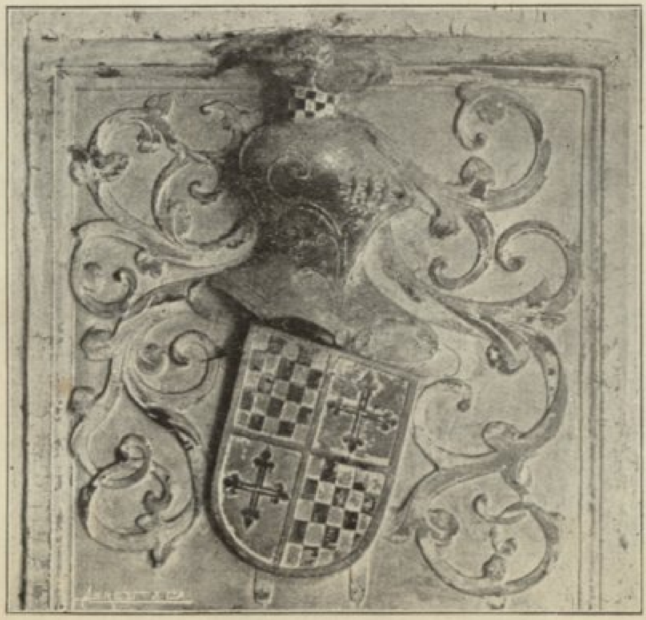
Ex-libris



Dr. Luiz da Costa e Almeida

THÉORIE ANALYTIQUE

DU

SYSTÈME DU MONDE.

PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER,
rue du Jardinet, n° 12.

THÉORIE ANALYTIQUE

DU

SYSTÈME DU MONDE,

PAR G. DE PONTÉCOULANT,

Ancien élève de l'École Polytechnique, Colonel d'État-Major, Officier de la Légion d'honneur et de l'ordre de Léopold de Belgique, membre de la Société Royale et de la Société astronomique de Londres, des Académies des Sciences de Berlin, de Palerme, etc.

SECONDE ÉDITION CONSIDÉRABLEMENT AUGMENTÉE.

TOME DEUXIÈME.

PARIS,

MALLET-BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,

Quai des Augustins, 55.

1856

(L'Auteur et l'Éditeur de cet ouvrage se réservent le droit de traduction.)

TABLE DES MATIÈRES

CONTENUES DANS LE DEUXIÈME VOLUME.

LIVRE TROISIÈME.

THÉORIE DES COMÈTES.

CHAPITRE PREMIER. — *Détermination approchée des orbites des comètes, d'après les données fournies par l'observation.*

LIVRE QUATRIÈME.

DU MOUVEMENT DE ROTATION DES CORPS CÉLESTES.

CHAPITRE V. — *Mouvement de rotation de la Lune autour de son centre de gravité.*

LIVRE CINQUIÈME.

DE LA FIGURE DES CORPS CÉLESTES.

CHAPITRE PREMIER. — *Formules générales pour déterminer les attractions des sphéroïdes quelconques.*

CHAPITRE II. — *Attractions des sphéroïdes terminés par des surfaces du second ordre.*

CHAPITRE III. — *Des attractions des sphéroïdes quelconques.*

CHAPITRE IV. — *De la figure d'une masse fluide homogène, en équilibre et douée d'un mouvement de rotation.*

CHAPITRE V. — *De la figure qui convient à l'équilibre d'une masse fluide homogène, douée d'un mouvement de rotation, et dont la figure primitive est supposée très-peu différente de la sphère.*

CHAPITRE VI. — *Comparaison de la théorie précédente aux observations.*

NOTES.

FIN DE LA TABLE DU DEUXIÈME VOLUME.

THÉORIE ANALYTIQUE

DU

SYSTÈME DU MONDE.

LIVRE TROISIÈME.

THÉORIE DES COMÈTES.

Jusqu'à la fin du XVII^e siècle on avait regardé les comètes comme des phénomènes particuliers dans le système du monde. Newton montra qu'elles sont, comme les planètes, soumises aux lois de la gravitation universelle; et il rendit un éminent service à l'astronomie en les rattachant par ce lien au reste de notre système solaire, et à la philosophie en dissipant pour jamais les vaines terreurs qu'inspirait leur apparition.

La théorie des comètes peut se diviser en deux points principaux : le premier a pour objet la détermination de leurs orbites, d'après les données fournies par l'observation; le second, celle des perturbations qu'elles peuvent éprouver par l'action des planètes. Nous allons examiner successivement dans ce livre ces deux grandes questions.

CHAPITRE PREMIER.

DÉTERMINATION APPROCHÉE DES ORBITES DES COMÈTES.

1. Les comètes sont des astres qui diffèrent des planètes, non-seulement par leurs apparences physiques, mais encore par la marche irrégulière qu'ils affectent. Elles parcourent au hasard toutes les régions de l'espace, les unes dans un sens, les autres dans la direction opposée. Les plans de leurs orbites ne sont plus compris dans une zone étroite de la sphère céleste; ils peuvent avoir entre eux des inclinaisons quelconques. Mais les comètes sont, comme les planètes, assujetties à la loi de la pesanteur universelle, et elles décrivent, en vertu de ce principe, des courbes rentrantes, dont le Soleil occupe un des foyers. Probablement, et l'analogie nous porte à le croire, les orbes des comètes sont, comme ceux des planètes, des courbes elliptiques; mais ces ellipses sont très-allongées et leurs grands axes presque infinis, puisque nous n'apercevons ces astres que dans une partie de leur cours lorsqu'ils approchent du Soleil, et qu'ensuite ils disparaissent totalement de nos yeux armés de tous les instruments que l'esprit humain inventa pour en prolonger la portée. Ce ne serait donc qu'une question de pure curiosité, intéressante sous le point de vue analytique, mais peu importante

aux besoins de l'astronomie, que celle qui aurait pour but de déterminer les éléments de l'orbite d'une comète, d'après les observations faites pendant la courte durée de son apparition, si nous ne devions plus l'apercevoir dans la suite, et si elle avait abandonné pour toujours les limites de notre système planétaire. Mais il faut observer que c'est le seul moyen que nous ayons de reconnaître cet astre, lorsque, après avoir accompli sa révolution, il reviendra vers le Soleil. Il ne faut pas, en effet, compter pour cela sur ses propriétés optiques : l'étendue du noyau, la chevelure, la disposition de la queue, l'éclat de sa lumière, toutes ces données varient à chaque instant de forme, de grandeur et d'intensité, à mesure que les comètes approchent du Soleil ou de la Terre, et les circonstances enfin dans lesquelles elles se trouvent, changent à chaque révolution, parce que la matière si rare qui compose leur chevelure et leur queue se dissipe graduellement dans l'espace.

C'est donc en comparant les éléments de la comète que l'on observe, à ceux des comètes qui ont été observées précédemment, que l'on peut s'assurer si cet astre apparaît, en effet, pour la première fois, ou si ce n'est qu'une comète déjà connue qui revient à son périhélie. Il devient donc indispensable de calculer ses éléments. Newton le premier, dans son admirable ouvrage des *Principes*, a donné une solution de ce problème, fondée sur des considérations géométriques très-ingénieuses. Halley, par des calculs immenses, l'appliqua à toutes les comètes connues de son temps. Ce travail porta son fruit, et ce grand astronome reconnut le premier l'identité des comètes observées en 1456, 1531, 1607 et 1682; résultat important, et qui valut un nouveau triomphe à la théorie de la pesanteur universelle, en montrant que la marche des comètes, si irrégulière en apparence, est aussi certaine que celle des planètes, et en mettant les géomètres à même de suivre le cours et de prédire les retours futurs de ces astres, qu'on avait regardés jusque-là comme des phénomènes à part et en dehors de toutes les lois qui régissent les autres corps du système du monde.

La question que nous allons traiter intéresse donc non-seulement les géomètres comme un bel exercice d'analyse, mais encore les astronomes comme un point de théorie qui peut avoir d'importantes applications. Aussi beaucoup d'entre eux en ont fait l'objet de leurs méditations, et nous avons aujourd'hui, pour résoudre ce problème, plusieurs méthodes qui conduisent, par des voies différentes, à des résultats également satisfaisants. Celle que nous allons exposer ici a l'avantage de se plier, avec la plus grande facilité, aux calculs numériques et de conduire par des approximations successives aux résultats les plus exacts peut-être que la question puisse comporter. Elle dérive assez simplement des formules données par Lagrange, qui le premier a traité cette question d'une manière purement analytique; mais elle a l'avantage d'éviter les principaux inconvénients que présentait, dans les applications numériques, la méthode donnée par ce grand géomètre dans les *Mémoires de Berlin* pour 1778, et qu'il a reproduite ensuite dans le second volume de la *Mécanique analytique;* inconvénients qu'il aurait sans doute reconnus lui-même, s'il eût pris le soin d'appliquer ses formules à la détermination de l'orbite de quelque comète connue.

On sait qu'il suffit, en général, de trois observations pour déterminer toutes les circonstances du mouvement d'une comète. Cette question est même susceptible d'une solution rigoureuse; mais les équations finales auxquelles elle conduit, sont tellement compliquées et d'un degré si élevé, qu'il serait absolument impossible d'en faire usage: aussi a-t-on pris le parti de recourir aux méthodes d'approximation. Celle qu'on a généralement adoptée, est fondée sur la supposition que les observations qu'on emploie sont peu éloignées l'une de l'autre, ce qui permet de traiter comme de très-petites quantités les intervalles de temps qui les séparent. On peut alors, au moyen de trois longitudes et de trois latitudes observées, déterminer tous les éléments de l'orbite, savoir : l'*excentricité,* la *longitude du périhélie* et *celle de l'époque,* l'*inclinaison,* la *longitude du nœud* et le *grand axe*. Ce dernier élément est le seul qui puisse laisser de l'incertitude, parce qu'il faudrait, pour le déterminer exactement, connaître la durée d'une révolution de la comète, ce qu'on ignore presque toujours; mais on peut remarquer que, lorsque la comète est près de son périhélie, et c'est alors seulement que nous l'apercevons, l'ellipse qu'elle décrit se confond sensiblement avec la parabole qui a son sommet en ce point et qui est décrite du même foyer; en sorte que le mouvement apparent de l'astre et les résultats de l'observation sont les mêmes que s'il avait lieu sur cette courbe. On suppose par cette raison, pour faciliter le calcul des éléments, que l'orbite est parabolique. La solution du problème contient alors une équation de plus que d'inconnues, et l'on peut en profiter pour choisir, entre les diverses combinaisons de ces équations, celle qui doit conduire à des résultats plus exacts. Lorsqu'on est parvenu, de cette manière, à une première connaissance approchée de l'orbite, en employant trois nouvelles observations séparées par des intervalles de temps plus considérables, on rectifie les éléments que l'on a obtenus, de manière à satisfaire le plus exactement possible à l'ensemble des observations connues. Plusieurs méthodes analytiques ont été imaginées dans ce but; mais comme il s'agit ici d'une application numérique bien plus que d'une question théorique, nous avons préféré à des méthodes plus savantes celle qui, à l'exactitude et à la simplicité, nous a paru réunir l'avantage d'éviter les longueurs de calcul et la perte de temps que les recherches de ce genre occasionnaient trop souvent aux astronomes.

Après ces notions nécessaires sur la solution générale du problème, nous allons en développer l'analyse; nous donnerons ensuite des exemples numériques, qui faciliteront l'application de la méthode que nous nous proposons d'exposer ici.

2. Soient x, y, z les coordonnées de la comète dans son orbite autour du Soleil, rapportées à un plan fixe que nous supposerons être celui de l'écliptique. Soit $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ sa distance au Soleil.

Soient X et Y les coordonnées de la Terre dans l'écliptique, et $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ sa distance au Soleil ou son rayon vecteur.

Enfin, désignons par ξ, η, ζ les trois coordonnées de la comète rapportées à trois axes rectangulaires passant par le centre de la Terre, en sorte qu'on ait

$$x = X + \xi, \quad y = Y + \eta, \quad z = \zeta. \quad (1)$$

Pour transformer les coordonnées x, y, z en coordonnées polaires comparables aux données fournies par l'observation, soit a la longitude géocentrique de la comète, b sa latitude et ρ sa distance au centre de la Terre projetée sur le plan de l'écliptique, enfin soit A la longitude de la Terre dans le même instant; il est aisé de voir qu'on aura

$$X = R\cos A, \quad Y = R\sin A, \quad \xi = \rho\cos a,$$
$$\eta = \rho\sin a, \quad \zeta = \rho\,\mathrm{tang}\,b.$$

Ces valeurs substituées dans les équations (1) donneront:

$$\left.\begin{aligned} x &= R\cos A + \rho\cos a,\\ y &= R\sin A + \rho\sin a,\\ z &= \rho\,\mathrm{tang}\,b. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Chaque observation fournira trois équations semblables. Si l'on ajoute ensemble les carrés de ces équations, on en tire

$$\rho^2 = R^2 + 2\rho R\cos(A - a) + \frac{\rho}{\cos^2 b}, \quad (3)$$

équation qui résulte d'ailleurs directement de la considération du triangle rectiligne formé par les droites qui joignent le Soleil, la comète et la Terre. En effet, si l'on nomme c l'angle compris entre le Soleil et la comète, ou ce que les astronomes appellent *son élongation*, R et $\frac{\rho}{\cos b}$ seront les côtés qui comprennent cet angle, et r le côté opposé. On aura donc

$$r^2 = R^2 - 2\rho R \frac{\cos c}{\cos b} + \frac{\rho^2}{\cos^2 b}. \quad (3)$$

Or, l'angle c a pour mesure l'hypoténuse d'un triangle sphérique rectangle dont b et $180° - A + a$ sont les deux autres côtés, ce qui donne

$$\cos c = -\cos(A - a)\cos b,$$

et les deux valeurs de r^2 sont par conséquent identiques.

Les observations font connaître les deux angles a et b; l'angle A et le rayon R se calculent par les Tables du Soleil. Les équations (2) renferment donc encore quatre inconnues x, y, z et ρ, et ne peuvent suffire par conséquent pour les déterminer. Il faut, pour y parvenir, faire quelque hypothèse sur la nature de l'orbite que décrit la comète : la plus simple est de supposer que cette courbe est une parabole. Dans ce cas, comme dans celui du mouvement elliptique, on peut (n° 32, livre II) exprimer les coordonnées de la comète, relatives à des observations séparées par des intervalles peu considérables, en séries ordonnées par rapport au temps et ne dépendant que de six quantités supposées connues, qui sont les trois coordonnées de la comète à une époque déterminée, et les trois coefficients différentiels de ces coordonnées. Si l'on substitue ces valeurs dans les équations (2), elles renfermeront sept inconnues, savoir, les six quantités dont nous venons de parler et l'indéterminée ρ; mais chaque observation donnant trois équations semblables, si l'on choisit trois observations faites à des intervalles de temps connus, il est clair que les neuf équations qui en résulteront, ne renfermeront plus que neuf inconnues et suffiront par conséquent pour en déterminer la valeur. On aura même, en y joignant l'équation relative au mouvement dans la parabole, une équation de plus que d'inconnues, et le problème avec ces données pourra être complétement résolu.

Prenons donc trois observations séparées par des intervalles de temps θ et θ', assez courts pour que les séries (k) du n° **32**, livre II, soient convergentes. Prenons pour l'époque d'où nous comptons le temps t, et qu'on est libre de choisir arbitrairement, celle qui répond à l'observation moyenne. Désignons par x, y, z les coordonnées de la comète à cet instant, rapportées au centre du Soleil, et par $x_{,} = \frac{dx}{dt}$, $y_{,} = \frac{dy}{dt}$, $z_{,} = \frac{dz}{dt}$ leurs trois coefficients différentiels. Désignons par x^0, y^0, z^0 les coordonnées de la comète qui répondent à l'époque $t = -\theta$ de l'observation qui a précédé, et par x', y', z' celles qui répondent à l'époque $t = \theta'$ de l'observation suivante. Si l'on développe par la méthode du numéro cité, ces six quantités suivant les puissances de θ et de θ', on aura, pour les déterminer, des expressions de cette forme :

$$x^0 = \text{v}x + \text{u}x_{,}, \quad x' = \text{v}'x + \text{u}'x_{,},$$

$$y^0 = \text{v}y + \text{u}y_{,}, \quad y' = \text{v}'y + \text{u}'y_{,},$$

$$z^0 = \text{v}z + \text{u}z_{,}, \quad z' = \text{v}'z + \text{u}'z_{,}.$$

Les lettres v, u, v′, u′ expriment des fonctions ordonnées par rapport aux puissances de θ et de θ', qui renferment en outre le rayon r et les quantités $s = \frac{rd}{dt}$ et $\frac{ds}{dt}$ relatifs à l'époque où l'on compte $t = 0$. Les valeurs de v, u, v′, u′ se déterminent en faisant successivement $t = -\theta$ et $t = \theta'$ dans les fonctions que nous avons représentées par V et U dans le n° **32**, livre II.

3. Cela posé, soient a^0, a, a' les trois longitudes géocentriques de la comète, b^0, b, b' ses trois latitudes, et ρ^0, ρ, ρ' les distances de la comète à la Terre, projetées sur le plan de l'écliptique, dans chacune des trois observations. Soient de plus A^0, A, A' les trois longitudes héliocentriques de la Terre, c'est-à-dire vues du centre du Soleil, R^0, R, R' ses trois rayons vecteurs correspondants, et enfin X^0, Y^0, X, Y, X', Y' ses coordonnées rapportées au centre du Soleil et relatives aux mêmes instants, en sorte qu'on ait

$$X^0 = R^0 \cos A^0, \quad X = R \cos A, \quad X' = R' \cos A',$$

$$Y^0 = R^0 \sin A^0, \quad Y = R \sin A, \quad Y' = R' \sin A'.$$

Les équations (2) donneront pour les trois observations faites aux époques où l'on compte $t = 0$, $t = -\theta$ et $t = \theta'$, le système d'équations suivant :

Pour la première époque :

$$\left.\begin{aligned} x &= Y + \rho\cos a, \\ y &= Y + \rho\sin a, \\ z &= \phantom{Y +{}} \rho\,\mathrm{tang}\, b. \end{aligned}\right\} (a)$$

Pour la deuxième :

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{v}x + \mathrm{u}x_{,} &= X^{o} + \rho^{o}\cos a^{o}, \\ \mathrm{v}y + \mathrm{u}y_{,} &= Y^{o} + \rho^{o}\sin a^{o}, \\ \mathrm{v}z + \mathrm{u}z_{,} &= \phantom{Y^{o} +{}} \rho^{o}\,\mathrm{tang}\, b^{o}. \end{aligned}\right\} (b)$$

Pour la troisième :

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{v}'x + \mathrm{u}'x_{,} &= X' + \rho'\cos a', \\ \mathrm{v}'y + \mathrm{u}'y_{,} &= Y' + \rho'\sin a', \\ \mathrm{v}'z + \mathrm{u}'z_{,} &= \phantom{Y' +{}} \rho'\,\mathrm{tang}\, b'. \end{aligned}\right\} (c)$$

Il ne s'agit plus que d'éliminer entre ces neuf équations les inconnues qu'elles renferment, pour avoir les valeurs des quantités qui sont nécessaires à la détermination de l'orbite de la comète. Or, nous avons vu, n° **34**, livre II, qu'il suffisait pour cela de connaître les trois distances accourcies ρ^{o}, ρ, ρ' et les trois rayons vecteurs correspondants r^{o}, r, r'. En éliminant donc, des neuf équations précédentes, les six inconnues x, y, z, $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, on parviendra à trois équations finales entre ρ^{o}, ρ et ρ' au moyen desquelles on déterminera leurs valeurs. Celles de r^{o}, r et r' seront données respectivement par une équation semblable à l'équation (3), que fournira chacune des trois observations, et l'on pourra, par conséquent, résoudre ainsi complétement la question.

Pour effectuer l'élimination précédente de la manière la plus simple, on commencera par faire disparaître des équations (b) et (c) les trois coefficients différentiels $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, et l'on remplacera ensuite dans les équations résultantes les coordonnées x, y, z par leurs valeurs tirées des équations (a), en faisant $\text{v}\text{u}' - \text{v}'\text{u} = \text{u}''$, et en supposant, pour abréger,

$$\text{X}'\text{u} - \text{X}^{\circ}\text{u}' + \text{X}\text{u}'' = \text{L}; \quad \text{Y}'\text{u} - \text{Y}^{\circ}\text{u}' + \text{Y}\text{u}'' = \text{L}'.$$

On trouvera ainsi les trois équations suivantes :

$$\left.\begin{aligned} \text{u}'\rho^{\circ} \cos a^{\circ} - \text{u}\rho' \cos a' - \text{u}''\rho \cos a &= \text{L}, \\ \text{u}'\rho^{\circ} \sin a^{\circ} - \text{u}\rho' \sin a' - \text{u}''\rho \sin a &= \text{L}', \\ \text{u}'\rho^{\circ} \operatorname{tang} b^{\circ} - \text{u}\rho' \operatorname{tang} b' - \text{u}''\rho \operatorname{tang} b &= 0. \end{aligned}\right\} (4)$$

Ces équations sont les formules principales sur lesquelles est fondée la solution de la question qui nous occupe. Si ces équations étaient rigoureuses, elles conduiraient, de quelque manière qu'on les combinât, à des résultats également exacts, mais plusieurs des quantités qu'elles renferment ne peuvent être déterminées numériquement que par approximation, et celles qui dépendent des données de l'observation participent des erreurs dont ces observations sont susceptibles ; il faudra donc avoir égard à ces circonstances dans l'usage que l'on fera des équations précédentes, et l'on verra qu'elles doivent être combinées avec beaucoup de discernement, pour que les résultats qu'on en tire offrent toujours dans la pratique des garanties suffisantes d'exactitude.

4 Nous avons dit, n° **2**, que les valeurs des quatre quantités v, u, v', u' pouvaient se développer en séries ordonnées par rapport aux puissances ascendantes du temps, et qui renferment de plus les trois indéterminées r, $s = \frac{rdr}{dt}$ et $\frac{ds}{dt}$. Il faut donc connaître préalablement les valeurs de ces trois quantités avant de pouvoir faire usage des formules précédentes. Or la première peut aisément se déterminer au moyen de l'équation (3) du n° **2**. En effet, si dans cette équation on substitue pour ρ sa valeur donnée par l'élimination de ρ° et ρ' dans les équations (4), l'équation résultante, en la résolvant, fera connaître la valeur de l'inconnue r en fonction des deux autres indéterminées s et $\frac{ds}{dt}$. Quant à ces deux dernières quantités nous donnerons le moyen de faire disparaître la première de ces formules, et la seconde n'y sera pas introduite par la substitution des valeurs de v, u, v', u', lorsqu'on ne poussera les approximations que jusqu'aux carrés du temps, ce qui suffira dans presque toutes les circonstances. Nous pouvons donc ne pas nous en occuper pour le moment, et regarder les valeurs des trois inconnues ρ°, ρ, ρ' comme complétement déterminées, en fonction de quantités toutes connues, au moyen des équations (4).

