dá $lz = lx$. Multiplicando pois a proposta pelo factor x, afim de a tornar integravel, e integrando, acharemos $x^4y + \sqrt{1-x^2} = c$.

IV. Para integrar $xdy - dx\,(y + \sqrt{x^2+y^2}) = 0$,

na qual os coefficientes de dy e dx são funcções homogeneas de x e y, temos o factor $z = \frac{1}{x\sqrt{x^2+y^2}}$; o que torna o primeiro termo em $\frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Integrando este termo em ordem a y, vem $l\,(y + \sqrt{x^2+y^2})$; depois ajunctando X a este integral, differenciando em ordem a x, e comparando com $\frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x\sqrt{x^2+y^2}}\,dx$, acha-se

$$dX = -\left(\frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)}\,[y+\sqrt{x^2+y^2}]}\right)dx$$

$$= -\left(\frac{x^2+y^2+y\sqrt{x^2+y^2}}{x\sqrt{x^2+y^2}\,(y+\sqrt{x^2+y^2})}\right)2\,dx$$

$$= -\frac{2dx}{x}:$$

logo $$X = lc - lx^2;$$

e o integral procurado é $cy + c\sqrt{x^2+y^2} = x^2$.

Das equações da primeira ordem nas quaes as differenciaes passam do 1.° gráu

318. Seja $$F(x, y, y', \ldots y'^m) = 0$$

uma equação da primeira ordem do gráu m, cujo integral $f(x, y, c) = 0$ se pretende conhecer.

Este integral deve ter uma constante c; e deve ser do gráu m em ordem a ella, para que, eliminando-a entre o mesmo integral e a sua differencial immediata, resulte a proposta. Com effeito, para cada valor de c tirado de $f(x, y, c) = 0$ e substituido na derivada $\frac{df}{dx} + y'\frac{df}{dy} = 0$, esta dará um de y'; e como y' deve ter m valores, outros tantos deverá ter c, isto é, deverá $f(x, y, c) = 0$ ser do gráu m em c.

Chamando $X_1, X_2 \ldots X_m$, as m raizes da proposta resolvida em ordem a y', demos a esta a fórma

$$(y' - X_1)(y' - X_2) \ldots (y' - X_m) = 0.$$

Os integraes $$P_1 = 0,\ P_2 = 0, \ldots P_m = 0,$$

das m equações $$y' - X_1 = 0,\ y' - X_2 = 0, \ldots y' - X_m = 0,$$

satisfazem a esta; e tambem lhe satisfaz o seu producto, porque, em virtude de $P'_\alpha = 0$, e por conseguinte da proposta, é

$$(P_1 . P_2 \ldots P_m)' = \sum_1^m \frac{P_1 . P_2 \ldots P_m}{P_\alpha} . P'_\alpha = 0.$$

Suppondo pois á constante a mesma em todos os integraes particulares $P_1 = 0, \ldots P_m = 0$, o producto $P_1 . P_2 \ldots P_m = 0$, que satisfaz á proposta, e no qual é m o gráu mais elevado de c, será o integral completo que se procura.

Por exemplo $$yy'^2 + 2xy' = y$$

dá $$y' = \frac{-x \pm \sqrt{y^2+x^2}}{y}, \text{ ou } 1 \mp \frac{yy'+x}{\sqrt{y^2+x^2}} = 0,$$

cujo integral, por ser o segundo termo evidentemente a derivada de $\mp\sqrt{y^2+x^2}$, é

$$x \mp \sqrt{y^2+x^2} + c = 0.$$

O integral completo é pois

$$(x - \sqrt{y^2+x^2} + c)(x + \sqrt{y^2+x^2} + c) = 0,$$

ou $$y^2 = 2cx + c^2.$$

319. Quando a equação, for d'uma das fórmas,

$$F(x, y') = 0, \ F(y, y') = 0:$$

1.° Se puder resolver-se em ordem a y', teremos immediatamente:

no primeiro caso $$y' = fx, \ y = \int fx dx;$$

e no segundo $$y' = fy, \ x = \int \frac{dy}{fy}.$$

2.° Se for da primeira fórma, e puder resolver-se em ordem a x, dando $x = fy'$, teremos

$$y = \int y' dx = y'x - \int x dy' = y' fy' - \int fy' dy';$$

e, feita a integração do segundo termo, eliminaremos y' entre esta equação e a proposta.

Por exemplo, $(1+y'^2)x=1$, dá

$$fy'=\frac{1}{1+y'^2},\ y=\frac{y'}{1+y'^2}-\int\frac{dy'}{1+y'^2}=\frac{y'}{1+y'^2}-\text{arc}\,(\text{tg}=y')+c;$$

e, eliminando y', vem o integral procurado

$$y=\sqrt{x-x^2}-\text{arc}\left(\text{tang}=\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right)+c.$$

3.º Se for da segunda fórma e puder resolver-se em ordem a y, $y=fy'$,

teremos $$x=\int\frac{d.fy'}{y'}=\frac{fy'}{y'}+\int\frac{fy'.dy'}{y'^2};$$

e a eliminação de y' dará o integral pedido.

320. II. Quando a proposta tiver a fórma $\quad y=\text{F}(x,\,y')$,

será $$y'=\frac{d\text{F}}{dx}+\frac{d\text{F}}{dy'}\cdot\frac{dy'}{dx};$$

e, se soubermos integrar esta equação, a eliminação de y' entre o seu integral e a proposta dará o integral procurado.

Assim $$y=x\varphi y'+\psi y'$$

dará $$y'dx=\varphi y'.dx+x\varphi' y'.dy'+\psi' y'.dy',$$

ou $$dx+\frac{x\varphi'(y')}{\varphi(y')-y'}dy'+\frac{\psi'(y')}{\varphi(y')-y'}dy'=0,$$

equação de que se tractou no n.º 312.

321. No caso de ser $\varphi(y') = y'$, neste exemplo, isto é, de ser a proposta $y = xy' + \psi(y')$, a equação differencial reduz-se a

$$[x + \psi'(y')]\, dy' = 0.$$

Egualando a zero cada um dos factores, teremos

$$y' = c, \; x + \psi'(y') = 0;$$

e restará eliminar y' entre qualquer d'estas equações e a proposta.

A segunda não dará se não uma solução das chamadas *singulares*, de que logo tractaremos. Mas a primeira conduzirá ao integral completo; porque a eliminação de c entre ella e a sua primitiva, $y = cx + C$, satisfaz á proposta, suppondo $C = \psi c$, e é por conseguinte $y = cx + \psi c$ este integral.

Por exemplo $\quad ydx - xdy = a\sqrt{dx^2 + dy^2},$

ou $$y = y'x + a\sqrt{1 + y'^2},$$

dá $$y' = c, \; x + \frac{ay'}{\sqrt{1 + y'^2}} = 0.$$

A primeira fornece o integral geral $\quad y = cx + a\sqrt{1 + c^2}.$

A segunda dá a solução singular $\quad y^2 + x^2 = a^2,$

quando se tira d'ella o valor de y' para o substituir na proposta.

Das soluções singulares das equações differenciaes da primeira ordem

322. Sejam: uma equação differencial proposta da primeira ordem, e o seu integral completo, com a constante arbitraria c:

$$f(x, y, y') = 0 \ldots\ldots\ldots (1); \quad F(x, y, c) = 0 \ldots\ldots\ldots (2).$$

A proposta (1) deve resultar da eliminação de c entre a primitiva (2)

e a sua differencial immediata $\quad \dfrac{dF}{dx} + y' \dfrac{dF}{dy} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$

Se differenciassemos porém (2), fazendo tambem variar c, teriamos

$$\frac{dF}{dx} + y' \frac{dF}{dy} + \frac{dF}{dc}\left(\frac{dc}{dx} + y' \frac{dc}{dy}\right) = 0 \ldots\ldots\ldots (4);$$

a qual concorda com (3) nos casos de serem $\dfrac{dc}{dx}$ e $\dfrac{dc}{dy}$ nullos, ou de ser $\dfrac{dF}{dc}$ nullo, ou de serem $\dfrac{dF}{dx}$ e $\dfrac{dF}{dy}$ infinitos.

No primeiro d'estes casos é $c = \text{const}$, como suppõe (2). No segundo a eliminação de c entre $\dfrac{dF}{dc} = 0$ e (2) dará uma equação $\varphi(x, y) = 0$, a qual será um integral particular ou será uma *solução singular*, segundo estiver ou não estiver comprehendida na primitiva (2). No terceiro a eliminação de c entre $\frac{dF}{dx} = \infty$, $\frac{dF}{dy} = \infty$, e (2) dará duas equações que, se concordarem entre si, serão a solução $\varphi(x, y) = 0$.

323. 1.° D'onde resultam dois processos differentes para obter a solução procurada, no caso de se conhecer o integral completo: um correspondente a $\frac{dF}{dc} = 0$, outro a $\frac{dF}{dx} = \infty$ e $\frac{dF}{dy} = \infty$; o segundo dos quaes poderá ser util, quando a primitiva não estiver desembaraçada de radicaes.

Exemplos

I. Sejam $(x^2 - 2y^2)\,y'^2 - 4xyy' - x^2 = 0,\; y^2 - 2cy + x^2 = c^2$,

a equação differencial proposta e a sua primitiva.

Derivando a primitiva em ordem a c, e eliminando c entre ella e a derivada, $c + y = 0$, vem

$$2y^2 + x^2 = 0,$$

a qual é uma *solução singular*, por isso que satisfaz á proposta sem estar comprehendida na primitiva geral.

II. A primitiva $\quad (x^2 + y^2 - b)(y^2 - 2cy) + (x^2 - b)\,c^2 = 0$

dá $$\frac{dF}{dc} = 0 = -y\,(x^2 + y^2 - b) + (x^2 - b)\,c;$$

e, eliminando c entre estas equações, resulta

$$y^2\,(y^2 + x^2 - b) = 0,$$

a qual é um integral particular, por isso que a ella se reduz a primitiva dada quando se toma $c=0$.

III. A primitiva $c^2-(x+y+1)c+x+y=0$

dá $$\frac{dF}{dc}=2c-x-y-1=0,\ c=\frac{x+y+1}{2},$$

que reduz a mesma primitiva, escripta sob a fórma $(c-1)(c-x-y)=0$, a $(x+y-1)^2=0$; e esta é um integral particular, proveniente de se fazer $c=1$ depois de ter dividido por $c-1$.

IV. A primitiva $$y=x+(c-1)^2(c-x)^2$$

dá $$\frac{dF}{dc}=2\,(c-x)(c-1)(2c-x-1)=0.$$

O valor $c=1$ dá o integral particular $y=x$; $c=x$ dá o mesmo, e não uma solução singular, apesar de ser c variavel; emfim $c=\dfrac{x+1}{2}$ dá a solução singular.

V. A primitiva $y^2+x^2=2cx$ dá $$\frac{dF}{dc}=2x=0,$$

que se pode considerar como um caso particular do integral completo, correspondente a $c=\infty$.

VI. A derivada $$(x^2-b)\,y'^2-2xyy'-x^2=0$$

tem por integral completo $$x^2-2cy=b+c^2,$$

que dá $\frac{dF}{dc} = c + y = 0$, e conseguintemente, eliminando c, a solução singular $x^2 + y^2 = b$.

O outro processo, depois de posta a primitiva debaixo da fórma

$$\sqrt{x^2 + y^2 - b} - y - c = 0,$$

dá $\frac{dF}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 - b}} = \infty$, $\frac{dF}{dy} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 - b}} - 1 = \infty$,

a ambas as quaes satisfaz $\qquad x^2 + y^2 = b.$

Neste exemplo, como a primitiva está resolvida em ordem a

$$c = \sqrt{x^2 + y^2 - b} - y = \psi(x, y),$$

sendo por conseguinte $\qquad \frac{dc}{dx} = \frac{d\psi}{dx}, \ \frac{dc}{dy} = \frac{d\psi}{dy},$

as equações precedentes equivalem a $\frac{dc}{dx} = \infty$, $\frac{dc}{dy} = \infty$, que dão com effeito o mesmo.

324. 2.° Se não conhecermos a primitiva da proposta, mas soubermos determinar o factor que torna esta integravel, esse factor servirá para obter as soluções singulares.

Seja $\qquad y' + k = 0$

uma equação, e z o factor que a torna derivada exacta,

$$z(y' + k) = \varphi'(x, y) = 0.$$

Como na primitiva $\varphi(x, y) = c$ d'esta não deve ser comprehendida a solução singular $S = 0$, a expressão $y = \psi x$, tirada da mesma solução, não deve reduzir $\varphi(x, y)$ a uma constante, nem por conseguinte annular a derivada $\varphi'(x, y)$.

Portanto, devendo $y = \psi x$ annular $y' + k$, mas não annular $z(y' + k)$, é necessario que torne z infinito.

Por onde se vê que as soluções singulares fazem infinitos os factores proprios para tornar integraveis as equações differenciaes. Mostra-se até que as soluções singulares d'uma equação são factores algebricos que por uma transformação conveniente se podem pôr em evidencia, e separar inteiramente d'ella (*Calc. infinit.* de Cournot n.os 478, 480). Consulte-se no n.º 13.º do *Journal de l'École Polytechnique* uma memoria de Poisson, na qual se mostra que sempre se pode desembaraçar qualquer equação de primeira ordem da sua solução singular, ou introduzir-lhe uma.

Seja por exemplo a equação

$$y^2 - a^2 = 2xyy' + y'^2(a^2 - x^2),$$

ou, resolvendo em ordem a y',

$$(a^2 - x^2)\,y' + xy = a\sqrt{x^2 + y^2 - a^2}.$$

Como, multiplicando pelo factor $z = \dfrac{1}{(a^2 - x^2)\sqrt{y^2 + x^2 - a^2}}$, esta equação satisfaz á condição de integrabilidade, será $y^2 + x^2 - a^2 = 0$ uma solução singular; o que logo se verá confirmado por outro processo (n.º 326 exemplo III).

325. Se a solução singular fosse dada, $x^2 + y^2 - a^2 = 0$, e quizessemos obter o integral geral, poderiamos, visto que $x^2 - a^2 = 0$ satisfaz á proposta, examinar se o factor z, que a faz integravel e se torna infinito para a solução singular, tem a fórma $(x^2 - a^2)^{-m}(y^2 + x^2 - a^2)^{-n}$, sendo m e n indeterminados. Assim, multiplicada a proposta por esta funcção, estabelecendo a condição de integrabilidade (n.º 315), achariamos que aquella condição é satisfeita por $m = 1$, $n = \dfrac{1}{2}$; e integrariamos a proposta, depois de a multiplicar por $\dfrac{1}{(x^2 - a^2)(y^2 + x^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}}$.

É um exemplo de taes artificios de calculo tirado da *Memoria* de Trembley (*Mem. da Academ. das Scienc.* de Turin, 1790—1791).

326. Quando não se conhecer a primitiva da equação proposta, nem o factor pelo qual seria necessario multiplical-a para a tornar differencial immediata, poderemos deduzir da mesma proposta meios para reconhecer as soluções singulares d'ella.

Antes de expor este processo, procuremos a interpretação geometrica das soluções singulares.

Por ser c arbitraria, podemos considerar o integral geral $f(x, y, c) = 0$ como equação d'uma infinidade de curvas, que só differem entre si em virtude dos differentes valores attribuidos ao parametro c.

Suppondo pois que se dão successivamente a c todos os valores possiveis, separados por differenças infinitamente pequenas, as linhas correspondentes consecutivas, que são integraes particulares, encontrar-se-hão duas a duas em uma serie de pontos, cujo systema formará uma envolvente, tangente a todas ellas; como se pode vêr discorrendo d'um modo analogo ao do n.º 178.

Assim, para cada uma das curvas representadas pela equação $f(x, y, c) = 0$, o parametro c é constante, mas, na passagem d'uma d'ellas para outra, ou na passagem d'um ponto para outro da envolvente que as toca, c é uma funcção variavel das coordenadas d'esse ponto.

Por onde se vê que: para cada valor de c, será $f(x, y, c) = 0$ um integral particular; mas a equação resultante da eliminação de c entre $f = 0$ e $\frac{df}{dc} = 0$, que é a da envolvente, será, em geral, differente das equações das envolutas, e por isso uma solução singular.

Ha pois, em geral, duas ou mais tangentes diversas na intersecção de duas linhas que são integraes particulares da equação proposta; mas, quando essa intersecção é um ponto da curva de contacto, duas ao menos d'aquellas tangentes devem confundir-se. D'onde resulta que nos pontos pertencentes á curva de contacto deve a proposta (1), resolvida em ordem a y', ter raizes eguaes; e conseguintemente deve nestes pontos verificar-se (n.º 73) a equação

$$\frac{dV}{dy'} = 0.$$

327. *Exemplos:*

I. A equação $\quad V = (x^2 - 2y^2)\, y'^2 - 4xyy' - x^4 = 0$

dá $$\left(\frac{dV}{dy'}\right) = (x^2 - 2y^2)\, y' - 2xy = 0\,;$$

e, eliminando y' entre estas equações, vem a solução singular

$$x^2 + 2y^2 = 0.$$

II. A equação $$x dx + y dy = dy \sqrt{y^2 + x^2 - a^2},$$

ou $$x^2 + 2xyy' + y'^2 (a^2 - x^2) = 0,$$

dá $$\frac{dV}{dy'} = 2xy + 2y' (a^2 - x^2) = 0\,;$$

e, eliminando y', vem $$x^2 + y^2 = a^2.$$

III. A equação $$y dx - x dy = a ds = a \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

ou $$y^2 - a^2 = 2xyy' + y'^2 (a^2 - x^2),$$

dá $$\frac{dV}{dy'} = 2xy + 2y' (a^2 - x^2) = 0,$$

e, pela eliminação de y', a solução singular $x^2 + y^2 = a^2$,

achada por outro processo no n.º 324.

IV. Para $$y = xy' + Y_1,$$

onde Y_1 representa uma funcção de y', temos

$$x + \frac{dY_1}{dy'} = 0;$$

e a solução singular resultará da eliminação de y' entre estas duas equações.

328. 4.° Este methodo suppõem a equação desembaraçada de radicaes relativamente a y'. Suppondo-a porém resolvida em ordem a y', pode ainda servir o que fica exposto para obter a solução singular. Com effeito, se derivarmos a equação (1) em ordem a y, e em ordem a x, considerando y' como funcção d'estas variaveis, teremos

$$\frac{dV}{dy} + \frac{dV}{dy'} \cdot \frac{dy'}{dy} = 0, \quad \frac{dV}{dx} + \frac{dV}{dy'} \cdot \frac{dy'}{dx} = 0,$$

que dão
$$\frac{dy'}{dy} = -\frac{\frac{dV}{dy}}{\frac{dV}{dy'}}, \quad \frac{dy'}{dx} = -\frac{\frac{dV}{dx}}{\frac{dV}{dy'}};$$

e como na curva de contacto é $\frac{dV}{dy'} = 0$, devem ser

$$\frac{dy'}{dy} = \infty, \quad \frac{dy'}{dx} = \infty.$$

Seja ainda, por exemplo, a equação

$$y = xy' + a\sqrt{y'^2 + 1},$$

que é a do n.° 324 e do n.° 327, ex. III.

Teremos
$$\frac{dy'}{dy}=\frac{1}{x+\dfrac{ay'}{\sqrt{y'^2+1}}}.$$

Depois, eliminando y' entre a proposta e $\dfrac{dy'}{dy}=\infty$, isto é, entre as equações

$$y=xy'+a\sqrt{y'^2+1},\quad x\sqrt{y'^2+1}+ay'=0,$$

ou
$$xy+a^2y'=x^2y',\quad x^2(y'^2+1)=a^2y'^2,$$

acharemos
$$x^2+y^2=a^2.$$

Nesta solução singular confirma-se a interpretação geometrica que temos dado a taes soluções.

Com effeito a primitiva geral da equação proposta é

$$y=cx+a\sqrt{c^2+1}.$$

E como (*Geom. Anal.*, n.º 39, 3.º) esta equação pertence a uma recta tangente ao circulo de raio a, cujo centro está na origem das coordenadas, vê-se que a solução singular $x^2+y^2=a^2$ é a equação do circulo tangente a todas as rectas comprehendidas no integral geral $y=cx+a\sqrt{c^2+1}$, conformemente com o que tinhamos dito.

329. Os differentes processos, que ficam expostos, fundam-se em propriedades pertencentes ás soluções singulares: mas não examinámos ainda se algum d'elles depende de propriedades exclusivas e caracteristicas d'estas soluções. É o que vamos fazer.

Supponhamos que $y=X$ satisfaz a uma equação proposta $y'=F(x,y)$, sendo X uma funcção dada de x, sem constante arbitraria; de maneira que tenhamos

$$X'=F(x,X)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5).$$

Procuremos conhecer se $y=X$ *é uma solução singular, ou se é um integral particular da proposta:*

Seja $y=\psi(x, a)$ o integral completo de $y'=F(x, y)$, designando a a constante arbitraria. Se $y=X$ é um caso particular do integral $y=\psi(x, a)$, isto é, se $\psi(x, a)$ se torna em X quando se attribue a a um certo valor b, deve $\psi(x, a)-X$ ser zero quando $a=b$, e por conseguinte ser divisivel por $a-b$.

Portanto $$\psi(x, a)-X=(a-b)^m z,$$

sendo m a mais alta potencia de $a-b$, e z uma funcção de x e a, que não se torna nulla nem infinita quando $a=b$.

Representemos $(a-b)^m$ por c: o integral completo de $y'=F(x, y)$ será assim

$$y=X+cz.$$

Substituindo este valor de y em $y'=F(x, y)$, resultará a relação identica

$$X'+cz'=F(x, X+cz).$$

Ora, por uma parte, como $c=0$ não torna z infinito nem nullo, o desenvolvimento de z em ordem a c tem a fórma (n.º 60)

$$z=K+Ac^{\alpha}+Bc^{\beta}+\ldots,$$

sendo α, β,... expoentes crescentes e positivos, e K, A, B,... funcções de x; o que dá

$$X'+cz'=X'+K'c+A'c^{\alpha+1}+,\ldots$$

Por outra parte o desenvolvimento de $F(x, X+cz)$ deve egualmente ser

$$F(x, X+cz)=F(x, X)+Nc^n z^n+Mc^m z^m+\ldots,$$

sendo n, m,... expoentes crescentes e positivos, e M, N,... funcções de x. E é facil determinar, tanto os expoentes m, n,... d'esta serie, como os coefficientes M, N,....

Substituindo pois estes desenvolvimentos de z e F em

$$X' + cz' = F(x, X + cz),$$

teremos, attendendo á equação (5),

$$K'c + A'c^{\alpha+1} + \ldots = Nc^n (K + Ac^\alpha + \ldots)^n$$

$$+ Mc^m (K + Ac^\alpha + \ldots)^m$$

$$+ \text{etc.}$$

Tracta-se agora de saber se é possivel determinar os coefficientes A, B,.... e os expoente α, β,.... de modo que tornem esta equação identica: porque, se isso não for possivel, $y = X$ será uma solução singular; mas se o for, teremos então um integral particular.

Offerecem-se tres casos:

1.° Se $n > 1$, não ha termo similhante que se possa reduzir com $K'c$. Faremos pois $K' = 0$, ou $K = \text{const.}$: poremos $\alpha + 1 = n$, $A' = NK^n$, o que determinará $\alpha = n - 1$ e $A = \int NK^n dx$; e assim dos outros termos. Portanto a identidade é sempre possivel neste caso, e $y = X$ é um integral particular.

2.° Se $n = 1$, o mesmo tem logar. Porque, pondo $K' = NK$, teremos $lK = \int N dx$. Será pois facil ordenar os dois membros; e, comparando entre si os expoentes e coefficientes respectivos dos termos da mesma ordem, determinaremos os expoentes α, β,... e os coefficientes K, A, B,...

3.° Em fim, se $n < 1$, não haverá termo similhante que se reduza com $Nc^n K^n$, por não haver no primeiro membro expoente de c que seja < 1: logo, como K não pode ser nullo, será impossivel satisfazer á identidade; e conseguintemente $y = X$ será uma solução singular.

