rida aos diametros conjugados, deve o eixo Cy *das ordenadas ser parallelo á tangente tirada no ponto* B *ou* B' *onde o eixo* Cx *das abscissas corta a curva.*

2.° Qualquer corda CB, que passa pelo centro C, é um diametro que tem o seu conjugado parallelo á tangente em B; por que a equação da curva referida a este systema de eixos tem necessariamente a fórma (4) (*). Por tanto: *na ellipse e na hyperbole ha uma infinidade de diametros conjugados.*

3.° Sendo AO (fig. 57 e 58) o primeiro eixo da ellipse ou da hyperbole, ha sempre duas cordas supplementares AN e ON parallelas aos diametros conjugados (n.os 81 e 85). A equação $a^2\alpha\alpha' \pm b^2 = 0$,

---

que na extremidade do eixo B, onde é $y'=0$, se torna em $\frac{k}{h} = \infty$; isto é, a tangente em B é parallela a Cy.

O mesmo se pode mostrar da maneira seguinte:

Eliminando y entre $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ e $y = \alpha x + \beta$, e tomando a semi-somma dos dous valores de x, vem a abscissa do meio de cada corda, $x = -\frac{\alpha\beta a^2}{b^2 + a^2\alpha^2}$; e eliminando $\beta = y - \alpha x$, vem a equação dos meios de todas as cordas parallelas a $y = \alpha x$, isto é, a equação do diametro BB', $y = -\frac{b}{a^2\alpha}x = \alpha' x$. Logo $\alpha\alpha' = -\frac{b^2}{a^2}$; e por isso a tangente na extremidade B do diametro é parallela ás cordas (n.os 81 e 85).

(*) Com effeito o mesmo calculo da pag. 96 applicado á equação

$$Ay'^2 + B'x'y' + Cx'^2 + Q = 0,$$

dá

$$\frac{k}{h} = -\frac{By' + 2Cx'}{Bx' + 2Ay'};$$

e por que, suppondo a tangente em B parallela a Cy, deve ser $\frac{k}{h} = \infty$ para $y'=0$, resulta $B=0$; o que reduz á fórma (4) a equação precedente.

Isto mesmo se vê do modo seguinte:

Chamando A a tangente trigonometrica do angulo que a tangente em B faz com CB, é (n.° 81) $A\alpha' = -\frac{b^2}{a^2}$; e por isso, fazendo $A = \alpha$, será, segundo a nota precedente, CB o diametro conjugado do que é parallelo á tangente em B.

que (n.os 80 e 85) tem logar para a inclinação de duas cordas sobre o eixo AO, convém pois egualmente á d'estes diametros; conservando elles direcções parallelas em todas as ellipses e hyperboles cujos eixos a e b têm a mesma razão.

4.º Sabemos assim: *determinar os diametros conjugados, que fazem entre si um angulo dado* θ; por que este problema já foi resolvido para as cordas supplementares (n.º 80). O angulo θ tem um limite, e só pode ser recto para os eixos; excepto no circulo, onde todos os diametros conjugados são rectangulares.

O problema reduz-se a formar sobre o eixo AO, e com o angulo opposto dado $N=\theta$, um triangulo ANO. Para isso descrever-se-ha sobre AO um segmento de circulo, em que possa existir o angulo dado: as intersecções d'este segmento com a curva darão os pontos N, as cordas supplementares, e os diametros conjugados parallelos a estas cordas.

5.º Se o diametro conjugado Cy tambem corta a curva, o que tem logar na ellipse (fig. 61), ver-se-ha do mesmo modo que as rectas GH e IK, tangentes em D' e D, são parallelas ao 1.º diametro BB'. O parallelogrammo GHIK diz-se *circumscripto* á curva.

Mas na hyperbole (fig. 63) só o 1.º diametro BB' corta a curva; por que o outro DD' fica fóra do angulo das asymptotas.

95. Sejam (fig. 61) $BB'=2a'$ e $DD'=2b'$ os diametros conjugados d'uma ellipse. Referindo a elles a curva, devem $y=0$ dar $x=a'$, e $x=0$ dar $y=b'$: introduzindo pois estas condições na equação (4),

teremos $$Ba'^2=Q,\ Ab'^2=Q,\ \text{ou}\ B=\frac{Q}{a'^2},\ A=\frac{Q}{b'^2},$$

que a transformam na da ellipse referida aos eixos conjugados

$$a'^2y^2+b'^2x^2=a'^2b'^2\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5).$$

96. Seja do mesmo modo (fig. 63) $BB'=2a'$ o primeiro diametro da hyperbole, e $DD'=2b'$ o seu segundo diametro que não encontra a curva, isto é, o dobro da ordenada $b'\sqrt{-1}$ correspondentes a $x=0$, depois de tornada real. Devem $y=0$ dar $x=a'$, e $x=0$ dar $y=b'\sqrt{-1}$; e

estas condições introduzidas na equação (4) dão

$$Ba'^2 = Q, -Ab'^2 = Q, \text{ ou } B = \frac{Q}{a'^2}, A = -\frac{Q}{b'^2},$$

que a transformam na da hyperbole referida aos diametros conjugados,

$$a'^2y^2 - b'^2x^2 = -a'^2b'^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6).$$

As tangentes $GI = HK = 2b'$ parallelas a DD' determinam o parallelogrammo GHIK *inscripto* na hyperbole.

Como as equações (5) e (6) se podem deduzir uma da outra pondo $b'\sqrt{-1}$ em logar de b', o mesmo acontecerá aos resultados dos calculos feitos a respeito d'uma d'ellas; e por isso é escusado repetil-os para a hyperbole.

97. Se na equação da ellipse mudarmos x em y e y em x, esta equação conservará a mesma fórma; e por isso todas as construcções feitas sobre um dos diametros serão applicaveis ao outro. Mas na hyperbole, se contarmos x sobre o segundo diametro, a equação será

$$b'^2y^2 - a'^2x^2 = a'^2b'^2.$$

98. Como as equações da ellipse e da hyperbole conservam a mesma fórma, ou se refiram aos eixos, ou aos diametros; é inutil reproduzir os calculos, que já se effectuaram a respeito dos eixos; e podem aproveitar-se os resultados que para elles se deduziram. Assim:

1.° Os quadrados das ordenadas (fig. 61 e 63) são proporcionaes aos productos das distancias PB e PB' dos pés P ás extremidades B e B' do diametro.

2.° As equações de duas ellipses, uma das quaes é referida aos eixos $2a'$ e $2b'$, e a outra a diametros da mesma grandeza, são identicas; e por isso a cada abscissa corresponde uma ordenada da mesma grandeza em ambas as curvas, mas differentemente inclinada. Logo, para descrever uma ellipse, quando se dão os diametros conjugados BB' e DD' (fig. 62), levantaremos KCK' perpendicular a BB', e tomaremos nella as partes $CK = CK' = CD$; depois, pela propriedade dos fócos, ou por outro meio, descreveremos sobre os eixos BB' e KK' a ellipse BKB'K'; e finalmente inclinaremos cada ordenada NP de modo que tome a direcção

MP parallela ao segundo diametro DD′; o que dará cada ponto correspondente M da ellipse procurada. No caso de ser $b'=a'$, é BKB′K′ um circulo.

Esta construcção applica-se similhantemente á hyperbole; e adiante veremos que tambem é applicavel á parabola.

3.° Para a inclinação d'uma tangente num ponto qualquer (x', y'), e para a equação d'esta recta, temos:

na ellipse $$A = -\frac{b'^2}{a'^2} \cdot \frac{x'}{y'},\quad a'^2yy' + b'^2xx' = a'^2b'^2;$$

na hyperbole $$A = \frac{b'^2}{a'^2} \cdot \frac{x'}{y'},\quad a'^2yy' - b'^2xx' = -a'^2b'^2:$$

devendo entender-se que A não designa aqui, como designava para os eixos, a tangente trigonometrica do angulo que aquella recta faz com o eixo das abscissas, mas sim a razão dos senos dos angulos que faz com os diametros conjugados.

4.° Nesta mesma intelligencia vêr-se-ha que tem aqui applicação, assim o calculo feito no n.° 80 para as cordas supplementares, como o processo, que d'elle deduzimos, para tirar uma tangente. Tirando pois (fig. 64) do centro C para o ponto de contacto M a recta CM, e por B′ a corda parallela B′N, a tangente TM será parallela á corda supplementar BN.

Quando é dada a ellipse e o ponto M de contacto, facilmente se determina a tangente: por que, tirando duas quaesquer cordas parallelas, e dividindo ao meio a corda que as corta em duas partes eguaes, acha-se o centro C; e depois applica-se a construcção precedente.

5.° D'um ponto K exterior á ellipse (fig. 98), tomado sobre a recta dada BB′, tiremos as tangentes KM e KN; e tiremos o diametro DD′, e o seu conjugado CA. Reproduzindo a analyse do n.° 84, teremos a equação, $a'^2\beta y + b'^2\varepsilon x = a'^2b'^2$, da corda MN que une os pontos de contacto; equação por meio da qual poderiamos construir esta corda, achar os pontos de contacto M e N, e tirar as tangentes. Ora $y=0$ dá $x=\frac{a'^2}{\varepsilon}$, independente de β e b': logo, em quanto o ponto K se mover sobre BB′, a corda MN e as tangentes variarão, mas o ponto E ficará fixo; e este ponto será commum para todas as ellipses que tiverem o mesmo primeiro diametro $2a'$.

6.° Tambem é visivel que a propriedade demonstrada no fim do n.° 82 subsiste ainda quando a ellipse se reporta aos diametros conjugados; ficando assim justificado o que dissemos nesse logar, relativamente áquella propriedade, sobre poderem ser OH e AK (fig. 56) duas quaesquer tangentes parallelas.

Todas estas construcções se applicam egualmente á hyperbole.

99. Para achar as relações que têm logar entre os semi-eixos, a e b, e os semi-diametros conjugados, a' e b', tomemos as duas equações referidas a estas duas especies de eixos; e procuremos reduzir uma á outra por meio de transformações de coordenadas.

Transformações das coordenadas

100. *Ellipse.* Comecemos pela ellipse, cuja equação referida aos seus eixos CA e CM (fig. 61) é

$$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2.$$

Para mudar as coordenadas rectangulares, x e y, em outras obliquas, x' e y', contadas sobre diametros conjugados CB e CD, que façam com CA os angulos α e β, substituamos nesta equação, em logar de x e y, as expressões [n.° 44 (2)]

$$x=x'\cos\alpha+y'\cos\beta,\quad y=x'\operatorname{sen}\alpha+y'\operatorname{sen}\beta:$$

teremos

$$\left.\begin{cases}(a^2\operatorname{sen}^2\alpha+b^2\cos^2\alpha)\,x'^2+(a^2\operatorname{sen}^2\beta+b^2\cos^2\beta)\,y'^2\\+2\,(a^2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta+b^2\cos\alpha\cos\beta)\,x'y'\end{cases}\right\}=a^2b^2.$$

Mas, para que estes novos eixos sejam diametros conjugados, é necessario que a transformada tenha a fórma

$$a'^2y'^2+b'^2x'^2=a'^2b'^2:$$

logo o coefficiente de $x'y'$ deve ser nullo,

isto é, $$a^2 \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta + b^2 \cos\alpha \cos\beta = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (7),$$

ou, $$a^2 \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\beta + b^2 = 0.$$

Esta equação é a mesma que tem logar para as cordas supplementares (n.º 80); o que concorda com o que se disse no n.º 94 sobre as direcções d'estas cordas, das tangentes, e dos diametros conjugados.

Para determinar os semi-diametros conjugados a' e b', é necessario fazer respectivamente nullos y' ou x'; o que dá

$$(a^2 \operatorname{sen}^2\alpha + b^2\cos^2\alpha)\, a'^2 = a^2b^2,\ (a^2\operatorname{sen}^2\beta + b^2\cos^2\beta)\, b'^2 = a^2b^2 \ldots (8):$$

ou, substituindo $1-\operatorname{sen}^2\alpha$ e $1-\operatorname{sen}^2\beta$ em logar de $\cos^2\alpha$ e $\cos^2\beta$,

$$a'^2(a^2-b^2)\operatorname{sen}^2\alpha = b^2(a^2-a'^2),\ b'^2(a^2-b^2)\operatorname{sen}^2\beta = b^2(a^2-b'^2);$$

ou, substituindo $1-\cos^2\alpha$ e $1-\cos^2\beta$ em logar de $\operatorname{sen}^2\alpha$ e $\operatorname{sen}^2\beta$,

$$a'^2(a^2-b^2)\cos^2\alpha = a^2(a'^2-b^2),\ b'^2(a^2-b^2)\cos^2\beta = a^2(b'^2-b^2).$$

Transpondo o 2.º termo da equação (7), elevando ao quadrado, e substituindo os valores de $\operatorname{sen}^2\alpha$, $\cos^2\alpha$, $\operatorname{sen}^2\beta$, $\cos^2\beta$, tirados das quatro ultimas equações, resulta

$$(a^2-a'^2)(a^2-b'^2)=(a'^2-b^2)(b'^2-b^2),\ \text{ou}\ a^4-b^4=(a^2-b^2)(a'^2+b'^2),$$

que, sendo dividida por a^2-b^2, dá

$$a^2+b^2=a'^2+b'^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9).$$

Logo: *a somma dos quadrados de dous quaesquer diametros conjugados da ellipse é constante, e egual á somma dos quadrados dos eixos.*

Se multiplicarmos as equações (8) uma pela outra, resultará

$$a^4b^4 = a'^2b'^2[a^4 \operatorname{sen}^2\alpha \operatorname{sen}^2\beta + b^4\cos^2\alpha\cos^2\beta + a^2b^2(\operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\beta + \operatorname{sen}^2\beta\cos^2\alpha)],$$

ou, em virtude do quadrado de (7), e dividindo por a^2b^2,

$$a^2b^2 = a'^2b'^2 (\operatorname{sen}\beta\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha\cos\beta)^2 = a'^2b'^2 \operatorname{sen}^2(\beta - \alpha).$$

Temos pois $\qquad ab = a'b' \operatorname{sen}(\beta - \alpha) = a'b' \operatorname{sen}\theta \ldots\ldots\ldots\ldots (10),$

chamando θ o angulo $\beta - \alpha$ dos diametros conjugados. E como $a'b' \operatorname{sen}\theta$ é a superficie do parallelogrammo CDBK (fig. 61), segue-se que: *quaesquer que sejam as direcções dos diametros conjugados, a área do parallelogrammo* GK *circumscripto á ellipse é constante, e egual á do rectangulo dos eixos.*

Assim as tres equações (7) e (8), que exprimiam as condições da questão, reduzem-se a estas:

$$a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

$$ab = a'b' \operatorname{sen}(\beta - \alpha) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

$$a^2 \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\beta + b^2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (11).$$

Se eliminassemos a e b por meio de duas d'ellas, a terceira reduzir-se-ia a (*)

$$0 = a'^2 \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + b'^2 \operatorname{sen}\beta\cos\beta, \text{ ou } 0 = a'^2 \operatorname{sen}2\alpha + b'^2 \operatorname{sen}2\beta \ldots (12).$$

No caso de serem dados os diametros $2a'$ e $2b'$, com o angulo que

---

(*) Como a passagem dos diametros conjugados para os eixos se faz pelas formulas

$$x' = \frac{x \operatorname{sen}\beta - y\cos\beta}{\operatorname{sen}(\beta - \alpha)}, \quad y' = \frac{y\cos\alpha - x\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}(\beta - \alpha)};$$

comparando estas expressões com as de x e y do n.º 100, vê-se que: para fazer esta passagem podemos aproveitar os calculos d'aquelle numero substituindo nos comprehendem, $\beta - \alpha = \theta$: desenvolvendo $\operatorname{sen} 2\beta = \operatorname{sen}(2\alpha + 2\theta)$, dividindo por $\cos 2\alpha$, e resolvendo em ordem a $\operatorname{tang} 2\alpha$,

a equação (12) dá $$\operatorname{tang} 2\alpha = -\frac{b'^2 \operatorname{sen} 2\theta}{a'^2 + b'^2 \cos 2\theta},$$

que determina a direcção dos mesmos eixos.

Para ter a posição dos diametros conjugados eguaes, faremos $a' = b'$;

o que torna a equação (12) em $$\operatorname{sen} 2\alpha = -\operatorname{sen} 2\beta,$$

e mostra que estes diametros têm a mesma inclinação sobre o eixo maior;

---

resultados d'elles: a' e b', em logar de a e b; $\frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}(\beta-\alpha)}$ e $-\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}(\beta-\alpha)}$, em logar de $\cos\alpha$ e $\operatorname{sen}\alpha$; $-\frac{\cos\beta}{\operatorname{sen}(\beta-\alpha)}$ e $\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}(\beta-\alpha)}$ em logar de $\cos\beta$ e $\operatorname{sen}\beta$. O que feito na equação (7) dá immediatamente:

$$-\frac{a'^2 \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{\operatorname{sen}^2(\beta-\alpha)} - \frac{b'^2 \operatorname{sen}\beta\cos\beta}{\operatorname{sen}^2(\beta-\alpha)} = 0, \text{ ou a equação (12).}$$

Mas se quizermos effectuar a eliminação, como se indica no texto, por exemplo, eliminando a^2 e b^2 entre (9) e (11), e substituindo no quadrado de (10), acharemos:

$$(a'^2 + b'^2)^2 \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\beta + a'^2 b'^2 (1 - \operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\beta)^2 \operatorname{sen}^2(\alpha-\beta) = 0,$$

que dá

$$(a'^2 + b'^2)^2 \operatorname{sen} 2\alpha \operatorname{sen} 2\beta + 4a'^2 b'^2 \cos^2(\alpha+\beta) \operatorname{sen}^2(\alpha-\beta) = 0),$$

ou $$(a'^2 + b'^2)^2 \operatorname{sen} 2\alpha \operatorname{sen} 2\beta + a'^2 b'^2 (\operatorname{sen} 2\alpha - \operatorname{sen} 2\beta)^2 = 0,$$

ou $$(a'^2 \operatorname{sen} 2\alpha + b'^2 \operatorname{sen} 2\beta)(a'^2 \operatorname{sen} 2\beta + b'^2 \operatorname{sen} 2\alpha) = 0.$$

A apparição dos dous factores analogos procede de se ter elevado (10) ao quadrado, e entrar por isso $\operatorname{sen}(\alpha-\beta)$ só na segunda potencia; porque as equações (9) e (11) e o quadrado de (10) ficam as mesmas quando se muda α em β e β em α. Mas, combinando cada um d'estes factores egualado a zero com as equações (8), acha-se que só o primeiro reproduz a equação (11).

ficando um d'uma parte do eixo menor, e outro da outra parte do mesmo eixo (*).

A mesma hypothese torna a equação (11) em

$$-a^2 \operatorname{tang}^2 \alpha + b^2 = 0, \text{ ou } \operatorname{tang} \alpha = \pm \frac{b}{a} = \frac{BC}{AC} \text{ (fig. 57).}$$

Por onde se vê que: *os diametros conjugados eguaes da ellipse são parallelos ás cordas supplementares que ligam as extremidades dos eixos; e por conseguinte* (n.° 80) *são tambem os que fazem um com o outro o maior angulo obtuso.*

Seja (fig. 57) CM um d'estes diametros. Attendendo á equação (9), o triangulo CPM dá

$$x^2 + y^2 = a'^2 = \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

Eliminando y^2 entre esta equação e $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$, resulta $x^2 = \frac{1}{2}a^2$; e por que este valor é independente de b, segue-se que: *as extremidades dos diametros conjugados eguaes de todas as ellipses descriptas sobre o eixo maior* $2a$ *têm a mesma abscissa* $\frac{1}{2}a\sqrt{2}$.

101. Para determinar a posição dos diametros conjugados, que fazem entre si o angulo θ, temos (n.° 80) a equação

$$a^2 \operatorname{tang}^2 \alpha - (a^2 - b^2) \operatorname{tang} \alpha \operatorname{tang} \theta + b^2 = 0 \ldots\ldots (13).$$

As cinco equações (9), (10), (11), (12), (13), que equivalem tão sómente

---

(*) A equação $\qquad \operatorname{sen} 2\alpha = -\operatorname{sen} 2\beta$

dá $\qquad 2\alpha = 180° + 2\beta, \text{ ou } 2\alpha = 360° - 2\beta.$

Da primeira tira-se $\qquad \alpha = 90° + \beta, \ \operatorname{tang} \alpha = -\dfrac{1}{\operatorname{tang} \beta},$

que, em virtude de (11), dá $a = b$; o que só tem logar no circulo.

Da segunda tira-se $\alpha = 180° - \beta$, que é o que serve.

a quatro distinctas, entre as sete quantidades a, b, a', b', α, β, θ, dão quatro d'estas quantidades, quando se conhecem as outras tres.

Por exemplo, *querendo determinar os eixos, quando são dados, em grandeza e direcção, os diametros conjugados:* conhecem-se a', b', θ; e procuram-se a, b, α. Ora as equações (9) e (10) dão

$$(a \pm b)^2 = a'^2 + b'^2 \pm 2a'b' \operatorname{sen} \theta:$$

logo construindo dous triangulos; um com os lados a', b', e o angulo comprehendido $90^\circ + \theta$; outro com os lados a', b', e o angulo comprehendido $90^\circ - \theta$; os terceiros lados serão respectivamente $a+b$ e $a-b$.

102. Transformemos a equação da ellipse referida aos eixos,

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2,$$

em outra referida a novos eixos rectangulares, por meio das equações

$$x = x' \cos\alpha - y' \operatorname{sen}\alpha, \quad y = x' \operatorname{sen}\alpha + y' \cos\alpha;$$

sendo α o angulo (xx'). Virá:

$$\left.\begin{cases} a^2x'^2 \operatorname{sen}^2\alpha + 2a^2x'y' \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + a^2y'^2\cos^2\alpha \\ + b^2x'^2\cos^2\alpha - 2b^2x'y'\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + b^2y'^2\operatorname{sen}^2\alpha \end{cases}\right\} = a^2b^2.$$

Fazendo $y'=0$, $x'=0$, resultam

$$A^2 = \frac{a^2b^2}{a^2\operatorname{sen}^2\alpha + b^2\cos^2\alpha}, \quad B^2 = \frac{a^2b^2}{a^2\cos^2\alpha + b^2\operatorname{sen}^2\alpha};$$

nas quaes A e B são as distancias do centro aos dous pontos onde os eixos x', y', encontram a curva. Estas equações dão

$$\frac{1}{A^2} + \frac{1}{B^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2b^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2};$$

e por que esta egualdade é independente de α, segue-se que: *quaesquer* *distancias rectangulares* A *e* B *do centro á ellipse satisfazem á relação* $A^{-2}+B^{-2}=$ *constante.*

103. *Hyperbole.* Para achar os resultados relativos á hyperbole, basta mudar b em $b\sqrt{-1}$ e b' em $b'\sqrt{-1}$ nos relativos á ellipse. Teremos assim as equações

$$a'^2-b'^2=a^2-b^2,\quad a'b'\,\text{sen}\,\theta=ab,$$

$$a'^2\,\text{sen}\,2\alpha=b'^2\,\text{sen}\,2\beta,\quad \text{ou}\quad a^2\,\text{tang}\,\alpha\,\text{tang}\,\beta=b^2,$$

$$a^2\,\text{tang}^2\,\alpha-(a^2+b^2)\,\text{tang}\,\alpha\,\text{tang}\,\theta=b^2,$$

cujo uso é o mesmo que o das correspondentes da ellipse. Por onde se vê: 1.° *que na hyperbole a differença dos quadrados dos diametros conjugados é egual á differença dos quadrados dos eixos:* 2.° *que o parallelogrammo inscripto na hyperbole é constante e egual ao rectangulo dos eixos.*

Como $a'=b'$ dá $a=b$; e reciprocamente: a hyperbole equilatera é a unica que tem os diametros conjugados eguaes; e nella todos o são dous e dous.

A mesma hypothese dá $\quad \text{tang}\,\alpha\,\text{tang}\,\beta=1$, ou $\text{tang}\,\alpha=\cot\beta$.

Assim, sendo CA o primeiro eixo da hyperbole equilatera (fig. 60); e CM, Cy', dous diametros conjugados eguaes: temos

$$\text{tang MCA}=\cot y'\text{CA}=\text{tang}\,y'\text{C}y,\ \text{isto é},\ x'\text{C}x=y'\text{C}y.$$

Ora a asymptota CS faz com CA o angulo $\text{SC}x=45°=\text{SC}y$: logo $\text{SC}x'=\text{SC}y'$, e por conseguinte: *a asymptota da hyperbole equilatera divide ao meio os angulos de todos os diametros conjugados.*

104. De ser (n.° 90) $\text{CMS}=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}\text{SM}\,.\,\text{CM}\,\text{sen}\,\theta=\frac{1}{2}a'\,.\,\text{SM}\,\text{sen}\,\theta$, e (n.° precedente) $ab=a'b'\,\text{sen}\,\theta$, resulta $\text{SM}=b'$.

Por tanto: *o conjugado de qualquer diametro* 2CM *é egual e parallelo a* ST.

As diagonaes HI e GK do parallelogrammo inscripto (fig. 63) são asymptotas.

Se na equação $a'^2y^2-b'^2x^2=-a'^2b'^2$ fizermos o calculo do (n.° 87), acharemos a equação $y=\pm\dfrac{b'}{a'}x$ das asymptotas reportadas aos diametros conjugados: d'onde podem deduzir-se novamente diversos theoremas. Assim $x' = a' = CM$ (fig. 60) dá $y = b' = MS = MT$: o ponto M divide ST em duas partes eguaes; e as extremidades S, T, dos diametros conjugados determinam as asymptotas.

A cada abscissa correspondem duas ordenadas eguaes e oppostas. Assim, quando Cy' é parallela á tangente ST, Cx' divide ao meio bb' e NN'; logo $bN = b'N'$: e como ST pode ter qualquer direcção, vê-se que a todas as cordas pertence esta propriedade.

105. Um calculo similhante ao do n.° 102 dá

$$A^{-2} + B^{-2} = a^{-2} - b^{-2} = \text{const}:$$

mas aqui é necessario, para conceber o que exprime B, imaginar que se descreve entre as asymptotas da hyperbole proposta outra hyperbole conjugada, da qual b seja o primeiro eixo e a o segundo (vej. fig. 70) (*).

106. *Parabola.* Como a parabola não tem diametros conjugados, reportemol-a aos seus diametros simples.

Transportemos a origem das coordenadas a um ponto (a, b); e mudemos a direcção dos eixos, referindo a curva a outros que façam com o eixo primitivo dos x os angulos $(xx') = \alpha$ e $(xy') = \beta$; isto é, substituamos em $y^2 - 2px = 0$ as expressões (n.° 44)

$$x = a + cx' + c'y', \quad y = b + sx' + s'y',$$

sendo $$c = \cos\alpha, \quad c' = \cos\beta, \quad s = \text{sen}\,\alpha, \quad s' = \text{sen}\,\beta:$$

teremos

$$b^2 - 2pa + 2x'(bs - pc) + 2y'(bs' - pc') + 2ss'x'y' + s^2x'^2 + s'^2y'^2 = 0.$$

(*) As expressões de A^2 e B^2 (n.° 102), mudando b em $b\sqrt{-1}$,

são $$A^2 = \frac{a^2b^2}{b^2\cos^2\alpha - a^2\,\text{sen}^2\alpha}, \quad B^2 = \frac{a^2b^2}{b^2\,\text{sen}^2\alpha - a^2\cos^2\alpha}.$$

Como o eixo CE' faz com o primeiro eixo CA' da hyperbole conjugada o mesmo angulo α, que fará o eixo CE com o primeiro eixo CA da hyperbole proposta, é claro que, para ter o ponto onde CE' encontra a conjugada, basta mudar a em b, e reciprocamente, na expressão de A^2; o que dá

$$A'^2 = \frac{a^2b^2}{a^2\cos^2\alpha - b^2\,\text{sen}^2\alpha} = -B^2.$$

Por tanto $$CE' = A' = B\sqrt{-1}.$$

Para que o eixo dos x' seja diametro a respeito dos y', é necessario que desappareçam os termos em $x'y'$ e y'; ou $ss'=0$, $bs'-pc'=0$.

Da primeira d'estas condições resulta $s=0$, $c=1$:

a segunda, $$p=b\frac{s'}{c'}=b\operatorname{tang}\beta=b\operatorname{tang}(xy'),$$

dá, para cada valor de b, o angulo (xy') que determina a direcção de y'; ficando a e b arbitrarias. Logo: *só as parallelas* MS *ao eixo* Ax *são diametros, e todas o são* (fig. 52).

A equação transformada é $s'^2y'^2-2px'+b^2-2pa=0$.

Em fim, se tomarmos por (a, b) um ponto da curva, será $b^2-2pa=0$; e a ultima equação, fazendo $\frac{p}{s'^2}=p'$, se reduzirá a $y'^2=2p'x'$.

Por ser (n.° 75) $$\operatorname{tang} t\mathrm{MS}=\frac{p}{b}=\operatorname{tang}(xy'),$$

a tangente MT na origem M é o eixo dos y'. A expressão $2p'$ é o que se chama *parametro do diametro* MS; e por que é

$$s'=\operatorname{sen}(xy')=\frac{p}{\sqrt{p^2+b^2}}=\sqrt{\left(\frac{p}{p+2a}\right)},$$

fica (n.° 66) $$2p'=\frac{2p}{s'^2}=2(p+2a)=4\mathrm{MF}.$$

Logo: *o parametro de um diametro é o quadruplo da distancia da origem ao fóco.*

Por meio das equações $b\operatorname{tang}\theta=p$, $p+2a=p'$, $b^2=2pa$, podemos, salvas as excepções analyticas, achar tres das quantidades p, p', a, b, θ, quando se conhecem as outras duas; e construir a curva, cuja equação é $y'^2 = 2p'x'$.

