Arcos	Log. sen.	Log. cos.	Log. tang.
$A =$ $121^{\circ}36'10''81$	$\bar{1}.9302747$	$\bar{1}.7193874$—	0.2108873—
$B =$ 42.15.13, 66	$\bar{1}.8276379$	$\bar{1}\ 8693336$	$\bar{1}.9583043$
$C =$ 34.15. 2,76	$\bar{1}.7503664$	$\bar{1}.9172860$	$\bar{1}.8330804$
$a =$ 76.35.36, 0	$\bar{1}.9880008$	$\bar{1}.3652279$	0.6227729
$b =$ 50.10.30, 0	$\bar{1}.8853636$	$\bar{1}.8064817$	0.0788816
$c =$ 40. 0.10, 0	$\bar{1}.8080026$	$\bar{1}.8842463$	$\bar{1}.9238564$
$\varphi = -$ 32. 8.50, 0	$\bar{1}.7259905$—	$\bar{1}.9277212$	$\bar{1}.7982693$—
$\varphi' =$ 72. 9. 0, 0	$\bar{1}.9785741$	$\bar{1}.4864674$	0.4921067
$\theta = -$ 43.51.16, 2	$\bar{1}.8406263$—	$\bar{1}.8579964$	$\bar{1}.9826249$—
$\theta' =$ 78. 6.19, 0	$\bar{1}.9905733$	$\bar{1}.3141076$	0.6764656
A respeito do arco perpendicular será			
$\psi =$ 40.51. 3, 0	$\bar{1}.8156388$	$\bar{1}.9368787$	$\bar{1}.8787602$

II. SUPERFICIES E CURVAS NO ESPAÇO

Principios geraes

157. Para exprimir analyticamente a posição no espaço de um ponto M (fig. 9), imaginem-se tres planos fixos zAx, xAy, zAy, taes que se cortem todos no mesmo ponto A, e tenham dous a dous por intersecção *os eixos* Ax, Ay, Az, que para mais facilidade supporemos por ora rectangulares. Marque-se depois a distancia PM, ou $z = c$, d'este ponto á sua projecção P sobre um d'estes planos; e tambem esta projecção por meio das coordenadas AN, AS do ponto P, ou $x = a$, $y = b$. As quantidades dadas, ou as *coordenadas* a, b, c, são as distancias MO, MR, MP, do ponto M aos tres planos, e são tambem as arestas que determinam o parallepipedo ON.

Reflectindo que, além do angulo triedro $zAxy$, os outros planos coordenados formam mais sete triedros, reconhecer-se-ha que a posição do ponto M no espaço não fica determinada pelas coordenadas a, b, c, em quanto não introduzirmos as noções sobre os signaes (n.° 25). Para as applicar a este caso convencionou-se: que se considerassem negativos os z correspondentes aos pontos que ficassem abaixo do plano xAy, produzido indefinidamente: que se considerassem negativos os x correspondentes aos pontos que ficassem para a esquerda do plano zAy, do lado x': e finalmente que se considerassem tambem negativos os y correspondentes aos pontos que ficassem por traz do plano zAx.

158. Succede muitas vezes que em uma questão tudo é similhante a respeito dos tres eixos x, y, z. Havendo então uma equação $X = 0$, relativa ao eixo dos x, haverá uma similhante $Y = 0$, correspondente ao eixo dos y, e uma terceira $Z = 0$ relativa ao eixo dos z. Ora neste caso, as duas ultimas equações $Y = 0$ e $Z = 0$ podem deduzir-se de $X = 0$ por simples mudança de letras. As permutações devem fazer-se pela seguinte maneira.

Poremos em X todas as quantidades relativas ao eixo dos x em logar das quantidades analogas correspondentes ao eixo dos y; depois estas em logar das que correspondem ao eixo z; e finalmente estas ultimas quantidades em logar das primeiras que correspondiam ao eixo dos x. Por esta permutação *em gyro*, deduziremos Z de X; por uma segunda permutação da mesma natureza effectuada sobre Z, obteremos Y; e por uma terceira analoga, effectuada sobre Y, recairemos em X.

Supponhamos que temos as tres equações similhantes $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$, relativas aos tres eixos e nas quaes além de x, y e z entram os tres angulos α, β, γ, que correspondem respectivamente a estas tres coordenadas.

Assentaremos em uma linha, mas separadamente, as tres coordenadas e os tres angulos; depois por baixo noutra linha, tambem separadamente, mas dispostas por ordem differente, as mesmas seis quantidades, pela fórma seguinte

$$x,\ y,\ z, \qquad \alpha,\ \beta,\ \gamma,$$

$$z,\ x,\ y, \qquad \gamma,\ \alpha,\ \beta.$$

J 2 4

Feito isto substituiremos, na 1.ª equação $X=0$, cada uma das quantidades da linha superior pela quantidade correspondente da linha inferior; e com esta permutação obteremos a 3.ª equação $Z=0$. Poremos de novo nesta ultima, as quantidades da linha inferior em lugar das que lhe correspondem na linha superior, e virá a 2.ª equação $Y=0$; e operando similhantemente sobre essa equação, recairemos na 1.ª $X=0$, d'onde partiramos.

E com effeito, cada uma d'estas operações equival a uma mudança nos eixos das coordenadas, pela qual se fazem primeiramente girar os eixos dos x e dos y no seu plano, por tal modo que o eixo dos x positivos vem cair sobre o eixo dos y positivos, e este sobre o eixo dos x negativos. Faz-se depois girar este eixo dos y positivos assim deslocado, e o eixo dos z positivos, de maneira que o primeiro vem cair sobre o eixo dos z positivos, e este ultimo sobre o eixo primitivo dos x positivos; d'onde resulta que a final cada um dos eixos das coordenadas positivas vem occupar o logar de um dos outros eixos das coordenadas positivas. É por isso que as equações relativas aos tres eixos coordenados se deduzem uma das outras por simples permutações de letras, sem ser necessario bulir nos signaes; o que não aconteceria, se simultaneamente se não permutassem pela maneira indicada as tres coordenadas, e as quantidades que respectivamente lhes correspondem.

159. Se for dada uma equação entre as tres coordenadas, tal como $f(x, y, z)=0$, esta equação será indeterminada. Se dermos a duas d'estas variaveis quaesquer valores, $x=a=\mathrm{AN}$, $y=b=\mathrm{PN}$ (fig. 9), da equação proposta resultará para z, pelo menos, uma raiz $z=c$. Se esta for real, levantaremos do ponto P sobre o plano $y\mathrm{A}x$ a perpendicular $\mathrm{PM}=c$, e d'este modo o ponto M do espaço ficará determinado. Dando outros valores ás arbitrarias x e y, isto é, tomando, como se quizer, differentes pontos P sobre o plano $x\mathrm{A}y$, deduziremos da equação os valores correspondentes de z, que determinarão outros tantos pontos do espaço. Todos estes pontos assim achados estarão sobre uma superficie, que será o *logar* de todos elles, quando os imaginarmos unidos por lei de continuidade. Esta superficie será, por exemplo, um cóne, um cylindro, uma esphera; e assim $f(x, y, z)=0$ será a *equação da superficie*, porque distingue os seus postos de todos outros do espaço.

Se z tiver muitos valores reaes, a superficie terá muitos ramos (*);

(*) Não havendo em portuguez palavra propria, que exprima o mesmo que a palavra *nappe* adoptada pelos geometras francezes, assentámos que a expressão *ramos da superficie* podia exprimir a idéa de que se tracta, estando de mais a mais em analogia com outra já adoptada de *ramos de curva*.

e se for imaginario, a perpendicular indefinida levantada em P sobre o plano xy não encontrará a superficie.

Se depois de havermos assignado um valor a y, tal como $y = b = AS$, fizermos variar x, a ordenada $PM = z$ mover-se-ha na direcção SP parallela ao plano xz, e as variações correspondentes, por que passar, serão determinadas pela equação $f(x, b, z) = 0$, que será por conseguinte a da intersecção da superficie pelo plano SM parallelo aos xz. Pela mesma razão fazendo $x = a = AN$, ou $z = c = AT$, teremos as intersecções da superficie pelos planos MN, ou OR, parallelos aos yz ou aos xy.

Fica assim evidente: que $z = 0$ é a equação do plano xy; $z = c$ a de um plano que lhe é parallelo á distancia c; $x = 0$ a equação do plano yz; $x = a$ a do plano parallelo á distancia a; etc.

Do triangulo rectangulo AMP resulta $z^2 + AP^2 = AM^2$; e como APN dá $AP^2 = x^2 + y^2$, será, fazendo $AM = R$,

$$(1) \ldots\ldots x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Logo: 1.° a distancia de um ponto á origem das coordenadas é egual á raiz da somma dos quadrados das tres coordenadas do mesmo ponto: 2.° se x, y e z forem variaveis, esta equação caracterisará todos os pontos do espaço, cuja distancia R á origem é a mesma; e será por conseguinte a *equação da esphera*, que tem o raio R, e o centro na origem das coordenadas.

Sejam (fig. 10) n e m as projecções sobre o plano xy dos dous pontos N (x, y, z) e M (x', y', z'); mn será a projecção da linha $MN = R$, e teremos (n.° 33)

$$mn^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2.$$

Além d'isso a linha MP parallela a mn, formando o triangulo MNP rectangulo em P, dá

$$MN^2 = MP^2 + PN^2 = mn^2; \text{ e como } PN = Nn - Mm = z - z', \text{ será}$$

$$(2) \ldots\ldots (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 = R^2,$$

sendo R a distancia entre os pontos (x, y, z) e $(x', y' z')$ (*). Se considerarmos x, y, z como variaveis, *esta equação será a de uma esphera de raio* R, cujo centro está situado no ponto M (x', y', z').

160. Imaginemos a superficie de um cylindro recto tendo por base uma curva qualquer sobre o plano xy, dada pela sua equação $f(x, y) = 0$. A perpendicular indefinida z, levantada em qualquer ponto d'esta curva sobre o plano xy, é uma generatriz d'este solido; e por conseguinte qualquer valor que se dê a z, sempre a extremidade d'esta perpendicular estará sobre a superficie do cylindro.

Por conseguinte: *a equação da superficie de um cylindro recto é a da sua base*, ou $f(x, y) = 0$.

Quando a generatriz do cylindro recto for perpendicular ao plano dos xz, a equação d'esta superficie será a da base traçada naquelle plano.

Por um raciocinio identico se prova, que a equação de um plano, perpendicular a um dos planos coordenados, é a mesma que a do seu *traço* sobre este plano, isto é, a da linha de intersecção dos dous planos. Assim, se for $AB = \alpha$ (fig. 6) a $a = \text{tang CBI}$, a equação $x' = az + \alpha$, (11)
que é a da linha BC existente no plano zAx, será tambem a do plano FEBC, perpendicular a zAx, e que passa por BC.

161. Sejam $M = 0$, $N = 0$, as equações de duas quaesquer superficies, e vejamos o que resulta da sua combinação.

Ficando neste caso arbitraria só uma das variaveis, z por ex., este systema de equações representará a serie de pontos communs a ambas as superficies, ou por outras palavras a curva resultante da sua intersecção.

162. Assim, recapitulando, vê-se: que *um ponto fica determinado por tres equações entre as suas tres coordenadas,* x, y *e* z; *uma superficie por uma só equação entre as tres coordenadas variaveis dos seus differentes pontos; e uma curva por duas equações, que vem a ser as das duas superficies, que na sua intersecção determinam esta linha.*

Como por uma linha dada podem passar infinitas superficies, é claro que *uma curva no espaço pode ser dada por uma infinidade d'equações.*

(*) Como mB, nC (fig. 10) parallelas a Ay, dão $BC = x - x' =$ á projecção de MN sobre o eixo dos x, vê-se que o *comprimento de uma linha no espaço é a raiz da somma dos quadrados das suas projecções sobre os tres eixos.*

Temos tambem $MP = MN \cos NMP$; logo a projecção $mn = MN$ é o producto da linha projectada pelo coseno da inclinação; e, reciprocamente, um linha no espaço é o quociente da sua projecção sobre um plano, dividida pelo coseno do angulo que a linha faz com o mesmo plano. Estes theoremas extendem-se tambem ás areas planas situadas no espaço, como veremos adiante.

Eliminando z entre $M=0$ e $N=0$, obtem-se uma equação $P=0$ entre x e y. Esta equação é a de um cylindro recto, cuja intersecção com qualquer das duas superficies é a curva de que se tracta: e tambem é a equação da projecção da mesma curva sobre xy. Se em vez de z, eliminarmos y, vê-se do mesmo modo que a equação resultante $Q=0$, é a de um cylindro recto, ou a da projecção da curva sobre o plano xz. Assim $P=0$, $Q=0$, são as equações de dous cylindros, que podemos substituir ás superficies dadas; e são tambem as equações das projecções da curva, e as da mesma curva. D'onde se segue, que *podemos tomar por equações de uma curva as equações das suas projecções sobre dous planos coordenados.*

163. Appliquemos estes principios á linha recta. Podemos tomar para as duas equações as de dous planos quaesquer, que contenham a mesma recta; convirá porém preferir as que apresentam resultados mais simples. Assim $x=0$, $y=0$, que são as equações dos planos yz e xz, são as equações do eixo dos z; $x=0$, $z=0$, são as do eixo dos y; e $y=0$, $z=0$, são as do eixo dos x. Do mesmo modo se vê, que $x=\alpha$, $y=\beta$, são as equações de uma recta PM (fig. 9) parallela aos z, e cujo pé P, ou intersecção com o plano xy, tem por coordenadas $x=\alpha$, $y=\beta$. E assim a respeito dos outros eixos.

Dada uma recta qualquer EF no espaço (fig. 11 *a*), tiremos por ella um plano FEBC perpendicular ao plano xz; BC será a sua projecção sobre este plano. Do mesmo modo acharemos a projecção HG de EF sobre o plano yz. As equações d'estas projecções, ou dos planos projectantes, ou

(3)$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x=az+\alpha,\ y=bz+\beta,$

são as da recta EF.

É facil de ver, que α e β são as coordenadas AB e AG do ponto E, onde a recta EF encontra o plano xy; e que a e b são as tangentes dos angulos formados pelas projecções BC e HG da mesma recta com o eixo AZ. Eliminando z, obtem-se a equação da projecção sobre o plano xy,

(4)$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ay=bx+a\beta-b\alpha.$

164. Se a recta EF (fig. 11) passar por um ponto F (x', y', z'), as projecções C e H d'este ponto estarão situadas sobre as da recta; logo as equações da mesma recta serão

$$(5) \ldots\ldots\ldots\ldots x - x' = a(z - z'),\ y - y' = b(z - z').$$

Se a recta passar por um segundo ponto $(x'', y''\ z'')$, obteremos outras duas equações similhantes, por meio das quaes e das precedentes se determinarão os valores de a e b, que são $a = \frac{x'' - x'}{z'' - z'}$, $b = \frac{y'' - y'}{z'' - z'}$.

Se a recta passar pela origem A, as equações serão

$$(6) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x = az,\ y = bz.$$

Sabe-se pela *Geometria*, que as projécções de duas rectas parallelas sobre um mesmo plano, são parallelas; logo as equações d'estas rectas devem ter os mesmos coefficientes a e b para z, e differir unicamente nos valores das constantes α e β.

165. Se forem dadas as equações de duas rectas

$$x = az + \alpha,\ y = bz + \beta;\ x = a'z + \alpha',\ y = b'z + \beta',$$

e eliminarmos entre ellas as coordenadas variaveis x, y, z, virá uma equação

$$(7) \ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha - \alpha')(b - b') = (\beta - \beta')(a - a'),$$

a qual, sendo independente das mesmas variaveis, é *a condição necessaria para que as mesmas rectas se encontrem*. Se ella não for satisfeita, as linhas não se cortarão; e se o for, o ponto da intersecção terá por coordenadas

$$z = \frac{\alpha - \alpha'}{a' - a} = \frac{\beta - \beta'}{b' - b},\ x = \frac{a'\alpha - a\alpha'}{a' - a},\ y = \frac{b'\beta - b\beta'}{b' - b}.$$

Se as rectas forem parallelas, será então $a = a'$, $b = b'$, e os valores das coordenadas sairão infinitos, o que indica que as mesmas rectas se não podem encontrar.

..

Equações do plano, do cylindro, do cóne, etc.

