Casa A(S.R.)
Gab.
Est. 4
Tab.
N.º 9

FRD

19. NOV. 1970

CURSO COMPLETO

DE

MATHEMATICAS PURAS

POR

L. — B. FRANCOEUR

CALCULO DIFFERENCIAL

E

CALCULO INTEGRAL

POR

L.—B. FRANCOEUR

NOVAMENTE TRADUZIDOS, CORRECTOS E AUGMENTADOS

PELOS

LENTES JUBILADOS DA FACULDADE DE MATHEMATICA DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Francisco de Castro Freire

E

Rodrigo Ribeiro de Sousa Pinto

da Faculdade

TERCEIRA EDIÇÃO

LUIZ ALBANO
14-6-80
COIMBRA

Para uso da Aula

Biblioteca da Secção de Matemática
COMPRA
Faculd. de Ciências de Coimbra

N.º de Reg. 3085

COIMBRA
IMPRENSA DA UNIVERSIDADE
1878

ADVERTENCIA

Nesta nova edição, approvada pelo Conselho da Faculdade de Mathematica, a cujo juizo a sujeitámos, fizeram-se numerosos e consideraveis accrescentamentos e modificações, com o fim de a enriquecer e melhor accommodar ao ensino.

Para o conseguir foi-nos muito util a coadjuvação que fez a fineza de offerecer-nos o nosso collega Lente de Prima da Faculdade de Mathematica o sr. dr. Raymundo Venancio Rodrigues, a quem devemos indicações judiciosas sobre a utilidade d'alguns d'aquelles melhoramentos, suggeridas pela sua longa practica na regencia da cadeira respectiva, e a revisão d'uma das provas de quasi todas as folhas.

Folgâmos de agradecer aqui esta cooperação, que foi para nós um obsequio valioso e para a Universidade um serviço importante.

TABOA DAS MATERIAS

CALCULO DIFFERENCIAL

I

Regras geraes de differenciação

II

Applicações do calculo differencial

NOTA

CALCULO INTEGRAL

I

Integração das funcções d'uma só variavel

II

Integração das equações differenciaes de primeira ordem entre duas variaves

III

Integração das equações differenciaes que contêm tres variaveis

IV

Calculo das variações

V

Differenças e series

NOTAS

CALCULO DIFFERENCIAL

I

REGRAS GERAES DE DIFFERENCIAÇÃO

Noções preliminares

1. Seja
$$y = fx$$

uma equação entre duas variaveis x, y.

Por dois pontos M (x, y) e M′ $(x+h, y+k)$ da curva BMM′ (Fig. 1), que suppomos ser o logar geometrico d'esta equação, tire-se a secante SMM′. Teremos:

$$y = fx = \text{MP},\ y+k = f(x+h) = \text{M'P'},\ k = f(x+h) - fx = \text{M'Q};$$

e o triangulo rectangulo MM′Q dará:

$$\text{tang M'MQ} = \frac{\text{M'Q}}{\text{MQ}} = \frac{k}{h} = \frac{f(x+h) - fx}{h}.$$

Mas, se tirarmos a tangente MH no ponto M, e chamarmos θ, i, os angulos HMQ, HMM', será:

$$\operatorname{tg} M'MQ = \operatorname{tg}(\theta - i) = \frac{\operatorname{tg}\theta - \operatorname{tg} i}{1 + \operatorname{tg}\theta \operatorname{tg} i} = \operatorname{tg}\theta - \frac{\operatorname{tang} i}{\cos^2\theta(1+\operatorname{tg}\theta \operatorname{tg} i)} = \operatorname{tg}\theta + \alpha.$$

A expressão de $\frac{f(x+h) - fx}{h}$ tem pois a fórma

$$\frac{f(x+h) - fx}{h} = y' + \alpha \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1);$$

sendo $y' = \operatorname{tang}\theta$ independente de h, e α uma expressão que a hypothese $h = 0$ fará desapparecer. E assim deve ser, por isso que a direcção da tangente em M não depende da posição do ponto M'.

Este raciocinio deixaria de ter logar quando não houvesse tangente no ponto M (x, y); o que só poderia acontecer em casos especiaes, em que se apresentam com effeito resultados que tambem precisam d'uma interpretação especial; mas, em quanto não descermos da generalidade, e considerarmos x qualquer, podemos dar como estabelecida a verdade da equação (1).

2. Fica portanto demonstrado que $f(x+h)$ pode, em geral, tomar, por calculos convenientes, a fórma

$$f(x+h) = fx + y'h + \alpha h.$$

O coefficiente y', nova funcção de x dependente da primitiva y, e independente de h, chama-se *derivada* da funcção y, e tambem se designa por $f'x$. E porque esta funcção suppõe a existencia d'uma curva, que é o seu logar geometrico, e cuja tangente ella determina, vê-se que é propria para exprimir a continuidade de y.