107. De terem as equações referidas aos eixos a mesma fórma que as referidas aos diametros conjugados, segue-se que:

1.° A construcção dada para a ellipse (n.° 98) é applicavel á parabola, quando se conhece um diametro e o seu parametro $2p'$.

2.° A equação da tangente em qualquer ponto (x', y') é

$$yy' = p'(x + x');$$

sendo $\frac{p'}{y'}$ a razão dos senos dos angulos que faz com os eixos coordenados. No caso de ter de passar a tangente por um ponto exterior, subsistem ainda a construcção e as propriedades expostas no n.° 78.

3.° A subtangente é o dobro da abscissa: e por isso, conhecido um diametro, facilmente se tirará a tangente em um ponto dado.

Para determinar um diametro, o eixo, o vertice, etc., d'uma parabola MAN' (fig. 52): traçaremos duas cordas parallelas quaesquer, e dividil-as-hemas ambas em duas partes eguaes por uma recta, que será um diametro MS; depois tiraremos a corda MM' perpendicular a MS, dividil-a-hemos ao meio em P, e conduziremos por este ponto uma parallela a MS, o que dará o eixo AN, e o vertice A.

Como o parametro $2p'$ é uma terceira proporcional, $2p' = \frac{y'^2}{x'}$, a qualquer abscissa e á ordenada correspondente: segue-se que, se conhecermos a direcção d'uma tangente Mt relativamente ao diametro MS, e um ponto da parabola, facilmente descreveremos esta curva; por que as coordenadas (x', y') do ponto dado farão conhecer o parametro $2p' = \frac{y'^2}{x'}$ do diametro MS, e depois teremos na equação $y^2 = 2p'x$ o que é necessario para a construcção.

Discussão das equações do segundo grau

108. Passemos a construir a equação geral do segundo grau entre duas indeterminadas,

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0 \ldots\ldots\ldots(a),$$

na qual são dados, em grandeza e signal, os coefficientes A, B,.... Supporemos as coordenadas rectangulares; por que sempre é possivel reduzil-as a esse estado por transformações convenientes [n.º 45 (3′)], sem alterar o grau da equação.

Sendo muitos differentes as fórmas e as propriedades das curvas, segundo ellas têm ou não têm centro, distinguiremos os tres casos de ser $B^2 - 4AC m$ nullo, positivo ou negativo.

1.º Caso. $B^2 - 4AC = m = 0$.

109. Os tres primeiros termos de (a) são o quadrado de $y\sqrt{A} + x\sqrt{C}$. Neste caso a curva MDM′ (fig. 66) não tem centro.

Ax e Ay são os eixos. Para referir a curva a outros Ax' e Ay' tambem rectangulares, de modo que a sua equação tenha a fórma

$$ay'^2 + dy' + cx' + F = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(b),$$

é necessario que, substituindo nesta equação as expressões [n.º 44 (2′)]

$$y' = y\cos\theta - x\,\mathrm{sen}\,\theta,\quad x' = y\,\mathrm{sen}\,\theta + x\cos\theta \ldots\ldots\ldots(c),$$

que transformam um systema rectangular de coordenadas em outro tambem rectangular, a transformada se possa tornar identica a (a), isto é, que se possam fazer eguaes respectivamente os coefficientes das mesmas potencias de x e y. Substituindo pois (c) em (b), e comparando termo a termo o resultado com (a), teremos

$$a\cos^2\theta = A,\ a\,\mathrm{sen}^2\,\theta = C \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$-2a\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta = B \ldots\ldots\ldots (2)$$

$$d\cos\theta + e\,\mathrm{sen}\,\theta = D,\ e\cos\theta - d\,\mathrm{sen}\,\theta = E \ldots\ldots\ldots (3).$$

Como ha cinco equações com quatro incognitas, a, d, e, θ, não será possivel em geral o calculo precedente, excepto se alguma d'estas equações se contiver nas outras. É o que actualmente se verifica; por que a condição $B^2 - 4AC = 0$ faz que seja a equação (2) um resultado das equações (1): e assim as equações (1) e (2), equivalentes a duas distinctas, determinarão a e θ; e depois as (3) determinarão d e e. Com effeito, sommadas as duas primeiras, acha-se

$$a = A + C,$$

depois $$\mathrm{sen}\,\theta = \sqrt{\frac{C}{a}},\ \cos\theta = \sqrt{\frac{A}{a}},\ \mathrm{tang}\,\theta = \sqrt{\frac{C}{A}},\ \mathrm{sen}\,2\theta = -\frac{B}{a};$$

e em fim as equações (3), ou $d = D\cos\theta - E\,\mathrm{sen}\,\theta$, $e = D\sin\theta + E\cos\theta$,

dão $$d = \frac{D\sqrt{A} - E\sqrt{C}}{\sqrt{a}},\ e = \frac{D\sqrt{C} + E\sqrt{A}}{\sqrt{a}} \ldots\ldots\ldots (4).$$

Em virtude da condição $m = 0$, são A e C positivos, $\frac{C}{a} < 1$, $\frac{A}{a} < 1$, $\frac{B^2}{a^2}\left(= \frac{4AC}{(A-C)^2 + 4AC}\right) < 1$, e por isso a, θ, d, e reaes; conseguintemente sempre se póde reduzir a proposta (a) a (b) por transformação de coordenadas.

Se um dos coefficientes A ou C fosse nullo: como então $m = 0$ daria tambem $B = 0$, não seria necessaria a transformação, por isso que a proposta teria já a fórma (b).

Se A e C fossem ambos nullos, a equação (a) não teria os tres primeiros termos, e seria do primeiro grau.

Por tanto, quando se dér uma equação na qual for $m=0$, poderemos logo escrever a tranformada (b), determinando os coefficientes pelas formulas precedentes, e construindo o novo eixo Ax' (fig. 66) por meio do valor de θ determinado pelas equações $\tan\theta = \sqrt{\frac{C}{A}}$, $\operatorname{sen} 2\theta = -\frac{B}{A+C}$.

Segundo for B negativo ou positivo, assim será $\theta < 90°$ ou $\theta > 90°$, isto é, assim ficará o eixo Ax' abaixo ou acima de Ax (*). Donde resulta o signal do radical que entra nas equações (4), suppondo sempre $\sqrt{a}$ positivo.

Seja, por exemplo, $2y^2 - 2xy + \frac{1}{2}x^2 - y - 2x + 5 = 0.$

Multiplicando por 2, para tornar A e C quadrados, teremos

$$A=4,\ B=-4,\ C=1,\ D=-2,\ E=-4,\ F=+10.$$

Por conseguinte $a=5$, $\tan\theta=\frac{1}{2}$, $\operatorname{sen} 2\theta=\frac{4}{5}$;

e depois $d=0$, $e=-2\sqrt{5}$,

tomando os radicaes positivos, por ser $\operatorname{sen} 2\theta$ positivo.

Logo $5y'^2 - 2x'\sqrt{5} + 10 = 0,$

é a transformada (b), que se deve construir, depois de ter determinado o eixo dos x'. Para determinar este eixo pela equação $\tan xAx' = \frac{1}{2}$, basta levantar sobre qualquer parte AE do eixo dos x a perpendicular $Ei = \frac{1}{2}AE$, e tirar Ai (fig. 66).

(*) Sendo 2θ o menor valor do angulo cujo seno é $-\frac{B}{A+C}$, os outros valores são $2\theta + n \cdot 360°$; por conseguinte o angulo dos eixos dos x e x' é $\theta + n \cdot 180°$, que dá para Ax' a mesma direcção que dá θ.

110. Reduzida em geral a proposta á fórma (b) por meio do calculo precedente, vejamos o modo de construir a curva, a que pertence esta equação, com os eixos rectangulares Ax', Ay' (fig. 66).

Se transportarmos a origem A a um ponto (h, k), isto é, se mudarmos x' e y' em $x'+h$ e $y'+k$, a equação (b) transformar-se-ha em

$$ay'^2 + (2ak + d)\,y' + ex' + ak^2 + dk + eh + F = 0.$$

Determinemos h e k de sorte que se desvaneçam o termo em y' e o termo constante; isto é, façamos

$$2ak + d = 0,\ ak^2 + dk + eh + F = 0.$$

A segunda d'estas equações mostra que a nova origem, assim determinada, é um ponto da curva; e a eliminação entre ambas dá as coordenadas d'este ponto

$$k = -\frac{d}{2a},\ h = \frac{d^2 - 4aF}{4ae} = \frac{ak^2 - F}{e} \ldots\ldots\ldots(7).$$

Estes valores reduzem a transformada a $ay'^2 + ex' = 0$,

a qual, sendo comparada com $y'^2 = 2px'$, mostra que a curva é uma parabola, referida ao seu eixo, e aberta para os x positivos ou para os negativos, conforme é negativo ou positivo o coefficiente e (*).

Por exemplo, na equação $2y^2 + 5y - 4x = \frac{7}{8}$

acha-se $k = -\frac{5}{4}$, $h = -1$. Tomando pois (fig. 67) $AB = -1$, $BC = -\frac{5}{4}$, transporta-se a origem de A a C, e transforma-se a equação na $y' = 2x'$ da parabola, que tem o vertice em C, e cujo parametro é 2.

(*) Se (b) fosse a proposta, e os eixos não fossem rectangulares, não seria necessario reduzil-os a este estado, e as equações (7) se applicariam immediatamente para transportar a origem. A parabola seria então referida a um diametro, como no n.º 106, e construir-se-ia com a mesma facilidade que se estivesse referida ao eixo.

Do mesmo modo a equação $y^2 - 2y + x = 0$

dá $AB = BC = 1$ (fig. 68) para transportar a origem de A a C; e transforma-se na equação $y'^2 = -x'$, d'uma parabola, cujo parametro é 1, aberta no sentido dos x' negativos.

Em fim no exemplo do numero precedente, e para a equação já reduzida aos eixos Ax', Ay' (fig. 66), acha-se $h = AM' = \sqrt{5}$, $k = 0$; e a transformada $y'^2 = 2x'\sqrt{\frac{1}{5}}$ é a equação d'uma parabola, que tem o vertice em M', e cujo parametro é $2\sqrt{\frac{1}{5}}$.

111. Ha um caso, em que não pode executar-se o calculo precedente, que é o de ser $e = 0$. Com effeito h desapparece então das equações, e fica arbitrario, de sorte que ha duas equações para a determinação de k. Usando somente da primeira $2ak + d = 0$, a primeira transformada do n.° precedente reduz-se a

$$4a^2y'^2 = d^2 - 4aF,$$

sendo a nova origem qualquer ponto da recta parallela aos x, cuja equação é $y' = k$. Então:

1.° Se $d^2 - 4aF > 0$: os dous valores de y' são reaes, e pertencem a duas rectas parallelas ao eixo dos x', e equidistantes d'elle. Neste caso está a equação $y'^2 + 4y' + 3 = 0$.

2.° Se $d^2 - 4aF = 0$: vem $y' = 0$, equação do eixo dos x'. Tal é a equação $y'^2 + 4y' + 4 = 0$.

3.° Se $d^2 - 4aF < 0$: os valores de y' são imaginarios; e por conseguinte a proposta, que neste caso se pode reduzir á fórma $y'^2 + n^2 = 0$, não representa linha alguma. É o que acontece com a equação $y'^2 + 4y' + 5 = 0$.

No casa de $e = 0$ a equação (b) torna-se em $ay'^2 + dy' + F = 0$, á qual se pode dar a fórma

$$(2ay' + d)^2 = d^2 - 4aF;$$

e vê-se tambem que, segundo é $d^2 - 4aF >, =,$ ou < 0, assim esta equação representa duas parallelas ao eixo dos x', uma parallela ao mesmo eixo, ou nada.

Similhantemente a equação (a) tem neste caso a fórma (*)

$$(ky + lx + c)^2 + Q = 0;$$

e representa duas rectas parallelas, uma recta, ou nada, segundo é $Q <, =,$ ou > 0.

112. Fica por tanto demonstrado que: *no caso de* $m = 0$, *a equação do segundo grau pertence a uma parabola*. Exceptuando os casos particulares, em que pode representar *uma recta*, duas *rectas parallelas*, ou *nada*.

Se em logar da transformada (b), quizermos usar de

$$cx^2 + dy + ex + F = 0,$$

teremos os mesmos resultados, mudando só as letras e as denominações dos eixos; por que uma d'estas equações reduz-se á fórma da outra mudando y em x e x em y: ou transportaremos a origem do mesmo modo fazendo calculos analogos aos precedentes. Assim, para a equação $x^2 + 3y = 2x - 1$, tomando $AC = 1 = h$ (fig. 69), e mudando a origem de A para C, resulta a transformada $x'^2 + 3y' = 0$, pertencente a uma parabola, que tem o vertice em C e o eixo dirigido por y', cujo parametro é 3, e que é aberta no sentido dos y' negativos.

Applicando o que fica dito, acha-se que:

1.° $x^2 - 6x + 10 = 0$ não representa linha alguma.

2.° $x^2 - 6x + 9 = 0$ é a equação d'uma parallela aos y, que se reduz á fórma $x = 3$.

3.° $x^2 - 6x + 7 = 0$ pertence a duas parallelas aos y.

(*) $B = \pm 2\sqrt{AC}$ dá $Ay^2 + Bxy + Cx^2 = (y\sqrt{A} \pm x\sqrt{C})^2$,

e (pag. 118) $e = 0$ dá $E\sqrt{A} \pm D\sqrt{C} = 0$;

o que transforma (a) em $\left(y\sqrt{A} \pm x\sqrt{C} + \frac{D}{2\sqrt{A}}\right)^2 + F - \frac{D^2}{4A} = 0$;

pertencendo o signal superior a B positivo, e o inferior a B negativo.

O mesmo se vê resolvendo (a) em ordem a y, e attendendo a que

$$B^2 - 4AC = 0,\ e = 0, \text{ dão } B^2 - 4AC = 0,\ BD - 2AE = 0.$$

2.º CASO. $B^2 - 4AC = m$ negativo.

113. A proposta não pode reduzir-se á fórma (b), e a curva tem um centro, ao qual transportaremos primeiramente a origem, fazendo o calculo do n.º 92, e reduzindo assim a proposta á forma

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Q = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (f).$$

Para desembaraçar (f) do termo xy, isto é, para a reduzir á fórma

$$qy'^2 + px'^2 + Q = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (g),$$

substituamos em (g) as expressões (c) de y' e x', e comparemos o resultado, termo a termo, com (f). Teremos:

$$(1) \ldots . q\cos^2\theta + p\,\mathrm{sen}^2\theta = A,$$

$$(2) \ldots . q\,\mathrm{sen}^2\theta + p\cos^2\theta = C,$$

$$(3) \ldots . 2(p - q)\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta = B;$$

equações, que, pela eliminação, devem dar θ, p, q.

Para eliminar commodamente, tiremos d'ellas

$$A + C = p + q,\ B^2 - 4AC = m = -4pq.$$

As incognitas p e q (*Alg. el.* n.º 147) são as raizes, ambas reaes,

da equação do 2.º grau $\quad z^2 - (A + C)z - \frac{1}{4}m = 0 \ldots\ldots\ldots (i).$

Para determinar a inclinação θ de x' sobre x, as equações (1) e (2) dão

$$A - C = (q - p)(\cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\theta) = (q - p)\cos 2\theta;$$

da qual e de (3) se tiram

$$\cos 2\theta = \frac{A - C}{q - p},\ \mathrm{sen}\,2\theta = -\frac{B}{q - p},\ \mathrm{tang}\,2\theta = \frac{-B}{A - C}.$$

..

O signal de tang 2θ mostrará se 2θ é $>$ ou $< 90°$; mas, em todo o caso, poderá tomar-se $\theta < 90°$, e o eixo dos x' acima do eixo dos x, dando a $p - q$ o signal de B, para que sen 2θ seja positivo. E assim; *tomar-se-ha por* q *a maior ou a menor das raizes de* (i), *segundo for* B *negativo ou positivo* (*).

Seja, por exemplo, a equação $5y^2 + 2xy + 5x^2 + 2y - 2x = \frac{3}{2}$.

As coordenadas do centro (n.° 92) são $h = \frac{1}{4}$, $k = -\frac{1}{4}$; e transportando a origem a este ponto, vem a transformada $5y^2 + 2xy + 5x^2 = 2$.

A equação (i) dará pois $z^2 - 10z + 24 = 0$, $z = 5 \pm 1$;

e como B é positivo, teremos $p = 5 + 1 = 6$, $q = 5 - 1 = 4$,

e $$4y'^2 + 6x'^2 = 2.$$

Para determinar a direcção dos eixos, temos tang $2\theta = \infty$, $2\theta = 90°$; conseguintemente Ax', collocado acima de Ax, faz com elle o angulo $xAx' = 45°$.

114. Por ser m negativo, e conseguintemente

$$\sqrt{B^2 + (A - C)^2} = \sqrt{(A + C)^2 + m} < A + C,$$

vê-se que as duas raizes de (i) têm ambas o mesmo signal que $A + C$. Podemos pois na discussão da equação (g) fazer p e q positivos, e examinar os diversos casos que apresentam a grandeza e o signal de Q.

(*) Sendo 2θ o menor valor do angulo cuja tangente é $\frac{-B}{A - C}$, os outros valores serão $2\theta + n.180°$; por conseguinte o angulo dos eixos dos x e x' será (fig. 66) $\theta + n.90°$. Este angulo dá para o eixo dos x' a direcção Ax', tomando n par; ou a sua perpendicular, tomando n impar: e como, em virtude da expressão de sen 2θ, estes dous valores correspondem a signaes differentes de $p - q$, isto é, á troca das raizes de (i), ou á dos nomes dos eixos, vê-se que é indifferente usar d'um ou d'outro; com tanto que no primeiro se tomem q e p de modo que $p - q$ tenha o signal de B, e no segundo se faça o contrario.

1.º Se $Q=0$: a proposta não pode subsistir, sem que sejam $x'=0$ e $y'=0$, e por isso pertence a *um ponto*, que é a origem a que ella está referida.

Neste caso está a equação $$y^2-4xy+5x^2+2x+1=0,$$

que, transportando a origem ao centro $(-1, -2)$, se transforma em

$$y^2-4xy+5x^2=0;$$

depois dá $z=3\pm 2\sqrt{2}$, $\tan 2\theta=-1$, $2\theta=135°$;

e finalmente $$(3+2\sqrt{2})y'^2+(3-2\sqrt{2})x'^2=0.$$

2.º Se $Q>0$: a proposta é absurda, e por isso não representa cousa alguma. Como acontece no exemplo do caso precedente pondo, em logar do ultimo termo 1, um numero >1.

3.º Se $Q<0$: a transformada C tem a fórma $qy'^2+px'^2=Q$.

Para ter as intersecções da curva com os eixos, faremos successivamente $y'=0$, $x'=0$; o que dará $a=\sqrt{\frac{Q}{p}}$, $b=\sqrt{\frac{Q}{q}}$;

por conseguinte $$p=\frac{Q}{a^2},\ q=\frac{Q}{b^2},$$

e $$a^2y'^2+b^2x'^2=a^2b^2,$$

equação da ellipse, cujos eixos são $2a$ e $2b$, referida ao centro.

Por exemplo, se na proposta do caso 1.º mudarmos o ultimo termo $+1$ em -1, teremos ainda o mesmo centro $(-1, -2)$, e acharemos a transformada $y^2-4xy+5x^2=2$; depois os mesmos valores de z e θ;

e finalmente a equação $$(3+2\sqrt{2})y'^2+(3-2\sqrt{2})x'^2=2,$$

pertencente a uma ellipse, cujos eixos são $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3\mp 2\sqrt{2}}}=\sqrt{8(3\pm 2\sqrt{2})}$.

Assim: as equações

$$2y^2 + 3x^2 - 3x - 2y + 20 = 0,\ 4y^2 + 2x^2 - 3x + 2 = 0,$$

não representam linha alguma. A primeira dá o centro $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, e a transformada $2y'^2 + 3x'^2 + \frac{3}{4} = 0$; a segunda dá o centro $(\frac{3}{4}, 0)$ e a transformada $4y'^2 + 2x'^2 + \frac{7}{8} = 0$.

A equação $$y^2 + 2x^2 - 2y + 4x + 3 = 0$$

pertence ao ponto $(+1, -1)$.

A equação $$\frac{3}{2}y^2 + 3x^2 - 12x + 3 = 0$$

dá o centro $(2, 0)$; e depois a transformada $\frac{3}{2}y'^2 + 3x'^2 = 9$, pertencente a uma ellipse, cujos eixos são $2a = 2\sqrt{3}$ e $2b = 2\sqrt{6}$. Tomaremos pois (fig. 73) $AC = 2$, e depois $CE = \sqrt{3}$, $CO = \sqrt{6}$; e com estes semi-eixos descreveremos a ellipse DFEO.

A equação $$y^2 + 2x^2 - 2y = 0$$

pertence a uma ellipse, tangente ao eixo dos x, cujo centro é o ponto $(1, 0)$ do eixo dos y, e cujos eixos são $2a = 2$ e $2b = 2\sqrt{2}$.

115. Por tanto a equação do segundo grau pertence á ellipse, quando m é negativo; mas ha dous casos particulares, um dos quaes dá *um ponto*, e outro não dá cousa alguma. Os valores de z têm o mesmo signal; e devem tornar-se eguaes no caso do circulo.

3.º Caso. $B^2 - 4AC = m$ positivo.

116. Todos os calculos do n.º 113 têm aqui applicação; de sorte que se faz a mesma transformação, e se obtem as mesmas expressões de θ e z. Mas, por ser m positivo, é $\sqrt{B^2 + (A - C)^2} > A + C$, e os dous valores, p e q, de z têm signaes contrarios. Fazendo pois que tenha sempre q o signal $+$ (*), a equação (g) é da fórma

$$qy'^2 - px'^2 + Q = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (l);$$

e temos que examinar os casos de ser Q nullo, positivo, e negativo.

1.° Se $Q=0$; a proposta dá $y' = \pm x'\sqrt{\frac{p}{q}}$; equação de duas rectas CD, CE (fig. 70) que se cortam na nova origem C, e cujo angulo DCE é dividido ao meio pelo eixo Cx'.

Por exemplo, a equação $\quad y^2 - 6xy + x^2 + 2y - 6x + 1 = 0$

dá o centro $(0, -1)$, e a transformada $\quad y^2 - 6xy + x^2 = 0$;

depois $\quad z^2 - 2z = 8,\ z = 1 \pm 3,$

e por conseguinte $\quad q = 1 + 3 = 4,\ p = 1 - 3 = -2,\ \theta = 45°$;

e finalmente a nova transformada $y' = \pm x'\sqrt{\frac{1}{2}}$ (vej. fig. 70).

2.° Se $Q > 0$: fazendo successivamente $x' = 0$ e $y' = 0$,

acha-se $\quad y' = \sqrt{\frac{Q}{q}}.\sqrt{-1} = b\sqrt{-1},\ x' = \sqrt{\frac{Q}{p}} = a,$

e $\quad a^2y'^2 - b^2x'^2 = -a^2b^2,$

equação d'uma hyperbole, cujos primeiro e segundo eixos são $2a$ e $2b$.

Assim, substituindo no exemplo do caso precedente $+5$ em logar do ultimo termo $+1$, teremos ainda o mesmo centro, e os mesmos valores de z e θ; depois acharemos a transformada $y'^2 - \frac{1}{2}x'^2 = -1$; e finalmente os semi-eixos $a = \sqrt{2}$, $b = 1$.

(*) Facilmente se vê, como na nota da pag. 124, que deveremos, no caso de tomar n par em $\theta° + n.\ 90$, usar para q da raiz positiva ou da negativa, segundo for B negativo ou positivo: e o contrario quando se tomar n impar. Ou, o que é o mesmo, se tomarmos sempre por q a raiz positiva, usaremos de n par ou impar, segundo for B negativo ou positivo.

3.° Se Q é negativo: a equação (l) tem a fórma $qy'^2 - px'^2 = Q$; e um calculo similhante ao precedente, ou a simples mudança de x em y e y em x, mostra que a curva é uma hyperbole, cujos primeiro e segundo eixos são respectivamente $2b$ e $2a$.

Assim, mudando o ultimo termo $+1$ em -3, no mesmo exemplo, teremos o mesmo centro, e os mesmos z e θ; depois a transformada $y'^2 - \frac{1}{2}x'^2 = +1$; e finalmente o primeiro semi-eixo $b = 1$, e o segundo $a = \sqrt{2}$.

117. *Exemplos.* A equação $y^2 - 4x^2 + 4y + 12x - 5 = 0$ dá o centro $C(\frac{3}{2}, -2)$ (fig. 70); e a transformada $y' = \pm 2x'$, pertencente ás rectas CD e CE, que passam respectivamente pelos pontos (0, 0) e (+1, 2), e pelos pontos (0, 0) e (—1, 2).

A equação $2y^2 - 3x^2 - 2y - 3x + \frac{1}{2} = 0$ dá o centro $(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2})$, e a transformada $2y'^2 - 3x'^2 = -\frac{3}{4}$, pertencente a uma hyperbole. Tiraremos pois (fig. 74) $AB = BC = \frac{1}{2}$; e tomando sobre Cx' e Cy' os semi-eixos $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$, descreveremos com elles esta hyperbole.

A equação $y^2 - 2x^2 - 2y + 9 = 0$ dá o centro (0, 1); e depois $y'^2 - 2x'^2 + 8 = 0$, pertencente a uma hyperbole, cujos semi-eixos são $a = 2$, $b = 2\sqrt{2}$.

A equação $3y^2 - 2x^2 + 2x + 3y = \frac{1}{2}$ dá o centro (fig. 75) $C(+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$; e depois a transformada $3y'^2 - 2x'^2 = \frac{3}{4}$, pertencente a uma hyperbole cujos primeiro e segundo semi-eixos são $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$, e que só differe da hyperbole da fig. 74 no modo como está collocada.

118. Tiremos as rectas CD e CD′ (fig. 71), de modo que seja

$$\operatorname{tg} DCA = \operatorname{tg} D'CA = \sqrt{\frac{p}{q}}, \text{ e por isso } \operatorname{tg} DCA' = \operatorname{tg} D'CO' = \sqrt{\frac{q}{p}}.$$

1.° Se Q é positivo: CD e CD′ são asymptotas de todas as hyperboles taes como MAN, LOI, que se podem obter suppondo a Q differentes valores desde zero até infinito. Mas á medida que for crescendo Q, os vertices A, O, se irão afastando, e a curva se abrirá cada vez mais; por crescerem os semi-eixos $AC = \sqrt{\frac{Q}{p}}$, e $AD = \sqrt{\frac{Q}{q}}$.

2.° Se $Q = 0$: a equação (l) pertence ás asymptotas.

3.° Em fim, se Q é negativo: a proposta pertence a todas as hyperboles M'A'N', L'O'I' que se podem descrever no outro angulo das mesmas asymptotas, suppondo a Q differentes valores desde zero até infinito negativo. Mas, á medida que for crescendo o valor absoluto de Q, os vertices A', O', se irão afastando, e a curva se abrirá cada vez mais; por crescerem os semi-eixos $CA'=\sqrt{\frac{-Q}{q}}$, e $A'D''=\sqrt{\frac{-Q}{p}}$.

119. Por tanto a equação geral do segundo grau pertence á hyperbole, quando m é positivo; com excepção d'um caso, em que dá duas rectas que se cortam.

As raizes de (i) têm signaes differentes; e quando os seus valores absolutos são eguaes, o que suppõe $A=-C$, a hyperbole é equilatera.

Quando A e C têm signaes differeutes, m é sempre positivo, e a proposta pertence a uma hyperbole, quaesquer que sejam os valores de A, B, C,... O mesmo tem logar se na proposta falta um dos quadrados x^2, y^2, ou ambos.

Nestes diversos casos o processo do calculo é sempre o mesmo; mas como no ultimo se torna muito simples, expol-o-hemos aqui.

Seja a equação $$Bxy+Dy+Ex+F=0.$$

Transportando a origem ao centro, e fazendo $Q=DE-BF$,

teremos $$k=-\frac{E}{B},\ h=-\frac{D}{B},\ x'y'=\frac{Q}{B^2}.$$

Assim a proposta é a equação d'uma hyperbole referida a eixos parallelos ás asymptotas. Esta hyperbole será MAN, LOI (fig. 71) comprehendida nos angulos DCD', ECE', se Q for positivo; será M'A'N', L'O'I', comprehendida nos angulos ECD, E'CD', se Q for negativo; e reduzir-se-ha ás asymptotas DCE', D'CE, se Q for nullo. Quando os eixos são rectangulares, a hyperbole é equilatera (n.º 89).

Seja, por exemplo, a equação $xy-2x+y+m=4$ referida aos eixos Ax, Ay (fig. 72). Tirando pelo centro $C(-1,2)$ as rectas Cx' e Cy' parallelas a Ax e Ay: serão Cx', Cy', as asymptotas, e $x'y'=2-m$ a equação da hyperbole reportada a ellas. Esta hyperbole será (MN, OP), se $m<2$; (M'N', O'P'), se $m>2$; e reduzir-se-ha ás asymptotas (Cx', Cy'), se $m=2$.

