	$+$	$+$	$+$;

logo a raiz fica entre 2,0 e 2,1. A differença dos novos limites é $\frac{1}{10}$, donde $n=1$; o maior dos valores de $f''(x)$ dividido pelo menor dos valores de $2f'(x)$ é $\frac{12,6}{20}=0,63$; a unidade immediatamente superior ao primeiro algarismo do quociente é 1 e portanto $k=0$: logo será $n=1-k$, o que indica que podemos proceder á approximação sem estreitar mais os limites.

Ora, o limite exterior é o maior 2,1 e a primeira approximação dá

$$2,1-\frac{f(2,1)}{f'(2,1)}=2,1-\frac{0,061}{11,23};$$

devemos levar a divisão até o algarismo decimal da ordem $2n+k$, isto é, até centesimas, e augmentar o último algarismo com uma unidade. Mas é

$$\frac{0,061}{11,23}=0,00\ldots;$$

e portanto o numero a subtrahir de 2,1 é 0,01, o que dá o *primeiro valor approximado* 2,09 com erro inferior a $\frac{1}{10^2}$.

Não sabemos, porém, qual é o sentido d'este erro; substituindo x por 2,09 em $f(x)$, acha-se $-0,050671$ e o signal d'este resultado mostra que a raiz fica entre os novos limites 2,09 e 2,10. A differença $\frac{1}{10^2}$ d'estes dois numeros dá $n=2$ e a approximação seguinte deve ir até á quarta casa de dizima.

Continuaremos pois a divisão de 0,061 por 11,23 até esta ordem, o que dará 0,0054; e teremos para *segundo valor approximado*

$$2,10-0,0055=2,0945,$$

com erro inferior a $\frac{1}{10^4}$. Mas $f(2{,}0945) = -0{,}000574591375$; o signal d'este resultado mostra que a raiz é $> 2{,}0945$, e fica entre os novos limites 2,0945 e 2,0946, dos quaes o segundo é exterior.

Na approximação seguinte teriamos

$$2{,}0946 - \frac{f(2{,}0946)}{f'(2{,}0945)},$$

devendo levar a divisão até o oitavo algarismo da dizima, por ser $n = 4$. Continuando assim, Fourier em mais duas approximações acha o valor da raiz com 32 algarismos exactos de dizima.

Por este exemplo se vê que as operações mais trabalhosas são duas: as substituições de x por numeros compostos de muitos algarismos, e as divisões. Fourier simplificou uma e outra; a primeira, aproveitando em cada approximação os calculos da approximação anterior, por um processo fundado na fórmula de Taylor; a segunda, considerando em cada divisão parcial sómente os algarismos do divisor indispensaveis para dar com exactidão o algarismo correspondente do quociente.

182. *Méthodo de Horner.* — Supponhamos que são conhecidos dois limites, sufficientemente proximos, que comprehendem uma raiz da proposta $f(x) = 0$; sejam α e $\alpha + u$ estes limites, sendo u uma unidade da ordem de α.

Transformemos a equação pela relação $y = x - \alpha$; a transformada $f_1(y) = 0$ terá uma raiz entre 0 e u. Para a determinar approximadamente, supprimimos os termos com as potencias de y superiores á primeira; fica assim a equação incompleta

$$ky + l = 0,$$

que dará para y um valor comprehendido entre α' e $\alpha' + \frac{u}{10}$, sendo α' de ordem decimal immediata a α.

Transformando novamente a equação $f_1(y)=0$ pela relação $z=y-\alpha'$, a equação $f_2(z)=0$ terá uma raiz entre 0 e $\frac{u}{10}$; determina-se approximadamente esta raiz, resolvendo a equação que se obtém egualando a somma dos dois últimos termos de $f_2(z)$ a zero.

Continuando estas operações, levaremos a approximação até onde fôr necessario. Como cada algarismo é dado por uma equação incompleta, póde acontecer que o valor assim obtido esteja errado por excesso ou por defeito.

O primeiro caso será indicado pela mudança de signal do termo conhecido da transformada seguinte. Com effeito, supponhamos α' errado por excesso; o valor de y estará entre 0 e α' e não entre α e $\alpha'+\frac{u}{10}$; de modo que $f_1(0)$ e $f_1(\alpha')$ terão signaes contrarios. Ora $f_1(0)$ é o termo conhecido de $f_1(y)=0$; $f_1(\alpha')$ é o termo conhecido de $f_2(z)=f_1(z+\alpha')=0$: o que justifica a proposição enunciada.

Se α' fôr errado por defeito, a approximação seguinte o indicará, dando um numero maior de 9 unidades da classe immediata. Se tivermos achado para α' 0,4 em vez de 0,5, a transformada seguinte, que ha de dar o algarismo das centesimas, determinará um numero maior que 9.

Appliquemos o méthodo á mesma equação

$$x^3-2x-5=0\,.$$

A proposta tem uma raiz entre 2 e 3; a transformada em $x-2$ resulta *(n.° 86)* do seguinte quadro dos coefficientes:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 0 & -2 & -5 \\
\hline
2\,.. & 1 & 2 & 2 & -1 \\
 & 1 & 4 & 10 & \\
 & 1 & 6 & & \\
\end{array}$$

e é

$$x^3+6x^2+10x-1=0\ ,$$

com uma raiz comprehendida entre 0 e 1. Os dois últimos termos dão

$$10x-1=0\ ,\quad x=0,1\ ,$$

o que indicará uma raiz da transformada, comprehendida entre 0,1 e 1.

Formemos a nova transformada em $x-0,1$:

$$\begin{array}{rrrrr} & 1 & 6 & 10 & -1 \\ \hline 0,1\ldots & 1 & 6,1 & 10,61 & 0,061\ ; \end{array}$$

por onde se vê, sem continuar a operação, que o valor precedente está errado por excesso, visto que o termo conhecido 0,061 da transformada tem signal contrário ao do termo conhecido -1 da equação precedente. Vejamos então se aquella raiz estará entre 0,09 e 0,1; a transformada será

$$\begin{array}{rrrrr} & 1 & 6 & 10 & -1 \\ \hline 0,09\ldots & 1 & 6,09 & 10,5481 & -0,050671 \\ & 1 & 6,18 & 11,1043 & \\ & 1 & 6,27 & & \end{array}$$

$$x^3+6,27x^2+11,1043x-0,050671=0\ .$$

Os dois últimos termos dão

$$x=\frac{50671}{11104300}=0,004\ldots;$$

e a nova transformada em $x-0,004$ será

	1	6,27	11,1043	−0,050671
0,004...	1	6,274	11,129396	−0,006153416
	1	6,278	11,154508	
	1	6,282		

$$x^3+6,282x^2+11,154508x-0,006153416=0\,.$$

Os dois últimos termos dão

$$x=\frac{6153416}{11154508000}=0,0005\ldots$$

e a transformada em $x-0,0005$ será

	1	6,282	11,154508	−0,006153416
0,0005...	1	6,282	11,157649	−0,000574591
	1	6,282	11,160790	
	1	6,282		

$$x^3+6,282x^2+11,16079x-0,000574591=0\,,$$

donde $x = \dfrac{0{,}000574591}{11{,}16079} = 0{,}0000514$. Reunindo finalmente os resultados obtidos, acha-se para valor da raiz real da proposta o numero 2,0945514, com 7 decimaes exactas.

183. *Méthodo de Lagrange.* — Lagrange obtém as raizes positivas das equações em forma de fracção contínua, pelo seguinte processo.

1.° Supponhamos que a proposta $f(x) = 0$ tem uma só raiz entre dois inteiros consecutivos a e $a+1$; façamos

$$x = a + \frac{1}{x_1}.$$

A equação transformada terá só uma raiz maior que 1, e a substituição de numeros inteiros mostrará que essa raiz fica entre a_1 e $a_1 + 1$, ou

$$x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2}:$$

e assim por deante.

2.° Se houver mais de uma raiz entre a e $a+1$, supponhamos que chegamos a determinar um intervallo tal, que entre os limites $\dfrac{h}{m}$ e $\dfrac{h+1}{m}$ haja uma só raiz da proposta. Faremos $y = mx$, e a transformada

$$f(y) = 0$$

terá uma só raiz entre os inteiros k e $k+1$, que determinaremos como no primeiro caso (*Résolution des Équations numériques*).

184. *Méthodo das partes proporcionaes.* — Supponhamos que a raiz a_1 da proposta $f(x) = 0$ está separada entre os limites α e

$\beta > \alpha$; fazendo $x_1 = \alpha + h$ e $x_1 = \beta - k$, teremos

$$f(\alpha) = f(x_1) - hf'(x_1) + \frac{h^2}{2} f''(x_1) - \dots$$

$$f(\beta) = f(x_1) + kf'(x_1) + \frac{k^2}{2} f''(x_1) + \dots$$

Suppondo h e k quantidades tão pequenas, que não seja necessario conservar no cálculo a 2.ª potencia d'estes numeros, nem as suas potencias superiores á 2.ª, teremos, por ser $f(x_1) = 0$,

$$f(\alpha) = -hf'(x_1)\,, \quad f(\beta) = kf'(x_1)\,,$$

donde

$$\frac{f(\alpha)}{f(\beta)} = -\frac{h}{k} = \frac{x_1 - \alpha}{x_1 - \beta}\,.$$

Esta expressão será tanto mais exacta, quanto mais próximos forem os limites; d'ella se tira

$$x_1 = \frac{\beta f(\alpha) - \alpha f(\beta)}{f(\alpha) - f(\beta)} = \alpha + \frac{(\beta - \alpha) f(\alpha)}{f(\alpha) - f(\beta)}\,.$$

Representando por b este valor approximado de x_1, tomamos agora para intervallo (αb), ou $(b\beta)$, e applicamos-lhe novamente a mesma fórmula.

Por exemplo, seja a equação

$$f(x) = x^3 - 4x^2 - 2x + 4 = 0\,,$$

e procuremos a raiz comprehendida entre 4 e 5. Temos

$$\begin{aligned} \alpha=4\ , &\quad f(\alpha)=-\ 4 \\ \beta=5\ , &\quad f(\beta)=\ \ 19 \end{aligned} \qquad x=4+\frac{4}{23}=4{,}2$$

approximadamente. Depois

$$\begin{aligned} \alpha=4\ \ \ \ , &\quad f(\alpha)=-4 \\ \beta=4{,}2\ , &\quad f(\beta)=-0{,}872 \end{aligned} \qquad x=4+\frac{0{,}8}{3{,}128}=4{,}25\ ;$$

em terceiro logar

$$\begin{aligned} \alpha=4{,}2\ \ \ , &\quad f(\alpha)=-0{,}872 \\ \beta=4{,}25\ , &\quad f(\beta)=\ \ 0{,}015625 \end{aligned} \qquad x=4{,}2+\frac{0{,}05\times 0{,}872}{0{,}887625}\ ,$$

ou $x=4{,}2491$; finalmente

$$\begin{aligned} \alpha=4{,}2491\ , &\quad f(\alpha)=-0{,}00073667\ , \\ \beta=4{,}25\ \ \ \ \ , &\quad f(\beta)=\ \ 0{,}015625\ \ \ \ , \end{aligned}$$

e

$$x=4{,}2491+\frac{0{,}0009\times 0{,}00073667}{0{,}01636167}$$

$$=4{,}24914050\ .$$

E assim por deante.

CAPÍTULO VI.

Raizes imaginárias.

185. Dada a equação $f(z)=0$, de coefficientes reaes ou imaginários, a determinação das suas raizes imaginárias faz-se depender do cálculo das raizes reaes de outras equações de coefficientes reaes. Com effeito, se fizermos $z=x+iy$, sendo x e y variaveis reaes, a proposta torna-se em

$$f(x+iy)=f_1(x,y)+if_2(x,y)=0\ ,$$

onde $f_1(x,y)$ e $f_2(x,y)$ são funcções de coefficientes reaes. O módulo de $f(x+iy)$, ou a raiz quadrada de

$$[f_1(x,y)]^2+[f_2(x,y)]^2\ ,$$

não poderá ser zero sem que seja

$$f_1(x,y)=0\ ,\quad f_2(x,y)=0\ ;$$

portanto se $a+bi$ fôr uma raiz da proposta, estas equações terão a solução commum $x=a$, $y=b$: e reciprocamente.

Se x e y forem coordenadas rectangulares, as equações $f_1(x,y)=0$, $f_2(x,y)=0$ representam duas curvas; a e b são as coordenadas de um ponto commum á ambas ellas. A resolução da proposta equivale á determinação de todos estes pontos communs, que por este motivo se chamam *pontos raizes;* cada um d'elles define o imaginário correspondente $a+bi$.

186. *Lemma.* — Façamos, por brevidade,

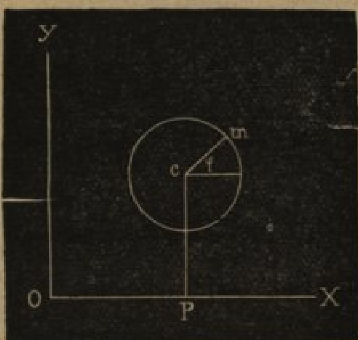
$$f_1(x,y)=\mathrm{P}\ ,\quad f_2(x,y)=\mathrm{Q}$$

e portanto

$$f(z)=\mathrm{P}+i\mathrm{Q}=0\ ;$$

seja $z_0=a+bi$ uma raiz d'esta equação e c o ponto raiz correspondente.