5. Pour développer ces équations reprenons les valeurs de V et U données, n° **32**, livre II.

En ne portant l'approximation que jusqu'aux quatrièmes puissances du temps t, on a

$$\left.\begin{aligned} V &= 1 - \frac{t^2}{2r^3} + \frac{st^3}{2r^5} + \left(\frac{ds}{dt} - \frac{5s^2}{r^2} + \frac{1}{3r}\right)\frac{t^4}{8r^5} \\ U &= t - \frac{t^3}{6r^3} + \frac{st^4}{4r^5}. \end{aligned}\right\} (m)$$

En faisant successivement $t = -\theta$ et $t = \theta'$, on aura les valeurs des quantités que nous avons représentées par v, u, v', u'. On trouve ainsi, en rejetant les termes inutiles,

$$v = 1 - \frac{\theta^2}{2r^3} - \frac{s\theta^3}{2r^5}, \quad v' = 1 - \frac{\theta'^2}{2r^3} + \frac{s\theta'^3}{2r^5};$$

$$u = -\theta + \frac{\theta^3}{6r^3} + \frac{s\theta^4}{4r^5}, \quad u' = \theta' - \frac{\theta'^3}{6r^3} + \frac{s\theta'^4}{4r^5};$$

et comme $u'' = vu' - v'u$, on aura

$$u'' = \theta' + \theta - \frac{(\theta' + \theta)^3}{6r^3} + \frac{s(\theta' - \theta)(\theta' + \theta)^3}{4r^5}. \quad (n)$$

Pour donner à nos formules toute la simplicité qu'elles sont susceptibles d'acquérir, il convient d'exprimer les coordonnées X°, Y°, X', Y' de la Terre, qui se rapportent aux observations extrêmes, en fonction du temps et des coordonnées X, Y relatives à l'époque où l'on compte $t = 0$. Nous supposerons donc

$$X^\circ = VX + UX_{,}, \quad X' = V'X + U'X_{,},$$

$$Y^\circ = VY + UY_{,}, \quad Y' = V'Y + U'Y_{,},$$

en faisant, pour abréger, $X_{,} = \frac{dX}{dt}$, $Y_{,} = \frac{dY}{dt}$, et en désignant par V, U, V′, U′ des fonctions semblables à celles que nous avons nommées v, u, v′, u′ et qu'on obtiendra en faisant successivement $t = -\theta$, $t = \theta'$ dans les équations (m), après y avoir changé r en R et s en S. On aura ainsi

$$V = 1 - \frac{\theta^2}{2R^3} - \frac{S\theta^3}{2R^5}, \qquad V' = 1 - \frac{\theta'^2}{2R^3} + \frac{S\theta'^3}{2R^5},$$

$$U = -\theta + \frac{\theta^3}{6R^3} + \frac{S\theta^4}{4R^5}, \quad U' = \theta' - \frac{\theta'^3}{6R^3} + \frac{S\theta'^4}{4R^5}.$$

Si l'on remplace X^o, X', Y^o, Y' par leurs valeurs précédentes dans les expressions de L et L′ (n° 3), elles deviennent

$$L = (u'' - U'')\,X - U''_{,}X_{,},$$

$$L' = (u'' - U'')\,Y - U''_{,}Y_{,},$$

en faisant, pour abréger,

$$U'' = Vu' - V'u, \quad U''_{,} = Uu' - U'u;$$

or, en vertu des valeurs de V, V′, U, U′, u, u′, on trouve

$$U'' = \theta' + \theta - \frac{\theta\theta'(\theta' + \theta)}{2R^3} - \frac{\theta'^3 + \theta^3}{6r^3}$$
$$+ \left(\frac{S\theta\theta'}{2R^5} + \frac{s(\theta^2 + \theta'^2)}{4r^5}\right)(\theta'^2 - \theta^2),$$

$$U''_{,} = \frac{\theta\theta'(\theta'^2 - \theta^2)}{6}\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}\right),$$

et, par suite,

$$U'' - u'' = \frac{\theta\theta'(\theta' + \theta)}{2}\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}\right) - \frac{\theta\theta'(\theta'^2 - \theta^2)}{2}\left(\frac{s}{r^5} - \frac{S}{R^5}\right).$$

Si l'on suppose donc, pour simplifier les formules,

$$\text{w} = -\frac{\theta\theta'(\theta'+\theta)}{2}\left\{\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{R^3}\right)-(\theta'-\theta)\left(\frac{s}{r^5}-\frac{S}{R^5}\right)\right\} \quad (p)$$

on aura, aux quantités près du cinquième ordre que nous négligeons,

$$L = \text{w}\left(X + \frac{\theta'-\theta}{3}X_,\right),$$

$$L' = \text{w}\left(Y + \frac{\theta'-\theta}{3}Y_,\right),$$

ou bien, en nommant $R_,$ et $A_,$ les valeurs du rayon vecteur et de la longitude de la Terre, relatives à l'observation correspondante au temps $j+\frac{\theta'-\theta}{3}$, qui tient le milieu entre les temps $j-\theta, j$ et $j+\theta'$ des trois observations données, et en remarquant qu'on peut supposer ici, aux quantités près que nous négligeons,

$$R_, \cos A_, = X + \frac{\theta'-\theta}{3}X_,,$$

$$R_, \sin A_, = Y + \frac{\theta'-\theta}{3}Y_,,$$

on aura simplement

$$L = \text{w}R_, \cos A_,, \quad L' = \text{w}R_, \sin A_,.$$

6. Reprenons maintenant les trois formules (4) auxquelles nous sommes parvenu dans le n° **5**; si l'on y substitue pour L et L' les valeurs précédentes, on aura

$$\left.\begin{aligned} &U'\rho^0\cos a^0 - U\rho'\cos a' - U''\rho\cos a = \text{w}R_,\cos A_,, \\ &U'\rho^0\sin a^0 - U\rho'\sin a' - U''\rho\sin a = \text{w}R_,\sin A_,, \\ &U'\rho^0\,\text{tang}\, b^0 - U\rho'\,\text{tang}\, b' - U''\rho\,\text{tang}\, b = 0. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

La première combinaison qui se présente, est celle qui consiste à déduire de ces formules les valeurs de chacune des trois inconnues ρ^0, ρ et ρ' indépendamment des deux autres. En faisant, pour abréger,

$$D = \operatorname{tang} b^0 \sin(a' - a) + \operatorname{tang} b \sin(a^0 - a') + \operatorname{tang} b' \sin(a - a^0),$$

on trouve ainsi, par les procédés ordinaires de l'élimination, toute réduction faite,

$$\left.\begin{aligned}
\rho^0 &= \frac{\text{w} R_{,}[\operatorname{tang} b \sin(A_{,} - a') - \operatorname{tang} b' \sin(A_{,} - a)]}{\text{v}' D},\\
\rho &= \frac{\text{w} R_{,}[\operatorname{tang} b^0 \sin(A_{,} - a') - \operatorname{tang} b' \sin(A_{,} - a^0)]}{\text{v}'' D},\\
\rho' &= \frac{\text{w} R_{,}[\operatorname{tang} b \sin(A_{,} - a^0) - \operatorname{tang} b^0 \sin(A_{,} - a)]}{\text{v} D}.
\end{aligned}\right\} (6)$$

Ces équations donnent, sous forme linéaire, les valeurs des trois inconnues ρ^0, ρ et ρ' en fonction de quantités qui se déduisent aisément des données de l'observation ou des Tables astronomiques; elles seraient donc les plus simples à employer à la solution du problème si l'on pouvait suffisamment compter sur leur exactitude.

En effet, si pour simplifier les formules précédentes on suppose

$$\left.\begin{aligned}
C^0 &= \operatorname{tang} b' \sin(A_{,} - a) - \operatorname{tang} b \sin(A_{,} - a'),\\
C &= \operatorname{tang} b^0 \sin(A_{,} - a) - \operatorname{tang} b' \sin(A_{,} - a^0),\\
C' &= \operatorname{tang} b^0 \sin(A_{,} - a) - \operatorname{tang} b \sin(A_{,} - a^0),
\end{aligned}\right\} (7),$$

on en conclura aisément les deux suivantes :

$$\rho^0 = -\frac{\text{v}'' C^0}{\text{v}' C}\rho, \quad \rho' = -\frac{\text{v}'' C'}{\text{v} C}\rho. \ (8)$$

Au moyen de ces équations on pourra calculer immédiatement les valeurs des deux inconnues ρ^0 et ρ', lorsque la valeur de l'inconnue ρ sera déterminée. Or, en négligeant les quantités d'un ordre supérieur au carré du temps, ce qui est permis dans les cas ordinaires, on a, n° **3**,

$$\mathrm{w} = -\frac{\theta\theta'(\theta+\theta')}{2}\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{\mathrm{R}^3}\right), \quad \mathrm{U}'' = \theta+\theta'.$$

La seconde des formules (6), en y substituant ces valeurs, devient

$$\rho = \frac{\theta\theta'\mathrm{R}_{,}\mathrm{C}}{2\mathrm{D}}\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{\mathrm{R}^3}\right); \quad (9)$$

cette équation ne contient que les deux inconnues ρ et r; jointe à l'équation (1), n° **2**, elle doit suffire pour les déterminer.

En effet, si, pour abréger, on fait

$$h = \frac{\theta\theta'\mathrm{R}_{,}\mathrm{C}}{2\mathrm{D}},$$

on aura les deux équations suivantes :

$$\left.\begin{aligned}\rho &= h\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{\mathrm{R}^3}\right),\\ r^2 &= \mathrm{R}^2 + 2\mathrm{R}\rho\cos(\mathrm{A}-a) + \frac{\rho^2}{\cos^2 b}.\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

On pourrait éliminer entre ces équations l'une des deux inconnues qu'elles renferment; en substituant par exemple dans la deuxième à la place de ρ sa valeur tirée de la première, on trouve

$$\frac{h^2}{\cos^2 b}(r^3-\mathrm{R}^3) - 2h\mathrm{R}^4r^3(r^3-\mathrm{R}^3)\cos(\mathrm{A}-a) - \mathrm{R}^6r^6(r^2-\mathrm{R}^2) = 0, \quad (a)$$

équation du huitième degré en r qui s'abaissera d'elle-même au septième en la divisant par le facteur $r-\mathrm{R}$, commun à tous les termes. Cette équation résolue par approximation, ferait connaître la valeur de r que l'on substituerait ensuite dans la première des équations (10) pour en déduire la valeur correspondante de ρ. Mais il est plus commode dans les applications de conserver les deux équations (10), et de déterminer simultanément les valeurs de ρ et de r par la méthode ordinaire des fausses positions.

Quand les valeurs de ρ et de r seront ainsi connues, on calculera aisément celles des deux distances accourcies ρ^0 et ρ' par les formules (8), et l'on en déduira les valeurs des rayons vecteurs r^0 et r' qui leur correspondent, au moyen de deux équations semblables à l'équation (1) résultant de la considération des triangles formés par les droites qui joignent les lieux du Soleil, de la comète et de la Terre, à l'instant des deux observations extrêmes. On déterminera ensuite tous les éléments de l'orbite au moyen des formules nº **34**, livre II.

7. La solution précédente, qui réduit la question envisagée d'une manière approchée, mais exacte, à une équation du septième degré à une seule inconnue, est certainement ce que l'analyse peut offrir de plus simple et de plus direct. Cette équation paraît avoir été présentée pour la première fois par Lambert, auquel nous devions déjà l'extension à l'ellipse et à l'hyperbole du beau théorème d'Euler sur l'expression du temps dans un arc parabolique (nº **30**, livre II). Ce géomètre, en considérant que le lieu apparent de la comète dans la seconde observation s'écarte peu du

2.

grand cercle mené par les lieux apparents dans la première et dans la troisième observation, et en déterminant, d'une manière très-ingénieuse, l'étendue de cet écartement, fut conduit directement, par une construction géométrique très-simple, à une équation analogue à l'équation (a) (*). Mais on n'a pas tardé à reconnaître que l'usage de cette équation est sujet, dans la pratique, à un grave inconvénient, qui résulte de ce que la fonction D, qui entre au dénominateur de la valeur de ρ, est une quantité très-petite du troisième ordre par rapport aux intervalles θ et θ'; en sorte que les erreurs des observations peuvent avoir sur sa valeur une influence très-considérable. Il est évident, en effet, que ces erreurs auront sur les quantités qui dérivent des données de l'observation, une influence d'autant plus sensible que ces quantités seront plus petites. Il importe, par conséquent, comme nous l'avons dit, n° 3, d'employer avec discernement les formules (4) pour éviter les combinaisons où entreraient des quantités sur l'exactitude desquelles on ne pourrait pas compter dans les applications numériques. Examinons donc, avant d'aller plus loin, la nature des diverses fonctions dépendantes des données de l'observation qui entrent dans ces formules, parce que la grandeur absolue de ces quantités peut influer beaucoup sur la précision des résultats qui en seront déduits.

8. Cherchons d'abord la signification des quantités que nous avons désignées par D, C°, C et C'. Con-

(*) *Mécanique analytique*, tome II, section VII.

sidérons pour cela le triangle sphérique formé par les arcs de grands cercles qui joignent les lieux de la comète dans les trois observations. Soient C^0C, C^0C' et CC' les trois côtés de ce triangle, et désignons par C', C, C^0 les angles respectivement opposés. Nommons m^0, n^0, p^0 les cosinus des angles que fait le rayon mené de la Terre à la comète à l'instant de la première observation avec les trois axes coordonnés, et représentons respectivement par m, n, p et m', n', p' les mêmes cosinus relatifs à la seconde et à la troisième observations; on aura, par les formules connues,

$$\cos(C^0C) = m^0m + n^0n + p^0p,$$
$$\cos(CC') = mm' + nn' + pp',$$
$$\cos(C^0C') = m^0m' + n^0n' + p^0p';$$

mais on a évidemment

$$m^0 = \cos a^0 \cos b^0, \quad n^0 = \sin a^0 \sin b^0, \quad p^0 = \sin b^0,$$
$$m = \cos a \cos b, \quad n = \sin a \sin b, \quad p = \sin b,$$
$$m' = \cos a' \cos b', \quad n' = \sin a' \sin b', \quad p' = \sin b'.$$

En substituant ces valeurs dans les équations précédentes, on trouve

$$\cos(C^0C) = \cos(a^0 - a)\cos b^0 \cos b + \sin b^0 \sin b,$$
$$\cos(CC') = \cos(a - a')\cos b \cos b' + \sin b \sin b',$$
$$\cos(C'C^0) = \cos(a' - a^0)\cos b^0 \cos b' + \sin b^0 \sin b'.$$

Représentons maintenant par Δ la combinaison suivante :

$$\Delta = (mn' - m'n)p^0 + (m'n^0 - m^0n')p + (m^0n - mn^0)p';$$

si l'on élève au carré cette quantité, on pourra écrire ainsi le résultat :

$$\begin{aligned}\Delta^2 = &(m^{0 2} + n^{0 2} + p^{0 2})(m^2 + n^2 + p^2)(m'^2 + n'^2 + p'^2)\\ &+ 2(m^0 m + n^0 n + p^0 p)(m^0 m' + n^0 n' + p^0 p')(mm' + nn' + pp')\\ &- (m^{0 2} + n^{0 2} + p^{0 2})(mm' + nn' + pp')^2\\ &- (m^2 + n^2 + p^2)(m^0 m' + n^0 n' + p^0 p')^2\\ &- (m'^2 + n'^2 + p'^2)(m^0 m + n^0 n + p^0 p)^2;\end{aligned}$$

équation qui se vérifie, en effet, en la développant. Or, entre les quantités m^0, n^0, p^0, etc., on a ces équations de condition

$$m^{0 2} + n^{0 2} + p^{0 2} = 1, \quad m^2 + n^2 + p^2 = 1, \quad m'^2 + n'^2 + p'^2 = 1,$$

on aura donc simplement

$$\begin{aligned}\Delta^2 = 1 &+ 2\cos(C^0C)\cos(C^0C')\cos(C'C^0)\\ &- \cos^2(C^0C) - \cos(CC') - \cos^2(C'C^0).\end{aligned}$$

Si, à la place de m^0, m, m', n, etc., on substitue, dans l'expression de Δ, les valeurs qu'elles représentent et qu'on fasse attention à la signification de la quantité que nous avons représentée par D, n° 3, il est facile de voir qu'on aura $D = \frac{-\Delta}{\cos b^0 \cos b \cos b'}$. On voit donc que la quantité D n'est qu'une combinaison des éléments du triangle C^0CC' intercepté sur la surface de la sphère par les trois lieux de la comète et qui résulte entièrement des observations.

On peut donner à la valeur de Δ une autre forme, qui a l'avantage de montrer de quelle manière cette quantité participe aux erreurs dont ces observations sont affectées. Pour cela remarquons que l'angle C du triangle C^0CC' étant opposé au côté C^0C, on a

$$\cos(C^0C') = \cos(C^0C)\cos(CC') + \sin(C^0C)\sin(CC')\cos C;$$

si l'on substitue cette valeur dans l'expression de Δ^2

et qu'on extraie la racine carrée, on trouve

$$\Delta = \sin(C^{0}C)\sin(CC')\sin C,$$

équation où l'on peut d'ailleurs changer C en C^{0} ou C en C', et réciproquement.

Il est évident maintenant que si les observations sont très-rapprochées, comme on est obligé de le supposer pour faciliter la détermination des orbites des comètes, les arcs $C^{0}C$ et CC' seront fort petits, et l'angle C différera peu de deux angles droits. La quantité Δ et, par conséquent, D sera donc une très-petite quantité du troisième ordre sur laquelle les erreurs des observations auront la plus grande influence; il faudra donc, pour l'exactitude des résultats, éviter autant que possible l'emploi de cette quantité. On peut remarquer encore que la valeur de D serait rigoureusement nulle, si C était égal à deux angles droits, c'est-à-dire si le lieu de la comète, dans la troisième observation, se trouvait dans le plan du grand cercle mené par les lieux de la première et de la seconde observation, et l'on sait, en effet, que pour que trois points dont les longitudes respectives sont a^{0}, a, a' et les latitudes b^{0}, b, b', soient situés dans le plan d'un même grand cercle, il faut qu'on ait l'équation de condition

$$\operatorname{tang} b^{0}\sin(a'-a)+\operatorname{tang} b\sin(a^{0}-a')+\operatorname{tang} b'\sin(a-a^{0})=0.$$

Passons aux quantités que nous avons nommées C, C^{0}, C', et commençons par la première : si l'on considère le triangle sphérique $SC^{0}C'$ formé par les arcs de grand cercle qui joignent les lieux du Soleil dans l'observation moyenne et ceux de la comète dans les observations extrêmes, il sera facile de voir que C est une fonction composée des éléments de ce triangle de la même manière que D se forme des éléments du triangle $C^o CC'$. Il suffit, pour s'en convaincre, d'observer que la valeur de C se déduit de celle de D en remplaçant, dans cette dernière fonction, les quantités qui se rapportent à l'observation moyenne, par celles qui dépendent de la position du Soleil à l'époque qui tient le milieu entre les instants des trois observations. Si l'on suppose donc

$$\Gamma = \sin(SC)\sin(SC')\sin S,$$

C sera du même ordre que Γ, et l'on aura $C = \frac{-\Gamma}{\cos b^o \cos b'}$; on aurait des expressions semblables pour C^o et C' en considérant les triangles sphériques SCC' et SC^oC'.

On voit, par conséquent, que les quantités C^o, C, C' sont simplement du premier ordre. Elles dépendent d'ailleurs, en partie, des lieux du Soleil qui peuvent être regardés comme exacts, puisqu'ils se calculent par les Tables. On doit donc les employer de préférence à la quantité D, qui est du troisième ordre et qui ne dépend que des données de l'observation; il conviendra même, par cette raison, de rejeter tout à fait cette quantité à cause de la grande influence que peuvent avoir sur elle les erreurs dont les observations sont susceptibles.

Enfin, il y a un cas particulier où les formules même qui ne contiennent que les trois quantités C^o, C, C' peuvent encore se trouver en défaut : c'est celui où les lieux de la comète, dans deux des trois observations, sont situés à peu près dans le même plan que le Soleil à l'époque de l'observation moyenne. On voit, en effet, que cette circonstance rend très-petite l'une des trois quantités C^0, C, C', qui ne peut plus alors être déterminée avec assez de précision pour offrir des résultats certains. Pour éviter cet inconvénient, il faudra, dans ce cas, rejeter la combinaison des formules générales du problème dans laquelle entrerait celle des quantités C^0, C, C' dont l'usage peut rendre les résultats défectueux.

9. Reprenons maintenant les trois équations (4); nous voyons, par ce qui précède, qu'il n'est pas possible d'éliminer à la fois de ces équations deux des inconnues ρ^0, ρ et ρ', parce que les formules résultantes contiendraient à leur dénominateur la fonction

$$\begin{aligned} D = \operatorname{tang} b^0 \sin(a' - a) + \operatorname{tang} b \sin(a^0 - a') \\ + \operatorname{tang} b' \sin(a - a^0), \end{aligned}$$

qui, étant une quantité du troisième ordre et formée seulement au moyen des données de l'observation, participe plus qu'aucune autre aux erreurs dont elles sont affectées. Il faut donc renoncer à l'emploi des formules (6) et borner l'usage des formules (5) à exprimer les valeurs de deux des inconnues ρ^0, ρ et ρ' en fonction de la troisième. Mais ces trois équations se trouveront ainsi réduites à deux équations distinctes, et il faudra, par conséquent, chercher dans les données de la question une nouvelle relation pour compléter le nombre d'équations rigoureusement nécessaire à la solution du problème.

Or nous observerons que nous n'avons point fait usage jusqu'ici des équations de condition qui résultent de la nature de la courbe que la comète est supposée décrire. Parmi les formules que fournit la théorie du mouvement dans la parabole, il en est plusieurs qui peuvent également remplir l'objet que nous nous proposons. Ainsi, dans les nos **20**, **27** et **33** du livre II, nous avons trouvé les formules suivantes :

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{r} &= \frac{d.rdr}{dt}, \\ \frac{2}{r} &= \frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}, \\ t &= \frac{(r+r'+c)^{\frac{3}{2}}-(r+r'-c)^{\frac{3}{2}}}{6}. \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Ces trois équations ne contiennent aucun des éléments de l'orbite parabolique, elles ne renferment que des quantités qui peuvent aisément s'exprimer en fonction des deux inconnues r et ρ et des données de l'observation : elles sont donc également propres, par cette double raison, à suppléer à l'insuffisance de l'équation (9). Aussi les géomètres qui se sont successivement occupés de la question de la détermination des orbites des comètes, les ont-ils tour à tour employées dans les différentes solutions qu'ils ont données du problème. Lagrange a fait usage de la première, mais sa solution simple et élégante sous le rapport analytique, laisse, comme nous l'avons dit, beaucoup à désirer sous le rapport de la précision dans les applications numériques. La seconde a fourni ensuite à Legendre une nouvelle solution de la question qui serait peut-être celle dont l'usage, sous le rapport de la simplicité des calculs, offrirait, dans les cas ordinaires, le plus d'avantages dans la pratique, parce qu'elle réduit en définitive le problème à la résolution d'une équation du septième degré à une seule inconnue, analogue à l'équation (a) du n° **6**, mais qui a, comme cette dernière formule, l'inconvénient de devenir insuffisante dans un cas d'exception qui se rencontre fréquemment dans la théorie des comètes, et les formules auxquelles on est alors obligé de recourir, deviennent trop compliquées pour qu'on puisse les employer dans les applications usuelles qu'on est obligé d'en faire. La troisième des formules (11) qui a, comme les deux précédentes, l'avantage d'être indépendante des éléments de l'orbite qui sont les véritables inconnues du problème, ne pouvait, par cette raison, manquer de frapper l'attention des géomètres qui ont tenté de le soumettre à l'analyse. Trembley, de l'Académie de Berlin, est, je crois, le premier qui ait songé à employer cette formule dans la question de la détermination algébrique des éléments des orbites des comètes. Lagrange, qui s'en est occupé ensuite, avait pensé que la forme transcendante de cette équation devait empêcher qu'elle ne fût d'aucun usage utile pour les applications numériques (*). M. Yvori, géomètre anglais très-distingué, est depuis revenu sur cette idée, et il a pensé avec raison que, comme il ne s'agit point ici d'une solution rigoureuse qui exigerait la résolution analytique de cette équation, mais d'une simple solution numérique qui permet d'y satisfaire par des essais, son emploi dans la question qui nous occupe, ne compliquerait en rien le problème qui,

(*) Voir *Mécanique analytique*, livre II, section VII.

dans toutes les méthodes connues jusqu'ici, se résout toujours en dernière analyse par les procédés ordinaires d'approximation. Comme la méthode dont il s'agit, se prête d'ailleurs aisément aux applications numériques, qu'elle conduit en général aux résultats les plus exacts que la question comporte, qu'elle embrasse à la fois tous les cas qui peuvent se présenter, et qu'enfin elle a été adoptée par un grand nombre d'astronomes pour la réduction de leurs observations, nous allons l'exposer ici avec tous les détails nécessaires pour en faciliter l'usage.

10. Reprenons les trois formules (5) dont l'usage doit se borner désormais, n° **7**, à déterminer deux des inconnues ρ^0, ρ et ρ' en fonction de la troisième. On déduit d'abord de ces équations les deux suivantes :

$$\begin{aligned} &U\rho' \sin(A_{\prime} - a') - U'\rho^0 \sin(A_{\prime} - a^0) + U''\rho \sin(A_{\prime} - a) = 0, \\ &U\rho' \tang b' \quad - U'\rho^0 \tang b^0 \quad + U''\rho \tang b \quad = 0, \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\left.\begin{aligned} \rho^0 &= \frac{U''\rho}{U'} \cdot \frac{\tang b' \sin(A_{\prime} - a) - \tang b \sin(A_{\prime} - a')}{\tang b' \sin(A_{\prime} - a^0) - \tang b^0 \sin(A_{\prime} - a')}, \\ \rho' &= -\frac{U''\rho}{U} \cdot \frac{\tang b \sin(A_{\prime} - a^0) - \tang b^0 \sin(A_{\prime} - a)}{\tang b' \sin(A_{\prime} - a^0) - \tang b^0 \sin(A_{\prime} - a')}. \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Ces valeurs coïncident d'ailleurs avec celles que nous avons trouvées n° **5**, en substituant dans ces dernières formules à la place de C^0, C et C' les quantités que ces lettres représentent.

Les formules précédentes seront d'un usage sûr et commode toutes les fois que leur dénominateur ne sera pas une quantité trop petite. Or nous avons vu, n° **6**, que cette quantité que nous avons représentée par C dans le n° 5, se réduit à zéro toutes les fois que les lieux de la comète dans les deux observations extrêmes se trouvent compris dans le plan du même grand cercle que le lieu du Soleil au moment de l'observation moyenne, et plus exactement au moment qui tient le milieu entre la première et la troisième observation.

Toutes les fois donc que cette coïncidence n'aura pas lieu ou exactement ou à fort peu près, on pourra se servir des formules (12) qui sont les plus simples que l'on puisse employer pour la détermination des rapports $\frac{\rho''}{\rho}$ et $\frac{\rho'}{\rho}$.

Les quantités qui dans ces formules dépendent soit des données de l'observation, soit de la position du Soleil dans l'écliptique, se calculeront aisément d'après les circonstances connues du mouvement de la comète ou par le moyen des Tables astronomiques.