166. As condições pelas quaes se determina a natureza de qualquer superficie, reduzem-se sempre, em ultima analyse, á lei da sua geração, a qual consiste em que um curva *generatriz*, de fórma constante ou variavel, se move de certa maneira ao longo de uma ou muitas linhas dadas, que se chamam *directizes*, e gera assim a superficie de que se tracta. Para achar a equação da superficie gerada emprega-se um raciocinio similhante ao do n.° 136; do que passamos a dar alguns exemplos, começando pelo plano.

Um plano DC (fig. 12) *pode considerar-se gerado por uma recta* EF, *que, conservando-se sempre parallela a uma direcção determinada, é obrigada a mover-se sobre uma recta fixa.* Supponhamos pois, que a *generatriz* EF, ficando sempre parallela á intersecção BC do plano DC com o plano dos xz, é obrigada, em qualquer das suas posições, a encontrar sempre a intersecção BD do mesmo plano DC com o plano dos yz, a qual é neste caso a *directiz*. Para achar a equação do plano é necessario exprimir analyticamente estas duas condições.

As duas secções BC e BD encontrando-se em B no eixo dos z, tem por equações, fazendo $AB = C$,

$$\text{BC}\ldots\ldots\ldots y=0, \qquad z=Ax+C,$$

$$\text{BD}\ldots\ldots\ldots x=0, \qquad z=By+C\ldots\ldots\ldots(1).$$

Como a linha EF, em qualquer das suas posições, deve ser sempre parallela a BC, o plano projectante EHIF será parallelo a zx, e HI a Ax. A projecção de EF sobre o plano zx tambem será parallela a BC. Assim as equações de EF serão

$$y=\alpha, \ z=Ax+\beta\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2).$$

Eliminando x, y, z entre estas ultimas equações, e as equações (1) da directriz, obtem-se a equação

$$\beta=B\alpha+C\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

a qual, pelo que fica dicto (n.° 165), é a *equação de condição para que a generatriz tenha*, em todas as suas posições, *um ponto commum com a directriz fixa.*

Se dermos pois a α e β valores que satisfaçam á ultima equação (3), e os substituirmos em (2), estas serão as de generatriz em uma das suas posições. Se nas equações (2) substituirmos o valor (3) de β, estas equações serão as de uma generatriz qualquer, cuja posição dependerá do valor arbitrario que se der a α. E finalmente, se entre as equações (2) e (3) eliminarmos α e β, a equação resultante

$$z = Ax + By + C, \qquad\qquad (4)$$

sendo independente d'aquellas quantidades, será a do plano; por isso que então x, y, z representam as coordenadas de uma generatriz qualquer, de que o plano é o *logar geometrico.*

Da analyse da equação do plano se vê: 1.° que C representa a coordenada z inicial, ou AB: 2.° que A e B representam as tangentes dos angulos, que fazem com os eixos dos x e dos z os traços BC e BD do plano sobre os dos xz e dos yz: 3.° que se fizermos variar C sómente, o plano se moverá parallelamente, por isso que os traços successivos se conservam parallelos.

Conclue-se tambem do que fica exposto:

1.° Que toda a equação do 1.° grau a tres variaveis é a de um plano, porque pode sempre reduzir-se á fórma (4).

2.° Que duas equações quaesquer do 1.° grau a tres variaveis, são as de uma linha recta, resultante da intersecção dos planos representados por aquellas equações.

3.° Que, sendo dada a equação do plano, obteremos as equações dos seus traços com os planos dos xz, yz e xy, fazendo nella respectivamente $y=0$, $x=0$, $z=0$, que são as equações dos mesmos planos. Assim $Ax + By + C = 0$ é a equação do traço do plano com o dos xy.

Podiamos ter considerado o plano gerado por uma recta qualquer no espaço obrigada a mover-se sobre outras duas, que poderiam ser os traços do mesmo plano com dous dos planos coordenados. Este calculo, um pouco mais complicado, e que propomos para exercicio, conduziria aos mesmos resultados.

167. Por um raciocinio identico acharemos a equação do *Cylindro, o qual pode considerar-se gerado por uma recta qualquer, que, conser-*

vando-se parallela a si mesma, é obrigada no seu movimento a encontrar sempre uma curva dada no espaço.

Sejam

$$x = az + \alpha,\ y = bz + \beta \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (a)$$

as equações d'uma recta parallela á generatriz, nas quaes a e b se suppõe conhecidas, e α e β dependentes da posição da recta. Sejam tambem $M = 0$, $N = 0$ as equações da directriz. A condição para que esta curva seja encontrada sempre pela generatriz é expressa (n.º 165) pela equação $\beta = F\alpha$, resultante da eliminação de x, y, z, entre as quatro equações d'estas linhas.

Se nas equações (a) substituirmos $F\alpha$ por β, estas duas equações serão as de uma generatriz qualquer, cuja posição dependerá do valor de α.

Se depois eliminarmos d'ellas a quantidade α, obteremos uma relação entre x, y e z, que terá logar para qualquer generatriz, e que será por conseguinte a equação pedida.

Logo, para achar a equação de uma superficie cylindrica, devemos eliminar x, y e z entre as equações (a) e as duas $M = 0$, $N = 0$ da curva directiz; depois na equação resultante $\beta = F\alpha$, substituir $x - az$ por α, e $y - bz$ por β. A *equação do cylindro* será pois da fórma

$$y - bz = F(x - az)\,; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

dependendo a fórma da funcção F da natureza da directriz.

Se por ex., a base for um circulo de raio r, traçado no plano xy, e collocado como na fig. 14, com o diametro AE sobre o eixo dos x, e a origem em A: as equações d'esta base, que se pode tomar por directriz, serão

$$y^2 + x^2 = 2rx,\ z = 0\,;$$

entre as quaes e as equações (a) se eliminarmos x, y, z, virá a equação de condição $\beta^2 + \alpha^2 = 2r\alpha$ (*).

(*) Isto é evidente, reflectindo, que α e β são as coordenadas do pé da generatriz. A mesma consideração se fará a respeito do cone.

Poder-se-ha achar a equação do plano, considerando-o como um cylindro cuja base é uma recta.

Logo

$$(y-bz)^2+(x-az)^2=2r(x-az)\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

é a *equação do cylindro obliquo de base circular*. As quantidades a e b serão determinadas pela direcção do eixo.

Se o eixo estiver no plano xz, será $b=0$, e a equação precedente tornar-se-ha em

$$y^2+(z-az)^2=2r(x-az).$$

Finalmente, se o centro do circulo estiver na origem A, substituir-se-ha por r^2 o 2.º membro de (5).

168. Sejam $$M=0,\ N=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(a)$$

as equações da directriz de *uma superficie conica*, qualquer cujo vertice S tem por coordenadas a, b, c.

A generatriz d'esta superficie é obrigada a passar pelo vertice e a encontrar sempre no seu movimento a directriz.

A 1.ª condição é expressa (n.º 164) pela equação

$$x-a=\alpha(z-c),\ y-b=\beta(z-c)\ldots\ldots\ldots(a'').$$

A 2.ª é expressa, (n.º 165) pela equação $\beta=F\alpha$, resultante da eliminação de x, y, z, entre as equações (a') e (a'').

Eliminando depois β e α por meio das equações (a'') virá a *equação do cóne*

$$\frac{y-b}{z-c}=F\left(\frac{x-a}{z-c}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

na qual a fórma de F dependerá tambem da natureza da directriz, e será determinada quando esta o for.

Se, por ex. a base for o circulo AE (fig. 14), que podemos tomar por directriz, as suas equações (a'), suppondo a origem na extremidade A do diametro, e este coincidindo com o eixo dos x, serão

$$z=0,\ y^2+x^2=2rx;$$

e a equação $\beta = F\alpha$ será neste caso

$$(a - \alpha c)^2 + (b - \beta c)^2 = 2r(a - \alpha c):$$

d'onde se reduz

$$(az - cx)^2 + (bz - cy)^2 = 2r(z - c).(az - cx),$$

a qual será a *a equação do cóne obliquo de base circular.*

Se quizermos que o eixo SC esteja no plano xz, como na fig. 14, faremos $b = 0$, e virá

$$c^2(x^2 + y^2) + 2c(r - a)xz + a(a - 2r)z^2 + 2acrz - 2c^2rx = 0.$$

Se o *cóne é recto*, poremos $a = r$. Mas neste caso é mais simples tomar o eixo dos z para o eixo do cóne, e acha-se então para equação d'esta superficie assim disposta,

$$c^2(x^2 + y^2) = r^2(z - c)^2, \text{ ou } x^2 + y^2 = m^2(z - c)^2, \ldots\ldots (7)$$

designando por m a tangente $\frac{r}{c}$ do angulo formado pelo eixo e pela generatriz.

Se o circulo da base não fosse traçado no plano xy, mas em outro inclinado sobre este, e perpendicular aos xz, sería necessario, designando por A a tangente do angulo que a base fizesse com o plano xy, substituir por (a') as equações

$$z = Ax, \; x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

169. As *superficies de revolução* podem considerar-se geradas pelo movimento de um circulo BDC (fig. 15), o qual sendo perpendicular a um eixo Az, conserva sempre o centro I sobre este eixo, e cujo raio IC vai continuamente variando, de modo que o circulo corta sempre uma dada directriz CAB.

Como o circulo genitor deve ficar constantemente parallelo ao plano dos xy, as suas equações serão as do seu plano e do seu cylindro projectante, ou, fazendo $AI = \beta$, e o raio $IC = \alpha$,

$$z = \beta, \; x^2 + y^2 = \alpha^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (b).$$

Para que este circulo encontre sempre a directriz, cujas equações designaremos por

$$M=0,\ N=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(b'),$$

é necessario, segundo temos visto, que tenha logar a equação de condição $F(\alpha,\beta)=0$, resultante da eliminação de x, y, z, entre (b) e (b').

Se depois eliminarmos α e β entre esta equação e as equações (b), obteremos a *equação* pedida *da superficie de revolução*, que será de fórma

$$z=F(x^2+y^2)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(8)$$

e na qual a funcção F dependerá ainda da natureza da curva directriz.

I. Se a directriz é um circulo existente no plano xz e com o centro na origem, as equações (b') serão neste caso

$$y=0,\ x^2+z^2=r^2;$$

e a equação de condição tornar-se-ha em $\alpha^2+\beta^2=r^2$, o que aliás é evidente. Substituindo nella os valores de α e β deduzidos de (b), virá a *equação da esphera*, já achada (n.º 159)

$$x^2+y^2+z^2=r^2\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(9).$$

II. Se a directriz é *uma parabola* BAC com o vertice na origem das coordenadas, existente no plano xz e situada como na fig. 15, as equações da directriz serão

$$y=0,\ x^2=2pz,$$

d'onde se deduz $\alpha^2=2p\beta$; e por fim

$$x^2+y^2=2pz,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(10)$$

que é *a equação do paraboloide de revolução* em volta do eixo dos z.

III. Se as directrizes forem *ellipses* ou *hyperboles*, com o centro na origem das coordenadas, acharemos pela mesma maneira que as *equações dos ellipsoides e hyperboloides de revolução*, cujos 1.os eixos coincidem com os dos z, são

$$A^2(x^2+y^2)\pm B^2z^2=\pm A^2B^2,\ldots\ldots\ldots\ldots(11)$$

sendo os signaes superiores relativos ao ellipsoide, e os inferiores ao hyperboloide.

IV. Se a directriz é uma recta, as suas equações serão

$$x = az + A,\ y = bz + B,$$

das quaes resulta a equação de condição

$$(a\gamma + A)^2 + (b\gamma + B)^2 = \alpha^2.$$

Eliminando α e β, virá por fim a equação da superficie de revolução

$$x^2 + y^2 = (a^2 + b^2)z^2 + 2(Aa + Bb)z + A^2 + B^2.$$

Fazendo $x = 0$, acha-se (n.° 121) que a intersecção pelo plano yz é uma hyperbole, e como x e y entram sempre debaixo da fórma $x^2 + y^2$, z será funcção de $x^2 + y^2$, e por conseguinte a *superficie gerada é um hyperboloide de revolução.*

Com tudo, se a recta directriz cortar o eixo dos z, as suas equações serão satisfeitas fazendo $x = y = 0$, e $z = c$, d'onde resulta $A = -ac$, $B = -bc$. Temos pois

$$(a^2 + b^2)(z - c)^2 = x^2 + y^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

a qual é a *equação do cóne recto* (n.° 168).

Querendo a equação de uma superficie de revolução em volta de um eixo com uma direcção qualquer, será necessario ou recorrer a uma transformação de coordenadas, ou tractar directamente o problema de um modo analogo ao que temos seguido.

Problemas sobre o plano e a linha recta

170. Cumpre advertir aqui, como no n.° 35, que a respeito das superficies se podem apresentar dous generos de problemas. Ou se tracta de determinar os pontos de uma dada superficie que gozam de certas propriedades, ou então de assignar á superficie uma posição ou dimensões taes, que por meio d'ellas se satisfaça a certas condições. No 1.° caso x, y e z são as incognitas; no 2.° é necessario determinar algumas das constantes de modo que sejam satisfeitas as condições do problema. Estas condições devem, em todos os casos, estabelecer tantas equações distinctas quantas são as incognitas, aliás o problema seria indeterminado ou absurdo. Passemos a applicar ao plano estas considerações geraes.

171. *Achar as projecções da intersecção de dous planos.*

Sejam as equações d'estes planos

$$z = Ax + By + C,\ z = A'x + B'y + C'.$$

Eliminando successivamente entre estas equações as variaveis z, x, y, obteremos as equações seguintes das projecções da intersecção sobre os planos

$$(1)\begin{cases}\text{dos } xy \ldots\ldots (A - A')\,x + (B - B')\,y + C - C' = 0\\ \text{dos } yz \ldots\ldots (A' - A)\,z + (AB' - A'B)y + AC' - A'C = 0,\\ \text{dos } xz \ldots\ldots (B' - B)\,z + (A'B - AB')x + BC' - B'C = 0.\end{cases}$$

172. *Fazer passar um plano por um, dous ou tres pontos dados.*

Seja a equação do plano $z = Ax + By + C$.

O plano ficará determinado, ou quando A, B, C forem conhecidos, ou quando se poderem estabelecer entre estas quantidades tres equações, por meio das quaes se determinem os seus valores.

Se quizermos que o plano passe pelo ponto dado (x', y', z'), a sua equação tornar-se-ha em $z' = Ax' + By' + C$. Subtrahindo pois esta ultima equação da primeira, teremos a equação do plano que passa pelo ponto dado,

$$(2) \ldots\ldots\ldots\ldots\ z - z' = A\,(x - x') + B\,(y - y').$$

Se quizermos, que passe por um segundo ponto (x'', y'', z''), teremos $z'' = Ax'' + By'' + C$; e como nos falta ainda uma equação para podermos determinar as tres constantes arbitrarias, podemos sujeitar o plano a passar ainda por um terceiro ponto, ou a satisfazer a outra condição.

Mas se quizessemos por ex., que o plano além de passar pelo ponto (x', y', z'), fosse parallelo a um plano determinado $z = A'x + B'x + C'$

teriamos a equação (2), e as equações

$$A = A',\ B = B'.$$

173. *Achar as condições para que uma recta e um plano coincidam, ou sejam parallelos.*

Sejam as equações do plano e da recta

$$z = Ax + By + C,$$

$$x = az + \alpha,\ y = bz + \beta.$$

Substituindo na 1.ª os valores de x e y, tirados das duas ultimas, teremos

$$z(Aa + Bb - 1) + A\alpha + B\beta + C = 0.$$

Se a recta e o plano tivessem um só ponto commum, o valor de z tirado d'esta equação seria o de uma das coordenadas d'este ponto.