120. Nos casos de $m < 0$ e $m > 0$, quando a proposta não tem o termo xy, o calculo necessario para a discussão é muito simples, e reduz-se a transportar a origem ao centro. Nem é preciso transformar as coordenadas em rectangulares, quando forem obliquas; porque nesse caso virá a equação referida aos diametros conjugados, em logar de o ser aos eixos.

Seja a proposta $$Ay^2 + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0.$$

As coordenadas do centro são $$h = -\frac{E}{2C},\ k = -\frac{D}{2A};$$

e transportando a elle a origem, resulta $$Ay'^2 + Cx'^2 + Q = 0:$$

sendo $Q = Ak^2 + Ch^2 + Dk + Eh + F = \frac{1}{2}(Dk + Eh) + F = F - \dfrac{AE^2 + CD^2}{4AC}$.

EXEMPLOS:

A equação $y^2 + 2x^2 - 2y + 4x + 3 = 0$ pertence ao ponto $(-1, +1)$.

As equações $2y^2 + 3x^2 - 3x - 2y + 2 = 0$, e $4y^2 + 2x^2 - 3x + 2 = 0$ não representam linha alguma. Procurando o centro na primeira, acha-se $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, o que a transforma em $2y'^2 + 3x'^2 + \frac{3}{4} = 0$; e procurando-o na segunda, acha-se $(\frac{3}{4}, 0)$, e a transformada $4y'^2 + 2x'^2 + \frac{7}{8} = 0$.

$\frac{3}{2}y^2 + 3x^2 - 12x + 3 = 0$ dá $h = 2$, $k = 0$; e a transformada $\frac{3}{2}y'^2 + 3x'^2 = 9$, a qual pertence a uma ellipse, cujos semi-eixos são $a = \sqrt{3}$, $b = \sqrt{6}$. Para a construir, tomaremos $AC = 2$ (fig. 73); depois $DC = \sqrt{3}$, $CO = \sqrt{6}$; e sobre estas linhas descreveremos a ellipse DFEO. Se as coordenadas fossem obliquas, as linhas DC, CO, representariam semi-diametros conjugados.

$y^2 - 4x^2 + 4y + 12x - 5 = 0$, transportada a origem de A a C (fig. 70) por meio dos valores $AB = \frac{3}{2}$ e $BC = -2$, torna-se em $y' = \pm 2x'$, pertencente a duas rectas, para construir as quaes bastará tomar $y' = 2$, $x' = \pm 1$, e tirar CD e CE.

$2y^2 - 3x^2 - 2y - 3x + \frac{1}{2} = 0$ tem o centro $(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2})$, e dá a transformada $2y'^2 - 3x'^2 = -\frac{3}{4}$. Para construir esta equação, que pertence a uma hyperbole, tomaremos $AB = -\frac{1}{2}$, $BC = \frac{1}{2}$ (fig. 74), e descreveremos, com os semi-eixos $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$, a hyperbole pedida. No caso das coordenadas obliquangulas, a e b serão semi-diametros conjugados.

$y^2-2x^2-2y+9=0$ dá $k=1$, $h=0$; e depois $y'^2-2x'^2+8=0$, a qual pertence a uma hyperbole, cujos semi-eixos, ou semi-diametros conjugados, são $a=2$, $b=2\sqrt{2}$.

$3y^2-2x^2+2x+3y=\frac{1}{2}$ dá $\mathrm{AB}=h=\frac{1}{2}$ (fig. 75), $\mathrm{BC}=k=-\frac{1}{2}$; e depois a transformada $3y'^2-2x'^2=\frac{3}{4}$, a qual pertence á hyperbole, cujos semi-eixos são $b=\frac{1}{2}$, $a=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$, e só differe da curva da fig. 74 no modo como está collocada.

$y^2+2x^2-2y=0$ pertence a uma ellipse, tangente ao eixo dos x, que tem o centro no ponto $(0,\ 1)$ do eixo dos y, e cujas dimensões são $a=\sqrt{\frac{1}{2}}$, $b=1$.

121. D'esta discussão resulta o quadro seguinte:

Proposta $\qquad Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0$:

1.° Caso. $\qquad B^2-4AC=0$:

transformada $\qquad ay'^2+dy'+ex'+F=0$,

$$\left\{\begin{array}{l} e < \text{ou} > 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \text{Parabola} \\ e=0,\ e^2d^2-4aF \left\{\begin{array}{l} >0 \ldots\ldots\ldots \text{Duas parallelas a } x' \\ =0 \ldots\ldots\ldots \text{Uma parallela a } x' \\ <0 \ldots\ldots\ldots \text{Nada.} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

2.° Caso. $\qquad B^2-4AC<0$;

transformada $\qquad qy'^2+px'^2+Q=0$,

$$Q\left\{\begin{array}{l} =0 \ldots\ldots\ldots\ldots \text{Ponto} \\ >0 \ldots\ldots\ldots\ldots \text{Nada} \\ <0 \ldots\ldots\ldots\ldots \text{Ellipse} \end{array}\right.$$

3.° Caso. $\qquad B^2-4AC>0$:

transformada $\qquad qy'^2-px'^2+Q=0$,

$$Q\left\{\begin{array}{l} =0 \ldots\ldots\ldots\ldots \text{Duas rectas que se cortam} \\ >0 \ldots\ldots\ldots\ldots \text{Hyperbole} \\ <0 \ldots\ldots\ldots\ldots \text{Hyperbole} \end{array}\right.$$

Comparando este quadro como o da pag. 71, vê-se que: *a equação do 2.º grau representa um secção conica; exceptuando os casos em que pertence a duas parallelas, ou a nada.*

Examinando nestes dous quadros a relação que ha entre os caracteres que determinam a ellipse, a hyperbole, e a parabola, e aquelles que determinam o ponto, duas rectas que se cortam, e uma recta: vê-se, que se pode considerar a recta como uma especie de parabola, cujo parametro é nullo; o ponto como uma especie de ellipse, cujos eixos são nullos; e duas rectas, que se cortam, como uma especie de hyperbole, cujos eixos são nullos: e que tambem o ponto, a recta, e as duas rectas que se cortam, podem considerar-se como secções feitas pelo vertice do cone parallelamente ás que, não sendo feitas pelo vertiee, dão respectivamente a ellipse, a parabola, e a hyperbole.

122. Para ter grandeza e a direcção dos eixos principaes, isto é, dos diametros qne dividem ao meio as cordas que lhes são perpendiculares, podemos usar do processo seguinte.

Supponhamos a equação já referida a eixos rectangulares, e ao centro,

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Q = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

A tangente á curva, no ponto onde a corta um eixo principal, deve ser perpendicular a este eixo; e se um circulo, descripto do centro A, tocar a curva no mesmo ponto, a tangente será tambem commum a elle, e perpendicular ao seu raio. Logo a questão reduz-se a achar um circulo, que toque a curva nos pontos onde a corta o eixo principal.

Concebamos pois que do centro A, com um raio r, se descreve um circulo (fig. 77,): a sua equação será $x^2 + y^2 = r^2$. Para achar os pontos de secção d'este circulo com a curva (que em geral são quatro), imaginemos tirada pela origem A para um d'elles a recta AK, cuja equação terá a fórma $y = Mx$: se entre esta equação, a do circulo, e a proposta (1), eliminarmos x e y,

resultará $$(Ar^2 + Q)M^2 + Br^2M + Cr^2 + Q = 0 \ldots\ldots\ldots (2),$$

cujas raizes $$M = \frac{-Br^2 \pm \sqrt{B^2r^4 - 4(Ar^2+Q)(Cr^2+Q)}}{2(Ar^2+Q)},$$

dando as tangentes da inclinação das rectas AK sobre o eixo dos x, farão conhecer as intersecções procuradas. E porque M tem dous valores, os quatro pontos de secção estão dous e dous sobre a mesma recta, isto é, são as extremidades de dous diametros da curva.

Quando as raizes são reaes e deseguaes, os pontos de intersecção são distinctos, e o circulo corta a curva.

Quando as raizes são imaginarias, o circulo não corta a curva. O que depende de ser r muito grande ou muito pequeno.

Quando as raizes são reaes e eguaes, os pontos de secção coincidem dous a dous, e o circulo é tangente á curva. Como este é o caso em que a recta é o eixo principal, devemos procurar os valores de r que lhe correspondem.

Para que as raizes sejam eguaes, devem ser

$$B^2r^4 - 4(Ar^2 + Q)(Cr^2 + Q) = 0,\ M = -\frac{Br^2}{2(Ar^2 + Q)} \dots (3),$$

que, fazendo $A - C = A\alpha$, dão $r^2 = -\dfrac{2QM}{2AM + B},\ M^2 - 2\alpha M = 1,$

e por conseguinte $\qquad M = \alpha \pm \sqrt{1 + \alpha^2}.$

Para construir esta expressão, tome-se sobre o eixo Ax a parte $AD = 1$; depois levante-se em D a ordenada $DI = \alpha$; e finalmente do centro I, com o raio AI, descreva-se o circulo KAK′. As intersecções K, K′, d'este circulo com DI produzida darão as rectas AK, AK′, que serão as direcções dos eixos principaes, por serem os valores de M

$$\operatorname{tang} KAD = \frac{DI + AI}{AD} = \alpha + \sqrt{1 + \alpha^2},$$

$$\operatorname{tang} CAD = -\operatorname{tang} K'AD = \frac{DI - AI}{AD} = \alpha - \sqrt{1 + \alpha^2}.$$

Esta construcção dá as rectas AK, AK′ rectangulares; e assim deve acontecer, por ser -1 o producto dos dous valores de M.

Os valores de M substituidos na expressão de r^2 fazem conhecer os do raio r, que são os dos semi-eixos. A substituição dá (*)

$$r^2 = \frac{2Q\left(A + C \pm \sqrt{B^2 - 4AC + (A+C)^2}\right)}{B^2 - 4AC} \ldots\ldots\ldots (4).$$

Quando $B^2 - 4AC = m$ é negativo, o radical de (4) é $< A + C$: por conseguinte os dous valores de r^2 são ambos positivos; ou ambos negativos; ou ambos nullos, se $Q = 0$. No primeiro caso a proposta representa *uma ellipse;* no segundo *nada;* e no terceiro *um ponto* (n.° 121).

Quando $B^2 - 4AC = m$ é positivo, o radical é $> A + C$: por conseguinte os dous valores de r^2 são um positivo, outro negativo; ou ambos nullos, se $Q = 0$. No primeiro caso a proposta representa *uma hyperbole,*

(*) Como pode haver alguma difficuldade em fazer o calculo indicado, damos aqui o seu desinvolvimento.

Se em
$$r^2 = -\frac{2QM}{2AM + B} = -\frac{2Q}{2A + \frac{B^2}{MB}}$$

substituirmos
$$M = \alpha \pm \sqrt{1 + \alpha^2} = \frac{1}{B}\left(A - C \pm \sqrt{B^2 + (A - C)^2}\right),$$

teremos

$$r^2 = -\frac{2Q}{2A + \frac{B^2}{A - C \pm \sqrt{B^2 + (A-C)^2}}} = -\frac{2Q}{2A + \frac{B^2\left[A - C \mp \sqrt{B^2 + (A-C)^2}\right]}{(A-C)^2 - B^2 - (A-C)^2}}$$

$$= -\frac{2Q}{A + C \pm \sqrt{B^2 + (A-C)^2}} = -\frac{2Q\left[A + C \mp \sqrt{B^2 + (A-C)^2}\right]}{(A+C)^2 - B^2 - (A-C)^2},$$

isto é,
$$r^2 = \frac{2Q\left(A + C \mp \sqrt{B^2 - 4AC + (A+C)^2}\right)}{B^2 - 4AC}.$$

Achar-se-ia mais facilmente o mesmo resultado, resolvendo a equação

$$B^2 r^4 - 4(Ar^2 + Q)(Cr^2 + Q) = (B^2 - 4AC)r^4 - 4Q(A + C)r^2 - 4Q^2 = 0.$$

cujos semi-eixos são os dous valores de r (mudando em $+$ o signal $-$ do valor negativo de r^2); no segundo duas rectas AK, AK′ (n.° 121).

Por exemplo, na equação $y^2 - 2xy + 2x^2 = 2$, é $\alpha = \frac{1}{2}$;

e acha-se $$M = \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{5}{4}},\ AI = \sqrt{\tfrac{5}{4}};$$

o que dá o circulo KAK′, e as direcções AK, AK′, dos dous eixos. Depois $r^2 = 3 \pm \sqrt{5}$ dá os dous valores de r, ou a grandeza d'estes eixos.

Pode tambem servir para exercicio a equação já tractada no n.° 116

$$y^2 - 6xy + x^2 + 2y - 6x + 1 = 0.$$

O mesmo methodo se applica no caso de fazerem coordenadas qualquer angulo. Eliminando x e y entre a equação proposta, a da recta $y = Mx$,

e a do circulo, que é então $$x^2 + y^2 + 2xy\cos\gamma = r^2,$$

resulta $$(Ar^2 + Q)\,M^2 + (Br^2 + 2Q\cos\gamma)\,M + Cr^2 + Q = 0,$$

$$M = \frac{-(Br^2 + 2Q\cos\gamma) \pm \sqrt{(Br^2 + 2Q\cos\gamma)^2 - 4(Ar^2 + Q)(Cr^2 + Q)}}{2(Ar^2 + Q)}.$$

A condição de egualdade das raizes dá o radical nullo, ou

$$(B^2 - 4AC)r^4 - 4Qr^2(A + C - B\cos\gamma) - 4Q^2 \operatorname{sen}^2\gamma = 0 \ldots (5);$$

e fica $$M = -\frac{Br^2 + 2Q\cos\gamma}{2(Ar^2 + Q)},$$

da qual tirando a expressão de r^2, e substituindo-a em (5), resultará uma equação em M, que dará os valores de M; e com estes valores construir-se-ha a equação $y = Mx$.

Outro modo de discussão

123. Para melhor conhecer a natureza, a fórma e os limites, das linhas comprehendidas na equação (a), resolvamos esta equação em ordem a uma das variaveis, por exemplo em ordem a y.

Teremos $$y=\alpha x+\beta\pm\frac{1}{2A}\sqrt{mx^2+nx+p}\ldots\ldots\ldots\ldots(1),$$

sendo $$\left\{\begin{array}{l}\alpha=-\dfrac{B}{2A},\ \beta=-\dfrac{D}{2A},\ m=B^2-4AC,\\ n=2(BD-A2E),\ p=D^2-4AF.\end{array}\right.$$

Em quanto o radical de (1) for real, a cada valor de x corresponderão dous pontos da curva; quando o radical for imaginario, não existirão estes dous pontos; e quando o radical for nullo, os dous pontos coincidirão. Assim os limites da curva dependem da extensão, fóra da qual o radical se torna imaginario. Ora já vimos (*Alg. El.* n.° 147, 9.°) que se pode tomar x tão grande, positiva ou negativamente, $x=-v$ ou $x=+v'$, que o signal do trinomio mx^2+nx+p seja o do seu primeiro termo (*) mx^2. Logo:

1.° Se m for negativo, o radical será imaginario para todos os valores de x desde $x=-\infty$ até $x=-v$, e desde $x=v'$ até $x=\infty$; o que

---

(*) Sem resolver a equação $x^2+px+q=0$, vê-se que:

1.° Se for p negativo, e o seu valor absoluto maior que o de q; ou p negativo e q positivo: fazendo $x=p+i$, teremos $$x^2-px\pm q=i^2+ip\pm q,$$ que, para $i=1$ e $i>1$, é positivo.

2.° Se for q negativo, e o seu valor absoluto maior que o de p; ou q negativo, e p positivo: fazendo $x=q+i$, teremos

$$x^2\pm px-q=q(q\pm p+i-1)+i(q\pm p)+i^2,$$

que, para $i=1$ e $i>1$, é positivo.

Logo: se tomarmos por x o valor absoluto do maior coefficiente negativo, mais dá dous limites, um para o lado dos x negativos, e outro para o lado dos x positivos, fóra dos quaes não pode haver curva.

2.° Se m é positivo, o radical será real desde $x=-\infty$ até $x=-v$, e desde $x=v'$ até $x=\infty$; o que dá dous limites, fóra dos quaes a curva se extende até o infinito.

3.° Se m for nullo, o radical se reduzirá a $\sqrt{nx+p}$, que, sendo n negativo, será real para $x<-\frac{p}{n}$, e imaginario para $x>-\frac{p}{n}$; e o contrario, sendo n positivo; de sorte que a curva será illimitada somente d'um dos lados, dos x positivos ou dos x negativos.

Por tanto a natureza das curvas, de que tractâmos, depende do signal de $m=B^2-4AC$; e na discussão, em que procurarmos conhecer a fórma d'ellas, e os mais estreitos limites que as terminam, temos de considerar os tres casos de $m <, >,$ ou $=0$.

124. Para ter o logar geometrico da equação (1), construiremos a recta BN (fig. 76 e 78), cuja equação é $\quad y=\alpha x+\beta \ldots\ldots\ldots (2)$;

e depois, para cada abscissa $AP=x'$, ajunctaremos e tiraremos á ordenada PN da recta a grandeza $MN=M'N=\frac{1}{2A}\sqrt{mx^2+nx+p}$: o que dará as ordenadas PM e PM′, que determina a equação (1). Por onde se vê que o ponto N é o meio da corda MM′: e como se pode dizer o mesmo dos outros pontos da recta BN, segue-se que esta recta é um diametro da curva (n.° 93).

Acham-se as intersecções D, D′, da curva com o diametro, procurando

---

uma unidade, será este numero um limite, alem do qual o trinomio $m\left(x^2+\frac{n}{m}x+\frac{p}{m}\right)$ tem o signal de mx^2.

Mudando x em $-x$, acha-se do mesmo modo o limite, áquem do qual o trinomio tem o signal de mx^2. Este limite será o mesmo que o precedente, no caso de ser $\frac{p}{m}$ negativo e $>\frac{n}{m}$.

os pontos em que têm logar simultaneamente as equações (1) e (2);

o que dá $$mx^2 + nx + p = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Ora a equação (3) reduz o primeiro membro da proposta ao quadrado de $y - \alpha x - \beta$: logo as intersecções das ordenadas, correspondentes a cada raiz de (3), com a curva reunem-se duas a duas nos pontos D e D′; e por conseguinte as ordenadas ED, ED′, são tangentes á mesma curva.

Passemos agora á analyse da equação (1), considerando os tres casos, que resultam da natureza de m.

1.º Caso: m negativo.

Curvas limitadas em todos os sentidos

125. 1.º *Se forem reaes as raizes da equação* (3). Designando-as por a e b, e tomando $AE = a$, $AE' = b$ (fig. 76), teremos as ordenadas tangentes ED, E′D′. E como (*Alg. El.* n.º 147, 9.º) o trinomio $mx^2 + nx + p$ só tem o signal contrario ao de mx^2, quando x está entre a e b; de sorte que só entre estes limites é real a expressão (1): segue-se, que a curva fica comprehendida entre os limites EF, E′F′. Do mesmo modo, resolvendo (a) em ordem a x, achariamos os limites parallelos ás abscissas, entre os quaes a curva fica comprehendida. Esta curva é pois fechada, e por isso *uma ellipse*.

Como os pontos E, E′, são dados pelas raizes da equação (3), que têm a fórma $x = h \pm \sqrt{f}$; tomando $AK = h$, e $KE = KE' = \sqrt{f}$, serão AE, AE′, estas raizes. Por tanto C é o meio do diametro DD′, ou o centro da ellipse. E para achar o diametro conjugado com DD′ basta

substituir $x = h$ em $\frac{1}{2A}\sqrt{mx^2 + nx + p}$; o que dará

$$CO' = \frac{1}{2A}\sqrt{mh^2 + nh + p}.$$

Conhecendo assim dous diametros conjugados, será facil descrever a curva.

Por exemplo a equação $$3y^2-6xy+9x^2-2y-6x+\tfrac{7}{3}=0$$

dá $$y=x+\tfrac{1}{3}\pm\sqrt{-2x^2+\tfrac{8}{3}x-\tfrac{2}{3}}.$$

Tomando (fig. 76) $AB=\frac{1}{3}$, $AA'=-\frac{1}{3}$, teremos a recta $A'BD$, cuja equação é $y=x+\frac{1}{3}$. Depois a equação $-2x^2+\frac{8}{3}x-\frac{2}{3}=0$ dará $x=\frac{2}{3}\pm\frac{1}{3}$. e por conseguinte $AK=\frac{2}{3}$, $KE=KE'=\frac{1}{3}$, que farão conhecer os limites EF, $E'F'$, os pontos D, D', e o centro C. Finalmente fazendo $x=\frac{2}{3}$ no radical, teremos o semi-diametro $CO'=\sqrt{\frac{2}{9}}$. E com os diametros DD' e OO' facilmente se descreverá a ellipse (n.º 98).

A maxima e a minima ordenada (pag. 97) são $y=1\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$.

Similhantemente a equação $y^2-yx+\frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{2}=0$ dá a ellipse $DOD'O'$ (fig. 80), para a qual são $AK=2$, $EK=E'K=\sqrt{2}$, $CK=1$, $CO=\sqrt{\frac{1}{2}}$.

O valor $y=0$ dá $x^2-2x+1=(x-1)^2=0$: e por isso a curva é tangente a Ax no ponto I $(1, 0)$. A maxima e a minima ordenadas são 2 e 0.

Deve haver nas construcções todo o cuidado relativamente aos signaes. Assim para

$$4y^2+8xy+8x^2+12x+8y+1=0$$

temos $$y=-x-1\pm\sqrt{-x^2-x+\tfrac{3}{4}}.$$

Construiremos pois o diametro DD' (fig. 81), cuja equação é $y=-x-1$; e acharemos as raizes de $x^2+x-\frac{3}{4}=0$, que são $x=-\frac{1}{2}\pm 1$; depois tomaremos $AK=-\frac{1}{2}$, e $KE=KE'=1$, para ter os limites tangentes da ellipse, ED, e $E'D'$, e o centro C; e em fim acharemos o semi-diametro $CO=\sqrt{-(-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}+\frac{3}{4}}=1$.

2.º *Se forem eguaes as raizes da equação* (3). Teremos $b=a$; e a equação (1) será

$$y=\alpha x+\beta\pm\frac{1}{2A}(x-a)\sqrt{m};$$

valor que só pode ser real, quando for $x=a$. Logo neste caso temos um ponto $(a, \alpha a+\beta)$.

E com effeito neste caso a proposta reduz-se a

$$(y-\alpha x-\beta)^2-(x-a)^2\frac{m}{4A^2}=0,$$

que só poderá subsistir quando forem nullos os seus dous termos.

Por exemplo, a equação $y^2-xy+\frac{5}{4}x^2-2x+1=0$ dá o ponto $(1, \frac{1}{2})$. A equação $x^2+y^2=0$ dá a origem $(0, 0)$.

3.° *Se forem imaginarias as raizes da equação* (3). O signal do trinomio mx^2+nx+p será sempre o de mx^2 (*Alg. el.* n.° 147, 9.°); por conseguinte o radical de (1) será imaginario, e a proposta não representará cousa alguma.

E com effeito podemos escrever a proposta debaixo da fórma

$$4A^2(y-\alpha x-\beta)^2=(mx^2+nx+p);$$

que neste caso não pode subsistir, por ser negativo o segundo membro.

A equação $y^2-2xy+2x^2-2x+4=0$ está neste caso.

126. Para que a equação (a) seja a do circulo,

$$(x-x_{\prime})^2+(y-y_{\prime})^2=y^2+x^2-2y_{\prime}y-2x_{\prime}x+y_{\prime}^2+x_{\prime}^2=r^2,$$

é necessario que sejam $\frac{C}{A}=1$, e $B=0$, e que $x_{\prime}$ e $y_{\prime}$ satisfaçam ás condições

$$2y_{\prime}=-\frac{D}{A},\ 2x_{\prime}=-\frac{E}{A},\ y_{\prime}^2+x_{\prime}^2-r^2=\frac{F}{A};$$

de sorte que determinam o circulo as coordenadas do centro, e o raio,

$$y_{\prime}=-\frac{D}{2A},\ x_{\prime}=-\frac{E}{2A},\ r=\frac{\sqrt{E^2+D^2-4AF}}{2A}.$$

Por tanto, sendo rectangulares as coordenadas: *para que a equação do 2.° grau pertença ao circulo, é necessario que lhe falte o termo em* xy, *e que sejam eguaes os coefficientes de* x^2 *e* y^2.

Quando se derem estas condições, a equação pertencerá ao circulo: exceptuando os casos de ser $\sqrt{E^2+D^2-4AF}$ *nullo* ou *imaginario;* no primeiro dos quaes pertence a um ponto, e no segundo não ha curva.

Por exemplo, a equação $2y^2+2x^2-4y-4x+1=0$ pertence ao circulo cujo centro é (1, 1) e cujo raio é $\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Quando as coordenadas forem obliquas, discorrer-se-ha do mesmo modo, comparando a equação (a) com a (3) do n.° 37.

2.° Caso: *m* positivo

Curvas illimitadas em todos os sentidos

127. *Se as raizes da equação* (3) *são reaes e deseguaes.* Os seus valores $a=AE$, $b=AE'$ (fig. 78) dão as tangentes ED, E'D'. E como o trinomio mx^2+px+q só tem o signal de mx^2, quando x não está comprehendido entre a e b; segue-se que entre $x=AE$, e $x=AE'$, não ha curva, e que fóra d'estes limites a curva se extende ao infinito d'uma e outra parte de EF, E'F'. Do mesmo modo, resolvendo a equação (a) em ordem a x, se verá que a curva se extende ao infinito, para um e outro lado de duas rectas parallelas ao eixo dos x. Assim a curva é *uma hyperbole.*

Para ter o diametro conjugado de DD', podemos substituir, como no n.° 125, $x=h$ em $\frac{1}{2A}\sqrt{mx^2+nx+p}$; e tornar o resultado real.

Depois acham-se as asymptotas (n.° 104); mas daremos adiante um meio mais simples de conseguir o mesmo fim.

Por exemplo, da equação $$y^2-2xy-x^2-2y+8x-3=0$$

tira-se $$y=x+1\pm\sqrt{2x^2-6x+4}.$$

Construindo pois o diametro BN (fig. 78), cuja equação é $y=x+1$; resolvendo a equação $2x^2-6x+4=0$, que dá as raizes $x=\frac{3}{2}\pm\frac{1}{2}$;

tomando depois $AK = \frac{3}{2}$, $EK = E'K = \frac{1}{2}$, que determinam os limites EF, E'F', tangentes em D, D'; e achando $\sqrt{2\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 6 \cdot \frac{3}{2} + 4} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{-1}$: construiremos com os diametros conjugados DD' e $2\sqrt{\frac{1}{2}}$ a hyperbole (MM', QQ'), que se extende desde $x = -\infty$ até $x = 1$, e desde $x = 2$ até $x = \infty$. Tomando $D'F' = D'H = \sqrt{\frac{1}{2}}$, $DF = DG = \sqrt{\frac{1}{2}}$, forma-se o parallelogrammo inscripto FGHF', cujas diagonaes GF', FH, são as asymptotas.

2.° *Se as raizes da equação* (3) *são reaes e eguaes.* A equação (1) é

$$y = \alpha x + \beta \pm \frac{1}{2A}(x - a)\sqrt{m};$$

a qual pertence a duas rectas, que se cortam no ponto $(a, \alpha a + \beta)$ da recta $y = \alpha x + \beta$, e que passam respectivamente pelos pontos:

$$(a, \alpha a + \beta), \ \left(0, \beta - \frac{a}{2A}\sqrt{m}\right); \ (a, \alpha a + \beta), \ \left(0, \beta + \frac{a}{2A}\sqrt{m}\right).$$

Com effeito no caso, de que se tracta, a proposta tem a fórma

$$(y - \alpha x - \beta)^2 - \frac{m}{4A^2}(x - a)^2 = 0,$$

que se decompõe em dous factores lineares a respeito de x e y; e por isso cada um d'estes dous factores egualado a zero dá uma recta.

Por exemplo, a equação $\quad 4y^2 - 8xy + x^2 + 4y + 2x - 2 = 0$

dá $\quad y = x - \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3x^2 - 6x + 3} = x - \frac{1}{2} \pm (x - 1)\sqrt{\frac{3}{4}}.$

Temos pois duas rectas EN, E'N, que passam ambas pelo ponto $N\left(1, \frac{1}{2}\right)$ da recta BN (fig. 83), cuja equação é $y = x - \frac{1}{2}$; e uma das quaes é cortada pelo eixo dos y no ponto $E\left(0, -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$, e a outra no ponto $E'\left(0, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$.

3.° *Se as raizes da equação* (1) *são imaginarias.* A curva não corta o diametro BN (fig. 82): mas como o signal de mx^2+nx+p é então sempre o de mx^2, a todas as abscissas correspondem ordenadas (1) reaes. Por tanto a curva extende-se ao infinito, para uma e outra parte de BN, e é uma hyperbole disposta como se vê na figura.

Se fizessemos desapparecer o segundo termo de mx^2+nx+p, pondo $x=x'+h=x'-\frac{n}{2m}$, a equação (1) daria

$$y=ax+\beta\pm\frac{1}{2A}\sqrt{mx'^2+p-\frac{n^2}{4m}};$$

de sorte que a $+x'$ e a $-x'$ corresponderiam valores eguaes, $y-ax-\beta$ das ordenadas da curva, contadas dos pontos E e E′ de BN: por conseguinte o ponto C $(h,\ ah+\beta)$ é o centro; e a recta $CD=\frac{1}{2A}\sqrt{mh^2+nh+p}$ é um semi-diametro.