Quant aux quantités $\frac{\mathrm{U}''}{\mathrm{U}}$ et $\frac{\mathrm{U}''}{\mathrm{U}'}$, elles sont fonctions des intervalles θ et θ' et des inconnues du problème; en effet, on a (n° 4)

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{U}''}{\mathrm{U}} &= -\frac{\theta+\theta'}{\theta}\left[1-\frac{\theta'(2\theta+\theta')}{6r^3}+\frac{s\theta'(\theta'^2+\theta\theta'-\theta^2)}{4r^5}\right],\\ \frac{\mathrm{U}''}{\mathrm{U}'} &= \frac{\theta+\theta'}{\theta'}\left[1-\frac{\theta(2\theta'+\theta)}{6r^3}+\frac{s\theta(\theta'^2-\theta\theta'-\theta^2)}{4r^5}\right].\end{aligned}\right\}\quad(13)$$

Lorsqu'on fera l'application des formules (12), on pourra, dans les premiers essais, négliger le carré du temps dans les expressions précédentes; ce qui donnera

$$\frac{\mathrm{U}''}{\mathrm{U}} = -\frac{\theta+\theta'}{\theta},\quad \frac{\mathrm{U}''}{\mathrm{U}'} = \frac{\theta+\theta'}{\theta'}.$$

On substituera ces valeurs dans les formules (12) qui ne contiendront plus que des quantités toutes connues, et qui serviront à déterminer les rapports $\frac{\rho^{\circ}}{\rho}$ et $\frac{\rho'}{\rho}$ avec une exactitude suffisante pour en déduire les premières valeurs approchées de toutes les inconnues du problème.

Dans l'approximation suivante on conservera les carrés du temps dans les expressions de $\frac{\text{u}''}{\text{u}}$ et de $\frac{\text{u}''}{\text{u}'}$, ce qui donnera

$$\frac{\text{u}''}{\text{u}}=-\frac{\theta+\theta'}{\theta}\left[1-\frac{\theta'(2\theta+\theta')}{6r^3}\right],\ \frac{\text{u}''}{\text{u}'}=\frac{\theta+\theta'}{\theta'}\left[1-\frac{\theta(2\theta'+\theta)}{6r^3}\right].$$

On remplacera r par sa valeur donnée par la première approximation, ces expressions ne renfermeront plus ainsi que des quantités toutes connues. On pourra d'ailleurs, pour plus d'exactitude, conserver l'inconnue r dans les expressions de $\frac{\text{u}''}{\text{u}}$ et $\frac{\text{u}''}{\text{u}'}$, et comme on se contente de satisfaire aux équations du problème par des essais, les calculs n'en seront que légèrement compliqués; en substituant dans les formules (12) les valeurs précédentes de $\frac{\text{u}''}{\text{u}}$ et de $\frac{\text{u}''}{\text{u}'}$, elles serviront à déterminer des valeurs plus approchées des deux rapports $\frac{\rho^{\circ}}{\rho}$ et $\frac{\rho'}{\rho}$.

Pour aller plus loin, il faudrait connaître l'indéterminée s qui entre dans les expressions de $\frac{\text{u}''}{\text{u}}$ et $\frac{\text{u}''}{\text{u}'}$, lorsqu'on y conserve les termes du troisième ordre par rapport aux intervalles θ et θ'. Cette quantité ne peut s'obtenir exactement que lorsque toutes les inconnues du problème sont déterminées, mais on peut l'évaluer avec une précision suffisante au moyen des résultats obtenus par les précédentes approximations. En effet, on observera que r^0 et r' désignant les rayons vecteurs de la comète correspondants aux intervalles θ et θ', on a, aux quantités près de l'ordre θ^2, n° 34, livre II,

$$r^{02} = r^2 - 2rs\theta, \quad r'^2 = r^2 + 2rs\theta',$$

d'où il est aisé de conclure

$$\frac{s\theta}{4r^3} = \frac{1}{6(r^0r)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{6r^3}, \quad \frac{s\theta'}{4r^3} = \frac{1}{6r^3} - \frac{1}{6(r'r)^{\frac{3}{2}}};$$

en substituant ces valeurs dans les formules (13) et négligeant seulement les termes du quatrième ordre, on aura

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\text{u}''}{\text{u}} &= -\frac{\theta+\theta'}{\theta}\left\{1 - \frac{\theta'(2\theta+\theta')}{6r^3} + (\theta'^2+\theta\theta'-\theta^2)\left[\frac{1}{6r^3} - \frac{1}{6(r'r)^{\frac{3}{2}}}\right]\right\}, \\
\frac{\text{u}''}{\text{u}'} &= \frac{\theta+\theta'}{\theta'}\left\{1 - \frac{\theta(2\theta'+\theta)}{6r^3} + (\theta'^2-\theta\theta'-\theta^2)\left[\frac{1}{6(r^0r)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{6r^3}\right]\right\}.
\end{aligned}\right\} (14)$$

Telles sont les expressions qu'il faudra employer dans la troisième approximation. Lorsqu'on y aura remplacé r^0, r, r' par leurs valeurs données par les approximations précédentes, elles ne contiendront plus que des quantités toutes connues; on pourra donc les substituer dans les formules (12) et l'on parviendra ainsi par des approximations successives à une solution aussi exacte que la question le comporte.

On peut faire prendre aux expressions précédentes une forme plus appropriée aux applications numériques. Pour cela, observons que les deux valeurs (13) peuvent s'écrire ainsi :

$$\frac{\text{u}''}{\text{u}} = -\frac{\theta+\theta'}{\theta}\left\{1-\frac{\theta\theta'}{2r^3}+\frac{s\theta\theta'(\theta'-\theta)}{2r^5}-\frac{\theta'(\theta'-\theta)}{6r^3}+\frac{s\theta'(\theta'^2-\theta\theta'+\theta^2)}{4r^5}\right\},$$

$$\frac{\text{u}''}{\text{u}'} = \frac{\theta+\theta'}{\theta'}\left\{1-\frac{\theta\theta'}{2r^3}+\frac{s\theta\theta'(\theta'-\theta)}{2r^5}+\frac{\theta(\theta'-\theta)}{6r^3}-\frac{s\theta(\theta'^2-\theta\theta'+\theta^2)}{4r^5}\right\}.$$

En combinant entre elles les deux équations

$$r^0 = r - \frac{s\theta}{r} \quad \text{et} \quad r' = r + \frac{s\theta'}{r},$$

on trouve aisément les valeurs suivantes :

$$\frac{\theta\theta'}{2r^3} - \frac{s\theta\theta'(\theta'-\theta)}{2r^5} = \frac{\theta\theta'}{2(r^0rr')},$$

$$\frac{\theta'-\theta}{6r^3} - \frac{s(\theta'^2-\theta\theta'+\theta^2)}{4r^5} = \frac{1}{\theta'+\theta}\left\{\frac{\theta'^2}{6(rr')^{\frac{3}{2}}} - \frac{\theta^2}{6(r^0r)^{\frac{3}{2}}}\right\}.$$

On aura donc, aux quantités près que nous négligeons,

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\text{u}''}{\text{u}} &= \frac{-\dfrac{\theta+\theta'}{\theta}\left[1-\dfrac{\theta\theta'}{2(r^0rr')}\right]}{1+\dfrac{\theta'}{\theta'+\theta}\left[\dfrac{\theta'^2}{6(rr')^{\frac{3}{2}}}-\dfrac{\theta^2}{6(r^0r)^{\frac{3}{2}}}\right]},\\
\frac{\text{u}''}{\text{u}'} &= \frac{\dfrac{\theta+\theta'}{\theta'}\left[1-\dfrac{\theta\theta'}{2(r^0rr')}\right]}{1-\dfrac{\theta}{\theta'+\theta}\left[\dfrac{\theta'^2}{6(rr')^{\frac{3}{2}}}-\dfrac{\theta^2}{6(r^0r)^{\frac{3}{2}}}\right]},
\end{aligned}\right\} \quad (15)$$

formules dans lesquelles on substituera pour r^0, r et r' leurs valeurs résultant des calculs précédents et qui ne contiendront plus que des quantités toutes connues.

11. Considérons maintenant le cas d'exception où le dénominateur des formules (12) devient une quantité très-petite ou rigoureusement égale à zéro. Il faut, dans ce cas, recourir aux formules primitives (5); en combinant entre elles les deux premières, on en tire aisément les valeurs suivantes :

$$\left.\begin{aligned} \rho^0 &= \frac{\text{u}''\rho \sin(a'-a) - \text{w}\,\text{R}_{,} \sin(\text{A}_{,}-a')}{\text{u}' \sin(a'-a^0)} \\ \rho' &= \frac{\text{u}''\rho \sin(a-a^0) + \text{w}\,\text{R}_{,} \sin(\text{A}_{,}-a^0)}{\text{u} \sin(a^0-a')}. \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

Ces formules, d'un usage un peu moins simple dans les applications que les formules (12), à cause du nouveau facteur indéterminé w qu'elles renferment, ne seront pas sujettes à l'inconvénient des premières dans le cas d'exception que nous examinons. Elles devront même leur être préférées, toutes les fois que le mouvement en longitude, assez grand par lui-même, sera plus rapide que le mouvement en latitude. Dans le cas contraire, il vaudra mieux se servir des formules (12), sauf le cas d'exception qui oblige à en rejeter complétement l'emploi.

Les valeurs des deux quantités $\frac{\text{u}''}{\text{u}'}$, $\frac{\text{u}''}{\text{u}}$ se calculeront par des approximations successives, comme nous l'avons dit dans le numéro précédent. Quant aux valeurs des deux quantités $\frac{\text{w}_{,}}{\text{u}'}$, $\frac{\text{w}}{\text{u}}$, nous remarquerons que nous avons supposé, nº 5,

$$\text{w} = -\frac{\theta\theta'(\theta+\theta')}{2}\left[\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{\text{R}^3}\right) - (\theta'-\theta)\left(\frac{s}{r^3}-\frac{\text{S}}{\text{R}^3}\right)\right].$$

Cette quantité étant déjà de l'ordre θ^3, il suffira dans les expressions de $\frac{}{\text{u}}$ et $\frac{\text{w}}{\text{u}'}$ de faire $\text{u} = -\theta$ et $\text{u}' = \theta'$.

Dans les premiers essais on pourra supposer

$$\mathrm{W}=0, \quad \frac{\mathrm{U}''}{\mathrm{U}}=-\frac{\theta+\theta'}{\theta}, \quad \frac{\mathrm{U}''}{\mathrm{U}'}=\frac{\theta+\theta'}{\theta'},$$

ce qui donne

$$\rho^{\circ}=\frac{\theta+\theta'}{\theta'}\cdot\frac{\rho\sin(a'-a)}{\sin(a'-a^{\circ})}, \quad \rho'=\frac{\theta+\theta'}{\theta}\cdot\frac{\rho\sin(a-a^{\circ})}{\sin(a'-a^{\circ})}; \tag{17}$$

et l'on aura ainsi les valeurs des rapports $\frac{\rho^{\circ}}{\rho}$, $\frac{\rho'}{\rho}$, au moyen de quantités toutes connues, avec une précision suffisante pour diriger les premiers calculs.

Dans la seconde approximation on supposera

$$\frac{\mathrm{U}''}{\mathrm{U}'}=\frac{\theta+\theta'}{\theta'}\left[1-\frac{\theta(2\theta+\theta')}{6r^3}\right], \quad \frac{\mathrm{U}''}{\mathrm{U}}=-\frac{\theta+\theta'}{\theta}\left[1-\frac{\theta'(2\theta+\theta')}{6r^3}\right],$$

et

$$\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{U}'}=-\frac{\theta(\theta+\theta')}{2}\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{\mathrm{R}^3}\right), \quad \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{U}}=\frac{\theta(\theta+\theta')}{2}\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{\mathrm{R}^3}\right). \tag{18}$$

En remplaçant dans ces expressions r par sa valeur résultante de l'approximation précédente, elles ne contiendront plus que des quantités toutes connues : on pourra donc calculer leurs valeurs numériques, et en les substituant dans les formules (16), elles ne renfermeront plus que les trois inconnues ρ°, ρ et ρ'.

Cette seconde approximation suffira pour les cas ordinaires; pour aller plus loin, il faudrait déterminer les quantités $\frac{\mathrm{U}''}{\mathrm{U}'}$ et $\frac{\mathrm{U}''}{\mathrm{U}}$ au moyen des formules (14) ou (15), n° **10**. Quant aux deux quantités $\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{U}}$ et $\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{U}'}$, nous observerons que l'on a, n° **10**,

$$\frac{1}{r^3}-\frac{s(\theta'-\theta)}{r^5}=\frac{1}{(r^{\circ}rr')};$$

on aura de même

$$\frac{1}{R^3} - \frac{S(\theta' - \theta)}{R^5} = \frac{1}{(R^0 RR')^3};$$

en vertu de ces valeurs, on trouvera, aux quantités près que nous négligeons,

$$\left.\begin{aligned}\frac{w}{u'} &= -\frac{\theta(\theta'+\theta)}{2}\left[\frac{1}{(r^0 rr')} - \frac{1}{(R^0 RR')}\right],\\ \frac{w}{u} &= \frac{\theta'(\theta'+\theta)}{2}\left[\frac{1}{(r^0 rr')} - \frac{1}{(R^0 RR')}\right].\end{aligned}\right\} \quad (19)$$

Telles sont les valeurs qu'il faudra employer dans la troisième approximation, et comme elles ne contiennent plus que les trois indéterminées r^0, r et r', elles pourront se calculer, ainsi que les quantités $\frac{u''}{u'}$, $\frac{u''}{u}$, au moyen des données fournies par les approximations précédentes. On obtiendra ainsi, par des substitutions successives, les valeurs de ρ^0 et de ρ', exprimées en fonction de ρ, avec toute la précision à laquelle il est permis d'atteindre.

12. On pourrait en combinant entre elles les équations (5), trouver encore entre les inconnues et les données du problème, un grand nombre d'autres relations qui serviraient de même à déterminer deux des inconnues ρ^0, ρ et ρ' en fonction de la troisième; mais comme les formules précédentes suffisent pour tous les cas qui peuvent se présenter et sont celles dont l'usage nous a paru le plus commode pour les applications numériques, nous n'entrerons pas à ce sujet dans une digression qui ne conduirait à aucun résultat utile.

13. Lorsqu'on aura ainsi déterminé les deux inconnues ρ^0 et ρ' en fonction de ρ au moyen des formules (12) ou (16), chacune des observations de la comète pouvant fournir une équation semblable à l'équation (1), n° **2**, on aura pour déterminer les trois rayons vecteurs r^0, r, r', correspondants aux trois distances accourcies ρ^0, ρ et ρ', les équations suivantes :

$$\left.\begin{aligned} r^{02} &= R^{02} + 2R^0\rho^0\cos(A^0 - a^0) + \frac{\rho^{02}}{\cos^2 b^0}, \\ r^2 &= R^2 + 2R\,\rho\,\cos(A - a) + \frac{\rho^2}{\cos^2 b}, \\ r'^2 &= R'^2 + 2R'\rho'\cos(A' - a') + \frac{\rho'^2}{\cos^2 b'}. \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

Nommons c la corde qui joint les deux lieux de la comète qui correspondent aux observations extrêmes, x^0, y^0, z^0 et x', y', z' représentant les coordonnées rectangulaires de ces points, on aura

$$c^2 = (x^0 - x')^2 + (y^0 - y')^2 + (z^0 - z')^2,$$

ou bien, en substituant pour x^0, y^0, z^0, x', y', z' leurs valeurs fournies par les équations semblables aux équations (2), n° **2**, que donnent les deux observations extrêmes de la comète :

$$\left.\begin{aligned} c^2 = r^{02} + r'^2 - 2[&r^0 r'\cos(a^0 - a') + r^0 R\cos(A - a^0) \\ &+ r'R\cos(A - a') + R^0R'\cos(A' - A^0)]. \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

Enfin $\theta + \theta'$ étant l'intervalle de temps qui sépare les deux observations extrêmes, et c la corde qui soustend l'arc parabolique parcouru dans cet intervalle, on aura

$$\theta + \theta' = \frac{(r + r' + c)^{\frac{3}{2}} - (r + r' - c)^{\frac{3}{2}}}{6}. \quad (22)$$

Si l'on substitue dans cette formule à la place de c sa valeur déterminée par l'équation (21), elle ne renfermera plus que les quatre inconnues r^0, r', ρ^0 et ρ'; en la joignant donc aux deux formules (12) ou (16) et aux trois équations (20), on aura entre les six inconnues ρ^0, ρ, ρ', r^0, r, r' six équations qui suffiront pour les déterminer. Ces équations ne pouvant être résolues à cause de la complication des formules qui en résulteraient, on se contentera d'y satisfaire par des essais en les considérant toutes à la fois, et l'on obtiendra ainsi par les méthodes ordinaires d'approximation, les valeurs de toutes les inconnues du problème avec tel degré d'exactitude qu'on se sera proposé d'atteindre.

Pour cela, on commencera par faire sur la valeur de ρ une première hypothèse arbitraire, on déterminera ensuite les valeurs correspondantes de ρ^0 et de ρ' par les formules (12) ou par les formules (16), selon les différents cas qui pourront se présenter. On calculera ensuite les valeurs des deux rayons vecteurs r^0 et r' au moyen de la première et de la troisième des équations (20) et celle de la corde c qui joint les deux extrémités de ces rayons au moyen de la formule (21). Ces valeurs substituées dans la formule (22) devraient satisfaire rigoureusement à cette équation, si la valeur que l'on a supposée à la distance ρ était exacte; elles feront donc connaître dans quel sens tombe l'erreur de l'hypothèse qu'on a faite sur cette valeur, et l'on parviendra ainsi après quelques essais à la déterminer avec toute la précision désirable.

14. Voici maintenant comment, au moyen des six quantités ρ^0, ρ, ρ', r^0, r et r' supposées connues, on obtiendra par des formules très-simples tous les éléments de l'orbite parabolique.

Connaissant les deux rayons vecteurs r^0, r' et la corde c qui joint leurs extrémités, on pourra calculer la distance périhélie D et l'anomalie v^0 qui répond au premier rayon vecteur r^0. En effet, si l'on considère le triangle formé par les trois droites r^0, r' et c, qu'on désigne par ζ l'angle compris entre les deux rayons vecteurs r^0 et r', et que, pour abréger, on suppose $r^0 + r' + c = 2p$, $r^0 + r' - c = 2q$, on trouvera aisément, nº **27**, livre I^{er} :

$$\frac{r^0 r'}{1 + \text{tang}^2 \frac{1}{2}\zeta} = pq,$$

$$\text{tang}\,\frac{1}{2}\zeta = \sqrt{\text{D}}\;\frac{\sqrt{p} - \sqrt{q}}{\sqrt{pq}}.$$

En substituant dans cette seconde équation pour tang $\frac{1}{2}\zeta$ sa valeur tirée de la première, on en déduit

$$\text{D} = \frac{(p - r^0)(p - r')}{(\sqrt{p} - \sqrt{q})^2}. \quad (23)$$

On a d'ailleurs, par l'équation de l'orbite parabolique, $r^0 = \text{D}(1 + \text{tang}^2 \frac{1}{2} v^0)$, d'où l'on conclut

$$\text{tang}\,\frac{1}{2} v^0 = \frac{r^0 - \sqrt{pq}}{\sqrt{p - r^0}\,\sqrt{p - r'}}. \quad (24)$$

On peut encore déterminer l'anomalie v^0 et la distance périhélie D par les formules suivantes ; de la valeur précédente de tang $\frac{1}{2} v^0$, en observant que l'on a $c = p - q$, il est facile de conclure

$$\sin\frac{1}{2} v^0 = \frac{(p - r')\sqrt{p} - (p - r^0)\sqrt{q}}{c\sqrt{r^0}}. \quad (25)$$

Connaissant la valeur de $\sin \frac{1}{2} v^0$, on en conclura celle de $\cos \frac{1}{2} v^0$, et l'on aura ensuite la distance périhélie par la formule ordinaire

$$\cos^2 \frac{1}{2} v^0 = \frac{D}{r^0}. \quad (26)$$

Connaissant ainsi la distance périhélie D et l'anomalie v^0, on cherchera dans la Table des Comètes le temps T, qui répond à cette anomalie dans la parabole dont la distance périhélie est l'unité, et en faisant ensuite

$$t = D^{\frac{3}{2}} T,$$

on aura le temps t employé par la comète à parcourir l'anomalie v^0. Ce temps ajouté à l'époque de première observation si la comète s'avance vers son périhélie, ou en étant retranché si elle l'a déjà dépassé, fera connaître l'instant du passage au périhélie. On pourra même, si on le trouve plus commode, calculer directement le temps t par la formule du n° **26**, livre II,

$$t = (2 D^3)^{\frac{1}{2}} \left(\text{tang} \frac{1}{2} v^0 + \frac{1}{3} \text{tang}^3 \frac{1}{2} v^0 \right), \quad (27)$$

en ayant soin de diviser le second membre par l'arc du moyen mouvement diurne, pour que le temps t soit exprimé en jours moyens solaires, conformément à ce qui a été dit n° **22**, livre II.

Ayant ainsi déterminé la distance périhélie et l'instant du passage de la comète au périhélie, on aura aisément les éléments d'où dépend la position de l'orbite par les formules suivantes.

Désignons par π^0 et λ^0 la longitude et la latitude héliocentriques de la comète, au moment de la première observation; si l'on projette sur le plan de l'écliptique le lieu de la comète dans le même instant, et que l'on considère les deux triangles sphériques formés autour du Soleil et autour de la Terre, regardés tour à tour comme les centres de la sphère céleste, par les rayons vecteurs menés à la comète, à sa projection sur l'écliptique, et par la droite qui joint les centres de la Terre et du Soleil, on trouvera aisément les relations qui suivent :

$$\sin\lambda^0 = \frac{\rho^0}{r^0}\tang b^0, \quad \cot\lambda^0 \sin(\pi^0 - A^0) = \cot b^0 \sin(a^0 - A^0).$$

On aurait de même, en appelant π' et λ' la longitude et la latitude de la comète dans la troisième observation,

$$\sin\lambda' = \frac{\rho'}{r'}\tang b', \quad \cot\lambda' \sin(\pi' - A') = \cot b' \sin(a' - A').$$

A l'aide de ces formules, où l'on connaît les rayons vecteurs r^0 et r', ainsi que les distances accourcies ρ^0 et ρ', on pourra déterminer les longitudes et les latitudes héliocentriques π^0 et λ^0, π' et λ' au moyen des longitudes et des latitudes géocentriques a^0, b^0, a' et b' données par l'observation.

Le mouvement de la comète sera direct ou rétrograde selon que la quantité $\pi' - \pi^0$ sera positive ou négative.

Désignons par α la longitude du nœud ascendant, et par φ l'inclinaison de l'orbite à l'écliptique; selon que l'on considérera l'une ou l'autre des observations extrêmes, on aura

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\operatorname{tang}\lambda^{\circ}}{\sin(\pi^{\circ} - \alpha)}, \quad \operatorname{tang}\varphi = \frac{\operatorname{tang}\lambda'}{\sin(\pi' - \alpha)}. \quad (28)$$

En comparant ces deux valeurs, il est aisé d'en conclure

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{\operatorname{tang}\lambda^{\circ}\sin\pi' - \operatorname{tang}\lambda'\sin\pi^{\circ}}{\operatorname{tang}\lambda^{\circ}\cos\pi' - \operatorname{tang}\lambda'\cos\pi^{\circ}}; \quad (29)$$

cette formule servira à déterminer la longitude α et l'on en conclura l'inclinaison φ par l'une des deux formules (28), en ayant soin de choisir celle dans laquelle le numérateur et le dénominateur du second membre seront des plus grands nombres, comme la moins susceptible d'être affectée des erreurs des observations.

La même valeur de tang α pouvant appartenir aux deux angles α et $180^{\circ} + \alpha$, pour déterminer lequel de ces deux angles il faudra choisir, on doit observer que les latitudes boréales sont toujours supposées positives et les latitudes australes négatives, et que l'angle φ doit toujours être supposé positif et moindre qu'un angle droit. Par conséquent $\sin(\pi - \alpha)$ doit être de même signe que tang λ. Cette condition détermine l'angle α, et cet angle sera la longitude du nœud ascendant si le mouvement de la comète est *direct;* il faudra lui ajouter 180 degrés pour avoir la position du même nœud si le mouvement est *rétrograde*.

Enfin, si l'on nomme η la distance de la comète à son nœud ascendant au moment de la première observation, comptée sur le plan de l'orbite, η sera l'hypoténuse d'un triangle sphérique rectangle dont les deux côtés sont $\pi^0 - \alpha$ et λ^0. On aura donc

$$\cos \eta = \cos \lambda^0 \cos(\pi^0 - \alpha). \quad (30)$$

L'anomalie v^0 ajoutée à l'angle η ou retranchée du même angle, selon que la comète marchera vers le périhélie ou l'aura déjà dépassé à l'instant de la première observation, sera la distance du périhélie au nœud comptée sur l'orbite, et en lui ajoutant la longitude α du nœud ascendant on aura $\alpha + \eta \pm v^0$ pour *le lieu du périhélie sur l'orbite.*

15. Voici donc en résumé la marche à suivre pour déterminer de la manière la plus simple et la plus exacte, par la méthode précédente, les éléments de l'orbite parabolique d'une comète dont on a réuni un certain nombre d'observations.

On choisira trois observations séparées par des intervalles de temps assez courts pour que les séries représentées par les quantités u, v, u', v', etc., soient convergentes, sans cependant être trop resserrées, parce que dans ce cas le mouvement géocentrique de la comète étant très-peu considérable, les erreurs des observations ont une plus grande influence sur les résultats. En prenant généralement des observations dont les deux extrêmes soient séparées par un intervalle de temps qui n'excède pas dix à douze jours, on satisfera à la première condition sans tomber dans l'inconvénient d'opérer sur des observations trop rapprochées.

Les trois longitudes a^0, a, a' de la comète, et les trois latitudes correspondantes b^0, b, b' sont données par l'observation ; on calculera par les Tables du Soleil, le rayon vecteur $R_{,}$ et la longitude de cet astre dans l'écliptique, qui répondent à l'instant qui tient le milieu entre les époques des trois observations ; en ajoutant 180 degrés à cette longitude, on aura la longitude correspondante de la Terre vue du Soleil ou l'angle que nous avons représenté par $A_{,}$.