Para que a recta porém coincida com o plano, é necessario que esta ultima equação subsista qualquer que seja o valor de z; e por conseguinte as equações de *condição de coincidencia* serão

$$(3) \ldots\ldots\ldots\ldots Aa + Bb = 1,\ A\alpha + B\beta + C = 0.$$

Para exprimir que a recta é sómente parallela ao plano, basta introduzir a condição de que, se transportarmos parallelamente a si mesmo tanto a recta como o plano até á origem, ahi hão-de coincidir. Mas para que este transporte tenha logar é necessario suppor nullos nas equações precedentes α, β e C; logo a *condição de parallelismo* reduz-se á equação

$$(4) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots Aa + Bb - 1 = 0.$$

174. *Exprimir que uma recta é perpendicular a um plano.*

Se projectarmos a recta sobre o plano dos xy, o plano projectante será perpendicular ao plano dado e ao dos xy; estes dous ultimos terão pois por intersecção uma perpendicular ao plano projectante, e por conseguinte á projecção da recta sobre o plano dos xy. Logo, *quando uma linha for perpendicular a um plano, os traços d'este plano e as projecções da recta sobre os planos coordenados farão respectivamente angulos rectos.*

Posto isto, servindo-nos das mesmas equações do plano e da linha recta do n.° precedente, as equações dos traços do plano sobre xz e yz, serão

$$z = Ax + C,\ z = By + C$$

ou

$$x = \frac{1}{A}z - \frac{C}{A},\ y = \frac{1}{B}z - \frac{C}{B};$$

e as condições de perpendicularidade d'estes traços com as projecções da recta, darão (n.° 31, equação 7)

$$(5) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots A + a = 0,\ B + b = 0.$$

Estas equações determinam duas das constantes do plano, ou da recta que lhe é perpendicular. As outras constantes devem ser dadas, ou sujeitas a outras condições.

175. Querendo tirar um plano perpendicular á recta dada, a equação do plano será pelo n.° precedente,

$$(6) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots z + ax + by = C.$$

Se designarmos por α e β as coordenadas do ponto onde a recta encontra o plano xy, uma esphera, cujo centro esteja neste ponto, terá por equação (n.° 159)

$$(7) \ldots\ldots\ldots\ldots (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + z^2 = r^2.$$

As equações (6) *e* (7) *são pois as de um circulo cujo plano é perpendicular á recta dada.* O raio d'este circulo e a sua posição absoluta dependem de r e de C.

Sejam $M = 0$, $N = 0$, as equações de uma curva. Para que esta encontre o circulo de que acabâmos de tractar, é necessario que possam coexistir as quatro equações precedentes. Eliminando entre ellas as variaveis x, y e z, vem uma equação de condição $r = F(C)$, na qual repondo por r e C os seus valores tirados de (7) e (6), vem a equação

$$(8) \ldots\ldots \sqrt{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + z^2} = F(z + ax + by),$$

que é a da superficie gerada pela revolução da curva dada em volta da recta.

176. Se pelo contrario quizermos *tirar uma recta que seja perpendicular a um plano dado, e que passe por um dado ponto* (x', y', z'), teremos (n.° 174) para determinal-a as seguintes equações

$$(9) \ldots\ldots x-x'+A(z-z')=0,\ y-y'+B(z-z')=0.$$

Por meio d'estas duas equações é facil *achar a distancia do ponto ao plano;* por quanto pondo

$$L=C-z'+Ax'+By';$$

dando á equação do plano a fórma

$$(a) \ldots\ldots\ldots z-z'=A(x-x')+B(y-y')+L;$$

e eliminando depois as coordenadas x, y e z do pé da perpendicular, entre as equações (9) e (a): resulta finalmente

$$z-z'=\frac{L}{1+A^2+B^2},\ x-x'=\frac{-AL}{1+A^2+B^2},\ y-y'=\frac{-BL}{1+A^2+B^2}.$$

A distancia entre o ponto (x', y', z') e o pé da perpendicular (x, y, z), ou por outras palavras, a distancia do ponto ao plano, será pois (n.° 159)

$$(10) \ldots\ldots\ldots\ldots \delta=\frac{L}{\sqrt{1+A^2+B^2}}\ (*).$$

(*) Se o ponto pertencer a uma recta ($x=az+\alpha$, $y=bz+\beta$), será

$$\delta=\frac{(Aa+Bb-1)z+A\alpha+B\beta+C}{\sqrt{1+A^2+B^2}}.$$

Para que a recta seja parallela ao plano, é necessario que δ seja constante ou

$$Aa-Bb-1=0.$$

177. *Achar a distancia de um ponto a uma recta.* Servindo-nos das mesmas equações da recta do n.° 173, o plano perpendicular, tirado pelo ponto dado (x', y', z'), tem por equação

$$(a')\ldots\ldots\ldots\ldots a(x-x')+b(y-y')+z-z'=0.$$

Eliminando x, y e z entre a equação (a') e as duas da recta, obteremos os seguintes valores das coordenadas do ponto de encontro da recta com o plano perpendicular,

$$x=\frac{aM}{1+a^2+b^2}+\alpha,\ y=\frac{bM}{1+a^2+b^2}+\beta,\ z=\frac{M}{1+a^2+b^2},$$

sendo

$$M=a(x'-\alpha)+b(y'-\beta)+z'.$$

E por conseguinte concluiremos tambem (n.° 159), que a distancia P entre os pontos (x', y', z'), (x, y, z), ou por outras palavras, que a distancia P do ponto á recta, é dada pela equação

$$(11)\ldots\ldots P^2=(x'-\alpha)^2+(y'-\beta)^2+z'^2-\frac{M^2}{1+a^2+b^2}.$$

178. *Achar o angulo* A *formado por duas rectas.* Como pode acontecer que as rectas dadas, sendo produzidas, se não encontrem, deve entender-se, que se pede *o angulo comprehendido entre duas rectas tiradas por um mesmo ponto parallelamente ás linhas dadas.*

Sejam pois as equações das parallelas ás rectas dadas, tiradas pela origem,

$$(b)\ldots\ldots x=az,\ y=bz;\quad (b')\ldots\ldots x=a'z,\ y=b'z;$$

tractâmos de achar A em funcção de a, b, a', b'.

E para que coincida com elle, é necessario, além d'isso que seja $\delta=0$, ou

$$A\alpha+B\beta+C=0.$$

Por esta consideração podiam tambem determinar-se as condições pedidas no n.° 173.

Para isso imagine-se primeiro uma esphera, cujo centro coincida com a origem das coordenadas, e cujo raio seja a unidade. Obteremos as coordenadas do ponto em que ella corta a recta dada pelas equações (b), substituindo os valores de x e y, tirados das mesmas equações da esphera, que é

$$x^2+y^2+z^2=1;$$

e acha-se $(a^2+b^2+1)z^2=1$, da qual se deduz z, e depois x e y por meio das mesmas equações (b). Para obter depois as coordenadas z', x', y' do ponto, em que a mesma esphera corta a recta dada pelas equações (b'), basta evidentemente mudar nos valores precedentes a e b em a' e b'.

Teremos assim

$$z=\frac{1}{\sqrt{1+b^2+a^2}},\ x=\frac{a}{\sqrt{1+a^2+b^2}},\ y=\frac{b}{\sqrt{1+a^2+b^2}},$$

$$z'=\frac{1}{\sqrt{1+a'^2+b'^2}},\ x'=\frac{a'}{\sqrt{1+a'^2+b'^2}},\ y'=\frac{b'}{\sqrt{1+a'^2+b'^2}}.$$

A distancia D, entre os pontos determinados por estes dous systemas de coordenadas, será dada pela equação

$$D^2=(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2=2-2(xx'+yy'+zz'),$$

por ser

$$x^2+y^2+z^2=1,\ x'^2+y'^2+z'^2=1.$$

Figurando agora no espaço o triangulo isosceles, cujos tres lados são 1, 1 e D, o angulo pedido A será opposto ao lado D; e por conseguinte será (*Trigonom. rect.*)

$$(12)\ldots\ldots\ldots\ldots\cos A=1-\tfrac{1}{2}D^2=xx'+yy'+zz'$$

$$=\frac{1+aa'+bb'}{\sqrt{1+a^2+b^2}\times\sqrt{1+a'^2+b'^2}}.$$

D'esta ultima equação deduz-se, pela relação conhecida $sen = \sqrt{1 - cos^2}$,

$$(13)\ldots\ldots\ldots \operatorname{sen} A = \frac{\sqrt{(a-a')^2+(b-b')^2+(ab'-a'b)^2}}{\sqrt{1+a^2+b^2}\times\sqrt{1+a'^2+b'^2}};$$

e facilmente se obteria depois o valor de tang A.

1.° Para deduzir os angulos X, Y, Z, que uma recta faz com os eixos dos x, y e z, basta substituir nas equações precedentes, em logar de a' e b', os seus valores correspondentes a cada um d'estes eixos. Querendo achar, por ex., o angulo que uma recta faz com o eixo dos z, cuja posição é determinada pelas equações $x=0$, $y=0$, teremos em virtude das equações (b'), $a'=0$, $b'=0$. Introduzindo estes valores na formula (12) do n.° precedente, resulta

$$\cos Z = \frac{1}{\sqrt{1+a^2+b^2}}.$$

E notando que o systema das equações (b) do mesmo n.° pode ser substituido pelo systema equivalente

$$y = \frac{b}{a}x, \quad z = \frac{1}{a}x, \quad x = \frac{a}{b}y, \quad z = \frac{1}{b}y;$$

acham-se por simples permutações, mudando a e b em $\frac{b}{a}$ e $\frac{1}{a}$ para x, e a e b em $\frac{a}{b}$ e $\frac{1}{b}$ para y, os valores de cos X e de cos Y.

Por este modo acharemos que *os angulos, que uma recta qualquer no espaço faz com os tres eixos coordenados, são determinados pelas equações seguintes:*

$$(14)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \left\{ \begin{aligned} \cos X &= \frac{a}{\sqrt{1+a^2+b^2}}, \\ \cos Y &= \frac{b}{\sqrt{1+a^2+b^2}}, \\ \cos Z &= \frac{1}{\sqrt{1+a^2+b^2}}. \end{aligned} \right.$$

2.° As equações (14) são tambem os valores dos senos dos angulos que a recta faz com os planos dos yz, xz e xy; pois que estes angulos são visivelmente complementos de X, Y e Z.

3.° Sommando os quadrados das equações (14), vem a relação

$$(15) \ldots\ldots\ldots\ldots \cos^2 X + \cos^2 Y + \cos^2 Z = 1.$$

As equações (14) e (15) fazem ver, que podemos sempre tirar no espaço uma recta, que forme com dous dos eixos coordenados, os dos x e dos y por ex., angulos arbitrarios X e Y; porém o terceiro Z fica então determinado.

4.° Tomemos um comprimento qualquer MN (fig. 33) sobre uma recta no espaço, que fez os angulos X, Y e Z com os eixos coordenados, e projectemos o mesmo comprimento sobre os x e os y.

As projecções serão

$$BC = MN . \cos X, \text{ e } MN \cos Y.$$

Porém mn, ou MP, é a projecção de MN sobre o plano xy, e por conseguinte é $mn = MN \operatorname{sen} Z$. Projectando de novo mn sobre os x e os y, as projecções serão

$$BC = mn \cos \theta, \quad \text{e} \quad mn \operatorname{sen} \theta,$$

sendo θ o angulo que mn faz com os x. Substituindo depois nestas equações por mn o seu valor precedente, vem

$$BC = MN \operatorname{sen} Z \cos \theta, \text{ e } MN \operatorname{sen} Z \operatorname{sen} \theta.$$

Egualando finalmente os dous valores das mesmas projecções, resulta

$$(16) \ldots\ldots\ldots \cos X = \operatorname{sen} Z \cos \theta, \ \cos Y = \operatorname{sen} Z \operatorname{sen} \theta.$$

Assim, em vez de determinar a direcção de uma linha no espaço por meio dos tres angulos X, Y, Z, que ella faz com os tres eixos: basta que seja dado o angulo que ella faz com a sua projecção sobre o plano dos xy (que é o complemento do angulo Z); e o angulo θ que esta projecção faz com o eixo dos X; e reciprocamente.

Sommando os quadrados das duas equações (16), vem

$$\cos^2 X + \cos^2 Y = \operatorname{sen}^2 Z = 1 - \cos^2 Z,$$

relação que já tinhamos obtido (3.°).

5.° Sommando os valores dos productos $\cos X \cos X'$, $\cos Y \cos Y'$, $\cos Z \cos Z'$, dados pelas formulas, e comparando a somma com a equação, (12) acha-se a relação

$$(17) \ldots\ldots\ldots \cos A = \cos X \cos X' + \cos Y \cos Y' + \cos Z \cos Z',$$

por meio da qual se exprime o valor do angulo, que fazem duas rectas no espaço, em funcção do angulo que cada uma d'ellas faz com os tres eixos.

6.° *Se as duas rectas forem perpendiculares,* será $\cos A = 0$, e esta condição será expressa por qualquer das relações seguintes

$$(18) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1 + aa' + bb' = 0,$$

$$(19) \ldots\ldots\ldots \cos X \cos X' + \cos Y \cos Y' + \cos Z \cos Z' = 0.$$

179. *Achar o angulo θ de dous planos, dados pelas suas equações*

$$z = Ax + By + C, \quad z = A'x + B'y + C'.$$

Se da origem abaixarmos perpendiculares sobre os dous planos, o angulo feito por estas linhas será egual ao dos planos. Sendo pois

$$x = az, \; y = bz, \quad x = a'z, \; y = b'z,$$

as equações de duas rectas que passam pela origem, para que estas rectas sejam respectivamente perpendiculares aos dous planos, é necessario que sejam (n.° 174)

$$A + a = 0, \; B + b = 0; \quad A' + a' = 0, \; B' + b' = 0.$$

Logo as equações das perpendiculares serão

$$x + Az = 0, \; y + Bz = 0, \quad x + A'z = 0, \; y + B'z = 0;$$

e o coseno do angulo d'estas rectas, que é o dos dous planos, será (n.° 178)

$$(20)\ldots\ldots\ldots\cos\theta=\frac{1+AA'+BB'}{\sqrt{1+A^2+B^2}\sqrt{1+A'^2+B'^2}}.$$

1.° Se fizermos tomar ao 2.° plano a situação dos yx, a sua equação tornar-se-ha em $z=0$; é necessario por tanto, que na equação (20) se faça $A'=B'=C'=0$, a fim de obtermos o angulo V que um plano faz com o dos xy. Por meio de simples permutações, como no n.° 178, obteremos os angulos T e U, que o mesmo plano faz com os xz, e yz. Por conseguinte

$$(21)\ldots\ldots\ldots\begin{cases}\cos U=\dfrac{A}{\sqrt{1+A^2+B^2}},\\[2ex] \cos T=\dfrac{B}{\sqrt{1+A^2+B^2}},\\[2ex] \cos V=\dfrac{1}{\sqrt{1+A^2+B^2}}.\end{cases}$$

D'estas equações deduzem-se as relações

$$(22)\ldots\ldots\ldots\cos^2 T+\cos^2 U+\cos^2 V=1,$$

$$(23)\ldots\ldots\ldots\cos\theta=\cos T\cos T'+\cos U\cos U'+\cos V\cos V'.$$

A ultima dá-nos o angulo dos dous planos em funcção dos angulos que cada um d'elles faz respectivamente com os tres planos coordenados.

2.° *Se os dous planos forem perpendiculares*, será $\cos\theta=0$, e esta condição será expressa por qualquer das duas relações seguintes:

$$(24)\ldots\ldots\ldots 1+AA'+BB'=0,$$

$$(25)\ldots\ldots\ldots \text{co}\,T\cos T'+\cos U\cos U'+\cos V\cos V'=0.$$

180. *Achar o angulo* η *de uma recta e de um plano.*

Sejam $z = Ax + By + C$, e $x = az + \alpha$, $y = bz + \beta$,

as equações do plano e da recta. O angulo pedido é egual ao que a recta faz com a sua projecção sobre o plano (*Geometr.*); conseguintemente, se de um ponto da recta abaixarmos uma perpendicular sobre o mesmo plano, o angulo d'estas duas linhas será complemento do angulo η.

Tiremos pois pela origem uma recta qualquer $x = a'z$, $y = b'z$; para que ella seja perpendicular ao plano, é necessario (n.° 174), que seja $a' = -A$, $b' = -B$. O coseno do angulo que ella fórma com a linha dada, sendo egual a sen η, teremos (n.° 178)

$$(26) \ldots\ldots\ldots\ldots \operatorname{sen} \eta = \frac{1 - Aa - Bb}{\sqrt{1 + a^2 + b^2} \times \sqrt{1 + A^2 + B^2}}.$$

D'aqui facilmente se conclue, como no n.° 179, que os angulos que a recta fórma com os planos coordenados yz, xz e xy, tem por senos respectivos

$$\frac{a}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}, \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}};$$

o que concorda com o que já vimos (n.° 178, 2.°).