Descrevamos do ponto c como centro, e com o raio r, uma circumferencia que não passe por nenhum ponto raiz da proposta; designemos por x e y as coordenadas de um ponto m d'esta circumferencia. As coordenadas d'este ponto, relativamente a eixos tirados por c parallelamente ao systema dado, seriam $r\cos\varphi$ e $r\,\mathrm{sen}\,\varphi$, sendo φ o angulo do raio cm com o eixo dos x; as coordenadas do mesmo ponto relativamente aos eixos propostos serão



$$x=a+r\cos\varphi\ ,\quad y=b+r\,\mathrm{sen}\,\varphi\ ,$$

donde

$$\begin{aligned} z=x+iy&=(a+bi)+r(\cos\varphi+i\,\mathrm{sen}\,\varphi)\\ &=z_0+r(\cos\varphi+i\,\mathrm{sen}\,\varphi)\ . \end{aligned}$$

Suppondo, em geral, que o ponto raiz c é de ordem p de multiplicidade, e desenvolvendo pela fórmula de Taylor, teremos

$$
\begin{aligned}
f(z) &= f[z_0 + r(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)] \\
&= r^p(\cos p\varphi + i \operatorname{sen} p\varphi)\frac{f^p(z_0)}{p!} \\
&+ r^{p+1}[\cos(p+1)\varphi + i \operatorname{sen}(p+1)\varphi]\frac{f^{p+1}(z_0)}{(p+1)!} + \cdots
\end{aligned}
$$

Pondo, em geral,

$$\frac{f^k(z_0)}{k!} = r_k(\cos\alpha_k + i \operatorname{sen}\alpha_k),$$

para todos os valores de k desde p até n, teremos pela fórmula de Moivre,

$$
\begin{aligned}
f(z) &= r_p r^p[\cos(p\varphi + \alpha_p) + i \operatorname{sen}(p\varphi + \alpha_p)] \\
&+ r_{p+1} r^{p+1}\{\cos[(p+1)\varphi + \alpha_{p+1}] + i \operatorname{sen}[(p+1)\varphi + \alpha_{p+1}]\} \\
&+ \text{etc.} \\
&= P + iQ\,.
\end{aligned}
$$

Assim, teremos

$$P = r_p r^p \cos(p\varphi + \alpha_p) + r_{p+1} r^{p+1}\cos[(p+1)\varphi + \alpha_{p+1}] + \text{etc.}\,,$$

$$Q = r_p r^p \operatorname{sen}(p\varphi + \alpha_p) + r_{p+1} r^{p+1}\operatorname{sen}[(p+1)\varphi + \alpha_{p+1}] + \text{etc.}\,,$$

$$\frac{P}{Q} = \frac{r_p \cos(p\varphi + \alpha_p) + r_{p+1} r \cos[(p+1)\varphi + \alpha_{p+1}] + \cdots}{r_p \operatorname{sen}(p\varphi + \alpha_p) + r_{p+1} r \operatorname{sen}[(p+1)\varphi + \alpha_{p+1}] + \cdots};$$

e suppondo r tão pequeno, que o numerador e o denominador tenham o signal dos seus primeiros termos, o signal do quociente será o mesmo de

$$\cot(p\varphi + \alpha_p) .$$

Posto isto, o angulo φ varia desde 0 até 2π, quando o ponto m descreve a circumferencia; portanto o angulo $p\varphi + \alpha_p$ varia desde α_p até $2p\pi + \alpha_p$, e este intervallo comprehende p circumferencias. Ora é sabido que num intervallo de 4 angulos rectos a cotangente se annulla duas vezes passando de positiva a negativa, e duas vezes se torna infinita passando de negativa a positiva; portanto em todo aquelle intervallo a cotangente passa $2p$ vezes de positiva a negativa, annullando-se. Notemos que em cada ponto m o valor de $\frac{P}{Q}$ é determinado, visto que, por hypothese, a circumferencia não passa por nenhum ponto raiz: o que equivale a suppor o seu raio menor que a distancia do ponto c a qualquer outro ponto raiz da proposta.

Logo: *quando a variavel z descreve uma circumferencia ou um contorno fechado, sufficientemente pequeno em volta de um ponto raiz do grau* p *de multiplicidade, o quociente* $\frac{P}{Q}$ *annulla-se* 2p *vezes passando de positivo a negativo.*

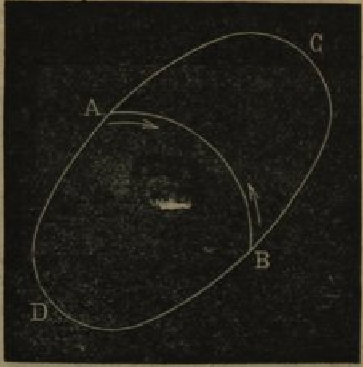
187. *Theorema de Cauchy.* — Tracemos no plano um contorno fechado, que não passe por nenhum ponto raiz da equação

$$f(z) = P + iQ = 0 ;$$

o theorema de Cauchy enuncia-se nos seguintes termos:

Percorrendo este contorno sempre no mesmo sentido, representando por k *o numero de vezes que em uma revolução inteira o quociente* $\frac{P}{Q}$ *se annulla, passando de positivo a negativo, e por* k' *o numero de vezes que elle se annulla, passando de negativo a positivo, a differença* $\delta = k - k'$ *é egual ao dobro do numero de* *raizes eguaes ou deseguaes comprehendidas no interior do mesmo contorno.*

Em dois contornos taes como ACBA e ABDA podemos supprimir a parte commum AB e tomar o valor de δ só para o contorno exterior.

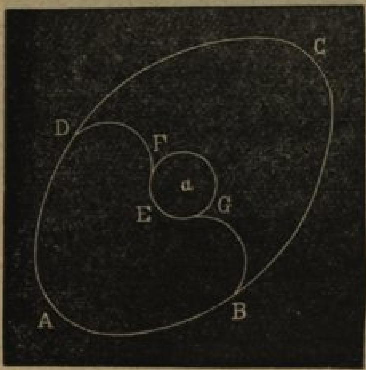


Com effeito, se o primeiro contorno for percorrido de A para C, aquella parte commum é descripta no sentido de B para A, emquanto que no outro contorno o mesmo arco é descripto no sentido opposto. Se o quociente $\frac{P}{Q}$ passa um certo numero de vezes de positivo para negativo quando se procede de B para A, passa egual numero de vezes de negativo para positivo quando se procede inversamente de A para B, e esta parte não virá a influir na differença δ. O mesmo succederá com as partes communs de maior numero de contornos, adjacentes dois a dois.

Posto isto, dois casos temos a considerar, conforme o contorno considerado não contém pontos raizes ou vice-versa.

1.° caso. Seja o contorno ACBD. Não pode ser simultaneamente $P=0$ e $Q=0$, visto que este contorno não passa por nenhum ponto raiz; mas pode haver pontos em que uma das funcções P ou Q se annulle isoladamente. Dividamos aquella área em partes taes, que cada uma não contenha no seu interior ou no seu contorno ponto algum em que seja $P=0$ ou ponto algum em que seja $Q=0$. No contorno parcial, onde nunca é $P=0$, o quociente $\frac{P}{Q}$ não passa por zero e é $\delta=0$. Naquelle em que nunca é $Q=0$, o denominador não muda de signal e a fracção só poderá mudar de signal passando por zero; mas depois de ter percorrido todo o contorno, a fracção $\frac{P}{Q}$ torna ao seu primeiro valor, em grandeza e signal. É portanto evidente que, se ella passou n vezes de positiva a negativa, passou o mesmo numero de vezes de negativa a positiva e será ainda $\delta = 0$.

2.° *caso*. Supponhamos que o contorno contém uma raiz do grau p de multiplicidade; seja ABCD a área dada e a o ponto raiz. D'este ponto como centro descreva-se uma circumferencia EFG de raio tão pequeno quanto se quizer. e tracemos os arcos DF e BG; teremos assim tres contornos, ABED, EFDCBGE e a circumferencia GFE. No primeiro e no segundo é $\delta = 0$, pelo primeiro caso; no último é, pelo lemma, $k = 2p$, $k' = 0$, $\delta = 2p$. Assim o excesso δ nos tres contornos é $2p$, e terá o mesmo valor para o contorno externo ABCD, que resulta da reunião dos tres precedentes.



Se na área fechada pelo contorno se contivessem mais pontos raizes, dividiriamos esse espaço em outros, com uma só raiz em cada um. O theorema seria applicavel a cada um dos contornos parciaes, e portanto tambem ao total.

188. *Separação das raizes imaginárias.*—Consideremos, para mais simplicidade, um contorno rectangular fechado por duas rectas parallellas ao eixo dos y

$$AB \ \ldots \ (x = x_0), \quad CD \ \ldots \ (x = x_1),$$

e outras duas parallelas ao eixo dos x

$$AD \ \ldots \ (y = y_0), \quad BC \ \ldots \ (y = y_1);$$

seja $z = x + iy$, $f(z) = P + iQ = 0$, $P = f_1(x, y)$, $Q = f_2(x, y)$.

Para os lados BC e AD é y constante e x varia de x_0 a x_1; se ordenarmos P segundo as potencias decrescentes de y, aquella funcção terá o signal do seu primeiro termo para valores de y sufficientemente grandes. Logo para $y_0 = -\infty$ e $y_1 = +\infty$ o excesso δ relativo áquelles lados BC e AD será zero e só temos a calcular o excesso para os outros dois lados.

Para AB é

$$\frac{P}{Q} = \frac{f_1(x_0, y)}{f_2(x_0, y)},$$

onde se fará variar y desde $-\infty$ até $+\infty$; seja δ' o excesso correspondente. Para CD é

$$\frac{P}{Q} = \frac{f_1(x_1, y)}{f_2(x_1, y)},$$

variando y de $+\infty$ a $-\infty$ visto que o contorno é percorrido na direcção ABCD; o excesso para CD é egual e de signal contrário ao do mesmo lado percorrido em sentido opposto, e portanto, se este é δ_0, o excesso total será $\delta' - \delta_0 = 2\mu$. Assim μ é o numero de raizes contidas no contorno; se for $\mu = 1$, a raiz está separada e a sua parte real fica comprehendida entre x_0 e x_1; se for $\mu < 1$, tiraremos parallelas intermédias a AB e CD. até obtermos a separação das raizes que não tiverem a mesma parte real.

Transportando as parallelas AB e CD ao infinito, determinariamos semelhantemente os limites que comprehendem o coefficiente de i em cada raiz.

CAPÍTULO VII.

Resolução algébrica das equações do 3.º grau.

180. Nos capitulos precedentes occupámo-nos da resolução numérica das equações; procuremos agora as fórmulas da resolução algébrica, a qual, não é possivel, em geral, além do 4.º grau.

Toda a equação do 3.º grau a uma incógnita póde reduzir-se *(n.º 87, 2.º)* á fórma

$$x^3+px+q=0 .$$

Pondo $x=y+z$, obtém-se a equação transformada

$$(3yz+p)(y+z)+y^3+z^3+q=0 ;$$

e como x se pode decompor na somma de dois numeros por infinitas maneiras, podemos ainda fazer

$$yz=-\frac{p}{3} \qquad (i)$$

o que reduzirá a equação precedente a

$$y^3+z^3=-q .$$

Elevando ao cubo os dois membros de (i), esta egualdade e a precedente mostram que y^3 e z^3 são as raizes t' e t'' da equação do 2.º grau

$$t^2+qt-\frac{p^3}{27}=0\ ,$$

á qual se dá o nome de *reduzida* ou *resolvente*. Os valores de y e z serão dados finalmente pelas equações binomias

$$y^3-t'=0\ ,\quad z^3-t''=0\ ,$$

as quaes dependem ambas da equação única $u^3-1=0$, ou das tres raizes cúbicas da unidade, que designamos por 1, α, α^2.

Ora as raizes da reduzida são

$$-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\ ;$$

donde, extrahindo a raiz cúbica a cada uma e sommando os resultados, se deduz a *fórmula de Cardan*

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\ . \quad (48)$$

Para attender á multiplicidade de valores d'estes dois radicaes cúbicos, designemos por a e b os valores de $\sqrt[3]{t'}$ e $\sqrt[3]{t''}$ correspondentes ao valor 1 da raiz cúbica da unidade; teremos, em geral,

$$\sqrt[3]{t'}=a\ ,\quad \alpha a\ ,\quad \alpha^2 a\ ,$$

$$\sqrt[3]{t''}=b\ ,\quad \alpha b\ ,\quad \alpha^2 b\ .$$

Sommando cada valor de $\sqrt[3]{t'}$ com todos os de $\sqrt[3]{t''}$, obteem se nove valores; e assim parece que se encontram nove raizes para a proposta do 3.° grau. Esta circumstancia provém de havermos triplicado o numero de raizes, elevando ao cubo ambos os membros da equação (i); e esta mesma equação servirá para verificar quaes d'aquellas raizes conveem ou não ao problema, aproveitando-se unicamente aquelles valores de y e z cujo producto seja egual a $-\frac{p}{3}$.

Suppondo reaes os coefficientes da equação dada, os valores reaes a e b de $\sqrt[3]{t'}$ e $\sqrt[3]{t''}$ satisfazem a condição indicada, bem como αa e $\alpha^2 b$, ou $\alpha^2 a$ e αb, visto ser $\alpha^3=1$. Teremos assim as tres raizes

$$x_1=a+b\ ,\quad x_2=a\alpha+b\alpha^2\ ,\quad x_3=a\alpha^2+b\alpha\ . \qquad (ii)$$

As outras combinações dos valores de y e z dão as raizes

$$x'_1=a+b\alpha\ ,\quad x'_2=a\alpha+b\ ,\quad x'_3=a\alpha^2+b\alpha^2$$

da equação

$$x^3+p\alpha x+q=0\ ;$$

ou as raizes

$$x''_1=a+b\alpha^2\ ,\quad x''_2=a\alpha^2+b\ ,\quad x''_3=a\alpha+b\alpha$$

da equação

$$x^3+p\alpha^2 x+q=0\ .$$

Este méthodo é geral; no n.° seguinte se considerará particularmente o caso de serem reaes os coefficientes p e q.

190. As raizes da reduzida serão reaes, eguaes ou imaginárias, conforme a quantidade $R=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$ fôr positiva, zero ou negativa.

1.° caso: $R>0$. Tomemos por a e b, como anteriormente, os valores arithméticos de $\sqrt[3]{t'}$ e $\sqrt[3]{t''}$; fazendo $a+b=s$, $a-b=d$, e notando que é

$$\alpha=-\frac{1}{2}(1+\sqrt{-3}), \quad \alpha^2=-\frac{1}{2}(1-\sqrt{-3}),$$

as fórmulas (*ii*) darão a raiz real $x_1=s$ e as duas imaginárias

$$-\frac{1}{2}(s\pm d\sqrt{-3}). \tag{49}$$

2.° caso: $R=0$. Será $t'=t''$, $a=b$, $s=2a$, $d=0$; a proposta tem todas as raizes reaes, sendo uma $2\sqrt[3]{t'}$ e as outras duas eguaes com o valor commum $-a=-\sqrt[3]{t'}$.

3.° caso: $R<0$. As fórmulas (*ii*) deixam suppôr que todas as raizes serão imaginárias, o que não pode ter logar (*n.° 105, 1.°*); pelo contrário, deve presumir-se que esta circumstancia corresponderá ao caso de serem reaes e deseguaes as tres raizes da proposta, único que falta reconhecer. Não podem ser todas reaes e eguaes sem que seja $p=0$ e $q=0$, porque a segunda derivada da proposta, egualada a zero, tem a raiz única $x=0$.

Ora as raizes da reduzida são conjugadas; os valores $y=\sqrt[3]{t'}$, $z=\sqrt[3]{t''}$ são imaginários, mas o seu producto $yz=-\frac{1}{3}p$ é real: portanto y e z devem ser tambem conjugados. Se tomármos para y os valores

$$a_1+b_1\sqrt{-1}, \quad (a_1+b_1\sqrt{-1})\alpha, \quad (a_1+b_1\sqrt{-1})\alpha^2,$$

os de z serão da fórma

$$a_1 - b_1\sqrt{-1}\ ,\quad (a_1 - b_1\sqrt{-1})\alpha,\quad (a_1 - b_1\sqrt{-1})\alpha^2\ ,$$

onde b_1 é differente de zero. D'aqui resulta

$$x_1 = a_1 + b_1\sqrt{-1} + a_1 - b_1\sqrt{-1} = 2a_1\ ,$$

$$x_2 = (a_1 + b_1\sqrt{-1})\alpha + (a_1 - b_1\sqrt{-1})\alpha^2 = -a_1 - b_1\sqrt{3}\ ,$$

$$x_3 = (a_1 + b_1\sqrt{-1})\alpha^2 + (a_1 - b_1\sqrt{-1})\alpha = -a_1 + b_1\sqrt{3}\ ,$$

por ser

$$\alpha + \alpha^2 = -1\ ,\quad \alpha^2 - \alpha = \sqrt{-3}\ .$$

As raizes são pois reaes e deseguaes; mas a fórmula de Cardan não é propria para as calcular, por vir complicada com imaginários. Esta difficuldade está ainda sem solução, e por isso se chamou a este caso *irreductivel.*

191. *Caso irreductivel.*—Para calcular as raizes, convém neste caso recorrer a uma transformação trigonométrica.