On calculera ensuite les trois quantités C^{o}, C, C' au moyen des formules (7), et l'on formera les diverses fonctions trigonométriques qui entrent dans les formules précédentes et qui dépendent soit des données de l'observation, soit de la position du Soleil dans l'écliptique.

Quant à l'expression du temps t qui entre dans ces formules, il faut remarquer qu'ayant pris pour unité la moyenne distance de la Terre au Soleil, le temps doit être représenté par les arcs du moyen mouvement solaire, conformément à ce que nous avons dit nº **22**, livre II. Si l'on suppose donc que les intervalles θ et θ' sont donnés en jours et en parties décimales du jour, temps moyen, comme cela a lieu ordinairement, il faudra pour l'homogénéité des formules, multiplier θ et θ' par l'arc que parcourt en un jour le Soleil en vertu de son mouvement moyen, cet arc étant lui-même réduit en parties du rayon. L'année sidérale est de $365^{j},25638$; si l'on représente par π le rapport de la circonférence au diamètre, $\frac{2\pi}{365,25638}$ sera l'arc du moyen mouvement du Soleil en un jour par lequel on doit multiplier le temps, c'est-à-dire qu'il faudra ajouter aux logarithmes de θ et de θ', exprimés en jours moyens, le logarithme constant 8,2355821.

On aura ainsi toutes les quantités nécessaires pour réduire en nombres les six équations (12), (20) et (22) qui doivent servir à la solution du problème dans les cas ordinaires, ou des six équations (16), (20) et (22) qu'il faudra employer de préférence dans le cas exceptionnel dont nous avons parlé n° **11**.

Ces équations ainsi formées, pour en déduire les valeurs des six inconnues nécessaires à la solution du problème, on emploiera le procédé indiqué n° **21**. On conservera ces équations dans la forme où elles sont données immédiatement, et l'on se contentera d'y satisfaire par des essais. On supposera d'abord à l'inconnue ρ une première valeur choisie arbitrairement, ou indiquée par les notions qu'on aura pu se procurer sur les limites entre lesquelles cette quantité se trouve comprise.

On calculera ensuite les valeurs correspondantes de ρ^0 et ρ', au moyen des formules (12) dans les cas ordinaires, ou des formules (16) dans le cas d'exception

Dans les premiers essais, en négligeant les quantités du second ordre, on pourra faire

$$\frac{\text{U}''}{\text{U}} = -\frac{\theta+\theta'}{\theta}, \quad \frac{\text{U}''}{\text{U}'} = \frac{\theta+\theta'}{\theta'}, \quad \text{W} = 0,$$

et l'on parviendra ainsi à une première valeur approchée de ρ^0, ρ et ρ'.

16. Pour obtenir une valeur plus exacte de ces trois quantités, il faudra dans les expressions de $\frac{\text{U}''}{\text{U}}$, $\frac{\text{U}''}{\text{U}'}$ et W qui entrent dans les formules (12) et (16), conserver les termes dépendants du carré du temps ; ces expressions, comme on l'a vu plus haut, contiennent, outre les quantités toutes connues, le rayon vecteur de la comète dans l'observation moyenne, mais le calcul n'en sera pas arrêté, parce qu'ayant fait une première hypothèse sur la valeur de ρ, on en déduira, au moyen de la formule

$$r^2 = R^2 + 2R\rho\cos(A - a) + \frac{\rho^2}{\cos^2 b},$$

une valeur correspondante de r suffisamment exacte pour être substituée dans les termes des valeurs de $\frac{\text{U}''}{\text{U}}$, $\frac{\text{U}''}{\text{U}'}$ et w qui dépendent du carré du temps. Les formules (12) et (16) ne renfermeront plus ainsi que des quantités toutes connues, et l'on en déduira les valeurs de ρ^0 et ρ' correspondantes à la valeur arbitraire que nous avons supposée à ρ.

On calculera ensuite les valeurs des deux rayons vecteurs r^0 et r' au moyen des deux équations

$$r^{02} = R^{02} + 2R^0\rho^0\cos(A^0 - a^0) + \frac{\rho^{02}}{\cos^2 b^0},$$

$$r'^2 = R'^2 + 2R'\rho'\cos(A' - a') + \frac{\rho'^2}{\cos^2 b'},$$

et celle de la corde c, qui joint les deux lieux de la comète dans les observations extrêmes, au moyen de la formule

$$c^2 = r^{02} + r'^2 - 2V,$$

dans laquelle on fait, pour abréger,

$$V = R^0R'\cos(A' - A^0) + \rho^0R'\cos(A' - a^0) + \rho'R^0\cos(A^0 - a') \\ + \rho^0\rho'[\cos(a' - a^0) + \tan b^0 \tan b'].$$

Enfin les formules du mouvement parabolique donneront l'équation

$$6(\theta+\theta')\,(0{,}0172021)=(r^0+r'+c)^{\frac{3}{2}}-(r^0+r'-c)^{\frac{3}{2}}, \quad (31)$$

au moyen de laquelle on rectifiera successivement les différentes hypothèses faites sur la valeur de ρ.

En effet, en y substituant pour r^0, r' et c leurs valeurs déterminées par les formules précédentes, et pour la quantité $\theta+\theta'$ sa valeur déduite des observations, la différence des résultats fera connaître, selon qu'elle sera positive ou négative, dans quel sens tombe l'erreur de l'hypothèse que l'on a faite sur la valeur de ρ. Il sera donc facile, lorsque, après quelques essais, on sera parvenu à deux résultats de signes contraires, de déterminer par une simple proportion la véritable valeur qu'il faut supposer à ρ pour satisfaire à l'équation (31) aussi exactement que l'on voudra.

L'approximation précédente suffira toutes les fois qu'on se proposera seulement d'obtenir des valeurs approchées des éléments de l'orbite parabolique, que l'on rectifiera ensuite d'après l'ensemble des observations de la comète. Si l'on voulait obtenir un plus grand degré d'exactitude, on substituerait à la place de $\frac{\text{U}''}{\text{U}}$, $\frac{\text{U}''}{\text{U}'}$ et W, dans les formules (12) ou (16), leurs valeurs données par les équations (15) et (19), et l'on arriverait, en suivant la même marche que précédemment, à déterminer les six inconnues ρ^0, ρ, ρ', r^0, r et r' avec toute la précision que peuvent comporter les trois observations données.

Les quantités ρ^0, ρ, ρ', r^0, r et r' étant ainsi déterminées, on en déduira tous les éléments de l'orbite parabolique au moyen des formules du n° **14**.

17. La méthode que nous venons d'exposer, résout donc complétement la question; elle a l'avantage de conduire, en général, à des résultats aussi exacts qu'on peut l'attendre des méthodes d'approximation, et de se plier, sans qu'on soit obligé de changer considérablement la marche des calculs, à tous les cas qui peuvent se présenter. Nous en ferons plus loin l'application à quelque comète dont la marche soit bien connue, afin d'en faciliter l'usage.

Quel que soit, au reste, le degré de précision que l'on puisse attendre des différentes méthodes imaginées pour déterminer les premiers éléments approchés de l'orbite d'une comète, observée pendant la durée ordinairement très-courte de son apparition, il faut remarquer que, comme on n'emploie généralement dans ces méthodes que trois observations peu distantes entre elles, et que d'ailleurs on est obligé de négliger beaucoup de termes dans les formules pour en faciliter le calcul, on ne doit regarder ces éléments que comme une première approximation, et chercher à les corriger de manière à satisfaire le plus exactement possible à l'ensemble de toutes les observations connues. La question envisagée sous ce point de vue offre un nouveau problème à résoudre; on a proposé pour cela plusieurs méthodes dont la simplicité doit faire le principal mérite. Nous exposerons, dans le chapitre suivant, celle dont l'usage nous a paru le plus commode pour les calculs numériques.

CHAPITRE II.

CORRECTION DES ÉLÉMENTS DE L'ORBITE DÉTERMINÉS PAR UNE PREMIÈRE APPROXIMATION.

18. Après avoir développé, avec tout le détail nécessaire, une méthode très-simple pour arriver à une connaissance approchée des éléments de l'orbite de la comète, nous allons donner le moyen de corriger ces éléments avec toute la précision que les observations comportent.

Pour cela on choisira trois observations éloignées entre elles, et au moyen des éléments résultant de la première approximation, on déterminera les trois anomalies v^0, v, v' et les rayons vecteurs r^0, r, r', qui se rapportent respectivement à l'époque de chaque observation. Il suffira, pour cela, de connaître à peu près la distance périhélie et l'instant du passage de la comète par ce point, et c'est en quoi consiste le principal avantage de cette méthode, qui n'emploie que deux des éléments de l'orbite pour les rectifier tous. On désignera par V et V' les angles que comprennent entre eux les rayons r^0, r, r', en sorte qu'on aura $V = v - v^0$ et $V' = v' - v^0$; et en comparant ces quantités aux mêmes angles résultant de l'observation directe de la comète, la différence sera l'erreur due à l'incorrection des éléments employés.

Les observations, il est vrai, ne font pas connaître immédiatement ces angles, mais on peut les déduire très-aisément des données qu'elles fournissent. En effet, on a, par chaque observation de la comète, sa longitude et sa latitude *géocentriques*, c'est-à-dire relatives à la Terre; on en conclura aisément, par la Trigonométrie, ses longitudes et ses latitudes *héliocentriques*, c'est-à-dire relatives au Soleil. Pour cela, désignons par S le Soleil, par T la Terre et par C la comète, et soit C′ la projection de C sur le plan de l'écliptique. Si l'on considère la pyramide triangulaire interceptée entre ces quatre points, on aura d'abord $STC' =$ long. $\odot$ — long. *comète*. En nommant, comme précédemment, b la latitude géocentrique de la comète, ce qui donne $CTC' = b$, on en conclura $\cos CTS = \cos C'TS \cos b$. Maintenant, dans le triangle rectiligne CTS, on connaît les deux côtés $TS = R$ et $CS = r$, qui sont les distances respectives de la Terre et de la comète au Soleil; on connaît de plus l'angle CTS opposé à r; on pourra donc calculer l'angle SCT par la formule

$$\sin SCT = \frac{R}{r} \sin CTS, \quad (1)$$

et l'on en conclura le troisième angle CST du même triangle.

Cela posé, nommons λ la latitude et π la longitude héliocentrique de la comète; en considérant la pyramide triangulaire CC′ST, on aura $\lambda = CSC'$ et l'on trouvera aisément

$$\sin \lambda = \frac{\sin b \sin CST}{\sin CTS}, \quad \text{et} \quad \cos C'ST = \frac{\cos CST}{\cos \lambda}. \quad (2)$$

L'angle $C'ST$ étant donné par la dernière de ces formules, si l'on nomme A la longitude héliocentrique de la Terre, on aura

$$\pi = A + C'ST. \quad (3)$$

On déterminera, de cette manière, les latitudes et les longitudes héliocentriques de la comète pour les trois époques données; voyons comment on en conclura les angles V et V'. Désignons par C^0, C, C' les lieux respectifs de la comète correspondant aux trois observations, par $C_{,}^{0}$, $C_{,}$, $C'_{,}$ les projections de ces points sur l'écliptique, et considérons le triangle sphérique formé par les deux lieux C, C^0 et par le pôle de l'écliptique. On connaît dans ce triangle les deux côtés de l'angle au pôle qui sont les compléments des latitudes héliocentriques $C^0SC_{,}^{0}$ et $CSC_{,}$, ainsi que l'angle compris qui a pour mesure l'arc $C_{,}^{0}C_{,}$ décrit du centre du Soleil; on aura donc pour déterminer le côté opposé C^0C, que nous désignerons par U, la formule

$$\cos U = \cos(\pi - \pi^0) \cos\lambda \cos\lambda^0 + \sin\lambda \sin\lambda^0; \quad (4)$$

de même, en supposant $C'C^0 = U'$, on aura

$$\cos U' = \cos(\pi' - \pi^0) \cos\lambda^0 \cos\lambda' + \sin\lambda^0 \sin\lambda'.$$

Les deux angles U et U' correspondant à ceux que nous avons nommés V et V' et que nous avons obtenus par les formules directes du mouvement elliptique, on aura, si les éléments employés sont exacts,

$$V = U \quad \text{et} \quad V' = U'.$$

Mais, comme ces éléments ne sont qu'approchés, ces équations n'auront pas lieu rigoureusement, et pour que les valeurs de V et U, V′ et U′ puissent être égales, il faudra faire subir quelques corrections à ces éléments. Soient δV, $\delta V'$, δU et $\delta U'$ les variations correspondantes des angles V, V′, U, U′, on aura

$$V + \delta V = U + \delta U, \quad V' + \delta V' = U' + \delta U'.$$

Voici donc deux équations au moyen desquelles on pourra déterminer les corrections à faire à la distance périhélie et à l'époque du passage de la comète par ce point, pour satisfaire aux observations données; il ne s'agit que de développer ces équations.

19. Pour cela, reprenons les formules du mouvement parabolique

$$\left.\begin{aligned} r &= \frac{D}{\cos^2 \frac{1}{2} v}, \\ t &= D^{\frac{3}{2}} \sqrt{2} \left(\tang \frac{1}{2} v + \frac{1}{3} \tang^3 \frac{1}{2} v\right). \end{aligned}\right\} (o)$$

Supposons que l'on fasse subir, à la distance périhélie D, et à l'instant du passage par le périhélie, de très-petites variations que nous désignerons par la caractéristique δ, en différentiant logarithmiquement les formules précédentes, on trouvera

$$\left.\begin{aligned} \frac{\delta r}{r} &= \frac{\delta D}{D} + \tang \frac{1}{2} v\, \delta v, \\ \delta v &= \frac{\sqrt{2}\, D}{r^2} \left(\frac{\delta t}{t} - \frac{3}{2} \frac{\delta D}{D}\right) t, \end{aligned}\right\} (o')$$

le second membre de cette dernière formule devant (n° **15**) être multiplié par le nombre dont le logarithme est 8,2355821, pour le convertir en arcs de cercle.

On aura, par ces équations, les variations du rayon vecteur et de l'anomalie correspondantes à celles que subissent D et t. Il s'agit de déterminer maintenant les variations qu'éprouvent simultanément la latitude héliocentrique λ et la longitude héliocentrique π. En différentiant logarithmiquement l'expression de $\sin\lambda$, trouvée plus haut, et en observant que les angles b et CTS ne varient pas, on aura

$$\partial\lambda = \operatorname{tang}\lambda \cot \mathrm{CST}.\partial.(\mathrm{CST});$$

en différentiant de même l'équation (2) on trouve

$$\partial.(\mathrm{SCT}) = -\operatorname{tang}\mathrm{SCT}.\frac{\partial r}{r},$$

et par suite

$$\partial.(\mathrm{SCT}) = -\partial.(\mathrm{SCT}) = \operatorname{tang}\mathrm{SCT}.\frac{\partial r}{r};$$

on aura donc enfin

$$\partial\lambda = \operatorname{tang}\lambda \operatorname{tang}\mathrm{SCT} \cot \mathrm{CST}\frac{\partial r}{r}. \quad (a)$$

La longitude π dépend de la formule

$$\cos \mathrm{TSC}' = \frac{\cos \mathrm{CST}}{\cos\lambda};$$

en différentiant logarithmiquement, on en tire

$$\partial.(\mathrm{TSC}') = \cot \mathrm{TSC}'[\operatorname{tang}\mathrm{CST}\,\partial.(\mathrm{CST}) - \operatorname{tang}\lambda\,\partial\lambda];$$

d'ailleurs $\partial.(\mathrm{TSC}') = \partial\pi$; on aura donc enfin

$$\partial\pi = \cot \mathrm{TSC}'\left(\operatorname{tang}\mathrm{CST}\operatorname{tang}\mathrm{SCT}\frac{\partial r}{r} - \operatorname{tang}\lambda\,\partial\lambda\right). \quad (b)$$

On déterminera par les formules (a) et (b) les variations de la latitude et de la longitude héliocentriques, relatives aux époques des trois observations que l'on a choisies pour corriger l'orbite. Maintenant si, pour faciliter le calcul de l'angle U, on suppose un angle auxiliaire A déterminé par l'équation

$$\sin^2 \frac{1}{2} A = \cos^2 \frac{1}{2}(\pi - \pi^0) \cos \lambda^0 \cos \lambda,$$

ce qui donne, en différentiant,

$$\partial A = - \tang \frac{1}{2} A \left[\tang \frac{1}{2} (\pi - \pi^0) (\partial \pi - \partial \pi^0) + \tang \lambda^0 \, \partial \lambda^0 + \tang \lambda \, \partial \lambda \right], \quad (g)$$

on aura

$$\sin^2 \frac{1}{2} U = \cos \frac{1}{2} (\lambda + \lambda^0 + A) \cos \frac{1}{2} (\lambda + \lambda^0 - A),$$

et, par suite,

$$\partial U = -\frac{1}{2} \tang \frac{1}{2} U \left\{ \begin{array}{l} \tang \frac{1}{2} (\lambda + \lambda^0 + A) (\partial \lambda + \partial \lambda^0 + \partial A) \\ + \tang \frac{1}{2} (\lambda + \lambda^0 - A) (\partial \lambda + \partial \lambda^0 - \partial A). \end{array} \right\} \quad (c)$$

En substituant dans cette équation pour $\partial \lambda$, $\partial \lambda^0$ et ∂A, leurs valeurs précédentes, on aura celle de ∂U exprimée en fonction de ∂D et de ∂t. On déterminera de la même manière ∂V, en observant que l'on a $\partial V = \partial v - \partial v^0$, et que ∂v et ∂v^0 sont donnés par la seconde des formules (o'). On aura donc entre les variations ∂D et ∂t deux équations de cette forme,

$$\left. \begin{array}{l} \partial U = m \partial D + n \partial t, \\ \partial V = p \partial D + q \partial t; \end{array} \right\} (e)$$

d'où, en observant qu'on a $\partial U - \partial V = V - U$, on tire

$$(m-p)\delta D + (n-q)\delta t = V - U. \quad (e)$$

On trouvera une équation semblable en combinant la première observation avec la troisième; on aura donc deux équations qui ne renfermeront d'inconnues que les variations δD et δt, et qui suffiront par conséquent pour les déterminer. Si le calcul était exact, on aurait ainsi immédiatement les valeurs de la distance périhélie et de l'époque du passage qui satisfont le plus exactement possible aux trois observations données; mais comme on a négligé dans la formation de l'équation (e) les quantités du second ordre, il faudra, à l'aide des éléments corrigés, recommencer les calculs précédents, et l'on déterminera ainsi les corrections de ces nouveaux éléments. Dans certains cas, on sera même obligé de répéter une troisième fois ces opérations; mais elles n'ont rien d'embarrassant, et le calcul des premières corrections facilitera celui des suivantes.

20. Quand on sera ainsi arrivé à une connaissance suffisamment exacte de la distance périhélie et du temps du passage, voici comment on déterminera avec le même degré de précision les autres éléments de l'orbite. On substituera dans les équations (a) et (b) pour δt et δD leurs valeurs résultantes des dernières opérations, et l'on en conclura les valeurs exactes de la longitude et de la latitude héliocentriques de la comète pour les époques des observations données.

Si l'on compare ensuite entre elles la première et la dernière, on aura pour déterminer l'inclinaison φ de l'orbite de la comète et la longitude α de son nœud sur le plan de l'écliptique, les deux formules

$$\cos\varphi = \frac{\sin(\pi - \pi^0)}{\sin(\nu - \nu^0)} \cos\lambda \cos\lambda^0,$$

$$\sin(\pi - \alpha) = \text{tang}\,\lambda \cot\varphi.$$

Dans la première de ces formules, il faut avoir soin de prendre l'angle $\nu - \nu^0$ de même signe que $\pi - \pi^0$, parce que l'inclinaison φ est toujours supposée moindre que 90°. La seconde donnera pour l'angle $\pi - \alpha$ deux valeurs comprises entre 0 et 180°, et il en résultera par conséquent deux valeurs de α. Pour déterminer laquelle il faut choisir, on remarquera que par la première observation on a pareillement

$$\sin(\pi^0 - \alpha) = \text{tang}\,\lambda^0 \cot\varphi;$$

on prendra donc la moyenne entre les valeurs correspondantes de α, et l'on saura, par ce qui a été dit n° **14**, si c'est au nœud ascendant ou au nœud descendant de l'orbite que cette longitude se rapporte.

Le signe de $\pi - \pi^0$ indiquera, selon qu'il sera positif ou négatif, si le mouvement de la comète est direct ou s'il est rétrograde. Enfin on aura le lieu du périhélie sur l'orbite par la formule (27) du n° **16**.

21. La méthode que nous venons de donner pour corriger, par les formules différentielles, les éléments de l'orbite qui résultent d'une première approximation, est très-exacte et très-sûre, mais les calculs qu'elle exige demandent quelque attention; les astronomes emploient de préférence la suivante, qui a l'avantage d'être pour ainsi dire mécanique, les mêmes calculs se reproduisant toujours pendant toute l'opération. Voici en quoi elle consiste. On suppose connus à peu près la distance périhélie et l'instant du passage par ce point, et en partant de ces éléments et des observations, on détermine, comme on l'a vu plus haut, les différences d'anomalies de la première à la deuxième observation, et de la première à la troisième. Soient U et U' ces deux angles; en les comparant aux mêmes différences d'anomalies que donnent immédiatement les deux éléments approchés et que nous désignons par V et V', on aura

$$U - V = m, \quad U' - V' = m'.$$

On fera varier d'une très-petite quantité la distance périhélie, et l'on calculera les mêmes résultats dans cette seconde hypothèse. Soient n et n' ce que deviennent alors les quantités m et m'; enfin, en conservant la distance périhélie de la première hypothèse, on altérera un peu l'instant du passage au périhélie, et l'on calculera encore les angles $U - V$ et $U' - V'$. Dans cette troisième hypothèse, désignons par p et p' ces angles, et soient u et t les nombres par lesquels il faudrait multiplier les deux variations supposées dans la distance périhélie et dans l'instant du passage pour avoir les véritables, on aura les deux équations suivantes :

$$\left.\begin{array}{l}(m - n).u + (m - p).t = m,\\ (m' - n').u + (m' - p').t = m'.\end{array}\right\} (d)$$

On tirera de là les valeurs de u et t, et l'on aura par conséquent les corrections de la distance périhélie et de l'instant du passage de la comète en ce point. Si les valeurs qui en résulteront, n'étaient pas suffisamment exactes, on recommencerait avec ces deux éléments corrigés les calculs précédents, et, après quelques essais, on parviendrait à connaître la vraie distance périhélie et l'instant du passage au périhélie qui répondent aux observations données.

22. Si l'on voulait déterminer l'orbite avec encore plus de précision, au lieu d'employer dans le calcul des corrections de la distance périhélie et de l'instant du passage trois observations seulement, on choisirait, parmi les observations de la comète, celles que l'on supposerait les plus exactes, et en les comparant deux à deux, on formerait un système d'équations semblables aux équations (d) ou aux équations (e). On combinerait ensuite ces équations de la manière la plus avantageuse pour en tirer les valeurs des quantités qui doivent servir à la correction des éléments de la première approximation, et l'on déterminerait ainsi l'orbite qui satisfait le plus exactement possible à l'ensemble des observations connues de la comète.

Il peut arriver dans certains cas que, malgré les précautions que nous venons d'indiquer, l'orbite corrigée ne représente qu'assez imparfaitement encore les résultats de l'observation ; c'est qu'alors sans doute le mouvement de la comète n'a pas lieu dans une parabole, comme nous l'avons supposé, et que son orbite est elliptique ou hyperbolique. Cette dernière espèce d'orbites intéresse peu l'Astronomie. Quant aux éléments de l'orbite elliptique, on peut les déterminer par une méthode d'approximation semblable à celle du n° **21**, lorsqu'on a déterminé par les méthodes précédentes la parabole qui représente à peu près le mouvement de la comète. Pour cela, on choisit quatre observations exactes qui embrassent toute la partie visible de l'orbite, et l'on calcule les angles V et U relatifs à ces observations dans quatre hypothèses, d'abord en employant les éléments approchés de l'orbite parabolique, ensuite en faisant varier la distance périhélie, troisièmement en changeant seulement l'instant du passage, et enfin en conservant la distance périhélie et l'instant du passage de la première hypothèse et en supposant une orbite elliptique très-allongée, en sorte que la différence $1-e$ de son excentricité à l'unité soit une très-petite fraction. Les formules du n° **26**, livre II, serviront, dans ce cas, à déterminer le rayon vecteur r et l'anomalie v correspondants à chaque observation. Cela posé, en nommant respectivement u, t, s les nombres par lesquels il faut multiplier les variations supposées dans la distance périhélie, dans l'instant du passage, et la quantité $1-e$, pour avoir leurs véritables valeurs, on formera trois équations semblables aux équations (d), qui renfermeront chacune ces trois inconnues, et qui serviront à les déterminer.

Nous ne faisons qu'indiquer ici cette méthode, parce que les résultats qu'elle donne laisseront toujours beaucoup d'incertitude sur la durée de la révolution de la comète qui est surtout importante à connaître, et que le seul moyen certain de la déterminer est d'attendre que l'on ait observé un nouveau passage de cet astre à son périhélie.

Pour faciliter l'usage des méthodes que nous venons d'exposer, nous allons en faire l'application à la comète de 1824, dont l'apparition a été assez longue pour fournir un nombre d'observations suffisant à la détermination exacte de son orbite.

Détermination de l'orbite de la comète de 1824.