As raizes de $mx^2+nx+p=0$, que são da fórma $x=h\pm\sqrt{-f}$, sendo postas debaixo de fórma real, darão as abscissas $AO=h+\sqrt{f}$, e $AO'=h-\sqrt{f}$ das extremidades do diametro conjugado EE′.

As rectas FH, GI, tiradas por D e D′ parallelamente a BN, e as rectas FG, IH, tiradas por E e E′ parallelamente a DD′, determinam o parallelogrammo FGIH, cujas diagonaes FI, GH, são asymptotas.

Por exemplo, da equação $$y^2+2xy-2y-x=0$$

tira-se $$y=-x+1\pm\sqrt{x^2-x+1}.$$

A equação do diametro BN é $y=-x+1$; e como as raizes de $x^2-x+1=0$ são imaginarias, $x=\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-3}$, este diametro não corta a hyperbole (fig. 82): mas, porque x^2-x+1 é sempre positivo, y é sempre real; $AK=\frac{1}{2}$, e $KO=KO'=\frac{1}{2}\sqrt{3}$ dão o centro C, e o semi-diametro EE′; e $\sqrt{(\frac{1}{2})^2-\frac{1}{2}+1}=\frac{1}{2}\sqrt{3}$ é o semi-diametro CD′.

A equação $$y^2-2xy-3x^2\pm4k^2=0,$$

da qual se tira $$y=x\pm2\sqrt{x^2\mp k^2},$$

pode servir de exemplo aos tres casos, que temos considerado, segundo se usar do signal superior de k^2, ou do inferior, ou for $k=0$.

Construindo o diametro BN (fig. 84), cuja equação é $y=x$: se usarmos do signal inferior, as raizes de $x^2+k^2=0$, serão imaginarias; (0, 0) será o centro C; $CO=2k$ o 1.º semi-diametro, $CE=CE'=k$ o segundo; e as asymptotas serão HF, IG.

Quanto mais k diminuir, tanto mais a curva se approximará do centro, e das asymptotas, que não mudarão. E quando for $k=0$, a equação tornar-se-ha na d'estas rectas.

Em fim, se usarmos do signal superior, a hyperbole ficará no outro angulo, GCH e FCI, das asymptotas; e afastar-se-ha d'ellas ao passo que augmentar k.

128. Quando A é nullo, pode resolver-se a equação (a) em ordem a y, para que tenham logar os calculos dos n.os 123 e 124; o que é o mesmo que mudar as denominações dos eixos, y em x e x em y.

Por exemplo, da equação $$x^2-2xy+2x-3y+c=0$$

tira-se $$x=y-1\pm\sqrt{y^2+y-c+1}.$$

A recta DD′ (fig. 85), que tem por equação $x=y-1$, é um diametro, porque divide ao meio as cordas parallelas aos x.

Depois $$y^2+y-c+1=0 \text{ dá } y=-\tfrac{1}{2}\pm\sqrt{c-\tfrac{3}{4}}.$$

No caso de $c>\frac{3}{4}$, estas raizes serão reaes; $AK=\frac{1}{2}$, $KE=KE'=\sqrt{c-\frac{3}{4}}$, determinarão os pontos D, D′, onde a hyperbole (MD, M′D′) corta o diametro DD′; e $\sqrt{(-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{2}-c+1}=\sqrt{c-\frac{3}{4}}\cdot\sqrt{-1}$ dará o diametro conjugado, $2\sqrt{c-\frac{3}{4}}$, de DD′: e os diametros determinarão as asymptotas F′G, FH, uma das quaes é parallela aos y. No caso de $c=\frac{3}{4}$, a equação será a das asymptotas. Finalmente, no caso de $c<\frac{3}{4}$, a equação pertencerá a uma hyperbole que tem as mesmas asymptotas, mas comprehendida nos outros dous angulos FCF′, GCH.

129. Dando ao radical da expressão (1) a fórma

$$\sqrt{m\left(x^2+\frac{nx}{m}+\frac{p}{m}\right)}=\sqrt{m\left[\left(x+\frac{n}{2m}\right)^2-\left(\frac{n^2}{4m^2}-\frac{p}{m}\right)\right]}=\sqrt{m}\sqrt{z^2-l};$$

transforma-se (1) em $$y=\alpha x+\beta\pm\sqrt{\frac{m}{4A^2}}\cdot z\left(1-\frac{l}{2z^2}+\frac{l^2}{8z^4}\cdots\right);$$

e porque os termos que estão dentro do parenthesis, excepto o primeiro, decrescem indefinidamente á medida que z cresce, a equação das asymptotas (n.º 81) é (*) $$y=\alpha x+\beta\pm\frac{z\sqrt{m}}{2A}=\alpha x+\beta\pm\frac{2mx+n}{4A\sqrt{m}}\ldots(3).$$

Logo: *para ter as equações das asymptotas, basta completar o quadrado debaixo do radical da equação* (1), *depois de ter desprezado nelle os termos constantes* (**).

(*) Se usarmos do processo exposto na nota do n.º 87, teremos

$$\frac{y}{x}=\alpha+\frac{\beta}{x}\pm\frac{1}{2A}\sqrt{m+\frac{n}{x}+\frac{p}{x^2}},$$ o que, fazendo $x=\infty$, dá $c=\alpha\pm\frac{\sqrt{m}}{2A}$,

e depois

$$y-cx=\beta\pm\frac{1}{2A}\left(\sqrt{mx^2+nx+p}-\sqrt{mx^2}\right)=\beta\pm\frac{1}{2A}\cdot\frac{nx+p}{\sqrt{mx^2+nx+p}+\sqrt{mx^2}},$$

ou $$y-cx=\beta\pm\frac{1}{2A}\cdot\frac{n+\frac{p}{x}}{\sqrt{m+\frac{n}{x}+\frac{p}{x^2}}+\sqrt{m}},$$

que, fazendo $x=\infty$, dá $d=\beta\pm\frac{n}{2A\,.\,2\sqrt{m}}$: logo as equações das asymptotas, não parallelas aos y, são

$$y=cx+d=\alpha x+\beta\pm\frac{x\sqrt{m}+\frac{n}{2\sqrt{m}}}{2A}=\alpha x+\beta\pm\frac{2mx+n}{4A\sqrt{m}}.$$

(**) Como é na parabola $m=0$, e na ellipse m negativo, vê se que, por ser infinita a expressão (3) na primeira, e imaginaria na segunda, estas curvas não têm asymptotas.

Para construir as asymptotas, dadas pela equação (3), basta determinar a sua intersecção $\left(-\frac{n}{2m}, \beta-\frac{\alpha n}{2m}\right)$; e os pontos onde ellas cortam o eixo dos y, $\left(0, \beta+\frac{n}{4A\sqrt{m}}\right)$, $\left(0, \beta-\frac{n}{4A\sqrt{m}}\right)$, os quaes distam da intersecção d'aquelle eixo com o diametro, um para baixo e outro para cima, a quantidade $\frac{n}{4A\sqrt{m}}$.

Por exemplo, na equação (pag. 142) $y=x+1\pm\sqrt{2x^2-6x+4}$, desprezando o termo constante 4 debaixo do radical, e completando o quadrado com a addição de $\frac{9}{2}$, fica debaixo d'elle $2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2$; e a equação das asymptotas (fig. 78) é $\quad Y=x+1\pm\left(x-\frac{3}{4}\right)\sqrt{2}.$

Assim $AK=\frac{3}{2}$, $KC=\frac{5}{2}$, $Bi=Bi'=3\sqrt{\frac{1}{2}}$, darão as asymptotas Ci, Ci'.

Desprezando k^2 na equação (pag. 144) $\quad y=x\pm 2\sqrt{x^2+k^2}$, vem logo as equações das asymptotas $\quad y=x\pm 2x$.

130. A discussão da equação geral torna-se muito facil, quando lhe falta um dos quadrados. Com effeito, resolvendo em ordem a y a equação

$$Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0,$$

vem
$$y=-\frac{Cx^2+Ex+F}{Bx+D}=hx+k+\frac{l}{Bx+D},$$

chamando h, k, l, os coefficientes constantes, que a divisão dá.

Quanto maior for x, tanto mais pequena será a fracção $\frac{l}{Bx+D}$, e caminhará para o limite 0; conseguintemente a recta $F'G$ (fig. 85), cuja equação é $y=hx+k$, é uma asymptota da curva.

Quanto mais x se approximar do limite $x = -\frac{D}{B}$, tanto mais y se approximará do limite ∞; por conseguinte a recta FC, parallela aos y, cuja equação é $x = -\frac{D}{B}$, é outra asymptota (*).

Quando faltar o quadrado de x, acharemos os mesmos resultados, mudando x em y e y em x.

Por tanto: *se na equação falta o quadrado d'alguma das coordenadas, uma das asymptotas é parallela a essa coordenada.* Este theorema tem logar, qualquer que seja o angulo das coordenadas.

Por exemplo, a equação $$x^2 - 2xy + 2x - 3y + 1 = 0,$$

resolvida em ordem a y, dá $$y = \frac{x^2 + 2x + 1}{2x + 3} = \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4} + \frac{\tfrac{1}{4}}{2x + 3}.$$

Construindo pois as rectas, cujas equações são $x = -\tfrac{3}{2}$, $y = \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}$, teremos as asymptotas IH, F'G (fig. 85), a primeira das quaes é parallela aos y. O resto da construcção é facil (n.º 91).

Do mesmo modo a equação $$2y^2 + 3xy - 8y - 3x + 1 = 0$$

dá $$x = -\frac{2y^2 - 8y + 1}{3y - 3} = -\tfrac{2}{3}y + 2 + \frac{5}{3y - 3};$$

(*) Se resolvessemos a proposta em ordem a x, achariamos

$$x = -\frac{By + E}{2C} \pm \sqrt{\frac{(By + E)^2}{4C^2} - \frac{Dy + F}{C}};$$

o que daria, pelo processo antecedente, as equações das asymptotas

$$x = -\frac{By + E}{2C} \pm \frac{B}{2C}\left(y + \frac{BE - 2CD}{B^2}\right);$$

isto é, $$x = -\frac{D}{B},\ y = -\frac{C}{B}x + \frac{DC - EB}{B^2} = hx + k.$$

e as rectas GH, FI (fig. 82), cujas equações são $y=1$, $x=-\frac{1}{2}y+2$, são as asymptotas, a primeira das quaes é parallela aos x.

131. No caso de faltarem ambos os quadrados, a equação

$$xy+Dy+Ex+F=0$$

dá
$$y=-\frac{Ex+F}{x+D}=-E+\frac{DE-F}{x+D};$$

por conseguinte as duas asymptotas são as rectas parallelas aos eixos, que têm por equações $y=-E$, $x=-D$.

Se se transportasse a origem ao centro, a hyperbole ficaria logo reportada ás asymptotas; porque a equação tomaria a fórma $xy=m^2$.

3.° Caso : $m=0$

Curvas illimitadas num sentido sómente

132. $Ay^2+Bxy+Cx^2$ é um quadrado. Quando é nullo A ou C, e não B, sempre tem logar este caracter.

1.° *Se* n *não é nullo*. Para construir a equação (1), cujo radical se reduz então a $\sqrt{nx+p}$, descrevamos o diametro BN (fig. 66), a que pertence a equação $y=\alpha x+\beta$. A ordenada tangente EF, e a intersecção D do diametro com a curva, correspondem á abscissa dada pela equação $nx+p=0$, $x=-\frac{p}{n}=a$; e a parte $\frac{1}{2A}\sqrt{nx+p}=\frac{1}{2A}\sqrt{n(x-a)}$, que se deve accrescentar ou tirar ás ordenadas de BN para dar as ordenadas (1) da curva, será real sómente para $x>a$, quando for n positivo; ou para $x<a$, quando for n negativo. Por tanto a concavidade da curva ficará voltada para os x positivos, como M'DM, quando for n positivo; e para os x negativos, como ODM', quando for n negativo. A curva, extendendo-se ao infinito d'um lado sómente, é uma *parabola*.

Com as coordenadas DN, MN, d'um ponto M da curva determinar-se-ha o parametro $2p' = \frac{MN^2}{DN}$, e descrever-se-ha depois facilmente a mesma curva (n.º 107).

Por exemplo, a equação $y^2 - xy + \frac{1}{4}x^2 - 2y - x + 5 = 0$

dá $$y = \tfrac{1}{2}x + 1 \pm \sqrt{2x - 4}.$$

Tomando pois (fig. 66) $AE = \frac{4}{2} = 2$, determina-se a ordenada limite $ED = 2$; depois tomando $AB = 1$, determina-se o diametro BN; e finalmente com o parametro $2p' = \frac{MN^2}{DN}$ descreve-se a parabola MDM′, com a concavidade voltada para os x positivos.

A equação $y^2 - xy + \frac{1}{4}x^2 - 2y + 3x - 3 = 0$

dá $$y = \tfrac{1}{2}x + 1 \pm \sqrt{-2x + 4};$$

por conseguinte o mesmo diametro, mas a concavidade da parabola M′DO voltada para os x negativos.

2.º *Se* n *é nullo*. A equação (1) torna-se em

$$y = \alpha x + \beta \pm \frac{1}{2A}\sqrt{p},$$

e então:

Se p é positivo: temos *duas rectas parallelas* DE, D′E′ (fig. 86), e equidistantes de BN, cuja equação é $y = \alpha x + \beta$. Por exemplo, a equação $(y + x)^2 - 2y - 2x - 1 = 0$ dá $y = -x + 1 \pm \sqrt{2}$: por conseguinte $AB = AN = 1$ determinam o diametro BN; e depois as partes $BD = BD' = \sqrt{2} = BN$, determinam os pontos D, D′, pelos quaes passam as rectas pedidas parallellas a BN.

Como qualquer ponto G da recta BN divide em duas partes eguaes todas as rectas, interceptas entre as duas parallelas, que por elle passam; pode considerar-se BN como o logar de uma infinidade de centros (n.º 99).

Se p é nullo: temos *uma recta* BN. O que tem logar, por exemplo, na equação $(y + x)^2 - 2y - 2x + 1 = 0$.

Se p é negativo: y é imaginario; e não *ha linha alguma*. Como acontece na equação $(y+x)^2-2y-2x+2=0$.

Com effeito, no caso de serem nullos m e n, pode dar-se á proposta a fórma $(y-\alpha x-\beta)^2-\frac{p}{4A^2}=0$; e esta: decompõe-se em dous factores lineares, e por conseguinte dá duas rectas, $y-\alpha x-\beta+\frac{1}{2A}\sqrt{p}=0$, $y-\alpha x-\beta-\frac{1}{2A}\sqrt{p}=0$, no caso de ser p positivo; dá duas rectas parallelas, que coincidem, $y-\alpha x-\beta=0$, no caso de ser p nullo; e exprime uma condição, a que não pode satisfazer-se, no caso de ser p negativo.

A equação $(y+x)^2-2y-2x+1=k$

pode ser exemplo para os tres casos, segundo o valor e o signal de k.

Com effeito esta equação dá $y=-x+1\pm\sqrt{k}$, que se construirá, tomando $AB=AN=1$, depois $BD=BD'=\sqrt{k}$; e tirando por D, D', parallelas a BN. Estas parallelas são distinctas, em quanto k é positivo, e tanto mais proximas quanto menor é k, coincidem, quando k é nullo; e não existem, nem a equação representa linha alguma, quando k é negativo.

133. Da analyse precedente dos casos de m negativo, positivo, ou nullo resulta que: no primeiro a equação pertence a uma curva fechada, e representa uma *ellipse, um circulo, um ponto*, ou *nada;* no segundo pertence a uma curva aberta em dous sentidos, e representa *uma hyperbole*, ou *duas rectas que se cortam;* no terceiro pertence a uma curva aberta num sentido, e representa *uma parabola, duas rectas parallelas, uma recta*, ou *nada*. O que é conforme com o quadro da pagina 131.

134. Reciprocamente: se quizermos formar uma equação que exprima alguma das circumstancias relativas á natureza e configuração da curva; determinaremos as constantes α, β, m, ... e a natureza do radical, de modo que sejam satisfeitas as respectivas condições. Assim, para que a curva seja uma ellipse, faremos m negativo, e n e p taes que as raizes de $mx^2+nx+p=0$ sejam reaes; para que seja uma hyperbole, tomaremos m positivo, e n e p taes que as raizes da mesma equação sejam imaginarias, ou reaes, segundo quizermos que a curva não corte, ou corte o diametro; etc.

Supponhamos, por exemplo, que na hyperbole pontuada da fig. 84: C é o centro; o diametro BN faz com os x um angulo de 45°; a abscissa da ordenada tangente e limite da curva é $CE = 1$; e o diametro conjugado CO é $\sqrt{2}$. Teremos, para satisfazer ás primeiras condições, $y = x \pm \sqrt{m(x^2 - 1)}$, contando as abscissas de C; e como devemos fazer $x = 0$ para achar o diametro, o que dá $x = \pm \sqrt{m} \cdot \sqrt{-1}$, será pela ultima condição $CO = \sqrt{m} = \sqrt{2}$.

Por tanto a equação é $\qquad y^2 - 2xy - x^2 = -2.$

Para formar uma equação que represente um ponto, uma ou duas rectas, ou nada, podemos proceder do mesmo modo; mas é mais simples o seguinte:

Sendo L e M expressões da fórma $L = ky + lx + g$, $M = k'y + l'x + g'$, temos:

1.º Para um ponto, $L^2 + M^2 = 0$ (pag. 140).

2.º Para uma recta, $L^2 = 0$ (pag. 150).

3.º Para duas rectas, $LM = 0$ (pag. 142); e demais $\frac{k}{l} = \frac{k'}{l'}$, se estas duas rectas são parallelas (pag. 149).

4.º Para que a equação não represente logar geometrico possivel, $L^2 + M^2 < 0$ (pag. 140).

135. Discutida a equação (1) na hypothese de serem as coordenadas rectangulares, proponhamo-nos construil-a reportando a curva a um systema de diametros, sem recorrer á theoria exposta no n.º 108.

Sem mudar a origem das coordenadas, nem o eixo dos y, tomemos o dos x' parallelo ao diametro cuja equação é $y = \alpha x + \beta$. Temos então:

$$\operatorname{tang}(xx') = \alpha, \quad \cos(xx') = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} = k, \quad \operatorname{sen}(xx') = k\alpha, \quad (xy') = 90°;$$

o que substituido nas formulas (2) do n.º 44 dá $x = kx'$, $y = \alpha kx + y'$,

e transforma (1) em $$y' = \beta \pm \frac{1}{2A}\sqrt{mk^2x'^2 + nkx' + p}.$$

1.º Se a curva tem centro: transportando a elle a origem das coordenadas, deve a equação tomar uma fórma tal que a dous quaesquer valores eguaes, e de signaes contrarios, da abscissa correspondam dous valores eguaes, e de signaes contrarios, da ordenada. Deve pois eliminar-se a parte β, e o termo em x', da expressão de y', fazendo $y'=y''+\beta$, $x'=x''-\frac{n}{2mk}$, que transformam a equação precedente em

$$y''=\pm\frac{1}{2A}\sqrt{mk^2x''^2-\frac{n^2}{4m}+p}.$$

As coordenadas x'', y'', são referidas ao centro que, relativamente aos eixos dos x' e y' é $\left(-\frac{n}{2km}, \beta\right)$, e relativamente aos eixos primitivos dos x e y é $\left(-\frac{n}{2m}, -\frac{\alpha n}{2m}+\beta\right)$.

Reduzida assim a equação aos diametros conjugados, é facil a sua construcção (n.° 98, 2.°).

Por exemplo a equação $$y=x+1\pm\sqrt{-2x^2+6x-4}$$

dá $m=-2$, $\alpha=1$, $k=\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\beta=1$, e a transformada $y''^2+x''^2=\frac{1}{2}$. E assim, traçado o diametro BN (fig. 76), cuja equação é $y=x+1$, e transportada a origem ao centro C, restará descrever a ellipse, cujos semi-diametros são $CO=CD=\sqrt{\frac{1}{2}}$.

2.° Se a curva não tem centro: é $m=0$, e o radical reduz-se a $\sqrt{nkx'+p}$. Transportaremos pois a origem ao ponto onde o diametro corta a curva, fazendo desapparecer os termos constantes β e p, isto é, fazendo $y'=y''+\beta$, $x'=x''-\frac{p}{nk}$; e teremos a equação da parabola $y''^2=nkx''$; sendo: eixo dos x'' o diametro que tinha por equação $y=\alpha x+\beta$; o eixo dos y'' parallelo ao dos y; e origem o ponto, onde a curva corta o diametro. Com o que facilmente se descreverá a curva (n.° 107, 1.°).

Por exemplo, a equação $$y=\frac{1}{2}x+1\pm\sqrt{2x-4}$$

dá $\alpha=\frac{1}{2}$, $k=\sqrt{\frac{4}{5}}$, $y''^2=4x''\sqrt{\frac{4}{5}}$; e dá a parabola MDM' (fig. 66), sendo BN o diametro que tem por equação $y=\frac{1}{2}x+1$.

V. PROBLEMAS DE ANALYSE GEOMETRICA

Da geração das curvas

336. I. *Se duas rectas* AM *e* BM (fig. 87) *gyrarem á roda dos pontos* A *e* B, *de modo que se cortem sempre perpendicularmente; achar a curva que neste movimento descreve a sua intersecção* M.

Tomemos o meio C de AB para origem das coordenadas, e seja $AC = CB = r$. Como as rectas generatrizes AM e BM devem passar por $A(-r, 0)$ e $B(+r, 0)$, e ser perpendiculares uma á outra, teremos as equações

$$y = a(x + r),\ y = a'(x - r) \ldots (1), \qquad aa' + 1 = 0 \ldots (2).$$

Quando dermos a a qualquer valor, e a a' o correspondente $a' = -\dfrac{1}{a}$, tirado de (2), as equações (1) serão as das generatrizes na posição relativa a esse valor; e os valores de x e y, dados pela eliminação entre as equações (1), determinarão o ponto em que as generatrizes se cortam nessa posição. Logo, se entre (1) e (2) eliminarmos a e a', a equação resultante em x e y, sendo independente da posição particular das generatrizes, pertencerá a todas as intersecções M, isto é, será a equação da curva.

Eliminando, pela substituição em (2) das expressões de a e a' tiradas de (1), vem

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Por tanto a curva, de que se tracta, é um circulo descripto sobre o diametro AB.

II. *Se, generalizando o problema antecedente, quizermos que as duas generatrizes* AM *e* BM (fig. 88) *façam um angulo, cuja tangente é* t: as equações respectivas serão

$$y = a(x + r),\ y = a'(x - r),\ \text{e}\ t = \frac{a' - a}{1 + aa'}.$$

A eliminação de a a a' entre ellas dá a equação da curva pedida

$$(x^2 + y^2 - r^2)\,t = 2ry;$$

cuja discussão mostrará que a curva é um circulo, com o centro em O $\left(0, \frac{r}{t}\right)$, e de raio $OB = \sqrt{r^2 + \frac{r^2}{t^2}}$.

Em geral sempre se pode considerar uma curva como gerada pela intersecção contínua de duas linhas dadas, rectas ou curvas, cuja posição e fórma dependem de constantes, ou *parametros*, que variam com ellas, segundo leis conhecidas, isto é, de modo que satisfaçam sempre a relações dadas entre as mesmas constantes.

Com effeito, se $M = 0$ e $N = 0$ forem as equações d'estas generatrizes; e se as variações da sua fórma, devidas á variação dos parametros, que suppomos serem dous, forem sujeitas á condição $P = 0$: é claro que a eliminação dos dous parametros entre as equações $M = 0$, $N = 0$, $P = 0$, dará uma resultante em x, y, a qual, sendo independente d'elles, será a equação da curva procurada.

Se os parametros forem tres, e duas as equações de condição $P = 0$, $Q = 0$; a eliminação d'elles entre $M = 0$, $N = 0$, $P = 0$, $Q = 0$, dará ainda a equação em x, y, da curva.

Em geral: se o numero total das equações das generatrizes e das de condição for egual ao dos parametros mais um, a eliminação d'estes dará a equação d'uma curva. Se o numero total das equações for egual ao dos parametros, ou menor: eliminando tantos d'estes quantas são as equações menos uma, ficará uma equação em x, y, que ainda conterá alguns parametros arbitrarios, e que por isso representará um numero indeterminado de linhas. Se o numero total das equações for egual ao dos parametros mais dous: eliminando estes, ficarão duas equações em x e y, que darão um numero determinado de pontos. Em fim, se o numero total das equações for maior que o dos parametros mais dous: eliminados estes, e x e y, ficarão equações de condição; e o problema será absurdo, se estas equações não se verificarem; ou, verificando-se ellas, não serão distinctas as propostas.

III. *Dadas duas rectas* DN *e* Dx (fig. 89), *e em uma d'ellas o ponto fixo* A: *achar a curva, que tem a propriedade de ser a distancia* MA, *de cada um dos seus pontos a* A, *egual á parte* PN *que as rectas dadas interceptam na perpendicular indefinida abaixada de* M *sobre* Dx.

É claro que os pontos M são as intersecções dos circulos, descriptos com os raios AM, com as perpendiculares PN; e que pelas condições do problema deve ser AM = PN = DP tang NDA. Chamando pois AM = α, AP = β, os parametros variaveis; AD = p, tang NDA = t, as constantes fixas; e tomando A para origem das coordenadas rectangulares, e APx, AEy, para eixos; teremos as equações das generatrizes, e a equação de condição,

$$x^2 + y^2 = \alpha^2,\ x = \beta \ldots\ldots (1), \qquad \alpha = (p+\beta)t \ldots\ldots (2).$$

E substituindo em (2) as expressões de α e β tiradas de (1), acharemos a equação da curva

$$y^2 + x^2(1-t^2) - 2t^2px - t^2p^2 = 0.$$

1.° Se $t = 1$, ou E'DA = 45°: a equação reduz-se a $y^2 = 2px + p^2$, pertencente á parabola E'S, cujo foco é a origem A, e cujo vertice é S $(-\frac{1}{2}p, 0)$.

2.° Se $t < 1$, ou NDA < 45.°; a equação pertence a uma ellipse, cujos semi-eixos são $a = \frac{pt}{1-t^2}$, $b = \frac{pt}{\sqrt{1-t^2}}$, e cujo centro é C $\left(\frac{pt^2}{1-t^2}, 0\right)$.

Esta ellipse torna-se em um circulo no caso de ser $t = 0$, isto é, de ser DN parallela a AD: e com effeito PN = AM = AF é então constante (*).

3.° Em fim se $t > 1$, ou IDA > 45.°; a curva é uma hyperbole, cujos primeiro e segundo semi-eixos são $\frac{pt}{t^2-1}$ e $\frac{pt}{\sqrt{t^2-1}}$.

Esta propriedade poderia fornecer um meio de descrever as tres cur-

(*) Neste caso t é nullo e p infinito; mas como AE = pt é agora AF, temos $t = 0$ e $a = b =$ AF, e C (0, 0) coincide com A.

vas. Ellas tocam a recta dada, que não contem o ponto fixo A, na sua intersecção com Ay.

IV. *Se uma recta* AB (fig. 90) *de comprimento dado se mover no angulo dado* ACB, *de modo que as extremidades* A *e* B *se conservem constantemente sobre as rectas* AC *e* CB: *achar a curva, que, neste movimento, descreverá um dos pontos* M *de* AB.

Tomando AC e BC para eixos coordenados, os dados do problema são $\cos ACB = c$, $MB = a$, $MA = b$. A curva pode considerar-se como gerada pelo movimento das rectas AB, PM, cujas equações são

$$y = \alpha x + \beta, \quad x = \gamma,$$

isto é, como o logar geometrico das intersecções $M(\gamma, \alpha\gamma + \beta)$ d'estas rectas.

Fazendo $PB = z$, o triangulo PMB e o parallelismo das rectas AC e PM dão

$$a^2 = z^2 + (\alpha\gamma + \beta)^2 - 2cz(\alpha\gamma + \beta), \quad bz = a\gamma \ (*).$$

Substituindo pois nas duas ultimas equações as expressões $\alpha\gamma + \beta = y$, $\gamma = x$, resultantes das primeiras, vem $\quad bz = ax, \ a^2 = z^2 + y^2 - 2cyz;$

(*) Ainda que pareça que temos quatro equações e quatro incognitas z, α, β, γ; com tudo z, que só foi introduzida por commodidade do calculo, fica determinada pelas outras α, β, γ. Com effeito, pondo $y = 0$ na equação de AB, resulta $CB = -\frac{\beta}{\alpha}$; e conseguintemente $z = CB - CP = -\frac{\beta}{\alpha} - \gamma$.

As equações que exprimiriam directamente as condições de serem MA e MB constantes, isto é, de serem constantes as distancias entre os pontos $A(0, \beta)$, e $B\left(-\frac{\beta}{\alpha}, 0\right)$, e o ponto $M(\gamma, \alpha\gamma + \beta)$, seriam (n.º 33):

$$b^2 = \gamma^2 + \alpha^2\gamma^2 - 2\alpha\gamma^2 c, \quad a^2 = \left(\gamma + \frac{\beta}{\alpha}\right)^2 + (\alpha\gamma + \beta)^2 - 2\left(\gamma + \frac{\beta}{\alpha}\right)(\alpha\gamma + \beta)\, c,$$

entre as quaes e as das generatrizes se deveriam eliminar α, β, γ.

e a eliminação de z entre estas dá a equação pedida

$$a^2b^2 = b^2y^2 + a^2x^2 - 2abcxy,$$

a qual pertence a uma ellipse, cujo centro é C (n.º 92).