Por hypóthese, é agora

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0\ ,$$

e portanto $p < 0$; fazendo

$$-\frac{q}{2} = k\cos\varphi\ ,\quad \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = -k^2\operatorname{sen}^2\varphi\ ,$$

será

$$k=\sqrt{-\frac{p^3}{27}}, \quad \cos\varphi=-\frac{q}{2k}.$$

Com estes valores a fórmula de Cardan torna-se em

$$x=\sqrt[3]{k(\cos\varphi+i\operatorname{sen}\varphi)}+\sqrt[3]{k(\cos\varphi-i\operatorname{sen}\varphi)};$$

ou, desenvolvendo o radical *(n.° 63, 2.°)*

$$x=2\sqrt[3]{k}.\cos\frac{\varphi+2n\pi}{3}.$$

Fazendo $n=0, 1, 2$, veem as raizes

$$x_1=2\sqrt[3]{k}\cos\frac{\varphi}{3},$$

$$x_2=2\sqrt[3]{k}\cos\left(\frac{\varphi}{3}+120^\circ\right),$$

$$x_3=2\sqrt[3]{k}\cos\left(\frac{\varphi}{3}+240^\circ\right).$$

Estes valores são reaes e calculaveis por logarithmos.

192. Quando se conhece a raiz x_1, podemos obter muito facilmente as outras duas, traduzindo a fórmula (49) em funcção da raiz conhecida e dos coefficientes da proposta.

Com effeito, é $s = x_1$ e por definição $d = y - z$. Ora, sendo

$$\frac{y^3 - z^3}{y - z} = \frac{y^3 + z^3}{y + z} + 2yz \;,$$

$$y^3 - z^3 = \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}} \;, \quad y^3 + z^3 = -q \;, \quad yz = -\frac{p}{3} \;,$$

teremos

$$\frac{\sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{y - z} = \frac{-3q - 2px_1}{3x_1} \;,$$

donde se tira

$$y - z = -\frac{3x_1\sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2px_1 + 3q} = d \;.$$

Portanto as tres raizes serão $x_1 = s$ e

$$-\frac{1}{2}x_1\left(1 \pm \frac{3\sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2px_1 + 3q}\sqrt{-3}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}x_1\left(1 \pm \frac{\sqrt{27q^2 + 4p^3}}{2px_1 + 3q}\sqrt{-1}\right) \;;$$

e como a equação do 3.° grau tem sempre uma raiz real, depois d'ella determinada a fórmula precedente dará as outras duas, quer ellas sejam reaes quer sejam imaginárias.

Exercicios.

77. $x^3+6x-7=0$. Raizes: $x=1$, $x=-\frac{1}{2}(1\pm 3\sqrt{-3})$.

78. $y^3-3y^2+12y-4=0$. Raizes : $y=0{,}362165$, $y=1{,}318918$ $\pm 1{,}761176\sqrt{-3}$.

79. $x^3-3x-18=0$. Raizes : $x=3$, $x=-\frac{1}{2}(3\pm\sqrt{-15})$.

80. $x^3-27x+54=0$. Raizes : $x=-6$, $x=3$, $x=3$.

81. $x^3-3x+1=0$. Raizes: $2\cos 40^\circ$, $-2\cos 20^\circ$, $2\cos 80^\circ$.

CAPÍTULO VIII.

Resolução algébrica das equações do 4.° grau.

193. Para resolver a equação do 4.° grau ha um méthodo muito simples, chamado de Descartes, que se funda, como os méthodos de Ley e Clebsh, na transformação do 1.° membro em um producto de dois factores trinomios do 2.° grau. Francoeur propoz um processo análogo ao que Hudde deu para as equações do 3.° grau, exposto no capitulo precedente; o méthodo de Francoeur consiste no seguinte.

Demos á proposta a forma

$$x^4+px^2+qx+r=0\ ;$$

fazendo $x=y+z$, vem

$$y^4+(6z^2+p)y^2+(z^4+pz^2+qz+r)$$
$$+4zy^3+(4z^3+2pz+q)y=0\ .$$

Pela condição

$$y^2 = -z^2 - \frac{p}{2} - \frac{q}{4z} \qquad (i)$$

annullam-se os dois ultimos termos da transformada ; e eliminando y^2, esta equação torna-se em

$$z^6 + \frac{1}{2}pz^4 + \frac{1}{16}(p^2 - 4r)z^2 - \frac{1}{64}q^2 = 0 .$$

Nesta última equação só ha potencias pares da incógnita ; de modo que, pondo $z^2 = \frac{1}{4}t$, ella póde tornar-se em

$$t^3 + 2pt^2 + (p^2 - 4r)t - q^2 = 0 ,$$

que é do 3.º grau e se chama neste caso a *reduzida*. Representando uma das suas raizes por t', teremos $z = \pm \frac{1}{2}\sqrt{t'}$; e este valor posto em (i) e em $x = y + z$ dará

$$x = y \pm \frac{1}{2}\sqrt{t'} , \quad y^2 = \frac{1}{4}\left(-t' - 2p \pm \frac{2q}{\sqrt{t'}}\right) .$$

Finalmente eliminando y e attendendo á correspondencia dos signaes, temos as fórmulas

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{t'} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-t' - 2p - \frac{2q}{\sqrt{t'}}}$$

$$x = -\frac{1}{2}\sqrt{t'} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-t' - 2p + \frac{2q}{\sqrt{t'}}} .$$

Se em vez da raiz t' da reduzida nos tivessemos servido de qualquer das outras duas t'' ou t''', obteriamos os mesmos valores para x. Com effeito, de

$$t'+t''+t'''=-2p\,,\quad t't''t'''=q^2$$

tira-se

$$-t'-2p=t''+t'''\,,\quad \frac{q}{\sqrt{t'}}=\pm\sqrt{t''t'''}\,.$$

As raizes t', t'', t''' são independentes do signal de q, porque na reduzida só entra o quadrado d'este coefficiente; na última das expressões precedentes usaremos do radical com o signal $+$ ou $-$, conforme q for positivo ou negativo. Assim, para q positivo, as fórmulas anteriores tornam-se em

$$x=\frac{1}{2}\sqrt{t'}\pm\sqrt{\frac{1}{4}t''+\frac{1}{4}t'''-\frac{1}{2}\sqrt{t''t'''}}\,,$$

$$x=-\frac{1}{2}\sqrt{t'}\pm\sqrt{\frac{1}{4}t''+\frac{1}{4}t'''+\frac{1}{2}\sqrt{t''t'''}}$$

ou antes

$$x=\frac{1}{2}(\sqrt{t'}\pm\sqrt{t''}\mp\sqrt{t'''})\,,$$

$$x=\frac{1}{2}(-\sqrt{t'}\pm\sqrt{t''}\pm\sqrt{t'''})\,.$$

Para q negativo será do mesmo modo

$$x=\frac{1}{2}(\sqrt{t'}\pm\sqrt{t''}\pm\sqrt{t'''})\,,$$

$$x=\frac{1}{2}(-\sqrt{t'}\pm\sqrt{t''}\mp\sqrt{t'''})\,.$$

Em qualquer dos casos as fórmulas são symétricas em t', t'' e t''', e dão os mesmos quatro valores quando uma d'estas quantidades se muda na outra e reciprocamente. Se os coefficientes da proposta forem reaes, a reduzida tem uma raiz real positiva; para commodidade dos cálculos, será esta raiz que poremos por t' nas fórmulas precedentes.

194. Supponhamos reaes os coefficientes p, q, r. Se a reduzida tiver tres raizes reaes, o seu producto $t'\,t''\,t''' = q^2$ é positivo; portanto estas raizes hão de ser todas positivas, ou uma positiva e duas negativas. As fórmulas mostram que as raizes da proposta são todas reaes no primeiro caso e imaginárias no segundo. Neste último caso pode ainda ser que as duas raizes negativas da reduzida sejam eguaes, ou $t'' = t'''$; então numa das fórmulas os imaginários destroem-se dois a dois, e a proposta terá duas raizes reaes e eguaes e duas imaginárias.

Logo: *Quando a reduzida se encontra no caso irreductivel a proposta tem quatro raizes reaes, ou quatro imaginárias, ou duas eguaes e duas imaginárias.*

Se a reduzida tiver só uma raiz real t', essa raiz é positiva por ser negativo o último termo d'aquella equação; e $\sqrt{t'}$ é real. Designando t'' e t''' por $m \pm n\sqrt{-1}$, será

$$(\sqrt{t''} \pm \sqrt{t'''})^2 = 2m \pm 2\sqrt{m^2 + n^2}\ ,$$

por onde se vê que aquelle quadrado tem dois valores, um positivo e outro negativo. Extrahindo a raiz quadrada, $\sqrt{t''} \pm \sqrt{t'''}$ tem, por um lado, um valor real da forma $\sqrt{a}$, e por outro lado um valor imaginário da forma $\sqrt{-b}$.

Logo: *Se a reduzida tiver sómente uma raiz real, esta será positiva e a proposta terá duas raizes reaes e duas imaginárias.*

CAPÍTULO IX.

Impossibilidade da resolução algébrica além do 4.º grau.

195. Como já dissemos, resolver *algébricamente* a equação $f(x) = 0$ é formar uma *funcção algébrica* dos coefficientes de $f(x)$, que substituida por x satisfaça immediatamente áquella equação. Dadas as variaveis independentes

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n$$

e uma funcção d'ellas que representamos por v, diz-se que esta funcção é *algébrica* quando podemos exprimir v em x_1, x_2, ... por meio das operações seguintes, repetidas um numero finito de vezes: 1.º addição (ou subtracção); 2.º multiplicação (ou elevação a potencias); 3.º divisão; 4.º extracção de raizes. Nesta última consideraremos só os radicaes de índice primo, de que os outros veem sempre a depender.

A funcção v, formada por meio das duas primeiras operações sómente, chama-se *racional e inteira* ou simplesmente *inteira*. A sua forma mais geral reduz-se sempre a uma somma de termos como

$$kx_1^r x_2^s \ldots,$$

sendo k uma constante e r, s, ... numeros inteiros e positivos.

Se na formação de v intervier tambem a divisão, a funcção

*

é sómente racional e o seu typo é

$$\frac{\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n)}{\psi(x_1, x_2, \ldots x_n)}$$

sendo φ e ψ funcções inteiras.

Finalmente a funcção algébrica, em geral, envolve tambem extracção de raizes. Se representarmos por v_1, v_2, ... funcções racionaes de x_1, x_2, ..., por r, s, ... numeros primos, e por f uma funcção racional de x_1, x_2, ... e de $\sqrt[r]{v_1}$, $\sqrt[s]{v_2}$, ... a funcção algébrica

$$w = f(x_1, \ldots \sqrt[r]{v_1}, \sqrt[s]{v_2}, \ldots)$$

diz-se *de 1.ª ordem*. Do mesmo modo, se v'_1, v'_2 ... são funcções de primeira ordem e r', s', ... numeros primos, a funcção

$$w_1 = f(x_1, x_2, \ldots \sqrt[r]{v_1}, \sqrt[s]{v_2}, \ldots \sqrt[r']{v'_1}, \sqrt[s']{v'_2}, \ldots)$$

diz-se *de 2.ª ordem*. Em geral, representando por v_1, v_2, ... funcções algébricas de ordem $p-1$; por r, s, ... numeros primos; por t_1, t_2, ... funcções da mesma ordem que v_1 ou de ordem menos elevada; e por f uma funcção racional,

$$W = f(t_1, t_2, \ldots \sqrt[r]{v_1}, \sqrt[s]{v_2}, \ldots)$$

é *de ordem* p. Suppomos os radicaes $\sqrt[r]{v_1}$, $\sqrt[s]{v_2}$ ... reduzidos ao menor numero q; e assim diremos que a funcção W, de ordem p, é tambem de *grau* q.

196. Estabelecidas as definições do n.º anterior, seja

$$f(x) = x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \cdots + p_{n-1} x + p_n = 0$$

uma equação inteira de grau n; representemos por $x_1, x_2, \ldots x_n$ as suas raizes e supponhamos que ellas podem ser expressas por uma funcção algébrica dos coefficientes de $f(x)$,

$$x = \varphi(p_1, p_2, \ldots, \sqrt[r]{v_1}, \ldots) \,. \qquad (i)$$

Se substituirmos nesta fórmula

$$p_1 = -(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\,, \quad p_2 = (x_1 x_2 + x_1 x_3 + \cdots), \quad \text{etc.}$$

a funcção φ fica dependente só das raizes; e como ella deve reproduzir identicamente $x_1, x_2, \ldots$, os radicaes que entram em φ devem extrahir-se exactamente. Por exemplo, substituindo p por $-(x_1 + x_2)$ e q por $x_1 x_2$ na fórmula que dá as raizes da equação $x^2 + px + q = 0$, viria

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \pm \sqrt{\frac{(x_1 + x_2)^2}{4} - x_1 x_2}$$

ou ainda

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \pm \sqrt{\frac{(x_1 - x_2)^2}{4}}$$
$$= \frac{x_1 + x_2 \pm (x_1 - x_2)}{2} \,.$$

Portanto os radicaes de φ serão funcções racionaes das raizes; mas não symétricas, aliás deixariam de ser radicaes e seriam funcções racionaes dos coefficientes. Supponhamos que o primeiro radical que se encontra em φ é $\sqrt[r]{v_1}$, sendo v_1 funcção racional dos coefficientes, isto é, funcção symétrica das raizes; representemos esse radical por y, d'onde

$$y^r = v_1 \,.$$

Como y não é funcção symétrica das raizes, o seu valor mudará com a troca de duas d'ellas pelo menos; e esses valores serão dados pela equação precedente, onde o 2.° membro é invariavel para qualquer d'estas permutações. Designemos por

$$\pi(x_1, x_2, x_3 \ldots x_n)$$

um valor de y; outro qualquer, como $\pi(x_2, x_1, x_3 \ldots x_n)$ que resulta da permutação das raizes x_1 e x_2, obtém-se multiplicando o primeiro por uma raiz primitiva α da equação

$$z^r - 1 = 0 ;$$

e teremos

$$\pi(x_1, x_2, x_3 \ldots) = \alpha\pi(x_2, x_1, x_3 \ldots) .$$

Ora esta relação identica subsiste quando se permutam as raizes x_1 e x_2; logo

$$\pi(x_2, x_1, x_3 \ldots) = \alpha\pi(x_1, x_2, x_3, \ldots) ,$$

ou, multiplicando membro a membro e simplificando,

$$\alpha^2 = 1 , \quad \alpha = -1 .$$

D'esta expressão resulta $r = 2$; logo, *o primeiro radical da fórmula será um radical quadrado*. A funcção y tem dois valores eguaes e de signaes contrários, e não é symétrica: mas é inalteravel para qualquer numero par de permutações de duas raizes, e portanto para qualquer permutação circular d'um numero impar de raizes.