181. *Se a recta for parallela ao plano,* sendo então sen $\eta = 0$, esta condição será expressa pela relação

$$(27) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1 - Aa - Bb = 0.$$

Transformação de coordenadas

182. *Passar de um systema de coordenadas para outro de coordenadas parallelas ás primeiras com a origem em um ponto differente* (α, β, γ).

Veremos pois um raciocinio similhante ao que empregámos no n.° 43, que deve fazer-se

$$x = x' + \alpha, \quad y = y' + \beta, \quad z = z' + \gamma.$$

É necessario advertir ainda, que ás coordenadas da nova origem α, β, γ devem dar-se os valores e os signaes convenientes á sua posição. Por exemplo, se a origem estiver no plano dos xy, será $\gamma=0$; se estiver no eixo dos z negativos, α e β serão nullos, e γ será negativo.

183. *Mudar a direcção dos eixos.* Imaginem-se (fig. 16) tres novos eixos Ax', Ay', Az'; e supponhamos os eixos primitivos rectangulares, e estes novos eixos com uma direcção dada arbitrariamente. Tome-se um ponto qualquer e tirem-se as suas coordenadas x', y' e z'. Se depois projectarmos successivamente estas coordenadas sobre os tres eixos primitivos dos x, dos y e dos z; cada uma das coordenadas x, y e z será, á similhança do que se viu no n.º 44, a somma das tres projecções sobre o eixo respectivo.

Designe-se por (xx') o angulo $x'Ax$ formado pelo eixo dos x' e dos x; por (yy') o angulo yAy';....etc.: teremos

$$(A)\ldots\ldots\ldots\begin{cases} x=x'\cos(x'x)+y'\cos(y'x)+z'\cos(z'x), \\ y=x'\cos(x'y)+y'\cos(y'y)+z'\cos(z'y), \\ z=x'\cos(x'z)+y'\cos(y'z)+z'\cos(z'z). \end{cases}$$

Como suppuzemos os eixos primitivos rectangulares, os angulos precedentes não são inteiramente arbitrarios, por isso que devem satisfazer (n.º 178, 3.º) ás relações

$$(B)\ldots\ldots\ldots\begin{cases} \cos^2(x'x)+\cos^2(x'y)+\cos^2(x'z)=1, \\ \cos^2(y'x)+\cos^2(y'y)+\cos^2(y'z)=1, \\ \cos^2(z'x)+\cos^2(z'y)+\cos^2(z'z)=1. \end{cases}$$

Fazendo, para simplificar,

$$S=\cos(x'x)\cos(y'x)+\cos(x'y)\cos(y'y)+\cos(x'z)\cos(y'z),$$

$$T=\cos(x'x)\cos(z'x)+\cos(x'y)\cos(z'y)+\cos(x'z)\cos(z'z),$$

$$U=\cos(y'x)\cos(z'x)+\cos(y'y)\cos(z'y)+\cos(y'z)\cos(z'z),$$

teremos para exprimir os angulos que os novos eixos fazem entre si (n.° 178, 5.°) as equações

$$(C) \ldots\ldots\ldots \cos(x'y') = S, \ \cos(x'z') = T, \ \cos(y'z') = U.$$

Se as novas coordenadas forem rectangulares, teremos

$$(D) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots S = 0, \ T = 0, \ U = 0.$$

As equações (A), (B), (C), (D) contém os nove angulos que os eixos x', y', z' fazem com os x, y, z. Se quizermos sómente mudar de um systema de coordenadas rectangulares para outro de coordenadas de direcção obliqua, teremos apenas seis angulos arbitrarios, porque as equações (B) determinam tres.

E se, além d'isto, quizermos, que o segundo systema seja tambem rectangular, as equações (D), que exprimem esta condição, deixarão unicamente tres angulos arbitrarios.

Com effeito o eixo dos x' faz com os x, y, z tres angulos, dous dos quaes são arbitrarios, e o terceiro vem a ser determinado pela 1.ª das equações (B): o eixo dos y' estaria no mesmo caso se não fosse sujeito a ser perpendicular aos x'; esta condição porém não deixa realmente mais que uma arbitraria: e como o eixo dos z', perpendicular ao plano $x'y'$, vem a ser determinado com os dados antecedentes, são por fim sómente tres as quantidades arbitrarias.

Os valores de x', y', z', deduzidos de (A) serviriam para *transformar um systema de coordenadas obliquas n'outro rectangular*. E por meio das mesmas formulas (A), passando d'este ultimo systema para outro obliquo, conseguiriamos *transformar um systema obliquo n'outro tambem obliquo.*

Na resolução d'este problema suppuzemos que a origem das coordenadas se conservou a mesma; se quizermos porém que esta mude tambem, passaremos, primeiro que tudo, pelo modo indicado no n.° precedente, para um systema de eixos parallelos aos primeiros e que passe pela nova origem.

184. *Para passar de um systema rectangular para outro systema tambem rectangular*, em vez de nos servirmos das formulas precedentes, que para a resolução do problema nos conduzem a uma eliminação as mais das vezes trabalhosa, podemos servir-nos das *formulas* seguintes, *devidas*

a Euler, por meio das quaes se exprimem immediatamente as nove constantes em funcção de outras tres escolhidas da maneira seguinte:

Tome-se um plano $CAy'x'$ (fig. 16) com a inclinação θ sobre o plano xAy; e seja AC a intersecção d'estes planos, e $CAx = \psi$ o angulo, que AC faz com Ax. No plano CAy' determinado por θ e ψ, tracemos dous eixos rectangulares Ax', Ay'; e seja $CAx' = \varphi$ o angulo que o primeiro faz como o traço AC. Por este meio os novos eixos vem a ser determinados pelos angulos θ, ψ e φ, que, dão a inclinação do plano $x'y'$ sobre o plano xy, bem como a direcção do traço AC, e a de Ax' neste plano $x'y'$ assim determinado. O eixo y' fórma, neste plano, com Ax' o angulo $x'Ay'$ de 90°; e o eixo z' fica determinado pela condição de ser perpendicular a este mesmo plano.

Tracta-se pois, a fim de transformar os eixos, de exprimir os nove angulos $(x'x)$, $(y'x)$,...., que entram em (A), em funcção d'estas tres constantes θ, ψ e φ.

As rectas Ax, Ax' e AC formam um triedro, no qual se conhecem além dos dous angulos planos φ e ψ, o angulo diedro θ comprehendido por elles. Applicando a este caso a formula (3, pag. 189); e fazendo

$$c = (x'x),\ C = \theta.\ a = \psi,\ b = \varphi,$$

teremos

$$\cos(x'x) = \cos\psi\cos\varphi + \operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\varphi\cos\theta.$$

Operando analogamente, a respeito do angulo xAy', sobre o triedro formado por AC e pelos eixos x e y' (fig. 17); determinaremos $\cos(yx')$, advertindo que neste caso os angulos planos são $(y'x)$, $CAy' = 90° + \varphi$, $CAx = \psi$. Para obter $\cos(x'y)$ empregaremos o triedro $x'ACy$, considerando os angulos planos $(x'y)$, $CAy = 90 + \psi$, e $CAx' = \varphi$. Finalmente para $\cos(y'y)$, tomaremos o triedro $y'ACy$, e os angulos planos $(y'y)$, $CAy' = 90° + \psi$, e $CAy = 90° + \varphi$.

Em resultado acharemos

$$\cos(y'x) = -\cos\psi\operatorname{sen}\varphi + \operatorname{sen}\psi\cos\varphi\cos\theta,$$

$$\cos(x'y) = -\operatorname{sen}\psi\cos\varphi + \cos\psi\operatorname{sen}\varphi\cos\theta,$$

$$\cos(y'y) = \quad\operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\varphi + \cos\varphi\cos\psi\cos\theta.$$

Consideremos agora o triedro $z'AxC$ (fig. 18). O eixo Az' faz com AC um angulo recto, assim como com o plano CAy'; e o angulo formado pelos planos xy e $z'AC$ é de $90^\circ + \theta$, suppondo o plano CAy' situado para a parte superior do plano xy. Fazendo pois na equação (3) de pag. 189

$$c = (z'x),\ C = 90^\circ + \theta,\ a = 90^\circ,\ b = \psi,$$

teremos $$\cos(z'x) = -\operatorname{sen}\psi \operatorname{sen}\theta.$$

Do mesmo modo o triedro $z'ACy$ (fig. 19), pondo $\psi + 90^\circ$ por ψ, dá

$$\cos(z'y) = -\cos\psi \operatorname{sen}\theta.$$

Finalmente, sendo o angulo zAC tambem recto, e o angulo diedro $zACx' = 90^\circ - \theta$, teremos no triedro $zACx'$ (fig. 20),

$$\cos(x'z) = \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta,$$

d'onde $$\cos(y'z) = \cos\varphi \operatorname{sen}\theta;$$

e $$\cos(z'z) = \cos\theta.$$

Temos assim determinado em funcção de θ, φ e ψ os nove coefficientes de (A), os quaes, substituidos nas mesmas formulas, dão

$$(\mathrm{E})\ldots\ldots\left\{\begin{aligned} x &= x'(\cos\theta \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\psi + \cos\varphi\cos\psi) \\ &\quad + y'(\cos\theta\cos\varphi\operatorname{sen}\psi - \operatorname{sen}\varphi\cos\psi) \\ &\quad + z'\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\psi; \\ y &= x'(\cos\theta\operatorname{sen}\varphi\cos\psi - \cos\varphi\operatorname{sen}\psi) \\ &\quad + y'(\cos\theta\cos\varphi\cos\psi + \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\psi) \\ &\quad + z'\operatorname{sen}\theta\cos\psi; \\ z &= -x'\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi - y'\operatorname{sen}\theta\cos\varphi + z'\cos\theta. \end{aligned}\right.$$

As equações de condição (B) e (D) são tambem satisfeitas pelos valores precedentes, como facilmente se pode verificar.

Coordenadas polares no espaço

185. A posição de um ponto no espaço ficará tambem determinada, como no n.° 48, quando se conhecer o seu *raio vector* ou a sua distancia a um ponto fixo, e os angulos que esta recta fórma com os eixos coordenados.

Sejam X, Y e Z estes angulos, e seja ρ o raio vector, ou a distancia da origem das coordenadas ao ponto (x, y, z) que se quer determinar. Teremos (pag. 217 (*))

$$(F) \ldots\ldots\ldots\ldots x = \rho \cos X, \; y = \rho \cos Y, \; z = \rho \cos Z,$$

formulas por meio das quaes se pode *passar de um systema rectangular para outro polar*, ou *vice versa*, advertindo que os angulos X, Y, Z, estão ligados pela relação já obtida, n.° 178 (15),

$$\cos^2 X + \cos^2 Y + \cos^2 Z = 1.$$

Em vez dos angulos X, Y e Z emprega-se muitas vezes, como já dissemos no n.° 188, 4.°, o angulo formado pelo raio vector com a sua projecção no plano dos xy; e o angulo θ, que esta projecção faz com o eixo positivo dos x. Para esta transformação podemos servir-nos das formulas (16) do mesmo n.°, advertindo que o angulo Z, que entra nellas, se deve mudar em $90° - \varphi$. Assim, sendo

$$\cos X = \cos\varphi \cos\theta, \quad \cos Y = \cos\varphi \operatorname{sen}\theta, \quad \cos Z = \operatorname{sen}\varphi,$$

teremos, substituindo em (F),

$$(G) \ldots\ldots x = \rho \cos\varphi \cos\theta, \quad y = \rho \cos\varphi \operatorname{sen}\theta, \quad z = \rho \operatorname{sen}\varphi.$$

Das intersecções planas

186. Quando da intersecção de duas superficies resulta uma curva plana, é mais commodo, para achar as suas propriedades, referil-a a coordenadas tomadas no plano DOC (fig. 21) da curva, o qual é determinado pelo angulo θ que fórma com o plano xy, e pelo angulo ψ que a intersecção OC d'estes planos faz com Ox. Tomemos esta linha OC para eixo dos x'; e para eixo dos y' a perpendicular OA, abaixada sobre OC, no plano secante DOC.

Como a questão se reduz a obter em x' e y' a equação da curva, resultante da intersecção das superficies; é claro que, feita a transformação (A), para referir uma d'estas superficies aos eixos x', y', z', bastará depois fazer $z'=0$, e ter-se-ha a sua intersecção com o plano $x'Oy'$. Porém, neste caso tão simples, será melhor fazer $z'=0$ nas equações (A), e procurar directamente os valores de $\cos(x'x)$, $\cos(y'x)$.....

Assim no triedro AOCB, em que são conhecidos os angulos planos $a=\psi$, $b=90°$, e o angulo diedro $C=\theta$ comprehendido por estes lados: temos

$$\cos(y'x)=\operatorname{sen}\psi\cos\theta, \quad \cos(y'y)=-\cos\psi\cos\theta.$$

Além d'isto

$$(x'x)=\psi, \quad (x'y)=90°-\psi, \quad (x'z)=90°.$$

Finalmente o plano $x'Oy'$, que suppomos estar para a parte de cima do plano dos xy, faz com Oz o angulo $(y'z)=90°-\theta$. Dão pois as equações (A)

$$(\mathrm{H})\ldots\ldots\ldots\ldots\left\{\begin{aligned} x&=x'\cos\psi+y'\operatorname{sen}\psi\cos\theta,\\ y&=x'\operatorname{sen}\psi-y'\cos\psi\cos\theta,\\ z&=y'\operatorname{sen}\theta.\end{aligned}\right.$$

Obteriamos estes mesmos resultados servindo-nos das equações do n.º 184.

187. Appliquemos as equações (H) ao cóne obliquo de base circular. O plano zAx (fig. 14) perpendicular ao plano secante AB, e que passa pelo eixo SC, será o dos (xz): a secção AB d'estes dous planos, ou o

eixo da curva, corta esta no vertice A, que tomaremos para origem das coordenadas: o plano xAy, parallelo á base circular do cóne, será o dos xy; e da sua intersecção com o cóne resultará um circulo AE, de raio r, que poderemos considerar como a curva *directriz* (n.° 168). Por esta fórma, tendo o cóne por coordenadas do vertice $(a, 0, c)$, o eixo no plano xz, e a base no plano xy, a sua equação será, como no n.° citado,

$$c^2(x^2+y^2)+2c(r-a)xz+a(a-2r)z^2+2acrz-2c^2rx=0.$$

E como o plano AB perpendicular aos xz corta o plano xy pelo eixo Ay, deveremos pôr $\psi=90°$ nas equações (H); d'onde resultará

$$(1)\ldots\ldots\ldots x=y'\cos\theta,\quad y=x',\quad z=y'\operatorname{sen}\theta$$

$$(2)\ldots\ldots\ldots y'^2[c^2\cos^2\theta+2c(r-a)\operatorname{sen}\theta\cos\theta+(a^2-2ar)\operatorname{sen}^2\theta]$$
$$+c^2x'^2+2cry'(a\operatorname{sen}\theta-c\cos\theta)=0.$$

Tal é a equação da curva, que pode representar todas as secções do cóne obliquo (excepto as parallelas á base) fazendo variar a, c, r e θ; os x' são contados sobre Ay, os y' sobre AB. A discussão d'esta equação não involve difficuldades (n.° 120), e acham-se em resultado curvas da mesma especie das secções do cóne recto.

Querendo que a secção seja um circulo, é necessario tornar eguaes, os coefficientes de x'^2 e y'^2 (n.° 115); logo

$$(c^2+2ar-a^2)\operatorname{tang}^2\theta=2c(r-a)\operatorname{tang}\theta.$$

Tomando a primeira raiz $\operatorname{tang}\theta=0$, recairemos na equação da base AE do cóne.

Querendo interpretar o outro valor de $\operatorname{tang}\theta$, temos

$$\operatorname{tang}SAD=\frac{SD}{AD}=\frac{c}{a},\ \operatorname{tang}SAB=\operatorname{tang}(SAD-\theta)=\frac{c-a\operatorname{tang}\theta}{a+c\operatorname{tang}\theta}.$$

Substituindo por $\operatorname{tang}\theta$ a segunda raiz, vem, feitas as reducções,

$$\operatorname{tang}SAB=\frac{c^3+a^2c}{2a^2r-a^3+2c^2r-ac^2}=\frac{c}{2r-a}=-\frac{SD}{DE},$$

ou $$\text{tang}\,SAB = -\text{tang}\,SED = \text{tang}\,SEA.$$

Por tanto ainda neste caso *a secção será um circulo,* quando os angulos SAB, SEA, formados com as generatrizes oppostas, forem eguaes.