330. Como acabamos de ver que $y = X$ é uma solução singular, quando $n < 1$, segue-se que então, pondo $X + cz$ em logar de y, o desenvolvimento de $F(x, y)$, effectuado pelo theorema de Taylor, deve ser defeituoso entre o 1.° e 2.° termo; portanto a derivada de $F(x, y)$ em ordem á y deve ser infinita (n.º 58, 2.º). Reciprocamente, um valor $y=X$, que satisfizer a $y'=F(x, y)$ e tornar $\frac{dF}{dy}$ infinito, será uma solução singular; porque dará ao desenvolvimento de $F(x, X+cz)$ a fórma $X'+Nc^nK^n\ldots$, n sendo <1.

Logo a condição $\frac{dF}{dy}=\infty$, ou $\frac{dy'}{dy}=\infty$, exprime o verdadeiro caracter das soluções singulares; e vê-se que, para que ella se verifique, deve a funcção F, se for algebrica, conter um radical, que a hypothese $y=X$ fará desapparecer (n.º 57, 2.º).

Poderemos pois obter as soluções singulares, sem conhecer o integral completo, tirando $\frac{dy'}{dy}$ *da equação differencial, e egualando ao infinito.*

Seja
$$\frac{dy'}{dy}=\frac{U}{T}.$$

Faremos $T=0$, ou $U=\infty$; e, d'entre os factores d'estas equações, os resultados, que satisfazem tambem a $y'=F(x, y)$, serão as soluções singulares.

Exemplos

I. No exemplo VI do n.º 323 é

$$y'=\frac{x\left(y\pm\sqrt{x^2+y^2-b}\right)}{x^2-b},\quad \frac{dy'}{dy}=\frac{x}{x^2-b}\left(1\pm\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2-b}}\right);$$

e esta ultima fracção torna-se infinita em virtude da solução singular $y^2=b-x^2$.

II. Em $y'=a(y-n)^k$ a condição $ak(y-n)^{k-1}=\infty$ exige que seja $k<1$ e $y=n$. E como $y=n$ só satisfaz á proposta quando k é positivo, segue-se que esta não é susceptivel de solução singular senão quando k está entre 0 e 1; sendo nesse caso $y=n$ aquella solução.

O integral completo é
$$\frac{(y-n)^{1-k}}{1-k}=ax+c.$$

331. Para applicar o theorema, que fica demonstrado, não é necessario resolver a proposta em ordem a y', porque, segundo o que vimos no n.º **328**, temos

$$\frac{dy'}{dy} = -\frac{\frac{dV}{dy}}{\frac{dV}{dy'}};$$

e por isso, se for $\frac{dV}{dy} = \infty$, ou $\frac{dV}{dy'} = 0$, verificar-se-ha a condição caracteristica das soluções singulares.

Mas, se forem $\frac{dV}{dy}$ e $\frac{dV}{dy'}$ nullos ou infinitos ao mesmo tempo, procuraremos, pelo processo ensinado no calculo differencial, o valor da fracção $\frac{\frac{dV}{dy}}{\frac{dV}{dy'}}$; e, segundo sahir este valor infinito ou finito, assim haverá ou não haverá soluções singulares.

Constantes arbitrarias; e integração das equações differenciaes de qualquer ordem pelas series

332. Seja $$F(x, y, y', \ldots y^{(n)}) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

a equação differencial proposta da ordem n.

Se de $F=0$ e das suas differenciaes successivas tirarmos as expressões de $y^{(n)}$, $y^{(n+1)}, \ldots$, e fizermos nellas $x=0$, teremos $y_0^{(n)}$, $y_0^{(n+1)}, \ldots$. expressas em $y_0, y'_0, \ldots y_0^{(n-1)}$; e, substituindo-as na formula de Maclaurin

$$y = y_0 + xy'_0 + \ldots \frac{x^{n-1}}{1.2.(n-1)} y_0^{(n-1)} + \frac{x^n}{1.2\ldots n} y_0^{(n)} + \ldots (2),$$

será este o integral da proposta, o qual conterá as n constantes arbitrarias $y_0, y'_0 \ldots y_0^{(n-1)}$.

333. Este modo de integração não se pode empregar quando a hythese $x=0$ torna infinitas algumas das funcções $y_0, y'_0, \ldots y_0^{(n-1)}$; porque é então insufficiente a formula de Maclaurin.

Nesse caso tomemos por a na serie de Taylor,

$$f(a+h) = fa + hf'a + \frac{1}{2} h^2 f''a + \ldots,$$

uma quantidade tal que a hypothese $a=0$ não torne infinita nenhuma das expressões $fa, f'a, \ldots$. Depois, pondo $h = x-a$, teremos

$$y = y_a + (x-a) y'_a + \ldots \frac{(x-a)^{n-1}}{1.2.(n-1)} y_a^{(n-1)} + \frac{(x-a)^n}{1.2\ldots n} y_a^{(n)} + \ldots (3).$$

O mesmo processo acima empregado dará $y_a^{(n)}$, $y_a^{(n+1)}$,... expressos em y_a, y'_a,...$y_a^{(n-1)}$; e (3) será o integral da proposta (1), com as n constantes arbitrarias y_a, y_a'...$y_a^{(n-1)}$.

D'onde podemos concluir que:

1.° *Sempre ha uma serie que é integral de qualquer equação differencial proposta entre duas variaveis; e sabemos o modo de achar esta serie, não tendo que vencer senão as difficuldades que o calculo apresentar.*

2.° *O integral contém sempre um numero de constantes arbitrarias egual á ordem da derivada.*

Esta consequencia, posto que fundada na theoria das series, tem no entretanto todo o rigor que se pode desejar; por quanto, se uma serie é o desenvolvimento d'uma expressão finita $y=fx$, deve essa expressão conter tantas constantes arbitrarias quantas contém a serie.

3.° *De qualquer modo que se houver chegado a uma equação integral, que tenha o numero de constantes arbitrarias exigido pela ordem da differencial, esta equação integral será a primitiva da proposta, e nella se conterá outro qualquer integral, que tambem lhe satisfizer e tiver o mesmo numero de constantes arbitrarias.*

334. Fazendo $h=-x$ nas equações

$$f(x+h)=y+hy'+\frac{1}{2}h^2y''+\ldots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f^{(n-1)}(x+h)=y^{(n-1)}+hy^{(n)}+\frac{1}{2}h^2y^{(n+1)}+\ldots,$$

teremos:

$$f(0)=y-xy'+\frac{1}{2}x^2y''-\ldots.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f^{(n-1)}(0)=y^{(n-1)}-xy^{(n)}+\frac{1}{2}x^2y^{(n+1)}-\ldots.$$

E, substituindo nestas n equações as expressões de $y^{(n)}$, $y^{(n+1)}$... tiradas de (1) e de suas derivadas, a eliminação de y', y'',...$y^{(n-1)}$ entre ellas dará uma resultante em x e y, com as n constantes arbitrarias $f(0)$, $f'(0)$,....$f^{(n-1)}(0)$.

Logo: *uma equação differencial da ordem* n *tem* n *integraes da ordem* n — 1.

Se estes n integraes forem conhecidos, a eliminação das $n-1$ primeiras derivadas entre elles dará o integral finito.

Se forem conhecidos só $n-i$ integraes da ordem $n-1$, a eliminação das $n-i-1$ derivadas $y^{(n-1)}$, $y^{(n-2)}$,... $y^{(i+1)}$ entre elles reduzirá a resolução do problema a integrar a resultante da ordem (i).

Exemplos

I. Da equação $$y' + y + x^3 = 0$$

tiram-se

$$y' = -y - x^3,\ y'' = -y' - 3x^2,\ y''' = -y'' - 6x,$$

$$y^{\text{iv}} = -y''' - 6, \ldots y^{(4+i)} = (-1)^i y^{(4)};$$

e por conseguinte

$$y_0' = -y_0,\ y_0'' = y_0,\ y_0''' = -y_0, \ldots y_0^{(4+i)} = (-1)^i (y_0 - 6);$$

o que substituindo na formula (2) dá

$$y = y_0\left(1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2.3}x^3\right) + (y_0 - 6)\sum_0^\infty (-1)^i \frac{x^{4+i}}{2.3\ldots(4+i)}.$$

II. Á equação $$xy' + y + x^2 = 0,$$

da qual se tiram

$$y' = -\frac{y}{x} - x,\ y'' = \frac{y}{x^2} - \frac{y'}{x} - 1,\ y''' = -\frac{2y}{x^3} + \frac{2y'}{x^2} - \frac{y'y''}{x}, \ldots,$$

não se pode applicar a serie (2), porque $x = 0$ torna y' infinita.

Mas, para $x = a$, tiram-se d'estas expressões

$$y'_a = -\frac{y_a}{a} - a,\ y''_a = \frac{2y_a}{a^2},\ y'''_a = -\frac{6y_a}{a^3} - \frac{2}{a}, \ldots,$$

que substituidas em (3) darão o integral pedido.

III. Seja a equação $\qquad xy'' + y = 0.$

Como d'ella se tiram

$$y'' = -\frac{y}{x},\ y''' = -\frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2},\ y^{\text{IV}} = -\frac{y''}{x} + \frac{2y'}{x^2} - \frac{2y}{x^3}, \ldots,$$

que $x = 0$ torna, em geral, infinitas, poremos nestas $x = a$, e substituiremos em (3) para obter o integral.

Mas, no caso particular de ser $y_0 = 0$, as derivadas da proposta, não resolvida, $xy''' + y'' + y' = 0,\ xy^{\text{IV}} + 2y''' + y'' = 0,\ xy^{\text{V}} + 3y^{\text{IV}} + y''' = 0, \ldots$

dariam $\qquad y''_0 = -y'_0,\ y'''_0 = \frac{1}{2}y'_0,\ y^{\text{IV}}_0 = -\frac{1}{2.3}y'_0, \ldots,$

de cuja substituição em (2) resultaria o integral

$$y = y_0'\left(x - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2^2.3} - \frac{x^4}{1.2^2.3^2.4} + \ldots\right) = C_1 Y_1.$$

Este integral é um integral particular, por não conter duas constantes; mas pode completar-se do modo seguinte.

É claro que podemos em $y = C_1Y_1$ considerar C_1 como variavel, comtanto que a substituição na equação differencial dê o mesmo que se C_1 fosse constante.

Applicando isto á equação proposta, que é linear da segunda ordem,

teremos $$xC_1Y_1'' + C_1Y_1 + x(2C_1'Y_1' + C_1''Y_1) = 0,$$

a qual coincidirá com a relativa a C_1 constante, pondo $2C_1'Y_1' + C_1''Y_1 = 0$.

E como, multiplicando por $\frac{1}{C'_1Y_1}$, o integral primeiro d'esta equação, ou de $\frac{2dY_1}{Y_1} + \frac{dC'_1}{C'_1} = 0$, é $\log C'_1Y_1^2 = \log c_1$, ou $C'_1 = \frac{c_1}{Y_1^2} = \frac{dC_1}{dx}$,

será $$C_1 = c_1\int\frac{dx}{Y_1^2} + c_2;$$

por conseguinte $$y = Y_1\left(c_1\int\frac{dx}{Y_1^2} + c_2\right),$$

com as duas constantes c_1, c_2.

O methodo de que acabamos de servir-nos, e que se chama *methodo da variação das constantes arbitrarias, ou da variação dos parametros*, é muitas vezes empregado na integração das equações differenciaes.

335. A theoria que acabamos de expôr, ainda que demonstrada completamente, nem sempre é propria para fazer conhecer o integral approximado, a não se recorrer a transformações que reduzam a funcção ao estado necessario para se lhe poderem applicar os principios precedentes.

O methodo dos coefficientes indeterminados é ordinariamente mais util, principalmente se o integral deve proceder segundo as potencias fraccionarias ou negativas de x.

Façamos $$y = Ax^a + Bx^b + Cx^c + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4),$$

sendo a, b, c, expoentes, que tractaremos de determinar, assim como os coefficientes A, B, C, . . .

Para isso tiraremos de (4) as expressões de $y', y'', \ldots$ e substituil-as-hemos na derivada proposta, que por esta substituição se deverá tornar identica; depois, ordenando relativamente a x, e comparando termo a termo as potencias da mesma ordem, e seus coefficientes, do mesmo modo que na pag. 280 da *Alg. Sup.*, determinaremos A, a, B, b,...

Exemplos

I. Para

$$(1+y')y=1,$$

teremos

$$(1+\mathrm{A}ax^{a-1}+\mathrm{B}bx^{b-1}+\ldots)(\mathrm{A}x^a+\mathrm{B}x^b+\ldots)=1;$$

o que dá

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{A}^2ax^{2a-1}+\mathrm{AB}ax^{a+b-1}+\mathrm{AC}ax^{a+c-1}+\ldots \\ \qquad +\mathrm{AB}bx^{a+b-1}+\mathrm{B}^2bx^{2b-1}+\ldots \\ \qquad\qquad +\mathrm{AC}x^{a+c-1}+\ldots \\ -1+\mathrm{A}x^a+\mathrm{B}x^b+\ldots \end{array}\right\}=0;$$

por conseguinte

$$2a-1=0,\ a+b-1=a,\ a+c-1=b=2b-1,\ldots$$

ou $\quad a=\dfrac{1}{2},\quad b=1,\quad c=\dfrac{3}{2}\ldots;$

e depois $\quad \mathrm{A}^2a=1,\quad \mathrm{AB}(a+b)+\mathrm{A}=0,$

ou $\quad \mathrm{A}=\sqrt{2},\quad \mathrm{B}=-\dfrac{2}{3},\ \mathrm{C}=\dfrac{1}{18}\sqrt{2}\ldots$

Finalmente, substituindo na serie, teremos o integral

$$y=x^{\frac{1}{2}}\sqrt{2}-\frac{2}{3}x^{\frac{2}{2}}+\frac{1}{18}x^{\frac{3}{2}}\sqrt{2}\ldots$$

Se tivessemos presumido que a lei dos expoentes fosse $\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \ldots$, poderiamos logo empregal-a na serie (4), o que simplificaria os calculos; e tambem poderiamos applicar a serie de Maclaurin, fazendo $x = z^2$.

Pelo mesmo processo se pode ver que a equação

$$dy + y dx = a x^m dx$$

dá

$$\frac{y}{a} = \frac{x^{m+1}}{m+1} - \frac{x^{m+2}}{(m+1)(m+2)} + \frac{x^{m+3}}{(m+1)\ldots(m+3)} - \ldots$$

336. O integral assim obtido não é geral, porque lhe falta a constante arbitraria; mas, se na equação differencial proposta mudarmos x em $z + a$ e y em $t + b$, e desenvolvermos t em z, de modo que a $z = 0$ corresponda $t = 0$, acharemos o integral pedido substituindo neste desenvolvimento $x - a$ em logar de z e $y - b$ em logar de t. Das constantes a, b, só uma será arbitraria, porque a condição de ser $t = 0$ quando é $z = 0$, em $t = \mathrm{F}(a, b, z)$, dá uma relação entre a e b.

Nas ordens superiores completam-se tambem os integraes particulares do modo que adiante exporemos.

II. Seja a equação $\quad y'' = k x^n y.$

A substituição de $\quad y = \mathrm{A}_1 x^{\alpha_1} + \mathrm{A}_2 x^{\alpha_2} + \ldots = \Sigma \mathrm{A}_i x^{\alpha_i}$

dá

$$\Sigma \alpha_i (\alpha_i - 1) \mathrm{A}_i x^{\alpha_i - 2} = \Sigma k \mathrm{A}_i x^{\alpha_i + n},$$

á qual se satisfaz, pondo

$$\alpha_1(\alpha_1 - 1) = 0, \; \alpha_i = \alpha_{i-1} + n + 2, \; \alpha_i(\alpha_i - 1)\mathrm{A}_i = k\mathrm{A}_{i-1};$$

ou, por formarem assim $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_i$ uma progressão arithmetica cuja razão é $n + 2$,

$$\alpha_1(\alpha_1 - 1) = 0, \; \alpha_i = \alpha_1 + i(n+2), \; \alpha_i(\alpha_i - 1)\mathrm{A}_i = k\mathrm{A}_{i-1} \ldots (a).$$

As duas primeiras condições (a) darão α_i; a terceira fará depender A_i de A_1, que ficará sendo a constante arbitraria.

Aos valores $\alpha_1=0$, $\alpha_1=1$, corresponderão as duas series

$$y=C_1X_1,\ y=C_2X_2.$$

Ora é evidente que, se as substituições de $y=C_1X_1$, $y=C_2X_2$,... em uma equação linear relativamente a y e suas derivadas, a reduzem a uma identidade, o mesmo deve acontecer á substituição de $y=C_1X_1+C_2X_2+\ldots$; por isso que, sendo M_1, M_2,. . . os resultados d'aquellas substituições, o d'esta é $M_1+M_2+\ldots$. O integral completo será pois

$$y=C_1X_1+C_2X_2.$$

III. As equações $\quad y''+xy=0,\ y''+\dfrac{y}{x}=0,$

são casos particulares da precedente; para o primeiro dos quaes é $k=-1$ e $n=1$; e para o segundo é $k=-1$ e $n=-1$.

Mas os integraes particulares da segunda correspondentes a $\alpha_1=0$ tornam-se infinitos em virtude de $n=-1$; subsistindo por isso só os integraes particulares correspondentes a $\alpha_1=1$.

337. Tambem se podem achar os integraes approximados por meio das fracções continuas.

Supponhamos $\quad y=Ax^a,\ Bx^b,\ Cx^c,\ldots,$

isto é, $\quad y=\dfrac{Ax^a}{1+z},\ z=\dfrac{Bx^b}{1+u},\ u=\dfrac{Cx^c}{1+t},\ldots$

Como A, a, B, b,. . . devem ficar os mesmos quando x se suppõem infinitesimo, substituiremos Ax^a em logar de y, e a comparação dará A e a; depois faremos $y=\dfrac{Ax^a}{1+z}$ substituindo Bx^b em logar de z, e a comparação dará B, b; depois na equação em z faremos $z=\dfrac{Bx^b}{1+u}$, e em logar de u

substituiremos Cx^e; e assim por diante, levando a approximação até onde quizermos.

Seja por exemplo $my+(1+x)y'=0$.

Fazendo $y=Ax^a$, resultará $(m+a).Ax^a+a.Ax^{a-1}=0$;

logo $a=0$, e A fica indeterminado.

Fazendo depois $y=\frac{A}{1+z}$, teremos $m(1+z)=(1+x)z'$,

que, pondo $z=Bx^b$, se torna em $m+Bx^b(m-b)=bBx^{b-1}$;
logo $b=1$, $B=m$.

Fazendo depois $z=\frac{mx}{1+t}$,... e continuando successivamente do mesmo modo, acharemos o integral em fracção contínua,

$$y=A,\ mx,\ -\frac{1}{2}(m-1)x,\ \frac{1}{6}(m+1)x,\ -\frac{1}{6}(m-2)x,\dots$$

Como por outra parte a integração da proposta dá tambem

$$m\log(1+x)+\log y=\log A,\ \text{ou}\ y=A(1+x)^{-m},$$

teremos assim o desenvolvimento d'esta funcção em fracção contínua, que poderemos reduzir á fórma de serie. (*Alg. Sup.*, pag. 202, nota).

Pelo mesmo processo acharemos para integral da equação

$$dx=(1+x^2)\,dy,$$

$$y=\text{arc}(\text{tang}=x)=x,\ \frac{x^2}{3},\ \frac{(2x)^2}{3.5},\ \frac{(3x)^2}{5.7},\ \frac{(4x)^2}{7.9},\dots,$$

Para maior desenvolvimento d'esta materia pode consultar-se o tomo 2.º n.º 598 do *Calculo Integral* de Lacroix.

Da construcção das equações differenciaes

338. Quando a equação differencial proposta pertence a uma curva, pode ser conveniente construir essa curva, sem integrar a equação; para o que se operará do modo seguinte:

Supponhamos primeiramente que a equação é da primeira ordem

$$F(x, y, y') = 0;$$

e concebamos que a constante é determinada pela condição de ser $y = b$, quando $x = a$. Tomando $AB = a$, $BC = b$ (Fig. 54), marcaremos o ponto C sobre a curva procurada. Substituindo depois $x = a$, $y = b$ em $F = 0$, tiraremos d'esta equação o valor de y', que fixará a direcção da tangente KC no ponto C. Tomemos sobre ella um ponto D tão visinho de C, que sem erro consideravel se possa suppôr a recta CD confundida com o arco da curva; $AF = a'$, $FD = b'$, serão as coordenadas d'um segundo ponto D da curva: e fazendo $x = a'$, $y = b'$, na equação, teremos o valor correspondente de y', que dará a direcção da tangente IE, um pouco afastada da primeira. Continuaremos a operar do mesmo modo para um terceiro ponto, e assim por diante, de maneira que a curva ficará substituida por um polygono CDEZ que se approximará tanto mais d'ella quanto mais vizinhos se tomarem os pontos B, D, E,...

Tambem se poderia discorrer do modo seguinte. Tirando da equação $F = 0$ e sua derivada as expressões de y' e y'', e substituindo nellas a e b em logar de x e y, achariamos a direcção da tangente e o raio R de curvatura no ponto C (n.os 105 e 118). Traçando depois a tangente KC, levantando-lhe a perpendicular $CN = R$, e descrevendo do ponto N como centro, e com este raio, um pequeno arco de circulo CD, considerariamos o ponto D, cujas coordenadas a' e b' differem muito pouco de a e b, como um ponto da curva. Neste ponto tirariamos a tangente ID, e o raio de curvatura DO, etc. Substituiriamos assim á curva um systema de arcos de circulo contiguos. É claro que nesta construcção o erro seria menor do que usando das tangentes, de sorte que, para obter o mesmo grâu de approximação não seria necessario tomar os pontos C, D, E,... tão vizinhos uns dos outros; o que tornaria as construcções menos trabalhosas.

A cada ponto arbitrario de partida (a, b) corresponderá uma curva; e por isso a primitiva, cuja derivada deve representar todas estas curvas, terá uma constante arbitraria.

339. Se a equação differencial proposta é da segunda ordem

$$F(x, y', y'') = 0,$$

escolheremos um ponto arbitrario C para um dos da curva, e tambem uma recta arbitraria KC para tangente; condições estas, que determinarão as duas constantes. Depois tiraremos da equação o valor de y''; com y' e y'' acharemos o raio de curvatura, e descreveremos o pequeno arco CD, do mesmo modo que precedentemente: e suppondo então que o ponto D d'este arco pertence á curva, tiraremos n'elle a normal conduzindo a recta DN do primeiro centro N para D. Teremos assim no segundo ponto as duas coordenadas a', b', e o valor de y', dado pela direcção da tangente ID: com estes dados calcularemos y'' e o raio R'; e tomando $OD = R'$, descreveremos o arco DE: o que determinará um terceiro ponto E, no qual se conhecerá a direcção da normal, e as coordenadas. E assim por diante.

Por meio d'um raciocinio similhante poderiamos substituir á curva uma serie de parabolas osculatrizes,

$$y - b = A(x - a) + B(x - a)^2,$$

pondo em logar de A o valor de y' que se tomou arbitrariamente, e em logar de B o valor de $\frac{1}{2}y''$ tirado da equação da curva.

A cada ponto arbitrario de partida (a, b) corresponderá um systema de curvas que diffirirão entre si em virtude dos valores arbitrarios da derivada b'; e por isso a primitiva, cuja derivada deve representar todos estes systemas de curvas, terá duas constantes arbitrarias.

Tambem se poderiam applicar estes principios ás equações differenciaes da terceira ordem; mas então, além d'um ponto C e da tangente KC, tomar-se-ia tambem arbitrariamente o raio CN do circulo osculador neste primeiro ponto, o que determinaria as tres constantes arbitrarias. Depois não se poderia substituir á curva senão uma serie de parabolas, cujo contacto fosse da terceira ordem. O mesmo se dirá das ordens superiores.

Do que fica dicto podemos concluir que: *uma equação differencial entre duas variaveis se pode construir por meio d'uma curva, que tem tantos parametros variaveis, quantas são as unidades da ordem da equação*. O que concorda com o n.° 333, onde se provou que esta equação tem sempre um integral.