Este primeiro radical pode combinar-se depois com coefficientes da equação, ou com radicaes da mesma espécie, ou com outro radical de índice mais elevado. Nos dois primeiros casos teriamos funcções da mesma natureza de y e chegariamos aos mesmos resultados; se a fórmula se limitasse a estas duas combinações, quando nella substituissemos os coefficientes pelas raizes teriamos para cada uma d'estas uma identidade

$$x_1 = \psi(x_1, x_2, x_3 \ldots) . \qquad (ii)$$

Se a proposta fôr do 2.º grau, isto é, se houver duas raizes x_1 e x_2, esta relação é possivel porque

$$x_1 = \psi(x_1, x_2) , \quad x_2 = \psi(x_2, x_1)$$

teem valores differentes. Se houver mais de duas raizes, tres pelo menos, a identidade não pode ter logar, porque o 2.º membro de (ii) não se altera por uma permutação circular de tres raizes e o primeiro muda necessariamente de valor; logo neste caso haverá em (i) outro radical. Supponhamos que esse radical é $z = \sqrt[s]{v_2}$.

A funcção v_2 não é já symétrica, mas é invariavel para permutações circulares d'um numero impar de raizes, como acabamos de ver. A funcção z não é invariavel para estas permutações, mas o seu valor será dado sempre pela equação

$$z^s = v_2 ;$$

se um d'esses valores fôr

$$\pi(x_1, x_2, x_3 \ldots) ,$$

outro, proveniente d'uma permutação circular de tres raizes

$$\pi(x_2, x_3, x_1, \ldots) ,$$

obtem-se multiplicando o primeiro por uma raiz primitiva α da equação

$$t^s - 1 = 0 \ ,$$

e será

$$\pi(x_2, x_3, x_1, \ldots) = \alpha\,\pi(x_1, x_2, x_3, \ldots) \ .$$

Nesta relação identica podemos permutar as raizes de qualquer maneira e assim teremos successivamente

$$\pi(x_3, x_1, x_2, \ldots) = \alpha\,\pi(x_2, x_3, x_1, \ldots) \ ,$$
$$\pi(x_1, x_2, x_3, \ldots) = \alpha\,\pi(x_3, x_1, x_2, \ldots) \ ;$$

multiplicando as tres últimas egualdades membro a membro e simplificando, vem

$$\alpha^3 = 1 \ ,$$

d'onde $s = 3$. Logo, *o segundo radical de* (i) *será um radical cúbico.*

Os tres valores differentes de z serão z, αz, $\alpha^2 z$; se houver mais de quatro raizes, isto é, se a proposta fôr de grau superior ao 4.°, poderemos effectuar permutações circulares de cinco letras na identidade $z^3 = v_2$ e a funcção v_2 conserva o mesmo valor. Quanto a z, só poderá succeder uma de duas cousas: ou se conserva invariavel, ou toma successivamente aquelles tres valores z, αz, $\alpha^2 z$.

Neste último caso poderiamos escrever a identidade

$$\pi(x_2, x_3, x_4, x_5, x_1, x_6, \ldots) = \alpha\,\pi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \ldots)$$

e depois successivamente

$$\pi(x_3, x_4, x_5, x_1, x_2, x_6, \ldots) = \alpha\pi(x_2, x_3, x_4, x_5, x_1, x_6, \ldots) \ ,$$
$$\pi(x_4, x_5, x_1, x_2, x_3, x_6, \ldots) = \alpha\pi(x_3, x_4, x_5, x_1, x_2, x_6, \ldots) \ ,$$

fazendo sempre permutações circulares das cinco primeiras letras; á quinta obteriamos no primeiro membro os indices na ordem natural. Multiplicando-as todas membro a membro e simplificando, acharemos

$$\alpha^5 = 1 \; ;$$

mas, como é tambem $\alpha^3 = 1$, seria $\alpha = 1$, que é a única raiz commum a estas equações: o que não pode ter logar.

No primeiro caso z, invariavel para permutações circulares de 5 raizes, seria tambem invariavel para permutações circulares de 3. Com effeito, consideremos um valor de z,

$$z = \pi(x_3, x_4, x_5, x_1, x_2, x_6, \ldots) \; ;$$

como z é invariavel para permutações de cinco letras, podemos substituir respectivamente

$$x_3, x_2, x_5, x_1, x_4$$

por

$$x_2, x_5, x_1, x_4, x_3 \; ,$$

e achamos

$$\pi(x_3, x_4, x_5, x_1, x_2, x_6, \ldots) = \pi(x_2, x_3, x_1, x_4, x_5, x_6, \ldots) \; ;$$

mas é tambem

$$\pi(x_3, x_4, x_5, x_1, x_2, x_6, \ldots) = \pi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \ldots) \; :$$

logo teriamos

$$\pi(x_2, x_3, x_1, x_4, x_5, x_6, \ldots) = \pi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \ldots) \; ,$$

isto é, π invariavel para permutações circulares de tres raizes, contra a hypóthese. Portanto a fórmula de resolução com radicaes só é possivel para equações de grau inferior ao 5.°.

Na resolução algébrica das equações do 3.° e do 4.° grau tivemos occasião de verificar o apparecimento dos dois radicaes, quadrado e cúbico, na ordem que deixamos apontada.

IV

Restos de Sturm. Formas.

RESTOS DE STURM. FORMAS.

CAPÍTULO I.

Restos de Sturm.

197. Os restos de Sturm são definidos *(n.º 115)* pela relação

$$R_{p-1} = R_p \cdot Q_{p+1} - R_{p+1} ;$$

e considerando-os, desde o primeiro, as egualdades

$$f(x) = Q_1 f'(x) - R_1, \quad f'(x) = Q_2 R_1 - R_2, \quad R_1 = Q_3 R_2 - R_3, \text{ etc.}$$

dariam successivamente

$$R_1 = Q_1 f'(x) - f(x), \quad R_2 = (Q_1 Q_2 - 1) f'(x) - Q_2 f(x),$$

$$R_3 = Q_3 (Q_1 Q_2 - 1) f'(x) - Q_2 Q_3 f(x) - Q_1 f'(x) + f(x)$$

$$= (Q_1 Q_2 Q_3 - Q_1 - Q_3) f'(x) - (Q_2 Q_3 - 1) f(x),$$

etc.

Em geral, teremos para qualquer resto

$$R_p = Af'(x) - Bf(x)\,, \tag{i}$$

sendo A e B funcções inteiras de x, de graus p e $p-1$, porque os quocientes Q são do 1.º grau.

Esta propriedade pode servir para calcular os restos de Sturm. Com effeito, para $p=1$, por exemplo, faremos

$$R_1 = (ax+b)f'(x) - f(x)\,,$$

com os coefficientes desconhecidos a e b. Como R_1 é de grau $n-2$ e o 2.º membro d'esta desegualdade é de grau n, os coefficientes de x^n e x^{n-1} devem ser nullos; e teremos assim duas equações para determinar a e b.

Em geral calcularemos qualquer resto R_p por meio da identidade (i), empregando o seguinte processo. Os polynomios A e B, teem respectivamente $p+1$ e p termos, com egual numero de coefficientes desconhecidos. Por outra parte, o 1.º membro de (i) é do grau $n-p+1$ e o 2.º membro do grau $n+p-1$; por onde se vê que devemos egualar a zero os coefficientes das potencias $n-p, n-p+1, \ldots n+p-1$ de x em $Af'(x)-Bf(x)$. Teremos assim $2p$ equações de condição, lineares e homogéneas, entre as $2p+1$ constantes arbitrárias que entram em A e B; e como podemos sempre dividir por uma d'ellas, resultam $2p$ arbitrarias, que ficarão inteiramente determinadas por aquellas equações. Pondo os valores assim obtidos nos outros termos do segundo membro de (i), acharemos um valor único para R_p.

Seja, por exemplo, a equação

$$f(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 - 3x^2 + 5x - 1 = 0\,,$$

donde se tira

$$f'(x) = 5x^4 - 8x^3 + 3x^2 - 6x + 5\,;$$

teriamos a primeira identidade

$$R_1 = (ax + b)(5x^4 - 8x^3 + 3x^2 - 6x + 5) - (x^5 - 2x^4 + x^3 - 3x^2 + 5x - 1).$$

Como o 1.º membro d'esta expressão é do 3.º grau e o 2.º membro é do 5.º, faremos as reducções e egualaremos depois a zero os coefficientes de x^5 e x^4. Acham-se as equações

$$5a - 1 = 0, \quad -8a + 5b + 2 = 0,$$

donde se tira $a = \frac{1}{5}$, $b = -\frac{2}{25}$. Pondo estes valores nos outros termos do 2.º membro d'aquella identidade, teriamos

$$R_1 = (3a - 8b - 1)x^3 + (3b - 6a + 3)x^2 + (5a - 6b - 5)x + 5b + 1$$
$$= \frac{6}{25}x^3 + \frac{39}{25}x^2 - \frac{88}{25}x + \frac{15}{25},$$

ou, desembaraçando de denominadores,

$$R_1 = 6x^3 + 39x^2 - 88x + 15,$$

como daria directamente a divisão de $f(x)$ por $f'(x)$, depois de se mudar o signal do resto.

Continuando, faremos

$$R_2 = (ax^2 + bx + c)(5x^4 - 8x^3 + 3x^2 - 6x + 5) - (dx + e)(x^5 - 2x^4 + x^3 - 3x^2 + 5x - 1);$$

e como o 1.° membro é do 2.° grau e o 2.° membro é do 6.°, egualaremos a zero os coefficientes de x^6, x^5, x^4 e x^3, depois de feitas as reducções. É evidente que as quatro equações de condição são lineares e homogéneas relativamente ás cinco constantes *a*, *b*, *c*, *d*, *e*; dividindo por uma d'ellas, por *d* por exemplo, ou, o que vale o mesmo, fazendo $d=1$, teremos

$$5a-1=0, \quad -8a+5b-e+2=0\ ,$$
$$3a-8b+5c+2e-1=0\ ,$$
$$-6a+3b-8c-e+3=0\ :$$

donde se tira

$$a=\frac{1}{5},\ b=-\frac{17}{10},\ c=\frac{3}{5},\ d=1,\ e=-\frac{81}{10}\,.$$

Os outros termos dão

$$R_2=(5a-6b+3c+3e-5)\,x^2+(5b-6c-5e+1)x$$
$$+(5c+e)=-163x^2+294x-51\ ,$$

depois de desembaraçar de denominadores. O cálculo directo daria

$$-12225x^2+22050x-3825\ ;$$

e dividindo por 75, recáe-se na expressão achada para R_2.

198. Entre os polynomios A e B existe uma relação importante. Demos a A e B índices correspondentes aos restos R; das identidades

$$Q_1f'(x)-f(x)=A_1f'(x)-B_1f(x)$$
$$(Q_1Q_2-1)f'(x)-Q_2f(x)=A_2f'(x)-B_2f(x)$$

tira-se

$$A_1 = Q_1, \quad B_1 = 1, \quad A_2 = Q_1 Q_2 - 1, \quad B_2 = Q_2,$$

e portanto

$$A_1 B_2 - A_2 B_1 = 1 .$$

Vamos ver que esta relação é geral e

$$A_p B_{p+1} - A_{p+1} B_p = 1 ,$$

para qualquer valor de p.

Com effeito, segundo a notação adoptada, é

$$\begin{aligned} R_{p+1} = A_{p+1} f'(x) - B_{p+1} f(x) &= R_p \, . \, Q_{p+1} - R_{p-1} \\ &= Q_{p+1}[A_p f'(x) - B_p f(x)] - [A_{p-1} f'(x) - B_{p-1} f(x)] . \end{aligned}$$

Egualando os coefficientes de $f(x)$ e os de $f'(x)$, da identidade precedente resulta

$$A_{p+1} = Q_{p+1} A_p - A_{p-1}, \quad B_{p+1} = Q_{p+1} B_p - B_{p-1} ;$$

multiplicando estas egualdades respectivamente por B_p e A_p e subtrahindo, vem

$$A_p B_{p+1} - A_{p+1} B_p = A_{p-1} B_p - A_p B_{p-1} .$$

Estas differenças são, pois, constantes e independentes de p; mas é $A_1 B_2 - A_2 B_1 = 1$, logo será tambem

$$A_p B_{p+1} - A_{p+1} B_p = 1 . \qquad (50)$$

Pelo que fica dito, qualquer funcção inteira que possa reduzir-se á fórma $A f'(x) - B f(x)$, sendo os polynomios A e B convenientemente escolhidos, não poderá distinguir-se de um resto de Sturm senão por um factor constante.

199. *Restos de Sturm em funcção das raizes.* Supponhamos que na proposta $f(x)=0$, de grau n, o coefficiente do 1.° termo é a unidade e $a_1, a_2, \ldots a_n$ são as raizes; as expressões

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (x-a_1)\,(x-a_2)\ldots(x-a_n)\,,\\
f'(x) &= \Sigma(x-a_2)\,(x-a_3)\ldots(x-a_n)\,,\\
T_2 &= \Sigma(a_1-a_2)^2(x-a_3)\ldots(x-a_n)\,,\\
T_3 &= \Sigma(a_1-a_2)^2(a_1-a_3)^2(a_2-a_3)^2(x-a_4)\ldots(x-a_n)\,,\\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot\\
T_n &= (a_1-a_2)^2\,(a_1-a_3)^2\ldots(a_{n-1}-a_n)^2
\end{aligned}
$$

chamam-se *funcções de Sylvester*. As duas primeiras são a proposta e a sua derivada; a somma T_2 compõe-se dos termos que se obteem, substituindo cada grupo de dois factores lineares pelo quadrado da differença das raizes correspondentes; a somma T_3 compõe-se dos termos que se formam, substituindo cada grupo de tres factores lineares pelo producto dos quadrados das differenças distinctas das raizes correspondentes, tomadas duas a duas; finalmente T_n é o producto dos quadrados das differenças das raizes.