O plano secante yAB comparado com o circulo AE da base, é ao que se chama *secção subcontraria.*

Para obter as secções planas do cóne recto, basta fazer $a = r$ na equaçao (2), do que resulta

$$(3)\ldots y'^2(c^2\cos^2\theta - r^2\,\text{sen}^2\,\theta) + c^2x'^2 + 2cry'(r\,\text{sen}\,\theta - c\cos\theta) = 0\,;$$

equação que se reduz á do n.º 69.

Finalmente vê-se na equação (3), que da egualdade dos dous factores de y'^2 e x'^2 não pode resultar mais do que um valor para θ, $\text{sen}\,\theta = 0$; e com effeito, neste caso, a secção subcontraria coincide com a base.

188. O cylindro obliquo de base circular, situada como a do cóne de que acabámos de tractar, e cujo eixo se acha tambem no plano dos xz, tem por equação (n.º 167)

$$(4)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots y^2 + (x - az)^2 = 2r(x - az).$$

Introduzindo nella os valores (1), o que equival a suppor o plano secante perpendicular aos xz, vem

$$(5)\ldots y'^2(\cos^2\theta + a^2\,\text{sen}^2\,\theta - 2a\,\text{sen}\,\theta\cos\theta) + x'^2 = 2ry'(\cos\theta - a\,\text{sen}\,\theta).$$

A secção é uma ellipse, que se reduz ao circulo: ou quando $\text{sen}\,\theta = 0$, o que dá a base do cylindro; ou quando $(a^2 - 1)\,\text{tang}\,\theta = 2a$, ou

$$\text{tang}\,\theta = \frac{2a}{a^2 - 1} = -\text{tang}\,2\alpha,$$

sendo α o angulo que o eixo do cylindro faz com eixo dos z. Logo este 2.º valor de θ é o supplemento de 2α.

Superficies da segunda ordem

189. A equação mais geral do 2.º grau entre tres variaveis tem a fórma

$$(1)\ldots ax^2+by^2+cz^2+2dxy+2exz+2fyz+gx+hy+iz=k,$$

e as *superficies* que representa, chamam-se *de segunda ordem* em virtude do grau da equação. Para *discutir* esta, isto é, para determinar a natureza e posição das superficies que representa, convem simplifical-a transformando as coordenadas, de modo que desappareçam os termos em xy, xz e yz. Para isso, passaremos primeiro dos eixos primitivos, que sempre podemos suppor rectangulares, por outros obliquos por meio das formulas (A) da pag. 238, sujeitando depois os nove angulos que nellas entram ás tres condições (B), d'onde resultarão por fim seis arbitrarias, de que podemos dispor á vontade. Se egualarmos a zero os termos em que entram $x'y'$, $x'z'$ e $y'z'$, reduziremos as seis arbitrarias a tres. E se quizermos além d'isso que a direcção dos novos eixos seja tambem rectangular, condição que é expressa pelas tres relações (D), ficará o problema determinado, por que estas relações determinarão as tres arbitrarias que nos restavam.

Este calculo simplifica-se pelo processo seguinte. Sejam $x=\alpha z$, $y=\beta z$, as equações do eixo dos x'. Fazendo, por abbreviar,

$$l=\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2+\beta^2}},$$

acharemos (pag. 233)

$$\cos(x'x)=l\alpha,\quad \cos(x'y)=l\beta,\quad \cos(x'z)=l:$$

e fazendo hypotheses analogas para as equações $x=\alpha'z$, $y=\beta'z$, do eixo dos y', e para a do eixo dos z': virá

$$\cos(y'x)=l'\alpha',\quad \cos(y'y)=l'\beta',\quad \cos(y'z)=l';$$

$$\cos(z'x)=l''\alpha'',\quad \cos(z'y)=l''\beta'',\quad \cos(z'z)=l'.$$

As equações (A), por meio das quaes se faz a transformação, tornam-se em

$$(2)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\begin{cases} x = l\alpha x' + l'\alpha' y' + l''\alpha'' z', \\ y = l\beta x' + l'\beta' y' + l''\beta'' z', \\ z = lx' + l'y' + l''z'. \end{cases}$$

Assim os nove angulos do problema são substituidos pelas seis incognitas α, α', α'', β, β', β'', por isso que as equações (B) se reduzem por este modo a uma identidade.

Substituamos pois estes valores de x, y e z na equação geral do 2.° grau, e egualemos a zero os coefficientes de $x'y'$, $x'z'$, e $y'z'$. Virá

$$(3)\ldots\begin{cases} (a\alpha + d\beta + e)\alpha' + (d\alpha + b\beta + f)\beta' + e\alpha + f\beta + c = 0\ldots x'y', \\ (a\alpha + d\beta + e)\alpha'' + (d\alpha + b\beta + f)\beta'' + e\alpha + f\beta + c = 0\ldots x'z', \\ (a\alpha'' + d\beta'' + e)\alpha' + (d\alpha'' + b\beta'' + f)\beta' + e\alpha'' + f\beta'' + c = 0\ldots y'z'. \end{cases}$$

Em consequencia da symetria do calculo qualquer d'estas equações se pode obter sem ser necessario fazer as substituições por inteiro. E achada uma, podem deduzir-se d'ella as outras duas por simples permutações.

Eliminando α' e β' entre a 1.ª e as equações $x = \alpha' z$, $y = \beta' z$, do eixo dos y', resulta a seguinte equação, que é *a de um plano*,

$$(4)\ldots(a\alpha + d\beta + e)x + (d\alpha + b\beta + f)y + (e\alpha + f\beta + c)z = 0.$$

Ora a 1.ª das equações (3) é a condição do desvanecimento do termo com $x'y'$; e por isso, em quanto attendermos só a esta condição, podemos dar a α, α', β, β', os valores que quizermos, com tanto que satisfaçam áquella equação. Assim a equação (4), que d'ella resultou pela substituição das expressões de α' e β' tiradas das equações do eixo dos y', involve ainda a mesma condição; e por conseguinte, se traçarmos o eixo dos y' no plano determinado pela mesma equação (4), não entrará na equação (1), depois de transformada, o termo em $x'y'$.

Pelo mesmo theor, eliminando α'' e β'' da 2.ª equação por meio das equações $x = \alpha'' z$, $y = \alpha'' z$, do eixo dos z', determinaremos um plano tal, que se tomarmos para eixo dos z' qualquer recta nelle traçada, apparecerá a transformada sem o termo em $x'z'$. Attenta porém a fórma das duas 1.as equações, vê-se logo que este segundo plano é o mesmo que o primeiro; e por conseguinte, se traçarmos nelle os eixos dos z' e dos y' como quizermos, *o plano resultante será o dos* $y'z'$, e a transformada não terá termos em $x'y'$ nem em $x'z'$. Como a direcção d'estes eixos no plano é arbitraria, podemos conseguir este fim com uma infinidade de systemas. Em todos os casos porém, resultando na transformada um valor de x' da fórma

$$x' = \frac{-\frac{1}{2}(g\alpha + h\beta + i)}{l(a\alpha^2 + b\beta^2 + c + 2d\alpha\beta + 2e\alpha + 2f\beta} \pm f(y', z'),$$

equação que representa as coordenadas das extremidades das cordas parallelas; o valor

$$x' = \frac{-\frac{1}{2}(g\alpha + h\beta + i)}{l(a\alpha^2 + b\beta^2 + c + 2d\alpha\beta + 2e\alpha + 2f\beta)}$$

é evidentemente a equação de um plano, o qual corta todas as parallelas ao eixo dos x em duas partes eguaes, e que se chama por isso *diametral*. Dando-lhe a fórma seguinte

$$(a\alpha + d\beta + e)\,l\alpha x' + (d\alpha + b\beta + f)\,l\beta x' + (e\alpha + f\beta + c)\,lx' + \tfrac{1}{2}(g\alpha + h\beta + i) = 0;$$

e substituindo nesta expressão por $l\alpha x'$, $l\beta x'$, lx', os seus valores tirados das equações (2), vem

$$\begin{aligned} 0 = (a\alpha + d\beta + e)\,x + (d\alpha + b\beta + f)\,y + (e\alpha + f\beta + c)\,z + \tfrac{1}{2}(g\alpha + h\beta + i) \\ - ly'\left[(a\alpha + d\beta + e)\,\alpha' + (d\alpha + b\beta + f)\,\beta' + e\alpha + f\beta + c\right] \\ - l''z'\left[(a\alpha + d\beta + e)\,\alpha'' + (d\alpha + b\beta + f)\,\beta''' + e\alpha + f\beta + c\right]; \end{aligned}$$

ou, em virtude das duas primeiras equações (3),

$$(5)\,.\,.\,0 = (a\alpha + d\beta + e)\,x + (d\alpha + b\beta + f)\,y + (e\alpha + f\beta + c)\,z + \tfrac{1}{2}(g\alpha + h\beta + i).$$

Debaixo d'esta nova fórma, vê-se facilmente n.º 172, que o plano diametral é parallelo ao plano representado pela equação (4), isto é, ao plano dos $(y'z')$ que faz desapparecer em (1) os termos em $x'y'$ e $x'z'$. (*).

Finalmente, se quizermos ainda que desappareça, o termo em $y'z'$, é necessario determinar α' e β' por meio da 3.ª das equações (2); por onde (5)
se vê que ha uma infinidade d'eixos obliquos por meio dos quaes podem ser satisfeitas as condições pedidas.

190. Querendo porém que os x', y' e z', sejam rectangulares, deverá o eixo dos x' ser perpendicular ao plano dos $y'z'$, cuja equação já achámos; ora sendo $x=\alpha z$, $y=\beta z$, as equações do eixo dos x': a condição de perpendicularidade ao plano (4) será expressa (n.º 174) pelas equações

$$(6)\ldots\ldots\ldots\ldots a\alpha+d\beta+e=(e\alpha+f\beta+c)\,\alpha,$$

$$(7)\ldots\ldots\ldots\ldots d\alpha+b\beta+f=(e\alpha+f\beta+c)\,\beta.$$

Eliminando α, entre estas equações acharemos (**)

$$\begin{aligned}(8)\ldots&[(a-b)fe+(f^2-e^2)d]\beta^3\\ &+[(a-b)(c-b)e+(2d^2-f^2-e^2)e+(2c-a-b)fd]\beta^2\\ &+[(c-a)(c-b)d+(2e^2-f^2-d^2)d+(2b-a-c)fe]\beta\\ &+(a-c)fd+(f^2-d^2)e=0.\end{aligned}$$

(*) Veja-se *Anal. appl.*, *de Leroy*, (2.º edit.) n.º 105; e *Compl. de Geomet. descript. de* Sousa Pinto, n.º 39.

(**) A equação (7), e a divisão de (6) por (7), dão

$$\alpha=\frac{f\beta^2+c\beta-b\beta-f}{d-e\beta},\ \frac{a\alpha+d\beta+e}{d\alpha+b\beta+f}=\frac{\alpha}{\beta};$$

das quaes se tira

$$\frac{f\beta^2+c\beta-b\beta-f}{d\beta-e\beta^2}=\frac{af\beta^2+ac\beta-ab\beta-af+d^2\beta+de-de\beta^2-e^2\beta}{df\beta^2+cd\beta-be\beta^2-ef\beta},$$

Esta equação do 3.º grau dá para β ao menos uma raiz real; a equação (7) dá depois outra para α.

Deste modo fica o eixo dos x' determinado de maneira que vem a ser perpendicular ao plano $z'y'$; e se desembaraça a equação dos termos em $x'z'$ e $x'y'$. Resta traçar neste plano $y'z'$ eixos rectangulares taes, que façam desapparecer o termo $y'z'$; é porém evidente que se pode determinar do mesmo modo um plano dos $x'z'$, ao qual seja perpendicular o eixo dos y' e que faça desapparecer os termos em que entram $x'y'$ e $z'y'$. Mas como as condições pelas quaes se exprime que o eixo dos y' é perpendicular a este plano, são expressas tambem pelas equações (6) e (7), deverá a mesma equação (8) do 3.º grau dar outra raiz β', que satisfaça a estas condições. O mesmo succede com o eixo dos z'.

Logo as tres raizes da equação (8) são reaes, e são os valores de β, β', β''. Os valores α, α', α'', vem depois a deduzir-se das equações (7).

Conseguintemente: *em geral ha sempre um systema unico d'eixos rectangulares, que desembaraça a equação* (1) *dos termos* x'y', x'z', y'z'; e este systema determina-se pelo processo do calculo que acabâmos de expor.

A este systema dá-se o nome de *Eixos principaes de figura.*

191. Analysemos os casos particulares que podem apresentar-se na resolução da equação (8).

1.º Se a equação não tiver o 1.º termo, isto é, se for

$$(a-b)fe+(f^2-e^2)d=0:$$

sabemos que nesse caso uma das raizes β é infinita, bem como α, como se vê da equação (7) que se reduz a $e\alpha+f\beta=0$. Os angulos correspondentes são rectos; um dos eixos, o dos x' por ex., acha-se no plano xy,

---

ou

$$\begin{aligned}0=\beta^4&(df^2-bef+aef-de^2)\\&+\beta^3(cdf-ef^2+cdf-bce-bdf+b^2e-afd+d^2e+ace-abe+d^2e-e^3)\\&+\beta^2(e^2d-cef-bcd+bef-df^2+bef-acd+abd-d^3+de^2-aef+de^2)\\&+\beta(-cdf+ef^2+adf-d^2e).\end{aligned}$$

Dividindo esta última equação por β, e reduzindo, vem facilmente a equação do texto.

e obtem-se a sua equação eliminando α e β por meio das equações $x=\alpha z$, $y=\beta z$, d'onde resulta $ex+fy=0$. As direcções dos y' e z' vem a ser dadas pela equação em β, reduzida ao 2.° grau.

2.° Se, além do 1.° coefficiente, tambem o 2.° for nullo: tirando o valor de b da primeira d'estas duas equações de condição, e substituindo-o na segunda, esta se reduzirá ao ultimo termo da equação (8)

$$(a-c)fd+(f^2-d^2)e=0.$$

E como o coefficiente de β na equação (8) se deduz do de β^2, mudando b em c, e d em e, e o mesmo acontece a respeito do 1.° e ultimo termo da mesma equação: segue-se que neste caso a equação (8) é uma identidade. Os systemas d'eixos que desembaraçam a equação dos termos em x', y' e z' são então em numero infinito.

Eliminando as quantidades a e b das equações (6) e (7) por meio das duas equações de condição, acha-se que ellas são o producto de $f\alpha-d$,
/e e de $(\alpha\beta-d)$ pelo factor commum $ed\alpha+fd\beta+fe$. Estes factores são por tanto nullos; e eliminando α e β acha-se

$$fx=dz,\ ey=dz,\ edx+fdy+fez=0. \quad (8')$$

As duas 1.as são as equações d'um dos eixos; a 3.a é de um plano que lhe fica perpendicular, e no qual estão traçados os outros dous eixos com direcções arbitrarias. Da intersecção d'este plano com a superficie resulta uma curva, na qual todos os eixos rectangulares são principaes, e que por conseguinte é um circulo, unica das curvas do 2.° grau que goza d'esta propriedade. Nesse caso a superficie é de revolução em volta do eixo, cuja equação acabâmos de achar; e como facilmente se reconhece transportando a origem ao centro do circulo. (V. *Annales de Math.*, t. II).