••

Das equações das ordens superiores; e especialmente da segunda ordem

340. Comecemos pelas equações da segunda ordem

$$F(y'', y', y, x) = 0;$$

e entre ellas pelos casos particulares:

$$F(y'', x) = 0, \; F(y'', y') = 0, \; F(y'', y) = 0,$$

$$F(y'', y', x) = 0, \; F(y'', y', y) = 0,$$

nos quaes entram só uma ou duas das quantidades y', y, x.

341. I. Seja $\qquad F(y'', x) = 0.$

Resolvendo em ordem a y'', e attendendo a que são $y'' = \dfrac{dy'}{dx}$, $y' = \dfrac{dy}{dx}$, acham-se

$$y'' = fx, \; y' = \int fx dx + c_1, \; y = \int dx \int fx dx + c_1 x + c_2,$$

sendo c_1 e c_2 duas constantes arbitrarias.

E, em geral, $\qquad F(y^{(n)}, x)$

resolvida em ordem a $y^{(n)}$, dará

$$y^{(n)} = fx,\ y^{(n-1)} = \int fxdx + c_1, \ldots y = \int^{(n)} fxdx + \sum_1^n c_{n-i+1} x^{i-1},$$

indicando $\int^{(n)}$ que devem fazer-se n integrações successivas.

Exemplo

$$y'' = ax^n$$

dá $$y' = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + c_1,\ y = \frac{ax^{n+2}}{(n+1)(n+2)} + c_1 x + c_2.$$

E nos casos particulares de $n = -1$, $n = -2$:

$$n = -1, \qquad y' = alx + C,\ y = a(xlx - x) + Cx + c_2 = axlx + c_1 x + c_2;$$

$$n = -2, \qquad y' = -\frac{a}{x} + c_1,\ y = -alx + c_1 x + c_2.$$

II. Seja $$F(y'', y') = 0.$$

Substituindo $\frac{dy'}{dx}$ em logar de y'', e resolvendo em ordem a dx, teremos

$$dx = fy'dy',\ dy = y'dx = y'fy'dy',$$

entre cujos integraes

$$x = \int fy'dy' + c_1,\ y = \int y'fy'dy' + c_2,$$

eliminando y', virá a primitiva, com as constantes c_1 e c_2.

Em geral $$F(y^{(n)}, y^{(n-1)}) = 0$$

substituindo $\frac{dy^{(n-1)}}{dx}$ em logar de $y^{(n)}$, dará

$$dx = fy^{(n-1)}dy^{(n-1)}, \quad x = \int fy^{(n-1)}dy^{(n-1)} + c;$$

depois successivamente desde $n-2$ até 0, isto é, desde $y^{(n-2)}$ até y, teremos

$$y^{(i)} = \int y^{(i+1)}dx = \int y^{(i+1)} fy^{(n-1)}dy^{(n-1)};$$

e finalmente, eliminando $y^{(n-1)}$ entre as expressões de y e x, virá a primitiva com as n constantes dos integraes successivos x, $y^{(n-1)}, \ldots y$.

Exemplo

$$ay'' + (1 + y'^2)^{\frac{3}{2}} = 0$$

dá $$dx = -\frac{a\,dy'}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad dy = -\frac{ay'dy'}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

entre cujos integraes, $$x = c_1 - \frac{ay'}{\sqrt{1 + y'^2}}, \quad y = c_2 + \frac{a}{\sqrt{1 + y'^2}},$$

eliminando y', resulta a primitiva

$$(c_1 - x)^2 + (c_2 - y)^2 = a^2.$$

Como se suppoz a constante, vê-se que o circulo, e só elle, tem a propriedade de ser constante o seu raio de curvatura.

III. Seja $$F(y'', y) = 0.$$

Resolvendo em ordem a y'', e substituindo em $y'dy' = y''dy$, que se tira de $dy' = y''dx$ e $dy = y'dx$, resultam:

$$y'' = fy, \; y'dy' = fydy, \; y' = \sqrt{2\int fydy}, \; x = \int \frac{dy}{\sqrt{2\int fydy}},$$

com as constantes arbitrarias das duas integrações.

Em geral, $$F(y^{(n)}, y^{(n-2)}) = 0,$$

resolvendo em ordem a $y^{(n)}$, e substituindo em $y^{(n-1)}dy^{(n-1)} = y^{(n)}dy^{(n-2)}$, que se tira de $dy^{(n-1)} = y^{(n)}dx$ e $dy^{(n-2)} = y^{(n-1)}dx$, dá

$$y^{(n)} = fy^{(n-2)}, \; y^{(n-1)} = \sqrt{2\int fy^{(n-2)}dy^{(n-2)}}, \text{ ou } \varphi(y^{(n-1)}, y^{(n-2)}) = 0,$$

que está no caso (II).

Tambem se pode eliminar $y^{(n)}$ entre a proposta e $d^2y^{(n-2)} = y^{(n)}dx^2$, que se tira de $dy^{(n-2)} = y^{(n-1)}dx$ e $d^2y^{(n-2)} = dy^{(n-1)}dx = y^{(n)}dx^2$, reduzindo assim a proposta a

$$F\left(\frac{d^2y^{(n-2)}}{dx^2}, y^{(n-2)}\right) = 0;$$

e esta dá $$x = \int \frac{dy^{(n-2)}}{\sqrt{2\int fy^{(n-2)}dy^{(n-2)}}}, \text{ ou } \varphi(y^{(n-2)}, x) = 0,$$

que está no caso I.

Exemplos

1.º $$a^2y' + y = 0$$

dá

$$y'' = fy = -\frac{y}{a^2},\ 2\int fydy = \frac{C^2 - y^2}{a^2},\ x = \int \frac{ady}{\sqrt{C^2 - y^2}} = a \operatorname{arc}\left(\operatorname{sen} = \frac{y}{C}\right) + C',$$

que equivale a $$y = c_1 \operatorname{sen} \frac{x}{a} + c_2 \cos \frac{x}{a}.$$

2.º $$y'' \sqrt{ay} - 1 = 0$$

dá $$y'' = fy = \frac{1}{\sqrt{ay}},\ 2\int fydy = 4\frac{\sqrt{y} + c_1}{\sqrt{a}},\ x = \int \frac{\sqrt[4]{a}\, dy}{2\sqrt{\sqrt{y} + c_1}},$$

que, pondo $\sqrt{y} + c_1 = z^2$, é

$$x = \sqrt[4]{a}\left(\frac{2}{3} z^3 - 2c_1 z\right) + c_2 = \frac{2}{3} \sqrt[4]{a} \sqrt{c_1 + \sqrt{y}}\,(\sqrt{y} - 2c_1) + c_2.$$

IV. Seja $$F(y'', y', x) = 0.$$

Substituindo $\dfrac{dy'}{dx}$ em logar de y'', reduz-se a proposta a uma equação differencial de primeira ordem em y' e x, cujo integral será o pedido.

Em geral $$F(y^{(n)}, y^{(n-1)}, x) = 0,$$

substituindo $\dfrac{dy^{(n-1)}}{dx}$ em logar de $y^{(n)}$, reduz-se a uma equação differencial de primeira ordem em $y^{(n-1)}$ e x; e, eliminando x entre o integral d'esta e a proposta, obtem-se uma resultante $\varphi(y^{(n)}, y^{(n-1)}) = 0$, que está no caso II.

Exemplos

1.º $$2x(1+y'^2)^{\frac{3}{2}} = a^2y''$$

reduz-se a $2xdx = \dfrac{a^2dy'}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$, cujo integral é $x^2 + c_1 = \dfrac{a^2y'}{\sqrt{1+y'^2}}$;

e depois acha-se $y = \int y'dx = \int \dfrac{(x^2+c_1)\,dx}{\sqrt{a^4-(x^2+c_1)^2}}$.

Assim a fórma da linha na qual os raios de curvatura, $\dfrac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$, são $\dfrac{a^2}{2x}$, inversamente proporcionaes ás abscissas, é a que dá uma *lamina elastica* quando se curva.

A equação mais geral $$\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = fx$$

daria, pelo mesmo processo,

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \int \frac{dx}{fx} = \mathrm{V},\ y = \int \frac{\mathrm{V}dx}{\sqrt{1-\mathrm{V}^2}}.$$

Tal é a solução do *problema inverso dos raios de curvatura.*

2.º $$(1+y'^2) + xy'y'' = ay''\sqrt{1+y'^2}$$

reduz-se a $$dx(1+y'^2)+xy'dy'=ady'\sqrt{1+y'^2},$$

que é linear e, dividindo por $\sqrt{1+y'^2}$, dá o integral

$$x=\frac{ay'+c_1}{\sqrt{1+y'^2}};$$

e depois $$y=\int y'dx=y'x-\int xdy'=y'x-\int\frac{(ay'+c_1)\,dy'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

$$=y'x-a\sqrt{1+y'^2}-c_1\,l\,\frac{y'+\sqrt{1+y'^2}}{c_2}$$

$$=\frac{c_1y'-a}{\sqrt{1+y'^2}}-c_1\,l\,\frac{y'+\sqrt{1+y'^2}}{c_2}.$$

Finalmente, eliminando y' entre as expressões de x e y, e pondo

$$z=\sqrt{a^2+c_1^2-x^2},$$

acha-se $$z=\sqrt{a^2+c_1^2-x^2},\ y=z-c_1\,l\,\frac{x+a}{c_2(c_1-z)}.$$

3.° A equação $$2(a^2y'^2+x^2)\,y''=xy',$$

substituindo $\frac{dy'}{dx}$ em logar de y'', é uma differencial homogenea, que, pondo $x=y'z$, se transforma na separada $\frac{dy'}{y'}=\frac{zdz}{2a^2+z^2}$; e integrando successivamente, vem

$$ly' = lc_1\sqrt{2a^2+z^2},\ x = c_1 z\sqrt{2a^2+z^2},$$

$$y = \int y'dx = \frac{2}{3}c_1^2 z(3a^2+z^2) + c_2.$$

O systema das expressões de x e y, ou antes a resultante da eliminação de z entre ellas, será o integral procurado.

V. Seja $$F(y'', y', y) = 0.$$

Substituindo $y'' = \frac{y'dy'}{dy}$, a equação reduz-se a uma differencial da primeira ordem entre y e y'; depois substituindo $y' = \frac{dy}{dx}$ no integral d'esta, e integrando, obter-se-ha o integral finito.

Ou tambem, resolvendo o primeiro integral em ordem a y, differenciando, e substituindo em $x = \int\frac{dy}{y'}$, a eliminação de y' entre as duas expressões de x e y dará o integral pedido.

Em geral $$F(y^{(n)}, y^{(n-1)}, y^{(n-2)}) = 0,$$

substituindo $\frac{y^{(n-1)}dy^{(n-1)}}{dy^{(n-2)}}$ em logar de $y^{(n)}$, reduz-se a uma differencial de primeira ordem entre $y^{(n-1)}$ e $y^{(n-2)}$; e eliminando $y^{(n-1)}$ ou $y^{(n-2)}$ entre o integral d'ella e a proposta, fica-se no caso III ou no caso II.

Exemplos

1.º $$y''(yy'+a) = y'(1+y'^2),$$

substituindo $y'' = \frac{y'\,dy'}{dy}$, e integrando (n.º 313, II), dá

$$y = ay' + c_1\sqrt{1+y'^2},$$

e depois

$$x = \int\frac{dy}{y'} = \int\frac{a\,dy'}{y'} + \int\frac{c_1\,dy'}{\sqrt{1+y'^2}} = alc_2y' + c_1 l\left(y' + \sqrt{1+y'^2}\right);$$

restando finalmente eliminar y' entre estas expressões.

No caso de ser $c_1 = 0$, a eliminação dá

$$x = al\,\frac{c_2 y}{a},\ \text{ou}\ y = \frac{a}{c_2}e^{\frac{x}{a}} = Ce^{\frac{x}{a}}.$$

2.º $$aby'' = \sqrt{y^2 + a^2y'^2}$$

reduz-se do mesmo modo a uma differencial homogenea, que a hypothese $y' = \frac{y}{z}$ transforma em

$$abzdy - abydz = z^2dy\sqrt{z^2 + a^2}.$$

Depois, separando e pondo $\sqrt{a^2 + z^2} = tz$,

vem a nova transformada $\frac{dy}{y} = \frac{-\,btdt}{bt^2 - at - b}$.

Integrando esta, derivando a expressão de y que ella dá, e substituindo em $x=\int\frac{dy}{y'}$, teremos y e x em funcção de t; e depois a eliminação de t dará o integral pedido.

3.º $$y''+Ay'+B=0,$$

representando A e B constantes, reduz-se á differencial homogenea

$$y'dy'+Ay'dy+Bydy=0,$$

na qual pondo $y'=yu$, e chamando a e b as raizes de $u^2+Au+B=0$,

virá $$\frac{dy}{y'}=\frac{dy}{yu}=-\frac{du}{u^2+Au+B}=-\frac{du}{(u-a)(u-b)},$$

e por conseguinte

$$\frac{dy}{y}-adx=\frac{dy}{y}-a\frac{dy}{y'}=-\frac{du}{u-b},\ \frac{dy}{y}-bdx=-\frac{du}{u-a},$$

cujos integraes são $y(u-b)=c_1e^{ax}$, $y(u-a)=c_2e^{bx}$;

e, eliminando u, vem

$$y(b-a)=c_2e^{bx}-c_1e^{ax},\ \text{ou}\ y=C_1e^{ax}+C_2e^{bx}.$$

No caso de serem a e b imaginarios, da fórma $a=k+h\sqrt{-1}$, $b=k-h\sqrt{-1}$, a substituição no integral dá

$$y=e^{kx}(C_1e^{hx\sqrt{-1}}+C_2e^{-hx\sqrt{-1}}),$$

ou, exprimindo $e^{hx\sqrt{-1}}$ e $e^{-hx\sqrt{-1}}$ em funcções circulares (*Alg. Sup.* n.° 159, eq. (L))

$$y = C'_1 e^{kx} \cos(hx + C'_2).$$

Finalmente, no caso de serem as raizes eguaes, as equações

$$\frac{dy}{y} = \frac{udu}{(u-a)^2}, \; dx = \frac{du}{(u-a)^2},$$

darão $\quad y(u-a) = c_1 e^{\frac{a}{u-a}}, \; x + c_2 = \frac{1}{u-a},$

entre as quaes eliminando $u-a$, virá

$$y = c_1(x+c_2)e^{a(x+c_2)} = C e^{ax}(x+c_2).$$

342. A integração de $\qquad y'' + Py' + Qy = 0,$

representando P e Q funcções de x, faz-se depender da de uma da primeira ordem entre duas variaveis, pondo $y = e^{\int udx}$.

Com effeito esta hypothese dá $y = e^{\int udx}$, $y' = ue^{\int udx}$, $y'' = e^{\int udx}(u' + u^2)$, que transformam a proposta, dividida por $e^{\int udx}$, em

$$u' + u^2 + Pu + Q = 0,$$

da primeira ordem em u e x.

Exemplos

Appliquemos ao exemplo ultimo do numero precedente, isto é, supponhamos P e Q constantes.

É evidente que cada uma das raizes $u=a$ e $u=b$ de $u^2+Pu+Q=0$ satisfaz á transformada, o que dá os integraes particulares da proposta

$$y=e^{\int udx}=e^{ax+m}=c_1e^{ax},\ y=e^{bx+n}=c_2e^{bx};\ldots\ldots(1)$$

e a somma d'estes valores $\qquad y=c_1e^{ax}+c_2e^{bx},$

por satisfazer (n.º 336, II) á proposta, que é linear, e conter duas constantes arbitrarias c_1, c_2, é o integral completo d'ella.

Quando a e b são imaginarias, este integral, toma, como vimos, a fórma

$$y=C_1e^{kx}\cos(hx+C_2).$$

Quando são eguaes, é necessario integrar a equação

$$du+(u-a)^2dx=0,$$

o que dá $\qquad u-a=\dfrac{1}{x+k},\ \int udx=l(x+k)+ax+D,$

e por conseguinte $\qquad y=e^{\int udx}=Ce^{ax}(x+k):$

tudo como tinhamos achado no numero precedente.

343. A integração de $\qquad y''+Py'+Qy=R,$

representando P, Q, R, funcções de x, reduz-se á do numero precedente, pondo (como no n.º 312) $y=tz$; o que dá

$$y'=tz'+zt',\ y''=tz''+2t'z'+zt''.$$

Com effeito, substituindo estas expressões, e attendendo a ser arbitraria uma das variaveis z, t, podemos partir a proposta nas duas

$$(1)\ldots\ldots z''+Pz'+Qz=0,\quad (2)\ldots\ldots t''+t'\left(P+\frac{2z'}{z}\right)=\frac{R}{z}.$$

Supponhamos (1) integrada pelo numero precedente, e resolvida depois em ordem a z: substituindo $t''=\frac{dt'}{dx}$, ficará (2) uma differencial linear da primeira ordem entre t' e x, e integrar-se-ha facilmente pelo n.º 312, mudando no integral alli achado y em t', P em $P+\frac{2z'}{z}$, Q em $\frac{R}{z}$. Teremos assim

$$u=\int\left(P+\frac{2z'}{z}\right)dx=\int Pdx+lz^2=l(z^2e^{\int Pdx}),\ t'=e^{-u}\int\frac{R}{z}e^{u}dx;$$

e depois
$$y=tz=z\int\frac{dx}{z^2e^{\int Pdx}}\int Rze^{\int Pdx}dx\ldots\ldots\ldots\ldots(3).$$

Como os integraes, que envolve (3), contêm duas constantes arbitrarias, podemos suppor nullas as constantes que contêm (1) e (2), ou dar-lhes os valores que forem convenientes para simplificar o calculo.

Exemplos

1.º Em
$$y''+\frac{y'}{x}-\frac{y}{x^2}=\frac{a}{x^2-1}$$

temos
$$P=\frac{1}{x},\ Q=-\frac{1}{x^2},\ R=\frac{a}{x^2-1}.$$

Assim (1) torna-se em $$z'' + \frac{z'}{x} - \frac{z}{x^2} = 0;$$

ou, pondo $z = e^{\int u dx}$, $$du + \left(u^2 + \frac{u}{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx = 0.$$

Pondo $u = v^{-1}$, para fazer esta equação homogenea, e separando-a por meio da hypothese $x = vs$ (n.º 310, 3.º), acharemos

$$\frac{dv}{v} = -\frac{s^2 + s - 1}{s(s^2 - 1)} ds, \text{ que dá } v = \frac{1}{s}\sqrt{\frac{s+1}{s-1}},$$

sem ajuntar constante.

E repondo u^{-1} e ux em logar de v e s, teremos

$$u = \frac{x^2+1}{x(x^2-1)}, \int u dx = l\frac{x^2-1}{x}, z = e^{\int u dx} = \frac{x^2-1}{x},$$

$$\int \mathrm{R} z e^{\int \mathrm{P} dx} dx = \int a dx = ax + c_1;$$

o que substituido em (3) dá (*Alg. Sup.*, n.º 138)

$$y = \frac{x^2-1}{x}\int \frac{(ax+c_1)\, x dx}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{x^2-1}{4x}\int\left(\frac{a-c_1}{(x+1)^2} - \frac{a}{x+1} + \frac{a+c_1}{(x-1)^2} + \frac{a}{x-1}\right) dx$$

$$= -\frac{ax+c_1}{2x} + \frac{a(x^2-1)}{4x}\, l\left(c_2 \frac{x-1}{x+1}\right).$$

2.° Em $y'' - \frac{a^2-1}{4x^2}y = \frac{m}{\sqrt{x^{a+1}}}$,

a equação (1) é $z'' - \frac{(a^2-1)z}{4x^2} = 0;$

sendo por conseguinte nella

$$P = 0,\ Q = -\frac{a^2-1}{4x^2},\ R = \frac{m}{\sqrt{x^{a+1}}}.$$

Poremos pois $z = e^{\int u dx}$, $u' + u^2 - \frac{a^2-1}{4x^2} = 0.$

Fazendo na segunda $u = v^{-1}$, $x = vs$, acharemos $\frac{dv}{v} = \frac{(4s^2-a^2+1)ds}{4s\left(s-s^2+\frac{a^2-1}{4}\right)}$,

ou. pondo $s = y + \frac{1}{2}$,

$$\frac{dv}{v} = \frac{(4y^2+4y-a^2+2)\,dy}{(4y+2)\left(\frac{a}{2}+y\right)\left(\frac{a}{2}-y\right)} = -\frac{4dy}{4y+2} + \frac{\frac{1}{a}dy}{y+\frac{a}{2}} - \frac{\frac{1}{a}dy}{y-\frac{a}{2}},$$

cujo integral, repondo $y = s - \frac{1}{2}$, dá

$$vs = x = \left(\frac{c_1\left(s+\frac{a-1}{2}\right)}{s-\frac{a+1}{2}}\right)^{\frac{1}{a}},\ s = \frac{\frac{a+1}{2}x^a + \frac{a-1}{2}c_1}{x^a - c_1},$$

$$u = \frac{s}{x} = \frac{(a+1)x^a + (a-1)c_1}{2x(x^a-c_1)} = \frac{1-a}{2x} + \frac{ax^{a-1}}{x^a-c_1},$$

$$\int u dx = lc_2 x^{\frac{1-a}{2}}(x^a - c_1),$$

e portanto $$z = c_2 x^{\frac{1-a}{2}} (x^a - c_1).$$

Quando se fazem $c_1 = 0$, $c_2 = 1$, vem o integral particular $z = \sqrt{x^{a+1}}$, de que usaremos.

Emfim $$\int \mathrm{R} z e^{\int \mathrm{P} dx} dx = \int m dx = mx + \mathrm{C}_1,$$

$$y = z \int \frac{(mx + \mathrm{C}_1)\, dx}{x^{a+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^{a-1}}} \left(\mathrm{C}_2 x^a - \frac{\mathrm{C}_1}{a} - \frac{mx}{a-1} \right).$$

344. Quando, contados x, y, dx, dy, d^2y por factores lineares, isto é, x e y por factores lineares, y' por factor da ordem 0, e y'' da ordem -1, for homogenea a proposta $\mathrm{F}(x, y, y', y'') = 0$:

fazendo nella $$y = ux,\ y'' = \frac{z}{x},$$

e dividindo pela potencia mais elevada de x, poderemos reduzil-a a

$$z = f(y', u) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

Com effeito, sendo $a + b - d = n$ a ordem de $x^a y^b y'^c y''^d$, o gráu de x na expressão transformada $x^a \cdot u^b x^b \cdot y'^c \cdot z^d x^{-d}$ é $a + b - d = n$; conseguintemente x desapparece pela divisão por x^n.

Ora temos $$dy = y' dx = udx + xdu,\ xdy' = zdx,$$

das quaes se tiram $$\frac{dx}{x} = \frac{du}{y' - u},\ \frac{du}{y' - u} = \frac{dy'}{z} \ldots\ldots\ldots\ldots (5).$$

Substituindo pois (4) na segunda (5), ficará uma equação da primeira ordem entre y' e u, que se integrará; depois a substituição de y', tirado d'este integral, na primeira (5), e a integração dará $lx = \varphi u$; e finalmente a substituição de $u = \frac{y}{x}$ nesta dará o integral da proposta, com as constantes que provierem das duas integrações. Ou tambem o dará a substituição de u, tirado do primeiro integral, na primeira de (5); a integração d'esta; a eliminação de y' entre os dois integraes; e a substituição de $u = \frac{y}{x}$ na resultante.

Exemplo

A equação $\quad xy'' - y' = 0 \quad$ dá $\quad z = y'$;

e a segunda (5) é $\quad \frac{dy'}{y'} = \frac{du}{y' - u}$, ou $y'dy' = y'du + udy'$,

cujo integral, $y'^2 = 2y'u + c$ reduz a primeira (5) a $\frac{dx}{x} = \frac{dy'}{y'}$, que dá $x = c_2 y'$.

Eliminando pois y' entre estes dois integraes, e substituindo $\frac{y}{x}$ em logar de u, resulta emfim o integral $\quad x^2 - 2c_2 y = c_1$.