Todas estas funcções podem reduzir-se á fórma

$$A' f'(x) - B' f(x)\,, \qquad (ii)$$

como os restos de Sturm. Com effeito, seja, por exemplo,

$$T_3 = \Sigma(a_1-a_2)^2\,(a_1-a_3)^2\,(a_2-a_3)^2\,(x-a_4)\ldots(x-a_n)\,;$$

fazendo $x=a_1$, a expressão (ii) reduz-se a

$$A'(a_1-a_2)\,(a_1-a_3)\ldots(a_1-a_n)\,,$$

porque é $f(a_1)=0$ e $f'(a_1)$ reduz-se ao termo que não tem $x-a_1$ por factor. Por outra parte, T_3 torna-se em

$$\Sigma\,(a_1-a_2)^2\,(a_1-a_3)^2\,(a_2-a_3)^2\,(a_1-a_4)\ldots(a_1-a_3)\,, \quad (4)$$

que é a mesma expressão precedente, fazendo

$$A'=\Sigma\,(a_2-a_3)^2\,(a_1-a_2)\,(a_1-a_3)\,;$$

teremos assim, pondo novamente x em vez de a_1,

$$A'=\Sigma\,(a_2-a_3)^2\,(x-a_2)\,(x-a_3)\,,$$

ou antes

$$A'=\Sigma\,(a_1-a_2)^2\,(x-a_1)\,(x-a_2)\,,$$

visto que o Σ se estende a todas as combinações possiveis das raizes da proposta, duas a duas.

Com esta expressão, $A'f(x)$ tomará o mesmo valor que T_3 para $x=a_1, a_2\ldots a_n$; fazendo $B'=ax+b$ e pondo

$$T_3=A'f'(x)-(ax+b)f(x)\,.$$

esta egualdade será tambem satisfeita com $x=a_1, a_2,\ldots a_n$, attendendo a que $f(x)$ se annulla para todos estes valores. Se além d'isto fizermos successivamente x egual a dois valores determinados quaesquer, x_1 e x_2, teremos duas relações para determinar a e b; mas então aquella equação, de grau $n+1$, é satisfeita por $n+2$ valores da incógnita, e é uma identidade *(n.º 77)*. Logo, T_3 pode tomar a fórma $A'f'(x)-B'f(x)$.

Pelo mesmo processo se mostraria que qualquer funcção T_p pode tomar aquella forma, pondo por A' uma somma de termos compostos de $p-1$ factores lineares multiplicados pelos quadrados das differenças das raizes correspondentes, e por B' um polynomio de grau $p-2$.

*

D'este modo as funcções de Sylvester não podem distinguir-se dos restos de Sturm senão por algum factor constante; façamos

$$T_2 = k_2 R_1, \quad T_3 = k_3 R_2, \quad T_4 = k_4 R_3, \quad \text{etc.}$$

Considerando em primeiro logar a identidade

$$T_2 = A'_2 f'(x) - B'_2 f(x) = k_2 [Q_1 f'(x) - f(x)],$$

será

$$A'_2 = \Sigma(x - a_1) \text{ e } B'_2 = \text{const.}$$

Ora T_2 é de grau $n-2$; o termo mais elevado de $A'_2 f'(x)$ é $nx \times nx^{n-1} = n^2 x^n$ e o de $f(x)$ é x^n. Para que estes termos se reduzam, deverá ser $B'_2 = n^2$; por outra parte, aquella identidade mostra que é $B'_2 = k_2$, logo será $k_2 = n^2$.

Para determinar os factores da fórma k_p, notemos que os polynomios A e B dos restos de Sturm satisfazem á relação (50); multiplicando-a por $k_p k_{p+1}$, vem

$$k_p A_p \times k_{p+1} B_{p+1} - k_{p+1} A_{p+1} \times k_p B_p = k_p k_{p+1},$$

isto é

$$A'_p B'_{p+1} - A'_{p+1} B'_p = k_p k_{p+1}.$$

Mas, por outra parte, temos

$$T_p = A'_p f'(x) - B'_p f(x), \quad T_{p+1} = A'_{p+1} f'(x) - B'_{p+1} f(x):$$

donde resulta

$$A'_{p+1}T_p - A'_pT_{p+1} = (A'_pB'_{p+1} - B'_pA'_{p+1})f(x) = k_pk_{p+1}f(x) .$$

O 2.º membro d'esta identidade é do grau n em x; no 1.º membro a parte A'_pT_{p+1} é de grau $p-1+n-p-1 = n-2$, e a outra parte $A'_{p+1}T_p$ é de grau $p+n-p=n$. Façamos

$$t_2 = \Sigma(a_1-a_2)^2 ,$$

$$t_3 = \Sigma(a_1-a_2)^2(a_1-a_3)^2(a_2-a_3)^2 ,$$

$$t_4 = \Sigma(a_1-a_2)^2(a_1-a_3)^2(a_1-a_4)^2(a_2-a_3)^2(a_2-a_4)^2(a_3-a_4)^2 ,$$

etc.;

o coefficiente da mais alta potencia de x em A'_{p+1} e em T_p, segundo a forma que suppomos a estas funcções, é t_p; e pela identidade precedente será

$$t_p^2 = k_p k_{p+1} .$$

Pondo nesta relação $p=2, 3, 4,..$ vem

$$t_2^2 = k_2 k_3 , \quad t_3^2 = k_3 k_4 , \quad t_4^2 = k_4 k_5 , \quad \text{etc.} ;$$

mas é $k_2 = n^2$, logo

$$k_3 = \frac{t_2^2}{n^2} , \quad k_4 = \frac{n^2 t_3^2}{t_2^2} , \quad k_5 = \frac{t_2^2 t_4^2}{n^2 t_3^2} , \quad \text{etc.}$$

Portanto as funcções de Sylvester são os restos de Sturm multiplicados por constantes positivas, que não influem nos signaes; os coefficientes dos seus primeiros termos são

$$1, n, t_2, t_3, \ldots t_n ,$$

e se nelles houver v variações, a proposta $f(x)=0$ terá $2v$ raizes imaginárias.

200. Os menores do determinante symétrico de ordem n

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}+x & \ldots & a_{2n} \\ . & . & \ldots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}+x \end{vmatrix}$$

teem as mesmas propriedades fundamentaes que as funcções de Sturm; e as raizes da equação $\Delta=0$ são todas reaes, como vamos ver.

1.° No desenvolvimento do determinante Δ emprega-se com vantagem a fórmula *(n.° 34)*

$$\Delta = A_{ii}\, a_{ii} - \Sigma B_{pt}\, a_{ip}\, a_{it} .$$

Façamos $i=n$ e designemos por B o menor relativo ao último elemento a_{nn}; será

$$\Delta = B a_{nn} - \Sigma B_{pt}\, a_{np}\, a_{nt} ,$$

dando a p e a t todos os valores $1, 2, 3, \ldots n-1$ e combinando successivamente cada valor de p com todos os valores de t.

Posto isto, para valores eguaes de p e t, como $p=t=\mu$ por exemplo, o Σ da expressão precedente dá um termo

$$B_{\mu\mu}a_{n\mu}^2 .$$

Para $p=\mu$ e $t=\sigma$, e depois para $p=\sigma$ e $t=\mu$, o sommatorio dá os termos

$$B_{\mu\sigma}a_{n\mu}a_{n\sigma} , \quad B_{\sigma\mu}a_{n\sigma}a_{n\mu} ;$$

ou, por ser $B_{\mu\sigma}=B_{\sigma\mu}$ e sommando,

$$2B_{\mu\sigma}a_{n\mu}a_{n\sigma} .$$

Podemos, portanto, fazer

$$\Delta = Ba_{nn} - \Sigma B_{\mu\mu}a_{n\mu}^2 - 2\Sigma B_{\mu\sigma}a_{n\mu}a_{n\sigma} ,$$

Para usar d'esta fórmula convém calcular separadamente o menor B de Δ e os menores $B_{\mu\mu}$ e $B_{\mu\sigma}$ de B: em $\mu\sigma$ estam comprehendidas todas as combinações distinctas que se podem fazer com os numeros 1, 2, . . $n-1$, tomados 2 a 2.

Se na última fórmula fôr $B=0$, o 2.º membro reduz-se a dois termos; e, além d'isso, o determinante symétrico é expresso por um quadrado, como veremos no exemplo seguinte.

Seja o determinante

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & x_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{vmatrix}$$

que desenvolveremos pelos elementos da última linha e da última columna, attendendo á relação $a_{is} = a_{si}$. Supponhamos que é

$$B = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0 ;$$

virá

$$\Delta_4 = -B_{11} x_1^2 - B_{22} x_2^2 - B_{33} x_3^2$$
$$-2B_{12} x_1 x_2 - 2B_{13} x_1 x_3 - 2B_{23} x_2 x_3 .$$

Ora *(n.° 48, cor.)*, é

$$\frac{B_{11}}{B_{21}} = \frac{B_{12}}{B_{22}} = \frac{B_{13}}{B_{23}} ,$$
$$\frac{B_{11}}{B_{31}} = \frac{B_{12}}{B_{32}} = \frac{B_{13}}{B_{33}} ,$$
$$\frac{B_{21}}{B_{31}} = \frac{B_{22}}{B_{32}} = \frac{B_{23}}{B_{33}} ;$$

donde, por ser $B_{is} = B_{si}$, resulta primeiro que B_{11}, B_{22}, B_{33} teem o mesmo signal, e depois que

$$B_{12} = \sqrt{B_{11} B_{22}} , \quad B_{13} = \sqrt{B_{11} B_{33}} , \quad B_{23} = \sqrt{B_{22} B_{33}} .$$

Por esta forma se vê que a expressão de Δ_4 se torna em

$$\Delta_4 = -(x_1 \sqrt{B_{11}} + x_2 \sqrt{B_{22}} + x_3 \sqrt{B_{33}})^2 ,$$

se os menores B_{11}, B_{22}, B_{33} forem positivos; e do mesmo modo se veria que aquella expressão é um quadrado positivo quando os mesmos menores são negativos. Aos radicaes que entram nas expressões de B_{12}, B_{13} e B_{23} daremos o signal que fôr indicado pelas relações donde foram tirados; por ellas se vê que os signaes ficam determinados logo que são conhecidos os que conveem aos menores relativos aos elementos de uma linha.

Posto isto, representando por Δ um determinante symétrico qualquer, por D_1 o menor que resulta de apagarmos a última linha e a última columna de Δ, por D_2 o menor que pela mesma forma se deduz de D_1 e assim por deante, acabamos de ver que, sendo $D_1 = 0$, o determinante Δ e o segundo menor D_2 teem signaes contrários. Ora

$$\Delta,\ D_1,\ D_2 \ldots D_{n-1}$$

são determinantes de differentes ordens, todos symétricos, e aquella propriedade applica-se a tres d'elles consecutivos; portanto se fôr $D_k = 0$, os menores adjacentes D_{k-1} e D_{k+1} terão signaes contrários.

2.° Voltando agora ao determinante symétrico Δ, vimos (*n.° 37*) que elle se desenvolve em uma funcção inteira de grau n. Designemos por Δ, Δ_1, Δ_2, ... Δ_{n-1} aquelle determinante e os seus menores de differentes classes que se obteem quando apagamos as ultimas filas horizontaes e verticaes. Completemos com uma constante positiva Δ_n o grupo d'aquellas funcções, que são respectivamente de graus n, $n-1$, $n-2$, ... 2, 1.

Pisto isto, se em

$$\Delta\ \Delta_1,\ \Delta_2,\ \Delta_{n-1},\ \Delta_n$$

fizermos variar x segundo a lei de continuidade, desde $-\infty$ até $+\infty$, quando x passar por um valor que annulle uma funcção intermédia Δ_h as funcções adjacentes Δ_{h-1} e Δ_{h+1} terão signaes differentes, como succede com os restos de Sturm; as consequencias são tambem as mesmas. Só se perdem variações quando x passa por um valor raiz da equação $\Delta=0$; mas o primeiro termo de cada uma d'aquellas funcções é positivo e o seu grau alternadamente par e impar: logo, ellas dão n variações para $x=-\infty$ e só permanencias par $x=+\infty$, e por conseguinte a equação $\Delta=0$ tem n raizes reaes. Do mesmo modo a equação $\Delta_1=0$ tem $n-1$ raizes reaes, a equação $\Delta_2=0$ tem $n-2$, etc.

CAPÍTULO II.

Formas algébricas.

201. Chama-se *forma* qualquer funcção *homogénea* de duas ou mais variaveis, considerada em si mesmo, isto é, abstrahindo da equação que se obteria egualando essa funcção a zero. A forma pode ser *binária, ternária, quaternária*, etc., conforme depende de duas variaveis ou de tres, quatro, etc.; tambem se diz *quadrática, cúbica, quártica*, etc., segundo é do 2.º grau ou do 3.º, 4.º, etc.

Os termos de uma forma binária de ordem n são os mesmos do desenvolvimento

$$(x_1+x_2)^n=x_1^n+nx_1^{n-1}x_2+\frac{n(-1)}{1.2}x_1^{n-2}x_2^2+\cdots+x_2^n$$

com coefficientes quaesquer; convém, para symetria dos cálculos, conservar-lhes os coefficientes numéricos do desenvolvimento da potencia n do binomio. Assim

$$a_0 x_1^2 + 2a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2 ,$$

$$a_0 x_1^3 + 3a_1 x_1^2 x_2 + 3a_2 x_1 x_2^2 + a_3 x_2^3 ,$$

$$a_0 x_1^4 + 4a_1 x_1^3 x_2 + 6a_2 x_1^2 x_2^2 + 4a_3 x_1 x_3^3 + a_4 x_2^4$$

são os typos das formas binárias quadrática, cúbica e quártica. Em geral, o numero de termos da forma binária de ordem n é $n+1$.

Do mesmo modo para a forma ternária desenvolveremos

$$(x_1 + x_2 + x_3)^n$$

$$= (x_1 + x_2)^n + n(x_1 + x_2)^{n-1} x_3 + \frac{n(n-1)}{2}(x_1 + x_2)^{n-2} x_3^2 + \cdots + x_3^n ,$$

e anteporemos a cada termo um coefficiente arbitrário ; o numero de termos da forma é

$$(n+1) + n + (n-1) + \cdots + 2 + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2} .$$

Nas formas quadrática e cúbica é usada com frequencia uma notação, de que se fará idéa pelos seguintes exemplos de formas ternárias :

$$a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + 2a_{13} x_1 x_3 + 2a_{23} x_2 x_3 ,$$

$$a_{111} x_1^3 + a_{222} x_2^3 + a_{333} x_3^3 + 3a_{112} x_1^2 x_2 + 3a_{113} x_1^2 x_3 + 3a_{122} x_1 x_2^2$$

$$+ 3a_{133} x_1 x_3^2 + 3a_{223} x_2^2 x_3 + 3a_{233} x_2 x_3^2 + 6a_{123} x_1 x_2 x_3 .$$

A primeira tem 6 termos; e a segunda tem 10, como resulta da fórmula precedente.