192. A equação (1), desembaraçada dos tres productos, toma a fórma

$$(9)\ldots\ldots\ldots\ldots kz^2+my^2+nx^2+qx+q'y+q''z=h.$$

Se nenhum dos coefficientes k, m e n for nullo, pode esta equação ficar ainda desembaraçada dos termos da 1.a dimensão, pelo processo do n.° 182, que equival a uma mudança de origem das coordenadas, e tomar a fórma ainda mais simples

$$(10)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots kz^2+my^2+nx^2=h.$$

Se um d'estes coefficientes for nullo, n por exemplo, podemos desembaraçar, pelo mesmo processo, a equação (9) do termo constante h e das 1.as potencias de y e z; ficando assim a equação reduzida á fórma

$$(11)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots kz^2 + my^2 = hx.$$

Finalmente se dous dos mesmos coefficientes forem nullos, m e n por ex., a equação (9) poderá reduzir-se á fórma

$$(12)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots kz^2 + py + qx = h.$$

Mas se neste caso, ainda p e q forem nullos, a equação (12) será evidentemente um caso particular da equação (10); e se o não forem, será um caso particular da equação (11). Com effeito fazendo $z = 0$, a equação (12), torna-se em

$$py + qx = h;$$

por conseguinte a intersecção da superficie com o plano dos xy é uma recta. Se tomarmos esta linha para eixo dos y, a equação não soffrerá alteração no termo kz^2; mas será forçoso que os termos restantes $-py-qx+h$ se reduzam a $k'x$, porque a hypothese $z=0$ deve dar $x=0$. A equação da superficie reduzir-se-ha então á fórma $kz^2 = k'x$, que é evidentemente um caso particular de (11).

Podemos pois concluir que todas as superficies da 2.ª ordem são incluidas nas duas equações,

$$(10)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots kz^2 + my^2 + nx^2 = h,$$

$$(11)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots kz^2 + my^2 = hx.$$

Se pela origem das coordenadas conduzirmos uma recta qualquer

$$x = az,\ y = a'z,$$

e combinarmos a sua equação com (10), vêr-se-ha que os pontos em que a recta encontra a superficie tem as suas coordenadas respectivamente eguaes e de signaes contrarios: d'onde se conclue, que a origem das mesmas coordenadas divide ao meio todas as cordas tiradas por este ponto;

ou, por outras palavras, que *esta origem é o centro das superficies representadas pela equação* (10).

Procedendo do mesmo modo com a equação (11), vê-se que os valores de z não saem eguaes, em virtude do termo em que entra a variavel no 1.° grau; e que por conseguinte *as superficies representadas por esta equação são destituidas de centro.*

Assim podemos dividir as superficies de 2.ª ordem em dous generos:
1.° Superficies dotadas de centro, comprehendidas na equação (10);
2.° Superficies destituidas de centro, comprehendidas na equação (11).

Além d'isto cumpre notar, que a equação (10) mostra, pelo que se disse no n.° 189, que os tres *planos* coordenados das superficies, que representa, são *diametraes*. O plano diametral que é perpendicular ás cordas diz-se *plano diametral principal*, ou simplesmente *plano principal*. Tres planos diametraes dizem-se *conjugados*, quando as coordenadas, que cada um divide ao meio, são parallelas á intersecção commum dos outros dous planos. Em quanto á equação (11), vê-se, que só os planos dos yx e xz são diametraes. Estes dous *planos* chamam-se tambem *conjugados*, porque as cordas, que cada um d'elles corta ao meio, são parallelas ao outro.

Posto isto, passemos a discutir especialmente cada uma das equações (10) e (11).

1.° GENERO

SUPERFICIES COM CENTRO

193. Se na equação (10) suppuzermos n sempre positivo, as combinações de signaes que admittem os outros tres coefficientes k, m e h podem reduzir-se ás tres seguintes, que dão origem a tres especies de superficies dotadas do centro:

$kz^2+my^2+nx=h$ . . . . . . ELLIPSOIDE.

$-kz^2+my^2+nx^2=h$ . . . . . . HYPERBOLOIDE DE UM SÓ RAMO.

$-kz^2+my^2+nx^2=-h$ . . . . HYPERBOLOIDE DE DOUS RAMOS.

Não figurâmos os casos em que m é negativo, por isso que se reduziriam aos dous ultimos de cima por uma simples inversão nos eixos.

194. ELLIPSOIDE. Consideremos em 1.º logar a equação,

$$(a) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots kz^2 + my^2 + nx^2 = h.$$

Como suppomos k, m e n positivos, tambem h o será; aliás a *equação* sería *absurda e nada representaria.*

Se h for nullo, a equação partir-se-ha nas tres $x=0$, $y=0$, $z=0$, e a superficie reduzir-se-ha a *um ponto.*

Sendo h positivo, que é propriamente o caso, de que nos occupâmos, e fazendo separadamente x, y ou z nullos, ver-se-hia, que das intersecções dos tres planos coordenados com a superficie resultam ellipses.

Da secção feita por qualquer plano, parallelo aos coordenados, resultam tambem ellipses, como se veria facilmente, suppondo separadamente cada uma das coordenadas egual a uma constante.

O mesmo sería facil demonstrar a respeito de qualquer secção plana (n.º 186).

É por tudo isto que se deu a esta superficie o nome de *Ellipsoide.*

Os comprimentos A, B, C dos tres *eixos principaes*, obtem-se buscando as secções da superficie pelos eixos dos x, y e z, que dão

$$kC^2 = h, \quad mB^2 = h, \quad nA^2 = h.$$

Eliminando k, m e n da equção (a), vem

$$(13) \ldots \frac{z^2}{C^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{x^2}{A^2} = 1, \text{ ou } A^2B^2z^2 + A^2C^2y^2 + B^2C^2x^2 = A^2B^2C^2,$$

a qual é a equação do *ellipsoide referido ao centro e aos seus tres eixos principaes.* Esta superficie pode imaginar-se gerada por uma ellipse traçada no plano xy, a qual se move parallelamente a si mesma, e de maneira que os seus dous eixos vão variando de grandeza, sendo a curva obrigada ainda a correr ao longo de outra ellipse traçada no plano xz.

Se duas das quantidades A, B, C, forem eguaes, o *ellipsoide* será *de revolução.* E se for $A=B=C$ a superficie tornar-se-ha em uma *esphera.*

195. HYPERBOLOIDE DE UM SÓ RAMO. Consideremos em 2.° logar a equação

$$(b) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - kz^2 + my^2 + nx^2 = h.$$

Se $h=0$, a equação resultante é a de *cóne*, que será a respeito do hyperboloide, o mesmo que são assymptotas relativamente á hyperbole. (n.° 87).

Se h não for nullo, fazendo separadamente x e y nullo, reconhece-se que das intersecções dos planos dos yz e xz com a superficie resultam hyperboles, nas quaes o eixo dos z é o 2.° eixo.

Suppondo z egual a uma constante, vê-se que as secções parallelas ao plano dos xy são ellipses reaes similhantes, cujas dimensões augmentam com o valor numerico da constante.

E por isso se deu a esta superficie o nome de *Hyperboloide de um só ramo*.

Os comprimentos A, B, $C\sqrt{-1}$ dos tres eixos principaes obtem-se como no n.° precedente, e a equação do hyperboloide referido ao centro e aos seus tres eixos principaes terá a mesma fórma que a equação (13), unicamente com a mudança de C^2 em $-C^2$.

196. HYPERBOLOIDE DE DOUS RAMOS. Consideremos em 3.° e ultimo logar a equação

$$(c) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - kz^2 + my^2 + nx^2 = -h.$$

Se $h=0$, a equação resultante será tambem a de um *cóne assymptotico* d'este hyperboloide de 2.ª especie.

Quando h não é nullo, reconhece-se como no caso precedente, que das intersecções dos planos dos yz e dos xz com a superficie resultam hyperboles nas quaes o eixo dos z é o primeiro eixo.

Suppondo z egual a uma constante, $z=\pm l$, a equação (c) torna-se

em $$\frac{m}{h}y^2 + \frac{n}{h}x^2 = \frac{k}{h}l^2 - 1\,;$$

e mostra que as secções parallelas aos xy são ellipses similhantes, que crescem indefinidamente com a grandeza absoluta de l; porém que se tornam imaginarias quando $l^2 < \frac{h}{k}$. D'onde resulta que este hyperboloide tem *dous ramos* não contiguos, indefinidos cada um no seu sentido, porém separados por um intervallo em que não ha superficie. E por isso se lhe deu o nome de *Hyperboloide de dous ramos.*

Os comprimentos A, $B\sqrt{-1}$, $C\sqrt{-1}$ dos tres eixos principaes determinam-se como nos n.os precedentes, e a equação do hyperboloide de dous ramos, referida ao centro e aos seus tres diametros, terá a mesma fórma da equação (13), só com a mudança de B^2 e C^2 em $-B^2$ e $-C^2$.

197. As equações (a), (b), (c), que acabâmos de discutir, podem offerecer ainda outras variedades de superficies, suppondo nullos um ou alguns dos coefficientes k, m, n, h. Representarão *cylindros de base elliptica* ou *hyperbolica,* quando forem da fórma

$$kz^2 + my^2 = h, \text{ ou } kx^2 - my^2 = h;$$

e um systema de *dous planos* que se cortam, ou que são parallelos, quando se reduzirem a

$$kx^2 - my^2 = 0, \text{ ou } kx^2 = h.$$

Como estes casos não exigem discussão especial, contentar-nos-hemos com indical-os.

2.° GENERO

SUPERFICIES SEM CENTRO

198. Se na equação (11) fizermos com que hx seja sempre positivo, conservando-se no 2.° membro, não poderão ser negativos ambos os termos do 1.°, porque a equação sería então absurda. Assim esta apenas admitte as duas combinações seguintes de signaes, que dão origem a duas

especies de superficies destituidas de centro:

$$kz^2 + my^2 = hx \text{......} \textsc{Paraboloide elliptico}.$$

$$-kz^2 + my^2 = hx \text{......} \textsc{Paraboloide hyperbolico}.$$

Se em logar de k, suppozessemos m negativo, tirariamos as mesmas consequencias, considerando invertido o eixo dos z no dos y.

199. PARABOLOIDE ELLIPTICO. Consideremos primeiro a superficie comprehendida na equação

$$(d) \text{....................} kz^2 + my^2 = hx.$$

Fazendo separadamente z e y eguaes a zero, ver-se-ha que as secções feitas pelos planos xy e zx são parabolas. Se egualarmos estas mesmas coordenadas a quantidades constantes, concluir-se-ha que das secções parallelas áquelles planos resultam tambem parabolas.

Fazendo $x = 0$, vê-se que a secção feita pelo plano zx determina a origem das coordenadas, porque a equação (d) parte-se então nas duas $z = 0$, $y = 0$. Fazendo x egual a uma constante, vê-se que as secções parallelas a este ultimo plano são ellipses.

É por isto que a superficie representada pela equação (d) se deu o nome de *Paraboloide elliptico.*

Como x negativo dá resultados imaginarios, segue-se que a superficie fica toda do lado dos x positivos. Se m for zero, e a equação se reduzir a

$$kz^2 = hx,$$

que, segundo vimos (n.º 192), é uma transformação da equação (11); teremos então uma *superficie cylindrica de base parabolica.*

Os mais casos particulares que offerece a equação (d) comprehendem-se noutros já discutidos.

200. PARABOLOIDE HYPERBOLICO. Discutindo pelo mesmo theor a equação

$$(e) \text{..................} -kz^2 + my^2 = hx,$$

vê-se: que a secção feita pelo plano yz é uma parabola que fica para o lado dos x positivos: a do plano xz é uma parabola que fica para o lado dos x negativos: e a secção do plano yz representa duas rectas.

Todas as secções parallelas ao plano xy são parabolas eguaes á principal, mas collocadas successivamente em differentes posições. O mesmo diremos das secções parallelas ao plano xz. Finalmente as secções parallelas ao plano zy produzem hyperboles.

Por isso a estas superficies se deu o nome de *Paraboloide hyperbolico.*

101. Quando nos dous casos precedentes é $h=0$, a equação tem a fórma $a^2z^2 \pm b^2y^2=0$, conforme os signaes de k e m. Em um dos casos é $z=0$, $y=0$, e a superficie reduz-se ao eixo dos x. No outro, a equação, á qual se pode dar a fórma $(az+by)(az-by)=0$, indica que podemos tornar nullo qualquer dos dous factores; e a superficie reduz-se a um systema de dous planos que se interceptam segundo o eixo dos x.

NOTAS

Nota 1.ª (pag. 189)

47

A construcção empregada para demonstrar o theorema fundamental (3) (fig. 22) deixa de ser a mesma quando não são menores de 90° os lados b' e c'; porque se um d'estes lados é > 90, a secante respectiva não encontra a tangente, mas sim o seu prolongamento; e se um dos mesmos lados é $= 90°$, a secante respectiva é parallela á tangente.

No entretanto, sem fazermos a construcção, pode mostrar-se que, ainda nos casos mencionados, tem logar o theorema (3).

I. Se $b' < 90°$; a construcção dá, como dissemos, no triangulo ABC a formula (3).

II. Se $b' < 90°$, $c' > 90°$; produzam-se BA e BC até completar em B′ o fuso espherico BB′. No triangulo B′AC, serão:

$$B'A = 180° - c',\ B'AC = 180 - a,\ B'C = 180 - a';$$

e a formula (3) que tem logar para o angulo B′AC d'este triangulo, dá

$$\cos B'AC = \frac{\cos B'C - \cos AB' \cos AC}{\operatorname{sen} AB' \operatorname{sen} AC},$$

ou (3).

III. Se $b' > 90°$, $c' > 90°$; o triangulo B′AC, relativamente ao angulo B′AC, está no caso precedente (II); e por isso ainda tem logar a mesma demonstração.

Ou tambem, produzindo os lados BA e AC até encontrarem em B′ e C′ o arco BC produzido, será no triangulo C′AB′:

$$B'AC' = a,\ AB' = 190 - c',\ AC' = 180 - b',\ C'B' = a';$$

e applicando-lhe o theorema, virá a formula (3).

IV. Se $b'=90°$, $c'=90°$, a formula (3) dá

$$\begin{cases} \text{para o angulo } a, & \cos a = \cos a',\ a = a' \\ \text{para os angulos } b \text{ ou } c, & \cos b = 0,\ b = 90°;\ \cos c = 0,\ c = 90° \end{cases}$$

o que concorda com as propriedades conhecidas dos polos.

V. Se é sómente $c'=90°$: produza-se, ou corte-se AC, até que seja $AD=90°$.

1.° Se não é $BD=90°$; o theorema será applicavel ao angulo D no triangulo CBD; e dará

$$\cos D = \frac{\cos a' - \cos B \cos CD}{\operatorname{sen} BD \operatorname{sen} CD},$$

que, por ser $\cos D = 0$, se reduz a

$$\cos a' = \cos BD \cos CD = \cos a \operatorname{sen} b':$$

e como a formula (3) applicada ao angulo a no triangulo ABC dá tambem $\cos a = \frac{\cos a'}{\operatorname{sen} b'}$, ou $\cos a' = \cos a \operatorname{sen} b'$, segue-se que aquella formula é ainda verdadeira neste caso.

2.° Se é $BD=90°$; como tambem é $AB=90°$, será B pólo de AC, e conseguintemente $a'=90$; logo (IV) o theorema é ainda verdadeiro no caso de que se tracta.

(Vejam-se os *Apontamentos de Trigon. Esph.*, que se encontram tambem no vol. 3.° do jornal de Coimbra o *Instituto*).

Nota 2.ª (pag. 212)

1. No triangulo ABC (fig. 23) produzam-se os seus lados, até se encontrarem dous a dous, e formarem os tres fusos esphericos A, A′, B, B′, C, C′. O circulo ACA′C′A será a base do hemispherio ACBA′C′; e este compor-se-ha dos triangulos m, n, p, q.

Chamando pois $S = 2\pi r^2$ a superficie do hemispherio, e observando que, por serem

$$AB' = 180° - AB = A'B,\ CB' = 190° - CB = BC',\ B = B',$$

são eguaes os triangulos $AB'C$, $A'BC'$: teremos

$$S = m + n + p + q = m + n + m + p + m + q - 2m$$

$$= AA' + BB' + CC' - 2m.$$

E como os fusos esphericos são proporcionaes aos seus angulos, isto é,

$$AA' = \frac{a}{180°}.S,\quad BB' = \frac{b}{180°}.S,\quad CC' = \frac{c}{180°}.S,$$

teremos
$$AA' + BB' + CC' = \frac{a+b+c}{180°}.S,$$

e conseguintemente

$$m = \frac{a+b+c-180°}{360°}.S.$$

Se quizermos tomar por unidade de superficie a superficie do triangulo trirectangulo, que é a quarta parte do hemispherio, e por unidade d'angulo o angulo recto, a expressão de m tomará a fórma

$$m = a + b + c - 2.$$

2. A superficie do triangulo vem assim expressa nos seus tres angulos: mas quando os angulos não forem dados, poderemos exprimil-os nas partes que forem dadas, e substituir depois essas expressões na da superficie, ou d'uma funcção trigonometrica d'ella.