Veremos que a funcção α se pode egualmente desenvolver em uma serie de termos ordenados segundo as potencias ascendentes de h; e que os coefficientes d'esses termos dependem de y', sendo por isso tambem proprios para exprimir, ainda mais, a continuidade de y.

Por exemplo, sendo X um polynomio racional em x do gráu n, e designando respectivamente X', X'', X''', $X^{(n)}$ as funcções derivadas de X, X', $X'', \ldots X^{(n-1)}$, vimos (*Alg. Sup.* n.º 32*) que é

$$f(x+h) = X + hX' + \frac{1}{2}h^2X'' + \frac{1}{2.3}h^3X''' + \ldots \frac{1}{2.3\ldots n}h^n X^{(n)}.$$

3. *O Calculo differencial é um ramo da analyse transcendente, no qual se procuram as derivadas das funcções, se investigam as suas propriedades, e se empregam essas derivadas na resolução dos problemas em que figura a continuidade das funcções.*

Como o segundo membro da equação (1) se approxima tanto mais de y' quanto é menor h, a differença $f(x+h) - fx$ pode approximar-se indefinidamente de $y'h$; e por isso se chama *differencial* esta parte da differença total, quando h é a *differencial* de x. Leibnitz, inventor do calculo infinitesimal, designou pela caracteristica d o augmento infinitamente pequeno attribuido a uma variavel: de maneira que dy e dx correspondem ás quantidades que designamos por k e h, consideradas no seu ultimo estado de grandeza; e a differencial de y é $dy = y'dx$. D'onde provém ainda o nome de *coefficiente differencial* á derivada y', e o de *Calculo differencial* ao calculo que acabamos de definir.

4. As definições de y' como limite da razão $\frac{f(x+h)-fx}{h}$ correspondente a $h=0$; como coefficiente da primeira potencia de h no desenvolvimento de $f(x+h)$; e como coefficiente differencial $\frac{dy}{dx}$: são as bases respectivas de tres differentes modos de exposição dos principios do Calculo differencial. Mas na investigação da derivada, correspondente a cada funcção, procuraremos o limite da razão $\frac{f(x+h)-fx}{h}$, ou os dois primeiros termos $fx + y'h$ do desenvolvimento de $f(x+h)$, segundo a facilidade que a especie da funcção offerecer para um ou outro d'estes processos.

5. A variavel x, á qual se attribue um augmento dx, chama-se *variavel independente* ou *principal*; e a variavel y, cujo augmento dy resulta do augmento dx attribuido a x, em virtude da equação $y = fx$ que liga y com x, chama-se *variavel dependente*.

A derivada y' da funcção y chama-se *derivada da primeira ordem;* a derivada y'' de y' chama-se *derivada da segunda ordem* de y; e assim por diante.

Similhantemente os coefficientes differenciaes de primeira ordem, segunda ordem..., de y designam-se por $\frac{dy}{dx}=y'$, $\frac{dy'}{dx}=y''$,.........

E no caso de se tomar constante o augmento infinitesimo dx da variavel independente, como supporemos quando não advertirmos o contrario, designam-se por $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$,...

Theorema de Taylor

6. No n.º 2 achamos os primeiros termos $y+hy'$ do desenvolvimento de $f(x+h)$ em ordem ás potencias ascendentes de h: os seguintes estão comprehendidos em αh. Procuremos todo o desenvolvimento.

Representando $y'+\alpha$ por P, a equação (1) toma a fórma

$$f(x+h)=fx+\mathrm{P}h\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2).$$

Mudemos x em $x+i$, e h em $h-i$. Como, por esta mudança, $x+h=z$ não varía, só variará x em $\mathrm{P}=\mathrm{F}(x,h)$ posto debaixo da fórma $\mathrm{F}(x,z-x)$; e a equação (2) tornar-se-ha em $f(x+h)=y+y'i+\beta i+(\mathrm{P}+\mathrm{P}'i+\gamma i)(h-i)$; ou, attendendo á mesma equação, e ordenando segundo as potencias ascendentes de i,

$$0=(y'-\mathrm{P}+\mathrm{P}'h)i+\ldots$$

Depois, egualando a zero separadamente os coefficientes das potencias de i, e substituindo em (2), teremos

$$\mathrm{P}=y'+\mathrm{P}'h,\ \text{e}\ f(x+h)=fx+y'h+\mathrm{P}'h^2\ldots\ldots\ldots(3).$$