Quando o angulo ACB é recto, simplifica-se muito o calculo. A equação reduz-se a $b^2y^2 + a^2x^2 = a^2b^2$, que pertence a uma ellipse referida ao centro e aos eixos $2a$, $2b$. O que indica um meio muito facil de descrever a ellipse,

Tiram-se duas rectas perpendiculares indefinidas Cx, Cy; marcam-se sobre uma regua duas partes $AM = b$, $BM = a$, eguaes aos semi-eixos; e move-se esta regua sobre o angulo yCx, de modo que os pontos A e B se conservem constantemente sobre Cx e Cy. Neste movimento a ponta d'um lapis, que se tiver fixado em M, descreverá a ellipse.

Se o ponto M estiver no prolongamento de AB, em M', a mesma analyse dará um resultado, que só diffirirá do precedente no signal do ultimo termo $-2abcxy$. Por isso, se forem então Cx e Cy rectangulares, AB será a differença, e não a somma, dos semi-eixos $BM' = a$, $AM' = b$; e a construcção precedente será a mesma.

V. *Abaixada do fóco* F' *d'uma ellipse* (fig. 56) *a perpendicular sobre cada tangente; achar a curva formada pelas intersecções* I *das tangentes e das suas perpendiculares.*

As equações da tangente em um ponto M (x', y'), e de qualquer recta que passa pelo fóco F' $(-\alpha, 0)$, são respectivamente

$$a^2yy' + b^2xx' = a^2b^2, \quad y = \beta(x + \alpha);$$

e como a condição de perpendicularidade dá $1 - \dfrac{b^2x'\beta}{a^2y'} = 0$, as equações das generatrizes são $\quad a^2yy' + b^2xx' = a^2b^2, \; b^2x'y = a^2y'(x + \alpha)$.

O ponto (x', y') deve sempre pertencer á ellipse; o que dá a equação de condição $\quad a^2y'^2 + b^2x'^2 = a^2b^2$.

Substituindo na terceira d'estas equações as expressões de x' e y' tiradas das duas primeiras, a pedida será

$$b^2y^2+a^2(x+\alpha)^2=[y^2+x(x+\alpha)]^2;$$

ou pondo (n.° 51) $a^2-\alpha^2$ em logar de b^2, desinvolvendo, e decompondo em factores,

$$(y^2+x^2-a^2)\,[y^2+(x+\alpha)^2]=0.$$

O segundo factor é evidentemente extranho ao problema; porque dá $y=0$, $x=-\alpha$, que são as coordenadas do fóco. O primeiro dá

$$y^2+x^2=a^2,$$

que é a equação d'um circulo circumscripto á ellipse dada: este é pois a curva procurada.

1.° Por não entrar b na equação, o circulo inscripto na hyperbole resolve o mesmo problema a respeito d'esta curva (n.° 65).

2.° Este circulo é o mesmo para todas as ellipses descriptas sobre o eixo maior; e quando $b=a$, confunde-se com o circulo então proposto.

3.° Por ser a equação independente de α, o circulo é o mesmo, quer se abaixem as perpendiculares do fóco F', quer do fóco F.

Para a parabola teremos de eliminar entre

$$yy'=p(x+x'),\ py=-y'(x-\tfrac{1}{2}p),\ y'^2=2px';$$

o que dá

$$x[4y^2+(2x-p)^2]=0.$$

O segundo factor não serve, porque dá as coordenadas $y=0$, $x=\frac{1}{2}p$, do fóco. O primeiro dá $x=0$; por conseguinte o eixo dos y é o logar dos pés i das perpendiculares abaixadas do fóco sobre as tangentes (fig. 52, e pag. 76).

VI. *Dada a parabola* NAK (fig. 91): *achar a curva formada pelos pontos* M, *onde se cortam as tangentes* MN, MK, *que fazem entre si um angulo dado.*

Seja $2p$ o parametro da parabola dada, e t a tangente do angulo dado. As equações das duas generatrizes tangentes nos pontos (x', y') e (x'', y'') são

$$yy'=p(x+x'),\ yy''=p(x+x'');$$

e as condições de ser t a tangente do angulo constante KMN das generatrizes, e de pertencerem os pontos (x', y') e (x'', y'') á parabola, dão

$$t = \frac{p(y''-y')}{y'yy''+p^2}, \; y'^2 = 2px', \; y''^2 = 2px''.$$

Para eliminar commodamente entre estas cinco equações os quatro parametros variaveis x', y', x'', y'', substituamos nas tres primeiras as expressões de x' e x'' tiradas das duas ultimas: ficam

$$y'^2 - 2yy' + 2px = 0, \; y''^2 - 2yy'' + 2px = 0, \; t = \frac{p(y''-y')}{y'y''+p^2};$$

e porque as duas primeiras d'estas são identicas, haverá nellas só duas raizes y', y'', e teremos

$$y'y'' = 2px, \; y' = y \pm \sqrt{y^2 - 2px}, \; y'' = y \mp \sqrt{y^2 - 2px},$$

que substituidos na ultima darão em fim a equação pedida

$$y^2 - t^2x^2 - px(2+t^2) - \tfrac{1}{4}t^2p^2 = 0.$$

Esta equação pertence a uma hyperbole: e como não entra nella t senão elevado ao quadrado, vê-se que um dos ramos é descripto pelo vertice M′ do angulo obtuso K′M′N, e o outro pelo vertice M do supplemento KMN. A determinação do centro C, e dos eixos, não tem difficuldade.

Se o angulo dado M fosse recto, isto é, se fosse $t = \infty$: teriamos $2x + p = 0$; por onde se vê que, se de cada ponto da directriz tirarmos duas tangentes á parabola, ellas farão sempre entre si um angulo recto.

VII. Algumas vezes o enunciado do problema não exprime o modo de geração da curva; mas dá immediatamente a equação que o resolve, ou a definição de que ella é consequencia. Para ver um exemplo d'esta circumstancia, que não merece que d'ella nos occupemos se não de passagem, resolvamos a questão seguinte:

Achar a curva da qual cada uma das ordenadas é meia proporcional entre as de duas rectas dadas, correspondentes á mesma abscissa.

Sejam $$y = ax + b, \; y = a'x + b',$$

as equações das rectas dadas. A da curva pedida será

$$y^2 = (ax + b)(a'x + b'), \quad \text{ou} \quad y^2 - aa'x^2 - (a'b + ab')x = bb'.$$

1.° Se uma das rectas, por exemplo a segunda, for parallela ao eixo dos x, será $a' = 0$, e a equação se reduzirá a $$y^2 = ab'x + bb',$$

pertencente a uma parabola, que facilmente se descreve. E se ambas as rectas forem parallelas ao mesmo eixo, serão $a = 0$, $a' = 0$; e por conseguinte $y^2 = bb'$, que dará duas rectas parallelas, ou uma recta, ou nada, segundo forem os dous factores b e b' do mesmo signal, ou um d'elles egual a zero, ou um positivo e outro negativo.

Se em logar das rectas dadas tomarmos parallelas a ellas, cujas ordenadas correspondentes sejam eguaes e oppostas ás das mesmas rectas, isto é, se tomarmos a, a', b, b', com signaes contrarios, a equação ficará a mesma mudando x em $-x$, de sorte que teremos uma curva egual, e em sentido opposto, á primeira.

2.° Se a e a' tiverem signaes contrarios, a equação pertencerá a uma ellipse; e particularmente a um circulo, quando for $aa' = -1$, isto é, quando as rectas dadas se cortarem perpendicularmente. A equação poderá tambem dar um ponto, ou nada.

3.° Em fim, se a e a' tiverem o mesmo signal, a equação dará uma hyperbole; e quando for $a = a'$, uma das asymptotas (n.° 87)

$$y = \pm\left(ax + \frac{b + b'}{2}\right)$$

será parallela ás rectas dadas. A equação tambem pode dar duas rectas que se cortam.

Nos dous ultimos casos, abstrahindo dos signaes das coordenadas, acha-se uma ellipse e uma hyperbole, descriptas sobre os mesmos eixos, como se vê na fig. 65.

Estes problemas podem variar-se muito. Acha-se grande numero d'elles no *Recueil de diverses propositions de Géométrie* de M. PUISSANT. Ajunctaremos ainda alguns.

VIII. Se fizermos gyrar dous angulos de 45°, BAC, BDC (fig. 92), em torno dos vertices fixos A e D, da maneira que a intersecção dos lados AB, DB, esteja constantemente sobre a recta BE parallela a AD: qual será a curva descripta pela intersecção C dos outros dous lados AC, DC?

Ainda se pode generalizar este problema, dando qualquer outra grandeza aos angulos moveis, e qualquer outra direcção á recta BE.

IX. Seja M um ponto (fig. 93) tal que as distancias AM e BM a dous pontos fixos A e B estejam entre si numa razão dada: qual será a curva, em cujos pontos se verifica sempre esta propriedade?

Qual será o ponto d'esta curva, no qual AM lhe é tangente?

Em fim, quaes serão os pontos M, cujas distancias a tres fixos A, B, D, têm entre si razões conhecidas?

X. Dado um circulo e uma recta, qual é o logar geometrico de todos os centros dos circulos tangentes a estas duas linhas? O mesmo problema tambem se pode propor a respeito de dous circulos dados.

XI. Se fizermos mover um angulo recto, de modo que os seus lados sejam sempre tangentes a uma ellipse ou a uma hyperbole dada, qual será a curva descripta pelo vertice? (fig. 91).

Em logar do angulo recto pode tomar-se qualquer outro, do mesmo modo que no problema VI.

XII. Se duas rectas AF, CD (fig. 37) gyrarem em torno dos vertices A e C do triangulo ABC, de modo que os pontos D e F, onde ellas cortam os lados AB e BC, sejam sempre equidistantes da base AC: qual será a curva descripta pela sua intersecção G? (vej. n.° 36, VIII).

Problemas que passam do segundo grau

133. Já vimos (n.° 15) o modo de construir as raizes das equações do segundo grau. O exemplo seguinte mostrará o que se deve fazer, quando a questão, que se pretende resolver, conduz a equações de graus superiores ao segundo.

Seja a equação $\quad x^4 - {}^2 pqx + p^2rx + p^2m^2 = 0.$

Se fizermos $x^2 = py$, teremos, em logar da proposta, as duas

$$x^2 = py, \; y^2 - qy + rx + m^2 = 0,$$

de cuja combinação ella resulta. Por tanto, se construirmos as duas parabolas, a que pertencem estas equações, os pontos, onde ellas se cortarem, terão por abscissas as raizes da proposta.

As raizes serão todas quatro reaes, quando as curvas se cortarem em quatro pontos; duas reaes e duas imaginarias, quando as curvas se cortarem em dous pontos; e todas imaginarias, quando as curvas não se cortarem. Se houvesse raizes eguaes, as curvas tocar-se-iam, etc.

Como a decomposição da proposta se pode fazer de muitos modos, convirá quasi sempre escolhel-a tal que uma das curvas seja o circulo; por ser esta a linha que mais facilmente se descreve.

Assim, fazendo $xy = mp$, a proposta será a resultante das duas

$$xy = pm,\ x^2 + y^2 + \frac{pry}{m} = pq.$$

Para a construir por meio d'ellas: tirados os eixos rectangulares Ax e Ay (fig. 94), descrever-se-ha a hyperbole entre as asymptotas, cuja equação é $xy = pm$; tomando $AC = \frac{pr}{2m}$, descrever-se-ha um circulo com o centro C, e com o raio $\sqrt{pq + \frac{p^2r^2}{4m^2}}$; e dos pontos M, M′, N, N′, onde este circulo cortar a hyperbole, abaixar-se-hão as ordenadas MP, M′P′, NQ, N′Q′. As raizes procuradas serão as abscissas correspondentes AP, AP′, AQ, AQ′, as quaes, na figura, são duas positivas e duas negativas. Poderia acontecer que só existissem duas intersecções, ou nenhuma.

Do mesmo modo, para $$x^4 - p^2x^2 + p^2qx + p^3r = 0,$$

faremos a decomposição nas duas $$x^2 = py,\ y^2 - py + qx + pr = 0,$$

ou $$x^2 = py,\ y^2 + x^2 - 2py + qx + pr = 0,$$

pertencentes a uma parabola, e a um circulo, que facilmente se descrevem.

Para $$x^3 \pm a^2x - a^2q = 0$$

convem multiplicar por x, e fazer $x^2=ay$, o que dá

$$x^2=ay,\ y^2\pm ay-qx=0:$$

isto é, $\quad x^2=ay$; e $y^2+x^2=qx$, ou $y^2+x^2=2ay+qx$,

conforme se usa do signal inferior, ou do superior, do segundo termo da proposta. A primeira d'estas tres equações pertence a uma parabola, e qualquer das outras a um circulo. As abscissas das intersecções das duas curvas serão as raizes; mas d'estas deverá excluir-se uma $x=0$, que se introduziu, quando se multiplicou a proposta por x.

Um calculo similhante feito em $x^3-3a^2x=2a^3$ dá

$$x^2=ay,\ y^2+x^2=4ay+2ax,$$

pertencentes a uma parabola MA (fig. 95), cujo parametro é a; e a um circulo CAM, cujos centro e raio são C $(a, 2a)$ e $AC=a\sqrt{5}$: a abscissa da intersecção M d'estas curvas é $x=AP$, unica raiz real da proposta.

Pela mesma construcção se pode achar $\sqrt[3]{a}$.

134. *Achar duas meias proporcionaes* x *e* y *entre duas rectas dadas* a *e* b.

Temos $\div a:x:y:b$; isto é, $\qquad x^2=ay,\ y^2=bx.$

Por conseguinte resolvem o problema as duas parabolas, que têm o mesmo vertice $(0,\ 0)$, os parametros a e b, e cujos eixos são o dos y e dos x.

Mas sommando as duas equações, torna-se a construcção mais simples, por se empregar, em logar das duas parabolas, uma só com o circulo

$$y^2+x^2-ay-bx=0.$$

Teremos assim as mesmas linhas da figura 95, sendo $BC=\frac{1}{2}a$, e $AB=\frac{1}{2}b$.

A eliminação de y dá $x^3=a^2b$; que para $b=2a$ se torna na $x^3=2a^3$, pela qual se resolve o famoso problema da *duplicação do cubo*.

E mais geralmente, para $b=\dfrac{m}{n}a$, fica $x^3=\dfrac{m}{n}a^3$ a qual ensina a formar um cubo x^3 que tenha para outro dado a^3 a razão $m:n$.

Em geral as construcções podem variar-se de muitos modos; por que multiplicando por quantidades indeterminadas, e sommando, as equações de duas curvas de cuja combinação resulta a equação proposta, podem obter-se muitas outras curvas proprias para a resolução do mesmo problema.

135. Mas pode acontecer que uma questão, que se propõe como determinada, o não seja na realidade (vej. n.º 36, II); ou tambem que se facilite a sua resolução, quando ella é determinada, fazendo-a depender d'outra questão que o não seja. A propria analyse indica estas modificações: como se vê nos exemplos seguintes.

I. *Dados dous pontos* A *e* B (fig. 96), *achar um terceiro ponto* M *tal que, tirando* AM *e* MB, *o angulo* MAB *seja metade de* MBA.

Chamando a, a' as tangentes dos angulos MAB, MBA, dos quaes o segundo deve ser o dobro do primeiro; fazendo $AB=m$; e tomando AB e a sua perpendicular em A para eixos dos x e dos y: as equações das rectas AM e MB, e a da condição do problema, são

$$y=ax,\ y=-a'(x-m),\ a'=\frac{2a}{1-a^2},$$

Eliminando a e a' entre estas equações, resolve o problema a equação

$$y^2-3x^2+2mx=0.$$

Vê-se pois que a questão é indeterminada, e que lhe satisfazem todos os pontos da hyperbole, a que pertence esta equação. Dividindo AB em tres partes eguaes nos pontos C e D, isto é, tomando $AC=CD=DB=\frac{1}{3}m$: C será o centro da curva; A e D serão os vertices; e as asymptotas CG e BH farão com AB angulos de 60°, isto é, angulos cuja tangente é $\sqrt{3}$: e com estes dados facilmente se descreverá a hyperbole MD.

O problema da *trisecção do angulo* consiste em dividir em tres partes eguaes um angulo AKB, ou o arco AEB que lhe serve de medida; isto é, em achar neste arco um ponto E tal que seja $EKA=2EKB$. Por conseguinte é claro que, fazendo sobre a corda AB a construcção precedente, e descrevendo a hyperbole MD, a intersecção E d'esta curva com o arco AEB resolve o problema, isto é, dá o arco $EB=\frac{1}{3}AEB$, ou o angulo $EKB=\frac{1}{3}AKB$.

Se não for o arco AB circular, mas elliptico, ou outro qualquer, este processo servirá egualmente para determinar um ponto E do arco dado de modo que os arcos AE e EB sejam vistos das extremidades B e A por angulos, um duplo do outro. E assim o problema da trisecção do angulo é um caso de precedente.

II. *Tirar uma recta* DD′ (fig. 97) *tal que a somma das perpendiculares* MD, M′D′, *abaixadas sobre ella de dous pontos dados* M, M′, *seja egual a uma grandeza dada* m.

Seja
$$y = ax + b$$

a equação da recta procurada. As distancias dos pontos $M(x', y')$ e $M'(x'', y'')$ a esta recta serão (n.º 34)

$$MD = \frac{ax' - y' + b}{\sqrt{1+a^2}}, \quad M'D' = \frac{ax'' - y'' + b}{\sqrt{1+a^2}};$$

e conseguintemente a condição do problema, $MD + M'D' = m$, dá

$$ax' - y' + b + ax'' - y'' + b = m\sqrt{1+a^2} \ldots\ldots\ldots (1),$$

que pela eliminação de b, reduz a equação da recta a

$$y - \tfrac{1}{2}(y' + y'') = a\left[x - \tfrac{1}{2}(x' + x'')\right] + \tfrac{1}{2}m\sqrt{1+a^2},$$

ou, transportando a origem ao meio C de MM′ $[\tfrac{1}{2}(x' + x''),\ \tfrac{1}{2}(y' + y'')]$,

$$y = ax + \tfrac{1}{2}m\sqrt{1+a^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

O valor de a fica arbitrario, e o problema é indeterminado. Para qualquer valor de a, a ordenada inicial CB é $\tfrac{1}{2}m\sqrt{1+a^2}$; e conseguintemente a distancia $FC = \tfrac{1}{2}m$: o que indica a construcção geometrica seguinte. Do meio C de MM′ como centro, e com o raio $\tfrac{1}{2}m$, descreva-se um circulo: as suas tangentes satisfarão todas ao problema; o que por outra parte é evidente, attendendo á propriedade conhecida do trapezio MDD′M′.

Se a mesma questão se propuzesse a respeito de tres pontos, M, M′, M″, bastaria ajunctar $ax''' - y''' + b$ ao primeiro membro da equação

(1). E geralmente para n pontos seria necessario ajunctar $n-2$ expressões similhantes ao primeiro membro da equação (1), e substituir $\frac{m}{n}$ em logar de $\frac{1}{2}m$ no segundo membro da equação (2). Por onde se vê que a somma das n perpendiculares é m, quando DD′ é tangente ao circulo descripto do centro $C\left(\frac{1}{n}(x'+x''\ldots+x^{(n)}),\ \frac{1}{n}(y'+y''\ldots+y^{(n)})\right)$ com o raio $\frac{m}{n}$.

III. *Dadas duas rectas* AP, AD (fig. 98), *achar num ponto* M *tal que as perpendiculares* MP, MD, *tenham entre si uma razão dada* n : m.

Tomando AP para eixo dos x, A para origem, e sendo $y=ax$ a equação de AD, será pela condição dada,

$$\frac{\mathrm{MD}}{\mathrm{MP}}=\frac{y'-ax'}{y'\sqrt{1+a^2}}=\frac{m}{n}.$$

Satisfazem pois ao problema os pontos da recta AM, cuja equação é

$$y'=\frac{an}{n-m\sqrt{1+a^2}}\,x'.$$

Fazendo $\mathrm{MP}=n$, será $\mathrm{MD}=m$. Por tanto se tirarmos $\mathrm{AB}=n$, $\mathrm{AC}=m$, perpendiculares na origem ás rectas dadas AP, AD, e depois BM, CM, parallelas ás mesmas rectas, será M um dos pontos procurados, e AM a recta que os contém todos.

Se quizessemos que os pontos, de que se tracta, pertencessem a uma curva MN, é claro que elles seriam as intersecções M, N, da curva com a recta AM.

Para os pontos M′ situados abaixo de AP tomaremos $\sqrt{1+a^2}$ negativo (n.º 34), e $\mathrm{AC}'=m$ em sentido opposto a AC: então AM′ será a recta tirada de A para a intersecção de BM com C′I.

IV. *Tirando por cada ponto* K *d'uma recta dada* BB′ (fig. 99) *duas* *tangentes* KM, KN, *á ellipse dada* CMN, *e a corda* MN, *que passa pelos pontos de contacto: achar a curva, que é o logar das intersecções consecutivas d'estas cordas* MN.

Reportando a curva ao diametro Cy parallelo a BB′, e ao seu conjugado Cx: a equação da corda MN, que juncta os pontos de contacto das tangentes tiradas por K (α, β), é (n.° 84) $a^2\beta y + b^2\alpha x = a^2b^2$; similhantemente a corda mn, que juncta os pontos de contacto das tangentes tiradas por outro ponto (α, β') de BB′, é $a^2\beta' y + b^2\alpha x = a^2b^2$; e eliminando x e y entre estas duas equações, teremos a intersecção das cordas MN e mn.

Eliminando pois x, resultará $a^2y(\beta' - \beta) = 0$; isto é, $y = 0$, $x = \frac{a^2}{\alpha}$. Por onde se vê que todas as cordas se cortam sobre o diametro Cx em um só ponto $\left(\frac{a^2}{\alpha}, 0\right)$.

A mesma propriedade tem logar na hyperbole e na parabola.

136. Os principios expostos bastam algumas vezes para discutir as equações de graus superiores ao segundo. Seja por exemplo

$$y^2 - x^3 + (a - b)x^2 + abx = 0,$$

que dá
$$y = \pm\sqrt{x(x-a)(x+b)}.$$

A curva (fig. 107) é symmetrica relativamente ao eixo dos x, que ella corta nos pontos A $(0, 0)$, C $(a, 0)$, B $(-b, 0)$. Desde $x = 0$ até $x = a$, y é imaginario; desde $x = a$ até $x = \infty$, cresce indefinidamente; desde $x = 0$ até $x = -b$, é real; e desde $x = -b$ até $x = -\infty$, é imaginario. Por tanto a curva tem um ramo infinito desde $x = a$ até $x = \infty$; não tem ramo algum desde $x = 0$ até $x = a$; tem uma parte fechada desde $x = 0$ até $x = -b$; e não tem parte alguma desde $x = -b$ até $x = -\infty$.

Se $a = 0$, vem $y = \pm x\sqrt{x + b}$; e a folha AB toca em C o ramo infinito.

Se $b = 0$, vem $y = \pm x\sqrt{x - a}$; e a folha AB reduz-se a um ponto A isolado do ramo infinito CM.

Seja a equação $y^2 - x^2y^2 = 1$,

que dá $y = \pm \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, ou $x = \pm \dfrac{\sqrt{y^2-1}}{y}$.

A curva é symmetrica relativamente aos dous eixos. A $\pm x > 1$ e $x = \pm 1$ correspondem respectivamente y imaginario e y infinito; por conseguinte a curva fica entre duas asymptotas parallelas aos y, collocadas ás distancias $+1$ e -1 da origem. Emfim $\pm x < 1$ dá y real. Por tanto a curva compõe-se de dous ramos infinitos, separados por um intervallo como na fig. 82, mas comprehendidos entre as parallelas, $x = \pm 1$, aos y.

Finalmente a equação $x^2y^2 + y^4 - y^2 - x^3 - xy^2 + x = 0$

decompõe-se nas duas $x^2 + y^2 - 1 = 0$, $y^2 - x = 0$;

a primeira das quaes pertence a um circulo descripto da origem C com o raio 1; e a outra pertence a uma parabola MAM′ (fig. 51), cujo parametro é 1.

De algumas outras curvas

Conchoide de Nicomedes. Dado o ponto B (fig. 101), a posição da recta ACx, e o raio do circulo QM: se uma recta BM e o circulo QM se moverem de modo, que o centro do circulo percorra a recta ACx, e a recta BM passe constantemente por este centro e pelo ponto fixo B; a curva resultante das intersecções successivas da recta com a circumferencia do circulo será a *Conchoide.*

Abaixando de B sobre Ax a perpendicular BAy, e tomando Ax e Ay para eixos: sejam as quantidades fixas $AB = b$, $CM = AD = a$; e a quantidade variavel $AC = \alpha$. As equações da recta BM, que passa por B$(0, -b)$ e C$(\alpha, 0)$, e do circulo MQ, que tem o centro C e o raio a, são:

$$\alpha y = b(x - \alpha),\ (x - \alpha)^2 + y^2 = a^2.$$

Eliminando pois entre ellas a arbitraria α, resultará a equação da curva

$$x^2y^2=(a^2-y^2)(y+b)^2.$$

Esta curva compõe-se de dous ramos infinitos, um superior, e outro inferior a Ax, que é a sua asymptota; e a maior distancia entre estes dous ramos é DD', correspondente aos pontos onde BM é perpendicular a Ax. Quando é AB $< a$, ha um *nó*, ou *ponto multiplo*, em D' (fig. 101); e quando é AB $= a$, o nó desvanece-se, e reduz-se a um *ponto de reversão*.

Cissoide de Diocles. Dado o circulo AFB (fig. 102), e a tangente BD; façamos girar uma recta AD em torno de A; e, em cada uma das suas posições, tomemos a parte AM egual á parte FD intercepta entre o circulo e a tangente BD. O logar geometrico dos pontos M será a *Cissoide*.

Considerando os pontos M como intersecções das rectas AD com os circulos descriptos do ponto A com os raios AM; suppondo a origem em A; e fazendo o raio do circulo dado CB $=a$, e o do circulo variavel AM $=$ R: as equações d'estes circulos e da recta AD, e a equação de condição AM $=$ FD, ou AP $=$ EB, serão

$$y^2=2ax-x^2,\ x^2+y^2=\mathrm{R}^2,\ y=\mathrm{A}x,\ \frac{\mathrm{R}}{\sqrt{1+\mathrm{A}^2}}=\frac{2a\mathrm{A}^2}{1+\mathrm{A}^2},$$

por serem AP e AE as abscissas das intersecções dos dous circulos com a recta AD, e ser BE $=$ AB $-$ AE $= 2a -$ AE.

Eliminando pois os parametros A e R entre as tres equações, do circulo de raio AM, da recta AD, e de condição, teremos a equação da curva

$$y^2(2a-x)=x^3.$$

1.° a curva está comprehendida entre Ay e BD; porque a abscisa x não póde ser negativa, nem $> 2a$: 2.° é symmetrica relativamente a AB: 3.° passa pela origem A, que é um *ponto de reversão;* 4.° os pontos H, H', onde a curva corta o circulo dado, estão a 90° de A e B; porque a eliminação entre as equações d'estas linhas dá $y=\pm x$, e por conseguinte $x=a$, $y=\pm a$: 5.° a recta BD é asymptota; porque $x=2a$ dá $y=\infty$.

Logarithmica. Nesta curva OBM (fig. 103) as abscisas AP são logarithmos das ordenadas correspondentes MP. A sua equação é pois

$$x = \log. y, \text{ ou } y = a^x,$$

sendo a a base dos logarithmos (*Alg. El.* n.º 153).

É facil mostrar que: 1.º a curva tem um só ramo, o qual se extende indefinidamente d'uma e d'outra parte da origem A; 2.º a ordenada inicial é $AB = 1$; 3.º fazendo $AE = AB = 1$, vem $EF = a =$ base; 4.º se é $a > 1$, a parte BM da curva, correspondente aos x positivos, afasta-se continuamente de Ax, e a outra parte FO approxima-se indefinidamente de AQ, sendo QAx a asymptota; mas se é $a < 1$, acontece o contrario: 5.º tomando abscissas successivas que estejam em progressão arithmetica, as ordenadas correspondentes estarão em progressão geometrica. As differentes especies de *logarithmicas* distinguem-se pelo valor da base a.

Curva dos senos. As ordenadas d'esta curva são senos das abscissas (fig. 108). A sua equação é $y = \text{sen}\, x$. Cada abscissa x é uma recta egual ao arco de circulo, cujo seno é a ordenada y, e cujo raio é r. Como o seno é nullo, quando o arco é $0, \pm \pi r, \pm 2\pi r, \ldots \pm n\pi r$; vê-se que, tomando desde a origem A as partes $AB = BC \ldots = AB' = B'C' \ldots = \pi r$, a curva cortará o eixo dos x nos pontos A, B, C,... B', C',... Desde $x = 0$ até $x = \frac{1}{2}\pi r$ os senos crescem até o maximo $EF = r$; e d'ahi até $x = \pi r$ diminuem, reproduzindo-se por ordem inversa: por onde se vê que a porção AFB da curva é symmetrica em relação a FE. Desde $x = \pi r$ até $x = 2\pi r$, repetem-se os mesmos valores dos senos, mas negativos; e por isso a parte BDC da curva é egual á primeira AFB, mas disposta para o outro lado do eixo. A curva compor-se-ha pois de partes eguaes consecutivas, dispostas alternadamente uma para cima do eixo, outra para baixo; sendo as primeiras comprehendidas entre abscissas $x = + 2nr\pi$ e $x = + (2n + 1) r\pi$, ou entre $x = -(2n + 1) r\pi$ e $x = -(2n+2) r\pi$; e as segundas entre $x = (2n + 1) r\pi$ e $x = (2n + 2) r\pi$, ou entre $x = -2nr\pi$ e $x = -(2n + 1) r\pi$: de sorte que, dando a n differentes valores, o curso da curva continúa assim indefinidamente.