Por exemplo, se forem dados os lados a' e c' com o angulo comprehendido b: tomando o triangulo trirectangulo por unidade de superficie, e o angulo recto por unidade d'angulo, teremos

$$\cot\left(\frac{1}{2}m\right) = -\operatorname{tang}\left(\frac{a+c}{2}+\frac{b}{2}\right)$$

$$= \frac{\operatorname{tang}\dfrac{a+c}{2} + \operatorname{tang}\dfrac{b}{2}}{\operatorname{tang}\dfrac{a+c}{2}\operatorname{tang}\dfrac{b}{2} - 1};$$

ou, em virtude da ultima analogia de Neper, e fazendo $\operatorname{tang}\frac{a'}{2}\operatorname{tang}\frac{c'}{2} = t$,

$$\cot\left(\frac{1}{2}m\right) = \frac{\cot\dfrac{b}{2}\cos\dfrac{a'-c'}{2} + \operatorname{tang}\dfrac{b}{2}\cos\dfrac{a'+c'}{2}}{\cos\dfrac{a'-c'}{2} - \cos\dfrac{a'+c'}{2}}$$

$$= \frac{\cos\dfrac{a'}{2}\cos\dfrac{c'}{2} + \operatorname{sen}\dfrac{a'}{2}\operatorname{sen}\dfrac{c'}{2}\left(\cos^2\dfrac{b}{2} - \operatorname{sen}^2\dfrac{b}{2}\right)}{2\operatorname{sen}\dfrac{a'}{2}\operatorname{sen}\dfrac{c'}{2} \times \operatorname{sen}\dfrac{b}{2}\cos\dfrac{b}{2}}$$

$$= \frac{1 + \operatorname{tang}\dfrac{a'}{2}\operatorname{tang}\dfrac{c'}{2}\cos b}{\operatorname{tang}\dfrac{a'}{2}\operatorname{tang}\dfrac{c'}{2}\operatorname{sen} b} = \frac{1 + t\cos b}{t \operatorname{sen} b}.$$

Desinvolvendo em fim $\frac{1}{2}m$ em serie ordenada segundo as potencias de t, será

$$\frac{1}{2}m = t\operatorname{sen} b - \frac{1}{2}t^2\operatorname{sen} 2b \ldots,$$

ou, se desprezarmos as quantidades da quarta ordem relativamente a a' e c',

$$m = \frac{1}{2} a' c' \operatorname{sen} b.$$

E porque é da segunda ordem a differença entre os senos do angulo b do triangulo espherico, e do angulo correspondente do triangulo rectilineo, que tem os mesmos lados que o espherico, vê-se que, desprezando os termos da quarta ordem, a superficie do triangulo espherico é egual á do rectilineo.

3. Chamando r o raio da esphera, e exprimindo as linhas trigonometricas do segundo membro da equação (3) nos comprimentos dos arcos respectivos, facilmente se mostra (*Trigon.* de Legendre, appendice § V) que os angulos a, b, c, d'um triangulo espherico de lados muito pequenos têm, desprezando os termos da quarta ordem, com os correspondentes $a_{,}$, $b_{,}$, $c_{,}$, do triangulo rectilineo, cujos lados são tambem a', b', c', as seguintes relações

$$a = a_{,} + \frac{1}{3}\frac{m}{r^2 \operatorname{sen} 1''},\quad b = b_{,} + \frac{1}{3}\frac{m}{r^2 \operatorname{sen} 1''},\quad c = c_{,} + \frac{1}{3}\frac{m}{r^2 \operatorname{sen} 1''},$$

sendo m a superficie do triangulo rectilineo, que segundo o n.º precedente é egual á do espherico.

O que reduz a resolução do triangulo espherico proposto á do triangulo rectilineo, cujos lados são a', b', c', e cujos angulos são $a_{,}$, $b_{,}$, $c_{,}$.

O numero de segundos $\frac{m}{r^2 \operatorname{sen} 1''}$ é o *excesso espherico*, que se reparte assim egualmente pelos tres angulos do triangulo.

4. Suppondo o raio da esphera infinito, e os comprimentos dos arcos finitos, ou suas graduações infinitesimas, o triangulo espherico torna-se rectilineo; e por isso podemos, fazendo aquellas hypotheses, passar dos theoremas da trigonometria espherica para os correspondentes da trigonometria rectilinea.

Quando nos theoremas da trigonometria espherica entra mais de um lado, passando d'elles para os triangulos rectilineos, podem apparecer razões entre as graduações dos lados; e porque estas razões podem ter um limite de grandeza finita, quando se tornam infinitesimas as graduações entre as quaes ellas têm logar, pode apparecer um theorema correspondente da trigonometria rectilinea na qual entrem lados. Mas quando nos theoremas da trigonometria espherica entra só um lado, a hypothese de ser este infinitesimo necessariamente o faz desapparecer; e o theorema reduz-se para a trigonometria rectilinea a uma relação entre angulos.

Assim, nestas hypotheses, a formula (3)

$$\cos a = \frac{\cos a' - \cos b' \cos c'}{\operatorname{sen} b' \operatorname{sen} c'} = \frac{-2\operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}a' + 2\operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}b' - 2\operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}c' - 4\operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}b' \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}c'}{\operatorname{sen} b' \operatorname{sen} c'},$$

dá

$$\cos a = \frac{b'^2 + c'^2 - a'^2}{2b'c'}.$$

E proseguindo, pelo mesmo modo, achariamos que os quatro theoremas fundamentaes de trigonometria espherica, e as quatro analogias de Neper, correspondem aos quatro theoremas principaes da trigonometria rectilinea. (Vejam-se os já citados *Apontamentos de Trigon. Espher.*).

ADDITAMENTO AO N.º 49

Equação polar da linha recta

A equação da linha recta $y = ax + b$,

fazendo $x = r\cos\theta,\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$,

e pondo $a = \cot i,\ -b\,\mathrm{sen}\,i = c$,

transforma-se na polar $r\cos(\theta + i) = c$.

i é o angulo que a recta faz com o eixo dos y.

1.º $\theta + i = 90$ dá $r = \infty$. A direcção do raio vector faz então um angulo infinitesimo com a da recta. E para angulos θ menores que $90 - i$ o raio vector encontra a recta na direcção opposta.

2.º $\theta = 90°$ dá $r = -\dfrac{c}{\mathrm{sen}\,i} = b$, correspondente ao ponto onde a recta corta o eixo dos y.

3.º $\theta = 180°$ dá $r = -\dfrac{c}{\cos i} = \dfrac{b}{a}$, correspondente ao ponto onde a recta corta o eixo dos x.

4.º $\theta = 180° - i$ corresponde ao minimo valor $r = b\,\mathrm{sen}\,i$, que é a perpendicular abaixada da origem sobre a recta.