345. Quando a proposta for homogenea do gráu n, contando só y, y', y'' como factores, a hypothese $y = e^u$ dará

$$y' = u'e^u,\ y'' = (u'^2 + u'')\, e^u;$$

depois a substituição d'estas expressões, e a divisão por e^{nu}, fará desapparecer e^u da proposta, que tomará a fórma

$$f(x, u', u'') = 0,$$

ficando assim no caso IV do n.º 341.

Equações lineares de todas as ordens entre duas variaveis

346. Chamam-se *equações lineares* aquellas cujos termos são lineares em ordem á variavel dependente e ás suas derivadas; tendo assim a fórma

$$K+Ay+A_1y'+\ldots . A_n y^{(n)}=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

onde K, A, $A_1, \ldots . A_n$ representam funcções de x ou constantes.

Eram d'esta classe as equações de segunda ordem de que tractamos no ultimo exemplo do n.º **317** e nos n.ºs **312** e **343**.

347. Quando falta o termo K, é propriedade de taes equações que, se a ellas satisfizerem as finitas

$$Y=0,\ Y_1=0 \ldots .,$$

tambem lhes satisfará a sua somma $\Sigma Y_i=0$.

Foi esta propriedade a de que já nos servimos no n.º **336**, II.

Com effeito a somma das equações

$$AY+A_1Y'+A_2Y''+\ldots . A_n Y^{(n)}=0,$$

$$AY_1+A_1Y'_1+A_2Y_1''+\ldots A_n Y_1^{(n)}=0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

é $$A\Sigma Y_i+A_1\Sigma Y'_i+\ldots\ldots A_n\Sigma Y_i^{(n)}=0,$$

que, por serem Y, Y_1,.... funcções lineares de y, e por conseguinte

$$\Sigma Y_i' = (\Sigma Y_i)', \ \Sigma Y_i'' = (\Sigma Y_i)''....,$$

se reduz a

$$A\Sigma Y_i + A_1(\Sigma Y_i)' + A_2(\Sigma Y_i)''.... + A_n(\Sigma Y_i)^{(n)} = 0.$$

348. I. Supponhamos o caso mais simples de serem A, A_1, A_2,...A_n constantes e K nullo.

Fazendo $y = ce^{hx}$, e substituindo na proposta, vem

$$A + A_1 h + A_2 h^2 + ... A_n h^n = 0 .... (M).$$

Se tomarmos pois por h as n raizes h_1, h_2,....h_n da equação (M), satisfarão respectivamente á proposta as equações

$$y = c_1 e^{h_1 x}, \ y = c_2 e^{h_2 x}, ... y = c_n e^{h_n x};$$

e como a somma

$$y = c_1 e^{h_1 x} + c_2 e^{h_2 x} + c_n e^{h_n x} .... (N)$$

tambem lhe satisfaz, segundo acabamos de mostrar, e contém as n constantes c_1, c_2,....c_n, será (N) o integral completo.

349. No caso de haver raizes imaginarias: como estas raizes hão de ser em numero par, e duas a duas da fórma $a \pm b\sqrt{-1}$, a somma dos dois termos de (N), correspondentes a cada par, terá a fórma

$$e^{ax}\left(c_i e^{bx\sqrt{-1}} + c'_i e^{-bx\sqrt{-1}}\right),$$

que (*Alg. Sup.*, pag. 269, eq. (L)) se reduz a

$$e^{ax}(m \cos bx + n \operatorname{sen} bx) = Ce^{ax} \cos(bx + l),$$

sendo C e l constantes arbitrarias.

350. No caso de ter a equação (M) raizes eguaes, parece que é (N) um integral particular, e não o integral completo, porque os seus termos respectivos ás raizes eguaes se fundem em um só, cujo coefficiente é a somma dos coefficientes d'elles; reduzindo-se assim a $n-r+1$ o numero das constantes arbitrarias, se for r o das raizes eguaes.

Removeu d'Alembert este inconveniente, como se segue:

Se é $h_1 = h_2$: comecemos por suppor $h_2 = h_1 + \omega$; e, depois das reducções convenientes, façamos $\omega = 0$.

A somma dos termos correspondentes é assim

$$e^{h_1 x}\left(c_1 + c_2 e^{\omega x}\right) = e^{h_1 x}\left(c_1 + c_2 + c_2\omega x + \frac{1}{2}c_2\omega^2 x^2 + \ldots\right),$$

que, pondo $c_2\omega = C_2$, $c_1 + c_2 = C_1$, se reduz, para $\omega = 0$, a $e^{h_1 x}(C_1 + C_2 x)$. E portanto o integral completo tem a fórma

$$y = e^{h_1 x}(C_1 + C_2 x) + c_3 e^{h_3 x} + c_4 e^{h_4 x} + c_n e^{h_n x}.$$

Se houver mais uma raiz egual, $h_3 = h_1$: fazendo $h_3 = h_1 + \omega$, os tres termos da ultima expressão de y serão

$$e^{h_1 x}\left(C_1 + C_2 x + c_3 + c_3\omega x + \frac{1}{2}c_3\omega^2 x^2 + \frac{1}{6}c_3\omega^3 x^3 + \ldots\right),$$

que, pondo $\frac{1}{2}c_3\omega^2 = D_3$, $C_2 + c_3\omega = D_2$, $C_1 + c_3 = D_1$,

se reduz, para $\omega = 0$, a $e^{h_1 x}(D_1 + D_2 x + D_3 x^2)$;

tomando por isso o integral completo a fórma

$$y = e^{h_1 x}(D_1 + D_2 x + D_3 x^2) + c_4 e^{h_4 x} + \ldots c_n e^{h_n x}.$$

E assim por diante, no caso de haver maior numero de raizes eguaes.

Para satisfazer ás equações

$$c_2\omega = C_2,\ c_1 + c_2 = C_1,$$

de modo que C_1 e C_2 possam ser finitas, é necessario suppôr c_1, c_2, infinitas, e c_1 de signal contrario a c_2; o que dará a C_2 e a C_1 as fórmas indeterminadas $\infty \times 0$ e $\infty - \infty$.

Para satisfazer a

$$\frac{1}{2}c_3\omega^2 = D_3,\ C_2 + c_3\omega = (c_2 + c_3)\omega = D_2,\ C_1 + c_3 = c_1 + c_2 + c_3 = D_1,$$

de modo que D_1, D_2 e D_3 possam ser finitas, é necessario suppôr c_2 e c_3 infinitos de segunda ordem e de signaes contrarios.

E assim por diante.

351. Como a introducção de infinitos e de desenvolvimentos em serie tornam esta demonstração menos clara e subjeita a difficuldades, justifiquemos directamente as fórmas do integral a que ella conduziu.

No caso de duas raizes eguaes, substituamos $y = e^{h_1 x}(C_1 + C_2 x)$ na proposta (1). Esta substituição dará facilmente

$$e^{h_1 x}(C_1 + C_2 x)\,M + C_2 e^{h_1 x} . \frac{dM}{dh} = 0;$$

e como, por serem h_1 raiz de (M) e outra das raizes egual a h_1, são $(M) = 0$ e $\left(\frac{dM}{dh}\right) = 0$, vê-se que a expressão substituida satisfaz á proposta.

Se forem tres as raizes eguaes, a substituição de $y = e^{h_1 x}(C_1 + C_2 x + C_3 x^2)$ em (1) dará tres grupos de termos, dos quaes serão respectivamente factores os primeiros membros de (M), $\frac{d(M)}{dh}$ e $\frac{d^2(M)}{dh^2}$; e como estes factores são nullos por serem h_1 raiz de (M) e outras duas das raizes eguaes a h_1, a expressão substituida satisfaz á proposta. E assim por diante (*).

(*) Suppondo $$y = e^{h_1 x}(c_1 + c_2 x + \ldots . c_n x^{n-1}) = \mathrm{P}e^{h_1 x} \ldots\ldots\ldots(a),$$

teremos $$y' = e^{h_1 x}(h_1 \mathrm{P} + \mathrm{P}'),\ y'' = e^{h_1 x}\left(h_1^2 \mathrm{P} + 2h_1 \mathrm{P}' + \frac{2(2-1)}{2}\mathrm{P}''\right).$$

E, se for

$$y^{(i)} = e^{h_1 x}[h_1^i \mathrm{P} + \ldots \frac{i(i-1)..(i-\alpha+1)}{1.2\ldots\alpha} h_1^{i-\alpha}\mathrm{P}^{(\alpha)} + \frac{i(i-1)..(i-\alpha)}{1.2\ldots(\alpha+1)} h_1^{i-\alpha-1}\mathrm{P}^{(\alpha+1)} + ..],$$

a derivação d'esta dará ainda

$$y^{(i+1)} = e^{h_1 x}\left(h_1^{i+1}\mathrm{P} + \ldots + \frac{i(i-1)\ldots(i-\alpha+1)}{1.2\ldots\alpha}\right)\left(1 + \frac{i-\alpha}{\alpha+1}\right)h_1^{i-\alpha}\mathrm{P}^{(\alpha+1)} + \ldots$$

$$= e^{h_1 x}\left(h_1^{i+1}\mathrm{P} + \ldots \frac{(i+1)i\ldots(i+1-\alpha)}{1.2\ldots(\alpha+1)}\right)h_1^{i+1-(\alpha+1)}\mathrm{P}^{(\alpha+1)} \ldots$$

Portanto a lei é geral.

A hypothese (a), substituida na equação proposta (1), dará pois

$$e^{h_1 x}(\mathrm{P}\Sigma \mathrm{A}_i h_1^i + \mathrm{P}'\Sigma \mathrm{A}_i i h_1^{i-1} + \ldots . \mathrm{P}^{(\alpha)}\Sigma \mathrm{A}_i \frac{i(i-1)\ldots..(i-\alpha+1)}{1.2\ldots.\alpha} h_1^{i-\alpha} + ..),$$

ou

$$e^{h_1 x}\left[\mathrm{P}.(\mathrm{M}) + \mathrm{P}'.\frac{d(\mathrm{M})}{dh} + \ldots \frac{\mathrm{P}^{(\alpha)}}{1\ldots\alpha}.\frac{d^\alpha(\mathrm{M})}{dh^\alpha}\ldots + \frac{\mathrm{P}^{(n)}}{1.2\ldots n}.\frac{d^n(\mathrm{M})}{dh^n}\right] = 0;$$

equação satisfeita, porque, sendo h_1 raiz da equação (M), e sendo n o numero das raizes eguaes h_1, serão nullos (M), $\frac{d(\mathrm{M})}{dh^1} \ldots \frac{d^n(\mathrm{M})}{dh^n}$.

Portanto, se (M) tiver i raizes eguaes h_1, será o integral completo

$$y = e^{h_1 x}(c_1 + c_2 x + \ldots c_i x^{i-1}) + c_{i+1} e^{h_{i+1} x} + \ldots c_n e^{h_n x}.$$

Entendendo-se que, se entre as raizes, $h_{i+1}, \ldots h_n$, houver alguns pares imaginarios, por exemplo, $h_{i+p} = \alpha + \beta\sqrt{-1}$, $h_{i+q} = \alpha - \beta\sqrt{-1}$, substituiremos, em logar da somma dos termos respectivos, $c_{i+p} e^{h_{i+p} x} + c_{i+q} e^{h_{i+q} x}$, a expressão $\lambda e^{\alpha x} \cos(\beta x + \gamma)$, sendo λ e γ constantes arbitrarias.

352. II. Se K não for nullo, bastará fazer $y = z - \frac{K}{A}$, para que a transformada de (1) em z esteja no caso I.

353. III. Se K é uma funcção $K = -X$ de x, multipliquemos a proposta

$$Ay + A_1 y' \ldots + A_n y^{(n)} = X$$

por um factor e^{-hx} que torne integravel o primeiro membro; o que dará um resultado da fórma

$$e^{-hx}(ay + a_1 y' + \ldots a_{n-1} y^{(n-1)}) = \int e^{-hx} X dx = P + c \ldots \quad (O).$$

Para determinar os coefficientes $a, a_1, \ldots a_{n-1}$, differenciemos (O), e comparemos com a proposta. Teremos

$$A = -ah,\ A_1 = a - a_1 h,\ A_2 = a_1 - a_2 h, \ldots A_n = a_{n-1}.$$

A formação d'estas equações mostra que são

$$A + A_1 h = -a_1 h^2,\ A + A_1 h + A_2 h^2 = -a_2 h^3, \ldots$$

e finalmente $\quad A + A_1 h + A_2 h^2 + \ldots + A_n h^n = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (M).$

As raizes de (M) farão conhecer os respectivos systemas de coefficientes,

$$a = -\frac{A}{h},\ a_1 = -\frac{A_1 - a}{h},\ a_2 = -\frac{A_2 - a_1}{h}, \ldots a_{n-2} = \frac{A_{n-2} - a_{n-3}}{h},\ a_{n-1} = A_n;$$

e estes systemas, substituidos em (O), darão outros tantos integraes da ordem $n-1$ da fórma (O), sobre qualquer dos quaes operaremos successivamente do mesmo modo, até chegar ao integral finito.

Mas, se conhecermos as n raizes de (M), poderemos obter o integral finito, eliminando $y', y'', \ldots y^{(n-1)}$ entre os n integraes (O) da ordem $n-1$. E, se apenas conhecermos $n-i > 1$ d'essas raizes, poderemos eliminar $y^{(i+1)}, y^{(i+2)}, \ldots y^{(n-1)}$, entre os $n-i$ integraes (O) correspondentes; e depois applicar o methodo exposto á equação resultante da ordem i. (*Calc. Int.* de Euler, t. II, pag. 402).

354. IV. Se são K nullo e A, $A_1, \ldots$ funcções de x, a propriedade referida no n.º 347 faz depender o integral geral dos n integraes particulares; mas nem sempre se sabe achar estes.

Supponhamos que se conhecem alguns; e seja $y_1 = fx$ um d'elles.

Pondo $y = y_1 \int z dx$, substituindo na proposta, e attendendo a ella, acha-se um resultado da fórma

$$Bz + B_1 z' + \ldots . B_{n-1} z^{(n-1)} = 0.$$

Se forem conhecidos alguns dos integraes particulares d'esta, a substituição em $y = y_1 \int z dx$ dará outros tantos da proposta.

E tambem, se for conhecido outro integral da proposta, $y_2 = f_1 x$, e chamarmos z_1 o correspondente de z, a equação $y_2 = y_1 \int z_1 dx$ dará

$$z_1 = \frac{d\left(\frac{y_2}{y_1}\right)}{dx}.$$

Obtido um valor z_1 de z, a hypothese $z = z_1 \int u dx$ reduzirá similhantemente a equação em z a

$$Cu + C_1 u' + \ldots . C_{n-2} u^{(n-2)} = 0;$$

depois a integração d'esta, ou a formula $u_1 = \frac{d\left(\frac{z_2}{z_1}\right)}{dx}$, abaterá a ordem a $n-3$ pela hypothese $u = u_1 \int t dx$. E assim por diante (Courn. *Calc. Int.*, n.º 462).

355. V. Finalmente, se K, A, $A_1, \ldots$ são funcções de x, não tem logar o theorema do n.º 347.

Supponhamos porém que se conhecem n integraes particulares y_1, $y_2, \ldots y_n$ da proposta privada do termo K.

Ponhamos $$y = X_1 y_1 + X_2 y_2 + \ldots X_n y_n = \Sigma X_i y_i,$$

sendo $X_1, X_2, \ldots X_n$, funcções indeterminadas de x.

Differenciando, vem

$$\frac{dy}{dx} = \Sigma X_i \frac{dy_i}{dx} + \Sigma y_i \frac{dX_i}{dx},$$

que, fazendo $$\Sigma y_i \frac{dX_i}{dx} = 0,$$

se reduz a $$\frac{dy}{dx} = \Sigma X_i \frac{dy_i}{dx}$$

Supponhamos que, egualando sempre a zero as derivadas nas quaes X_i se considerava variavel, chegavamos a $\frac{d^{\alpha-1} y}{dx^{\alpha-1}} = \Sigma X_i \frac{d^{\alpha-1} y_i}{dx^{\alpha-1}}$.

A derivada seguinte seria

$$\frac{d^\alpha y}{dx^\alpha} = \Sigma X_i \frac{d^\alpha y_i}{dx^\alpha} + \Sigma \frac{d^{\alpha-1} y_i}{dx^{\alpha-1}} \cdot \frac{dX_i}{dx},$$

que, fazendo do mesmo modo $\Sigma \frac{d^{\alpha-1} y_i}{dx^{\alpha-1}} \cdot \frac{dX_i}{dx} = 0,$

se reduz a $\frac{d^\alpha y}{dx^\alpha} = \Sigma X_i \frac{d^\alpha y_i}{dx^\alpha}.$

Substituindo pois na proposta esta expressão geral, excepto a da ultima derivada $\frac{d^n y}{dx^n} = \Sigma X_i \frac{d^n y_i}{dx^n} + \Sigma \frac{d^{n-1} y_i}{dx^{n-1}} \cdot \frac{dX_i}{dx}$, na qual se fará $\Sigma \frac{d^{n-1} y_i}{dx^{n-1}} \cdot \frac{dX_i}{dx} = -\frac{K}{A_n}$, teremos

$$\Sigma X_i (A y_i + A_1 y'_i + \ldots . A_n y_i^{(n)}) = 0;$$

e, como, em virtude da definição de y_i, o segundo factor de cada parte de Σ é nullo, esta equação fica satisfeita.

Portanto será $y = X_1 y_1 + X_2 y_2 + \ldots X_n y_n$

o integral completo, com tanto que $X_1, X_2, \ldots . X_n$ se determinem pelas n equações:

$$y_1 \frac{dX_1}{dx} + y_2 \frac{dX_2}{dx} + \ldots . y_n \frac{dX_n}{dx} = 0,$$

$$\frac{dy_1}{dx} \frac{dX_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx} \frac{dX_2}{dx} + \ldots \frac{dy_n}{dx} \frac{dX_n}{dx} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{d^{(n-1)} y_1}{dx} \frac{dX_1}{dx} + \frac{d^{(n-1)} y_2}{dx} \frac{dX_2}{dx} + \ldots \frac{d^{(n-1)} y_n}{dx} \frac{dX_n}{dx} + \frac{K}{A_n} = 0.$$

Ora estas equações são lineares em ordem ás derivadas $\frac{dX_1}{dx}$, $\frac{dX_2}{dx}$,... $\frac{dX_n}{dx}$. Conseguintemente a eliminação, e depois a integração de

$$\frac{dX_1}{dx} = \varphi'_1 x,\ \frac{dX_2}{dx} = \varphi'_2 x, \ldots . \frac{dX_n}{dx} = \varphi'_n x,$$

darão os valores de $\quad X_1 = \varphi_1 x + c_1,\ X_2 = \varphi_2 x + c_2 \ldots X_n = \varphi_n x + c_n$;

sendo assim o integral pedido

$$y = (c_1 + \varphi_1 x)\, y_1 + (c_2 + \varphi_2 x)\, y_2 + \ldots (c_n + \varphi_n x)\, y_n.$$

(Navier, *Calc. Int.*, n.º 442).

Eliminação entre as equações differenciaes simultaneas

356. Se for dado um numero i de equações differenciaes entre a variavel principal t e as i dependentes $x_1, x_2, \ldots x_i$; e se estas equações forem: a primeira das ordens $m_1, m_2, \ldots$ relativamente a $x_1, x_2, \ldots$; a segunda das ordens $n_1, n_2 \ldots$ relativamente ás mesmas variaveis; e assim por diante: poderemos reduzir as equações propostas a um systema de outras i entre duas variaveis, a principal e cada uma das dependentes.

Com effeito, se differenciarmos a primeira equação n_1 vezes e a segunda m_1 vezes, estas duas equações com as suas differenciaes farão o numero $m_1 + n_1 + 2$ de equações, entre as quaes eliminando x_1 e os seus $m_1 + n_1$ coefficientes differenciaes das ordens $m_1 + n_1, m_1 + n_1 - 1, \ldots 1$, ficará uma resultante sem x_1.

Do mesmo modo differenciando respectivamente p_1 vezes e m_1 vezes a primeira e a terceira equação, e eliminando x_1 e os seus $m_1 + p_1$ coefficientes differenciaes entre as $m_1 + p_1 + 2$ equações, obteremos outra equação sem x_1. E continuando assim a combinar a primeira equação com cada uma das outras, formaremos $i - 1$ equações sem x_1.

Depois, operando similhantemente sobre estas, obteremos $i-2$ equações sem x_2; e assim por diante, até chegar a uma só equação entre x_i e t.

Pelo mesmo theor chegaremos a uma equação entre x_{i-1} e t, a outra entre x_{i-2} e t, e assim por diante. E formando d'este modo o systema de i equações entre x_1 e t, entre x_2 e $t, \ldots$ entre x_i e t, ficaremos reduzidos ao problema já tractado da integração de equações differenciaes entre duas variaveis; devendo notar-se que estas equações serão lineares, se as propostas o forem.

357. Assim, differenciando uma vez as equações lineares

$$\mathrm{M}x + \mathrm{N}y + \mathrm{P}\frac{dx}{dt} + \mathrm{Q}\frac{dy}{dt} = \mathrm{R},$$

$$\mathrm{M}_1 x + \mathrm{N}_1 y + \mathrm{P}_1\frac{dx}{dt} + \mathrm{Q}_1\frac{dy}{dt} = \mathrm{R}_1,$$

obteriamos duas, tambem lineares,

$$A + Bx + Cy + D\frac{dx}{dt} + E\frac{dy}{dt} + P\frac{d^2x}{dt^2} + Q\frac{d^2y}{dt^2} = 0,$$

$$A_1 + B_1x + C_1y + D_1\frac{dx}{dt} + E_1\frac{dy}{dt} + P\frac{d^2x}{dt^2} + Q\frac{d^2y}{dt^2} = 0.$$

Depois estas quatro dariam, pela eliminação de $x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}$, e pela eliminação de $y, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}$, as duas

$$F\left(t, y, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}\right) = 0,\ f\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}\right) = 0.$$

358. No caso de serem as propostas lineares, como neste exemplo, a eliminação entre ellas e a integração das equações finaes podem fazer-se commodamente do modo que vamos expôr.

Se eliminarmos dy, e dividirmos o resultado pelo coefficiente de dx, e se fizermos o mesmo a respeito de dx e do coefficiente de dy, o systema proposto tomará a fórma mais simples

$$\left.\begin{array}{l}(ax + by)\,dt + dx = \mathrm{T}dt \\ (a'x + b'y)\,dt + dy = \mathrm{S}dt\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots(1);$$

representando a, b, a', b', S, T, funcções de t, ou constantes.

Multiplicando a segunda equação (1) por uma funcção indeterminada k de t, e sommando com a primeira, teremos

$$(a + a'k)\left(x + \frac{b + b'k}{a + a'k}y\right)dt + dx + kdy = (\mathrm{T} + \mathrm{S}k)\,dt.$$

Pondo $x + ky = u$, que dá $x = u - ky$, $dx + kdy = du - ydk$,

substituindo, e egualando a zero o coefficiente de y, resultam

$$[b + b'k - (a + a'k)\,k]\,dt - dk = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$[(a + a'k)\,u - \mathrm{T} - \mathrm{S}k]\,dt + du = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Do integral da primeira d'estas equações, que é da primeira ordem entre k e t, tirar-se-ha k em funcção de t; depois a substituição do valor de k em (3) reduzirá esta equação a uma da primeira ordem entre u e t, a qual integrada dará u em funcção de t; e finalmente as funcções k e u de t, substituidas na equação $x + ky = u$, reduzil-a-hão a uma finita entre x, y, t. Tirando pois t d'esta ultima equação, substituiremos em qualquer das propostas (1), que ficará reduzida a uma da primeira ordem entre x e y e pela integração dará a procurada. Ou, se a integração de (2) der mais d'uma solução para k, a substituição de duas d'estas soluções successivamente em (3), e depois a d'essas e das correspondentes de (3) em $u = x + ky$, dará duas equações, das quaes, pela eliminação t, resultará a procurada.