Para a forma quaternária teriamos

$$(x_1+x_2+x_3+x_4)^n=(x_1+x_2+x_3)^n+n(x_1+x_2+x_3)(^{n-1}x_4$$

$$+\frac{n(n-1}{2}(x_1+x_2+x_3)^{n-2}x_4^2+\cdots+x_4^n,$$

com coefficientes quaesquer, além dos numéricos. O numero de termos seria

$$N=\frac{(n+1)(n+2)}{2}+\frac{n(n+1)}{2}+\frac{(n-1)n}{2}+\cdots+\frac{2.3}{2}+\frac{1.2}{2},$$

ou

$$N+\frac{1}{2}\Big\{(n+1)(n+1+1)+n(n+1)+(n-1)(n-1+1)$$
$$+\cdots+2(2+1)+1(1+1)\Big\};$$

e portanto

$$N=\frac{1}{2}\Big\{[(n+1)^2+n^2+(n-1)^2+\cdots+2^2+1^2]$$
$$+[(n+1)+n+(n-1)+\cdots+2+1]\Big\}.$$

A parte encerrada no primeiro colchete é *(n.° 41)*

$$(n+1)^2+n^2+(n-1)^2+\cdots+2^2+1^2=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{2.3},$$

a outra parte é

$$(n+1)+n+(n-1)+\cdots+2+1=\frac{(n+1)(n+2)}{2};$$

logo será

$$N=\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3}.$$

Em geral, o numero de termos de uma forma de p variaveis e de grau n é

$$\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+p-1)}{1.2\ldots p-1}.$$

202. *Transformações lineares.*—Transformar linearmente uma forma é achar outra forma do mesmo grau, cujas variaveis sejam em numero egual ás primitivas e estejam ligadas com ellas por meio de relações lineares homogéneas. Chama-se *módulo* o determinante das constantes d'estas relações lineares, o qual representaremos por r. Assim, para uma forma ternária a transformação linear pode ser definida por expressões como

$$x_1=\alpha_1 X_1+\alpha_2 X_2+\alpha_3 X_3,$$
$$x_2=\beta_1 X_1+\beta_2 X_2+\beta_3 X_3,$$
$$x_3=\gamma_1 X_1+\gamma_2 X_2+\gamma_3 X_3;$$

o módulo d'esta transformação é

$$r=\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{vmatrix}.$$

As variaveis consideram-se como independentes, e suppõe-se sempre o módulo r differente de zero.

Seja a forma

$$a_0 x_1^2 + 2a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2 ,$$

e as relações de transformação

$$x_1 = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 ,$$
$$x_2 = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 ;$$

a transformada será

$$A_0 X_1^2 + 2A_1 X_1 X_2 + A_2 X_2^2 ,$$

cujos coefficientes são dados pelas egualdades

$$A_0 = a_0 \alpha_1^2 + 2a_1 \alpha_1 \beta_1 + a_2 \beta_1^2 ,$$
$$A_1 = a_0 \alpha_1 \alpha_2 + a_1 (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) + a_2 \beta_1 \beta_2 ,$$
$$A_2 = a_0 \alpha_2^2 + 2a_1 \alpha_2 \beta_2 + a_2 \beta_2^2 .$$

Em geral, os coefficientes da transformada são funcções lineares homogéneas dos coefficientes da forma primitiva, do grau n quanto ás constantes da transformação; as duas formas são do mesmo grau.

A theoria das formas occupa-se especialmente das funcções que não são alteradas por uma transformação linear; essa propriedade poderá convir a uma funcção dos coefficientes sómente, ou a uma funcção dos coefficientes e das variaveis, como adeante veremos.

203. *Systemas de formas lineares.* — Consideremos o systema de p formas lineares com p variaveis,

$$\begin{aligned} f_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p\,, \\ f_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p\,, \\ &\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ f_p &= a_{p1}x_1 + a\ _px_2 + \cdots + a_{pp}x_p \end{aligned} \tag{i}$$

e o determinante

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{p1} & a_{p2} & a_{p3} & \cdots & a_{pp} \end{vmatrix}.$$

Estas formas são independentes quando não ha alguma relação entre os coefficientes. Sabemos *(n.° 52)* que existe entre ellas uma relação identica, e uma só, quando δ é egual a zero sem que o sejam todos os seus primeiros menores. Entre aquellas funcções ha duas relações identicas, quando δ e todos os seus primeiros menores são eguaes a zero, sem que o sejam todos os menores de 2.ª classe; e assim por deante.

Em geral: *se o determinante δ de um systema de* p *formas com* p *variaveis fôr egual a zero e forem tambem eguaes a zero todos os seus menores até os de classe* i — 2 *inclusivamente, sem que o sejam todos os de classe* i, *haverá entre as formas dadas* i *relações lineares, identicas e distinctas.*

Neste caso as primeiras i funcções exprimem-se por meio das últimas $p-i$, e só estas são independentes.

Supponhamos δ differente de zero e appliquemos ao systema (*i*) a transformação

$$
\left.\begin{aligned}
x_1 &= \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \cdots + \alpha_p X_p \;, \\
x_2 &= \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \cdots + \beta_p X_p \;, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_p &= \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \cdots + \lambda_p X_p \;,
\end{aligned}\right\} \quad (ii)
$$

cujo módulo é

$$
r = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_p \\ \beta_1 & \beta_2 & \ldots & \beta_p \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_p \end{vmatrix} .
$$

As novas formas serão

$$
\left.\begin{aligned}
F_1 &= b_{11} X_1 + b_{12} X_2 + \cdots + b_{1p} X_p \;, \\
F_2 &= b_{21} X_1 + b_{22} X_2 + \cdots + b_{2p} X_p \;, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
F_p &= b_{p1} X_1 + b_{p2} X_2 + \cdots + b_{pp} X_p \;.
\end{aligned}\right\} \quad (iii)
$$

com os coefficientes

$$
\begin{aligned}
b_{11} &= a_{11} \alpha_1 + a_{12} \beta_1 + \cdots + a_{1p} \lambda_1 \;, \\
b_{12} &= a_{21} \alpha_2 + a_{22} \beta_2 + \cdots + a_{1p} \lambda_2 \;, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
b_{pp} &= a_{p1} \alpha_p + a_{p2} \beta_p + \cdots + a_{pp} \lambda_p \;.
\end{aligned}
$$

Se representarmos por δ_1 o determinante do systema (*iii*), vê-se por estas expressões que é $\delta_1 = r\delta$, segundo o principio da multiplicação de determinantes da mesma ordem; e portanto, *o determinante de um systema de formas lineares transformadas é egual ao producto do determinante do primitivo systema multiplicado pelo módulo da transformação.*

Os determinantes δ_1 e δ são conjunctamente eguaes a zero ou differentes de zero. Se houver uma relação entre as formas dadas, haverá uma relação semelhante entre as transformadas. A funcção δ dos coefficientes, depois da transformação, apparece multiplicada por um factor que depende unicamente das constantes da substituição; se o módulo fôr $r=1$, será $\delta_1 = \delta$.

204. *Transformação orthogonal.*—A transformação (*ii*) toma o nome de orthogonal quando entre as novas variaveis e as primitivas existe a relação

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_p^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_p^2 ,$$

que dá logar ás consequencias seguintes:

1.ª Substituindo $x_1, x_2, \ldots x_p$ pelas suas expressões (*ii*) e egualando em um e outro membro os coefficientes dos termos semelhantes, acham-se as relações

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \cdots + \lambda_1^2 = 1 ,$$

$$\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \cdots + \lambda_2^2 = 1 ,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\alpha_p^2 + \beta_p^2 + \cdots + \lambda_p^2 = 1 ,$$

$$\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \cdots + \lambda_1 \lambda_2 = 0 ,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\alpha_{p-1} \alpha_p + \beta_{p-1} \beta_p + \cdots + \lambda_{p-1} \lambda_p = 0 ;$$

cujo numero é

$$p+\frac{p(p-1)}{1.2}=\frac{p(p+1)}{1.2},$$

visto que os productos $X_1 X_2$, $X_1 X_3$, etc. são as combinações das p variaveis duas a duas.

2.ª Das relações precedentes resulta para o quadrado do módulo de uma transformação orthogonal (*n.*° 45) o valor $r^2=1$.

3.ª Multiplicando (ii) respectivamente por α_1, $\beta_1, \ldots \lambda_1$ e sommando os resultados, procedendo do mesmo modo com os multiplicadores α_2, $\beta_2, \ldots \lambda_2$, com α_3, $\beta_3, \ldots \lambda_3$, etc., obteem-se as expressões

$$\begin{aligned}
X_1 &= \alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2 + \cdots + \lambda_1 x_p\,,\\
X &= \alpha_2 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \lambda_2 x_p\,,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
X_p &= \alpha_p x_1 + \beta_p x_2 + \cdots + \lambda_p x_p\,,
\end{aligned}$$

d'onde se deduziriam relações análogas ás primeiras.

4.ª Nas fórmulas de uma transformação orthogonal o numero das constantes arbitrárias reduz-se a

$$p^2-\frac{p(p+1)}{2}=\frac{p(p-1)}{2}.$$

Para $p=3$ as constantes arbitrárias serão 3.

205. *Forma quadrática de* p *variaveis.*—A expressão geral d'esta forma é

$$\begin{aligned} f = a_{11} x_1^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + 2a_{13} x_1 x_3 + \cdots + 2a_{1p} x_1 x_p \\ + a_{22} x_2^2 + 2a_{23} x_2 x_3 + \cdots\cdots + 2a_{2p} x_2 x_p \\ + a_{33} x_3^2 + \cdots\cdots\cdots + 2a_{3p} x_3 x_p \quad (iv) \\ + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ + a_{pp} x_p^2 . \end{aligned}$$

As derivadas parciaes de f, divididas por 2, são as formas lineares (i) com a condição $a_{is} = a_{si}$; e o seu determinante δ é (*n.° 144*) o discriminante de f.

Appliquemos á funcção quadrática a transformação (ii), empregando o seguinte artificio. Se em (46)

$$f = x_1 f_1 + x^2 f_2 + \cdots + x_p f_p \;;$$

substituirmos $x_1, x_2, \ldots x_p$ pelas expressões (ii) e $f_1, f_2, \ldots f_p$ pelas (iii), teremos a transformada

$$\begin{aligned} F = (b_{11} X_1 + b_{12} X_2 + \cdots + b_{1p} X_p)(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \cdots + \alpha_p X_p) \\ + (b_{21} X_1 + b_{22} X_2 + \cdots + b_{2p} X_p)(\beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \cdots + \beta_p X_p) \\ + \text{etc.} \\ + (b_{p1} X_1 + b_{p2} X_2 + \cdots + b_{pp} X_p)(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \cdots + \lambda_p X_p) \;; \end{aligned}$$

ou, effectuando as operações,

$$
\begin{array}{l|l|l|l}
F = b_{11}\alpha_1 & X_1^2 + b_{11}\alpha_2 & X_1 X_2 + \cdots + b_{11}\alpha_p & X_1 X_p \\
\quad + b_{21}\beta_1 & \qquad + b_{21}\beta_2 & \qquad + b_{21}\beta_p & \\
\quad + \cdots & \qquad + \cdots & \qquad + \cdots & \\
\quad + b_{p1}\lambda_1 & \qquad + b_{p1}\lambda_2 & \qquad + b_{p1}\lambda_p & \\
\quad + b_{12}\alpha_1 & X_1 X_2 + b_{12}\alpha_2 & X_2^2 + \cdots + b_{12}\alpha_p & X_1 X_p \\
\quad + b_{22}\beta_1 & \qquad + b_{22}\beta_2 & \qquad + b_{22}\beta_p & \\
\quad + \cdots & \qquad + \cdots & \qquad + \cdots & \\
\quad + b_{p2}\lambda_1 & \qquad + b_{p2}\lambda_2 & \qquad + b_{p2}\lambda_2 & \\
\multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\
\quad + b_{1p}\alpha_1 & X_1 X_p + b_{1p}\alpha_2 & X_2 X_p + \cdots + b_{1p}\alpha_p & X_p^2 : \\
\quad + b_{2p}\beta_1 & \qquad + b^2{}_p\beta_2 & \qquad + b_{2p}\beta_p & \\
\quad + \cdots & \qquad + \cdots & \qquad + \cdots & \\
\quad + b_{pp}\lambda_1 & \qquad + b_{pp}\lambda_p & \qquad + b_{pp}\lambda_p &
\end{array}
$$

onde está bem evidente a lei que seguem os termos do desenvolvimento.

Posto isto, representemos respectivamente por $c_{11}, c_{12}, \ldots c_{1p}$ os coefficientes que na primeira linha, na segunda e na ultima se encontram na primeira columna; por $c_{21}, c_{22}, \ldots c_{2p}$ os que se encontram nas mesmas linhas e na segunda columna; finalmente e em geral por $c_{p1}, c_{p2} \ldots c_{pp}$ os que estam nas mesmas linhas e na última columna; será a transformada

$$
\begin{aligned}
F = & (c_{11} X_1 + c_{12} X_2 + \cdots + c_{1p} X_p) X_1 \\
& + (c_{21} X_1 + c_{22} X_2 + \cdots + c_{2p} X_p) X_2 \\
& + \text{etc.} \\
& + (c_{p1} X_1 + c_{p2} X_2 + \cdots + c_{pp} X_p) X_p .
\end{aligned}
$$

Ora $c_{is} = c_{si}$; de modo que os coefficientes de $X_1, X_2, \ldots X_p$ são respectivamente a metade das derivadas de F em ordem a estas variaveis. Por onde se vê que o discriminante $\triangle$ da transformada é o determinante d'estes coefficientes, e como precedentemente

$$\triangle = r\delta_1 = r^2\delta .$$

Logo: *se transformarmos linearmente uma funcção quadrática homogénea, o discriminante da transformada é egual ao da forma primitiva multiplicado pelo quadrado do módulo.*

Se a transformação fôr orthogonal, será $r = 1$ e portanto $\triangle = \delta$.

206. *Funcção adjunta* (Gauss).—Se fizermos a transformação precedente tomando as novas variaveis

$$X_1 = f_1, \quad X_2 = f_2, \ldots X_p = f_p , \tag{10}$$

o determinante do systema é o discriminante δ. Suppondo-o differente de zero, a eliminação nestas equações dará *(n.º 53)*, depois de substituirmos as derivadas de f pelas suas expressões,

$$\begin{aligned}
\delta x_1 &= A_{11} X_1 + A_{21} X_2 + \cdots + A_{p1} X_p , \\
\delta x_2 &= A_{12} X_1 + A_{22} X_2 + \cdots + A_{p2} X_p , \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\delta x_p &= A_{1p} X_1 + A_{2p} X_2 + \cdots + A_{pp} X_p ;
\end{aligned}$$

e nestas equações os primeiros menores de δ, que representámos pelos A, satisfazem á relação $A_{is} = A_{si}$, porque δ é symétrico. Attendendo a esta circumstancia, se multiplicarmos as mesmas equações respectivamente por X_1, X_2, .. e sommarmos, teremos

$$
\begin{aligned}
\delta f = A_{11} X_1^2 + 2A_{12} X_1 X_2 + \cdots + 2A_{1p} X_1 X_p \\
+ A_{22} X_2^2 + \cdots\cdots + 2A_{2p} X_1 X_p \\
+ \cdots\cdots\cdots\cdots \\
+ A_{pp} X_p^2 .
\end{aligned}
$$

O discriminante da funcção quadrática δf, de p variaveis, é o determinante formado com os primeiros menores A, isto é, o determinante adjunto de δ, ou $\Delta' = \delta^{p-1}$ *(n.° 47)*; por isso a funcção δf se chama *funcção adjunta* de f.