Similhantemente, mudando x em $x+i$ e h em $h-i$ na primeira das equações (3), egualando a zero os coefficientes das potencias de i, e substituindo em $f(x+h)$, teremos

$$2P' = y'' + P''h,$$

e $$f(x+h) = fx + y'h + \frac{1}{2} y''h^2 + \frac{1}{2} P''h^3.$$

Em geral, suppondo

$$(n-1)\,P^{(n-2)} = y^{(n-1)} + P^{(n-1)}h,$$

e $$f(x+h) = fx + y'h + \frac{y''h^2}{2} + \ldots \frac{y^{(n-1)}\,h^{n-1}}{2\ldots(n-1)} + \frac{P^{(n-1)}h^n}{2\ldots(n-1)}:$$

se operarmos nestas como fizemos para obter (3), resultarão

$$n\,P^{(n-1)} = y^{(n)} + P^{(n)}\,h,$$

e $$f(x+h) = fx + y'h + \frac{y''h^2}{2} + \ldots \frac{y^{(n)}h^n}{2\ldots n} + \frac{P^{(n)}h^{n+1}}{2\ldots n}.$$

Portanto a lei é geral.

A ultima equação

$$f(x+h) = fx + hf'x + \frac{1}{2} h^2 f''x + \ldots \frac{1}{2.3\ldots n} h^n f^{(n)}x + \ldots .(A)$$

é conhecida pelas denominações de *Theorema de Taylor* ou *Fórmula de Taylor*, do nome do geometra celebre a quem se attribue a sua descoberta.

E vê-se que esta fórmula será definida, se puder determinar-se o factor $P^{(n)}$ do termo que a completa, como adiante veremos.

7. Fica assim demonstrado que, attribuindo a x um augmento h em fx, a funcção variada $f(x+h)$ se desenvolve em uma serie (A) de termos, que só contêm *potencias inteiras e positivas de h*, ao menos em quanto x conservar um valor indeterminado. A serie (A) fará conhecer este desenvolvimento, quando soubermos tirar de fx as derivadas successivas $f'x$, $f''x$,...., ou y', y'',....

Seja, por exemplo, $y = x^m$. Como a desenvolução de $(x+h)^m$ dá mx^{m-1} para coefficiente da primeira potencia de h, teremos $y' = mx^{m-1}$, e do mesmo modo $y'' = m(m-1)x^{m-2}$,...; depois, substituindo em (A), virá a serie de Newton. Para achar os outros termos da serie, qualquer que seja o expoente m, basta pois saber que o segundo termo é mhx^{m-1}, ou que $\dfrac{(x+h)^m - x^m}{h}$ se reduz a mx^{m-1} quando h se anniquila.

Já desenvolvemos na *Algebra* diversas funcções em serie. Mas, como este desenvolvimento é uma applicação muito simples do calculo das derivações, deduzil-o-hemos da fórmula de Taylor, seguindo as regras d'este calculo; e não faremos uso das series, sem que de novo as tenhamos demonstrado por esse meio.

Outra demonstração do theorema de Taylor

8. Se na funcção $y = fx$ mudarmos successivamente x em $x + \Delta x$, sendo Δx constante, mudar-se-hão

$$\begin{array}{lllll}
x \text{ em} & x+\Delta x & x+2\Delta x & x+3\Delta x & \ldots\ldots\ldots \\
\text{e } y \text{ em} & y+\Delta y & y+\Delta y+\Delta(y+\Delta y) & y+\Delta y+\Delta(y+\Delta y)+\Delta(y+\Delta y+\Delta(y+\Delta y)) & \\
\text{ou} & y+\Delta y & y+2\Delta y+\Delta^2 y & y+3\Delta y+3\Delta^2 y+\Delta^3 y & \ldots\ldots\ldots,
\end{array}$$

a que se pode dar a fórma

$$y+\Delta y,\ y+2\Delta y+\frac{2.(2-1)}{1\,.\,2}\Delta^2 y,\ y+3\Delta y+\frac{3.(3-1)}{1\,.\,2}\Delta^2 y+\frac{3.(3-1).(3-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\Delta^3 y,\ldots$$

Seguindo a analogia, supponhamos que é

$$f(x+(n-1)\Delta x) = y+(n-1)\Delta y+\frac{(n-1)(n-2)}{1\,.\,2}\Delta^2 y+\ldots$$

$$\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-k)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,k}\Delta^k y+\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-(k+1))}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,k+1}\Delta^{k+1} y\ldots$$