359. Sendo k', k'', as raizes de $(a + a'k)\,k - b - b'k = 0 \ldots (4)$,

a equação (2) tomar a fórma $a'(k - k')(k - k'')\,dt + dk = 0 \ldots (2)'$.

Se a, b, a', b', forem constantes, os valores constantes k', k'', de k satisfarão á equação $(2)'$; mas, além d'esses, satisfarão tambem os outros que der o integral d'esta equação.

Em quanto á equação (3), o seu integral é (n.º 312)

$$u = e^{-\int (a + a'k)\,dt} \int (\mathrm{T} + \mathrm{S}k)\, e^{\int (a + a'k)\,dt}\, dt \ldots\ldots (5);$$

ficando envolvida a constante arbitraria no factor que tem de integrar-se.

360. I. No caso de serem as raizes constantes de (4) reaes e deseguaes, o integral (5) reduz-se a dois da fórma

$$u = e^{-(a+a'k)t} \int (\mathrm{T} + \mathrm{S}k)\, e^{(a+a'k)t}\, dt \,\ldots\ldots\ldots (5)',$$

entre os quaes se eliminará t.

II. No caso de serem as raizes de (4) imaginarias, $k = \alpha \pm \beta\sqrt{-1}$, as duas equações $(5)'$ serão

$$f(x+(\alpha\pm\beta\sqrt{-1})y) = \left\{ \begin{array}{l} e^{-(a+a'\alpha)t}(\cos a'\beta t \mp \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\, a'\beta t) \\ \times \left\{ \begin{array}{l} \int [\mathrm{T}+\mathrm{S}(\alpha\pm\beta\sqrt{-1})]\, e^{(a+a'\alpha)t} dt\, (\cos a'\beta t \pm \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\, a'\beta t) \\ + m \mp n\sqrt{-1} \end{array} \right. \end{array} \right\};$$

isto é

$$f(x+(\alpha+\beta\sqrt{-1})y) = \left\{ \begin{array}{l} e^{-(a+a'\alpha)t}(\cos a'\beta t - \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\, a'\beta t) \\ \times \left\{ \begin{array}{l} \int [\mathrm{T}+\mathrm{S}(\alpha+\beta\sqrt{-1})]\, e^{(a+a'\alpha)t} dt\, (\cos a'\beta t + \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\, a'\beta t) \\ m - n\sqrt{-1} \end{array} \right. \end{array} \right\}$$

$$f(x+(\alpha-\beta\sqrt{-1})y) = \left\{ \begin{array}{l} e^{-(a+a'\alpha)t}(\cos a'\beta t + \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\, a'\beta t) \\ \times \left\{ \begin{array}{l} \int [\mathrm{T}+\mathrm{S}(\alpha-\beta\sqrt{-1})]\, e^{(a+a'\alpha)t} dt\, (\cos a'\beta t - \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\, a'\beta t) \\ m + n\sqrt{-1} \end{array} \right. \end{array} \right\},$$

cujas somma e differença dão

$$x + \alpha y = e^{-(a+a'\alpha)t}\left\{\begin{array}{l} \cos a'\beta t.\int\left(\begin{array}{l}T+S\alpha\\ -S\beta\,\mathrm{tg}\,a'\beta t\end{array}\right)e^{(a+a'\alpha)t}dt\cos a'\beta t\\ +\,\mathrm{sen}\,a'\beta t.\int\left(\begin{array}{l}T+S\alpha\\ +S\beta\cot a'\beta t\end{array}\right)e^{(a+a'\alpha)t}dt\,\mathrm{sen}\,a'\beta t\\ +m\cos a'\beta t - n\,\mathrm{sen}\,a'\beta t\end{array}\right.$$

$$\beta y = e^{-(a+a'\alpha)t}\left\{\begin{array}{l} \cos a'\beta t.\int\left(\begin{array}{l}T+S\alpha\\ +S\beta\cot a'\beta t\end{array}\right)e^{(a+a'\alpha)t}dt\,\mathrm{sen}\,a'\beta t\\ -\,\mathrm{sen}\,a'\beta t.\int\left(\begin{array}{l}T+S\alpha\\ -S\beta\,\mathrm{tg}\,a'\beta t\end{array}\right)e^{(a+a'\alpha)t}dt\cos a'\beta t\\ -n\cos a'\beta t - m\,\mathrm{sen}\,a'\beta t.\end{array}\right.$$

III. Finalmente, no caso de serem eguaes as raizes de (4): tiraremos do integral $u = ft = x + ky$ os valores de t e dt em funcção de x e y e suas differenciaes; substituiremos estes valores em uma das propostas (1), e integral-a-hemos.

361. Na mesma hypothese de a, a', b, b', constantes, podemos tambem proceder do modo seguinte, em conformidade com o que fica prevenido no n.º 359.

O integral de $(2)'$ é $\qquad \dfrac{1}{k'-k''}\, l\, \dfrac{k-k'}{k-k''} + a't + lc = 0,$

ou $$C\,\frac{k-k'}{k-k'}\,e^{a't(k'-k'')} = 1$$

Tomando pois por C dois valores, os correspondentes de k, substituidos em (5), darão dois de $x + ky$, entre os quaes se deve eliminar t.

I. Por exemplo $C = 0$ e $C = \infty$ darão $k = k''$ e $k = k'$, como no n.º 359.

II. Se forem $k' = \alpha + \beta\sqrt{-1}$, $k' = \alpha - \beta\sqrt{-1}$, e por conseguinte $(k-k')(k-k'') = (k-\alpha)^2 + \beta^2$, a equação $(2)'$ será

$$a'[(k-\alpha)^2+\beta^2]\,dt + dk = 0,$$

cujo integral é $\quad \dfrac{1}{\beta}\,\text{arc}\left(\text{tang} = \dfrac{k-\alpha}{\beta}\right) + a't = c,$

ou $$k - \alpha = \beta \,\text{tang}\,(c - a't)\,\beta:$$

tomando pois nesta dois valores por c, e procedendo como fica dito, acharemos a equação procurada.

Por exemplo, tomando successivamente $\beta c = \pi$, $\beta c = \frac{1}{2}\pi$, e substituindo em (5) os valores correspondentes, $k = \alpha - \beta\,\text{tang}\,a'\beta t$, $k = \alpha + \beta\cot a'\beta t$, acharemos duas expressões u', u'', de $u = x + ky$, por meio das quaes se obterão as duas

$$x + \alpha y = u' + \beta y \,\text{tg}\, a'\beta\, t = u'' - \beta y \cot a'\beta\, t,\ \beta y = \frac{u''-u'}{\cot a'\beta\, t + \text{tang}\, a'\beta\, t},$$

que, attendendo a serem

$$\int (a + a'\alpha - a'\beta\,\text{tg}\,a'\beta\, t)\,dt = (a + a'\alpha)\,t + \log\cos a'\beta\, t,$$

$$\int (a + a'\alpha + a'\beta\cot a'\beta t)\,dt = (a + a'\alpha)\,t + \log \text{sen}\, a'\beta\, t,$$

coincidem com as do n.º 360.

III. Se forem k' e k'' eguaes, ou $(k-k')(k-k'') = (k-k')^2$, a equação $(2)'$ dará

$$\frac{1}{k-k'} - a't - c = 0;$$

com a qual, tomando dois valores de c, procederemos como nos outros casos.

Por exemplo $c=\infty$, $c=0$, dão $k=k'$, $k=k'+\frac{1}{a't}$, que se devem substituir em $u=x+ky$ e depois em (5).

362. Se tivermos agora tres equações da primeira ordem entre as quatro variaveis x, y, z, t, reduzil-as-hemos em primeiro logar, como no caso precedente, á fórma

$$(ax+by+cz)\,dt+dx=\mathrm{T}dt,$$

$$(a'x+b'y+c'z)\,dt+dy=\mathrm{S}dt,$$

$$(a''x+b''y+c''z)\,dt+dz=\mathrm{R}dt.$$

Suppondo que os coefficientes são funcções de t ou constantes, e que T, S, R, são funcções de t, multipliquemos a segunda e a terceira por indeterminadas k, l, em geral funcções de t; e sommemos. Virá

$$(a+a'k+a''l)\left(x+\frac{b+b'k+b''l}{a+a'k+a''l}y+\frac{c+c'k+c''l}{a+a'k+a''l}z\right)dt+dx+kdy+ldz,$$

$$=(\mathrm{T}+\mathrm{S}k+\mathrm{R}l)\,dt.$$

Fazendo nesta equação $\quad x+ky+lz=u;$

substituindo em logar de x e $dx+kdy+ldz$ as suas expressões tiradas d'aquella hypothese,

$$x=u-ky-lz,\ dx+kdy+ldz=du-ydk-zdl;$$

e egualando depois a zero os coefficientes de y e z: teremos as tres transformadas

$$[b+b'k+b''l-(a+a'k+a''l)\,k]\,dt-dk=0\ldots\ldots(7),$$

$$[c+c'k+c''l-(a+a'k+a''l)\,l]\,dt-dl=0\ldots\ldots(8),$$

$$[a+a'k+a''l)\,udt-(\mathrm{T}-\mathrm{S}k-\mathrm{R}l)\,dt+du=0\ldots\ldots(9),$$

Se os coefficientes $a, a', a'', b, b', b'', c, c', c''$, forem constantes, é claro que satisfaremos a (7) e (8) tomando por k e l numeros constantes dados pelas equações

$$b + b'k + b''l - k(a + a'k + a''l) = 0,$$

$$c + c'k + c''l - l(a + a'k + a''l) = 0.$$

Como a resultante d'estas equações é do terceiro gráu, se chamarmos (k_1, l_1), (k_2, l_2), (k_3, l_3), tres systemas de valores que satisfaçam a ellas, e os substituirmos successivamente em (9), teremos os tres integraes

$$x + k_1 y + l_1 z = e^{-(a+a'k_1+a''l_1)t}\left(\int (\mathrm{T} + \mathrm{S}k_1 + \mathrm{R}l_1)\, e^{(a+a'k_1+a''l_1)t}\, dt + c_{\prime}\right),$$

$$x + k_2 y + l_2 z = e^{-(a+a'k_2+a''l_2)t}\left(\int (\mathrm{T} + \mathrm{S}k_2 + \mathrm{R}l_2)\, e^{(a+a'k_2+a''l_2)t}\, dt + c_{\prime\prime}\right),$$

$$x + k_3 y + l_3 z = e^{-(a+a'k_3+a''l_3)t}\left(\int (\mathrm{T} + \mathrm{S}k_3 + \mathrm{R}l_3)\, e^{(a+a'k_3+a''l_3)t}\, dt + c_{\prime\prime\prime}\right),$$

entre os quaes se devem eliminar t e z.

É evidente que um processo analogo se pode applicar a mais equações, e que estas se integram sempre quando os coefficientes de x, y, z são constantes.

363. Exemplos da integração das equações simultaneas de primeira ordem:

I. $$dx + \frac{\mathrm{C} - \mathrm{B}}{\mathrm{A}} ny\,dt = 0, \quad dy + \frac{\mathrm{A} - \mathrm{C}}{\mathrm{B}} nx\,dt = 0.$$

Comparando com as equações (1), temos

$$a = 0,\ b = \frac{(\mathrm{C} - \mathrm{B})n}{\mathrm{A}},\ a' = \frac{(\mathrm{A} - \mathrm{C})n}{\mathrm{B}},\ b' = 0,\ \mathrm{T} = 0,\ \mathrm{S} = 0,$$

e as equações (4) e (3) são $a'k^2 = b,\ a'kudt + du = 0.$

A primeira dá $$k = \mp\sqrt{\frac{b}{a'}};$$

depois a segunda dá, para cada um dos valores de k,

$$u' = \mathrm{M}e^{\sqrt{a'b}.t},\ u'' = \mathrm{M}'e^{-\sqrt{a'b}.t};$$

e finalmente, substituindo em $x + ky = u$, acha-se

$$x - y\sqrt{\frac{b}{a'}} = \mathrm{M}e^{t\sqrt{a'b}},\ x + y\sqrt{\frac{b}{a'}} = \mathrm{M}'e^{-t\sqrt{a'b}};$$

d'onde resultam os integraes procurados

$$x = \frac{\mathrm{M}}{2}e^{t\sqrt{a'b}} + \frac{\mathrm{M}'}{2}e^{-t\sqrt{a'b}},\ y\sqrt{\frac{b}{a'}} = \frac{\mathrm{M}'}{2}e^{-t\sqrt{a'b}} - \frac{\mathrm{M}}{2}e^{t\sqrt{a'b}}.$$

Se para dar a estas expressões uma fórma simples, puzermos

$$\mathrm{M}' = \frac{he^{m\sqrt{-1}}}{\sqrt{-1}},\ \mathrm{M} = -\frac{he^{-m\sqrt{-1}}}{\sqrt{-1}},$$

ficarão

$$x = h\,\mathrm{sen}\,(t\sqrt{a'b}.\sqrt{-1}+m),\ y\sqrt{-1} = h\sqrt{\frac{a'}{b}}\cos\,(t\sqrt{a'b}.\sqrt{-1}+m),$$

ou, fazendo

$$\sqrt{a'b}.\sqrt{-1}=n\sqrt{\frac{(A-C)(B-C)}{AB}}=l,\ \frac{h\sqrt{\frac{a'}{b}}}{\sqrt{-1}}=h\sqrt{\frac{A(A-C)}{B(B-C)}}=h',$$

$$x=h\operatorname{sen}(lt+m),\ y=h'\cos(lt+m).$$

II.

$$dx+nydt=-h\operatorname{sen}(lt+m)\,dt,$$

$$dy-nxdt=\quad h'\cos(lt+m)\,dt;$$

designando n, h, l, m, as mesmas quantidades que no exemplo precedente.

Comparando com as equações (1), temos

$$a=0,\ b=n,\ a'=-n,\ b'=0,$$

$$T=-h\operatorname{sen}(lt+m),\ S=h'\cos(lt+m);$$

e as (4) e (3) são $\quad -nk^2=n,\ -nkudt+du=(T+kS)\,dt.$

A primeira d'estas dá $k=\pm\sqrt{-1}$; e depois a segunda torna-se, para os dous valores de k, respectivamente em

$$-nudt\sqrt{-1}+du=-h\operatorname{sen}(lt+m)dt+h'\cos(lt+m)\sqrt{-1}\,dt=Q\,dt,$$

$$+nudt\sqrt{-1}+du=-h\operatorname{sen}(lt+m)dt-h'\cos(lt+m)\sqrt{-1}\,dt=Q'dt,$$

cujos integraes (n.º 312) são

$$u'=e^{nt\sqrt{-1}}(\int e^{-nt\sqrt{-1}}\,Q\,dt+c),\ u''=e^{-nt\sqrt{-1}}(\int e^{nt\sqrt{-1}}\,Q'dt+c'.)$$

Substituindo em logar de Q e Q′ as suas expressões; transformando sen $(lt+m)$ e cos $(lt+m)$ em exponenciaes; integrando, e fazendo

$$e^{(lt+m)\sqrt{-1}}=z,\ e^{-(lt+m)\sqrt{-1}}=z':$$

ficam

$$u'=h\left(\frac{z}{2(l-n)}+\frac{z'}{2(l+n)}\right)+h'\left(\frac{z}{2(l-n)}-\frac{z'}{2(l+n)}\right)+ce^{nt\sqrt{-1}},$$

$$u''=h\left(\frac{z}{2(l+n)}+\frac{z'}{2(l-n)}\right)-h'\left(\frac{z}{2(l+n)}-\frac{z'}{2(l-n)}\right)+c'e^{-nt\sqrt{-1}}.$$

E como a equação $u=x+ky$ se torna nas duas

$$u'=x+y\sqrt{-1},\ u''=x-y\sqrt{-1},$$

que dão $$x=\frac{u'+u''}{2},\ y=\frac{u'-u''}{2\sqrt{-1}}:$$

attendendo a $$\frac{z+z'}{2}=\cos(lt+m),\ \frac{z-z'}{2\sqrt{-1}}=\operatorname{sen}(lt+m),$$

e fazendo $$c=fe^{g\sqrt{-1}},\ c'=fe^{-g\sqrt{-1}},$$

teremos $$x=\frac{lh+nh'}{l^2-n^2}\cos(lt+m)+f\cos(nt+g),$$

$$y=\frac{nh+lh'}{l^2-n^2}\operatorname{sen}(lt+m)+f\operatorname{sen}(nt+g),$$

nas quaes, em virtude das relações entre l e n, e entre h e h', do exemplo precedente, que dão

$$lh = nh'\frac{B-C}{A},\ lh' = nh\frac{A-C}{B},\ l^2 - n^2 = -n^2\frac{C(A+B-C)}{AB},$$

serão $$\frac{lh+nh'}{l^2-n^2} = -\frac{Bh'}{Cn},\ \frac{nh+lh'}{l^2-n^2} = -\frac{Ah}{Cn}.$$

364. Como applicação do processo indicado no n.º **356**, integremos tambem por elle as equações do exemplo I do numero precedente, ou, pondo $\frac{B-C}{A}n = a$, $\frac{A-C}{B}n = b$, as equações $dx - aydt = 0$, $dy + bxdt = 0$

Differenciando, virá

$$d^2x - adydt = 0,\ d^2y + bdxdt = 0;$$

depois, eliminando dy entre a segunda e a terceira, e dx entre a primeira e a quarta, achar-se-hão

$$d^2x + abxdt^2 = 0,\ d^2y + abydt^2 = 0;$$

e finalmente integrando (n.º **341**, III), teremos

$$t = \int \frac{dx}{\sqrt{-2ab\int xdx}} = \frac{1}{\sqrt{ab}}\int \frac{dx}{h^2 - x^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}}\left[\text{arc}\left(\text{sen} = \frac{x}{h}\right) - m\right],$$

ou $$x = h\,\text{sen}\,(t\sqrt{ab} + m),\ y = h'\,\text{sen}\,(t\sqrt{ab} + m').$$

Por se haverem differenciado as propostas, apparecem a mais duas constantes, as quaes determinaremos de modo que os integraes satisfaçam ás mesmas propostas. E teremos assim as condições

$$h\sqrt{ab}\cos(t\sqrt{ab}+m)-ah'\,\text{sen}\,(t\sqrt{ab}+m')=0,$$

$$h'\sqrt{ab}\cos(t\sqrt{ab}+m')+bh\,\text{sen}\,(t\sqrt{ab}+m)=0,$$

ás quaes evidentemente satisfazem $m'=90^\circ+m,\ h'=h\sqrt{\frac{b}{a}}$.

Emfim, substituindo estes valores, e pondo $l=\sqrt{ab}$, recahiremos nos integraes achados no numero precedente.

365. Passemos ás equações de segunda ordem. Se tivermos as equações

$$d^2y+(ady+bdx)\,dt+(cy+gx)\,dt^2=\text{T}dt^2,$$

$$d^2x+(a'dy+b'dx)\,dt+(c'y+g'x)\,dt^2=\text{S}dt^2,$$

e fizermos $$dy=pdt,\ dx=qdt,$$

teremos, em logar das duas equações de segunda ordem entre x, y, t, as quatro de primeira ordem entre x, y, z, p, q, t,

$$dp+(ap+bq+cy+gx)\,dt=\text{T}dt,$$

$$dq+(a'p+b'q+c'y+g'x)\,dt=\text{S}dt,$$

$$dy=pdt,\ dx=qdt,$$

as quaes tractaremos pelo modo indicado para esta especie de equações.

Reflectindo neste processo, vê-se que elle é applicavel a qualquer numero de equações do primeiro gráu e de qualquer ordem.

366. Algumas vezes a simples inspecção das equações mostra a fórma

..

dos seus integraes. Por exemplo, em logar das equações, importantes na Mechanica,

$$A'\frac{d^2x}{dt^2}+D'\frac{d^2y}{dt^2}+E'\frac{d^2z}{dt^2}-Ax-Dy-Ez=0,$$

$$D'\frac{d^2x}{dt^2}+B'\frac{d^2y}{dt^2}+F'\frac{d^2z}{dt^2}-Dx-By-Fz=0,$$

$$E'\frac{d^2x}{dt^2}+F'\frac{d^2y}{dt^2}+C'\frac{d^2z}{dt^2}-Ex-Fy-Cz=0,$$

nas quaes A, A'... são coefficientes constantes, poderiam substituir-se as seis de primeira ordem

$$A'\frac{dx'}{dt}+D'\frac{dy'}{dt}+E'\frac{dz'}{dt}-Ax-Dy-Ez=0,$$

$$D'\frac{dx'}{dt}+B'\frac{dy'}{dt}+F'\frac{dz'}{dt}-Dx-By-Fz=0,$$

$$E'\frac{dx'}{dt}+F'\frac{dy'}{dt}+C'\frac{dz'}{dt}-Ex-Fy-Cz=0,$$

$$\frac{dx}{dt}=x',\ \frac{dy}{dt}=y',\ \frac{dz}{dt}=z',$$

que se integrariam pelo methodo exposto. Mas é evidente que, reproduzindo-se os senos e cosenos nas suas derivadas de ordem par, as expressões

$$x=\mathrm{H}\operatorname{sen}(mt+n),\ y=\mathrm{H}k\operatorname{sen}(mt+n),\ z=\mathrm{H}k'\operatorname{sen}(mt+n)$$

substituidas nas equações propostas devem ter $\operatorname{sen}(mt+n)$ por factor commum, e reduzir-se a simples equações de condição entre as constantes.

Com effeito a substituição dá, fazendo $m^2 = \rho$,

$$\rho(A' + D'k + E'k') + A + Dk + Ek' = 0,$$

$$\rho(D' + B'k + F'k') + D + Bk + Fk' = 0,$$

$$\rho(E' + F'k + C'k') + E + Fk + Ck' = 0,$$

que determinarão ρ, k, k', de modo que as expressões precedentes de x, y, z, satisfaçam ás propostas.

Chamando pois ρ_1, ρ_2, ρ_3, os tres valores de ρ que dá a equação final do terceiro gráu, e designando pelos mesmos indices inferiores os valores de k e k' correspondentes, teremos os integraes completos da proposta

$$x = \mathrm{H}\,\mathrm{sen}\,(t\sqrt{\rho_1} + n) + \mathrm{H}'\,\mathrm{sen}\,(t\sqrt{\rho_2} + n') + \mathrm{H}''\,\mathrm{sen}\,(t\sqrt{\rho_3} + n''),$$

$$y = \mathrm{H}k_1\,\mathrm{sen}(t\sqrt{\rho_1} + n) + \mathrm{H}'k_2\,\mathrm{sen}\,(t\sqrt{\rho_2} + n') + \mathrm{H}''k_3\,\mathrm{sen}\,(t\sqrt{\rho_3} + n''),$$

$$z = \mathrm{H}k'_1\,\mathrm{sen}(t\sqrt{\rho_1} + n) + \mathrm{H}'k'_2\,\mathrm{sen}\,(t\sqrt{\rho_2} + n') + \mathrm{H}''k'_3\,\mathrm{sen}\,(t\sqrt{\rho_3} + n''),$$

sendo H, H$'$, H$''$, n, n' n'', as seis constantes arbitrarias.

367. A eliminação entre as equações lineares, cujos coefficientes são os mesmos em todas, offerece um theorema elegante e util.

Sejam

$$A_i \frac{d^i x^{(1)}}{dt^i} + A_{i-1} \frac{d^{i-1} x^{(1)}}{dt^{i-1}} + \ldots + A_0 x^{(1)} = 0,$$

$$A_i \frac{d^i x^{(2)}}{dt^i} + A_{i-1} \frac{d^{i-1} x^{(2)}}{dt^{i-1}} + \ldots + A_0 x^{(2)} = 0,$$

. . . .

$$A_i \frac{d^i x^{(n)}}{dt^i} + A_{i-1} \frac{d^{i-1} x^{(n)}}{dt^i} + \ldots + A_0 x^{(n)} = 0,$$

n equações d'estas da ordem i, ou

$$\sum_0^i A_m \frac{d^m x^{(1)}}{dt^m} = 0,\ \sum_0^i A_m \frac{d^m x^{(2)}}{dt^m} = 0, \ldots \sum_0^i A_m \frac{d^m x^{(n)}}{dt^m} = 0 \ldots \quad (a);$$

sendo $\frac{d^0 x}{dt^0} = x$, notação conforme com $d^{m-1} x = \int d^m x$.