As *curvas dos senos* só differem entre si por causa do raio r.

Quadratriz de Dinostrato. Supponhamos que, em quanto o raio CA, partindo da posição CA (fig. 104), gira em torno do ponto C, o ponto A se move sobre este raio de modo que, em qualquer das suas posições M, seja sempre $\dfrac{AP}{AC} = \dfrac{\text{arc. } ab}{\text{arc. } ac}$. O logar geometrico dos pontos M será a *Quadratriz.*

Considerando o ponto M como intersecção das rectas CM, MP; e fazendo $ab = \theta$, $CP = \alpha$, $CA = a$: as equações de CM e PM, e a equação de condição $\dfrac{AP}{AC} = \dfrac{\text{arc. } ab}{\text{arc. } ac}$, são

$$y = x \operatorname{tang} \theta,\ x = \alpha,\ \frac{a - \alpha}{a} = \frac{\theta}{\frac{1}{2}\pi}.$$

Eliminando pois α e θ entre estas equações, resultará a procurada

$$y = x \operatorname{tang}\left(\frac{\frac{\pi}{2}(a - x)}{a}\right),\ \text{ou}\ y = x \cot \frac{\pi x}{2a}.$$

Logo: 1.º a curva é symmetrica relativamente ao eixo Cy: 2.º para $\pm x > a$ e $< 2a$, e em geral para $\pm x > (2n + 1)\, a$ e $< (2n + 2)\, a$, é y negativo; e em $x = (2n + 1)\, a$ a curva corta o eixo dos x: 3.º a $\pm x = 2a$, e em geral a $\pm x = 2na$, correspondem as asymptotas QN, Q′N′,...; e $x = 0$ dá $y = 0 \times \infty$, expressão singular da ordenada CD cujo valor adiante procuraremos (*).

(*) Viu-se na Trigonometria que a razão do arco para a tangente tem a unidade por limite; por tanto o limite de $y = x \cot \dfrac{\pi x}{2a} = \dfrac{2a}{\pi} \cdot \dfrac{\frac{\pi x}{2a}}{\operatorname{tang} \frac{\pi x}{2a}}$, isto é, o seu valor correspondente a $\dfrac{\pi x}{2a} = 0$, ou a $x = 0$, é $CD = \dfrac{2a}{\pi}$ (*Alg. Elem.* n.º 120).

O mesmo se concluirá da expressão

$$\cot z = \frac{1}{\operatorname{tang} z} = \frac{1}{z + \frac{1}{3}z^2 + \ldots} = \frac{1}{z}\left(1 - \frac{1}{3}z^2 + \ldots\right) = \frac{1}{z} - \frac{1}{3}z + \ldots;$$

que, pondo $z = \dfrac{\pi x}{2a}$, dá a y a fórma $\quad y = \dfrac{2a}{\pi} - \dfrac{1}{3}\,\dfrac{\pi x^2}{2a} + \ldots\ldots$

Dinostrato, inventor d'esta curva, chamou-lhe *quadratriz*, pela utilidade, que lhe suppunha, para resolver o problema da quadratura do circulo.

Cycloide. Se um circulo DM (fig. 109) rolar sobre a recta AB, o ponto d'elle, que em A toca AB, elevar-se-ha acima d'esta recta, tomando differentes posições M; chegará a F; e depois descerá até B, onde tocará de novo AB, tendo descripto a *Cycloide* AMFB. Os pontos do circulo, que successivamente tocarem AB, darão arcos $MD = AD$; e a recta AB será egual á circumferencia inteira.

Passada uma revolução completa, o ponto B descreverá outra curva egual á primeira; e assim por diante. Em F será $EF = 2r$, correspondente a $AD =$ semicircumferencia, a maxima ordenada; e a curva será symmetrica relativamente a EF. A descripção successiva dará em A e B pontos de reversão.

Tomemos A para origem, AB para eixo; e façamos $AP = x$, $PM = QD = y$, $PD = MQ = z$. Como MQ é seno de MD no circulo MC, e ordenada do mesmo circulo correspondente á abscissa y; e pela propriedade fundamental da curva é $MD = AD = AP + PD = AP + MQ$: teremos as equações $\quad z = \operatorname{sen}(x + z), \quad z^2 = 2ry - y^2.$

Transportando a origem a F, e fazendo $\quad FS = x, \; SM = y, FK = u,$

teremos $$FS = PE = MN = AE - AD + MQ = FK + KN;$$

isto é $$x = u + \operatorname{sen} u = \operatorname{arc}(\operatorname{sen} = z) + z,$$

ou $$z = \operatorname{sen}(x - z).$$

Os trabalhos de *Fermat*, *Descartes*, *Roberval*, *Pascal*, *Huyghens*.... fizeram celebre esta curva, que tem propriedade geometricas e mecanicas singulares, das quaes em outro logar nos occuparemos.

Tambem se podia procurar a curva descripta por um ponto de circulo, que não estivesse na circumferencia; o que daria outra especie de cycloide. Poder-se-hia tambem dar ao circulo, além do movimento de rotação, um de translação, no mesmo sentido, ou no opposto; e dahi resultaria a cycloide *alongada*, ou *a incurtada*. Emfim, poder-se-hia fazer mover a circumferencia sobre outra curva; e teriamos uma curva do genero d'aquellas que se chamam *Epicycloides*. Mas contentar-nos-hemos com indicar estes objectos.

137. *Spiral de Conon ou de Archimedes.* Chamam-se *Spiraes* as curvas, que são cortadas numa infinidade de pontos por qualquer das linhas que passam por um ponto fixo ou pólo. As espiraes formam um genero de curvas, em cuja definição entra, por assim dizer, necessariamente a idéa de coordenadas polares. Tal é a de *Conon*, chamada *Spiral de Archimedes*, por ser este celebre geometra o primeiro que descobriu as suas propriedades.

Para a definir, imaginemos que a recta AI (fig. 105), partindo da posição AC, gira em torno do ponto A, em quanto o ponto movel M, partindo de A, percorre a recta AI. Procuremos a equação da curva descripta por M, suppondo: que M está em A, quando AI coincide com AC; que, concluida uma revolução de AC, fica em C; e finalmente que os espaços $AM = r$, corridos por M, são proporcionaes aos angulos $IAC = \theta$ descriptos por AI.

Como o angulo 2π deve corresponder a $AC = a$, a equação será

$$\frac{2\pi}{a} = \frac{\theta}{r}, \text{ ou } 2\pi r = \theta a.$$

A curva passa pelos pontos A, C, ...;

e os angulos $\quad \theta = 0, \ \theta = 2\pi, \ \theta = 4\pi, \ldots . \theta = 2k\pi$

dão $\quad r = 0, \ r = a, \quad r = 2a \ldots . . r = ka;$

de maneira que para o angulo $2k\pi + \theta$, teremos $r = ka + \dfrac{a\theta}{2\pi}$. Assim, a cada revolução, o raio vector recebe o augmento a.

Spiral hyperbolica. Tiradas duas rectas perpendiculares AC, CD (fig. 106), e separada em uma d'ellas a grandeza dada $CD = a$, faça-se mover o ponto P sobre a outra AC, e tome-se sempre a parte $PM = a$ nos arcos descriptos com os raios CP: a curva será o logar geometrico dos pontos M.

Chamando r o raio vector CM; e θ o angulo PCM, ou o arco gh, descripto á distancia 1, que lhe serve de medida; a equação polar de curva é

$$a = r\theta.$$

A analogia d'esta equação com a da hyperbole entre as asymptotas fez que se désse á curva o nome de *spiral hyperbolica*.

Fazendo $\theta=0,\ \theta=\pi,\ \theta=2\pi,\ldots\theta=\infty,$

vem $r=\infty,\ r=\frac{a}{\pi},\ r=\frac{a}{2\pi},\ldots r=0.$

Tirando MN parallela a CD, é

$$CD-MN=a-r\operatorname{sen}\theta=a\left(1-\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}\right),$$

cujo limite é 0, por ser 1 o de $\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}$.

Logo a curva faz circumvoluções continuas em volta do pólo C, approximando-se indefinidamente d'elle sem o tocar; e ED é asymptota.

Spiral logarithmica. A sua equação polar é $\theta=\log r$, ou $r=a^{\theta}$.

Fazendo $\theta=-\infty\ldots-2\alpha,-\alpha,0,+\alpha,+2\alpha,\ldots+\infty,$

vem $r=\ 0,\ldots\ldots a^{-2\alpha},\ a^{-\alpha},\ a,\ a^{\alpha},\ a^{2\alpha},\ldots\ldots\infty.$

Logo a curva faz circumvoluções continuas em volta do pólo, e approxima-se d'elle indefinidamente, sem o tocar.

Spiral parabolica. A sua equação é $r=a\pm\sqrt{p\theta},$

isto é, $r-a$ meia proporcional entre p e θ. A discussão d'esta equação facilmente mostrará a fórma da curva.

DA INTERPOLAÇÃO

---

138. Ainda que ha uma infinidade de curvas, que passam por um dado numero de pontos F, G, M, Z, ... (fig. 28); com tudo, entre aquellas, que se podem escolher para os ligar, costuma preferir-se, como mais simples, a que pertence á equação da fórma

$$y = A + Bx + Cx^2 + \ldots\ldots,$$

e que se chama *parabolica* pela sua semelhança com a *parabola*.

Formula de Lagrange. Tomados dous eixos dos x e y, tracta-se de determinar os coefficientes A, B, C, . . . de modo que as coordenadas de cada um dos pontos dados (α_0, a_0), (α_1, a_1), (α_2, a_2)...., pelos quaes deve passar a curva, satisfaçam á equação precedente, isto é, de modo que ás raizes α_0, α_1, α_2... correspondam respectivamente as funcções a_0, a_1, a_2...

Para conseguir isto, basta fazer $y = A_0a_0 + A_1a_1 + A_2a_2 + A_na_n + \ldots$, escolhendo expressões taes de A_0, A_1, A_2. . . . que $x = \alpha_n$ aniquile todos os coefficientes excepto A_n, e reduza este á unidade.

Ora é claro que á primeira d'estas condições satisfaz o producto

$$(x - \alpha_0)(x - \alpha_1)\ldots\ldots(x - \alpha_{n-1})(x - \alpha_{n+1})\ldots\ldots,$$

em que não entra $x - \alpha_n$; e que depois satisfaz á segunda este producto dividido pelo valor que toma quando se faz $x = \alpha_n$, isto é, pelo producto

$$(\alpha_n - \alpha_0)(\alpha_n - \alpha_1)\ldots\ldots(\alpha_n - \alpha_{n-1})(\alpha_n - \alpha_{n+1})\ldots\ldots$$

Satisfará pois ao problema a expressão

$$y = A_0 a_0 + A_1 a_1 + A_2 a_2 + \ldots . A_n a_n + \ldots .;$$

sendo

$$A_0 = \frac{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots}{(\alpha_0-\alpha_1)(\alpha_0-\alpha_2)\ldots}, \ldots, A_n = \frac{(x-\alpha_0)\ldots(x-\alpha_{n-1})\ldots}{(\alpha_n-\alpha_0)\ldots(\alpha_n-\alpha_{n-1})\ldots}, \ldots .$$

Formula de Laplace. Nas formulas de interpolação mais usadas substituem-se em logar de a_1, a_2, ... as suas expressões nas differenças 1.^{as}, 2.^{as}....

Seja, por exemplo, $y = A + Bx + Cx^2$.

As equações de condição são

$$a_0 = A + B\alpha_0 + C\alpha_0^2, \; a_1 = A + B\alpha_1 + C\alpha_1^2, \; a_2 = A + B\alpha_2 + C\alpha_2^2,$$

das quaes se tiram

$$y - a_0 = B(x-\alpha_0) + C(x-\alpha_0)(x+\alpha_0),$$

$$\frac{a_1-a_0}{\alpha_1-\alpha_0} = \delta_0 = B + C(\alpha_1+\alpha_0), \quad \frac{a_2-a_1}{\alpha_2-\alpha_1} = \delta_1 = B + C(\alpha_2+\alpha_1),$$

$$\frac{\delta_1-\delta_0}{\alpha_2-\alpha_0} = \delta_0^{\;2} = C;$$

e substituindo na primeira d'estas as expressões de B e C dadas pela segunda e pela quarta, resulta

$$y = a_0 + (x-\alpha_0)\delta_0 + (x-\alpha_0)(x-\alpha_1)\delta_0^{\;2}.$$

Tomando maior numero de termos, virá, em geral, o systema seguinte

$$\frac{a_1-a_0}{\alpha_1-\alpha_0}=\delta_0,\ \frac{a_2-a_1}{\alpha_2-\alpha_1}=\delta_1,\ \frac{a_3-a_2}{\alpha_3-\alpha_2}=\delta_2\ldots.$$

$$\frac{\delta_1-\delta_0}{\alpha_2-\alpha_0}=\delta^2{}_0,\ \frac{\delta_2-\delta_1}{\alpha_3-\alpha_1}=\delta^2{}_1\ldots\ldots$$

$$\frac{\delta^2{}_1-\delta^2{}_0}{\alpha_3-\alpha_0}=\delta_0{}^3,\ldots\ldots..$$

e

$$y=a_0+(x-\alpha_0)\delta_0+(x-\alpha_0)(x-\alpha_1)\delta^2{}_0+(x-\alpha_0)(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\delta^3{}_0+\ldots$$

São estas as fórmulas que as mais das vezes se empregam.

139. Quando quizermos desenhar a configuração d'um terreno, marcaremos um numero sufficiente de pontos nos logares onde a curva offerecer sinuosidades mais notaveis; mediremos as suas coordenadas $(\alpha_0,\ a_0)$. $(\alpha_1,\ a_1),\ldots\ldots$; e faremos passar por cada serie d'estes pontos curvas parabolicas determinadas pelo methodo exposto.

Poderemos assim achar, entre pontos isolados **F**, **G**, **M**, **Z**,........, outros que estejam sujeitos á mesma lei: e em geral, quando muitas quantidades tiverem entre si certas relações, poderemos determinar uma lei da qual derivem essas relações, e que sirva para conhecer approximadamente as circumstancias intermedias. Nisto consiste o *methodo de interpolação*, que frequentemente se applica aos phenomenos naturaes.

Os mesmos raciocinios servem para fazer passar uma curva de natureza dada por uma serie de pontos. Para isso deve em geral a equação da curva ter tantas constantes arbitrarias, quanto são os pontos dados.

Por exemplo, tendo a equação mais geral do circulo,

$$(x-h^2)+(y-k^2)=r^2,$$

tão somente tres constantes arbitrarias, não podemos sujeital-o a passar por mais de tres pontos quaesquer $(\alpha,\ a)$, $(\beta,\ b)$, $(\gamma,\ c)$; e as constantes

k, h, r, serão determinadas pelas equações

$$(a-k)^2+(\alpha-h)^2=r^2,\ (b-k)^2+(\beta-h)^2=r^2,\ (c-k)^2+(\gamma-h)^2=r^2.$$

Se o circulo devesse ter um raio dado, só poderia sujeitar-se a passar por dous pontos quaesquer ; e se devesse satisfazer a mais outra condição, só poderia sujeitar-se a passar por um ponto. Em geral podemos fazer passar uma secção conica por cinco pontos; porque a equação geral das curvas do 2.° grau, desembaraçada do coefficiente do primeiro termo, tem cinco arbitrarias (*).

(*) A equação mais geral d'uma curva da ordem m é

$$y^m+(ax+b)\,y^{m-1}+(a'x^2+b'x+c)\,y^{m-2}\ \ldots.+kx^m+lx^{m-1}\ \ldots+px+q=0.$$

Desde o termo em y^{m-1} o numero dos parametros vae crescendo de termo para termo, segundo uma progressão arithmetica, da qual é 1 a razão, 2 o primeiro termo, $m+1$ o ultimo, e m o numero dos termos; logo o numero total dos parametros é

$$s=\frac{m\,(m+3)}{2}.$$

Tal é o maior numero de parametros que pode ter uma curva da ordem m; e por conseguinse o maior numero de pontos pelos quaes se pode, em geral, obrigal-a a passar.

Assim as secções conicas podem em geral fazer-se passar por cinco pontos, por ser nellas $m=2$, $s=5$; e as linhas rectas podem fazer-se passar por dous pontos, por ser nellas $m=1$, $s=2$.

D'este modo, quando se quizer uma curva de certa ordem, que satisfaça a condições dadas, podemos conhecer, em quanto ao numero dos parametros, se o problema é determinado, indeterminado, ou impossivel.

NOTAS

Sobre o numero 31

As condições de serem parallelas, de coincidirem, ou de serem perpendiculares, duas rectas $y=ax+b$, $y=a'x+b'$,

podem deduzir-se facilmente da expressão da distancia d'um ponto $(x'\ y')$ a uma d'ellas

$$\delta=\frac{y'-ax'-b}{\sqrt{1+a^2}}.$$

Com effeito, se o ponto $(x',\ y')$ deve estar na outra recta $y=a'x+b'$, a sua distancia á primeira é, substituindo na expressão precedente,

$$\delta=\frac{(a'-a)\,x'+b'-b}{\sqrt{1+a^2}}.$$

Ora:

1.º Se as rectas são parallelas, δ deve ser constante; e por isso independente de x'. Por tanto $a'-a=0$ é a condição de parallelismo.

2.º Se as rectas coincidem, deve ser, além da condição precedente, $\delta=0$, e conseguintemente $b'-b=0$. Por tanto, para que as duas rectas coincidam, devem verificar-se as condições $a=a'$, $b=b'$.

3.º Se as rectas são perpendiculares, deve a expressão da distancia de um ponto de uma $y=a'x+b'$, á intersecção d'ella com a outra, $y=ax+b$, coincidir com δ. Mas as coordenadas da intersecção são

$$x_{,}=\frac{b-b'}{a'-a},\ y_{,}=\frac{a'b-ab'}{a'-a};$$

e a distancia d'ella a um ponto (x', y') de $y = a'x + b'$ é

$$\sqrt{(x' - x_{,})^2 + (a'x' + b' - y_{,})^2} = \frac{[(a' - a)\, x' + b' - b]\sqrt{1 + a'^2}}{a' - a};$$

logo, comparando com δ, será $\dfrac{\sqrt{1 + a'^2}}{a' - a} = \dfrac{1}{\sqrt{1 + a^2}},$

que dá $$aa' + 1 = 0.$$

Cumpre advertir que a distancia δ se deduz facilmente da propriedade de ser um minimo. Porque a distancia de (x', y') a um ponto (x, y) da recta dá

$$(x - x')^2 + (ax + b - y')^2 = \delta^2;$$

e da condição do minimo tira-se $x = \dfrac{ay' + x' - ab}{1 + a^2},$

que substituida na expressão precedente dá $\delta = \dfrac{y' - ax' - b}{\sqrt{1 + a^2}}.$

Sobre o numero 38

Procuremos o angulo V, que fazem entre si duas cordas, quer passem pelas extremidades d'um diametro, quer não passem, isto é, o angulo V, que tem o vertice na circumferencia, e insiste em um dado arco, egual ou não egual a 180°.

Tomando para eixo dos x o diametro parallelo á corda d'esse arco, e para origem o centro, sejam $(-x', y')$, (x', y'), (α, β), os extremos da corda e o vertice do angulo. As tangentes dos angulos, que fazem os lados de V com o eixo dos x, são

$$a=\frac{\beta-y'}{\alpha+x'},\ a'=\frac{\beta-y'}{\alpha-x'};$$

por conseguinte é
$$\operatorname{tang} V=\frac{a'-a}{1+aa'}=\frac{2x'(\beta-y')}{\alpha^2-x'^2+(\beta-y')^2},$$

ou, por serem
$$x'^2=R^2-y'^2,\ \alpha^2+\beta=R^2,$$

$$\operatorname{tang} V=-\frac{x'}{y'}.$$

Como esta expressão é independente de α e β, vê-se que os angulos existentes no mesmo segmento do circulo são eguaes. Mas chamando θ o angulo no centro, que tem por base o arco em que insiste V, é

$$\operatorname{tag}\left(\frac{360^\circ-\theta}{2}\right)=\frac{x'}{y'},\ \text{ou}\ \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\theta=-\frac{x'}{y'};$$

logo
$$V=\tfrac{1}{2}\theta.$$

Por onde se vê que os angulos, que têm o vertice na circumferencia, são a metade dos que têm o vertice no centro e insistem no mesmo arco.

Sobre o numero 56

A propriedade de serem racionaes relativamente á abscissa as distancias aos pontos da ellipse pertence exclusivamente aos focos.

Com effeito sejam: (x', y') um ponto tomado no plano da ellipse, cujas distancias aos pontos d'esta curva devem ser funcções racionaes de x;

(x, y) um ponto da ellipse; e δ a distancia d'estes dous pontos. Teremos

$$\delta^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2, \quad y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

que dão

$$\delta^2 = x^2 - 2xx' + x'^2 + b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2} \mp 2\frac{b}{a}y'\sqrt{a^2 - x^2 + y'^2}.$$

Ora δ^2, e com mais razão δ, não pode ser racional, senão quando for nullo o termo que tem radical; logo

$$y' = 0, \ \delta^2 = \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)x^2 - 2xx' + x'^2 + b^2;$$

por onde se vê que o ponto procurado (x', y') está no eixo dos x. E para que esta expressão de δ^2 seja um quadrado, é necessario (*Alg. El.* n.º 146) que

seja $$4x'^2 = 4\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)(x'^2 + b^2); \text{ ou } x' = \pm\sqrt{a^2 - b^2} = c.$$

Assim os pontos $(\pm\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ do eixo maior são os unicos que têm a propriedade de que se tracta.

Fazendo a substituição, resulta

$$\delta = \pm\left(x\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} + \sqrt{x'^2 + b^2}\right) = \pm\left(\frac{cx}{a} \pm a\right).$$

Como a é o maior valor de x, e c é uma fracção': para que δ seja positivo, deve usar-se do signal — fóra do parenthesis; e as distancias aos dous focos $(\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$, $(-\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$, são respectivamente

$$\delta = a - \frac{cx}{a}, \ \delta = a + \frac{cx}{a}.$$

(Vej. *Geom. Anal.* de Fourcy n.ºs 307 e 308, e 2.ª ed. do *Cours de Math. Pur.* de Francoeur, n.º 397).

Numero 80 (no fim)

A equação $$\operatorname{tang}\theta = \frac{a^2\alpha^2 + b^2}{\alpha(a^2 - b^2)} = \frac{a^2\alpha + \dfrac{b^2}{\alpha}}{a^2 - b^2}.$$

mostra que:

1.° Para α infinito, é tang θ infinita.

2.° Mudando α em $\alpha + \delta$, a differença entre as tangentes de θ correspondentes será $$\frac{\delta\,(a^2\alpha - b^2 + a^2\alpha\delta)}{\alpha\,(\alpha+\delta)\,(a^2 - b^2)}.$$

E suppondo δ infinitesima, esta differença será positiva desde $\alpha = \infty$ até $\alpha = \frac{b^2}{a^2}$; e depois negativa desde $\alpha = \frac{b^2}{a^2}$ até $\alpha = 0$.

5.° Para α nullo, é tang θ infinita.

Numero 85 (fim de 3.°)

A equação $$\operatorname{tang}\theta = \frac{\dfrac{y'}{x'-a} - \dfrac{y'}{x'+a}}{1 + \dfrac{y'^2}{x'^2 - a^2}} = \pm\frac{2a^2b}{(a^2+b^2)\sqrt{x'^2 - a^2}}$$

mostra que:

1.° Para $x' = a$ é $\qquad \operatorname{tang}\theta = \infty$.

2.° Ao passo que x' cresce, tang θ diminue.

3.° Para $x' = \infty$ é tang θ nulla.

Numero 107

Como a hypothese $B^2 - 4AC = 0$ reduz (a) a

$$(y\sqrt{A} \pm x\sqrt{C})^2 + Dy + Ex + F = 0,$$

vê-se immediatamente que, fazendo $y\sqrt{A} \pm x\sqrt{C} = y'\sqrt{a}$, e attendendo ás formulas de transformação de coordenadas rectangulares,

$$y' = y\cos\theta - x\,\text{sen}\,\theta,\quad x' = y\,\text{sen}\,\theta + x\cos\theta,$$

ou $$y = y'\cos\theta + x'\,\text{sen}\,\theta,\quad x = x'\cos\theta - y'\,\text{sen}\,\theta,$$

a equação se transforma em outra (b), sem termos em x'^2 e $x'y'$, na qual

são $$d = D\cos\theta - E\,\text{sen}\,\theta,\quad e = D\,\text{sen}\,\theta + E\cos\theta, \text{ ou } (3),$$

com tanto que se façam

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{A}{a}},\quad \text{sen}\,\theta = \mp\sqrt{\frac{C}{a}}.$$

GEOMETRIA ANALYTICA

NO ESPAÇO

I. TRIGONOMETRIA ESPHERICA

Noções fundamentaes

140. Se tres planos MON, NOP, MOP, (fig. 1), passando pelo centro de uma esphera, determinarem um angulo triedro O, da sua intersecção com a superficie da esphera resultarão circulos maximos, cujos arcos CA, CB, AB formarão sobre ella um *triangulo espherico* ABC. Os angulos planos do triedro O terão por medida respectiva os lados ou arcos d'este triangulo, isto é, NOP a AB, MON a AC, MOP a BC. O angulo C do triangulo tem por medida o angulo que no ponto C formam as duas tangentes aos arcos contiguos AC e BC; e a inclinação d'estas tangentes, situadas nos planos d'estes arcos, é tambem a medida do angulo diedro formado por estes mesmos planos, isto é, da inclinação da face NOM sobre POM. Por conseguinte, *os angulos planos do triedro* O *são medidos pelos lados do triangulo espherico* ABC, *e as inclinações das faces são os angulos do triangulo.*

Os problemas em que se pedem as partes desconhecidas de um triangulo espherico por meio das que são dadas, são exactamente os mesmos que se apresentam, quando, conhecidos alguns elementos de um triedro, se pedem os outros. *Nos triangulos esphericos ha seis elementos a considerar,* *os tres angulos* A, B, C, *e os tres lados oppostos* a, b, c; *ou*, por outras palavras, *os tres angulos planos* a, b, c, *e os tres angulos diedros oppostos* A, B, C, *do triedro de que se tracta.*

A Trigonometria espherica tem por objecto o conhecimento de todas as seis partes de um triangulo espherico, sendo dadas as que bastam para determinar as outras.

Posto isto, se de um ponto O dirigirmos raios visuaes para tres pontos distantes M, N, P, situados no espaço, para tres estrellas por exemplo, estas linhas serão as arestas de um triedro O, cujos elementos constituintes serão os mesmos do triangulo espherico ABC, formado pelos arcos dos circulos maximos que unem os pontos em que estas arestas vão atravessar a superficie de uma esphera de raio arbitrario, cujo centro O se suppõe o ponto de partida dos raios visuaes.

D'estes principios deduzem-se os theoremas seguintes:

1.° Como qualquer angulo plano de um triedro é sempre menor que dous rectos, *será sempre cada um dos lados do triangulo espherico* < 180°. *Qualquer angulo será tambem sempre menor que dous rectos.*

Se no processo dos calculos encontrarmos um angulo, ou um lado de um triangulo, que tenha por valor um arco > 180°, devemos rejeitar essa solução, ou então substituir o supplemento do mesmo angulo ou arco: e os cos., e sen., tang., etc., nunca poderão pertencer a um arco maior que a semicircumferencia.

2.° Como a somma dos angulos planos de qualquer angulo polyedro é sempre < 360° (*Geom.*), *será a somma dos tres lados de um triangulo espherico sempre* < 360°.

3.° *Dous triangulos esphericos serão eguaes, quando os tres angulos, ou os tres lados, ou dous lados e o angulo comprehendido, ou dous angulos e o lado adjacente, forem respectivamente eguaes cada um a cada um.* Tanto estes theoremas, como os dous seguintes, demonstram-se do mesmo modo que os correspondentes nos triangulos rectilineos.

4.° *O arco abaixado perpendicularmente do vertice de um triangulo espherico isosceles sobre a sua base, divide ao meio esta base, e o angulo do vertice; os angulos eguaes ficam oppostos aos lados eguaes, e reciprocamente.*

5.° *Nos triangulos esphericos o maior angulo fica sempre opposto ao maior lado, o medio ao medio, e o menor ao menor.*

6.° *Qualquer lado é sempre menor que a somma dos outros dous, e maior que a sua differença:* porque a somma de dous angulos planos de um triangulo triedro excede sempre o terceiro, e por conseguinte $a<b+c$,

e $b < a + c$, ou $a > b - c$. Conseguintemente, *a semisomma dos tres lados de um triangulo excede sempre um lado qualquer:* por que de $b + c > a$ tira-se $b + c + a > 2a$, ou $\frac{b+c+a}{2} > a$.