Mudando x em $x + \Delta x$, resultará ainda

$$f(x+n\Delta x) = y + \left.\begin{array}{r} 1 \\ +n-1 \end{array}\right| \Delta y + \ldots + \left.\begin{array}{l} \dfrac{(n-1)(n-2)\ldots(n-k)}{1 \,.\, 2 \ldots k} \\ + \dfrac{(n-1)(n-2)\ldots(n-k)(n-(k+1))}{1 \,.\, 2 \ldots k \,.\, k+1} \end{array}\right| \Delta^{k+1} y + \ldots$$

$$= y + n\,\Delta y + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2\ldots(n-k)}{1 \,.\, 2 \ldots\ldots k+1} \Delta^{k+1} y + \ldots\ldots (1).$$

Donde se conclue que a lei (1), já verificada para $x + \Delta x$, $x + 2\Delta x$, $x + 3\Delta x$, é geral.

Posto isto, para desenvolver $f(x+h)$ em serie, basta fazer $n\Delta x = h$ na fórmula (1), o que dará

$$f(x+h) = fx + h\frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{h(h-\Delta x)}{1 \,.\, 2}\frac{\Delta^2 y}{(\Delta x)^3} + \ldots \frac{h(h-\Delta x)\ldots(h-k\Delta x)}{1 \,.\, 2 \ldots\ldots k+1} \frac{\Delta^{k+1} y}{(\Delta x)^{k+1}} + \ldots (2).$$

Mas, por ser o augmento h independente de Δx, não pode Δx entrar no desenvolvimento (2) senão apparentemente: se fizermos pois $\Delta x = 0$, ainda este desenvolvimento será o mesmo; e chamando então $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ... aquillo, em que nesta hypothese se tornam $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, $\frac{\Delta^2 y}{(\Delta x)^2}$, ..., a serie (2) transformar-se-ha na fórmula de Taylor.

Cumpre advertir que este raciocinio tem sómente logar quando Δx se pode tomar arbitrario e indefinidamente pequeno, isto é, quando nas n partes, de que se compõe h, a curva, cuja equação é $y = fx$, não tem pontos conjugados, de sorte que a hypothese $\Delta x = 0$ não torna imaginaria nenhuma das expressões $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, $\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$, ...

E tambem, que fazer $\Delta x = 0$ em 2) corresponde a desprezar Δx e as suas potencias, em comparação de h e das outras quantidades que não são arbitrarias e indefinidas. Por onde se vê quanto esta demonstração do theorema fundamental do calculo differencial é propria para dar idêas claras do mesmo calculo, e para justificar os desprezos das quantidades *indefinidamente pequenas*, que nelle se fazem (*Calc.* de Bezout, n.º 82, IV, *Calc. diff.* de Garnier, cap. 2; e *Calc.* de Navier, n.º 80).

Regras da differenciação das funcções algebricas

9. A composição da derivada y' em x depende da fórma da funcção primitiva y. É por isso necessario formar esta derivada para cada funcção proposta; o que se obtem por qualquer dos processos referidos no n.º 4.

Mas, para não repetir os mesmos raciocinios em todos os exemplos, daremos as regras pelas quaes se formam as derivadas das diversas especies de funcções; ficando assim reduzido o trabalho a practicar em cada caso estas operações por processos sabidos, do mesmo modo que na multiplicação, na extracção de raizes, e em outros calculos algebricos.

10. Seja $$y = fx = \mathrm{A} + \mathrm{B}u - \mathrm{C}t + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

designando A, B, C,... constantes, e u, t,... funcções de x.

Mudando x em $x+h$, não mudará A, tornar-se Bu em $\mathrm{B}(u+u'h+\alpha)$, Ct em $\mathrm{C}(t+t'h+\beta h)$,..., e fx em $f(x+h) = fx + (\mathrm{B}u' - \mathrm{C}t')h + (\mathrm{B}\alpha - \mathrm{C}\beta)h\ldots$;

logo $$y' = \mathrm{B}u' - \mathrm{C}t';$$

isto é: *Para ter a derivada d'um polynomio, sommem-se algebricamente as derivadas dos seus termos, conservados os mesmos coefficientes e signaes.*

A derivada d'um termo constante é nulla.