Se multiplicarmos $n-k$ d'estas equações respectivamente por $a_p^{(1)}, a_p^{(2)}, \ldots a_p^{(n-k)}$, e sommarmos os productos, teremos evidentemente a resultante

$$\sum_0^i A_m \left(a_p^{(1)} \frac{d^m x^{(1)}}{dt^m} + a_p^{(2)} \frac{d^m x^{(2)}}{dt^m} + \ldots + a_p^{(n-k)} \frac{d^m x^{(n-k)}}{dt^m} \right) = 0 \ldots (b);$$

a qual se tornará n'aquella das equações (a), que é relativa á variavel $x^{(n-k+p)}$, pondo

$$x^{(n-k+p)} = a_p^{(1)} x^{(1)} + a_p^{(2)} x^{(2)} \ldots + a_p^{(n-k)} x^{(n-k)} \ldots\ldots\ldots (c).$$

Logo a equação (c) satisfaz ás propostas.

Fazendo variar o indice p desde 1 até k, teremos assim k equações da fórma (c), que satisfazem ás propostas, e contém $(n-k)k$ arbitrarias $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots$; e ficarão para integrar $n-k$ das equações (a), que deverão dar $i(n-k)$ arbitrarias.

Mas, para que as k equações (c) sejam integraes completos das propostas (a), é necessario que, além de satisfazerem a estas equações, involvam um numero de arbitrarias que juncto ás $i(n-k)$ perfaça o total ni. Teremos pois a condição

$$(n-k)k + i(n-k) = ni,$$

que dá as raizes $k=0$, e $k=n-i$. D'onde resulta que $n-i$ é o maior numero de integraes da fórma (c), que satisfazem ás equações differenciaes (a).

Alguns problemas de geometria

368. Quando na equação d'uma curva $F(x, y, c) = 0$ se attribuem successivamente á constante c todos os valores possiveis, resulta um systema infinito de linhas. Chamam-se *Trajectorias* as curvas que têm a propriedade de cortar estas linhas sempre debaixo do mesmo angulo, isto é, de fazerem as suas tangentes com as d'ellas um angulo constante, para todos os pontos onde se encontram. A trajectoria é *orthogonal* quando as tangentes tiradas a esta curva e á curva variavel, na sua intersecção, fazem uma com a outra um angulo recto.

Procuremos a equação das trajectorias, $f(x, y) = 0$; sendo conhecida a equação da curva variavel, e o angulo constante das suas tangentes com as d'aquellas.

Seja
$$F(X, Y, c) = 0$$

a equação da curva que varía com o parametro c. Para um dado valor de c esta curva toma uma posição determinada AM (Fig. 47); e chamando Y', y', os valores das derivadas das ordenadas Y, y, da curva AM e da trajectoria na sua intersecção M, a tangente trigonometrica do angulo T'MT, que fazem entre si as tangentes MT' e MT, será

$$a = \frac{y' - Y'}{1 + y'Y'},$$

ou
$$(1 + y'Y')\,a + Y' - y' = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1);$$

onde devemos substituir x e y em logar de X e Y, por ser o ponto M commum ás duas curvas, e tomar por a a constante ou funcção dada para valor da tangente trigonometrica do angulo das tangentes ás duas curvas.

Raciocinando como na pag. 154 da *Geom. Anal.*, vê-se que, se eliminarmos c entre $F(x, y, c) = 0$ e (1), depois de nesta substituir y em logar de Y, a resultante será a equação differencial da trajectoria, que deveremos integrar.

Se a trajectoria é orthogonal, ou $a = \infty$, a equação (1) reduz-se a

$$1 + Y'y' = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Procuremos, por exemplo, a curva que corta rectangularmente uma recta, que gira em torno da origem. Como a equação da recta é $Y = cX$, teremos $Y' = c$, o que reduz (2) a $\quad 1 + cy' = 0.$

Eliminando pois c entre esta e $y = cx$, a equação differencial da trajectoria será

$$xdx + ydy = 0$$

cuja integração dá

$$x^2 + y^2 = A^2.$$

Por onde se vê, que neste caso a trajectoria é um circulo de raio arbitrario e que tem a origem por centro.

Mas, se a trajectoria deve cortar a recta debaixo d'outro angulo dado cuja tangente é a, o mesmo calculo, applicado á equação (1), dá a differencial homogenea

$$y + ax = y'(x - ay),$$

cujo integral é

$$al\left(C\sqrt{x^2 + y^2}\right) = \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{y}{x}\right).$$

Logo a trajectoria é uma spiral logarithmica (*Geom. Anal.*, n.º 137), como facilmente se vê transformando esta equação em coordenadas polares (*Geom. Anal.*, n.º 49).

O mesmo calculo applicado á equação $\quad X^m Y^n = c,$

que pertence ás parabolos e hyperboles de todas as ordens, dá a equação homogenea

$$(nx + amy)\,y' = anx - my.$$

Se a trajectoria deve ser orthogonal, esta equação torna-se em $myy' = nx$, cujo integral é $my^2 - nx^2 = A$. Conseguintemente a curva será então uma hyperbole do segundo gráu, ou uma ellipse, conforme for positivo ou negativo o expoente n.

A trajectoria do circulo, que tem por equação $y^2 = 2cx - x^2$, é $y^2 + x^2 = A\left(y - \frac{x}{a}\right)$; e, se deve ser orthogonal, isto é, se $a = \infty$, torna-se em outro circulo, $y^2 + x^2 = Ay$. Construiremos este circulo tomando para centro um ponto qualquer do eixo dos y, e para raio a distancia d'esse ponto á origem.

369. Quando se tracta de achar uma curva cuja subtangente, ou cuja tangente, deve ser uma funcção dada φ de x e y, é necessario integrar a equação respectiva $y = y'\varphi$, ou $y\sqrt{1 + y'^2} = y'\varphi$. D'onde veio o nome de *methodo inverso das tangentes* ao ramo de calculo que tem por objecto a integração das equações differenciaes de primeira ordem entre x e y.

Exemplos

370. *Achar a curva, na qual, em cada um de seus pontos, ha uma relação dada* $n = Ft$ *entre a grandeza* n *da normal e a da abscissa* t *do pé da mesma normal.*

Por serem $\quad t = x + yy', \; n = y\sqrt{1 + y'^2},$

o problema proposto reduz-se a integrar a equação

$$y\sqrt{1 + y'^2} = F(x + yy').$$

Supponhamos, por exemplo, que $n = Ft$ deve ser a equação $u^2 = 2pt$ d'uma parabola, cujo parametro é $2p$. Substituindo na equação precedente,

vem $$y^2(1 + y'^2) = 2p(x + yy').$$

Para integrar esta equação, resolvamol-a em ordem a yy', e dividamos depois tudo pelo radical; o que dá

$$\frac{p - yy'}{\sqrt{p^2 + 2px - y^2}} + 1 = 0.$$

Como o primeiro termo é evidentemente a derivada do seu denominador, teremos $\sqrt{p^2 + 2px - y^2} = a - x$, ou, quadrando e substituindo c em logar da constante arbitraria $a + p$,

$$y^2 + x^2 - 2cx + c^2 - 2pc = 0.$$

Logo a curva procurada é um circulo, que tem o centro em qualquer ponto do eixo dos x, e cujo raio é a meia proporcional entre $2p$ e a distancia c d'este ponto á origem: o que por outra parte é visivel.

Mas, além d'esta infinidade de circulos que satisfazem ao problema, acha-se tambem, para uma das soluções, a parabola. Com effeito, remontando-nos aos processos dos n.os 323 e 330, acharemos a solução singular $y^2 = 2px + p^2$, que é a equação d'uma parabola; e será facil verificar (como se viu no n.º 326) que esta parabola resulta da intersecção contínua de todos os circulos successivos que se comprehendem na solução geral.

371. *Achar uma curva tal que as perpendiculares abaixadas de dois pontos fixos sobre todas as suas tangentes formem um rectangulo constante* = k.

Tomemos para eixo dos x a linha, que passa pelos dois pontos dados; e fixando a origem n'um d'elles, chamemos $2a$ a sua distancia. A equação de qualquer tangente é

$$Y - y = y'(X - r),$$

e as distancias dos dois pontos a esta linha são (*Geom. Anal.*, n.º 34)

$$\frac{2ay' + y - y'x}{\sqrt{1 + y'^2}},\ \frac{y - y'x}{\sqrt{1 + y'^2}};$$

logo $$(2ay'+y-y'x)(y-y'x)=k(1+y'^2)\ldots\ldots\ldots(a).$$

Para integrar esta equação, differenciemol-a primeiro, o que dá

$$y''(y-y'x)(2a-x)-y''x(2ay'+y-y'x)=2ky'y''.$$

Como y'' é factor commum, teremos $y''=0$, e

$$(y-y'x)(2a-x)-(2ay'+y-y'x)=2ky'\ldots\ldots\ldots(b).$$

A primeira dá $y'=c$, o que muda a proposta em

$$(2ac+y-cx)(y-cx)=k(1+c^2);$$

equação que se decompõe nas de duas rectas: e com effeito é facil verificar que estas satisfazem ao problema. Demais, o numero dos systemas de duas rectas, que se comprehendem na equação, é infinito.

Em quanto á equação (b): se d'ella tirarmos o valor de y', e o substituirmos em (a), mudando x em $x+a$ para transportar a origem ao meio da recta, teremos

$$y^2(a^2+k)+x^2=k(a^2+k);$$

equação d'uma ellipse, cujos fócos são os pontos fixos dados, e cujos semi-eixos são $\sqrt{k+a^2}$ e $\sqrt{k}$. Esta curva é uma solução singular do problema, e resulta da intersecção successiva das rectas comprehendidas no integral completo.

Poderão tambem servir de exercicio nesta especie de problemas as questões seguintes:

Achar uma curva tal que todas as perpendiculares abaixadas d'um ponto dado sobre as suas tangentes sejam eguaes.

Achar uma curva tal que as linhas tiradas de qualquer dos seus pontos para os dois pontos fixos sejam egualmente inclinadas sobre a tangente.

III

INTEGRAÇÃO DAS EQUAÇÕES DIFFERENCIAES QUE CONTÊM TRES VARIAVEIS

Equações differenciaes totaes

372. Equações lineares em ordem ás differenciaes. Como a differencial exacta d'uma equação $z = f(x, y)$ é $dz = pdx + qdy$, as funcções p e q de x e y devem satisfazer á condição de integrabilidade (n.º 315)

$$\frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (1).$$

Quando uma d'estas equações satisfizer á condição (1), integrar-se-ha a differencial exacta $pdx + qdy$ pelo processo exposto no n.º 315, e o resultado será a expressão $f(x, y)$ de z.

373. Se a equação differencial proposta é implicita

$$\mathrm{P}dx + \mathrm{Q}dy + \mathrm{R}dz = 0, \dots\dots\dots\dots\dots\dots (1)',$$

designando P, Q, R funcções de x, y, z, podemos dar-lhe a fórma $dz = pdx + qdy$, pondo

$$p = -\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{R}}, \; q = -\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{R}}.$$

Neste caso terá ainda logar a equação (1) quando a proposta for integravel. Como porém então p e q não só contém os x e y explicitos, mas tambem os implicitos em z, é necessario, para formar os dois membros de (1), differenciar em ordem a cada variavel x ou y explicita, e em ordem a z considerada como funcção d'ella; o que dá, em vez de (1), a seguinte

$$\frac{dp}{dy}+q\frac{dp}{dz}=\frac{dq}{dx}+p\frac{dq}{dz},$$

ou, pondo as expressões de p e q em P, Q, R,

$$P\frac{dR}{dy}-R\frac{dP}{dy}+R\frac{dQ}{dx}-Q\frac{dR}{dx}+Q\frac{dP}{dz}-P\frac{dQ}{dz}=0\ldots\ldots\ldots(2);$$

condição necessaria para que z seja funcção de duas variaveis independentes, ligada com ellas por uma só equação (*).

(*) Tambem se mostra do modo seguinte que a equação (2) é necessaria para ser (1)' integravel:

Se (1)' é integravel, seja μ o factor que torna differencial exacto o seu primeiro membro; isto é, que torna $\mu P\,dx+\mu Q\,dy+\mu R\,dz=du$. Serão:

$$\frac{du}{dx}=\mu P,\ \frac{du}{dy}=\mu Q,\ \frac{du}{dz}=\mu R;$$

e por conseguinte (n.° 36)

$$\frac{d(\mu P)}{dy}=\frac{d(\mu Q)}{dx},\ \frac{d(\mu P)}{dz}=\frac{d(\mu R)}{dx},\ \frac{d(\mu Q)}{dz}=\frac{d(\mu R)}{dy}.$$

Multiplicando estas equações respectivamente por R, Q, P, e sommando, resulta a equação (2); porque a somma dos termos multiplicados por $d\mu$, para formar a qual bastaria que na dos outros se mudassem μ, dP, dQ, dR, respectivamente em $d\mu$, P, Q, R, é nulla.

Quando pois (1)' tem um integral $u=0$, deve verificar-se a condição (2).

374. Para integrar $Pdx + Qdy + Rdz = 0$, consideraremos primeiramente uma das variaveis, por exemplo z, como constante; e integraremos $Pdx + Qdy = 0$: o que dará $F(x, y, z, Z) = 0$; representando Z uma constante arbitraria, ou uma funcção $\varphi(z)$ de z. Depois, differenciando esta equação completamente, e comparando com a proposta, deverá resultar para dZ uma expressão, que $F = 0$ reduzirá a funcção unicamente de Z e z, se a proposta é integravel; e a integração d'ella fará conhecer a expressão Z, que torna $F(x, y, z, Z)$ o integral da mesma proposta.

Com effeito, se differenciassemos o integral $M = 0$ de $(1)'$, suppondo z constante, a integração de $\frac{dM}{dx}dx + \frac{dM}{dy}dy = 0$, feita na mesma hypothese, reproduziria $M = 0$. Ora a differencial deve ser então a mesma que $Pdx + Qdy = 0$; portanto deve o integral $M = 0$ ser identico com $F(x, y, z, Z) = 0$, determinando Z convenientemente.

Seja por exemplo,

$$(y^2 + yz + z^2)dx + (x^2 + xz + z^2)dy + (x^2 + xy + y^2)dz = 0,$$

ou
$$\frac{dx}{x^2 + xz + z^2} + \frac{dy}{y^2 + yz + z^2} + \frac{(x^2 + xy + y^2)\,dz}{(x^2 + xz + z^2)(y^2 + yz + z^2)} = 0.$$

Fazendo dz nullo, o integral é

$$\frac{2}{z\sqrt{3}}\left[\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{z + 2x}{z\sqrt{3}}\right) + \operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{z + 2y}{z\sqrt{3}}\right)\right] = fz,$$

ou, por ser $\quad \operatorname{arc}(\operatorname{tg} = m) + \operatorname{arc}(\operatorname{tg} = n) = \operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{m + n}{1 - mn}\right),$

$$\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{(x + y + z)\,z\sqrt{3}}{z^2 - zx - zy - 2xy}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,.\,zfz = \operatorname{arc}(\operatorname{tg} = Z\sqrt{3}),$$

e portanto $\quad \frac{(x + y + z)\,z}{z^2 - zx - zy - 2xy} = \frac{(x + y + z)\,z}{D} = Z\ldots\ldots(\alpha).$

Differenciando em ordem a z, e egualando ao termo em dz da proposta, vem

$$2(x^2z + 3xyz + y^2z + z^2x + z^2y + x^2y + y^2x)\,dz + D^2dz = 0,$$

ou, pondo por D a sua expressão e supprimindo o factor commum $x + y + z$,

$$2(xy + yz + xz)\,Z^2dz + (x + y + z)\,z^2dZ = 0.$$

Depois, substituindo $xz + yz = \frac{z^2Z - z^2 - 2xyZ}{Z + 1}$, que se tira de ($\alpha$), e dividindo pelo factor commum $2Z(z^2 - xy)$, fica

$$Z(Z - 1)\,dz + zdz = 0,$$

que dá $\qquad z = \frac{cZ}{Z - 1}$, e por conseguinte $Z = \frac{z}{z - c}$.

Finalmente substituindo em (α), temos o integral pedido, a que se pode dar a fórma

$$xy + xz + yz = c(x + y + z).$$

375. Posto isto, seja μ o factor que torna integravel a somma dos dois primeiros termos da equação (1)′, supposto z constante, e u o integral respectivo.

Para completar o integral da proposta, ajunctaremos uma funcção $Z = \varphi z$ de z. E, comparando a differencial de $u + \varphi z$ com a proposta, será

$$\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz + \varphi'(z)\,dz = P\mu dx + Q\mu dy + R\mu dz;$$

ou, por serem os dois primeiros termos do primeiro membro identicos com os dois primeiros do segundo membro, $\qquad \frac{du}{dz} + \varphi'(z) = R\mu.$

Satisfará pois á proposta o systema das duas equações

$$u + \varphi(z) = 0,\ \frac{du}{dz} + \varphi'(z) = R\mu \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

376. 1.º Se, attendendo á primeira equação (3), a segunda dá a expressão de $\varphi(z)$ em z, sem x nem y: substituindo esta expressão na primeira das mesmas equações, virá o integral

$$F(x, y, z) = 0,$$

da proposta, o qual representa superficies distinctas umas das outras pelo parametro c proveniente d'aquella integração.

377. Acontece isto, quando a proposta $(1)'$ satisfaz á condição (2); como vamos mostrar.

Com effeito, se a primeira das equações (3) é o integral de $(1)'$, deve a sua differencial, na hypothese de z constante, coincidir com $P\mu dx + Q\mu dy = 0$; o que dá então $dy = -\frac{P}{Q}dx$. E para que a segunda das mesmas equações dê a expressão de $\varphi(z)$ em z, é necessario e basta que, attendendo á primeira, $R\mu - \frac{du}{dz}$ se reduza a uma funcção de z, isto é, que, na mesma hypothese de z constante, a sua differencial se anniquille; sendo assim

$$\frac{d\left(R\mu - \frac{du}{dz}\right)}{dx}dx + \frac{d\left(R\mu - \frac{du}{dz}\right)}{dy}dy = 0,$$

ou

$$\frac{d\left(R\mu - \frac{du}{dz}\right)}{dx} - \frac{d\left(R\mu - \frac{du}{dz}\right)}{dy} \cdot \frac{P}{Q} = 0,$$

isto é,

$$Q\left(R\frac{d\mu}{dx} + \mu\frac{dR}{dx} - \frac{d^2u}{dxdz}\right) - P\left(R\frac{d\mu}{dy} + \mu\frac{dR}{dy} - \frac{d^2u}{dydz}\right) = 0 \ldots\ldots (a).$$

Mas, por ser u integral de $\mu Pdx + \mu Qdy$, e por conseguinte

$$\frac{du}{dx} = \mu P,\ \frac{du}{dy} = \mu Q,$$

são
$$\frac{d^2u}{dxdz}=P\frac{d\mu}{dz}+\mu\frac{dP}{dz},\ \frac{d^2u}{dydz}=Q\frac{d\mu}{dz}+\mu\frac{dQ}{dz}\ldots\ldots\ldots(b);$$

e a condição respectiva de integrabilidade (n.° 315) dá

$$\frac{d(\mu Q)}{dx}-\frac{d(\mu P)}{dy}=\mu\frac{dQ}{dx}+Q\frac{d\mu}{dx}-\mu\frac{dP}{dy}-P\frac{d\mu}{dy}=0\ldots(c).$$

Deve pois attender-se ás equações (b) e (c); e, porque ellas reduzem (a) a (2), segue-se que é (2) a condição necessaria e sufficiente para que a segunda das equações (3) dê a expressão de $\varphi(z)$ em z, e portanto a condição de integrabilidade da equação (1)′.

378. 2.° Mas, se a proposta (1)′ não satisfizer á condição de integrabilidade, isto é, se $\frac{du}{dz}-\mu R$ não for reduzivel a uma funcção de z, tomaremos φz arbitrariamente; e o systema (3) representará curvas que satisfazem á proposta, distinctas umas das outras pela funcção φz.

379. Portanto o systema de equações (3), que satisfaz á proposta (1)′, representa linhas, que se distinguem umas das outras pela funcção φz; mas, no caso de, em virtude da primeira, se reduzir a segunda a uma differencial entre φz e z, o que tem logar quando (1)′ satisfaz á condição de integrabilidade (2), as linhas estão todas sobre uma superficie, cuja equação resulta de eliminar φz entre a primeira das mesmas (3) e o integral da segunda.

Noutro tempo chamavam-se *absurdas* as equações que não satisfaziam á condição (2) de integrabilidade; estabelecendo-se como principio que taes equações nada significavam, e que um problema susceptivel de solução nunca podia conduzir a esta especie de relações, as quaes se suppunham equivalentes aos imaginarios. Monge, apresentando a theoria precedente, provou que similhante opinião é falsa.

380. Notaremos que as relações que ligam p e q com P, Q, R, (n.º 373),

$$p = -\frac{P}{R},\ q = -\frac{Q}{R},$$

ou $$Rp + P = 0,\ Rq + Q = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (d),$$

são duas equações differenciaes parciaes da primeira ordem.

Assim o problema, que fica resolvido, equivale a achar uma funcção $M = 0$ tal que, tirando d'ella as expressões de p e q, estas satisfaçam a (d), e por conseguinte $(M) = 0$ a $dz = pdx + qdy$. (*Calc.* de Serret, n.º 784).

381. *Exemplos:*

I. Para $$(y+z)\,dx + (x+z)\,dy + (x+y)\,dz = 0,$$

que satisfaz á condição (2), o factor μ é $\dfrac{1}{(y+z)(x+z)}$, e é $R = x + y$.

Temos pois $$u = l\,(y+z)\,(x+z);$$
e as equações (3) são

$$(y+z)(x+z)\,e^{\varphi(z)} = 1,\ \frac{x+y+2z}{(y+z)(x+z)} + \frac{d\varphi(z)}{dz} = \frac{x+y}{(y+z)(x+z)}.$$

A segunda d'estas reduz-se, em virtude da primeira, a

$$2\,z\,e^{\varphi z}\,dz + d\,\varphi(z) = 0;$$

e eliminando $\varphi(z)$ entre o seu integral, $z^2 - e^{-\varphi(z)} + c = 0$ e a primeira, vem o integral procurado

$$xy + xz + yz = c.$$

II. Para $$zdx + xdy + ydz = 0,$$

que não satisfaz á condição (2), são

$$\mu = x^{-1},\ \mathrm{R} = y,$$

o que dá $$u = y + zlx.$$

Por conseguinte o systema de equações, que satisfaz á proposta, é

$$y + zlx + \varphi(z) = 0,\quad lx + \varphi'(z) = yx^{-1}.$$

III. Para $$[x(x-a) + y(y-b)]\,dz = (z-c)[xdx + ydy],$$

que sómente satisfaz á condição (2) no caso de serem a e b nullos, é $\mathrm{R} = x(x-a) + y(y-b)$; e, se fizermos $\mu = \dfrac{1}{z-c}$, acharemos

$$u = \frac{1}{2}(x^2 + y^2).$$

Por conseguinte o systema das equações (3) será

$$x^2 + y^2 + 2\varphi(z) = 0,\quad \frac{x(x-a) + y(y-b)}{z-c} + \varphi'(z) = 0.$$

No caso de serem a e b nullos, a segunda d'estas equações, attendendo á primeira, dá $\varphi(z) = \mathrm{A}(z-c)^2$; e substituindo na primeira, obtem-se o integral da proposta

$$x^2 + y^2 + 2\mathrm{A}(z-c)^2 = 0.$$

382. Equações não lineares em ordem ás differenciaes. Qualquer que seja o integral nestas equações, é claro que, differenciando, ha de o resultado poder reduzir-se á fórma $Pdx + Qdy + Rdz$; conseguintemente a proposta deve tambem ser reductivel a ella. Por onde se vê que, se resolvermos a proposta em ordem a dz, os dx e dy não deverão ficar affectos de radical, e que ella não será integravel quando não podér decompor-se em factores lineares.