23. Parmi les observations connues de cette comète, nous avons choisi les suivantes. Les époques sont évaluées en temps moyen à Paris, compté de minuit.

	Époques.	Longitudes observées.	Latitudes observées.
Août	$22^j,90153$,	$a^0.230^\circ.31'.33''$,	$b^0.57^\circ.42'.22''$,
	28,87972,	$a.224.\ 6.30$,	$b.59.33.58$.
Septem.	3,91004,	$a'.218.\ 4.34$,	$b'.61.\ 4\ 20$.

Les lieux du Soleil correspondants aux mêmes époques et calculés par les Tables de Delambre, ont donné :

Long. du $\odot + 180^\circ$	Logar. R.
$A^0.329^\circ\ 38'\ 37''$,	0,0046329,
$A.335\ 25\ 24$,	0,0040271,
$A'.341\ 15\ 54$,	0,0033786.

On a conclu de là, pour l'époque qui tient le milieu entre les trois observations,

$$A_{,} = 335^\circ\ 26'\ 38'',\quad \log R_{,} = 0{,}0040129.$$

Au moyen de ces valeurs on a formé les suivantes :

$$\begin{array}{ll} A^0 - a^0 \ldots\ 99^\circ\ \ 7'\ \ 4'', & A_{,} - a^0 \ldots 104^\circ\,55'\,5'', \\ A - a \ldots 111.\ 18.54\ , & A_{,} - a \ldots 111.\,20.\,9\ , \\ A' - a' \ldots 123.\ 11.20\ , & A_{,} - a' \ldots 117.\,22.\,5. \end{array}$$

Nous avons d'ailleurs ici $\theta = 5^j,97819$ et $\theta' = 6^j,03032$, et, par suite, $\theta + \theta' = 12^j,00851$; en ajoutant aux logarithmes de ces quantités, le logarithme constant 8,2355821, on forme les suivantes :

$$\log\theta = 9,0121519, \quad \log\theta' = 9,0159224,$$
$$\log(\theta + \theta') = 9,3150713,$$

d'où l'on conclut

$$\log\frac{\theta + \theta'}{\theta} = 0,3029194, \quad \log\frac{\theta + \theta'}{\theta'} = 0,2991489.$$

Cela posé, cet exemple ne tombant pas dans le cas d'exception n° **11**, nous emploierons les formules du n° **10**, dont les dénominateurs sont suffisamment grands, et qui sont alors les plus simples. Pour les réduire en nombres, nous commencerons par calculer, au moyen des formules (7), les valeurs des trois quantités C^o, C, C', on aura d'abord :

$\sin(A_{,} - a)$...	9,9691652	$\sin(A_{,} - a')$...	9,9484470
$\tang b'$.....	0,2575401	$\tang b$......	0,2309982
	0,2267053		0,1794452
Nombres	+ 1,685410		− 1,511630
	− 1,511630		
$C^o =$	+ 0,173780		

On trouverait de la même manière

$$C = 0,171001, \quad C' = 0,343313.$$

Les formules (12), en vertu de ces valeurs, deviennent

$$\rho^{\circ} = \frac{\text{v}''\rho}{\text{v}'}[9,7043095], \qquad \rho' = -\frac{\text{v}''\rho}{\text{v}}[9,6973083].$$

Dans les premiers essais il suffira de supposer

$$\frac{\text{v}''}{\text{v}'} = \frac{\theta + \theta'}{\theta'}, \quad \frac{\text{v}''}{\text{v}} = -\frac{\theta + \theta'}{\theta};$$

ce qui donne

$$\rho^{\circ} = \rho[0,0034584], \quad \rho' = \rho[0,0002277].$$

Mais les valeurs qu'on tirera des équations ainsi simplifiées, ne peuvent être considérées que comme une approximation très-imparfaite, propre tout au plus à guider le calculateur dans les premières hypothèses. Il est donc inutile de nous y arrêter ici et nous passerons tout de suite au second degré d'approximation en supposant, n° **10**,

$$\frac{\text{v}''}{\text{v}'} = \frac{\theta + \theta'}{\theta'}\left[1 - \frac{\theta(2\theta' + \theta)}{6r^3}\right],$$

$$\frac{\text{v}''}{\text{v}} = -\frac{\theta + \theta'}{\theta}\left[1 - \frac{\theta'(2\theta + \theta')}{6r^3}\right].$$

En réduisant ces formules en nombres d'après les valeurs précédentes de θ et θ', on trouve

$$\frac{\text{v}''}{\text{v}'} = [0,2991489] - \frac{1}{r^3}[8,0249400],$$

$$\frac{\text{v}''}{\text{v}} = -[0,3029194] + \frac{1}{r^3}[8,0312241].$$

On aura donc, pour calculer ρ^{0} et ρ' par le moyen de ρ et de r, les formules suivantes :

$$\rho^0 = \rho[0,0034584] - \frac{\rho}{r^3}[7,7292495],$$

$$\rho' = \rho[0,0002277] - \frac{\rho}{r^3}[7,7285324].$$

Ces formules contenant l'inconnue r, on fera une première hypothèse sur la valeur de ρ et l'on calculera r par l'équation suivante :

$$r^2 = 1,0187185 - \rho[9,8655557] + \rho^2[0,5907660].$$

Connaissant ainsi ρ et r, les formules précédentes donneront les valeurs de ρ^0 et de ρ', et l'on calculera ensuite r^0, r', V et c par les équations

$$\left.\begin{aligned}
r^{02} &= 1,02156451 - \rho^0[9,5957259] + \rho^{02}[0,5444910],\\
r'^2 &= 1,01568070 - \rho'[0,0427013] + \rho'^2[0,6308356],\\
\mathrm{V} &= 0,9977510 \;\; - \rho^0[9,5524997] + \rho^0\rho'[0,5842617]\\
&\qquad\qquad\qquad - \rho'[9,5700582],\\
c^2 &= r^{02} + r'^2 - 2\mathrm{V}.
\end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{M})$$

Enfin, pour vérifier l'hypothèse et en reconnaître l'erreur, on aura l'équation du temps (22) qui, en substituant pour θ et θ' leurs valeurs, donne

$$1,2394317 = (r^0 + r' + c)^{\frac{3}{2}} - (r^0 + r' - c)^{\frac{3}{2}}. \quad (\mathrm{N})$$

Supposons, qu'après quelques essais, on soit arrivé à la valeur suivante $\rho = 0,41293159$, ce qui donne

$$r^2 = 1,38026597 \quad \text{et} \quad r = 1,1748470,$$

on en déduit ensuite :

$$\rho^{\circ}=[9,6179081]$$
$$r^{\circ 2}=1,49165730=[0,1736691]$$

$$r^{\circ}=1,22133400$$
$$r'=1,13404775$$
$$r^{\circ}+r'=2,35538175 \qquad a^{\frac{3}{2}}=4,2523158$$
$$c=0,26934356 \qquad b^{\frac{3}{2}}=3,0128900$$
$$a=2,62472531 \qquad -1,2394258$$
$$b=2,08603819 \qquad +1,2394317$$
$$+0,0000059$$

$$\rho'=[9,6146697]$$
$$r'^{2}=1,49165730\ldots[0,1113699]$$
$$r^{\circ 2}=1,28606570$$
$$2,7777230$$
$$2V=2,7051770$$
$$c^{2}=0,0725460=[8,8606135]$$
$$[9,4303067]$$

Soit pour nouvelle hypothèse $\rho=0,41293464=[9,6158813]$, ce qui donnera

$$r^{2}=1,3802734 \quad \text{et} \quad r=[0,0699824],$$

on en déduit les résultats suivants :

$$\rho^{\circ}=[9,6179113]$$
$$r^{\circ 2}=1,4916653=[0,1736715]$$

$$r^{\circ}=1,2213373o$$
$$r'=1,13405077$$
$$r^{\circ}+r'=2,35538807 \qquad a^{\frac{3}{2}}=4,2523400$$
$$c=0,26934570 \qquad b^{\frac{3}{2}}=3,0129000$$
$$a=2,62473377 \qquad -1,2394400$$
$$b=2,08604237 \qquad +1,2394317$$
$$-0,0000083$$

$$\rho'=[9,6146729]$$
$$r^{\circ 2}=1,4916653$$
$$r'^{2}=1,2860732=[0,1092658]$$
$$2,7777385$$
$$2V=2,7051914$$
$$c^{2}=0,0725471=[8,8606201]$$
$$c\ldots[9,4303101]$$

Les erreurs qui résultent des deux hypothèses précédentes, étant de signes contraires, il s'ensuit que si l'on fait $n = \frac{59}{59+83}$, qu'on désigne par A et B les valeurs de ρ dans la première et dans la deuxième hypothèse, la vraie valeur de cette quantité sera exprimée par $A + n(B - A)$. On trouvera ainsi $\rho = 0{,}41293286$, et l'on en déduira la solution suivante :

$$\rho^{\circ} = 0{,}4148674, \quad r^{\circ} = 1{,}2213356, \quad c = 0{,}2693447,$$
$$r = 1{,}1748484,$$
$$\rho' = 0{,}4117855, \quad r' = 1{,}1340500.$$

On pourrait, dans les cas ordinaires, s'arrêter à cette seconde approximation où nous avons tenu compte des termes du second ordre, et les valeurs des éléments paraboliques qu'on en conclurait seraient assez exactes pour tous les usages qu'on en voudrait faire; mais pour obtenir le dernier degré de précision auquel la méthode puisse atteindre, il faut, dans les formules (12), n° **10**, avoir égard aux termes du troisième ordre qui ajoutent aux valeurs des quantités $\frac{\text{v}''}{\text{v}}$ et $\frac{\text{v}''}{\text{v}'}$ les termes suivants :

$$-\frac{\theta+\theta'}{\theta}(\theta'^2+\theta\theta'-\theta^2)\left[\frac{1}{6r^3}-\frac{1}{6(r'r)^{\frac{3}{2}}}\right],$$

$$\frac{\theta+\theta'}{\theta'}(\theta'^2-\theta\theta'-\theta^2)\left[\frac{1}{6(r^{\circ}r)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{6r^3}\right].$$

En substituant pour r°, r, r' leurs valeurs données par l'approximation précédente et pour θ et θ' celles qui résultent des observations, les deux termes précédents deviennent

$$+0,00003o493 \quad \text{et} \quad +0,00003o865.$$

En ajoutant respectivement ces deux quantités aux valeurs de $\frac{\text{U}''}{\text{U}}$ et de $\frac{\text{U}''}{\text{U}'}$ données précédemment, on aura

$$\frac{\text{U}''}{\text{U}} = 2,00875049 - \frac{1}{r^3}[8,0312241],$$

$$\frac{\text{U}''}{\text{U}'} = 1,99138686 - \frac{1}{r^3}[8,0249400].$$

On peut d'ailleurs calculer directement les deux quantités $\frac{\text{U}''}{\text{U}}$ et $\frac{\text{U}''}{\text{U}'}$ au moyen des formules (15), n° **10**.

Les valeurs précédentes, substituées dans les formules (12), donnent

$$\rho^0 = \rho[0,0034634] - \frac{\rho}{r^3}[7,7292495],$$

$$\rho' = \rho[0,0002333] - \frac{\rho}{r^3}[7,7285324].$$

Ces deux équations, jointes aux cinq formules (M) et (N), fournissent toutes les données nécessaires pour déterminer l'orbite parabolique avec le dernier degré d'exactitude dont le problème est susceptible.

En satisfaisant à ces équations par des hypothèses arbitraires sur la valeur de ρ, comme nous l'avons fait précédemment, on trouve, après quelques essais, la solution suivante :

$$\rho^0 = 0,41486834, \quad r^0 = 1,2213362,$$
$$r' = 1,1340505,$$
$$\rho' = 0,41178639, \quad c = 0,2693440.$$

Pour déduire de ces valeurs les éléments de l'orbite parabolique, on a formé d'abord les quantités p, q, $p-r^0$, $p-r'$ et leurs logarithmes, et l'on a trouvé

$$p=\frac{1}{2}(r^0+r'+c)=1,31236535=[0,1180547],$$

$$q=\frac{1}{2}(r^0+r'-c)=1,04302135=[0,0182932],$$

$$p-r'=0,1783\,1485=[9,2511876],$$
$$p-r^0=0,09102915=[8,9591805].$$

On a calculé ensuite, au moyen des formules (25) et (26), la distance périhélie D et l'anomalie v^0 de la manière suivante :

$p-r'\ldots 9{,}2511876$	$p-r^0\ldots 8{,}9591805$	$c\ldots 9{,}4303074$
$\sqrt{p}\ldots 0{,}0590274$	$\sqrt{q}\ldots 0{,}0091465$	$\sqrt{r^0}\ldots 0{,}0434176$
$\mathrm{A}\ldots 9{,}3102150$	$\mathrm{B}\ldots 8{,}9683270$	$c\sqrt{r^0}\ldots 9{,}4737250$
$\mathrm{A}-\mathrm{B}\ldots 9{,}0465277$		
$c\sqrt{r^0}\ldots 9{,}4737250$		
$\sin\frac{1}{2}v^0\ldots 9{,}5728027$	$\frac{1}{2}v^0\ldots 21^\circ 57' 32''$,	
$\cos\frac{1}{2}v^0\ldots 9{,}9672916$		
$\cos^2\frac{1}{2}v^0\ldots 9{,}9345832$	Par la formule directe (23), on a obtenu	$\mathrm{D}=[0,0214175]$.
$r^0\ldots 0{,}0868353$		
$\log \mathrm{D}\ldots 0{,}0214185$		

Le temps employé à parcourir l'anomalie v^0 se calculera par la formule (27)

$$t=(2\mathrm{D}^3)^{\frac{1}{2}}\left(\operatorname{tang}\frac{1}{2}v^0+\frac{1}{3}\operatorname{tang}^3\frac{1}{2}v^0\right)[1,7644179],$$

le nombre dont le logarithme est 1,7644179, complément de 8,2355821, étant (n° 15) celui par lequel on doit multiplier la valeur du temps t, exprimé en arcs du moyen mouvement solaire, pour le convertir en jours moyens. Substituant pour D et v^0 leurs valeurs, on trouve

$$
\begin{array}{rl}
(2D^3)^{\frac{1}{2}} \ldots & 0,1826427 \\
\text{tang}\,\frac{1}{2}v^0 \ldots & 9,6055114 \\
 & \underline{1,7644179} \\
 & 1,5525720 \ldots 35^j,69209 \\
\frac{1}{3}\,\text{tang}^2\,\frac{1}{2}v^0 \ldots & \underline{8,7339015} \\
 & 0,2864735 \ldots \quad \underline{1,93407} \\
 & \qquad\qquad t \ldots 37,62616
\end{array}
$$

Ce temps, ajouté à l'époque de la première observation, puisque la comète s'avance vers son périhélie, c'est-à-dire au 22,90153 août, donne, pour l'instant du passage au périhélie, le 29,52769 septembre.

Le calcul des longitudes et des latitudes héliocentriques a donné ensuite :

$\rho^0 \ldots 9,6179103$	$\rho' \ldots 9,6146720$
$1 : r^0 \ldots 9,9131647$	$1 : r' \ldots 9,9453675$
$\text{tang}\, b^0 \ldots 0,1992661$	$\text{tang}\, b' \ldots 0,2575401$
$\sin \lambda^0 \ldots 9,7303411$	$\sin \lambda' \ldots 9,8175796$
$\cos \lambda^0 \ldots 9,9259782$	$\cos \lambda' \ldots 9,8772979$
$\text{tang}\, \lambda^0 \ldots 9,8043629$	$\text{tang}\, \lambda' \ldots 9,9402817$
$\cot \lambda^0 \ldots 9,8007339$	$\cot \lambda' \ldots 9,7424599$
$\sin (A^0 - a^0) \ldots 9,9944776$	$\sin (A' - a') \ldots 9,9226583$
$\sin (A^0 - \pi^0) \ldots 9,5995744$	$\sin (A' - \pi') \ldots 9,6053999$
$A^0 - \pi^0 \ldots 23°\,26'\,8''$	$A' - \pi' \ldots 23°\,46'\,17''$
$A^0 \ldots 329.38.37$	$A' \ldots 341.15.54$
$\pi^0 \ldots 306°12'29''$	$\pi' \ldots 317°29'37''$

La longitude α du nœud ascendant se calcule ensuite par la formule (29); on a ainsi :

$$\begin{array}{llll} \text{tang}\,\lambda^0 \ldots 9,8043629 & & \text{tang}\,\lambda' \ldots 9,9402817 \\ \sin\pi' \ldots \underline{9,8297363} & & \sin\pi^0 \ldots \underline{9,9068074} \\ \quad 9,6340992 & & \quad 9,8470891 \\ & +0,70321665 & \\ & \underline{-0,43062500} & \\ & +0,27259165 & \\ \text{tang}\,\lambda^0 \ldots 9,8043629 & & \text{tang}\,\lambda' \ldots 9,9402817 \\ \cos\pi' \ldots \underline{9,8675865} & & \cos\pi^0 \ldots \underline{9,7713810} \\ \quad 9,6719494 & & \quad 9,7116627 \\ & -0,51482860 & \\ & \underline{+0,46984000} & \\ & -0,04498860 & \\ \quad 9,4355126 & & \\ \quad \underline{8,6531025} & & \\ \text{tang}\,\alpha \ldots 0,7824101 & & \alpha \ldots 279^\circ\,22'\,18'' \end{array}$$

L'inclinaison φ se déduit de la double équation (28), nº **14**,

$$\text{tang}\,\varphi = \frac{\text{tang}\,\lambda^0}{\sin(\pi^0 - \alpha)} = \frac{\text{tang}\,\lambda'}{\sin(\pi' - \alpha)}.$$

On a ainsi :

$$\begin{array}{lcl} \pi^0 - \alpha = 26^\circ\,50'\,11'' & & \pi' - \alpha = 38^\circ\,7'\,19'' \\ \text{tang}\,\lambda^0 \ldots 9,8043629 & \text{ou bien} & \text{tang}\,\lambda' \ldots 9,9402817 \\ \sin(\pi^0 - \alpha) \ldots \underline{9,6546042} & & \sin(\pi' - \alpha) \ldots \underline{9,7905225} \\ \text{tang}\,\varphi \ldots 0,1497587 & & \text{tang}\,\varphi \ldots 0,1497592 \\ & \varphi = 54^\circ\,41'\,19'' & \end{array}$$

Enfin la distance η de la comète à son nœud ascendant, à l'instant de la première observation, se calcule par la formule (30) $\cos\eta = \cos\lambda^0 \cos(\pi^0 - \alpha)$; d'où il résulte :

$$\begin{array}{rl} \cos\lambda^{\circ}\ldots & 9,9259782 \\ \cos(\pi^{\circ}-\alpha)\ldots & \underline{9,9505105} \\ \cos\eta\ldots & 9,8764887 \end{array}$$

Ce qui donne $\eta = 41^{\circ}11'43''$, et l'on aura, par conséquent, pour le lieu du périhélie sur l'orbite,

$$\eta + \alpha + \nu^{\circ} = 4^{\circ}29'5''.$$

En rassemblant ces différents résultats on aura, pour les éléments paraboliques de la comète,

Passage au périhélie........	Septembre	$29^{j},52769$
Distance périhélie....................		1,0505543
Lieu du nœud ascendant.............		279° 22′ 18″
Inclinaison.....		54. 41.19
Lieu du périhélie...................		4. 29. 5

Sens du mouvement direct.

24. Ces éléments doivent satisfaire exactement aux deux observations extrêmes et représenter à quelques secondes près l'observation moyenne; c'est ce que nous allons vérifier en calculant, avec les éléments précédents, les lieux des 22 et 28 août, et du 3 septembre.

C'est ici le problème inverse de celui que nous avons résolu n° **18**. Étant données la latitude et la longitude héliocentriques de la comète, que l'on déduit aisément des éléments de son orbite, il s'agit d'en conclure la latitude et la longitude géocentriques correspondantes à la même époque. Pour diriger le calcul, nous supposerons que l'on a sous les yeux la figure que nous avons indiquée n° **18**, et nous considérerons de nouveau la pyramide triangulaire STCC′ formée par les droites qui joignent les lieux du Soleil et de la Terre avec ceux de la comète et de sa projection sur l'écliptique, à l'instant de l'observation moyenne. Nous désignerons de plus par N le lieu du nœud ascendant de la comète sur le plan de l'écliptique, et nous ferons, pour abréger,

$$\Gamma = \text{lieu du périh.} - \text{nœud}, \quad \text{et} \quad \mathrm{K} = \mathrm{CSN} = v - \Gamma,$$

en nommant comme précédemment v l'anomalie vraie correspondante à l'époque donnée.

Cela posé, en désignant comme précédemment par α la longitude du nœud ascendant et par π la longitude héliocentrique de la comète, on aura d'abord

$$\operatorname{tang}(\alpha - \pi) = \cos\varphi \operatorname{tang} \mathrm{K}.$$

On conclura de là l'angle $\alpha - \pi$ et, en le retranchant de la longitude α du nœud ascendant, on aura la longitude héliocentrique π de la comète. En retranchant cet angle de la longitude de la Terre au même instant, on aura l'angle au Soleil TSC′ que, pour abréger, nous nommerons S.

La latitude héliocentrique CSC′, que nous avons désignée par λ, se calcule par la formule

$$\sin\lambda = \sin\varphi \sin \mathrm{K}.$$

Connaissant la longitude et la latitude héliocentriques π et λ, pour en conclure la longitude et la latitude géocentriques a et b, considérons le triangle rectiligne CSC′; on a d'abord

$$\mathrm{SC}' = r\cos\lambda, \quad \mathrm{CC}' = r\sin\lambda,$$

et si du point C′ on abaisse une perpendiculaire C′I sur la ligne ST qui joint les centres de la Terre et du Soleil, on a ensuite

$$\mathrm{SI} = \mathrm{SC}' \cos \mathrm{S}, \quad \mathrm{C'I} = \mathrm{SC}' \sin \mathrm{S}.$$

La première valeur fait connaître celle de

$$\mathrm{TI} = \mathrm{ST} - \mathrm{SI} = \mathrm{ST}\left(1 - \frac{\mathrm{SI}}{\mathrm{ST}}\right),$$

ou bien, en observant que ST = R et faisant $\frac{\mathrm{SI}}{\mathrm{R}} = a$,

$$\mathrm{TI} = \mathrm{R}(1 - a);$$

et en nommant T l'angle à la Terre STC′, on en conclut

$$\operatorname{tang} \mathrm{T} = \frac{\mathrm{C'I}}{\mathrm{TI}}.$$

En ajoutant à l'angle T, calculé par cette formule, la longitude du Soleil A − 180°, on aura pour la longitude géocentrique a de la comète,

$$a = \mathrm{A} - (180° - \mathrm{T}).$$

Quant à la latitude géocentrique b, on la calculera aisément par la formule

$$\operatorname{tang} b = \frac{\mathrm{CC}'}{\mathrm{C'T}},$$

lorsque l'angle T sera déterminé; en effet, on aura, par ce qui précède,

$$\mathrm{CC}' = r \sin \lambda, \quad \mathrm{TI} = \mathrm{C'T} \cos \mathrm{T};$$

d'où l'on conclura

$$\operatorname{tang} b = \frac{r \sin \lambda \cos \mathrm{T}}{\mathrm{TI}},$$

équation dont le second membre ne renferme que des quantités connues.

Calcul du lieu du 22 août.

Époque donnée.. Août...	$22^j,90153$	t...	1,5754900	v^0...	$43^\circ 55' 4''$
Passage au périh. Sept...	29,52769	$D^{\frac{3}{2}}$..	0,0321280	Γ...	85. 6.47
	37,62616	T...	1,5433620	K =	$41^\circ 11' 43''$

Périh.— Nœud.... Γ

$\Gamma - v$ arg. de la lat.. K   T... $34^j,94315$

$\cos \frac{1}{2} v^0$.....	9,9672916
$\cos^2 \frac{1}{2} v^0$...	9,9345832
D.........	0,0214187
....	0,0868355
$\cos \lambda^0$......	9,9259781
SC′........	0,0128136
cos S.......	9,9626098
SI.........	9,9754234
R.........	0,0046329
	9,9707905
Nomb......	0,9349442
a.........	0,0650558
r.........	0,0868355
$\sin \lambda^0$......	9,7303420
cos T......	9,1999382
	9,0171157
TI........	8,8178507
tang b^0.....	0,1992650
b^0.........	$57^\circ 42' 22''$
lat. obser...	57.42.22
Différence..	0 0 0

$\sin \varphi$.	9,9117022
sin K.	9,8186398
$\sin \lambda^0$.	9,7303420
R...	0,0046329
a....	8,8132178
TI...	8,8178507

$\cos \varphi$.......	9,7619427
tang K......	9,9421511
$\text{tang}(\pi^0 - \alpha)$.	9,7040938
$\pi^0 - \alpha$......	$26^\circ 50' 11''$
α..........	279.22.18
$\pi^0 =$......	$306^\circ 12' 29''$
$A^0 =$......	329.38.37
S =.......	$23^\circ 26' 8''$
SC′........	0,0128136
sin S.......	9,5995745
C′I........	9,6123881
TI........	8,8178507
tang T....	0,7945374
$180^\circ -$ T...	$99^\circ 7' 4''$
A^0........	329.38.37
a^0.........	$230^\circ 31' 33''$
long obs....	230.31.33
Différence..	0 0 0

Calcul du lieu du 28 août.