207. *Uma forma quadrática pode em geral reduzir-se á somma de quadrados de formas lineares, em numero egual ao das variaveis.*

Para o demonstrar, notemos que dois casos podem dar-se na forma f: ou algum dos coefficientes dos quadrados é differente de zero, ou faltam todos estes termos.

1.° caso. Supponhamos o primeiro coefficiente a_{11} differente de zero. Podemos fazer

$$
\begin{aligned}
f &= a_{11} x_1^2 + 2(a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + \cdots + a_{1p} x_p) x_1 + \varphi_1 \\
&= a_{11} x_1^2 + 2\varphi x_1 + \varphi_1 = \frac{1}{a_{11}} (a_{11} x_1 + \varphi)^2 + \varphi_1 - \frac{\varphi^2}{a_{11}} ,
\end{aligned}
$$

onde φ é uma funcção linear e φ_1 uma forma quadrática; nem φ nem φ_1 encerram a variavel x_1. Fazendo

$$
a_{11} x_1 + \varphi = X_1 ,
$$

X_1 é uma forma linear e temos

$$f = \frac{1}{a_{11}} X_1^2 + \varphi_1 - \frac{\varphi^2}{a_{11}};$$

assim apparece no 2.° membro o primeiro quadrado de uma forma linear, e a parte restante é uma forma quadratica de $p-1$ variaveis. A esta parte de f applicaremos um raciocinio semelhante; e procedendo successivamente do mesmo modo chegaremos, á solução procurada. Note-se que á forma X_1 não falta nenhuma das variaveis $x_1, x_2, \ldots x_p$; a X_2 falta a primeira, a X_3 as duas primeiras, e assim por deante, ou:

$$\begin{aligned} X_1 &= a_{11} x_1 + \cdots\cdots\cdots\cdots, \\ X_2 &= \;\; 0x_1 + a'_{22} x_2 + \cdots, \\ X_3 &= \;\; 0x_1 + \;\; 0x_2 + \cdots, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

representando por x_1 a variavel com que fizemos a primeira operação, x_2 a variavel com que fizemos a segunda operação, etc. O determinante dos coefficientes tem todos os elementos, do mesmo lado da primeira diagonal, eguaes a zero; e reduz-se ao termo principal, que é differente de zero porque a_{11}, $a'_{22} \ldots$ são differentes de zero. Portanto as fórmas $X_1, X_2, \ldots$ são independentes entre si.

2.° *Caso*. Supponhamos que faltam em f todos os quadrados das variaveis; a funcção, que pode ser a primitiva ou alguma d'aquellas a que fomos conduzidos pelas operações precedentes, só tem termos com productos de duas variaveis. Admittindo que o coefficiente de $x_1 x_2$ é differente de zero, temos agora

$$f = a x_1 x_2 + x_1 \varphi_1 + x_2 \varphi_2 + \varphi_3$$

onde são φ_1 e φ_2 formas lineares e φ_3 uma forma quadratica, da mesma natureza de f: tanto em φ_1 como em φ_2 e φ_3 faltam as variaveis x_1 e x_2. Podemos dar a f a disposição

$$f=\frac{1}{a}(ax_1+\varphi_2)(ax_2+\varphi_1)+\varphi_3-\frac{\varphi_1\varphi_2}{a};$$

mas segundo a relação geral

$$(m+n)(p+q)=\frac{1}{4}(m+n+p+q)^2-\frac{1}{4}(m+n-p-q)^2,$$

da expressão precedente deduz-se

$$\begin{aligned}f&=\frac{1}{4a}(ax_1+ax_2+\varphi_1+\varphi_2)^2-\frac{1}{4a}(ax_1-ax_2+\varphi_2-\varphi_1)^2\\&\quad+\varphi_3-\frac{\varphi_1\varphi_2}{a}\\&=\frac{1}{4a}X_1^2-\frac{1}{4a}X_2^2+\varphi_3-\frac{\varphi_1\varphi_2}{a},\end{aligned}$$

fazendo

$$X_1=ax_1+ax_2+\varphi_1+\varphi_2,\quad X_2=ax_1-ax_2+\varphi_2-\varphi_1,$$

que são formas lineares. Temos assim no 2.º membro dois quadrados e uma funcção quadratica de $p-2$ variaveis, á qual applicaremos o mesmo processo. Formando as linhas dos coefficientes das duas formas lineares X_1 e X_2, vem

$$\begin{array}{lll} a & a & \dots, \\ a & -a & \dots, \end{array}$$

ou compondo-as por subtracção

$$\begin{array}{ccc} a & a & \ldots, \\ 0 & -2a & \ldots; \end{array}$$

e o determinante das funcções X se reduzirá, como no primeiro caso, ao termo principal, differente de zero; estas funcções são independentes.

Temos pois demonstrado que uma forma quadrática de p variaveis é egual a uma somma de quadrados de formas lineares independentes. Dos raciocínios precedentes resulta tambem que o numero d'esses quadrados será p ou menor que p; e portanto será

$$f = k_1 X_1^2 + k_2 X_2^2 + \cdots + k_p X_p^2 .$$

Se egualassemos os coefficientes dos quadrados e dos productos que se encontram nos dois membros d'esta identidade, obteriamos

$$p + \frac{p(p-1)}{2} = \frac{p(p+1)}{2}$$

equações; e como nas p formas lineares $X_1, X_2, \ldots X_p$ de p variacões ha p^2 coefficientes, d'estes ficariam por determinar

$$p^2 - \frac{p(p+1)}{2} = \frac{p(p-1)}{2}$$

que poderiamos escolher arbitrariamente. O problema proposto tem pois muitas soluções.

208. Reduzida a forma f á somma precedente, consideremos esta expressão como uma forma de p variaveis $X_1, X_2, \ldots X_p$; o seu discriminante reduz-se a

$$\Delta = k_1 k_2 \ldots k_p .$$

Substituindo agora X_1, X_2, pelas suas expressões, voltaremos á forma primitiva, que assim pode considerar-se a transformada d'aquella; o módulo r da transformação é o determinante das funcções X, differente de zero, como vimos. Por outra parte, o discriminante da transformada é o discriminante da forma primitiva, multiplicado pelo quadrado do módulo; logo é

$$\delta = r^2 k_1 k_2 \ldots k_p .$$

Se o 2.° membro fôr differente de zero, tambem o 1.° o será; reciprocamente, se δ fôr differente de zero, nenhum dos coefficientes k se annulla; se fôr $\delta = 0$, um pelo menos d'estes coefficientes será zero.

Logo: *a condição necessária e sufficiente para que uma forma quadrática se converta em uma somma de tantos quadrados, quantas são as suas variaveis, é que o seu discriminante seja differente de zero.*

209. Seja a forma quadrática ternária real

$$f = a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + 2a_{13} x_1 x_3 + 2a_{23} x_2 x_3$$

e a transformação (ii), em que é $p = 3$; se esta transformação fôr orthogonal, teremos as fórmulas inversas (iv). Determinemos as nove constantes de modo que a funcção proposta se reduza, sendo possivel, a

$$f = s_1 X_1^2 + s_2 X_2^2 + s_3 X_3^2 ,$$

com as constantes reaes s_1, s_2 e s_3; d'aqui teremos, pelas fórmulas do n.º 204, 3.º

$$\begin{aligned} f = & s_1(\alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2 + \gamma_1 x_3) X_1 \\ & + s_2(\alpha_2 x_1 + \beta_2 x_2 + \gamma_2 x_3) X_2 + s_3(\alpha_3 x_1 + \beta_3 x_2 + \gamma_3 x_3) X_3 . \end{aligned}$$

Ora pelas fórmulas (ii) e pela definição da funcção f temos tambem

$$\begin{aligned} f = & (a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3) x_1 + (a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3) x_2 \\ & + (a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3) x_3 \\ & = (a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3)(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3) \\ & + (a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3)(\beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3) \\ & + (a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3)(\gamma_1 X_1 + \gamma_2 X_2 + \gamma_3 X_3) . \end{aligned}$$

Temos assim duas expressões de f que devem ser identicas; egualando os coefficientes de $x_1 X_1$, $x_2 X_1$ e $x_3 X_1$, vem

$$\begin{aligned} a_{11}\alpha_1 + a_{21}\beta_1 + a_{31}\gamma_1 &= s_1 \alpha_1 , \\ a_{12}\alpha_1 + a_{22}\beta_1 + a_{32}\gamma_1 &= s_1 \beta_1 , \\ a_{13}\alpha_1 + a_{23}\beta_1 + a_{33}\gamma_1 &= s_1 \gamma_1 , \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} (a_{11} - s_1)\alpha_1 + a_{21}\beta_1 + a_{31}\gamma_1 &= 0 , \\ a_{12}\alpha_1 + (a_{22} - s_1)\beta_1 + a_{32}\gamma_1 &= 0 , \\ a_{13}\alpha_1 + a_{23}\beta_1 + (a_{33} - s_1)\gamma_1 &= 0 . \end{aligned}$$

Os outros productos dariam mais seis equações de condição, que só differiriam d'estas pela mudança de $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ e s_1 para as tres primeiras em $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ e s_2, e para as tres ultimas em $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ e s_3. A eliminação dos coefficientes α, β, γ em cada um d'estes tres grupos produz sempre uma equação como

$$\begin{vmatrix} a_{11}-s & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22}-s & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33}-s \end{vmatrix} = 0, \tag{13}$$

com s_1 em vez de s no primeiro, s_2 em vez de s no segundo e s_3 em vez de s no terceiro; logo estes tres coefficientes serão as raizes da equação precedente do 3.° grau. Estas raizes são reaes, como se viu no capitulo anterior; depois de as termos determinado, as condições de identidade darão, com as tres primeiras relações do n.° 204, 1.°, os valores das constantes de uma transformação orthogonal real que reduz a funcção proposta á somma de tres quadrados.

Para uma funcção de p variaveis a solução do problema dependeria da equação

$$\begin{vmatrix} a_{11}-s & a_{21} & \cdots & a_{p1} \\ a_{12} & a_{22}-s & \cdots & a_{p2} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{1p} & a_{2p} & \cdots & a_{pp}-s \end{vmatrix} = 0,$$

com p raizes reaes; logo a reducção é sempre possivel. Nesta última equação o termo independente da incógnita é o discriminante δ; quando fôr $\delta \lessgtr 0$, nenhuma raiz é zero e a forma reduzida contém p quadrados; se fôr $\delta = 0$, ha uma raiz zero e a reduzida tem $p-1$ quadrados. Neste caso, como o coefficiente da primeira potencia de s é a somma dos primeiros menores de δ relativos aos elementos da primeira diagonal, se estes menores forem todos eguaes a zero haverá duas raizes zero, e a reduzida conterá $p-2$ quadrados; e assim por deante.

Se os menores relativos aos elementos da primeira diagonal forem eguaes a zero, tambem o serão os outros menores de δ, porque cada um d'estes é a raiz quadrada do producto de dois dos primeiros, visto que δ é symétrico. D'esta relação resulta tambem que, sendo $\delta = 0$, a funcção adjunta é um quadrado.

210. *Lei de inércia* (Hermite).—Esta lei pode enunciar-se nos termos seguintes: *em uma forma quadrática real, reduzida á somma de quadrados independentes, é invariavel o numero de quadrados positivos e o numero de quadrados negativos, qualquer que seja o modo como se fez a reducção.*

Supponhamos que em f (n.º 207) ha k coefficientes positivos; qualquer dos seus termos com o signal em evidencia será

$$\pm k_r X_r^2 = \pm (X_r \sqrt{k_r})^2 = \pm Y_r^2,$$

e podemos escrever

$$f = Y_1^2 + Y_2^2 + \cdots + Y_h^2 - Y_{h+1}^2 - \cdots - Y_p^2.$$

Se por qualquer outro modo de reducção chegarmos á expressão

$$f = Z_1^2 + Z_2^2 + \cdots + Z_l^2 - Z_{l+1}^2 - \cdots - Z_p^2,$$

será $h = l$. Com effeito, se fosse $h < l$, consideremos as $h + p - l$ equações lineares

$$Y_1 = 0,\ Y_2 = 0, \ldots Y_k = 0\ ,$$
$$Z_{l+1} = 0,\ Z_{l+2} = 0, \ldots Z_p = 0\ ;$$

o seu numero não pode ser maior que $p - 1$, e portanto é sempre possivel determinar as p variaveis que nellas entram de modo que satisfaçam aquelle systema e a

$$Y_{h+t} = c \gtrless 0\,,$$

sendo Y_{h+t} uma das funcções

$$Y_{h+1},\ Y_{h+2}, \ldots Y_p\,,$$

qual se quizer. Teremos pois

$$\begin{aligned} f &= -Y_{h+1}^2 - Y_{h+2}^2 - \cdots - Y_{h+t}^2 - \cdots - Y_p^2 \\ &= \quad Z_1^2 \quad + Z_2^2 \quad + \cdots + Z_l^2\,; \end{aligned}$$

mas esta identidade é impossivel, visto que todos os termos do 1.° membro são negativos e um pelo menos differente de zero: logo não pode ser $h < l$.

Do mesmo modo se mostraría que não pode ser $h > l$; e portanto será $h = l$, como se queria demonstrar.

No n.° anterior vimos que qualquer forma quadrática se reduz por uma transformação orthogonal á expressão

$$s_1 X_1^2 + s_2 X_2^2 + \cdots s_p X_p^2$$

de coefficientes reaes; diz-se que a forma é *positiva* quando todas as raizes da equação em s são positivas, *negativa* quando estas raizes são todas negativas, *indifferente* quando umas são positivas e outras negativas.

211. *Invariante.* — Vimos que, transformando linearmente uma funcção quadrática homogénea, o discriminante da transformada é egual ao da forma primitiva multiplicado pelo quadrado do módulo; por este motivo se diz que o discriminante d'aquella forma é *invariante*. Em geral, dá-se este nome áquella *funcção dos coefficientes de uma forma que, depois de uma transformação linear, só differe da primitiva por um factor que é uma potencia do módulo da transformação*. Assim dada a fórma

$$f(a_0, a_1, \ldots x_1, x_2, \ldots)$$

e a transformada

$$F(A_0, A_1, \ldots X_1, X_2 \ldots),$$

a funcção φ dos coefficientes que convém á relação

$$\varphi(A_0, A_1, \ldots) = r^h \varphi(a_0, a_1, \ldots)$$

é um *invariante*. Demonstra-se que o discriminante de uma forma qualquer é invariante.