Assim a equação

$$Adx^2 + Bdy^2 + Cdz^2 + Ddxdy + Edxdz + Fdydz = 0,$$

resolvida em ordem a dz, dá o radical

$$\sqrt{(E^2 - 4AC)\,dx^2 + 2\,(EF - 2DC)\,dxdy + (F^2 - 4BC)\,dy^2},$$

que a condição

$$(EF - 2DC)^2 - (E^2 - 4AC)\,(F^2 - 4BC) = 0 \ldots\ldots (4).$$

reduzirá a $\quad dx\sqrt{E^2 - 4AC} + dy\sqrt{F^2 - 4BC}.$

Portanto, se a equação (4) for satisfeita, teremos de integrar duas equações da forma

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0,$$

das quaes a proposta é o producto.

Equações differenciaes parciaes da primeira ordem

383. Temos tractado de reverter d'uma equação $dz = pdx + qdy$, na qual p e q são os coefficientes differenciaes dados de z em ordem a x e y, ao seu integral $z = f(x, y)$. Agóra vamos procurar o integral $z = f(x, y)$, quando é conhecido sómente um dos coefficientes p, q, ou uma relação entre elles.

384. Comecemos pelo caso em que não entra q na relação proposta, isto é, em que essa relação tem a fórma

$$F(x, y, z, p) = 0.$$

Por serem independentes as variaveis x, y, e não entrar q na proposta, esta equação suppõem que sómente x e z variaram, isto é, que, para passar do integral $z = f(x, y)$ á proposta, o deveriamos differenciar parcialmente em ordem a x.

Basta pois, quando se quer achar o integral, fazer na proposta $p = \frac{dz}{dx}$, e integrar a equação em x e z, suppondo y constante. Então a constante, que se ajuncta ao integral, deve ser uma *funcção arbitraria* de y, que representaremos por φy.

Assim: *para integrar* $F(x, y, z, p) = 0$, *devemos eliminar* p *por meio de* $dz = pdx$; *integrar, suppondo* y *constante; e ajunctar ao integral a funcção arbitraria* φy.

Por um processo similhante se integrará $F(x, y, z, q) = 0$; e teremos a mesma regra, mudando respectivamente nella x, y, p em y, x, q.

Exemplos

I. A equação $$x = p\sqrt{x^2 + y^2}$$

dá
$$\frac{xdx}{\sqrt{x^2+y^2}}=dz,\ z=\sqrt{x^2+y^2}+\varphi y.$$

II. A equação
$$p\sqrt{a^2-y^2-x^2}=a$$

dá
$$dz=\frac{adx}{\sqrt{a^2-y^2-x^2}},\ z=a\,\mathrm{arc}\left(\mathrm{sen}=\frac{x}{\sqrt{a^2-y^2}}\right)+\varphi y.$$

III.
$$qxy+az=0$$

dá
$$\frac{xdz}{z}+\frac{ady}{y}=0,\ z^x y^a=\varphi x.$$

IV. Em fim a equação
$$p(x^2+y^2)=y^2+z^2$$

dá a homogenea
$$(x^2+y^2)\,dz-(y^2+z^2)\,dx=0,$$
e depois

$$\mathrm{arc}\left(\mathrm{tang}=\frac{z}{y}\right)-\mathrm{arc}\left(\mathrm{tang}=\frac{x}{y}\right)=\mathrm{arc}\,(\mathrm{tang}=\mathrm{Y}),$$

ou
$$\frac{y(z-x)}{y^2+zx}=\mathrm{Y}.$$

385. Em geral o integral $f(x,\ y,\ z,\ \varphi\varrho)=0$ d'uma equação differencial parcial da primeira ordem entre tres variaveis deve conter uma só funcção arbitraria. Com effeito, derivando este integral em ordem ás duas variaveis independentes, as duas equações resultantes

$$\frac{df}{dx}+p\frac{df}{dz}+\frac{df}{d(\varphi\rho)}\varphi'\rho\left(\frac{d\rho}{dx}+p\frac{d\rho}{dz}\right)=0,$$

$$\frac{df}{dy}+q\frac{df}{dz}+\frac{df}{d(\varphi\rho)}\varphi'\rho\left(\frac{d\rho}{dy}+q\frac{d\rho}{dz}\right)=0,$$

e

$$f(x,y,z,\varphi\rho)=0,$$

formarão um systema de tres equações, entre as quaes eliminando $\varphi\rho$ e $\varphi'\rho$ resultará a equação differencial parcial sem funcção arbitraria.

386. Para interpretar geometricamente a introducção da funcção arbitraria, lembremo-nos de que o plano tangente em qualquer ponto d'uma superficie fica determinado quando se conhecem as tangentes nesse ponto a duas curvas, que por elle passam, traçadas na superficie. Assim, tirando por um ponto da superficie dois planos respectivamente parallelos aos dos xz e dos yz, as tangentes nelle ás curvas de intersecção, que serão dadas pelos coefficientes differenciaes $\frac{dz}{dx}=p$ e $\frac{dz}{dy}=q$, determinarão o plano tangente á superficie no mesmo ponto.

Posto isto, como a equação $\quad F(x, y, z, p, q)=0$

deixa arbitrario um dos coefficientes p, q: se, traçando um plano parallelo aos xz, e descrevendo nelle uma curva arbitraria, tirarmos depois o valor de p da equação d'essa curva, e o substituirmos na proposta, esta dará q; por conseguinte os valores de p e q assim obtidos em toda a extensão da curva determinarão os respectivos planos tangentes, isto é, o cylindro circumscripto á superficie ao longo d'essa curva. Depois, se cortarmos este cylindro por um plano parallelo aos xz, e tão proximo do precedente que a superficie do cylindro, comprehendida entre ambos, se possa considerar como elemento da superficie curva, poderemos fazer, a partir da nova curva, uma construcção similhante, com a qual obteremos outra porção de superficie; e assim por diante.

Por onde se vê que, traçando arbitrariamente a curva inicial, podemos construir a superficie curva que representa a equação proposta. Conseguintemente a equação finita d'esta superficie $f(x, y, z, \varphi)=0$ deve conter a funcção arbitraria φ correspondente á mesma curva inicial. (*Calc.* de Navier, n.º 470).

387. Equações lineares. Passemos á equação linear da primeira ordem

$$Pp + Qq = V \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (1),$$

sendo P, Q, V, funcções de x, y, z.

Eliminando p por meio da equação de definição $dz = pdx + qdy$, resulta

$$Pdz - Vdx = q\,(Pdy - Qdx) \dots\dots\dots\dots\dots (2):$$

equação, á qual se deve satisfazer da maneira mais geral, independentemente do valor de q; porque, segundo a equação proposta, este coefficiente fica indeterminado.

388. Quando as variaveis x, y, z estão separadas nos dois membros, entrando só duas em cada um d'elles, podem ambos, prescindindo de q, tornar-se integraveis multiplicando-os por factores convenientes.

Sejam π e ρ os integraes de $\mu'\,(Pdz - Vdx)$ e $\mu\,(Pdy - Qdx)$, isto é, sejam $\mu'\,(Pdz - Vdx) = d\pi$, $\mu\,(Pdy - Qdx) = d\rho$.

A equação (2) será $\mu\, d\pi = q\,\mu'\, d\rho$.

E, como q é arbitrario, podemos tomal-o tal que $\dfrac{\mu' q}{\mu}$ seja uma funcção qualquer $\varphi'\rho$ de ρ; de sorte que o integral d'esta equação será o pedido

$$\pi = \varphi\rho;$$

representando φ uma funcção arbitraria.

389. Supponhamos porém que x, y, z estão misturados em $Pdz - Vdx$ e $Pdy - Qdx$. Se for possivel substituir o systema das equações $Pdz - Vdx = 0$, $Pdy - Qdx = 0$, pelo d'outras da fórma $d\pi = 0$, $d\rho = 0$, resultantes da sua combinação, esta combinação exprimir-se-ha do modo mais geral, como é sabido, multiplicando por factores convenientes, e sommando.

Sejam pois A, B, A', B', factores convenientes, que tornem

$$A\,(Pdz - Vdx) + B\,(Pdy - Qdx) = d\pi,$$
$$A'\,(Pdz - Vdx) + B'(Pdy - Qdx) = d\rho.$$

Teremos $Pdz - Vdx = \frac{B'd\pi - Bd\rho}{AB' - A'B}$, $Pdy - Qdx = \frac{Ad\rho - A'd\pi}{AB' - A'B}$,

que, substituindo em (2), dão $\quad B'd\pi - Bd\rho = q(Ad\rho - A'd\pi)$,

ou
$$d\pi = \frac{Aq + B}{A'q + B'}d\rho.$$

Assim, tomando q tal que seja $\frac{Aq + B}{A'q + B'}$ uma funcção qualquer $\varphi'\rho$ de ρ, será $\pi = \varphi\rho$ o integral da proposta.

Por exemplo, na equação

$$p - q\left(\frac{1}{2} + x - \sqrt{x^2 + y + z}\right) = \frac{1}{2} - x + \sqrt{x^2 + y + z},$$

são:

$$P = 1,\ Q = -\left(\frac{1}{2} + x - \sqrt{x^2 + y + z}\right),\ V = \frac{1}{2} - x + \sqrt{x^2 + y + z};$$

e portanto

$$Pdz - Vdx = dz - dx\left(\frac{1}{2} - x + \sqrt{x^2 + y + z}\right),$$

$$Pdy - Qdx = dy + dx\left(\frac{1}{2} + x - \sqrt{x^2 + y + z}\right).$$

Multiplicando por A e B, A′ e B′, sommando, e pondo $x^2 + y + z = u^2$, o que dá $dz = 2udu - 2xdx - dy$, teremos

$$A'\left[dz - dx\left(\frac{1}{2} - x + u\right)\right] + B'\left[dy + dx\left(\frac{1}{2} + x - u\right)\right] = d\rho,$$

$$A\left[2udu - 2xdx - dy - dx\left(\frac{1}{2} - x + u\right)\right] + B\left[dy + dx\left(\frac{1}{2} + x - u\right)\right] = d\pi,$$

que, tomando $A' = -B' = 1$, $A = B = \frac{1}{2u}$, se reduzem a

$$dz - dx - dy = d\rho,\ du - dx = d\pi.$$

Portanto o integral $\pi = \varphi\rho$ é

$$u - x = \sqrt{x^2 + y + z} - x = \varphi(z - y - x).$$

390. Se eliminassemos q de (1), o que daria $Vdy - Qdz = p(Pdy - Qdx)$, operariamos semelhantemente a respeito de $Vdy - Qdz$ e $Pdy - Qdx$.

391. Em qualquer d'estes casos é claro que os integraes $\pi = \alpha$, $\rho = \beta$, do systema das equações

$$Pdz - Vdx = 0,\ Pdy - Qdx = 0,\ Qdz - Vdy = 0, \ldots\ldots (3),$$

cada uma das quaes resulta das outras duas, são integraes particulares da proposta, porque $\rho = \text{const.}$ dá $\pi = \varphi\rho = \text{const.}$

Logo: *para integrar a equação linear ás differenciaes parciaes da primeira ordem* (1), *basta achar funcções $\pi = \alpha$, $\rho = \beta$, que satisfaçam ás equações* (3), *e pôr depois $\pi = \varphi(\rho)$, sendo $\varphi(\rho)$ uma funcção arbitraria de ρ.*

392. Para mostrar que $\pi = \varphi(\rho)$ é integral de (1), podemos tambem proceder do modo seguinte.

Para que o integral $\pi = \varphi(\rho)$ satisfaça a (1), é necessario que, differenciando-o debaixo da fórma $dz = pdx + qdy$, os valores de p e q assim achados reduzam (1) a uma identidade. É o que vamos verificar.

Sendo as differenciaes de $\pi = \alpha$, $\rho = \beta$,

$$d\pi = Adx + Bdy + Cdz,\ d\rho = adx + bdy + cdz,$$

as de $\pi - \varphi(\rho) = 0$, serão:

em ordem a z e x $\qquad (C - c\varphi'\rho)p + A - a\varphi'\rho = 0,$

em ordem a z e y $\qquad (C - c\varphi'\rho)\, q + B - b\varphi'\rho = 0.$

Tirando d'estas equações as expressões de p e q para as substituir em (1), resulta a transformada

$$AP + BQ + CV = (aP + bQ + cV)\, \varphi'\rho.$$

Mas, substituindo nas expressões de $d\pi = 0$, $d\rho = 0$, os valores de duas das differenciaes dx, dy, dz, tirados das equações (3), ás quaes satisfazem $\pi = \alpha$, $\rho = \beta$, resultam

$$AP + BQ + CV = 0,\ aP + bQ + cV = 0,$$

que reduzem a uma identidade a mesma transformada: logo é $\pi = \varphi\rho$ o integral pedido.

493. Raciocinando d'um modo analogo, podemos integrar uma equação differencial parcial linear da primeira ordem entre qualquer numero de variaveis.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Seja} & P_1 \dfrac{dz}{dx_1} + P_2 \dfrac{dz}{dx_2} \ldots\ldots + P_n \dfrac{dz}{dx_n} = V, \\[2ex] \text{ou} & \sum_1^n P_k \dfrac{dz}{dx_k} = V \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots [1]$$

a equação linear de primeira ordem entre n variaveis independentes; na qual $x_1, x_2, \ldots . x_n$ designam estas variaveis, e $P_1, P_2, \ldots . P_n$, os coefficientes, que podem ser funcções d'ellas e de z.

Formando n equações da fórma

$$\left.\begin{array}{r} P_k dx_l - P_l\, dx_k = 0 \\ P_k\, dz - V dx_k = 0 \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [2],$$

..

e procurando n equações finitas

$$A^{(1)}=c^{(1)},\ A^{(2)}=c^{(2)} \ldots A^{(n)}=c^{(n)} \ldots\ldots\ldots [3]$$

que satisfaçam a [2], o integral da proposta [1] será

$$A^{(1)}=\varphi(A^{(2)},\ A^{(3)}, \ldots A^{(n)}) \ldots\ldots\ldots\ldots [4],$$

designando φ uma funcção arbitraria. É o que passamos a mostrar, raciocinando de um modo analogo ao do numero precedente.

Se differenciarmos a equação [4] separadamente em ordem ás n variaveis independentes $x_1, x_2, \ldots x_n$, teremos n equações, nas quaes entram os $n-1$ coefficientes differenciaes $\frac{d\varphi}{dA^{(2)}}, \frac{d\varphi}{dA^{(3)}}, \ldots \frac{d\varphi}{dA^{(n)}}$; e eliminando entre ellas estes coefficientes, resultará uma equação de primeira ordem, sem funcção arbitraria, que se deve comparar com a proposta para determinar a fórma das funcções $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots A^{(n)}$, de modo que estas duas equações sejam identicas, isto é, de modo que a equação [4] seja integral da proposta.

Sejam

$$\left.\begin{array}{l} dA^{(1)}=a_1^{(1)}dx_1+a_2^{(1)}dx_2+\ldots a_n^{(1)}dx_n+a^{(1)}dz \\ dA^{(2)}=a_1^{(2)}dx_1+a_2^{(2)}dx_2+\ldots a_n^{(2)}dx_n+a^{(2)}dz \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ dA^{(n)}=a_1^{(n)}dx_1+a_2^{(n)}dx_2+\ldots a_n^{(n)}dx_n+a^{(n)}dz \end{array}\right\} \ldots\ldots [5].$$

Differenciando [4] em ordem a x_1, resulta

$$\frac{dA^{(1)}}{dx_1}-S_{(2)}^{(n)}\frac{d\varphi}{dA^{(i)}}\cdot\frac{dA^{(i)}}{dx_1}=0 \ldots\ldots\ldots\ldots [6];$$

onde escrevemos S para designar sommas relativas ás funcções $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots A^{(n)}$, do mesmo modo que Σ designa sommas relativas ás variaveis $x_1, x_2, \ldots x_n$.

Em virtude das equações [5], que dão

$$\left.\begin{aligned} \frac{dA^{(1)}}{dx_1} &= a_1^{(1)} + a^{(1)}\frac{dz}{dx_1} \\ \frac{dA^{(2)}}{dx_1} &= a_1^{(2)} + a^{(2)}\frac{dz}{dx_1} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dA^{(n)}}{dx_1} &= a_1^{(n)} + a^{(n)}\frac{dz}{dx_1} \end{aligned}\right|,$$

reduz-se [6] a $a_1^{(1)} - S_{(2)}^{(n)}\frac{d\varphi}{dA^{(i)}} \cdot a_1 + \frac{dz}{dx_1}\left\{a^{(1)} - S_{(2)}^{(n)}\frac{d\varphi}{dA^{(i)}} \cdot a^{(i)}\right\} = 0;$

da qual se tira $$\frac{dz}{dx_1} = -\frac{a_1^{(1)} - S_{(2)}^{(n)}\frac{d\varphi}{dA^{(i)}} \cdot a_1^{(i)}}{a^{(1)} - S_{(2)}^{(n)}\frac{d\varphi}{dA^{(i)}} \cdot a^{(i)}},$$

e similhantemente $$\frac{dz}{dx_2} = -\frac{a_2^{(1)} - S_{(2)}^{(n)}\frac{d\varphi}{dA^{(i)}} \cdot a_2^{(i)}}{a^{(1)} - S_{(2)}^{(n)}\frac{d\varphi}{dA^{(i)}} \cdot a^{(i)}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{dz}{dx_n} = -\frac{a_n^{(1)} - S_{(2)}^{(n)}\frac{d\varphi}{dA^{(i)}} \cdot a_n^{(i)}}{a^{(1)} - S_{(2)}^{(n)}\frac{d\varphi}{dA^{(i)}} \cdot a^{(i)}}.$$

Substituindo estas expressões de $\frac{dz}{dx_1}$, $\frac{dz}{dx_2}$,... $\frac{dz}{dx_n}$ na proposta [1], e attendendo a que, em virtude da independencia dos symbolos Σ e S, é $\Sigma S = S\Sigma$, resulta

$$\Sigma_1^n a_k^{(1)} P_k + a^{(1)} V = S_{(2)}^{(n)} \left\{ \frac{d\varphi}{dA^{(i)}} (\Sigma_1^n a_k^{(i)} P_k + a^{(i)} V) \right\} \ldots\ldots [7];$$

equação que se deve reduzir a uma identidade, para que [4] satisfaça sempre á proposta [1].

Ora, se as funcções $A^{(1)}$, $A^{(2)}$,... $A^{(n)}$, forem taes que as equações [3] satisfaçam a [2], a substituição de $dx_k = P_k \frac{dz}{V}$, tirado da segunda de [2], em $dA^{(1)} = 0$, $dA^{(2)} = 0$,... $dA^{(n)} = 0$, dará, supprimindo o factor commum $\frac{dz}{V}$, as equações

$$\Sigma_1^n P_k a_k^{(1)} + a^{(1)} V = 0,\ \Sigma_1^n P_k a_k^{(2)} + a^{(2)} V = 0, \ldots \Sigma_1^n P_k a_k^{(n)} + a^{(n)} V = 0,$$

que reduzem [7] a uma identidade. Logo, se $A^{(1)}$, $A^{(2)}$,... $A^{(n)}$, se determinarem de modo que as equações [3] satisfaçam a [2], será [4] o integral da proposta (1).

Na pratica a formação das equações [2] pode facilitar-se: escrevendo as duas linhas, uma de differenciaes, outra de coefficientes,

$$\begin{array}{ccccc} dx_1 & dx_2 & dx_3 \ldots\ldots dx_n & dz \\ P_1 & P_2 & P_3 \ldots\ldots P_n & V; \end{array}$$

multiplicando em cruz as quatro quantidades de cada par de columnas, combinadas estas duas a duas; e egualando a zero a differença dos dois productos respectivos.

Exemplo

Seja a equação $$0 = x\frac{du'}{dx'} + y\frac{du'}{dy'} + z\frac{du'}{dz'},$$

onde x, y, z, x', y', z', designam as seis variaveis independentes, e u' a dependente.

Escrevendo, como fica dito, as duas linhas,

$$\begin{array}{ccccccc} dx & dy & dz & dx' & dy' & dz' & du' \\ 0 & 0 & 0 & x & y & z & 0, \end{array}$$

e multiplicando em cruz, formaremos as equações da fórma [2], que todas se reduzirão ás sete

$$du' = 0,\ dx = 0,\ dy = 0,\ dz = 0,$$

$$xdy' - ydx' = 0,\ xdz' - zdx' = 0,\ ydz' - zdy' = 0.$$

Escolhendo as seis primeiras d'estas, que dão

$$u' = c,\ x = c_1,\ y = c_2,\ z = c_3,\ c_1y' - c_2x' = c_4,\ c_1z' - c_3x' = c_5,$$

o integral da proposta será

$$u' = \varphi\,(xy' - yx',\ xz' - zx',\ x,\ y,\ z).$$

Se com a primeira nos tivessemos servido de outras cinco, nas quaes entrasse uma differente d'aquellas de que acabamos de servir-nos, o integral, posto que parecesse differente, não o seria na realidade; porque ha uma relação entre as seis funcções $x, y, z, xy'-yx', xz'-zx', yz'-zy'$, que reduz a cinco o numero das distinctas.

Com effeito, sejam $xy'-yx'=a,\ xz'-zx'=b$.

Eliminando x', vem $zy'-yz'=\dfrac{az}{x}-\dfrac{by}{x}$.

Portanto, dando ao integral (*Mec. Cel.*, liv. 2.° n.° 18) a fórma

$$u'=\varphi(zy'-yz',\ xy'-yx',\ xz'-zx',\ x,\ z,\ y),$$

deve entender-se que esta fórma só é mais geral apparentemente, e que debaixo de φ não ha senão cinco combinações distinctas.

A mesma observação deve fazer-se em outros casos, em que apparentemente figura como menos geral o integral que resulta do processo exposto. Se apparece debaixo da funcção arbitraria maior numero de funcções que o das variaveis independentes menos uma, é por ser alguma d'essas quantidades funcção das outras. Nem outra cousa podia acontecer; porque, se taes combinações fossem distinctas, as equações resultantes da differenciação do integral em ordem a todas as variaveis independentes não dariam, como devem dar, pela eliminação dos coefficientes differenciaes, uma equação final independente d'estes coefficientes.

394. Vejamos agora o que acontece em diversos casos.

1.° Se V é nullo, uma das equações (3) torna-se em $dz=0$, e dá $z=\alpha=\pi$; o que substituido na outra, a reduzirá a uma equação entre as duas variaveis x e y, cujo integral $\rho=\beta$ se achará pelos methodos acima expostos. Assim $z=\varphi\rho$ será o integral da proposta.

Exemplos

I. $$\frac{dx}{d\alpha}=z\,\frac{dx}{dt},\ \text{sendo}\ z=fx\ (\textit{Mec. Cel.}, \text{n.° } 21).$$

As duas primeiras equações (3) dão $dx=0$, $dt+zd\alpha=0$: o integral da primeira é $x=c$; e o da segunda, depois de feita a substituição de $x=c$, é $t+\alpha fc=c'$;

logo
$$x=c,\ t+\alpha z=c',$$

e o integral da proposta é $\quad x=\varphi(t+\alpha z)$.

II. Em
$$py=qx,$$

temos
$$\mathrm{P}=y,\ \mathrm{Q}=-x,\ \mathrm{V}=0;$$

o que reduz as duas primeiras equações (3) a
$$dz=0,\ ydy+xdx=0;$$

logo
$$\pi=\alpha=z,\ \rho=\beta=x^2+y^2,$$

e o integral é
$$z=\varphi(x^2+y^2),$$

equação finita das superficies de revolução em volta do eixo dos z (*Geom. Anal.*, n.º 169, e *Calc. Diff.* n.º 150, IV).

III. Em
$$px+qy=0,$$

temos
$$xdy-ydx=0,$$

que dá
$$ly=lax,\ y=\alpha x,\ \frac{y}{x}=\alpha=\rho;$$

logo
$$z=\varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

que é a equação dos conoides (n.º 150, III).