TABOA DAS MATERIAS

GEOMETRIA ANALYTICA PLANA

PRIMEIRA SECÇÃO

APPLICAÇÃO DA ALGEBRA Á GEOMETRIA ELEMENTAR

SEGUNDA SECÇÃO

LOGARES GEOMETRICOS

I. LINHA RECTA E CIRCULO

II. SECÇÕES CONICAS

III. PROBLEMAS DE ANALYSE GEOMETRICA

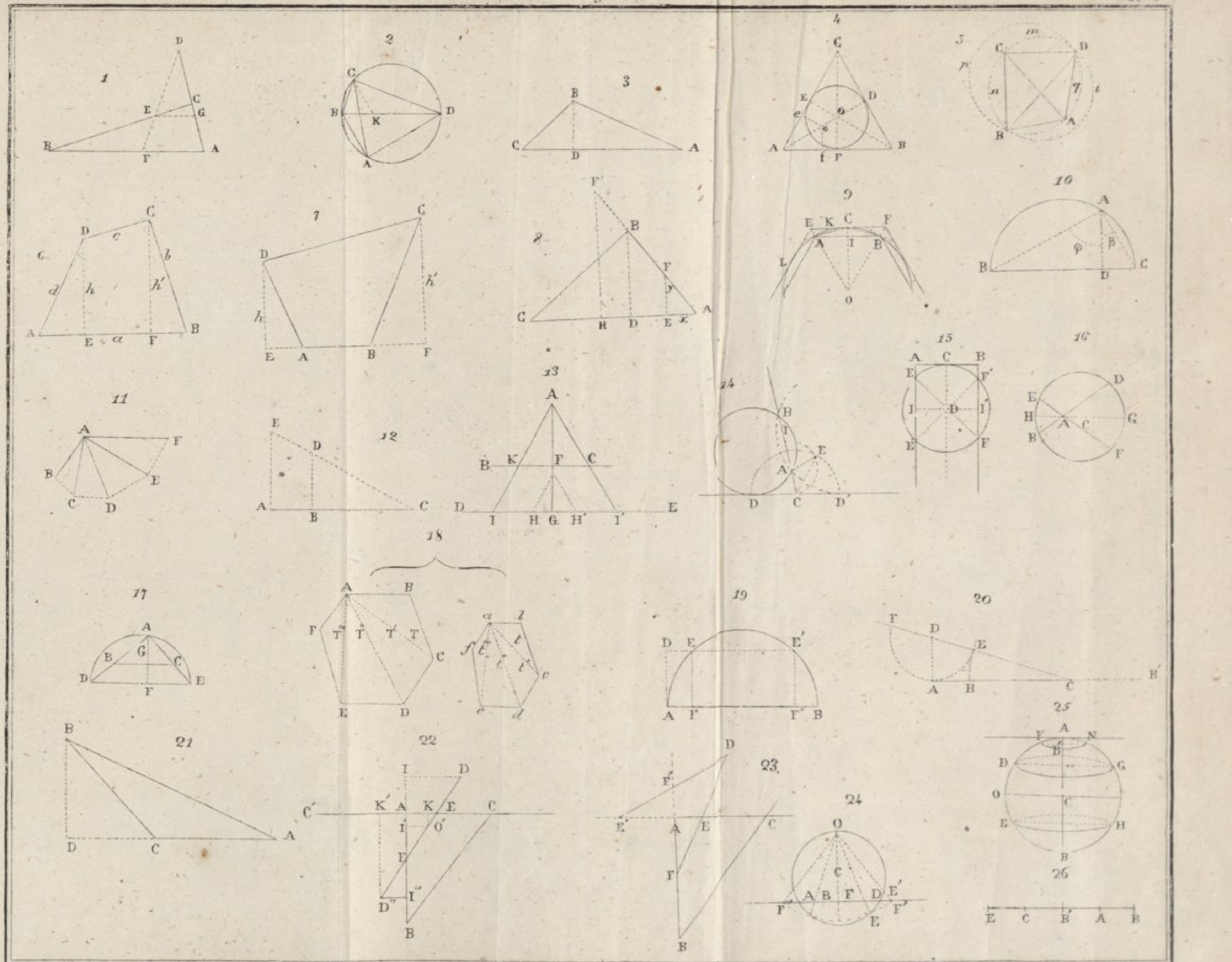
NOTAS

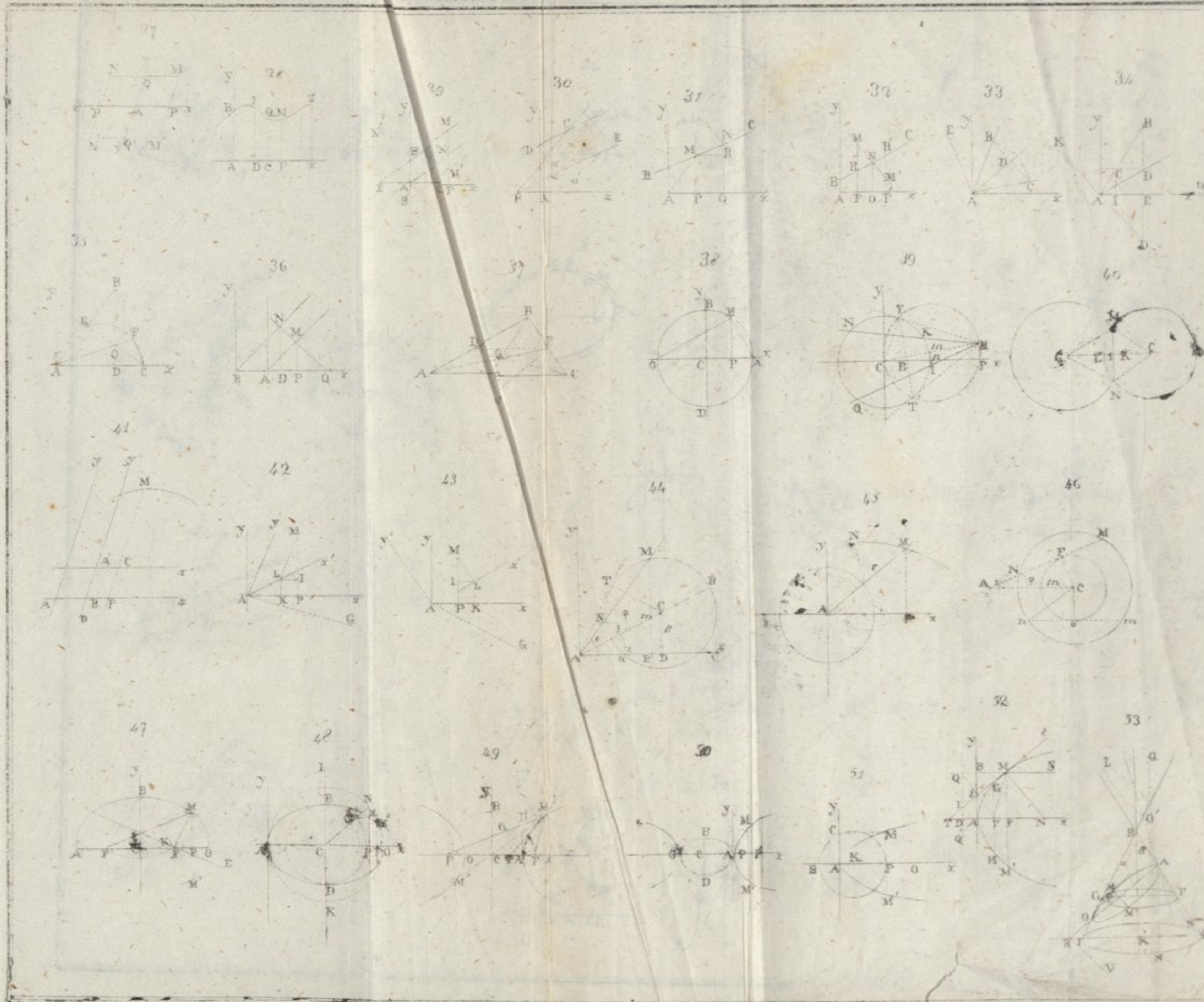
GEOMETRIA ANALYTICA NO ESPAÇO

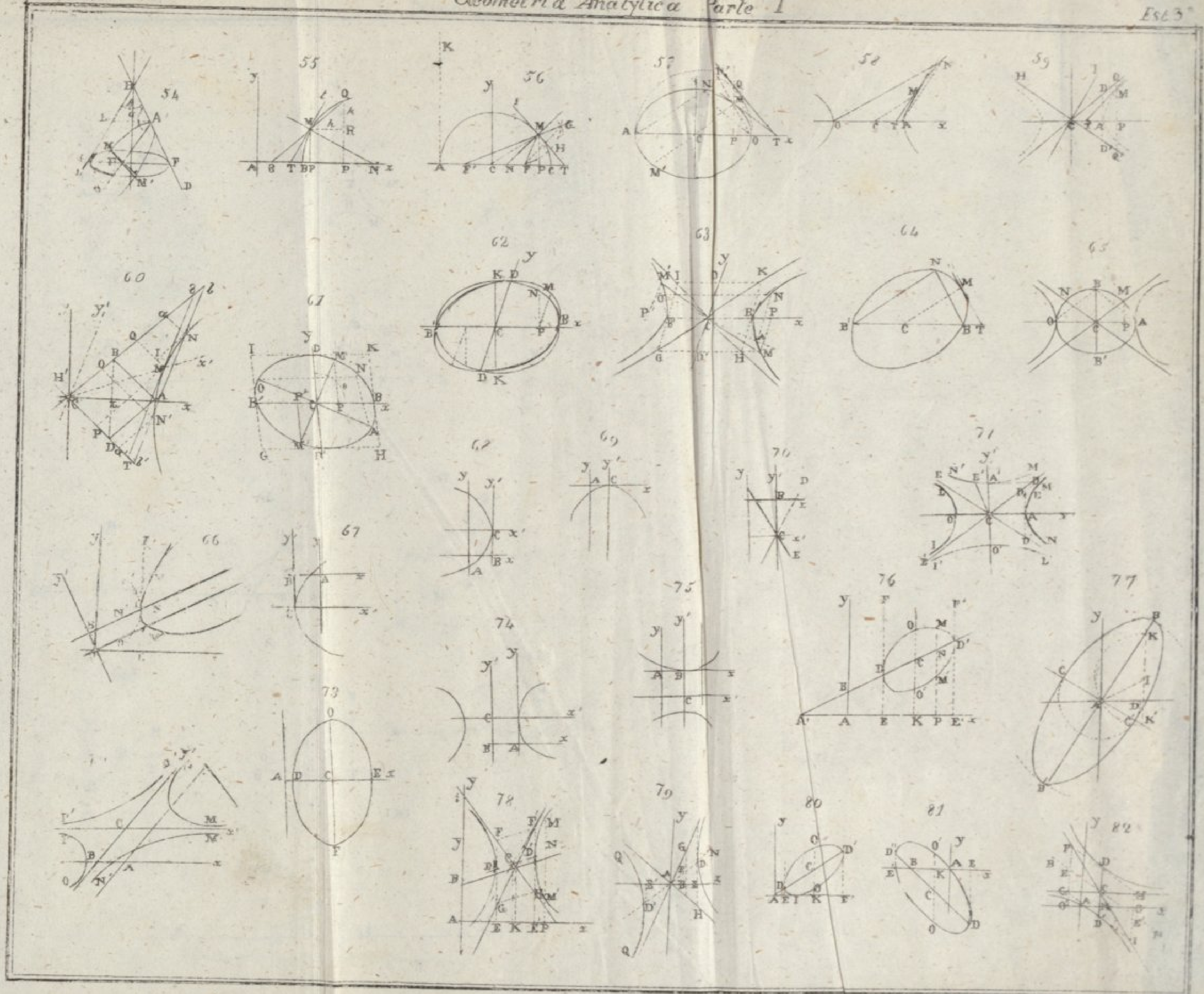
I. TRIGONOMETRIA ESPHERICA

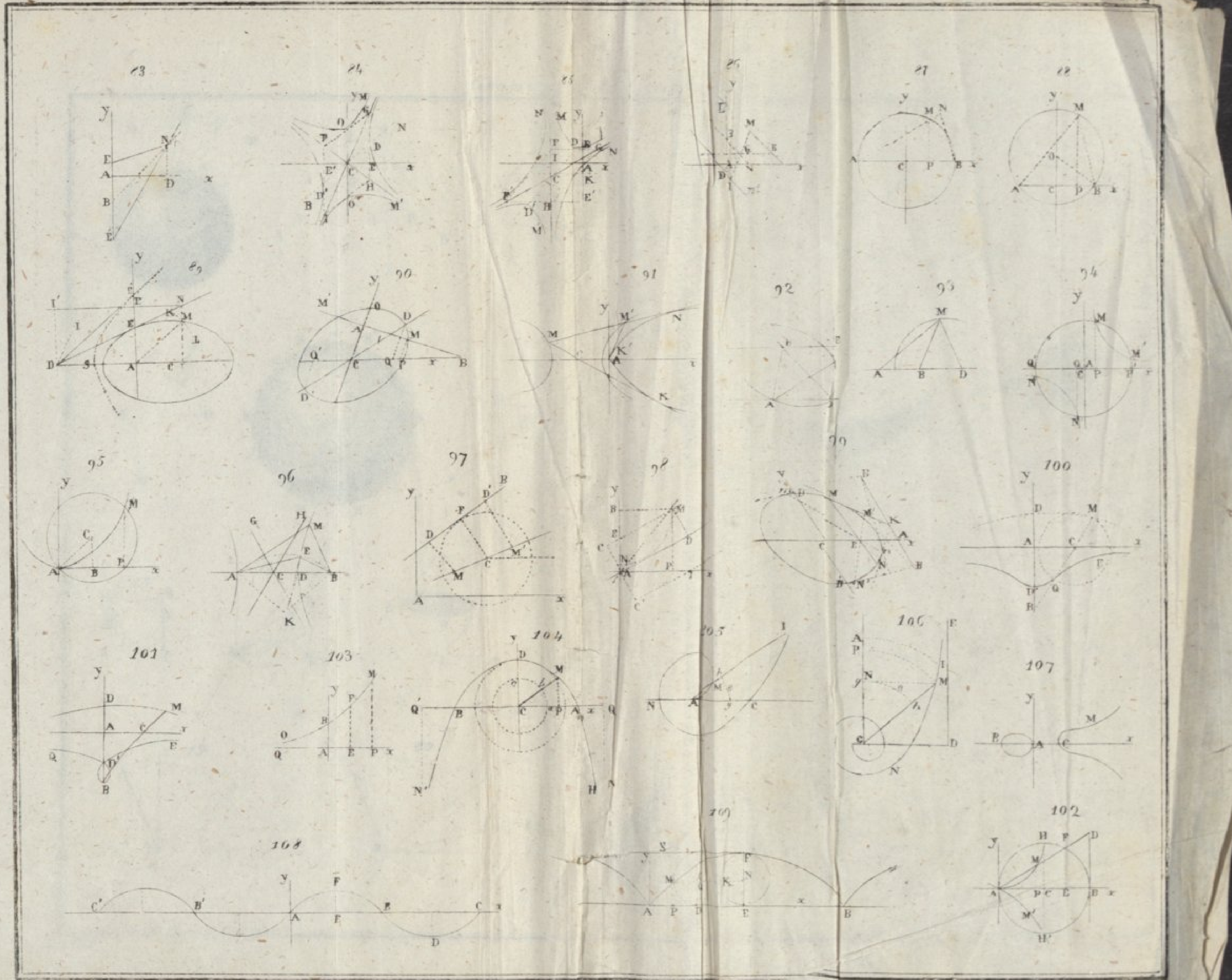
II. SUPERFICIES E CURVAS NO ESPAÇO

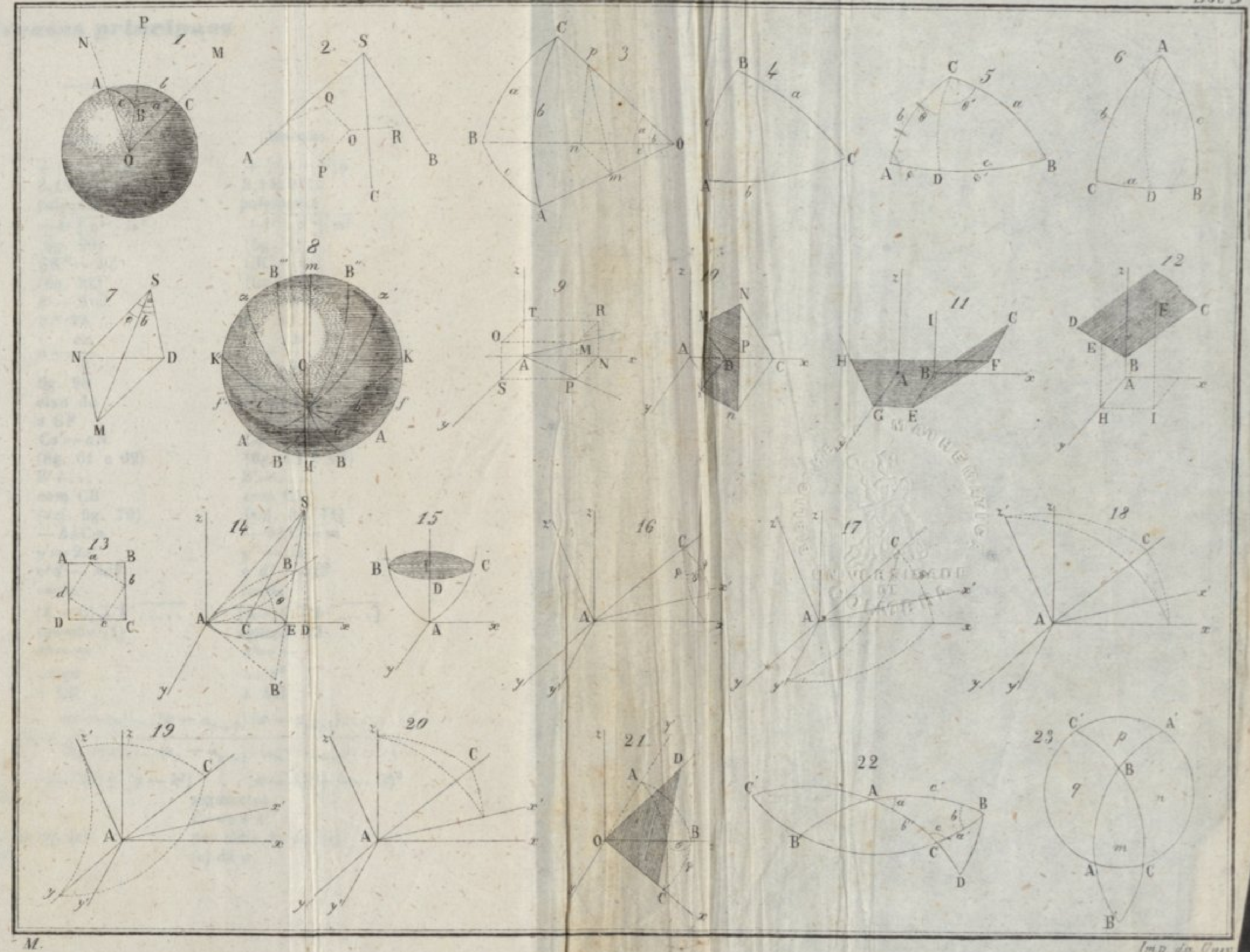
NOTAS

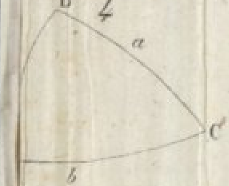


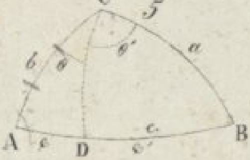


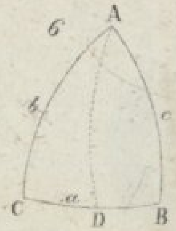

54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
73
74
75
76
77
78
79
80
81
82

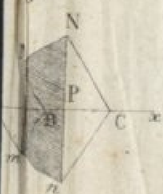

83
84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99
100
101
103
104
105
106
107
108
109
102

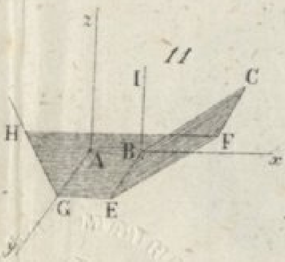

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23

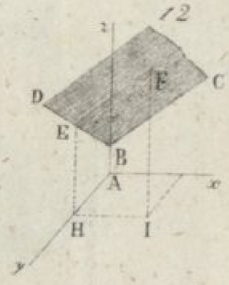
4


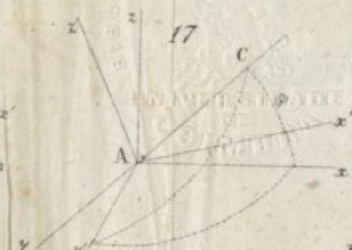
5


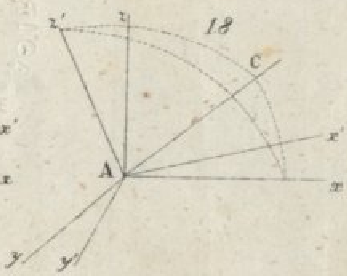
6




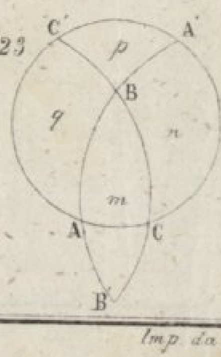
11


12


17


18


22


23


Erratas principaes

Paginas	Linhas	Erros	Emendas
5	9	$+(a-b')h$	$+\frac{1}{2}(a-b')h$
7	21	3,1310319	3,1410319
10	6	polygono	polynomio
19	21	$\pm\sqrt{\frac{1}{2}p^2+m^2}$	$+\sqrt{\frac{1}{4}p^2+m^2}$
24	19	(fig. 20)	(fig. 8)
25	16	$CK''=AC$	$CK'-AC$
»	22	(fig. 22)	(fig. 23)
29	14	k^2-3rh	h^2-3rh
48	4	n.º 39	n.º 33
63	15	$a-\frac{ex}{a}$	$a-\frac{cx}{a}$
84	8	fig. 98	fig. 99
86	3	eixo do	do eixo dos
88	6	a GF	a GF (fig. 49)
95	21	$Ca'=aN$	$Ca'+aN$
98	20	(fig. 61 e 62)	(fig. 61 e 63)
99	6	$E'+\ldots$	$E'=\ldots$
103	penultima	com CB	com CA
114	14	(vej. fig. 70)	(vej. fig. 71)
117	11	$-4ACm$	$-4AC=m$
120	21	$y'=2x'$	$y'^2=2x'$
131	20	e^2d^2-4aF	$e\ d^2-4aF$
133	15	$=A\alpha$	$=B\alpha$
134	3 sub.	$(A+C)\mp\sqrt{\ldots\ldots}$	$[A+C\mp\sqrt{\ldots\ldots}]$
143	2	*equação* (1)	*equação* (3)
153	12	$a'==$	$a'=-$
170	3	$=ax$	$=a^x$
172	12	a AD	a AE
176	*leia-se:*	$A_n=\frac{(x-\alpha_0)\ldots(x-\alpha_{n-1})(x-\alpha_{n+1})\ldots\ldots}{(\alpha_n-\alpha_0)\ldots(\alpha_n-\alpha_{n-1})(\alpha_n-\alpha_{n+1})\ldots\ldots}.$	
177	antepenultima	$(x-h^2)+(y-k^2)$	$(x-h)^2+(y-k)^2$
200	17	segmentas	segmentos
»	19	$D=\theta+\theta'$	$C=\theta+\theta'$
»	26	por meio da eq. (*e*)	por meio da eq. (*s*)
201	25	(*e*) dá (*a*)	(*c*) dá *a*

Paginas	Linhas	Erros	Emendas
204	12	$\frac{\tan g \frac{1}{2}(a-b)}{\tan g \frac{1}{2}(a+b)} = \frac{\tan g \frac{1}{2}(A-B)}{\tan g \frac{1}{2}(A+A)}$	$\frac{\tan g \frac{1}{2}(a-b)}{\tan g \frac{1}{2}(a+b)} = \frac{\tan g \frac{1}{2}(A-B)}{\tan g \frac{1}{2}(A+B)}$
207	13	$CM = 180 = \psi$	$Cm = 180 - \psi$
»	28	ou arco CM	o arco CM
208	11	$CB' = CA = b$	$CA' = CA = b$
215	35	seus postos	seus pontos
217	18	(fig. 6)	(fig. 11)
»	36	$mn = MN$	$mn = MP$
»	37	um linha	uma linha
220	5	um curva	uma curva
223	11	$\ldots .(a)$	$\ldots .(a')$
230	19	$(x = ax + \alpha,$	$(x = az + \alpha,$
234	»	(fig. 33)	(fig. 10)
240	24	$\cos(yx')$	$\cos(y'x)$
242	18	n.º 188. 4.º,	n.º 178, 4.º,
247	28	$y = \alpha'' z$	$y = \beta'' z$
248	15	ao eixo dos x	ao eixo dos x'
251	13	x', y', z'	$x'y', x'z', y'z'$
»	16	$(a\beta - d)$	$(e\beta - d)$
257	14	pelo plano zx	pelo plano zy
258	2	pelo plano yz	pelo plano xy

GEOMETRIA