Époque donnée.. Août...	$28^j,87972$	t...	1,5003457	v...	37° 57′ 37″
Passage au périh. Sept...	29,52769	$D^{\frac{3}{2}}$.	0,0321280	Γ...	85. 6.47
	31,64797	T..	1,4682177	K =	47° 9′ 10″

$\cos \frac{1}{2} v$... 9,9757219

T.. $29^j,39122$

$\cos^2 \frac{1}{2} v$.... 9,9514438
D......... 0,0214187
r......... 0,0699749
cos λ....... 9,9037858

SC′........ 9,9737607
cos S....... 9,9603194

SI......... 9,9340801
R......... 0,0040271

9,9300530

Nomb...... 0,8512420
a......... 0,1487580

r......... 0,0699749
sin λ....... 9,7769067
cos T....... 9,5605849

9,4074665
TI......... 9,1765074

tang b....... 0,2309591

b......... 59° 33′ 50″
lat. obs...... 59. 33. 58

Erreur...... — 8″

sin φ. 9,9117022
sin K. 9,8652045
sin λ. 9,7769067

R... 0,0040271
a.... 9,1724803

TI... 9,1765074

cos φ....... 9,7619427
tang K...... 0,0326663
tang (π — α). 9,7946090

π — α...... 31° 55′ 49″
α......... 279.22.18

π......... 311° 18′ 7″
A......... 335.25.24

S......... 24° 7′ 17″

SC′....... 9,9737607
sin S....... 9,6113740

C′I....... 9,5851347
TI......... 9,1765074

tang T..... 0,4086273

180° — T... 111° 19′ 10″
A......... 335.25.24
a......... 224° 6′ 14″
long. obser. 224. 6.30

Erreur..... — 16″

Calcul du lieu du 3 septembre.

Époque donnée.. Sept..	3^j,91004	t....	1,4085393	v'...	31° 29′ 17″
Passage au périh. Sept..	29,52769	$D^{\frac{3}{2}}$..	0,0321280	Γ...	85. 6. 47
	25,61765	T...	1,3764113	K...	53° 37′ 30″

$\cos \frac{1}{2} v'$... 9,9833933

T = 23^j,790921

$\cos^2 \frac{1}{2} v'$....	9,9667866
D	0,0214187
r..........	0,0546321
$\cos \lambda'$......	9,8772979
SC′........	9,9319300
cos S......	9,9614976
SI.........	9,8934276
R.........	0,0033786
	9,8900490
Nomb......	0,7763350
a..........	0,2236650
r'..........	0,0546321
$\sin \lambda'$......	9,8175804
cos T.....	9,7383055
	9,6105180
TI.........	9,3529767
tang b'.....	0,2575413
b'.........	61° 4′ 20″
Lat. obs....	61. 4. 20
Différence...	0 0 0

sin φ.	9,9117022
sin K.	9,9058782
sin λ′.	9,8175804
R...	0,0033786
a....	9,3495981
TI...	9,3529767

cos φ.......	9,7619427
tang K......	0,1327740
tang (π′ − φ).	9,8947167
π′ − φ......	38° 7′ 19″
φ..........	279.22.18
π′..........	317° 29′ 37″
A′.........	341.15.54
S..........	23° 46′ 17″
SC′........	9,9319284
sin S.......	9,6054003
C′I........	9,5373287
TI........	9,3529767
tang T.....	0,1843520
180° − T...	123° 11′ 20″
A′........	341.15.54
a'........	218° 4′ 34″
long. obs...	218. 4.34
Différence..	0 0 0

Ainsi les éléments trouvés satisfont exactement aux deux observations extrêmes et représentent l'observation moyenne avec une erreur de 16″ sur la longitude et de 8″ sur la latitude. Ces erreurs n'excèdent pas les limites de celles qu'on doit attendre des méthodes les plus précises imaginées pour la détermination de l'orbite d'une comète d'après trois observations. La méthode dont nous venons de faire l'application à la comète de 1824, résout donc la question d'une manière très-satisfaisante.

Rectification des éléments de l'orbite de la comète de 1824.

25. Nous nous proposons maintenant d'appliquer à la comète de 1824 la méthode que nous avons donnée pour arriver à une connaissance exacte des éléments de l'orbite d'une comète, lorsque l'on connaît à peu près la distance périhélie et le temps du passage au périhélie.

Nous avons choisi, pour corriger ces deux éléments, les trois observations suivantes :

Époques.		Longitudes observées.	Latitudes observées.
Août....	$4^j,9275$	$a^{o}\ 252^{o}\,32'\,28''$	$b^{o}\ 48^{o}\ 7'\,30''$,
	22,9514	$a.230.34.49$	$b.57.44.23$,
Septembre	3,9100	$a'.218.\ 4.34$	$b'\ 61.\ 4.20$.

Les lieux du Soleil, correspondant aux mêmes époques et calculés par les Tables de Delambre, donnent

Longitude ☉.	log. R.
$132^{o}\,21'\,58''$	0,0060678
149.41.30	0,0046284
161.15.54	0,0033786.

Supposons que, par les premiers essais, on ait trouvé pour la distance périhélie 1,04598 et pour l'époque du passage le 28^{sept}, 3153; calculons avec ces éléments approchés les angles U, V, U′ et V′ par la méthode exposée n° **18**. Voici le détail de ce calcul :

Pas. pér. sept.	28,3153	t....	1,7355015	$v^0 =$	$58^\circ\ 29'\ 22''$
Ep. don. août.	4,9275	$D^{\frac{3}{2}}$..	0,0292851	$\cos \frac{1}{2} v^0$.	9,9407858
$t =$	$54^j,3878$	T...	1,7062164		
		T =	$50^j,8413$		
D..	0,0195234				
$\cos^2 \frac{1}{2} v^0$..	9,8815716				
r^0..	0,1379518			long. ⊙.	$132^\circ\ 21'\ 58''$
				long. comèt.	252.32.28
cos C′TS..	9,7012595			élong. C′TS =	$120^\circ\ 10'\ 30''$
cos b^0..	9,8244563				
cos CTS..	9,5257158			CTS.	$109^\circ\ 36'\ 14''$
sin CTS..	9,9740669			SCT.	44. 3. 9
R^0..	0,0060678				
$1 : r^0$..	9,8620482				$153^\circ\ 39'\ 23''$
				CST.	$26^\circ\ 20'\ 37''$
sin SCT..	9,8421829				
sin CST..	9,6471418				
sin b^0..	9,8719247				
1 : sin CTS..	0,0259331				
sin λ^0..	9,5449996			lat. hélio. λ^0...	$20^\circ\ 32'\ 0''$
cos CST..	9,9523802			commut. C′ST.	$16^\circ\ 52'\ 27''$
cos λ^0..	9,9714931			long. de la Terr.	312.21.58
cos C′ST..	9,9808871			long. hél. π^0.	$295^\circ\ 29'\ 31''$

Nous venons de déterminer, par ce calcul, l'anomalie, la longitude et la latitude héliocentriques de la comète relatives à l'instant de l'observation du 4 août; en répétant les mêmes opérations, par rapport aux époques du 22 août et du 3 septembre, on parviendra aux résultats suivants :

$$\begin{array}{l|l|l} v^{o} = 58^{o}29'22'' & v = 42^{o}55'51'' & v' = 30^{o}18'45'' \\ \varphi^{o} = 295.29.31 & \varphi = 306.59.\ 8 & \varphi' = 318.12.19 \\ \lambda^{o} = 20.32.00 & \lambda = 31.46.20 & \lambda' = 40.15.40 \end{array}$$

Ces valeurs donneront, en comparant les deux dernières observations à celle du 4 août,

$$v^{o} - v = 15^{o}33'31'' \qquad \varphi - \varphi^{o} = 11^{o}29'37''$$
$$v^{o} - v' = 28.10.37 \qquad \varphi' - \varphi^{o} = 22.42.48$$

et, au moyen de la formule (4), n° **18**, on en conclura

$$\begin{array}{lr} \cos(\varphi - \varphi^{o})\ldots & 9,9912026 \\ \cos\lambda^{o}\ldots & 9,9714931 \\ \cos\lambda\ldots & \underline{9,9294946} \\ & 9,8921903 \\ \text{nomb.} & +0,780172 \end{array} \qquad \begin{array}{lr} \sin\lambda^{o}\ldots & 9,5449996 \\ \sin\lambda\ldots & \underline{9,7214347} \\ & 9,2664343 \\ & +0,184686 \\ & \underline{+0,780172} \\ \cos U & +0,964858 \\ \log. & 9,9844634 \end{array}$$

On aura donc

$$\begin{array}{lr} U\ldots & 15^{o}14'\ 4'' \\ V\ldots & \underline{15.\ 33.\ 31} \\ V - U\ldots & 19\ 27 \end{array} \qquad m\ldots + 1167''$$

On trouverait de même

$$\begin{array}{lr} U'\ldots & 27^{o}38'22'' \\ V'\ldots & \underline{28.\ 10.\ 37} \\ V' - U'\ldots & 32'15'' \end{array} \qquad m'\ldots + 1935''$$

26. Supposons maintenant que l'on fasse varier d'une petite quantité la distance périhélie et l'instant du passage, et déterminons les variations correspondantes des angles U, V, U', V'. Les calculs qui ont servi à former ces angles, fourniront toutes les données nécessaires à cette nouvelle recherche. On aura d'abord, par la seconde des formules (o'), nº **19**,

$$\begin{aligned}\partial v^0 &= (2719'')\,\partial t - (212055'')\,\partial D,\\ \partial v &= (3519'')\,\partial t - (183485'')\,\partial D,\\ \partial v' &= (4071'')\,\partial t - (142491'')\,\partial D,\end{aligned}$$

et par la première des mêmes formules, en convertissant tous les termes en secondes,

$$\begin{aligned}\frac{\partial r^0}{r^0} &= (1522'')\,\partial t + (78467'')\,\partial D,\\ \frac{\partial r}{r} &= (1382'')\,\partial t + (125050'')\,\partial D,\\ \frac{\partial r'}{r'} &= (1103'')\,\partial t + (158601'')\,\partial D.\end{aligned}$$

La formule (a) donnera ensuite

$$\begin{aligned}\partial\lambda^0 &= (0,73178)\frac{\partial r^0}{r^0},\\ \partial\lambda &= (1,18286)\frac{\partial r}{r},\\ \partial\lambda' &= (1,44359)\frac{\partial r'}{r'},\end{aligned}$$

et par la formule (b), on aura

$$\begin{aligned}\partial\pi^0 &= -(0,67577)\frac{\partial r^0}{r^0},\\ \partial\pi &= -(1,10568)\frac{\partial r}{r},\\ \partial\pi' &= -(1,24612)\frac{\partial r'}{r'}.\end{aligned}$$

Par la formule (g), on formera les variations des angles auxiliaires A et A′; on trouvera ainsi

$$\delta A = -(0{,}65984)\frac{\delta r^0}{r^0} - (1{,}19847)\frac{\delta r}{r},$$

$$\delta A' = -(0{,}60698)\frac{\delta r^0}{r^0} - (1{,}44033)\frac{\delta r'}{r'}.$$

En substituant ces valeurs, ainsi que celles de $\delta\lambda^0$, $\delta\lambda$, $\delta\lambda'$ dans la formule (c), et en remplaçant ensuite $\frac{\delta r^0}{r^0}$, $\frac{\delta r}{r}$, $\frac{\delta r'}{r'}$ par leurs valeurs, on trouvera

$$\delta U = -(\ \ 2'')\,\delta t + (8792'')\,\delta D,$$
$$\delta U' = -(68'')\,\delta t + (13103'')\,\delta D.$$

Les valeurs de δv^0, δv, $\delta v'$ donnent d'ailleurs

$$\delta V = -(800'')\,\delta t - (28570'')\,\delta D,$$
$$\delta V' = -(1352'')\,\delta t - (69564'')\,\delta D.$$

On aura donc enfin, pour déterminer les variations δt et δD, les deux équations suivantes :

$$798\,\delta t + 37362\,\delta D = 1167,$$
$$1284\,\delta t + 82667\,\delta D = 1935;$$

d'où l'on tire

$$\delta D \doteq +0{,}0025397, \quad \delta t = +1{,}3434999.$$

On trouve, par conséquent, pour la distance périhélie et pour l'instant du passage de la comète par ce point, d'après ces premières corrections,

$$D = 1{,}04852, \text{ inst. du pass. sept. } 29^{\text{j}}.6588.$$

Avec ces nouveaux éléments, on recommencera les calculs précédents, et l'on arrivera bientôt aux valeurs de D et de t qui satisfont le plus exactement possible aux trois observations données.

27. Pour montrer comment on procéderait à la correction des éléments de l'orbite par la méthode des variations déterminées, exposée n° **21**, reprenons les trois observations du n° **25**, et, après avoir calculé les angles U, V, U′, V′ avec les valeurs que nous avons supposées à la distance périhélie et à l'instant du passage, nommons m et m' les différences V — U et V′ — U′ ; on aura, par ce qui précède,

$$m = +1167'', \quad m' = +1935''.$$

Faisons subir maintenant une légère variation à la distance périhélie, sans altérer l'époque du passage. Supposons, par exemple,

$$D = 1{,}00598, \quad \text{inst. du pass. sept. } 28^{j},3153.$$

En calculant de nouveau, avec ces données, les angles U, V, U′, V′, on trouve

$$\begin{array}{rlrl}
U = & 15^\circ 10' 50'' & U' = & 27^\circ 33' 31'' \\
V = & 15.51.54 & V' = & 28.56.35 \\
\hline
V - U = & 41' \; 4'' & V' - U' = & 1^\circ 23' \; 4'' \\
n = & +\,2464'' & n' = & +\,4984''
\end{array}$$

Faisons varier enfin l'instant du passage, en conservant la distance périhélie employée dans la première opération ; supposons, par exemple,

$$D = 1{,}04598, \quad \text{inst. du pass. sept. } 29^{j},3153.$$

En recommençant avec ces données les calculs précédents, on trouvera

$$\begin{array}{rlrl} \mathrm{U}\ldots & 15^\circ 14' \; 3'' & \mathrm{U}'\ldots & 27^\circ 37' 13'' \\ \mathrm{V}\ldots & 15.20.15 & \mathrm{V}'\ldots & 27.48.\;5 \\ \hline \mathrm{V}-\mathrm{U}\ldots & 6' 12'' & \mathrm{V}'-\mathrm{U}'\ldots & 10' 52'' \\ & p = +\,372'' & & p' = +\,652'' \end{array}$$

Au moyen des valeurs de m, m', n, n', p et p', on formera les suivantes :

$$m - n = -\,1297'', \quad m - p = +\,795'',$$
$$m' - n' = -\,3049'', \quad m' - p' = +\,1283'',$$

et l'on aura à résoudre ces deux équations,

$$-\,1297u + \;\,795\,t = 1167,$$
$$-\,3049u + 1283\,t = 1935;$$

d'où l'on tire

$$u = -\,0{,}0540362, \quad t = +\,1{,}37977.$$

En multipliant respectivement, par ces deux quantités, les variations $-\,0{,}04$ et $+\,1^{\mathrm{j}}$, que nous avons supposées à la distance périhélie et à l'époque du passage, on aura, pour les variations véritables de ces éléments,

$$\delta\mathrm{D} = +\,0{,}0021614, \quad \delta t = +\,1{,}37977,$$

d'où l'on conclura pour la distance périhélie et l'instant du passage au périhélie corrigés,

$$\mathrm{D} = 1{,}0481414, \quad \text{inst. du pass. sept. } 29^{\mathrm{j}}{,}69507.$$

En calculant avec ces éléments les angles U, V, U′, V′, on aura

$$\begin{array}{llcll} & \text{U}\ldots & 15^\circ 14' 27'' & \text{U}'\ldots & 27^\circ 37' 14'' \\ & \text{V}\ldots & 15.14.19 & \text{V}'\ldots & 27.37.14 \\ \hline \text{U}-\text{V}\ldots & & +8'' & \text{U}'-\text{V}'\ldots & 0'\ 0'' \end{array}$$

On ferait disparaître entièrement la différence, en augmentant un peu la distance périhélie et en avançant l'époque du passage ; mais comme elle ne s'élève qu'à quelques secondes, nous ne pousserons pas plus loin cette recherche, et nous déterminerons, d'après la distance périhélie et l'instant du passage précédents, tous les éléments de l'orbite. Le calcul que nous venons de faire des angles U, V, U', V' a donné

$$\begin{array}{l|l|l} \upsilon^\circ = \ 59^\circ 23' 36'' & \upsilon = \ 44^\circ\ 9' 17'' & \upsilon' = \ 31^\circ 46' 22'' \\ \lambda^\circ = \ 20.59.18 & \lambda = \ 32.28.35 & \lambda' = \ 41.\ 0.\ 8 \\ \pi^\circ = 295.\ 4.13 & \pi = 306.19.14 & \pi' = 317.33.24 \end{array}$$

En combinant entre elles les valeurs qui se rapportent à la première et à la dernière observation, parce que ce sont celles qui donnent aux numérateurs et aux dénominateurs des formules n° **20** les plus grands nombres et dont on doit attendre, par conséquent, le plus d'exactitude, on trouve

$$\varphi = 54^\circ 27' 34'', \quad \alpha = 279^\circ 9' 53''.$$

φ est l'inclinaison de l'orbite, et le mouvement de la comète étant direct, α est la longitude du nœud ascendant. En nommant η la distance de la comète à ce nœud, à l'époque de la première observation, on trouve par la formule (30), n° **14**,

$$\eta = 26^\circ 6' 56'',$$

d'où l'on conclura, pour le lieu du périhélie sur l'orbite,

$$\nu + \eta + \alpha = 4^\circ 40' 25''.$$

Les éléments de l'orbite de la comète de 1824 seront donc

Passage au périhélie. Septembre.......	$29^j,69507$
Distance périhélie....................	1,0481414
Lieu du périhélie sur l'orbite..........	4°40′ 25″
Longitude du nœud ascendant.........	279. 9. 53
Inclinaison de l'orbite................	54.27. 34

Sens du mouvement direct.

CHAPITRE III.

PERTURBATIONS DU MOUVEMENT ELLIPTIQUE DES COMÈTES.

28. Les comètes sont, comme les planètes, assujetties à des perturbations qui altèrent leur mouvement elliptique autour du Soleil, et qui font varier par degrés les éléments de leurs orbites. Ces perturbations sont, en général, beaucoup plus considérables pour les comètes que pour les planètes, et elles sont surtout sensibles dans la durée des révolutions. Leur détermination doit dépendre évidemment des mêmes principes que celle des inégalités planétaires, puisqu'elles dérivent de la même cause, et la méthode exposée n° 13, livre II, qui consiste à exprimer l'effet des forces perturbatrices par la variation des constantes arbitraires qui entrent dans les formules du mouvement elliptique, paraît être encore dans cette question la plus appropriée à la nature du problème. On détermine, en effet, très-simplement de cette manière les variations différentielles de chacun des éléments de l'orbite, et il ne s'agit plus que d'intégrer ces formules pour avoir tous les éléments du mouvement de la comète dans son orbite troublée. Malheureusement cette intégration présente de grandes difficultés. Les excentricités des orbites des comètes étant en général très-considérables, et leurs inclinaisons à

l'écliptique variant à l'infini, il n'est plus possible de développer la fonction perturbatrice en série convergente ordonnée par rapport aux puissances ascendantes de ces quantités, et il faut renoncer à l'avantage d'avoir, pour déterminer les inégalités des comètes, des formules qui, comme celles des perturbations planétaires, embrassent un nombre indéfini de leurs révolutions et ne demandent que des substitutions numériques pour donner les résultats cherchés. Pour intégrer les formules différentielles des éléments de l'orbite troublée, on est obligé ici de recourir aux méthodes d'approximation connues sous le nom de *quadratures mécaniques*. Ces méthodes consistent à partager la courbe décrite par la comète en portions très-petites, par rapport auxquelles on détermine les altérations produites par les forces perturbatrices sur chacun des éléments de l'orbite; différentes formules donnent ensuite le moyen d'en conclure les variations totales de ces éléments dans l'intervalle compris entre les deux extrémites de l'arc de trajectoire que l'on a considéré. On peut déterminer de cette manière les altérations des éléments de l'orbite elliptique pendant une révolution entière de la comète, c'est-à-dire dans l'espace de temps qui s'écoule entre deux passages de cet astre au périhélie; mais les calculs que cette méthode exige dans les applications sont immenses, et il convient de les restreindre autant que possible, pour éviter tout travail inutile au calculateur. C'est ce qu'on peut faire très-simplement lorsque la comète est dans la partie supérieure de son orbite, et que sa distance au Soleil devient très-grande, relativement à celle de la planète perturbatrice au même astre. La fonction dont les perturbations dépendent peut, dans ce cas, se développer en série ordonnée par rapport aux puissances descendantes de cette distance, et les expressions différentielles des altérations des éléments elliptiques se partagent alors en deux parties, dont l'une est intégrable par elle-même et dont l'autre, beaucoup moins considérable que la première, peut se déterminer par des approximations successives aussi exactement que l'on veut.

La théorie des perturbations des comètes peut donc être regardée comme complète, et les travaux de Lagrange sur ce sujet, exposés dans un beau Mémoire qui remporta le prix proposé par l'Académie des Sciences, en 1780, n'ont presque rien laissé à faire à ses successeurs. Sans doute on pourrait désirer, pour déterminer ces perturbations, une méthode dont l'application numérique fût plus simple; mais, par la nature même des difficultés que présente la question, il me paraît douteux qu'on y parvienne, et il est probable que pendant longtemps encore ce sera à la patience du calculateur à suppléer sur ce point aux imperfections de l'analyse.

Nous présenterons, dans ce chapitre, les expressions différentielles des éléments de l'orbite troublée des comètes, sous la forme particulière qu'il convient de leur donner, pour faciliter l'application de la méthode des quadratures mécaniques à leur intégration. Nous développerons ensuite ces formules pour le cas où la comète est dans la partie supérieure de son orbite, et en considérant les termes de ces expressions, qui peuvent s'intégrer rigoureusement, nous donnerons les formules analytiques qui exprimeront, sous forme finie, la partie la plus considérable des perturbations. Nous exposerons enfin le moyen de déterminer par approximation l'autre partie avec toute la précision désirable. Dans le chapitre suivant nous présenterons, avec autant de détails que le permettront les bornes de cet ouvrage, l'application de ces formules aux trois comètes dont le retour périodique est maintenant constaté.

29. Soient m la masse de la comète, x, y, z ses coordonnées rectangulaires rapportées au centre du Soleil, dont la masse est représentée par M; soient x', y', z' les coordonnées de la planète perturbatrice m', rapportées aux mêmes axes et à la même origine que les premières. Si l'on désigne par r et r' les rayons vecteurs de m et de m', et que, pour abréger, on fasse

$$\rho^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2,$$

et

$$\mathrm{R} = m'\left(\frac{1}{\rho} - \frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3}\right),$$

les trois équations différentielles du mouvement de m autour de M, en négligeant, pour plus de simplicité, la masse de la comète devant celle du Soleil prise pour unité, ce qui suppose $m + \mathrm{M} = 1$, seront (n° **8**, livre II)

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{x}{r^3} &= \frac{d\mathrm{R}}{dx}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{y}{r^3} &= \frac{d\mathrm{R}}{dy}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{z}{r^3} &= \frac{d\mathrm{R}}{dz}. \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{A})$$

Lorsque R est nul, ou lorsqu'on fait abstraction des forces perturbatrices, ces équations sont celles du mouvement elliptique. Nous avons développé leurs intégrales complètes dans le chapitre IV du livre cité.

Supposons donc que x, y, z soient les trois coordonnées de la comète dans l'orbite elliptique, et $x+\delta x$, $y+\delta y$, $z+\delta z$ ce que deviennent ces valeurs dans l'orbite troublée, δx, δy et δz étant de très-petites quantités de l'ordre des forces perturbatrices; en substituant $x+\delta x$, $y+\delta y$, $z+\delta z$, à la place de x, y, z dans les équations précédentes, et négligeant, comme on le fait ordinairement dans la théorie des comètes, les termes du second ordre par rapport à m', on aura

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2\delta x}{dt^2}+\frac{\delta x}{r^3}-\frac{3x\delta r}{r^4}&=\frac{d\text{R}}{dx},\\
\frac{d^2\delta y}{dt^2}+\frac{\delta y}{r^3}-\frac{3y\delta r}{r^4}&=\frac{d\text{R}}{dy},\\
\frac{d^2\delta z}{dt^2}+\frac{\delta z}{r^3}-\frac{3z\delta r}{r^4}&=\frac{d\text{R}}{dz}.
\end{aligned}\right\}\quad(\text{B})$$

Si ces équations étaient intégrables, elles donneraient immédiatement les valeurs des variations δx, δy et δz, et en les joignant aux valeurs des trois coordonnées x, y, z relatives au mouvement elliptique, on pourrait déterminer à chaque instant le lieu de la comète dans son orbite troublée.

On peut satisfaire aux équations (B) dans deux cas qu'il convient d'examiner, parce qu'il en résultera des considérations qui nous seront utiles dans la suite. Supposons d'abord que la comète s'approche beaucoup du Soleil; les coordonnées x, y, z deviennent alors très-petites, ainsi que les quantités $\frac{dR}{dx}$, $\frac{dR}{dy}$, $\frac{dR}{dz}$; en effet, en développant R, on a

$$R = m'\left[\frac{1}{r'} - \frac{1}{2}\frac{r^2}{r'^3} + \frac{3}{2}\frac{(xx'+yy'+zz')^2}{r'^5} + \text{etc.}\right];$$

D'où l'on voit que si l'on suppose que x, y, z soient de l'ordre m', les trois différentielles partielles de R seront de l'ordre du carré des forces perturbatrices, et les altérations qui en résulteront seront insensibles. Il est permis, par conséquent, de supposer nuls les seconds membres des équations (A), d'autant plus que, dans ce cas, les termes $\frac{x}{r^3}$, $\frac{y}{r^3}$, $\frac{z}{r^3}$ deviennent très-grands. Le mouvement peut donc être alors regardé comme elliptique, et l'on satisfait, en effet, aux équations (B), en y faisant δx, δy et δz égaux à zéro.