IV. Do mesmo modo $q = p\mathrm{P}$,
onde P não contém z, dá

$$\rho = \int \mathrm{F}(dx + \mathrm{P}dy),\ z = \varphi\rho,$$

designando por F o factor, que torna integravel $dx + \mathrm{P}dy$.

2.° Quando duas das equações (3) não contêm senão duas variaveis e suas differenciaes, a integração dá facilmente π e ρ.

I. Seja, por exemplo, $px + qy = nz$.

As equações (3) dão $xdz = nzdx,\ xdy = ydx$,

das quaes resulta $z = \alpha x^n,\ y = \beta x$.

Tirando d'estas os valores de α e β, e substituindo em $\alpha = \varphi(\beta)$, será

portanto o integral $z = x^n \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

Vê-se que φ é uma funcção arbitraria homogenea; e como a proposta é o enunciado do theorema das funcções homogeneaes (n.° **317**, 5.°), aqui temos outra demonstração d'este theorema para o caso de duas variaveis.

II. Para $px^2 + qy^2 = z^2$,

temos $x^2dz = z^2dx,\ x^2dy = y^2dx$;

logo $z^{-1} - x^{-1} = \pi,\ y^{-1} - x^{-1} = \rho$;

e o integral é $\frac{1}{z} - \frac{1}{x} = \varphi\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)$,

ou $\frac{x-z}{xz} = \varphi\left(\frac{x-y}{xy}\right)$.

III. Para $$q = pX + V,$$

onde X e V designam funcções de x, temos

$$Xdz + Vdx = 0,\ Xdy + dx = 0;$$

logo $$z = -\int \frac{Vdx}{X} + \varphi\left(y + \int \frac{dx}{X}\right).$$

3.° Quando uma das equações (3) contém só duas variaveis, a sua integração dará $\pi = \alpha$: eliminando depois por meio d'este integral uma das variaveis de qualquer das outras duas equações (3), e integrando, teremos $\rho = \beta$: finalmente repondo π em logar de α na expressão ρ, será o integral $\pi = \varphi\rho$, ou $\rho = \varphi_1\pi$.

I. Seja, por exemplo, $$qxy - px^2 = y^2.$$

Teremos $$x^2dz + y^2dx = 0,\ x^2dy + xydx = 0.$$

A segunda dá $$xy = \beta = \rho;$$

e substituindo $y = \frac{\beta}{x}$ na primeira, virá $$dz + \frac{\beta^2 dx}{x^4} = 0,$$

que dá $$z = \frac{1}{3}\,\frac{\beta^2}{x^3} + \alpha;$$

depois, pondo xy em logar de β, $$z - \frac{1}{3}\,\frac{y^2}{x} = \alpha = \pi;$$

sendo portanto o integral pedido

$$3zx = y^2 + 3x\varphi(xy).$$

II. Para $$px + qy = n\sqrt{x^2 + y^2},$$

temos $$xdz = ndx\sqrt{x^2 + y^2},\ xdy = ydx.$$

A segunda dá $y = \beta x$; e eliminando y da primeira, fica

$$dz = n\sqrt{1 + \beta^2}\,.\,dx,$$

que dá $$z - nx\sqrt{1 + \beta^2} = \alpha;$$

logo $$\frac{y}{x} = \beta = \rho,\ z - nx\sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = \alpha = \pi,$$

e $$z = n\sqrt{y^2 + x^2} + \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

395. Mas, quando x, y e z entram ao mesmo tempo em todas as equações (3), não é possivel integrar cada uma d'estas equações em particular; porque y não se pode suppôr constante na primeira, nem z na segunda, etc.

Neste caso é forçoso recorrer a artificios particulares de analyse. Assim nas equações seguintes (que resultam da integração por partes, applicada a $dz = pdx + qdy$),

$$z = px + \int(qdy - xdp)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4),$$

$$z = py + \int(pdx - ydq)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5),$$

$$z = px + qy - \int(xdp + ydq)\ldots\ldots\ldots\ldots(6),$$

substituindo, em logar de p ou q, o seu valor tirado da proposta, muitas vezes se consegue integral-a.

Seja, por exemplo, p uma funcção dada de q,

$$p = Q.$$

A relação (6) dá $z = Qx + qy - \int x (Q' + y)\, dq$:

logo o factor de dq não deve conter x, nem y; e teremos

$$xQ' + y = \varphi' q,\ z = Qx + qy - \varphi q,$$

sendo φ uma funcção arbitraria. Eliminando depois q entre estas duas equações, para cada fórma da funcção φ, resultará o integral pedido.

396. Quando a equação $Pp + Qq = V$ for homogenea em x, y e z, faremos $x = tz$, $y = uz$: P, Q, V mudar-se-hão em $P_1 z^n$, $Q_1 z^n$, $V_1 z^n$; e as equações (3) darão

$$(P_1 - tV_1)\, dz = zV_1 dt,\ (Q_1 - uV_1)\, dz = zV_1 du,$$

ou, eliminando dz,

$$(P_1 - tV_1)\, du = (Q_1 - uV_1)\, dt.$$

Como esta ultima equação contém sómente as variaveis t e u, podemos achar o seu integral, e servir-nos d'elle para eliminar t ou u d'uma das duas precedentes, que então se saberá tambem integrar: em fim, eliminando u e t dos dois integraes assim achados por meio de $x = tz$ e $y = uz$, acharemos as soluções π e ρ das equações (3), e por conseguinte o integral $\pi = \varphi\rho$.

Seja, por exemplo, a equação $pxz + qyz = x^2$.

Teremos $(1 - t^2)\, dz = ztdt,\ u(1 - t^2)\, dz = zt^2 du;$

logo $udt = tdu,\ t = \alpha u,\ z\sqrt{1 - t^2} = \beta,$

ou, eliminando t e u por meio de $x = tz$ e $y = uz$,

$$x = \alpha y,\ \sqrt{z^2 - x^2} = \beta,$$

e

$$z^2 = x^2 + \varphi\left(\frac{x}{y}\right).$$

397. Equações não lineares. A integração das equações differenciaes parciaes não lineares da primeira ordem pode reduzir-se á d'aquellas, de que acabamos de tractar, pelo processo seguinte:

Seja $$F(x, y, z, p, q) = 0,$$

uma equação não linear da primeira ordem.

Resolvendo-a em relação a um dos coefficientes differenciaes, por exemplo a q, virá

$$q = f(x, y, z, p) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Por serem p e q funcções de x, y, z, e z funcção de x, y, é

$$\frac{dp}{dx} = \left(\frac{dp}{dx}\right) + \left(\frac{dp}{dz}\right)p,\ \frac{dq}{dx} = \frac{dp}{dy} = \left(\frac{dp}{dy}\right) + \left(\frac{dp}{dz}\right)q;$$

d'onde resulta, differenciando (1) em ordem a x,

$$\left(\frac{dp}{dy}\right) + \left(\frac{dp}{dz}\right)q = \left(\frac{df}{dx}\right) + \left(\frac{df}{dz}\right)p + \left(\frac{df}{dp}\right)\left[\left(\frac{dp}{dx}\right) + \left(\frac{dp}{dz}\right)p\right],$$

ou

$$\left(\frac{df}{dp}\right)\left(\frac{dp}{dx}\right) - \left(\frac{dp}{dy}\right) + \left[p\left(\frac{df}{dp}\right) - q\right]\left(\frac{dp}{dz}\right) = -\left(\frac{df}{dx}\right) - p\left(\frac{df}{dz}\right) \ldots (2).$$

Esta ultima equação ficará linear da primeira ordem, quando nella se substituir a expressão (1) de q, e se considerar p como funcção das variaveis principaes x, y, z; e o seu integral será, como fica ensinado,

$$A = \varphi(B, C) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

398. Como porém as variaveis x, y, z, estão ligadas pela relação

$$dz = pdx + qdy \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4),$$

á qual deverão satisfazer para que z seja funcção de x e y, será necessario sujeitar (3) a esta equação de condição, de modo que a torne integravel.

Por serem A, B, C, funcções de x, y, z, p, poderão exprimir-se por meio d'ellas tres d'estas ultimas variaveis em funcção da quarta e de A, B, C. Exprimindo pois assim x, y, z, e substituindo em (4), resultará

$$\mathrm{G}d\mathrm{A}+\mathrm{H}d\mathrm{B}+\mathrm{K}d\mathrm{C}+\mathrm{L}dp=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (5).$$

Mas, porque no integral da proposta não pode encontrar-se senão uma funcção distincta debaixo da funcção arbitraria (n.º 385), na equação (5) simplificada devem entrar sómente A, B, C (*), isto é, deve (5) reduzir-se a

$$\mathrm{G}d\mathrm{A}+\mathrm{H}d\mathrm{B}+\mathrm{K}d\mathrm{C}=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (5)'.$$

399. Para integrar esta equação pelo processo do n.º 375, consideremos A como constante; e chamando μ o factor que torna $\mu\mathrm{H}d\mathrm{B}+\mu\mathrm{K}d\mathrm{C}$ integravel, seja M o seu integral. Satisfará a (5) o systema das equações

$$\mathrm{M}+\varphi\mathrm{A}=0,\ \frac{d\mathrm{M}}{d\mathrm{A}}+\varphi'(\mathrm{A})=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (6).$$

Exemplos

I. Seja $\quad p^2+q-y=0$, ou $q=y-p^2$.

Formando a equação (2), e integrando, acham-se:

$$\mathrm{A}=p,\ \mathrm{B}=-2py+x,\ \mathrm{C}=-2pz+p^2x+xy-\frac{x^2}{4p}.$$

(*) Para a demonstração directa d'esta proposição podem consultar-se o *Calc. Int.* de Cournot, n.º 533, e os *Estudos sobre o n.º 231 do Calculo Integral* de Francoeur, pag. 12, 13 e 14, do sr. Luiz da Costa e Almeida.

Exprimindo p, x, z em funcção de A, B, C, y, e substituindo em (4), acha-se a correspondente $(5)'$ entre A, B, C, como tinhamos dicto,

$$(2AC + 2A^3B + B^2)\,dA - (2A^4 + AB)\,dB - 2A^2dC = 0;$$

depois, dividindo por $4A^3$, e integrando na hypothese de A constante, vem

$$M = -\frac{1}{2}AB - \frac{B^2}{8A^2} - \frac{C}{2A} - \varphi(A) = z + A(Ay - x) - \frac{1}{2}y^2 - \varphi A = 0.$$

Por conseguinte o systema das equações (6) é

$$z + A\,(Ay - x) - \frac{1}{2}y^2 - \varphi A = 0,\ 2Ay - x - \varphi' A = 0,$$

que, para cada fórma de φ, dará o integral pedido, eliminando A entre ellas.

II. Seja $$z - pq = 0.$$

Formando a equação (2), e integrando, acham-se:

$$A = y - p,\ C = \frac{z}{p^2},\ B = x - \frac{z}{p}.$$

Exprimindo x, y, z em funcção de A, B, C, p, e substituindo em (4), vem $$AB + CdA = 0,$$

cujo integral, na hypothese de A constante, é

$$M = B - \varphi A = x - \frac{z}{y - A} - \varphi A.$$

O systema pedido (6) é pois

$$x - \frac{z}{y - A} - \varphi A = 0,\ \frac{z}{(y - A)^2} + \varphi' A = 0.$$

400. Pode usar-se d'um processo similhante, sem conhecer todos os integraes A, B, C.

Seja $$f_1(x, y, z, p, q, \mathrm{A}) = 0$$

um dos integraes particulares que satisfazem á equação (2).

Achando os valores de p e q pela eliminação entre $f_1 = 0$ e a proposta $\mathrm{F}(x, y, z, p, q) = 0$, e substituindo-os na equação de definição $dz = pdx + qdy$, o integral d'esta será

$$f_2(x, y, z, \mathrm{A}, a) = 0,$$

representando a a constante arbitraria.

Mas, se derivassemos $f_2 = 0$ na hypothese, em que se integrou, de serem A e a constantes, a eliminação entre ella e as derivadas

$$\frac{df_2}{dx} + \frac{df_2}{dz}\frac{dz}{dx} = 0, \quad \frac{df_2}{dy} + \frac{df_2}{dz}\frac{dz}{dy} = 0,$$

reproduziria a proposta.

E se, considerando a como uma funcção arbitraria $\varphi(\mathrm{A})$ de A, derivassemos suppondo A variavel, as derivadas

$$\frac{df_2}{dx} + \frac{df_2}{dz}\frac{dz}{dx} + \left(\frac{df_2}{d\mathrm{A}} + \frac{df_2}{d\varphi\mathrm{A}}\varphi'\mathrm{A}\right)\left(\frac{d\mathrm{A}}{dx} + \frac{d\mathrm{A}}{dz}\frac{dz}{dx}\right) = 0,$$

$$\frac{df_2}{dy} + \frac{df_2}{dz}\frac{dz}{dy} + \left(\frac{df_2}{d\mathrm{A}} + \frac{df_2}{d\varphi\mathrm{A}}\varphi'\mathrm{A}\right)\left(\frac{d\mathrm{A}}{dy} + \frac{d\mathrm{A}}{dz}\frac{dz}{dy}\right) = 0,$$

seriam ainda as mesmas que as precedentes, comtanto que se estabelecesse a condição $\frac{df_2}{d\mathrm{A}} + \frac{df_2}{d\varphi\mathrm{A}}\varphi'\mathrm{A} = 0$; e por conseguinte a eliminação entre ellas e $f_2 = 0$ ainda reproduziria a proposta.

Portanto o systema das equações

$$f_2(x, y, z, \mathrm{A}, \varphi\mathrm{A}) = 0, \quad \frac{df_2}{d\mathrm{A}} + \frac{df_2}{d\varphi\mathrm{A}}\varphi'\mathrm{A} = 0 \ldots\ldots\ldots (7),$$

por satisfazer á proposta e conter a funcção arbitraria φ, dará todos os integraes procurados, eliminando A entre ellas, para cada fórma que se attribuir a φ.

Exemplos

I. Assim no primeiro exemplo $\qquad q = y - p^2$

do numero precedente achou-se $p = \mathrm{A}$, e por conseguinte $q = y - \mathrm{A}^2$, o que, substituindo em $dz = pdx + qdy$, e integrando, dá

$$z = \mathrm{A}x + \frac{1}{2}y^2 - \mathrm{A}^2 y + \varphi\mathrm{A};$$

e por conseguinte as equações (7) são

$$z + (\mathrm{A}y - x)\mathrm{A} - \frac{1}{2}y^2 - \varphi\mathrm{A} = 0, \quad 2\mathrm{A}y - x - \varphi'\mathrm{A} = 0,$$

identicas com as que se obtiveram naquelle numero.

II. No segundo exemplo do mesmo numero $\qquad z = pq$

achou-se $p = y - \mathrm{A}$, e por conseguinte $q = \dfrac{z}{y - \mathrm{A}}$, o que, substituindo em $dz = pdx + qdy$, dividindo por $y - \mathrm{A}$, e integrando, dá

$$x = \frac{z}{y - \mathrm{A}} + \varphi\mathrm{A};$$

sendo portanto as equações (7)

$$x-\frac{z}{y-A}-\varphi A=0,\ \frac{z}{(y-A)^2}+\varphi' A=0,$$

identicas com as obtidas pelo processo empregado naquelle numero.

401. O methodo da variação das constantes arbitrarias, que acabamos de empregar, e que é muito util na integração das equações de ordens superiores, pode applicar-se, qualquer que seja o modo de obter o integral particular $F_2(x, y, z, A, \varphi A)=0$.

Se, suppondo p ou q, ou qualquer funcção em que entre um d'estes coefficientes, uma constante A, e substituindo em $dz=pdx+qdy$, depois de tirar da proposta a expressão do outro, soubermos achar o integral particular $F_2(x, y, z, A, a)=0=F_2(x, y, z, A, \varphi A)$, procederemos em seguida como fica dicto, comparando as derivadas d'este integral, obtidas na hypothese de ser A constante, com as obtidas na hypothese de ser A variavel, e escrevendo a condição necessaria para que fiquem identicos os dois resultados.

É assim que no segundo exemplo proposto $\quad z=pq$,

pondo $p=y-A$ ou $q=x-A$, e procedendo como fica dicto, achamos o systema integral debaixo de qualquer das fórmas:

$$x-\frac{z}{y-A}-\varphi A=0,\ \frac{z}{(y-A)^2}+\varphi' A=0,$$

$$y-\frac{z}{x-A}-\varphi A=0,\ \frac{z}{(x-A)^2}+\varphi' A=0.$$

A symmetria da proposta a respeito de p e q fazia logo prever que, dada uma d'estas fórmas, tambem existia a outra.

402. D'este modo facilita-se muitas vezes a integração introduzindo uma indeterminada A, com o fim de partir em duas a equação proposta.

Seja esta $\quad f(p, x)=F(q, y)$.

Se fizermos $f(p, x) = A$, teremos $F(q, y) = A$; e resolvendo estas equações em ordem a p e q, resultará

$$p = \psi(x, A),\ q = \chi(y, A),\ dz = \psi\, dx + \chi\, dy.$$

Ora, se considerarmos A como constante, ψ e χ serão respectivamente funcções das variaveis x e y; logo, integrando nesta hypothese, teremos

$$z + \varphi A = \int \psi dx + \int \chi dy.$$

Em fim, derivando em ordem a A, e eliminando A entre a primitiva e a derivada, depois de haver determinado a funcção φ, acharemos o integral pedido.

Por exemplo, em $$a^2pq = x^2y^2$$

temos $$\frac{ap}{x^2} = \frac{y^2}{aq} = A;$$

logo $$p = \frac{x^2A}{a} = \psi,\ q = \frac{y^2}{aA} = \chi,$$

e por conseguinte $$3az + \varphi A = x^3A + \frac{y^3}{A},\ \varphi' A = x^3 - \frac{y^3}{A},$$

cujo systema satisfará A proposta, e dará o integral d'ella, quando se houver determinado φ e eliminado A.

Reflexões sobre a integração das equações differenciaes parciaes que não são identicas com aquellas derivadas.

403. Para que o integral primitivo seja *geral*, é necessario não só que satisfaça á proposta, mas tambem que, tomando d'uma parte as suas derivadas até uma ordem não inferior á da mesma equação, e da outra parte as derivadas d'esta equação até áquella ordem, os resultados das duas derivações coincidam.

Se o integral satisfizer sómente á primeira das duas condições, será *particular* ou *singular*, segundo se contiver ou não contiver no *geral*.

404. Seja, por exemplo, a proposta

$$z = px + qy \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (a).$$

É claro que satisfaz a esta equação a primitiva

$$z = \mathrm{A}x + \mathrm{B}y \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Agora, se integrarmos (a) applicando o processo do n.º 391 para as equações lineares, ou os processos do n.º 401 para todas, acharemos:

o integral $$z = x\psi\left(\frac{y}{x}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

ou o systema $$z = ax + y\varphi a = 0,\ x + y\varphi' a = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Mas qualquer das fórmas do integral, (2) e (3), derivada até a segunda ordem, e feitas as convenientes eliminações, conduz ás derivadas de (a)

$$xr + ys = 0,\ xs + yt = 0,$$

e é por conseguinte *geral;* em quanto que (1), derivada até a mesma ordem, conduz a

$$r=0,\ s=0,\ t=0,$$

que não são identicas com aquellas derivadas.

Não é pois (1) o integral geral. E como para $\psi\left(\frac{y}{x}\right)=A+B\frac{y}{x}$ e para $\varphi a=B+k(a-A)$, se reduzem respectivamente (2) e (3) a (1), este integral é *particular.*

405. Portanto o integral primitivo d'uma equação differencial parcial da ordem m deve, para que possa ser o integral geral, conter um numero tal de arbitrarias, que, derivando-o até a ordem $m+i$, e derivando tambem a equação differencial proposta até a mesma ordem, a eliminação das arbitrarias reduza o numero de equações do primeiro systema ao das equações do segundo.

Ora, nas equações de duas variaveis independentes, por serem $\frac{d^kF}{dx^\alpha dy^{k-\alpha}}=0$ as derivadas d'uma ordem k de $F=0$, tomado α desde 0 até k, e ser conseguintemente $k+1$ o numero de derivadas d'esta ordem, o numero total das equações do primeiro systema é a somma $\frac{(m+i+1)(m+i+2)}{2}$ da progressão geometrica natural que começa por 1 e acaba por $m+i+1$; e do mesmo modo, por ser no segundo systema $k+1$ o numero de equações da ordem $m+k$, o numero total das equações, desde a ordem m até a ordem $m+i$, é a somma $\frac{(i+1)(i+2)}{2}$ da progressão geometrica natural que começa por 1 e acaba por $i+1$.

O numero das arbitrarias, extranhas á equação proposta, não deve pois ser menor que

$$h=\frac{(m+i+1)(m+i+2)}{2}-\frac{(i+1)(i+2)}{2}=(m+i+1)m-\frac{1}{2}m(m-1).$$

E assim deverá o integral, para ser *geral,* compor-se de modo que o numero das arbitrarias cresça com as derivações successivas, satisfazendo sempre á condição de não ser inferior a h.

406. O modo mais ordinario de conseguir este fim é introduzir no integral, implicita ou explicitamente, funcções arbitrarias das variaveis; porque a derivação d'estas funcções augmenta o numero das arbitrarias.

Assim nas equações da primeira ordem, isto é, para $m=1$, se tomarmos $i=0$, será $h=2$. E portanto basta fazer entrar no integral uma funcção arbitraria φ, para que esse integral, formando com as suas duas derivadas parciaes um systema de tres equações com duas arbitrarias estranhas φ e φ', da eliminação das quaes resultaria uma equação identica com a proposta, seja por conseguinte o integral geral.

407. Limitamos-nos aqui a estas noções fundamentaes, que serviram de ponto de partida a Ampere, a Imschenetsky e ao sr. Gomes Teixeira nos seus importantes trabalhos sobre a integração das equações differenciaes parciaes, especialmente sobre a das equações da segunda ordem (*Memorias d'Ampere* nos tomos x e xi do *Jornal da Eschola Polytechnica de Paris; Etudes sur l'intégration des équations*, etc., de V. G. Imschenetsky; *Integração das equações ás derivadas parciaes de segunda ordem*, por F. G. Teixeira).

408. Só accrescentaremos que o sr. Gomes Teixeira generalisou a expressão do numero total das equações derivadas, desde a ordem 0 até a $m+i$, extendendo-a a qualquer numero n de variaveis independentes, pela fórmula $[(m+i+n)\,Cn]$ do numero de combinações de $m+i+n$ letras n a n (*Alg. Sup.*, pag. 40).

Assim, no caso de duas variaveis independentes, esta expressão é

$$[(m+i+2)\,C2]=\frac{(m+i+2)(m+i+1)}{2}.$$

Equações differenciaes parciaes da segunda ordem

409. Uma equação differencial parcial da segunda ordem pode conter, além dos coefficientes p e q da primeira ordem, os da segunda,

$$\frac{d^2z}{dx^2}=r,\ \frac{d^2z}{dxdy}=\frac{d^2z}{dydx}=s,\ \frac{d^2z}{dy^2}=t.$$

As equações de definição são pois

$$\left.\begin{array}{l} dz=pdx+qdy,\ dp=rdx+sdy,\ dq=sdx+tdy, \\ d^2z=dpdx+dqdy=rdx^2+2\,sdxdy+tdy^2 \end{array}\right\}\ldots\ldots(A).$$

410. Comecemos por alguns casos, nos quaes só entra um dos coefficientes differenciaes da segunda ordem:

1.° Seja $$r=\mathrm{P}p+\mathrm{Q},$$

representando P e Q funcções de x, y, z.

Nesta equação, por não entrarem as derivadas q, s e t relativas a y, deve considerar-se y como constante. E temos assim de integrar uma equação differencial de segunda ordem entre x e z; ajunctando porém, em vez da constante, uma funcção arbitraria φy de y,

Se P e Q não contém z, a proposta $\frac{dp}{dx}=\mathrm{P}p+\mathrm{Q}$ é linear entre p e x, e tem por integral (n.° 312)

$$p=\frac{dz}{dx}=e^{\int \mathrm{P}dx}\left(\int e^{-\int \mathrm{P}dx}\mathrm{Q}dx+\varphi y\right).$$