141. *Se de um ponto* O (fig. 2) *tomado dentro do angulo triedro* S, *abaixarmos as perpendiculares* OP, OQ, OR, *sobre as faces* ASB, ASC, ASC, *estas perpendiculares determinarão um novo angulo triedro, cujos angulos planos serão supplementos dos angulos diedros do angulo solido* S, *e cujos angulos diedros serão supplementos dos angulos planos do mesmo angulo solido.*

Com effeito:

1.° Os angulos planos do novo angulo triedro POQ, POR, QOR, formados pelas perpendiculares OP, OQ, OR, são supplementos dos angulos diedros formados segundo as rectas SA, SB, SC: por quanto sendo a face POQ perpendicular ás faces ASB, ASC do triedro S (*Geom.*), tambem o será a intersecção d'ellas (*Geom.*), ou á aresta SA; e determinará, pela sua intersecção com as duas faces, o angulo rectilineo que serve de medida ao angulo diedro formado segundo AS (*Geom.*). D'esta intersecção resulta um quadrilatero com dous angulos rectos em P e Q; e por conseguinte o angulo POQ será supplemento do angulo diedro segundo AS. O mesmo se demonstra a respeito dos outros angulos planos QOR, POR.

2.° Pela mesma razão, como já fica demonstrado que as arestas SA, SB, SC são perpendiculares ás faces do angulo solido O, concluiremos: que os angulos planos de S são supplementos dos angulos diedros de O, ou, reciprocamente, que os angulos diedros de O são os supplementos dos angulos planos de S.

Por causa d'estas propriedades, os angulos triedros S e O dizem-se *supplementares.* Estes triedros determinam dous triangulos esphericos taes, que os angulos de um são são supplementos dos lados do outro, e reciprocamente. Logo: dada um triangulo espherico ABC com os angulos A, B, C, e lados a, b, c, é sempre possivel construir outro A'B'C', cujos angulos A', B', C', e lados a', b', c', tenham com os do primeiro as relações seguintes:

$$a' = 180° - A,\quad b' = 180° - B,\quad c' = 180° - C \ldots\ldots\ldots (1),$$

$$A' = 180° - a,\quad B' = 180° - b,\quad C' = 180° - c \ldots\ldots\ldots (2).$$

O triangulo assim construido chama-se *polar* ou *supplementar* do 1.°

Sommando as tres equações (1) temos

$$A + B + C = 6 \text{ rectos} - (a' + b' + c');$$

e como já se viu que é $a' + b' + c' < 4$ rectos (n.º 140, 2.º), vê-se que $A + B + C > 2$ rectos. Mas por outra parte, como qualquer dos angulos esphericos é sempre < 2 rectos, temos $A + B + C < 6$ rectos. Logo, *a somma dos angulos de qualquer triangulo espherico fica sempre comprehendida entre dous ou seis angulos rectos.*

As equações (1) e (2) são de muita utilidade, porque reduzem a tres os seis problemas da trigonometria espherica, que consistem em achar tres dos seis elementos de um triangulo, conhecidos os outros tres. Se, por ex., soubermos achar os tres angulos A, B, C, por meio dos tres lados conhecidos a, b, c, podemos reciprocamente, dados os tres angulos A, B, C, achar um lado a, substituindo ao triangulo o seu supplementar $A'B'C'$, cujos lados são conhecidos pelas equações (1); e tendo achado um dos angulos A', a equação (2) dará o lado proposto $a = 180° - A'$. De maneira, que sabendo resolver um triangulo no caso de serem dados os tres lados, fica tambem resolvido para o caso de serem conhecidos os tres angulos; e assim nos outros casos. Adiante se verá isto mais explicitamente.

142. Se o triedro O (fig. 3) for cortado por um plano pmn perpendicular a uma aresta OA, em um ponto m tal que seja $Om = 1$, teremos

$$mn = \text{tang } c, \ On = \sec c, \ mp = \text{tang } b, \ Op = \sec b.$$

Mas pela propriedade dos triangulos rectilineos (*Trigonom. rect.*) é

$$np^2 = mn^2 + pm^2 - 2mn.pm.\cos A,$$

$$np^2 = nO^2 + pO^2 - 2nO.pO.\cos a.$$

Subtrahindo a 1.ª da 2.ª, temos, em virtude de serem os triangulos nmO, pmO, rectangulos em m, e de ser $Om = 1$,

$$0 = 1 + 1 - 2 \sec c.\sec b.\cos a + 2 \text{ tang } c.\text{tang } b.\cos A,$$

e, substituindo $\dfrac{1}{\cos}$ pela sec., e $\dfrac{\text{sen}}{\cos}$ pela tang.,

$$0 = 1 - \frac{\cos a}{\cos c \,.\, \cos b} + \frac{\text{sen}\, c \,.\, \text{sen}\, b \,.\, \cos A}{\cos c \,.\, \cos b}.$$

D'aqui se deduz a *equação fundamental*

$$\cos a = \cos b \cos c + \text{sen}\, b\, \text{sen}\, c \cos A \,.........\, (3).$$

Para os angulos b e c obteremos, pelo mesmo theor, formulas similhantes, e reunindo-as todas tres, teremos

$$\left.\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \text{sen}\, b\, \text{sen}\, c \cos A, \\ \cos b &= \cos a \cos c + \text{sen}\, a\, \text{sen}\, c \cos B, \\ \cos c &= \cos a \cos b + \text{sen}\, a\, \text{sen}\, b \cos C. \end{aligned}\right\} \,...........\, (I).$$

Estas equações, cada uma das quaes exprime uma relação *entre os tres lados e um angulo*, encerram implicitamente toda a Trigonometria espherica, visto que por ellas, sendo dadas tres das seis partes que entram no triangulo espherico, se podem calcular as tres restantes. Como porém seja conveniente, nos diversos casos, ter formulas que dêem immediatamente a incognita da questão, por isso passâmos a deduzir estas das formulas precedentes, combinando-as convenientemente. (*Nota* 1.ª).

1.° Temos

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\text{sen}\, b\, \text{sen}\, c},$$

logo

$$1 - \cos^2 A = \text{sen}^2 A = 1 - \left(\frac{\cos a - \cos b \cos c}{\text{sen}\, b\, \text{sen}\, c}\right)^2;$$

reduzindo o 2.° membro ao mesmo denominador, e substituindo depois

sen^2 por $1 - cos^2$ no numerador, vem

$$sen^2 A = \frac{1 - cos^2 b - cos^2 c - cos^2 a + 2 \cos a . \cos b . \cos c}{sen^2 b \quad . \quad sen^2 c}.$$

Extrahindo a raiz quadrada, e dividindo ambos os membros por sen a, o 2.° membro torna-se numa *expressão symetrica* relativamente a a, b, c, isto é, numa expressão tal, que permanece a mesma quando quaesquer d'estas letras se mudam reciprocamente umas nas outras. Designando esta expressão por M, temos $\frac{\text{sen } A}{\text{sen } a} = M$. Mudando nesta equação A e a em B e b, e em C e c, como M persiste constante, deduz-se

$$\frac{\text{sen } A}{\text{sen } a} = \frac{\text{sen } B}{\text{sen } b} = \frac{\text{sen } C}{\text{sen } c} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (\text{II}).$$

2.° Applicando á equação (3) a propriedade do triangulo supplementar (equações 1 e 2), isto é, mudando a em $180° - A$, e A em $180° - a$, etc. teremos

$$\cos A = - \cos B \cos C + \text{sen } B \text{ sen } C \cos a \dots\dots\dots (4).$$

E reunindo esta com as duas que se obtém similhantemente, teremos

$$\left.\begin{array}{l} \cos A = - \cos B \cos C + \text{sen } B \text{ sen } C \cos a, \\ \cos B = - \cos A \cos C + \text{sen } A \text{ sen } C \cos b, \\ \cos C = - \cos A \cos B + \text{sen } A \text{ sen } B \cos c. \end{array}\right\} \dots\dots\dots (\text{III}).$$

3.° A fim de eliminar b da equação (3), substitua-se por cos b o seu valor (I), e $\frac{\text{sen } B \text{ sen } a}{\text{sen } A}$ por sen b; e virá

$$\cos a = \cos a \cos^2 c + \text{sen } a \text{ sen } c \cos c \cos B + \frac{\text{sen } a . \text{sen } c . \text{sen } B . \cos A}{\text{sen } A};$$

porém $\cos^2 c = 1 - \text{sen}^2 c$: logo, dividindo tudo por sen a sen c, será

$$\text{sen}\, c \cot a = \cos c \cos B + \text{sen}\, B \cot A \ldots\ldots\ldots\ldots (5).$$

Esta equação dá *uma relação entre dous lados e dous angulos, sendo um dos angulos comprehendido por esses lados, e o outro opposto a qualquer d'elles.* Fazendo todas as combinações possiveis, deduzem-se mais cinco equações similhantes, que reunidas á antecedente, podem escrever-se

$$\left.\begin{array}{l}\cos B \cos c = -\,\text{sen}\, B \cot A + \text{sen}\, c \cot a,\\[6pt] \cos A \cos b = -\,\text{sen}\, A \cot C + \text{sen}\, b \cot c,\\[6pt] \cos C \cos a = -\,\text{sen}\, C \cot B + \text{sen}\, a \cot b,\\[6pt] \cos B \cos a = -\,\text{sen}\, B \cot C + \text{sen}\, a \cot c,\\[6pt] \cos A \cos c = -\,\text{sen}\, A \cot B + \text{sen}\, c \cot b,\\[6pt] \cos C \cos b = -\,\text{sen}\, C \cot A + \text{sen}\, b \cot a,\end{array}\right\} \ldots\ldots (\text{IV}).$$

Os quatro grupos de formulas (I), (II), (III), (IV), offerecem evidentemente todas as combinações que é possivel fazer *com tres quantidades conhecidas e uma incognita*, das seis que formam os elementos do triangulo espherico; e bastará nas differentes questões escolher d'entre as *quinze* equações aquella que convém, e tornal-a depois propria para o calculo por logarithmos. Os tres primeiros tem os seguintes enunciados, faceis de conservar na memoria:

(I.) *O coseno de um lado qualquer de um triangulo espherico é egual á somma do producto dos cosenos dos outros dous lados, mais o producto dos senos d'esses mesmos lados multiplicado pelo coseno do angulo opposto ao primeiro lado.*

(II.) *Nos triangulos esphericos os senos dos angulos são proporcionaes aos senos dos lados oppostos.*

(III.) *O coseno de um angulo é egual á somma algebrica do producto dos cosenos dos outros dous angulos, mais o producto dos senos d'esses mesmos angulos multiplicado pelo coseno do lado opposto ao primeiro angulo, devendo dar-se o signal negativo ao producto em que entram só angulos.* Este enunciado, prescindindo dos signaes, é o mesmo que o das formulas (I) mudando lado em angulo, e angulo em lado. A primeira consoante *n* que entra na palavra *angulo*, e que é ao mesmo tempo a inicial de *negativo*, servirá para recordar que no 2.° membro se deve dar o *signal negativo* ao *producto em que entram só angulos.*

Para reter na memoria o enunciado das formulas (IV), que exprimem, como já dissemos, a relação entres *dous lados, o angulo comprehendido e um opposto,* empregaremos o meio mnemonico lembrado por Delambre, *Astr.* T. I, cap. X, *Trig. mnem.* n.° 191 e seguintes, e que consiste em considerar as *quatro partes* do triangulo todas contiguas, sendo então *duas* d'ellas *medias*, e *duas extremas;* as *medias* um lado e um angulo, e as *extremas* outro lado e outro angulo. Reflectindo então nas seis formulas, vê-se que se podem traduzir pela maneira seguinte:

(IV.) *O producto dos cosenos das partes medias é egual á somma dos productos dos senos das mesmas partes multiplicados pelas cotangentes das extremas, lado com lado, e angulo com angulo:* sendo o producto em que entram *lados* positivo, e o producto em que entram *angulos* negativo. Para nos recordarmos dos signaes faremos a mesma observação que a respeito das formulas (III) (*).

Triangulos esphericos rectangulos

143. Designemos o angulo recto por A, e a hypothenusa por a (fig. 4); e pondo $A = 90°$ nas 1.as equações de (I) e (II), na 1.a e 2.a de (III), na 1.a e 5.a de (IV), teremos

$$\cos a = \cos b \cos c \ldots\ldots\ldots (m),$$

$$\operatorname{sen} b = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} B \ldots\ldots\ldots (n),$$

$$\cos a = \cot B \cot C \ldots\ldots\ldots (p),$$

$$\cos B = \operatorname{sen} C \cos b \ldots\ldots\ldots (q),$$

$$\operatorname{tang} c = \operatorname{tang} a \cos B \ldots\ldots\ldots (r),$$

$$\cot B = \cot b \operatorname{sen} c \ldots\ldots\ldots (s).$$

(*) Delambre, no logar citado, menciona tambem a seguinte transformação notavel das formulas (IV), que lhe foi suggerida pelo nosso mestre o sr. Manuel

Estas seis equações, accommodadas ao calculo logarithmico, bastam para resolver em qualquer triangulo rectangulo o problema seguinte: *Dados dous dos cinco elementos* a, b, c, B *e* C, *achar os outros tres.* Assim a questão vem a depender de uma equação entre tres elementos, dos quaes um só é a incognita. Designando sempre por A o angulo recto, buscaremos aquella das seis equações que comprehende os tres elementos da questão; será necessario porém mudar algumas vezes o logar das letras B e C na figura.

Assim entrando

a hypothenusa a, um angulo B:
- e dous angulos B, C, . . empregue-se a equação . . (p),
- e o lado . . . opposto b . . . . (n),
- e o lado . . . adjacente c . . . . (r),
- dous lados b, c . . . . (m),

um lado b do angulo recto e os angulos B, C . . . . (q),
dous lados b, c do angulo recto e um angulo B . . . . (s).

O celebre inventor dos logarithmos, reflectindo sobre a organisação das formulas precedentes, conseguiu encerral-as em duas regras mui faceis de decorar, e vem a ser:

o coseno da parte *Media* = ao producto { dos senos das partes *Separadas* / das cotang. das partes *Conjunctas.* }

Para se applicarem estas regras deve advertir-se:

1.° Que Neper não considera no triangulo rectangulo senão cinco partes, excluindo o angulo recto, que não entra explicitamente na solução, como vimos acima. Contando d'esta fórma, e entrando em qualquer questão sempre tres partes, duas *dadas*, e uma *pedida*: é facil de ver, que

---

Pedro de Mello, lente nesta Universidade. Dividindo por sen B sen c a 1.ª d'aquellas formulas, acha-se

$$\cot B \cot c = \frac{\cot a}{\operatorname{sen} B} - \frac{\cot A}{\operatorname{sen} c};$$

e assim das outras. Podem pois enunciar-se da maneira seguinte, simples e facil de decorar-se: *O producto das cot. das partes medias é egual á somma das cot. das extremas divididas pelos senos das medias, lado com angulo e angulo com lado;* devendo dar-se o signal *negativo* á cot. em que entra *angulo.*

uma das tres será equidistante das outra duas, ou *media* entre ellas, ficando-lhe as outras duas: ou contiguas, em cujo caso se chamam *conjunctas;* ou egualmente *separadas* por outras partes que não entram na questão, visto que, ao todo, não são senão cinco. É isto o que Neper entende por *partes medias, partes conjunctas, e partes separadas.* A primeira cousa que se deve fazer, é distinguir na figura quaes ellas são, o que é facil.

2.° Que em logar dos lados, que formam o angulo recto, se ha de tomar o seu complemento, isto é, tomar d'elles o seno, o coseno ou a tangente, quando pelas regras se houvesse de tomar o coseno, o seno ou a cotangente.

Estas regras têm a vantagem de se tomarem facilmente de memoria pela *symetria de linguagem,* por assim dizer, com que se exprimem em portuguez, correspondendo *senos* ás partes *separadas* e *cotangentes* ás *conjunctas.*

144. A respeito das formulas precedentes faremos ainda as seguintes observações.

1.° Da equação (m) conclue-se, que *o coseno da hypothenusa é egual ao producto dos cosenos dos outros dous lados;* e por conseguinte, que um dos tres lados é $<$ ou $>$ 90°, conforme forem os outros dous lados da mesma ou differente especie, isto é, conforme forem conjunctamente ou $<$ ou $>$ 90°, ou conforme for um d'elles $<$ e o outro $>$ 90°; porque os cosenos dos arcos $>$ 90° são negativos.

2.° A equação (p) faz ver que, se compararmos a hypothenusa com os dous angulos adjacentes B e C, um d'estes tres arcos é $>$ ou $<$ 90°, $<$ ou $>$
segundo forem os outros dous arcos da mesma ou differente especie.

3.° As equações (q ou s) mostram que qualquer dos angulos B e C é sempre da mesma especie que o lado opposto.

4.° Vê-se tambem pela equação (r) que a hypothenusa e um dos lados são da mesma especie, quando o angulo comprehendido é $<$ 90°, e de differente especie quando este angulo é $>$ 90°.

5.° Finalmente se o lado b do angulo recto fer $=$ 90°; será $\cos b = 0$, e [pelas equações (m) e (q)] $\cos a = 0$, $\cos B = 0$: d'onde se conclue que neste caso os lados CA, CB serão cada um de 90° e perpendiculares sobre AB; o triangulo será isosceles *birectangulo;* e C toma o nome de *pólo* do arco AB (fig. 4), em consequencia de ficar á distancia de 90° de todos os pontos d'este arco.

145. Posto que estas formulas resolvem todos os casos dos triangulos rectangulos, cumpre todavia notar que os valores das incognitas não se obterão com precisão, quando os arcos, sendo muito pequenos, vierem expressos em cosenos; ou quando, sendo vizinhos de 90°, forem dados por senos.

Para obviar a este inconveniente, recorremos aos artificios seguintes.

1.° Temos (*Trigonom. rect.*) $\tang^2 \frac{1}{2} x = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$;

e por isso, se for pedida a hypothenusa a sendo conhecidos B e C, a equação (p) torna-se em

$$\tang^2 \tfrac{1}{2} a = \frac{1 - \cot B \cot C}{1 + \cot B \cot C} = \frac{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C - \cos B \cos C}{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C + \cos B \cos C},$$

$$\tang^2 \tfrac{1}{2} a = -\frac{\cos(B+C)}{\cos(B-C)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6);$$

equação onde se vê, que *a somma dos dous angulos* B *e* C é $> 90°$, por que o 2.° membro, que tem o signal —, deve ser positivo.

2.° Do mesmo modo, se procurarmos um lado b do angulo recto conhecidos os angulos B e C, temos pela equação (q) $\cos b = \frac{\cos B}{\operatorname{sen} C}$, e fazendo $z = 90° - B$, que dá $\cos B = \operatorname{sen} z$, e $\cos b = \frac{\operatorname{sen} z}{\operatorname{sen} C}$; teremos (pela equação citada e pela *Trigonom. rect.*)

$$\tang^2 \tfrac{1}{2} b = \frac{\operatorname{sen} C - \operatorname{sen} z}{\operatorname{sen} C + \operatorname{sen} z} = \frac{\tang \frac{1}{2}(C - z)}{\tang \frac{1}{2}(C + z)},$$

$$\tang \tfrac{1}{2} b = \sqrt{\left(\tang\left[\tfrac{1}{2}(B - C) + 45°\right] \tang\left[\tfrac{1}{2}(B + C) - 45°\right]\right)} \ldots . (7).$$

3.° Conhecida a hypothenusa a e um lado c, se quizermos achar o angulo adjacente B, teremos pela equação (r)

$$\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} B = \frac{1 - \operatorname{tang} c \cot a}{1 + \operatorname{tang} c \cot a} = \frac{\cos c \operatorname{sen} a - \operatorname{sen} c \cos a}{\cos c \operatorname{sen} a + \operatorname{sen} c \cos a},$$

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\left[\frac{\operatorname{sen}(a-c)}{\operatorname{sen}(a+c)}\right]} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8).$$

Para que esta expressão se não torne imaginaria, é necessario que $a - c$ e $a + c$ tenham o mesmo signal; por conseguinte sendo $a + c > 180°$, deve ser a hypothenusa $a < c$. Logo se o triangulo tiver angulos obtusos, não será a hypotheuusa o maior lado. É isto com effeito o que se torna evidente na figura 8.

4.° A equação (m) dá $\cos c = \frac{\cos a}{\cos b}$,

logo $$\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} c = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(a+b) . \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(a-b) \ldots\ldots\ldots (9).$$

5.° Finalmente se for pedido um lado b, conhecidos o angulo opposto B e a hypothenusa a, em vez de empregar a equação (n) quando b for vizinho de 90°, tome-se

$$b = 90° - 2z, \quad \operatorname{tang} x = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} B;$$

o que reduz a equação (n) a $\cos 2z = \operatorname{tang} x$, ou

$$\operatorname{tang}^2 z = \frac{1 - \operatorname{tang} x}{1 + \operatorname{tang} x} = \operatorname{tang}(45° - x);$$

e por conseguinte

$$\operatorname{tang}(45° - \tfrac{1}{2} b) = \sqrt{\operatorname{tang}(45° - x)} \ldots\ldots\ldots\ldots (10).$$

Calcula-se o arco x por meio da equação $\operatorname{tang} x = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} B$, e a ultima dará o valor de b.

Apresentámos na tabella seguinte os cinco elementos constituintes de um triangulo espherico rectangulo, a fim de poder servir de exercicio para a applicação numerica das formulas, tomando á escolha dous d'estes elementos, e calculando por meio d'elles os tres restantes.

Triangulo rectangulo de prova

ELEMENTOS	LOG. SEN.	LOG. COSEN.	LOG. TANG.
$a = 71°24'30''$	$\bar{1}.9767235$	$\bar{1}.5035475 +$	$0.4731759 +$
$b = 140.52.40$	$\bar{1}.8000134$	$\bar{1}.8897507 -$	$\bar{1}.9102626 -$
$c = 114.15.54$	$\bar{1}.9598303$	$\bar{1}.6137969 -$	$0.3460333 -$
$B = 138.15.45$	$\bar{1}.8232909$	$\bar{1}.8728568 -$	$\bar{1}.9504341 -$
$C = 105.52.39$	$\bar{1}.9831068$	$\bar{1}.4370867 -$	$0.5460201 -$

O signal — posto á direita de muitos d'estes logarithmos serve para indicar que o factor correspondente é negativo; e não deve confundir-se com os signaes — collocados á esquerda dos log., que, como é sabido, indicam que devem ser subtrahidos, como acontece nas divisões. Conforme for par ou impar o numero dos factores negativos de uma formula, assim o producto terá o signal + ou —, circumstancias que deve haver cuidado em notar; porque, por ex., tang a dá para a um arco $< 90°$, quando esta tangente é positiva, e o supplemento d'este valor quando a tangente é negativa.

Triangulos esphericos obliquangulos

146. Percorramos todos os casos que podem apresentar-se (fig. 4).

1.° Caso. *Dados os tres lados* a, b, c, *achar o angulo* A?

A 1.ª das equações (1) dá, substituindo nella $1 - 2\,\text{sen}^2\,\frac{1}{2}A$ por $\cos A$:

$$\cos a = \cos(b - c) - 2\,\text{sen}\,b\,\text{sen}\,c\,\text{sen}^2\,\tfrac{1}{2}A, \ldots\ldots\ldots\ldots (11),$$

ou $$2 \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} A = \cos(b - c) - \cos a,$$

ou, (*Trigonom.*) (*)

$$\operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(a + b - c) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(a + c - b)}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}.$$

Esta equação, accommodada ao calculo logarithmico, dá o valor do angulo A. Póde tornar-se mais symetrica, fazendo

$$2p = a + b + c,$$

que dá

$$\operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{\operatorname{sen}(p - b) . \operatorname{sen}(p - c)}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c} \ldots\ldots\ldots\ldots (12).$$

Se na 1.ª das equações (I) substituissemos $2\cos^2 \frac{1}{2} A - 1$ em logar de $\cos A$, achariamos identicamente

$$\cos^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{\operatorname{sen} p \operatorname{sen}(p - a)}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c} \ldots\ldots\ldots\ldots (13).$$

Finalmente, dividindo a 1.ª d'estas equações pela 2.ª, temos

$$\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{\operatorname{sen}(p - b) \operatorname{sen}(p - c)}{\operatorname{sen} p . \operatorname{sen}(p - a)} \ldots\ldots\ldots\ldots (14).$$

Qualquer d'estas equações resolve a questão.

2.º Caso. *Dados os tres angulos* A, B, C, *achar o lado* a?

Da propriedade do triangulo supplementar (pag. 187) applicada ás equações precedentes, pela substituição dos valores (1) e (2), e fazendo

$$2P = A + B + C,$$

(*) Como o 1.º membro é essencialmente positivo, bem como $\operatorname{sen} b$ e $\operatorname{sen} c$ (porque b e c são $< 180°$), vê-se a necessidade de ser ao mesmo tempo $c < b + a$, e $c > b - a$, por isso que as relações contrarias são visivelmente absurdas; e recahe-se assim no theorema 6.º do n.º 140.

resulta $$\operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} a = -\frac{\cos P \cos (P - A)}{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C},$$

$$\cos^2 \tfrac{1}{2} a = \frac{\cos (P - B) \cos (P - C)}{\operatorname{sen} B . \operatorname{sen} C},$$

$$\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} a = -\frac{\cos P \cos (P - A)}{\cos (P - B) \cos (P - C)}.$$

3.° Caso. *Dados dous lados* a *e* b, *e o angulo comprehendido* C, *achar o terceiro lado?*

Pode lançar-se mão da ultima das equações (I) debaixo da forma seguinte

$$\cos c = \cos a \cos b \,(1 + \operatorname{tang} a \operatorname{tang} b \cos C).$$

Ou então, fazendo na mesma equação,

$$\cos C = 2 \cos^2 \tfrac{1}{2} C - 1, \ \cos c = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} c,$$

vem

$$1 - 2 \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} c = \cos (a + b) + 2 \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos^2 \tfrac{1}{2} C$$

$$= 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} (a + b) + 2 \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos^2 \tfrac{1}{2} C.$$

Tomando um arco v tal, que dê $\operatorname{sen} v = \cos \tfrac{1}{2} C \sqrt{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}$, teremos

$$\operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} c = \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} (a + b) - \operatorname{sen}^2 v,$$

ou, (*Trigonom. rect.*),

$$\operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} c = \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} (a + b + 2v) \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} (a + b - 2v),$$

equação mais accommodada ao calculo logarithmico, e da qual se deduzem facilmente, por simples permutações, as correspondentes nos outros lados.

4.° Caso. *Dados dous angulos* A *e* B, *e o lado adjacente* c, *achar o terceiro angulo* C?

A 3.ª das equações (III) dá

$$\cos C = \cos A \cos B \,(\operatorname{tang} A \operatorname{tang} B \cos c - 1).$$

Podemos tambem substituir os valores (1) e (2) nas formulas precedentes, e teremos

$$\operatorname{sen} v = \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} c \sqrt{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B},$$

$$\cos^2 \tfrac{1}{2} C = \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(A + B + 2v) \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(A + B - 2v).$$

5.º Caso. *Conhecidas tres das quatro partes, dous lados e os angulos oppostos, achar a quarta?*

Deve empregar-se a *regra dos quatro senos,* equação (II).

147. Excepto o caso de serem conhecidos os tres lados ou os tres angulos de um triangulo, todo o problema de trigonometria espherica comprehende entre as partes dadas um angulo e um lado adjacente, além de um terceiro elemento: no que vamos expor, designaremos sempre este angulo por A, e o lado por b.

Abaixe-se de um dos angulos C (fig. 5) um arco CD perpendicular sobre o lado c. Este lado ficará cortado em dous segmentas φ e φ', e o angulo C em dous angulos θ e θ', isto é,

$$c = \varphi + \varphi', \quad D = \theta + \theta'.$$

Cumpre porém advertir: *que uma d'estas partes será negativa nas differentes equações, se o arco perpendicular cair fóra do triangulo, o que se dá quando um dos angulos* A *da base é agudo e o outro* B *é obtuso: e que serão todas as partes positivas, quando o arco cair dentro do triangulo, isto é, quando os dous angulos dados forem da mesma especie.*

Com effeito, se nos dous triangulos ACD, BCD, tirarmos os valores do arco perpendicular CD, por meio da equação (e), acharemos

$$\operatorname{tang} CD = \operatorname{tang} A \operatorname{sen} \varphi = \operatorname{tang} B \operatorname{sen} \varphi'.$$

Sendo A e B da mesma especie, as suas tangentes terão o mesmo signal, e por conseguinte sen φ e sen φ' estarão no mesmo caso. Se A e B forem porém de especie differentes, sen φ e sen φ' devem ter signaes contrarios; então o arco perpendicular CD cairá fóra do triangulo, e somente um dos segmentos φ e φ' será negativo.

148. Vê-se na fig. 5 que o triangulo ABC se decompõe em dous ACD, BCD que podemos resolver separadamente, achando assim os elementos desconhecidos por meio dos que são dados. Este processo leva-nos a equações simples, ás quaes facilmente se applica o calculo por logarithmos, como passâmos a mostrar.