Se fôr $h=0$, a funcção φ toma o nome de *invariante absoluto*. Se uma forma tiver mais de um invariante, terá um absoluto; com effeito, supponhamos que ella tem dois invariantes φ e ψ, taes que

$$\varphi(A_0, A_1, \ldots) = r^h \varphi(a_0, a_1, \ldots),$$

$$\psi(A_0, A_1, \ldots) = r^{h'} \psi(a_0, a_1, \ldots);$$

será

$$\frac{[\varphi(A_0, A_1, \ldots)]^{h'}}{[\psi(A_0, A_1, \ldots)]^h} = \frac{[\varphi(a_0, a_1, \ldots)]^{h'}}{[\psi(a_0, a_1, \ldots)]^h}$$

e a funcção que está no segundo membro é um invariante absoluto.

Consideremos a forma binária de ordem n

$$f = a_0 x_1^n + n a_1 x_1^{n-1} x_2 + \frac{n(n-1)}{2} a_2 x_1^{n-2} x_2^2 + \cdots a_n x_2^n,$$

e a substituição linear

$$x_1 = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 ,$$

$$x_2 = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 ;$$

a transformada

$$a_0 (\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2)^n + \cdots + a_n (\beta_1 X_1 + \beta_2 X_2)^n$$
$$= A_0 X_1^n + n A_1 X_1^{n-1} X_2 + \cdots + A_n X_2^n$$

dá logar a $n+1$ equações entre os coefficientes da forma e as constantes da transformação. Eliminando estas ultimas quantidades resultam $n-3$ equações entre os coefficientes; se alguma d'ellas fôr tal como

$$\varphi (a_0, a_1 , \ldots) = \varphi (A_0, A_1 , \ldots) ,$$

φ será um invariante absoluto. Portanto nas formas binárias não pode haver mais de $n-3$ relações d'esta especie; d'onde resulta que a forma quadrática e a cúbica não admittem invariante absoluto, nem conseguintemente mais de um invariante, que é o seu discriminante.

212. *Invariantes simultáneos.*—A funcção dos coefficientes de muitas formas, que goza da propriedade de invariancia, chama-se *invariante simultáneo* d'estas formas. Vimos que o determinante de um systema de formas lineares é invariante simultáneo. Em geral o eliminante de um systema de equações será um invariante simultáneo dos seus primeiros membros. Representando-o por E, a equação $E = 0$ exprime que as propostas teem uma solução commum; mas depois da transformação as novas equações tambem terão uma solução commum, e o seu eliminante E' será egual a zero. Logo serão conjunctamente E e E' eguaes a zero; ou $E' = RE$, sendo R independente dos coefficientes das propostas.

Sejam

$$f_1(a_0, a_1, \ldots x_1, x_2, \ldots), \quad f_2(b_0, b_1, \ldots x_1, x_2 \ldots)$$

duas formas do mesmo grau, e φ um invariante da primeira; se representarmos por φ'_0, φ'_1, ... as derivadas de φ em ordem a a_0, a_1, ..., aquella expressão

$$b_0 \varphi'_0 + b_1 \varphi'_1 + \cdots$$

será um invariante simultáneo de f_1 e f_2, como vae ver-se.

Consideremos a funcção $f_1 + cf_2$, em que c é uma constante arbitrária. Passa-se de f_1 para $f_1 + cf_2$ mudando respéctivamente a_0, a_1, ... em $a_0 + cb_0$, $a_1 + cb_1$, ...; se $\varphi(a_0, a_1, \ldots)$ é um invariante de f_1, $\varphi(a_0 + cb_0, a_1 + cb_1, \ldots)$ será um invariante de $f_1 + cf_2$, qualquer que seja c. Desenvolvendo esta última funcção, os coefficientes das differentes potencias de c gosarão da propriedade de invariancia; e particularmente o primeiro, que é precisamente aquella expressão.

Sejam, por exemplo, as formas qúadráticas

$$f_1 = a_0 x_1^2 + 2a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2, \quad f_2 = b_0 x_1^2 + 2b_1 x_1 x_2 + b_2 x_2^2.$$

O discriminante $a_0 a_2 - a_1$ é, como vimos, um invariante de f_1; applicando o theorema que acabamos de demonstrar, será

$$a_1 b_2 + a_2 b_0 - 2a_1 b_1$$

um invariante simultáneo de f_1 e f_2.

213. *Covariantes.* — Dá-se este nome á *funcção invariante dos coefficientes e das variaveis d'uma forma.*

Sejam a funcção f e a transformada F

$$f(a_0, a_1, \ldots x_1, x_2, \ldots)\,, \quad F(A_0, A_1, \ldots X_1, X_2, \ldots)\,;$$

um covariante φ é definido, em geral, pela egualdade

$$\varphi(A_0, A_1, \ldots X_1, X_2, \ldots) = r^h \varphi(a_0, a_1, \ldots x_1, x_2, \ldots)\,.$$

Ha um principio fundamental que leva á determinação d'uma classe importante de covariantes; consideremos uma forma binária, porque facilmente se generalisarão os resultados que obtivermos.

Seja a forma $f(x_1, x_2)$ e a transformação linear

$$x_1 = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2\,,$$
$$x_2 = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2\,;$$

e supponhamos que o resultado da substituição é expresso pela equação

$$f(x_1, x_2) = F(X_1, X_2)\,.$$

Sejam tambem as variaveis y_1, y_2, Y_1, Y_2 ligadas pelas mesmas relações,

$$y_1 = \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2\,,$$
$$y_2 = \beta_1 Y_1 + \beta_2 Y_2\,,$$

que se chamam *congredientes* com as primeiras; será

$$x_1 + \lambda y_1 = \alpha_1 (X_1 + \lambda Y_1) + \alpha_2 (X_2 + \lambda Y_2)\,,$$
$$x_2 + \lambda y_2 = \beta_1 (X_1 + \lambda Y_1) + \beta_2 (X_2 + \lambda Y_2)\,,$$

com λ arbitrário. Assim, pois, as novas variaveis $x_1+\lambda y_1$, e $x_2+\lambda y_2$ estão ligadas com $X_1+\lambda Y_1$ e $X_2+\lambda Y_2$ pelas fórmulas que relacionam as variaveis x_1 e x_2 com X_1 e X_2, e portanto será tambem

$$f(x_1+\lambda y_1, x_2+\lambda y_2)=F(X_1+\lambda Y_1, X_2+\lambda Y_2) .$$

Effectuando o desenvolvimento, serão eguaes os coefficientes das mesmas potencias de λ, ou

$$y_1 f'_{x_1}+y_2 f'_{x_2}=Y_1 F'_{X_1}+Y_2 F'_{X_2}$$

$$y_1^2 f''_{x_1^2}+2y_1 y_2 f''_{x_1 x_2}+y_2^2 f''_{x_2^2} \qquad (v)$$

$$=Y_1^2 F''_{X_1^2}+2Y_1 Y_2 F''_{X_1 X_2}+Y_2^2 F''_{X_2^2}$$

etc.

Assim fica demonstrado que as operações definidas por estas relações gosam da propriedade de invariancia; qualquer d'ellas conduz a uma funcção $P(x_1, x_2, y_1, y_2)$ com as quatro variaveis congredientes. Se considerarmos x_1 e x_2 como constantes, P será uma funcção homogénea das variaveis y_1 e y_2; uma funcção invariante φ dos coefficientes de P conserva a propriedade da invariancia com quaesquer valores de x_1 e x_2, e φ será um covariante da forma f, visto que se compõe com as variaveis e os coefficientes d'esta forma.

Seja, por exemplo, a forma binária cúbica

$$f=a_0 x_1^3+3a_1 x_1^2 x_2+3a_2 x_1 x_2^2+a_3 x_2^3 ;$$

as segundas derivadas de f são

$$6(a_0 x_1+a_1 x_2) , \quad 6(a_1 x_1+a_2 x_2) , \quad 6(a_2 x_1+a_3 x_2) ,$$

e portanto, supprimindo o factor numérico, a segunda das expressões precedentes será

$$y_1^2(a_0 x_1 + a_1 x_2) + 2y_1 y_2 (a_1 x_1 + a_2 x_2) + y_2^2 (a_2 x_1 + a_3 x_2)\ ,$$

forma quadrática em y_1 e y_2. O discriminante d'esta forma é

$$\begin{aligned}&(a_0 x_1 + a_1 x_2)(a_2 x_1 + a_3 x_2) - (a_1 x_1 + a_2 x_2)^2 \\ &= (a_0 a_2 - a_1^2)\, x_1^2 + (a_0 a_3 - a_1 a_2)\, x_1 x_2 + (a_1 a_3 - a_2^2)\, x_2^2\ ;\end{aligned}$$

e como o discriminante é invariante, esta expressão é um covariante de f.

Seja tambem a forma ternária $f(x_1, x_2, x_3)$ de ordem n e appliquemos-lhe as operações indicadas pela expressão

$$y_1^2 f''_{x_1^2} + y_2^2 f''_{x_2^2} + y_3^2 f''_{x_3^2} + 2y_1 y_2 f''_{x_1 x_2} + 2y_1 y_3 f''_{x_1 x_2} + 2y_2 y_3 f''_{x_2 x_3}$$

Esta forma é quadrática em relação a y_1, y_2, y_3, e o seu discriminante é o determinante das equações

$$\begin{aligned} y_1 f''_{x_1^2} + y_2 f''_{x_1 x_2} + y_3 f''_{x_1 x_3} &= 0 \\ y_1 f''_{x_2 x_1} + y_2 f''_{x_2^2} + y_3 f''_{x_2 x_3} &= 0 \\ y_1 f''_{x_3 x_1} + y_2 f''_{x_3 x_2} + y_3 f''_{x_3^2} &= 0 \end{aligned}$$

e como é invariante, resulta que o determinante das segundas derivadas

$$\mathrm{H} = \begin{vmatrix} f''_{x_1^2} & f''_{x_1 x_2} & f''_{x_1 x_3} \\ f''_{x_2 x_1} & f''_{x_2^2} & f''_{x_2 x_3} \\ f''_{x_3 x_1} & f''_{x_3 x_2} & f''_{x_3^2} \end{vmatrix}$$

é um covariante da forma f. O mesmo teria logar para qualquer numero de variaveis; este covariante chama-se o *Hessiano de f*.

Outra expressão notavel se deduz do mesmo principio. Sejam tres formas f_3, f_2, f_3 a tres variaveis; as expressões correspondentes á primeira fórmula (v) são

$$y_1 f'_{1_{x_1}} + y_2 f'_{1_{x_2}} + y_3 f'_{1_{x_3}},$$
$$y_1 f'_{2_{x_1}} + y_2 f'_{2_{x_2}} + y_3 f'_{2_{x_3}},$$
$$y_1 f'_{3_{x_1}} + y_2 f'_{3_{x_2}} + y_3 f'_{3_{x_3}},$$

do primeiro grau em y_1, y_2 e y_3. O seu determinante

$$J = \begin{vmatrix} f'_{1_{x_1}} & f'_{1_{x_2}} & f'_{1_{3}} \\ f'_{2_{x_1}} & f'_{2_{x_2}} & f'_{2_{x_3}} \\ f'_{3_{x_1}} & f'_{3_{x_2}} & f'_{3_{x_3}} \end{vmatrix}$$

será um covariante simultáneo das tres formas. O mesmo tem logar para o determinante composto com as primeiras derivadas de n formas, ao qual se dá o nome de *Jacobiano* d'estas formas.

INDICE

PRIMEIRA PARTE.

Determinantes.

SEGUNDA PARTE.

Theoria das equações.

TERCEIRA PARTE.

Resolução das equações.

QUARTA PARTE.

Restos de Sturm. Formas.

ERRATA.

Pag.	Lin.	Onde está:	Léia-se:
7	6	$P \equiv a_{\alpha\alpha'}\, b_{\beta\beta'} \cdots a_{\lambda\lambda'}$	$P \equiv a_{\alpha\alpha'}\, a_{\beta\beta'} \cdots a_{\lambda\lambda'}$
12	16	*hemysimétrico*	*hemisymétrico*
14	17	$0\ z_2\ y_2$	$0\ z^2\ y^2$
»	18	$0\ x_2$	$0\ x^2$
16	23	mesmo factor	mesmo factor *(n.º 13)*.
»	27	contido em n *(n.º 3)*.	contido em n.
33	15	e as columnas ou as linhas	e as columnas, ou as linhas,
34	24	$d_3\ e_3\ 0\ 0$	$d_3\ e_3\ *\ *$
79	8	Viu-se no n.º 54. que	Viu-se no n.º 54 que
93	12	as rectas M_2M e OM	as rectas OM e M_2M
»	17	OU, ou $OM = \rho_1\, \rho_2$	OU ou $OM = \rho_1\, \rho_2$
94	14	4.º *Extracção de raizes.*	2.º *Extracção de raizes.*
99	7	do numero anterior.	do n.º anterior
101	26	$+\frac{h^2}{2!} f''_{x}(x, y)$	$+\frac{h^2}{2!} f''_{x_2}(x, y)$
113	21	$f(x) \equiv (x-a_1)_r\ (x-a_2)_s \ldots (x-a_k)^v$	$f(x) \equiv p_0\,(x-a_1)^r . (x-a_2)^s \ldots (x-a_k)^v$
114	20	o grau mn de $\varphi(x)$	o grau $n-m$ de $\varphi(x)$
116	32	$\ldots x \ldots$	$\ldots\ldots$
123	26	por (30)	por (31)
125	7	$\sqrt[r+]{P_{r+s}}$	$\sqrt[r+s]{P_{r+s}}$
126	3	$x^m = (x-1)\ (x^{m-1} +$	$x^m = (x-1)\ (x^{m-1} +$
»	21	O méthodo de Newton, dá	O méthodo de Newton dá
127	5	*(n.º 39)*	(39)
»	23	$(x-5)^4\ (x-3)^2\ (x-1)=0$	$(x-5)^4 . (x-3)^2 . (x-1)=0$
148	3	*ha só uma da raiz*	*ha só uma raiz*
»	16	$\frac{\varphi'(a)}{\varphi(a)}$	$\frac{\varphi(a)}{\varphi'(a)}$
151	15	$K = f''(x+\theta_1)\, h$	$K = f''(x+\theta_1 h)$
173	1	$s=t=$	$r=s=$
177	7	$S_{\alpha+\lambda}\ S^{\beta}$	$S_{\alpha+\lambda} . S_{\beta}$
»	8	$S_{\beta+\lambda}\ S^{\alpha}$	$S_{\beta+\lambda} . S_{\alpha}$
234	17	valor de $n > n$	valor de $n > n'$
237	16	como vimos no n.º 151.	como vimos no n.º 150.
238	7	*(n.º 162)*	*(n.º 152)*
»	13	D'aqui resulta	D'aqui resulta,
247	16	$\alpha 0 = 1$	$\alpha^0 = 1$
249	7	a *differença* a^{n-1}	*a differença* $a^n - 1$
260	4	por ser negativo *(n.º 105, 2.º)*:	por ser negativo (n.º *105, 2.º*)
268	15	$(4\rho^2)^{\frac{(n\ n-1)}{2} - 1}$	$(4\rho^2)^{\frac{n\,(n-1)}{2} - 1}$

S. RODRIGUES

LIÇÕES DE ALGEBRA