Concevons maintenant la comète dans la partie opposée de son orbite, et supposons que son rayon vecteur r devienne très-grand relativement au rayon vecteur r' de la planète perturbatrice. On pourra développer R en suite convergente par rapport aux puissances descendantes de r; on aura ainsi

$$R = m'\left[\frac{1}{r} + (xx'+yy'+zz')\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3}\right)\right] + R';$$

en supposant, pour abréger,

$$R' = \frac{1}{2}m'\left[-\frac{r'^2}{r^3} + \frac{3(xx'+yy'+zz'-\frac{1}{2}r'^2)^2}{r^5} + \frac{5(xx'+yy'+zz'-\frac{1}{2}r'^2)^3}{r^7} + \ldots\right].$$

En différentiant cette expression de R, abstraction faite de R′, on trouve

$$\frac{dR}{dx} = m'\left[\frac{x'-x}{r^3} - \frac{x'}{r'^3} - \frac{3x}{r^5}(xx'+yy'+zz')\right],$$

valeur exacte, comme il est aisé de s'en assurer, aux quantités près de l'ordre $\frac{m'}{r^4}$; la première des équations (B) devient donc

$$\frac{d^2\delta x}{dt^2} + \frac{\delta x}{r^3} - \frac{3x\delta r}{r^4} = m'\left[\frac{x'-x}{r^3} - \frac{x'}{r'^3} - \frac{3x}{r^5}(xx'+yy'+zz')\right].$$

Si l'on observe que l'on a

$$\delta r = \frac{x\delta x + y\delta y + z\delta z}{r},$$

et que, négligeant le carré des forces perturbatrices, on peut supposer dans les termes multipliés par m',

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{x}{r^3}, \quad \frac{d^2x'}{dt^2} = -\frac{x'}{r'^3},$$

on verra aisément que cette équation peut s'écrire ainsi :

$$\frac{d^2\delta x}{dt^2} - m'\frac{d^2x'}{dt^2} - m'\frac{d^2x}{dt^2} = (\delta x - m'x')\left(\frac{3x^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}\right)$$
$$+ (\delta y - m'y')\frac{3xy}{r^5} + (\delta z - m'z')\frac{3xz}{r^5}.$$

Les équations différentielles en δy et δz fourniront deux équations semblables. On satisfait à ces équations, abstraction faite du dernier terme de leur premier membre, en supposant $\delta x = m'x'$, $\delta y = m'y'$

et $\delta z = m'z'$. Soient donc

$$\delta x = m'x' + \xi, \quad \delta y = m'y + \eta, \quad \delta z = m'z' + \zeta,$$

l'équation précédente deviendra

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} - m'\frac{d^2x}{dt^2} = \xi\left(\frac{3x^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}\right) + \eta\frac{3xy}{r^5} + \zeta\frac{3xz}{r^5},$$

et l'on y satisfera en prenant $\xi = \frac{1}{3}m'x$, $\eta = \frac{1}{3}m'y$, $\zeta = \frac{1}{3}m'z$. Il en serait de même des équations différentielles relatives à η et à ζ; on aura donc enfin

$$\delta x = m'x' + \frac{1}{3}m'x, \quad \delta y = m'y' + \frac{1}{3}m'y, \quad \delta z = m'z' + \frac{1}{3}m'z.$$

Telles sont les valeurs de δx, δy et δz qui résultent des équations (B), abstraction faite des termes que nous y avons négligés, et qui sont d'autant plus exactes que la comète s'éloigne davantage du Soleil. Si l'on voulait avoir des intégrales de ces équations plus approchées, on désignerait par $\delta' x$, $\delta' y$, $\delta' z$, les quantités très-petites qu'il faut ajouter aux précédentes pour avoir les valeurs exactes de δx, δy, δz, et changeant dans les équations (B) δx, δy, δz en $\delta' x$, $\delta' y$, $\delta' z$ et R en R$'$, on aurait trois nouvelles équations qui serviraient à déterminer ces quantités.

30. Proposons-nous maintenant de déterminer les variations qu'il faut faire subir aux constantes qui entrent dans les formules du mouvement elliptique, pour satisfaire généralement aux équations (A), au moyen des mêmes intégrales. En supposant R nul, nous sommes parvenu, dans le chapitre IV du livre II, aux sept intégrales suivantes :

$$\left.\begin{array}{ll} xy_{,} - x_{,}y = c, & x_{,}z - xz_{,} = c', \\ xz_{,} - zy_{,} = c'', & \frac{x}{r} = cy_{,} - c'z_{,} - f, \\ \frac{y}{r} = c''z_{,} - cx_{,} - f', & \frac{z}{r} = c'x_{,} - c''y_{,} - f'', \\ x_{,}^2 + y_{,}^2 + z_{,}^2 - \frac{2}{r} + \frac{1}{a} = 0, & \end{array}\right\} \quad (C)$$

en nommant, pour abréger, $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ les trois quantités $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$.

La constante a représente, dans ces équations, le demi-grand axe de l'orbite.

Les trois constantes c, c', c'' fixent sa position. En effet, si l'on nomme φ l'inclinaison du plan de cette orbite sur le plan fixe des xy, et α la longitude de son nœud ascendant comptée sur le même plan, on aura

$$z = \operatorname{tang}\varphi \cos\alpha . y - \operatorname{tang}\varphi \sin\alpha . x.$$

Cette équation, étant comparée à l'équation $cz + c'y + c''x = 0$, qui résulte des intégrales (C), donne

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\sqrt{c'^2 + c''^2}}{c}, \quad \operatorname{tang}\alpha = -\frac{c''}{c'}.$$

Les constantes f, f', f'' déterminent l'excentricité et le lieu du périhélie. En effet, soient e le rapport de l'excentricité au demi-grand axe, et i la longitude du périhélie projeté sur le plan des xy, on aura (n° **21**, livre II)

$$e = \sqrt{f^2 + f'^2 + f''^2}, \quad \operatorname{tang} i = \frac{f'}{f}.$$

Pour simplifier les formules suivantes, nous prendrons, pour le plan fixe auquel on rapporte la position de la comète et celle des planètes perturbatrices, le plan de l'orbite primitive de la comète; dans ce cas, l'angle φ est nul à l'origine de la période que l'on considère, en sorte que les constantes c' et c'' seront de l'ordre des forces perturbatrices. On a d'ailleurs, par le numéro cité,

$$f'' = -\frac{f'c' + fc''}{c};$$

d'où l'on voit que f'' est du même ordre que c' et c''. Il suit de là que si l'on n'a égard, comme nous le ferons, qu'à la première puissance des forces perturbatrices, on pourra négliger le carré de f''; si de plus on nomme ω la longitude du périhélie sur l'orbite, comptée à partir de l'axe des x, on aura, aux quantités près du second ordre, par rapport à l'inclinaison φ, $i = \omega$; on aura donc simplement, pour déterminer les deux constantes e et ω,

$$e = \sqrt{f^2 + f'^2}, \quad \sin\omega = \frac{f'}{\sqrt{f^2 + f'^2}}, \quad \cos\omega = \frac{f}{\sqrt{f^2 + f'^2}},$$

ou, ce qui revient au même,

$$e \sin\omega = f', \quad e\cos\omega = f.$$

Déterminons maintenant les variations des six constantes a, c, c', c'', f et f'. Comme les grandes excentricités et les grandes inclinaisons des orbites des comètes ne permettent pas d'appliquer à ces astres les formules que nous avons développées dans la théorie des inégalités planétaires, nous ne suivrons pas ici l'analyse du chapitre VI du livre II, et nous exprimerons les altérations des éléments de l'orbite elliptique par des formules qui contiendront la quantité R et ses différentielles sous la forme où elles sont données immédiatement, c'est-à-dire en fonction des coordonnées de la comète et des planètes perturbatrices. Les intégrales (C), où les constantes arbitraires se trouvent exprimées au moyen des coordonnées de la comète et de leurs différences premières divisées par l'élément du temps, sont très-commodes pour cet objet. En effet, nous avons vu nº 37, livre cité, que si l'on suppose à l'une quelconque des intégrales du mouvement elliptique cette forme,

$$a = \text{fonct.}\,(x,\ y,\ z,\ x_{,},\ y_{,},\ z_{,}),$$

la même intégrale conviendra aux équations différentielles du mouvement troublé, pourvu qu'on y regarde comme variable la constante a, et qu'on détermine sa variation par l'équation

$$da = \frac{da}{dx_{,}}\,\delta x_{,} + \frac{da}{dx_{,}}\,\delta y_{,} + \frac{da}{dz_{,}}\,\delta z_{,}. \qquad \text{(D)}$$

La caractéristique δ désignant ici des différentiations relatives aux constantes seulement, les variations de ces constantes étant liées entre elles par les équations

$$\delta x = 0, \qquad \delta y = 0, \qquad \delta z = 0,$$

$$\delta x_{,} = \frac{d\text{R}}{dx}\,dt, \quad \delta y_{,} = \frac{d\text{R}}{dy}\,dt, \quad \delta z_{,} = \frac{d\text{R}}{dz}\,dt.$$

Si l'on substitue successivement a, c, c', c'', f, f' et leurs différentielles dans la formule générale (D), et qu'on remplace les trois quantités $\delta x_{,}$, $\delta y_{,}$, $\delta z_{,}$ par leurs valeurs, en observant que z est de l'ordre des forces perturbatrices et que nous négligeons leur carré, on aura d'abord

$$d\frac{1}{a} = -2\left(x_{,}\frac{dR}{dx} + y_{,}\frac{dR}{dy}\right)dt, \tag{1}$$

et ensuite

$$\left.\begin{aligned}
dc &= \left(x\frac{dR}{dy} - y\frac{dR}{dx}\right)dt,\\
dc' &= -x\frac{dR}{dz}dt,\\
dc'' &= y\frac{dR}{dz}dt,\\
df &= \left(x\frac{dR}{dy} - y\frac{dR}{dx}\right)dy + (xdy - ydx)\frac{dR}{dy},\\
df' &= \left(y\frac{dR}{dx} - x\frac{dR}{dy}\right)dx + (ydx - xdy)\frac{dR}{dx}.
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Les variations des constantes f, f', c', c'' étant déterminées, on en conclura aisément celles des constantes e, ω, φ et α. En effet, en différentiant les équations (b), on aura

$$de = \sin\omega\, df' + \cos\omega\, df,$$
$$ed\omega = \cos\omega\, df' - \sin\omega\, df.$$

Nous avons nommé ω la longitude du périhélie comptée de l'axe des x; si l'on prend pour cette droite le grand axe de l'orbite de la comète, ω sera de l'ordre des forces perturbatrices, et les équations précédentes donneront simplement

$$de = df, \quad ed\omega = df'.$$

Si l'on suppose, comme dans le n° **44**, livre II,

$$\tan\varphi \sin\alpha = p, \quad \tan\varphi \cos\alpha = q,$$

et qu'on remarque qu'on a (n° **20** du même livre) $c^2 + c'^2 + c''^2 = a(1 - e^2)$, ce qui donne, en négligeant le carré des forces perturbatrices $c = \sqrt{a(1 - e^2)}$, on aura

$$dp = \frac{dc''}{\sqrt{a(1 - e^2)}}, \quad dq = -\frac{dc'}{\sqrt{a(1 - e^2)}}.$$

Ces formules serviront à déterminer la position de l'orbite troublée de la comète par rapport au plan de son orbite primitive; il sera facile ensuite d'en conclure la position de cette orbite par rapport à un plan fixe quelconque.

31. Il nous reste à trouver la variation de la sixième arbitraire qui entre dans les formules du mouvement elliptique, et que nous avons nommée la longitude de l'époque. Reprenons, pour cela, les formules de ce mouvement; en faisant, pour abréger, $n = a^{-\frac{3}{2}}$, on a (n° **22**, livre II),

$$\left.\begin{aligned} nt + \varepsilon - \omega &= u - e \sin u, \\ r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos(v - \omega)} &= a(1 - e\cos u). \end{aligned}\right\} \quad (a)$$

Dans ces équations, $nt + \varepsilon$ représente la longitude moyenne de la comète, $nt + \varepsilon - \omega$ est son anomalie moyenne, u son anomalie excentrique, et $v - \omega$ son anomalie vraie.

Soient x et y les coordonnées rectangulaires de la comète, rapportées au plan et au grand axe de son orbite, les abscisses x étant comptées du foyer vers le périhélie, on aura

$$x = r\cos(v-\omega), \quad y = r\sin(v-\omega);$$

on a d'ailleurs, en comparant les deux valeurs de r,

$$\frac{1-e^2}{1+e\cos(v-\omega)} = 1 - e\cos u,$$

d'où l'on tire

$$\sin(v-\omega) = \frac{\sqrt{1-e^2}\sin u}{1-e\cos u}, \quad \cos(v-\omega) = \frac{\cos u - e}{1-e\cos u}.$$

En substituant ces valeurs dans les expressions de x et de y, on trouve

$$x = a\cos u - ae, \quad y = a\sqrt{1-e^2}\sin u.$$

Cela posé, si l'on différentie la première des équations (a), on aura, dans le cas de l'ellipse invariable,

$$ndt = du(1-e\cos u).$$

Cette équation doit encore subsister dans le cas de l'ellipse troublée, c'est-à-dire lorsqu'on regarde ses éléments comme variables; on aura donc ainsi

$$d\varepsilon - d\omega = du(1-e\cos u) - de\sin u, \quad (3)$$

l'anomalie u ne variant ici qu'à raison de la variation des constantes que sa valeur renferme.

Si l'on différentie l'expression de $\cos(v-\omega)$ en y faisant varier les constantes e et ω, et qu'on y substitue ensuite pour $\sin(v-\omega)$ sa valeur, on trouvera aisément

$$du = -\frac{\sin u}{1-e^2}de - \frac{1-e\cos u}{\sqrt{1-e^2}}d\omega.$$

Cette valeur, substituée dans l'équation (3), donne

$$d\varepsilon - d\omega = -\frac{de\sin u(2 - e\cos u - e^2)}{1 - e^2} - \frac{d\omega(1 - e\cos u)^2}{\sqrt{1 - e^2}}; \quad (4)$$

formule qui déterminera la variation de ε, lorsque celles de e et de ω seront connues. On peut écrire ainsi cette équation,

$$d\varepsilon - d\omega(1 - \sqrt{1 - e^2}) = -\frac{de\sin u(2 - e\cos u - e^2)}{1 - e^2}$$
$$+ \frac{ed\omega[\cos u(2 - e\cos u) - e]}{\sqrt{1 - e^2}};$$

et si l'on remplace, dans le second membre, de et $ed\omega$ par leurs valeurs df et df', et qu'on observe que les valeurs de x et y, en les différentiant et substituant pour du sa valeur tirée de l'équation $ndt = du(1 - e\cos u)$, donnent

$$dx = -\frac{andt\sin u}{1 - e\cos u}, \qquad dy = \frac{andt\sqrt{1 - e^2}\cos u}{1 - e\cos u}.$$

Il est facile de voir qu'on pourra lui donner cette forme,

$$d\varepsilon - d\omega(1 - \sqrt{1 - e^2}) = -\frac{1}{a\sqrt{1 - e^2}}(ydf - xdf')$$
$$+ \frac{(1 - e\cos u)^2}{an(1 - e^2)}\left(\frac{dx}{dt}df + \frac{dy}{dt}df'\right).$$

Maintenant, si dans cette équation on substitue pour df et df' leurs valeurs déterminées précédemment, en remarquant que l'on a

$$xdy - ydx = a^2 ndt\sqrt{1 - e^2},$$
$$a^2(1 - e\cos u)^2 = r^2 = x^2 + y^2,$$

on trouvera

$$d\varepsilon = d\omega\left(1-\sqrt{-e^2}\right) - 2\,andt\left(x\frac{dR}{dx} + y\frac{dR}{dy}\right). \quad (5)$$

Cette équation donnera la valeur de $d\varepsilon$ au moyen de celle de $d\omega$ supposée connue. En remplaçant $d\omega$ par sa valeur, on aurait, pour déterminer la valeur de $d\varepsilon$, une formule directe; mais il est plus commode de lui laisser cette forme.

On peut observer qu'en différentiant la première des équations (a), nous avons regardé n comme invariable; la variation de cette constante introduirait dans l'expression précédente de $d\varepsilon$ le terme $-\,tdn$; mais ce terme disparaîtrait dans l'expression différentielle de la longitude moyenne $nt+\varepsilon$, qui serait en effet

$$ndt + tdn - tdn + d\varepsilon.$$

Il est donc inutile d'y avoir égard, puisque l'expression de cette longitude est la seule qui contienne la constante ε dans les formules du mouvement elliptique; ou, ce qui revient au même, on peut supposer que le moyen mouvement est exprimé par $\int ndt$ dans le mouvement elliptique et dans le mouvement troublé, la valeur de n étant, dans ce dernier cas, celle qui résulte des perturbations. Pour la déterminer, observons que l'équation $n = a^{-\frac{3}{2}}$ donne, en la différentiant,

$$dn = \frac{3}{2}an.d\frac{1}{a}.$$

En substituant donc pour $d\frac{1}{a}$ sa valeur, on aura

$$dn = -3an\left(\frac{dR}{dx}dx + \frac{dR}{dy}dy\right).$$

Cette équation donnera, en l'intégrant et en y ajoutant une constante, le moyen mouvement dans l'orbite troublée.

32. Rassemblons les différentes formules que nous venons de trouver. Si, pour simplifier, on fait

$$X = \frac{x'-x}{\rho^3} - \frac{x'}{r'^3},\quad Y = \frac{y'-y}{\rho^3} - \frac{y'}{r'^3},\quad Z = z'\left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{r'^3}\right),$$

ce qui donne

$$\frac{dR}{dx} = m'X,\quad \frac{dR}{dy} = m'Y,\quad \frac{dR}{dz} = m'Z,$$

et que l'on substitue dans ces formules pour $\frac{dR}{dx}$, $\frac{dR}{dy}$, $\frac{dR}{dz}$, les valeurs précédentes, et pour x et y, leurs valeurs en fonction de u, on aura

$$\left.\begin{aligned}
da &= -2m'du.a^2\sin u\,X + 2m'du.a^2\sqrt{1-e^2}\cos u\,Y,\\
de &= m'du.a\sqrt{1-e^2}\cos u\,(xY-yX) + m'du.a\sqrt{1-e^2}\,rY,\\
ed\omega &= m'du.a\sin u\,(xY-yX) - m'du.a\sqrt{1-e^2}\,rX,\\
d\varepsilon &= \left(1-\sqrt{1-e^2}\right)d\omega - 2m'du.r(xX+yY).\\
dp &= \frac{m'du}{\sqrt{1-e^2}}\,ryZ,\\
dq &= \frac{m'du}{\sqrt{1-e^2}}\,rxZ.
\end{aligned}\right\}\quad (6)$$

En joignant à ces équations la suivante :

$$dn = 3m'du.a^2n.\sin u\,X - 3m'du.a^2n\sqrt{1-e^2}.\cos u\,Y,\quad (7)$$

qui donne directement la variation du moyen mouvement, on pourra déterminer par de simples quadratures les altérations de chacun des éléments qui fixent les dimensions et la position de l'orbite de la comète, ainsi que la situation de cet astre à un instant donné.

Dans les applications numériques des formules précédentes, on sera obligé de déterminer les valeurs des différentes variables qu'elles renferment, correspondantes à une valeur donnée de l'anomalie excentrique u. On a, par le n° **31**, l'expression des coordonnées x, y, et du rayon vecteur r de la comète en fonction de u; on pourra donc en déduire immédiatement leurs valeurs, et il ne restera plus qu'à calculer les valeurs simultanées des coordonnées x', y', z' de la planète perturbatrice. Pour cela, observons que le grand axe de l'orbite de la comète ayant été pris pour axe des x, si l'on nomme γ l'inclinaison de l'orbe de la planète sur celui de la comète, λ la longitude de son nœud ascendant, comptée sur ce dernier plan, à partir de la ligne des apsides, qu'on désigne de plus par v' l'angle que fait le rayon vecteur r' avec la ligne des nœuds, on aura, par une construction très-simple,

$$x' = r' \cos v' \cos\lambda - r' \sin v' \sin\lambda \cos\gamma,$$
$$y' = r' \cos v' \sin\lambda + r' \sin v' \cos\lambda \cos\gamma,$$
$$z' = r' \sin v' \sin\gamma.$$

Il sera facile, d'après les positions connues des orbites de la comète et des planètes perturbatrices, de calculer les constantes λ et γ qui entrent dans ces valeurs. Quant au rayon vecteur r' et à l'angle v', on observera que le temps écoulé depuis le passage au périhélie est donné, en fonction de u, par l'équation

$$t = a^{\frac{3}{2}} (u - e \sin u).$$

En joignant la valeur qui en résultera à l'instant du passage, on aura l'époque qui se rapporte à la variation supposée dans l'arc de l'anomalie excentrique u; les Tables astronomiques fourniront ensuite toutes les données nécessaires pour déterminer les valeurs correspondantes de r' et de v'.

33. Un des points les plus importants de la théorie des comètes est l'altération du temps périodique; elle dépend de l'altération de l'anomalie moyenne, et celle-ci se détermine aisément au moyen des formules précédentes.

En effet, si l'on nomme ζ l'anomalie moyenne de la comète, on aura, dans l'orbite elliptique,

$$\zeta = \int ndt + \varepsilon - \omega.$$

Cette équation conviendra encore au mouvement troublé, pourvu qu'on y regarde ε et ω comme variables et qu'on y substitue pour n sa valeur

$$n = \mathrm{N} + \int dn,$$

N étant une constante qui représente la valeur de n, ou le moyen mouvement de la comète dans l'unité de temps, au commencement de la période que l'on considère, et $\int dn$ étant déterminé par la formule (7). On aura donc, en différentiant la valeur de ζ, par rapport aux constantes seulement,

$$d\zeta = dt \int dn + d\varepsilon - d\omega;$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$\int d\zeta = \int dt \int dn + \int d\varepsilon - \int d\omega.$$

Cette équation servira à déterminer la variation de l'anomalie moyenne; on peut la simplifier en faisant disparaître la double intégrale qu'elle renferme. En effet, on a

$$\int dt \int dn = t\int dn - \int tdn;$$

on aura donc

$$\int d\zeta = t\int dn - \int tdn + \int d\varepsilon - \int d\omega,$$

valeur qui ne dépend plus que de simples quadratures, comme celles des altérations des autres éléments de l'orbite.

Cela posé, on aura généralement pour l'expression de l'anomalie moyenne dans l'orbite troublée, après un temps quelconque t,

$$\zeta = \mathrm{N}t + \varepsilon - \omega + \int d\zeta.$$

Si l'on suppose que l'on commence à compter le temps t de l'instant du passage au périhélie, l'angle $\varepsilon - \omega$ sera nul pour cette époque, puisque, par cette hypothèse, on a $\zeta = 0$ en même temps que $t = 0$. On aura donc simplement

$$\zeta = \mathrm{N}t + \int d\zeta.$$

Soit T le temps qui s'écoule entre deux passages consécutifs de la comète à son périhélie; lorsqu'elle aura achevé sa révolution, on aura

$$\int d\zeta = \mathrm{T}\int dn - \int tdn + \int d\varepsilon - \int d\omega. \quad (8)$$

Les intégrales devant s'étendre depuis $t = 0$ jusqu'à $t = T$, l'anomalie augmente dans cet intervalle de 360°; on aura donc, pour le même instant,

$$2\pi = NT + \int d\zeta, \quad (9)$$

π étant la demi-circonférence dont le rayon est l'unité.

Prenons, pour fixer les idées, la comète de 1682, revenue à son périhélie en 1759, et dont il s'agit de fixer le prochain retour. On calculerait immédiatement l'instant de ce passage au moyen de l'équation (9), si la valeur de la constante N, relative au périhélie de 1759, était connue; mais cette valeur ne saurait se conclure directement, comme celle des autres éléments de l'orbite, des observations faites pendant l'apparition de 1759. Elle se déduit du temps qu'a employé la comète à faire sa révolution anomalistique de 1682 à 1759, et cette donnée est affectée des perturbations qu'a éprouvées cet astre durant cette période. Pour la déterminer, supposons que T soit l'intervalle de temps qui sépare les passages de 1682 et de 1759, et que N soit la valeur de n qui répond à l'origine de cette période; à l'instant du passage au périhélie de 1759, par l'équation (9), on aura

$$N = \frac{2\pi - \int d\zeta}{T},$$

les intégrales $\int$ devant commencer à l'instant du passage au périhélie de 1682, où nous fixons l'origine du temps t, et s'étendre depuis $t = 0$ jusqu'à $t = T$; et les valeurs des constantes e, ε, ω se rapportant aux observations du même passage.