Resolvem-se primeiro os triangulos ACD, BCD, para d'elles deduzir uma das partes φ ou θ, do lado c ou do angulo C, suppondo conhecidos o angulo A e o lado adjacentes b. Applicando as equações (r e p), deduzem-se as equações (a e a'). Applicando depois em cada um d'estes triangulos as equações (m, q, s, r), e eliminando o arco perpendicular CD em cada systema de duas analogas, obtem-se as equações (c, c', d, d').

$$\text{Tang}\ \varphi = \tang b \cos A \ldots . (a); \qquad \cot \theta = \cos b \tang A \ldots\ldots . (a')$$

$$c = \varphi + \varphi' \ldots\ldots . (b); \qquad C = \theta + \theta' \ldots\ldots\ldots\ldots . (b')$$

$$\frac{\cos a}{\cos b} = \frac{\cos \varphi'}{\cos \varphi} \ldots\ldots\ldots (c); \qquad \frac{\cos A}{\cos B} = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\operatorname{sen} \theta'} \ldots\ldots\ldots\ldots (c')$$

$$\frac{\tang A}{\tang B} = \frac{\operatorname{sen} \varphi'}{\operatorname{sen} \varphi} \ldots\ldots\ldots (d); \qquad \frac{\tang a}{\tang b} = \frac{\cos \theta}{\cos \theta'} \ldots\ldots\ldots\ldots (d')$$

$$\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} a} = \frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} b} = \frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} c} \ldots\ldots\ldots (e).$$

Passâmos a ver os casos que podem apresentar-se, e a maneira de os resolver por meio d'estas equações.

Além das partes dadas A *e* b, ha mais um 3.º elemento.

1.º Se for conhecido c (*dous lados* b *e* c, *e o angulo comprehendido* A) a equação (a) dá φ; (b) dá φ', podendo estes arcos ter o signal negativo; (c) dá (a); (d) dá B; e finalmente (e) dá C, cuja especie se determinará pelo que fica dito no n.º 147.

2.º Se for conhecido C (*dous angulos* A *e* C *e o lado adjacente* b) a equação (a') dá θ; (b') dá θ', que pode ser negativo; (c') dá B; (d') dá a; (e) dá c, cuja especie é conhecida.

3.° Se for conhecido a (*dous lados* a *e* b, *e o angulo opposto* A) a equação (a) dá φ; (c) dá φ'; (b) dá c; (d e e) dão B e C. Ou então (a') dá θ; (d') dá θ'; (b') dá C; (c' e e) dão B e c.

Neste caso o problema offerece geralmente duas soluções; porque se calcularmos φ' ou θ' por meio do coseno, o arco apparece com os dous signaes $\pm$; c e C tem por conseguinte dous valores, excepto se tivermos de rejeitar algum, como negativo ou $> 180°$. As equações (c' e d) dão φ' e θ' por meio dos seus senos, d'onde resultam dous valores para C e c.

4.° Se for conhecido B (*dous angulos* A *e* B, *e o lado opposto* b) a equação (a') dá θ; (c') dá θ'; (b') dá C; (d' e e) dão a e c. Ou então (a) dá φ; (d) dá φ'; (b) dá c; (c e e) dão a e c.

Tambem neste caso ha duas soluções, porque φ' e θ' sendo dados em senos, o arco tem dous valores supplementares; e por tanto c na equação (b), e a na equação (d'), apparecem com dous valores: o mesmo acontece com a e C nas equações (c e b'); etc.

Os quatro casos que analysámos, resolvem-se, como acabamos de ver, por qualquer dos dous systemas das oito equações, um formado das equações sem accento, e outro das accentuadas. Sendo commum a ambos a equação (e) (*).

149. D'estas equações deduzem-se as seguintes consequencias importantes (fig. 5):

1.° A equação (e) dá

$$\frac{\cos b - \cos a}{\cos b + \cos a} = \frac{\cos \varphi - \cos \varphi'}{\cos \varphi + \cos \varphi'},$$

e, em virtude das relações achadas na *Trigon. rect.*, e por ser $c = \varphi + \varphi'$, temos

$$\tang \tfrac{1}{2}(\varphi' - \varphi) = \tang \tfrac{1}{2}(a + b) \tang \tfrac{1}{2}(a - b) \cot \tfrac{1}{2} c \ldots\ldots (15).$$

(*) Querendo resolver um triangulo espherico, conhecidos dous lados e um angulo, ou dous angulos e um lado, abaixa-se de um dos vertices um arco perpendicular sobre o lado opposto, a fim de formar dous triangulos rectangulos, um dos quaes, além do angulo recto, tenha duas partes conhecidas. Está claro, que este arco não deve partir do angulo dado no 1.° caso, nem cair no lado conhecido no 2.° Resolva-se este triangulo rectangulo, e calculem-se os dous

$\frac{1}{2}(a+b)=1$ $\frac{1}{2}(a-b)=1'$

$\frac{a}{2}+\frac{b}{2}=1$ $\frac{a}{2}=1-\frac{b}{2}$ $\frac{a}{2}-\frac{b}{2}=1'$

$\frac{a}{2}=1'-\frac{b}{2}$

Conhecidos os tres lados a, b, c de um triangulo, podemos por meio d'esta equação conhecer a semidifferença dos segmentos φ e φ', e conseguintemente os mesmos segmentos, por ser $\frac{1}{2}c$ a sua semisomma: e depois resolvendo os triangulos rectangulos ACD, BCD, obtem-se os angulos A e B, pela formula

$$\cos A = \text{tang}\,\varphi \cot b,\quad \cos B = \text{tang}\,\varphi' \cot a \ldots\ldots\ldots (16).$$

2.º A equação (d) dá do mesmo modo (*Trigonom. rect.*):

$$\frac{\text{tang}\,A - \text{tang}\,B}{\text{tang}\,A + \text{tang}\,B} = \frac{\text{sen}\,\varphi' - \text{sen}\,\varphi}{\text{sen}\,\varphi' + \text{sen}\,\varphi} = \frac{\text{tang}\,\frac{1}{2}(\varphi' - \varphi)}{\text{tang}\,\frac{1}{2}(\varphi' + \varphi)},$$

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(\varphi' - \varphi) = \frac{\text{sen}\,(A - B)}{\text{sen}\,(A + B)}\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}c \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (17).$$

Conhecidos dous angulos A *e* B, *e o lado adjacente* c, por meio d'esta equação obteremos φ e φ', e depois determinar-se-hão a e b por meio das equações (16).

3.º A equação (c') dá, practicando da mesma maneira,

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(\theta' - \theta) = \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(A + B)\,.\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(A - B)\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}C \ldots (18).$$

Conhecidos os tres angulos A, B, C; obteremos por meio d'estas equações θ e θ'; e obteremos depois os lados a e b, resolvendo os triangulos ACD e BCD, que dão

$$\cos b = \cot\theta \cot A,\quad \cos a = \cot\theta' \cot B \ldots\ldots\ldots\ldots (19).$$

---

segmentos da base φ e φ', ou os dos angulos do vertice θ e θ'. As equações (c), (c'), (d), (d') podem enunciar-se da maneira seguinte:

1.º Os cos. dos dous lados do angulo, d'onde parte o arco perpendicular, estão entre si como os cos. dos segmentos respectivos da base; as cot. d'estes lados estão como as cot. respectivas dos segmentos do angulo no vertice.

2.º As cot. dos dous angulos na base estão como os senos respectivos dos segmentos da base; os cos. d'estes angulos estão como os senos dos segmentos respectivos do angulo no vertice.

4.° Finalmente pela equação (d') teremos tambem

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\theta'-\theta)=\frac{\operatorname{sen}(a-b)}{\operatorname{sen}(a+b)}\cot\tfrac{1}{2}\mathrm{C}\ldots\ldots\ldots\ldots(20).$$

Conhecidos dous lados a, b, *e o angulo comprehendido* C, obteremos θ e θ', e depois A e B pelas equações (19).

150. As equações que acabamos de deduzir, servem tambem para demonstrar os theoremas conhecidos pelo nome de *analogias de Neper.* Egualando os valores (15) e (17) de $\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\varphi'-\varphi)$ teremos, por ser $\operatorname{sen}2\alpha=2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$,

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(a+b)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(a-b)=\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\mathrm{A}-\mathrm{B})\cos\frac{1}{2}(\mathrm{A}-\mathrm{B})}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{B})\cos\frac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{B})}\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}c\ldots(21).$$

Mas pela equação (e) temos $\dfrac{\operatorname{sen}a-\operatorname{sen}b}{\operatorname{sen}a+\operatorname{sen}b}=\dfrac{\operatorname{sen}\mathrm{A}-\operatorname{sen}\mathrm{B}}{\operatorname{sen}\mathrm{A}+\operatorname{sen}\mathrm{B}}$;

logo (*Trigonom. rect.*) $\dfrac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(a+b)}=\dfrac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\mathrm{A}-\mathrm{B})}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{A})}$.

Multiplicando ambos os membros da equação (21) por esta ultima equação, todos os termos que não desapparecem pela divisão, ficam no quadrado; e extrahindo a raiz, vem

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(a-b)&=\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\mathrm{A}-\mathrm{B})}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{B})}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}c,\\ \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(a+b)&=\frac{\cos\frac{1}{2}(\mathrm{A}-\mathrm{B})}{\cos\frac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{B})}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}c\ (*)\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots(22)$$

resultando a 2.ª d'estas equações da divisão da equação (21) pela 1.ª

(*) Como $\operatorname{tang}\frac{1}{2}c.\cos\frac{1}{2}(\mathrm{A}-\mathrm{B})$ é uma quantidade positiva, é necessario que $\operatorname{tang}\frac{1}{2}(a+b)$ e $\cos\frac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{B})$ tenham o mesmo signal; d'onde se conclue que *a semisomma de dous angulos quaesquer é sempre da mesma especie que a semisomma dos dous lados oppostos; e reciprocamente.*

Egualando os valores (18 e 20) de tang $\frac{1}{2}(\theta'-\theta)$, e operando da mesma maneira sobre a equação resultante; ou, o que val o mesmo, mudando nas equações precedentes os angulos A e B nos supplementos dos lados a e b, e reciprocamente, e depois tang $\frac{1}{2}c$ em cot $\frac{1}{2}$C; obteremos

$$\left.\begin{aligned} \tan\tfrac{1}{2}(A-B) &= \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+b)}\cot\tfrac{1}{2}C, \\ \tan\tfrac{1}{2}(A+B) &= \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\cot\tfrac{1}{2}C. \end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots(23).$$

São estas as chamadas *analogias de Neper:* e servem principalmente para achar dous lados a e b de um triangulo, conhecido o 3.º lado c, e os angulos adjacentes A e B (equações 22); ou para achar dous angulos A e B, conhecidos os dous lados oppostos a e b, e o angulo comprehendido C (equações 23).

151. *Triangulos isosceles.* Sejam C e B os dous angulos eguaes de um triangulo isosceles (fig. 6); b e c os dous lados eguaes; A o angulo do vertice, e a a base. O arco perpendicular, tirado do vertice para o meio da base, dá dous triangulos symetricos rectangulos, os quaes offerecem as seguintes relações formadas das combinações 3 a 3 dos quatro unicos elementos A, B, a, b, do triangulo isosceles. Assim, por meio d'estas relações, *dados dous dos quatro elementos de um triangulo espherico isosceles, o angulo* A *do vertice, a base* a, *um dos lados eguaes* b, *e um dos angulos eguaes* B, *podemos sempre achar os outros dous*

$$\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}a = \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}A\operatorname{sen}b\ldots\ldots\ldots(n)$$

$$\cos\ b = \cot B\cot\tfrac{1}{2}A\ldots\ldots\ldots(p)$$

$$\tan\tfrac{1}{2}a = \tan b\cos B\ldots\ldots\ldots(r)$$

$$\cos\tfrac{1}{2}A = \cos\tfrac{1}{2}a\operatorname{sen}B\ldots\ldots\ldots(q).$$

Problemas que offerecem duas soluções

152. Continuaremos a considerar os triangulos esphericos como resultando da secção de uma esphera por tres planos que passam pelo centro O. A fig. 8 tem por base o circulo KMK', e representa um hemispherio separado por um d'estes planos; os outros dous planos dão as semicircumferencias $AC\alpha$, BCB''', que na figura se representam em prespectiva, e tem por intersecção o raio CO. Os planos das tres circumferencias determinam o triangulo espherico ABC. Os arcos CA, $C\alpha$ são supplementares; e o angulo A mede a inclinação do plano $AC\alpha$ sobre a base KK'.

Se pelo raio CO tirarmos o plano MCm, perpendicularmente a esta base KK', e tomarmos depois $MA' = MA$, de uma e outra parte d'este plano MCm, obteremos um segundo plano $A'C\alpha'$ symetrico com $AC\alpha$, que dará

$$m\alpha = m\alpha',\ AC = A'C,\ C\alpha = C\alpha',\ A = A' = \alpha = \alpha'.$$

Fazendo girar o plano $AC\alpha$ em volta do raio CO, a fim de tomar todas as posições CK, CB, Cf..., este plano será perpendicular á base quando coincidir com MCm; e além d'isto, em qualquer das suas posições formará com a base dous angulos supplementares, para um e para outro lado do plano. Os arcos CB, CA, Cf..., crescem á medida que se desviam do arco perpendicular $CM = \psi$, que é o mais pequeno de todos, até ao arco perpendicular opposto Cm, que é o maior. Isto mesmo se vê resolvendo qualquer dos triangulos, ACM por ex.; porque fazendo $CA = b$, temos

$$\cos ACM = \cot b \tang \psi,$$

expressão na qual é $\tang \psi$ uma quantidade constante.

Quando o angulo ACM chega a 90°, como acontece com o arco CK, cujo plano é perpendicular a MCm, temos $\cot b = 0$, e o arco $CK = 90°$. Se o plano continúa depois a girar para $C\alpha'$, $\cos ACM$ torna-se negativo, e cresce com $\cot b$; de maneira que o arco $C\alpha'$ continua a augmentar. Tudo é symetrico dos dous lados do plano MCm, de maneira que os arcos e as inclinações serão eguaes, dous a dous para os arcos eguaes $MA = MA'$, isto é, será $CA = CA'$, e o angulo $A = A'$.

Girando por esta fórma, o plano secante começa por tornar-se cada vez mais obliquo sobre a base KMK', tornando-se CB, CA, CK; porque do triangulo rectangulo resulta ainda

$$\operatorname{sen}\psi = \operatorname{sen} b \operatorname{sen} A, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (24)$$

equação, cujo primeiro membro é constante, e na qual sen b vai primeiramente crescendo, como acaba de dizer-se, e por conseguinte sen A decrescendo ao mesmo tempo. Porém logo que o lado b chega a 90°, torna-se então CB em CK=90°=MK; e depois sen b, diminuindo, faz com que sen A augmente, e com que o angulo A, agudo para a base, tendo chegado ao seu menor valor no ponto K, comece a crescer. Este ponto K é o *pólo* da semicircumferencia MCm, e o angulo K tem por medida o arco CM=ψ=K; ou, do outro lado do plano secante o arco CM=180—ψ.

Vê-se pois que todos os arcos que partem de C (fig. 8), e passam por um ponto qualquer da base do semicirculo KMK' são < 90°, entre tanto que os outros que passam por KmK' são > 90°; e é CK=CK'=90°. Além d'isto CM = ψ, e Cm = 180°—ψ, valores de ψ resultantes da equação (24), são os limites da grandeza dos arcos CA. Quanto mais um arco se approxima de CM, mais pequeno é; e quanto mais se approxima de Cm, pelo contrario tanto maior se torna.

A inclinação dos planos sobre a base, sendo de 90° em MCm, diminue quando toma as posições CB, CA, até CK, onde se torna K = ψ; cresce depois até m, tornando-se outra vez de 90° em Cm. O angulo é agudo do lado de CM, e obtuso do lado de Cm, sendo estes ultimos angulos supplementos respectivos dos primeiros. Todos estes angulos obtusos são < 180°—ψ.

Posto isto, com facilidade se reconhecerá, se num triangulo BCA ou B'CA, ou arco CM perpendicular sobre a base AB, cae dentro ou fóra d'este triangulo, e verificar-se-hão os corollarios deduzidos no n.° 144, relativos á grandeza dos lados e dos angulos dos triangulos rectangulos.

Os problemas que offerecem duas soluções, aos quaes se costuma dar o nome de *casos duvidosos*, são aquelles, em que entram, nos dados, um angulo e um lado opposto, o que acontece nos problemas 3.° e 4.° do n.° 148.

153. 1.° Caso. *Sendo dados dous lados* a *e* b *e o angulo opposto* A. Corte-se o hemispherio KMK', (fig. 8) por um plano ACα que passe pelo centro O, e que tenha com a base uma inclinação egual ao angulo A; e tome-se depois AC = b. Será C o vertice do triangulo, o qual deve

ser fechado por um arco $CB = a$, de grandeza dada. Percorramos os differentes casos.

1.° *Supponhamos que é o angulo* $A < 90°$. O lado a que fecha o triangulo deverá então cair no espaço $\alpha A'MA$; por que, se assim não fosse, e caisse como Cf, $C\alpha'$,..... então os triangulos CAf, $CA\alpha'$,..... teriam, em vez do angulo agudo A, outro que seria o seu supplemento, do outro lado do plano αCA. Os arcos, taes como CB e CB′, são eguaes dous a dous, e tem a mesma inclinação sobre a base, quando passam por pontos B e B′ equidistantes de M. Tomemos $MA' = MA$, $MB' = MB$, os arcos serão $CB' = CA = b$, $CB' = CB = a$.

a) Consideremos primeiro o caso em que é o *lado* $b < 90°$, por ex. $b = CA$.

Se é o *lado* $a < b$, a cae no angulo $A'CA$, como CB e CB′, e temos dous triangulos BCA e B′CA, em que entram os tres elementos A, b, a, isto é, temos *duas soluções*. Neste caso um dos angulos B da base é obtuso, e o outro B′ é agudo.

Se é *o lado* $a = ou > b$, o arco a cae como Cf', e o triangulo ACf' é o unico que reune os tres elementos dados, visto que o arco Cf symetrico com Cf', fica excluido, por estar para o outro lado do plano αCA. Por tanto ha *só uma solução*. O angulo B do triangulo ACf' é agudo em f', bem como b.

b) Consideremos em segundo logar o caso em que é *o lado* $b > 90°$, por ex. $b = C\alpha$.

Se é *a somma dos lados* $a + b < 180°$, isto é, se o lado a cae no espaço ACA', como CB ou CB′, ha *duas soluções* $BC\alpha$ e $B'C\alpha$. O angulo B da base d'estes triangulos é agudo num, obtuso noutro.

Se é *a somma dos lados* $a + b = ou > 180°$, isto é, se o lado a cae no espaço $A'C\alpha$, como Cf', ha *só uma solução* $f'C\alpha$; f' e b são obtusos.

2.° *Supponhamos* agora *que é o angulo* $A > 90°$. Neste caso o lado a que fecha o triangulo, partindo de C, deve estar para outro lado do plano αCA, e cair como Cf, CB'',.....

a') Consideremos tambem em primeiro logar o caso em que é *o lado* $b < 90°$, por ex. $b = CA$.

Se é *a somma dos lados* $a + b > 180°$, isto é, se o lado a cae no espaço $\alpha' C\alpha$, como CB'' ou CB''', ha *duas soluções*, taes como ACB'' e ACB'''. Um dos dous angulos da base, B″ e B‴, é agudo, o outro obtuso.

Se é *a somma dos lados* $a + b = ou < 180°$, isto é, se o lado a cae no espaço $AC\alpha'$, como CK, ha *só uma solução* ACK. O angulo K da base é agudo como b.

b') Consideremos em segundo logar o caso em que é *o lado* $b > 90°$, por ex. $b = C\alpha$.

Se é *o lado* $a > b$, a cae no espaço $\alpha C\alpha'$, como CB'' e CB''', e ha duas soluções taes como $\alpha CB''$ e $\alpha CB'''$. O angulo da base B''' é agudo; o angulo B'' obtuso.

Se é *o lado* $a = ou < b$, a cae, como CK, no espaço $\alpha' CA$, e ha *só uma solução* possivel $KC\alpha$. O angulo K da base é obtuso com b.

Na seguinte tabella apresentâmos em resumo os differentes caracteres, que indicam a existencia de duas ou de uma só solução.

$$\text{Se } A < 90° \begin{cases} b < 90° \begin{cases} a < b \ldots\ldots\ldots \text{duas soluções} \\ a \left\{ \begin{matrix} = \\ > \end{matrix} \right. b \ldots\ldots \text{uma solução} \end{cases} \\ \\ b > 90° \begin{cases} a + b < 180° \ldots \text{duas soluções} \\ a + b \left\{ \begin{matrix} = \\ > \end{matrix} \right. 180° \ldots \text{uma solução} \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{Se } A > 90° \begin{cases} b < 90° \begin{cases} a + b > 180° \ldots \text{duas soluções} \\ a + b \left\{ \begin{matrix} = \\ < \end{matrix} \right. 180° \ldots \text{uma solução} \end{cases} \\ \\ b > 90° \begin{cases} a > b \ldots\ldots\ldots \text{duas soluções} \\ a \left\{ \begin{matrix} = \\ < \end{matrix} \right. b \ldots\ldots \text{uma solução} \end{cases} \end{cases}$$

Viu-se pela analyse precedente, que, no caso de uma só solução, B e b são da mesma especie. Mas sabemos (n.º 147) que a perpendicular abaixada do vertice C sobre a base c, cae dentro ou fóra do triangulo (o que tambem se reconhece na fig. 8), conforme os angulos A e B da base são de similhante ou differente especie; por conseguinte *nas equações* $c = \varphi \pm \varphi'$, $C = \theta \pm \theta'$, *empregar-se-ha o signal* $+$ *quando os arcos* A e b *forem da mesma especie, e* $-$ *no caso contrario, o que indicará qual das soluções, que dá o calculo* n.º 148, 3.º, *se deve adoptar.*

Cumpre notar que o valor do lado a está entre os limites CM e Cm, isto é, entre ψ e $180° - \psi$, como se deduz não só da equação (24), mas tambem da impossibilidade de construir o triangulo, quando a está fóra d'estes limites. Vê-se tambem na figura que no caso de A e a não serem da mesma especie, e de não estar o lado a comprehendido entre os limites b e $180°-b$, não ha triangulo possivel.

154. 2.º Caso. *Sendo dados dous angulos* A *e* B, *como um lado opposto* a.

Sem ser necessario discutir as differentes circumstancias na figura, este caso se reduzirá ao precedente pela consideração do triangulo supplementar $A'B'C'$ (n.º 141), no qual são conhecidos os lados $a'=180°-A$, $b'=180-B$, e o angulo $A'=180-a$. E podemos servir-nos da tabella de cima, mudando os angulos nos lados oppostos, e reciprocamente.

Como neste caso B e b são da mesma especie quando ha só uma solução, vê-se, raciocinando como no caso precedente, que: *nas equações* $c=\varphi\pm\varphi'$, $C=\theta\pm\theta'$, *se deve empregar o signal* $+$ *quando os arcos* B *e* a *forem da mesma especie, e o signal* $-$ *no outro caso; o que indicará qual das duas soluções, que dá o calculo* n.º 148, 4.º, *se deve adoptar ou rejeitar.*

O angulo A deve tambem neste caso ficar comprehendido entre os valores supplementares de ψ dados pela equação (24).

Não ha triangulo possivel, quando A e a não forem da mesma especie, e não estiver A entre os limites B e $180-B$.

155. *Sendo o triangulo rectangulo*, e CM ou Cm um dos lados, se for dado um angulo e o lado opposto, haverá duas soluções, que em certos casos poderão reduzir-se a uma só.

1.º *Dada a hypothenusa* a *e um lado* b, *achar o angulo opposto* B? A equação (n) que resolve este caso, dá B expresso em senos, os quaes correspondem a dous arcos supplementares.

Dada a hypothenusa a *e o angulo* B, *achar o lado opposto* b? A mesma equação (n) dá dous arcos supplementares para o lado opposto b.

Com tudo, em ambos estes dous casos não ha senão uma solução possivel, porque os dous arcos CA ou CA′, que fecham o triangulo CMA ou CMA′, são symetricos; e por isso devem B e b ser da mesma especie, o que faz desapparecer a indecisão.

2.º *Se forem dados um lado* b *do angulo recto e o angulo opposto* B, *a terceira parte pedida admittirá dous valores.* Porque, ou se pede a hypothenusa a, e a equação (n) dá sen a; ou se pede o terceiro lado c, e a equação (s) dá sen c; ou finalmente se pede o angulo C adjacente ao lado conhecido, e emprega-se a equação (q), que dá sen C. Vê-se pois que a incognita admitte dous valores supplementares para o arco correspondente a cada um d'estes senos.

156 Passemos a fazer algumas applicações numericas.

I. Sejam $a = 133° 19'$, $b = 57° 28'$, $A = 45° 23'$. O triangulo é impossivel, porque a não está entre $57°28'$, e o seu supplemento $122°32'$; e porque além d'isso não são A e a da mesma especie.

II. Outro tanto acontecerá se for $B = 120°$, $A = 51°$, $a = 101°$; porque tambem A não está entre $120°$ e o seu supplemento $60°$; e porque A e a não são da mesma especie.

III. Se for $b = 40° 0' 10''$, $a = 50° 10' 30''$, $A = 42° 15' 14''$, haverá uma unica solução, porque $A < 90°$, $b < 90°$, $a > b$. B é $< 90°$; e porque A e b são da mesma especie, devemos tomar $c = \varphi + \varphi'$. O calculo das equações (a, c e b) n.° 148 dá

$\tan b \ldots \bar{1}.9238563$	$\cos a \ldots \bar{1}.8064817$	$\varphi = 31°50'46''$
$\cos A \ldots \bar{1}.8693330$	$\cos \varphi \ldots \bar{1}.9291471$	$\varphi' = 44.44.50$
$\tan \varphi \ldots \bar{1}.7931893$	$-\cos b \ldots \bar{1}.8842363$	$c = 76.35.36$
	$\cos \varphi' \ldots \bar{1}.8513925$	

Para achar o angulo C do vertice, as equações (a', d' e b') dão

$\cos b \ldots \bar{1}.8842363$	$\tan b \ldots \bar{1}.9238563$	$\theta = 55° 9'59''$
$\tan A \ldots \bar{1}.9583058$	$\cot a \ldots \bar{1}.9211182$	$\theta' = 66.26.21$
$\cot \theta \ldots \bar{1}.8425421$	$\cos \theta \ldots \bar{1}.7567851$	$C = 121.36.20$
	$\cos \theta' \ldots \bar{1}.6017596$	

Finalmente a regra dos quatro senos (II) dá $B = 34° 15' 3''$.

IV. Se for $A = 42° 15' 14''$, $B = 121° 36' 20''$, $a = 50° 10' 30''$, teremos duas soluções, por ser $a < 90°$, $B > 90°$, $A + B < 180$; e por serem B e a de differente especie, tomaremos nos valores de c e C o signal —. As equações (a', c' e C) conduzem-nos ás seguintes operações.

$\cos a \ldots\ldots \bar{1}.8064817$	$\cos A \ldots\; \bar{1}.8693330$	$\text{sen}\, a \ldots\ldots \bar{1}.8853636$
$\text{tang}\, B \ldots\ldots 0.2108864 -$	$\text{sen}\, \theta \ldots\; \bar{1}.8406262 -$	$\text{sen}\, B \ldots\ldots \bar{1}.9302745$
$\cot \theta \ldots\ldots 0.0173681 -$	$\cos B \ldots - \bar{1}.7193880 -$	$\text{sen}\, A - \ldots \bar{1}.8276379$
$\theta = -43°51'16''$	$\text{sen}\, \theta' \ldots\ldots \bar{1}.9905712 +$	$\text{sen}\, b \ldots\ldots \bar{1}.9880002$
$\theta' = -78.6.19$	ou......$101°53'41''$	$b = 76°35'36''$
$C = 34.15.\ 3$	ou $C = 581.2.25$	ou $= 173.24.24$

$\text{tang}\, a \ldots\ldots\ldots 0.0788818$	$\cot A \ldots\ldots 0.0416956$
$\cos B \ldots\ldots\ldots \bar{1}.7193874 -$	$\text{tang}\, B \ldots\ldots 0.2108873 -$
$\text{tang}\, \varphi \ldots\ldots\ldots \bar{1}.7982692 -$	$\text{sen}\, \varphi \ldots\ldots \bar{1}.7259905 -$
$\varphi = -\ 32°8'50''$	$\text{sen}\, \varphi' \ldots\ldots \bar{1}.9785734 +$
$\varphi' = 72.9.\ 0$ ou............	$107°51'0''$
$c = 40.0.10$ ou..........	$c = 75.42.10$

Uma d'estas duas soluções reproduz o triangulo precedente, e vem a ser $f'CA'$ (fig. 8); a outra fCA'.

Conhecendo os tres lados, achar um angulo?

$a = 76°35'36''$	sen ....$\bar{1}.9880008$	os outros elementos do
$b = 50.10.30$	sen ....$\bar{1}.8853636$	triangulo são:
$c = 40.\ 0.10$		
$2p = 166.46.16$	$-\bar{1}.8733644$	$A = 121°36'19''8$
$p = 83.23.\ 8$		$B = 42.15.13{,}7$
$p - a = 6.47.32$	sen ....$\bar{1}.0728716$	$C = 34.15.\ 2{,}8$
$p - b = 33.12.38$	sen ....$\bar{1}.7385565$	$\psi = 40.51.\ 3{,}0$
	$\text{sen}^2 \ldots\ \bar{2}.9380637$	φ, φ', θ, θ', são dados
$\frac{1}{2}C = 27.\ 7.31{,}4$	sen ....$\bar{1}.4690318$	acima; o triangulo será
$C = 34.15.\ 2{,}8$		aqui o mesmo.

Concluiremos a trigonometria esphèrica, appresentando todos os elementos d'um triangulo espherico. Escolhendo á vontade tres d'estes elementos para servirem de dados, calcular-se-hão para exercicio os outros tres restantes (*Nota* 2.ª)