Cette équation donnera la valeur de N relative au périhélie de 1682, et l'on en conclura celle de N', relative au périhélie de 1759, par l'équation

$$N' = N + \int dn,$$

l'intégrale commençant, comme les précédentes, à l'instant du passage au périhélie de 1682, et devant s'étendre depuis $t = 0$ jusqu'à $t = T$. On aura ensuite les valeurs du grand axe de l'orbite, qui se rapportent aux mêmes époques, par les équations

$$N^2 = \frac{1}{a^3}, \quad N'^2 = \frac{1}{a'^3}.$$

Soit, maintenant, T' l'intervalle de temps inconnu qui s'écoulera entre le passage au périhélie de 1759 et le prochain retour qu'il s'agit de déterminer. On aura, pour cette époque,

$$\overline{\int d\zeta} = t\overline{\int dn} - \overline{\int tdn} + \overline{\int d\varepsilon} - \overline{\int d\omega}, \quad (10)$$

et, par suite,

$$2\pi = N'T' + \overline{\int d\zeta}; \quad (11)$$

les intégrales $\overline{\int}$ commençant ici à l'instant du passage au périhélie de 1759, et s'étendant depuis $t = 0$ jusqu'à $t = T'$; les valeurs des constantes e, ε, ω qu'elles renferment, étant d'ailleurs celles qui résultent des observations de la comète faites à la même époque.

L'équation (11), qui ne renferme que l'inconnue T', servira à déterminer sa valeur. On connaîtra ainsi l'intervalle de temps qui doit s'écouler entre le passage de la comète au périhélie effectué en 1759, et le passage suivant; on pourra, par conséquent, fixer d'avance l'époque de son prochain retour au même point de son orbite.

34. Toute la difficulté de la théorie des perturbations des comètes se réduit donc à intégrer les formules (6). Cette intégration, comme nous l'avons dit, n'est pas possible en général; on ne peut l'effectuer que par le moyen des quadratures mécaniques. L'analyse fournit différentes formules pour cet objet; nous allons présenter celle que l'on a généralement adoptée, et qui résulte fort simplement des premiers principes du *calcul aux différences*.

Soit y une fonction quelconque de x, et soient $y^{(0)}, y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(i)}$, ce que devient successivement cette fonction, lorsqu'on suppose $x=0$, $x=\alpha$, $x=2\alpha, \ldots$, $x=i\alpha$; désignons par $\Delta y^{(0)}$, $\Delta y^{(1)}$, etc., les différences finies de ces quantités prises deux à deux, par $\Delta^2 y^{(0)}$, $\Delta^2 y^{(1)}$, etc., leurs différences secondes et ainsi de suite, en sorte qu'on ait

$$\left.\begin{array}{l|l|l}
y^{(1)} - y^{(0)} = \Delta y^{(0)}, & \Delta y^{(1)} - \Delta y^{(0)} = \Delta^2 y^{(0)}, & \Delta^2 y^{(1)} - \Delta^2 y^{(0)} = \Delta^3 y^{(0)}, \\
y^{(2)} - y^{(1)} = \Delta y^{(1)}, & \Delta y^{(2)} - \Delta y^{(1)} = \Delta^2 y^{(1)}, & \Delta^2 y^{(2)} - \Delta^2 y^{(1)} = \Delta^3 y^{(1)}, \\
y^{(3)} - y^{(2)} = \Delta y^{(2)}, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \Delta y^{(i)} - \Delta y^{(i-1)} = \Delta^2 y^{(i-1)}, & \Delta^2 y^{(i)} - \Delta^2 y^{(i-1)} = \Delta^3 y^{(i-1)}, \\
y^{(i)} - y^{(i-1)} = \Delta y^{(i-1)}, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\
\text{ec.} & &
\end{array}\right\} \quad (k)$$

De ces équations on tire, par des substitutions faciles,

$$y^{(1)} = y^{(0)} + \Delta y^{(0)},$$
$$y^{(2)} = y^{(0)} + 2\Delta y^{(0)} + \Delta^2 y^{(0)},$$
$$y^{(3)} = y^{(0)} + 3\Delta y^{(0)} + 3\Delta^2 y^{(0)} + \Delta^3 y^{(0)},$$
etc.;

d'où l'on conclut généralement

$$y^{(i)} = y^{(0)} + i\Delta y^{(0)} + \frac{i(i-i)}{1.2}\Delta^2 y^{(0)} + \frac{i(i-1)(i-2)}{1.2.3}\Delta^3 y^{(0)} + \ldots, \quad (m)$$

formule qui sera très-convergente, si les différences $\Delta y^{(0)}$, $\Delta^2 y^{(0)}$, $\Delta^3 y^{(0)}$, etc., décroissent avec beaucoup de rapidité.

Cela posé, on peut regarder $y = f(x)$ comme l'équation d'une courbe parabolique dont y représente l'ordonnée et x l'abscisse; cette courbe passera par les extrémités des ordonnées équidistantes $y^{(0)}$, $y^{(1)}$, etc., et l'on aura d'autant plus de facilité pour la tracer, que ces coordonnées seront plus rapprochées; $y^{(i)}$ sera donc l'ordonnée qui répond à l'abscisse quelconque $x = i\alpha$ et $\int y^{(i)}dx$ l'aire indéfinie comprise entre la courbe et l'axe des x. Si, dans l'équation (m), on substitue pour i sa valeur $\frac{x}{\alpha}$, on aura

$$y^{(i)} = y^{(0)} + \frac{x}{\alpha}\Delta y^{(0)} + \frac{x(x-\alpha)}{1.2.\alpha^2}\Delta^2 y^{(0)} + \frac{x(x-\alpha)(x-2\alpha)}{1.2.3.\alpha^3}\Delta^3 y^{(0)} + \ldots.$$

Multiplions cette valeur par dx et intégrons-la depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \alpha$, l'expression résultante sera celle de l'aire comprise entre les ordonnées y^0 et $y^{(1)}$; on trouvera

$$\int y^{(i)}dx = \alpha\left(y^{(0)} + \frac{1}{2}\Delta y^{(0)} - \frac{1}{12}\Delta^2 y^{(0)} + \frac{1}{24}\Delta^3 y^{(0)} - \frac{19}{720}\Delta^4 y^{(0)} + \frac{3}{160}\Delta^5 y^{(0)} - \ldots\right).$$

De même, pour l'aire comprise entre les ordonnées $y^{(1)}$ et $y^{(2)}$, on aura

$$\int y^{(i)}\,dx = \alpha\left(y^{(1)} + \frac{1}{2}\Delta y^{(1)} - \frac{1}{12}\Delta^2 y^{(1)} + \frac{1}{24}\Delta^3 y^{(1)} - \frac{19}{720}\Delta^4 y^{(1)} + \frac{3}{160}\Delta^5 y^{(1)} - \ldots\right),$$

et ainsi de suite.

En prenant donc la somme de toutes ces valeurs, on aura, pour l'aire totale comprise entre les ordonnées $y^{(0)}$ et $y^{(n)}$,

$$\begin{aligned}\int y\,dx = {} & \alpha[y^{(0)} + y^{(2)} \ldots + y^{(n-1)}] \\ & + \frac{\alpha}{2}[\Delta y^{(0)} + \Delta y^{(1)} + \Delta y^{(2)} \ldots + \Delta y^{(n-1)}] \\ & - \frac{\alpha}{12}[\Delta^2 y^{(0)} + \Delta^2 y^{(1)} + \Delta^2 y^{(2)} \ldots + \Delta^2 y^{(n-1)}] \\ & + \text{etc.}\end{aligned}$$

On a d'ailleurs

$$\Delta y^{(0)} + \Delta y^{(1)} + \Delta y^{(2)} \ldots + \Delta y^{(n-1)} = y^{(n)} - y^{(0)},$$
$$\Delta^2 y^{(0)} + \Delta^2 y^{(1)} + \Delta^2 y^{(2)} \ldots + \Delta^2 y^{(n-1)} = \Delta y^{(n)} - \Delta y^{(0)},$$
etc.

L'expression précédente devient donc ainsi :

$$\left.\begin{aligned}\int y\,dx = {} & \alpha\left[\frac{1}{2}y^{(0)} + y^{(1)} + y^{(2)} \ldots + y^{(n-1)} + \frac{1}{2}y^{(n)}\right] \\ & - \frac{\alpha}{12}[\Delta y^{(n)} - \Delta y^{(0)}] \\ & + \frac{\alpha}{24}[\Delta^2 y^{(n)} - \Delta^2 y^{(0)}] \\ & - \frac{19\alpha}{720}[\Delta^3 y^{(n)} - \Delta^3 y^{(0)}] \\ & + \frac{3\alpha}{160}[\Delta^4 y^{(n)} - \Delta^4 y^{(0)}] \\ & - \text{etc.}\end{aligned}\right\}\ (G)$$

La détermination des différences $\Delta y^{(n)}$, $\Delta^2 y^{(n)}$, etc., qui entrent dans cette formule, dépend des quantités $y^{(n+1)}$, $y^{(n+2)}$, etc., tandis qu'on n'est supposé avoir calculé ces ordonnées que depuis $y^{(0)}$ jusqu'à $y^{(n)}$. Ce serait un inconvénient pour la pratique, mais on peut l'éviter en donnant une autre forme à cette expression. Pour cela, remarquons que des équations (k), on tire

$$\begin{aligned}
\Delta y^{(n)} &= \Delta y^{(n-1)} + \Delta^2 y^{(n-2)} + \Delta^3 y^{(n-3)} + \text{etc.},\\
\Delta^2 y^{(n)} &= \Delta^2 y^{(n-2)} + 2\,\Delta^3 y^{(n-3)} + 3\,\Delta^4 y^{(n-4)} + \text{etc.},\\
\Delta^3 y^{(n)} &= \Delta^3 y^{(n-3)} + 3\,\Delta^4 y^{(n-4)} + 2.3.\Delta^5 y^{(n-5)} + \text{etc.},\\
&\text{etc.};
\end{aligned}$$

d'où l'on peut conclure généralement

$$\Delta^i y^{(n)} = \Delta^i y^{(n-i)} + i\,\Delta^{i+1} y^{(n-i-1)} + \frac{i\,(i+1)}{1.2}\,\Delta^{i+2} y^{(n-i-2)} + \text{etc.}$$

Si l'on substitue ces valeurs, qui ne dépendent plus que des quantités y^n, y^{n-1}, etc., dans la formule (G), on aura

$$\left.\begin{aligned}
\int y\,dx = \alpha&\left[\tfrac{1}{2}y^{(0)} + y^{(1)} + y^{(2)} \ldots + y^{(n-1)} + \tfrac{1}{2}y^{(n)}\right]\\
&- \frac{\alpha}{12}\left[\Delta y^{(n-1)} - \Delta y^{(0)}\right]\\
&- \frac{\alpha}{24}\left[\Delta^2 y^{(n-2)} + \Delta^2 y^{(0)}\right]\\
&- \frac{19\alpha}{720}\left[\Delta^3 y^{(n-3)} - \Delta^3 y^{(0)}\right]\\
&- \frac{3\alpha}{160}\left[\Delta^4 y^{(n-4)} + \Delta^4 y^{(0)}\right]\\
&- \text{etc.}
\end{aligned}\right\}\ (\mathrm{P})$$

Le premier terme de cette série représente, comme il est facile de s'en convaincre, la somme des petits trapèzes compris entre les ordonnées $y^{(0)}, y^{(1)}, \ldots, y^{(n)}$, somme qui approchera d'autant plus de l'aire de la courbe parabolique, que les ordonnées seront plus rapprochées et leurs variations plus petites.

35. Pour appliquer la série précédente à l'intégration des formules (6), représentons par $P\,du$ la variation différentielle de l'un quelconque des éléments de l'orbite de la comète, et regardons P comme l'ordonnée de la courbe parabolique dont l'anomalie excentrique u est l'abscisse. On fera varier u de degré en degré ou de deux degrés en deux degrés, etc., selon qu'on le jugera convenable, on déterminera les valeurs correspondantes de P qu'on désignera par $P^{(0)}, P^{(1)}, P^{(2)}$, etc., et l'on aura, par la formule (P), la valeur de $\int P\,du$ correspondante à un arc donné d'anomalie excentrique. On pourra presque toujours s'arrêter au premier terme de cette formule, les autres termes ne donnant que des corrections de l'ordre des quantités négligées. Le seul cas où il deviendrait nécessaire de considérer ces termes, est celui où la comète approche beaucoup de la planète perturbatrice, ce qui rend très-grande la fraction $\frac{1}{\rho^3}$, et, par suite, la valeur de P. Mais alors il sera encore plus exact, pour que les ordonnées P ne subissent pas de trop grandes variations, de diminuer l'intervalle qui les sépare et de faire croître l'anomalie excentrique de demi-degré en demi-degré ou de quinze minutes en quinze minutes, etc., selon les circonstances.

36. On pourrait déterminer, par cette méthode, les variations des éléments de l'orbite elliptique pendant une révolution entière de la comète; mais nous avons vu que, lorsque cet astre est dans la partie supérieure de son orbite et que la comète s'éloigne beaucoup de la planète perturbatrice, la partie la plus considérable de ses perturbations pouvait s'exprimer par des formules analytiques qui n'exigent plus que des substitutions numériques, ce qui facilite beaucoup le calcul de ces perturbations. Développons donc, dans l'hypothèse précédente, les variations des éléments de l'orbite.

Reprenons la valeur de R,

$$\mathrm{R} = m'\left(\frac{1}{\rho} - \frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3}\right).$$

Si l'on suppose la distance r de la comète au Soleil très-considérable par rapport à r', distance de la planète perturbatrice à cet astre, on pourra réduire l'expression précédente en série convergente, par rapport aux puissances descendantes de r, et l'on aura, n° 29,

$$\mathrm{R} = m'\left[\frac{1}{r} + (xx' + yy' + zz')\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3}\right)\right] + \mathrm{R}',$$

R′ représentant une suite de termes dont le plus élevé est de l'ordre $\frac{m'r'^2}{r^3}$.

L'avantage qu'il y a à décomposer ainsi R en deux parties, c'est que la fonction R′ est essentiellement très-petite lorsque le rapport $\frac{r'}{r}$ est une très-petite fraction, tandis qu'au contraire R conserve toujours une valeur finie, quel que soit l'éloignement de la comète, à cause du terme $\frac{xx'+yy'+zz'}{r'^3}$ qui ne dépend que de la distance de la planète au Soleil. Il en résulte qu'on peut, dans une première approximation, négliger tout à fait la seconde partie de R; les formules (6) deviennent alors intégrables par elles-mêmes, en sorte que la partie la plus sensible des perturbations des comètes, peut toujours être exprimée analytiquement par des formules finies, lorsque la comète est dans la partie supérieure de son orbite. Dans l'approximation suivante, on considérera la fonction R', mais il suffira le plus souvent de s'arrêter aux premiers termes de son développement.

Faisons donc d'abord abstraction de R'; si l'on désigne par la caractéristique d' des différentielles uniquement relatives aux coordonnées de la comète, on aura

$$d'\mathrm{R} = m'\left[d.\frac{1}{r} + (x'dx + y'dy)\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3}\right) + (xx'+yy')\,d.\frac{1}{r^3}\right].$$

On peut, dans cette valeur, remplacer $\frac{x}{r^3}$, $\frac{x'}{r'^3}$ par $-\frac{d^2x}{dt^2}$, $-\frac{d^2x'}{dt^2}$ et $\frac{y}{r^3}$, $\frac{y'}{r'^3}$ par $-\frac{d^2y}{dt^2}$, $-\frac{d^2y'}{dt^2}$, l'erreur que l'on commet étant de l'ordre du carré des forces perturbatrices. On trouve ainsi

$$d'\mathrm{R} = m'd.\left(\frac{1}{r} + \frac{xx'+yy'}{r^3} + \frac{dx\,dx'+dy\,dy'}{dt^2}\right).$$

Si l'on substitue cette valeur dans la formule (1), n° **30**, et qu'on l'intègre, on aura

$$\delta a = 2m'a^2\left(\frac{1}{r} + \frac{xx'+yy'}{r^3} + \frac{dx\,dx'+dy\,dy'}{dt^2}\right) + \text{const.}$$

Si l'on détermine la constante que cette équation renferme, par la condition que δa soit nul au point de l'orbite où l'on a commencé à considérer séparément les deux parties de R, l'expression résultante sera celle de l'altération du grand axe après un temps quelconque, compté à partir de ce point, due à la partie de R indépendante de R'.

On peut obtenir, d'une autre manière, la valeur de δa. En effet, si l'on différentie, par rapport à la caractéristique δ, qui aura ici la signification que nous lui avons donnée, n° **29**, l'équation

$$\frac{1}{a}=\frac{2}{r}-\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2},$$

on aura

$$\frac{\delta a}{a^2}=\frac{2\,\delta r}{r^2}+\frac{2\,dx d.\delta x+2\,dy\,d.\delta y}{dt^2}.$$

Nous avons trouvé, dans le numéro cité, par l'intégration directe des équations différentielles du mouvement troublé,

$$\delta x=\frac{1}{3}m'x+m'x',\quad \delta y=\frac{1}{3}m'y+m'y',$$
$$\delta z=\frac{1}{3}m'z+m'z'.$$

En substituant ces valeurs et leurs différentielles dans l'équation précédente, on aura

$$\delta a=2m'a^2\left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{r}+\frac{dx^2+dy^2}{dt^2}\right)+\frac{xx'+yy'}{r'^3}+\frac{dx\,dx'+dy\,dy'}{dt^2}\right],$$

ou bien, en remplaçant $\frac{dx^2+dy^2}{dt^2}$ par sa valeur $\frac{2}{r}-\frac{1}{a}$,

$$\delta a=-\frac{2}{3}m'a+2m'a^2\left(\frac{1}{r}+\frac{xx'+yy'}{r^3}+\frac{dxdx'+dydy'}{dt^2}\right).$$

On voit que cette expression coïncide avec celle que nous avons déduite directement de la formule (1), en supposant dans celle-ci const. $= -\frac{2}{3}m'a$, la constante arbitraire étant déterminée, dans ce cas, de manière à satisfaire aux équations

$$\delta x - \frac{1}{3}m'x - m'x' = 0, \quad \delta y - \frac{1}{3}m'y - m'y' = 0,$$

$$\delta z - \frac{1}{3}m'z - m'z' = 0.$$

L'équation $n^2 = \frac{1}{a^3}$ donne, en la différentiant par rapport à δ,

$$\delta n = -\frac{3}{2}\cdot\frac{n}{a}\cdot\delta a.$$

En substituant donc pour δa sa valeur précédente, on aura

$$\delta n = m'n - 3m'an\left(\frac{1}{r} + \frac{xx' + yy'}{r^3} + \frac{dx\,dx' + dy\,dy'}{dt^2}\right). \quad (g)$$

Cette valeur, augmentée d'une constante, donnera l'altération du moyen mouvement due à la partie de R indépendante de R'.

Déterminons, d'une manière semblable, la variation de l'excentricité et du périhélie due à la même partie de R.

La quatrième des équations (C), en remplaçant c et c' par leurs valeurs et négligeant le carré de z, donne

$$f = -\frac{x}{r} + \frac{dy\,(x\,dy - y\,dx)}{dt^2}.$$

En différentiant, par rapport à la caractéristique δ, cette équation, on aura

$$\delta f = \frac{x\delta r - r\delta x}{r^2} + \frac{d.\delta y(xdy - ydx)}{dt^2}$$
$$+ \frac{dy\,(xd.\delta y - yd.\delta x + dy\delta x - dx\delta y)}{dt^2},$$

et en substituant dans cette équation, pour δx, δy, δz, leurs valeurs précédentes, elle donnera

$$\delta f = m'\left[\frac{dy\,(xdy - ydx)}{dt^2} + \frac{y\,(xy' - x'y)}{r^3} + \frac{dy'\,(xdy - ydx)}{dt^2}\right.$$
$$\left. + \frac{dy(xdy' - y'dx + x'dy - ydx')}{dt^2}\right].$$

Si l'on ajoute une constante arbitraire au second membre de cette équation, et qu'on la détermine par la condition que δf soit nul à un point donné de l'orbite, l'équation résultante donnera l'altération de f à partir de ce point, due à la partie de R indépendante de R′. Cette valeur doit être identique avec celle qui résulterait de l'intégration directe de l'expression de df, n° 30; c'est en effet ce qu'il est facile de vérifier en la développant dans l'hypothèse précédente, et en observant qu'on peut y substituer $-\frac{d^2x}{dt^2}$, $-\frac{d^2x'}{dt^2}$ à la place de $\frac{x}{r^3}$ et de $\frac{x'}{r'^3}$, et $-\frac{d^2y}{dt^2}$, $-\frac{d^2y'}{dt^2}$ à la place de $\frac{y}{r^3}$ et de $\frac{y'}{r'^3}$.

Si l'on substitue pour $\frac{dy\,(xdy - ydx)}{dt^2}$ sa valeur

$f + \frac{x}{r}$ dans l'expression de δf, elle devient

$$\delta f = m' \left[f + \frac{x}{r} + y\frac{(xy' - x'y)}{r^3} + \frac{dy'(xdy - ydx)}{dt^2} \right.$$
$$\left. + \frac{dy(xdy' - y'dx + x'dy - ydx')}{dt^2} \right].$$

En changeant, dans cette formule, x en y, x' en y', et réciproquement, on aura, pour déterminer l'altération de f' due à la partie de R indépendante de R$'$,

$$\delta f' = m' \left[f' + \frac{y}{r} - \frac{x(xy' - x'y)}{r^3} - \frac{dx'(xdy - ydx)}{dt^2} \right.$$
$$\left. - \frac{dx(xdy' - y'dx + x'dy - ydx')}{dt^2} \right].$$

Connaissant les variations de f et de f', on aura celles de e et de ω, par les équations

$$\delta e = \delta f \quad \text{et} \quad e\delta\omega = \delta f'.$$

Considérons les variations de l'inclinaison et du nœud de l'orbite due à la même partie de R. En la différentiant, on a

$$\frac{d\text{R}}{dz} = m' \left[\frac{z' - z}{\rho^3} - \frac{z'}{r'^3} - \frac{3z}{r^5}(xx' + yy') \right].$$

Si l'on substitue cette valeur dans les valeurs de dc' et dc'', n° **30**, et qu'on néglige les termes de l'ordre du carré des forces perturbatrices, on trouve

$$dc' = - m'xz' \left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{r'^3} \right) dt,$$

$$dc'' = \quad m'yz' \left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{r'^3} \right) dt.$$

Remplaçons, dans ces équations, $\frac{x}{r^3}$, $\frac{y}{r^3}$, $\frac{z'}{r'^3}$ par $-\frac{d^2x}{dt^2}$, $-\frac{d^2y}{dt^2}$, $-\frac{d^2z'}{dt^2}$, et intégrons les équations résultantes, nous aurons

$$\delta c' = m'\left(\frac{z'\,dx - xdz'}{dt}\right),$$

$$\delta c'' = m'\left(\frac{ydz' - z'\,dy}{dt}\right);$$

formules qui coïncident d'ailleurs avec celles que l'on obtiendrait directement en différentiant les valeurs des constantes c' et c'', n° **30**, par rapport à la caractéristique δ, et en substituant pour δz et $d.\delta z$, leurs valeurs dans les expressions résultantes.

Les valeurs de $\delta c'$ et de $\delta c''$ étant ainsi connues, on aura celles de δp et de δq, dues à la partie de R indépendante de R′, par les équations

$$\delta p = \frac{\delta c''}{\sqrt{a(1-e^2)}}, \quad \delta q = -\frac{\delta c'}{\sqrt{a(1-e^2)}},$$

et il sera facile d'en conclure les altérations correspondantes de l'inclinaison et du nœud.

En retranchant les valeurs de δa, δn, δf, $\delta f'$, $\delta c'$, $\delta c''$, à un point donné de l'orbite, de leurs valeurs à un autre point donné, on aura les altérations dans l'intervalle, de a, n, f, f', c', c'', dues à la partie de R indépendante de R′.

37. On pourrait exprimer, par une formule semblable aux précédentes, la variations de la longitude de l'époque due à la même partie de R; mais cette formule est inutile à la détermination de l'altération de l'anomalie moyenne, qui peut se faire très-simplement de la manière suivante : supposons que l'on fixe l'origine du temps au point de l'orbite où l'on commence à diviser en deux parties la fonction R, et nommons $\overline{\text{N}}$ le moyen mouvement de la comète en ce point, c'est-à-dire la valeur de n qui résulte des perturbations précédentes; on aura, après un temps quelconque t, compté du même point,

$$\int ndt + \delta\varepsilon - \delta\omega = \overline{\text{N}}t + \int \delta ndt + \delta\varepsilon - \delta\omega.$$

En désignant par $\delta' n$ la variation de n dûe à la partie de R indépendante de R', on aura donc, pour déterminer l'altération correspondante de l'anomalie moyenne,

$$\delta\zeta = \int \delta' ndt + \delta\varepsilon - \delta\omega.$$

Si l'on différentie cette expression et qu'on y substitue pour $d.\delta\varepsilon - d.\delta\omega$, sa valeur donnée par l'équation (4), n° **31**, on aura

$$d.\delta\zeta = \delta' ndt - \frac{d.\delta e.\sin u\,(2 - e^2 - e\cos u)}{1 - e^2} - \frac{d.\delta\omega.(1 - e\cos u)^2}{\sqrt{1 - e^2}},$$

équation qu'on peut écrire ainsi :

$$d.\delta\zeta = -d.\left[\frac{\delta e\sin u\,(2 - e^2 - e\cos u)}{1 - e^2} + \frac{\delta\omega\,(1 - e\cos u)^2}{\sqrt{1 - e^2}}\right]$$
$$+ \left(\frac{\delta' n}{n} + \delta e\,\frac{(2\cos u + e)}{1 - e^2} + 2e\,\delta\omega\,\frac{\sin u}{\sqrt{1 - e^2}}\right) ndt,$$

en observant que l'on a, n° **31**, $ndt = du(1 - e\cos u)$.
Nous avons trouvé plus haut

$$\delta e = \delta f, \quad e\delta\omega = \delta f';$$