Por exemplo: $$y = a^2 + mx,\ y = 1 - 5x,$$

dão, respectivamente, $$y' = +m,\ y' = -5.$$

11. Sejam u e t funcções de x, e $y = ut$.

Será $$f(x+h) = (u + u'h + \alpha h)(t + t'h + \beta h) = fx + (u't + ut')h + \ldots;$$

e portanto $$y' = u't + ut'.$$

Seja $$y = utv.$$

Pondo $z = tv$, e por conseguinte $y = uz$, serão

$$z' = t'v + tv',\ y' = u'z + uz' = u'tv + t'uv + v'tu.$$

E procedendo do mesmo modo para qualquer numero de factores, teremos a regra seguinte:

Para formar a derivada do producto de muitos factores, considere-se successivamente cada um d'elles como o unico variavel, e sommem-se as derivadas assim obtidas;

Por exemplo:

$$y = (a+x)(a-x) \quad \text{dá} \quad y' = (a-x).1 + (a+x).(-1) = -2x;$$

$$y = (a+bx)(c-dx)x \quad \text{dá} \quad y' = b(c-dx)x - d(a+bx)x + (a+bx)(c-dx).$$

12. Para $y = \frac{u}{t}$ teremos $u = yt$, $u' = y't + t'y$,

que dão (*) $$y' = \frac{u' - t'y}{t},\ \text{ou}\ y' = \frac{u't - t'u}{t^2}.$$

Logo: *Para ter a derivada d'uma fracção, tire-se da derivada do numerador o producto da mesma fracção pela derivada do denominador, e divida-se a differença pelo denominador.*

Ou tambem: *Multiplique-se o denominador pela derivada do numerador e o numerador pela derivada do denominador; subtráia-se o segundo producto do primeiro; e divida-se a differença pelo quadrado do denominador.*

(*) Se operassemos immediatamente sobre a fracção proposta, teriamos

$$f(x+h) = \frac{u + u'h + \alpha h}{t + t'h + \beta h} = \frac{u}{t} + \frac{tu' - ut'}{t^2} h + \ldots,\ \text{que tambem daria}\ y' = \frac{tu' - ut'}{t^2}.$$

Por exemplo:

$$y=\frac{a^2-x^2}{a-x}=\frac{(a+x)(a-x)}{a-x} \text{ dá } y'=\frac{(a-x).(-2x)-(a^2-x^2).(-1)}{(a-x)^2}=1;$$

$$y=x\left(\frac{1}{a}-\frac{x}{1-x}\right) \text{ dá } y'=\frac{1}{a}-\frac{x}{1-x}-x.\frac{(1-x)+x}{(1-x)^2}=\frac{1}{a}-\frac{x(2-x)}{(1-x)^2}.$$

13. No caso de ser u constante, é $u'=0$, e $y'=-\frac{ut'}{t^2}$.

Por tanto: *A derivada d'uma funcção de numerador constante é egual a menos o producto do numerador pela derivada do denominador, dividido este producto pelo quadrado do denominador.*

Por exemplo: $y=\frac{4}{1-x^2}=\frac{4}{(1+x)(1-x)}$ dá $y'=+\frac{8x}{(1-x^2)^2}$.

14. Passemos ás derivadas das potencias.

1.° Se m é inteiro e positivo, temos $\quad y=x^m=x.x.x\ldots,$

que dá (n.° 11) $\quad y'=1.x^{m-1}+1.x^{m-1}+\ldots=mx^{m-1}.$

E mais geralmente, para $y=z^m$, sendo $z=fx$, é

$$y'=mz^{m-1}.z'.$$

2.° Se m é inteiro e negativo, $m=-n$, temos

$$y=z^m=z^{-n}=\frac{1}{z^n}, \text{ e (13) } y'=-\frac{nz^{n-1}.z'}{z^{2n}}=-nz^{-n-1}z'=mz^{m-1}.z'.$$

3.° Se m é fraccionario, $m=\frac{p}{q}$, temos

$$y=z^m=z^{\frac{p}{q}},\ y^q=z^p,\ qy^{q-1}.y'=pz^{p-1}.z',\ y'=\frac{p}{q}z^{\frac{p}{q}-1}z'=mz^{m-1}.z'.$$

4.° Finalmente, se m é irracional ou imaginario, ainda se lhe applica a mesma fórmula (vid. *Alg. Sup.* n.° **11**, **3.°** e **4.°**). Logo, qualquer que seja o expoente m:

Para ter a derivada d'uma potencia, multiplique-se o expoente da potencia pela raiz elevada a esse expoente menos uma unidade, e pela derivada da raiz.

Por exemplo: $y=x^{\frac{3}{2}}(a+bx^{-2})$, fazendo $a+bx^{-2}=z$, dá

$$y'=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}.z+x^{\frac{3}{2}}z'=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}(a+bx^{-2})-2bx^{-\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}ax^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}bx^{-\frac{3}{2}}.$$

15. Para $y=\sqrt[m]{z}=z^{\frac{1}{m}}$ é $y'=\frac{1}{m}z^{\frac{1}{m}-1}.z'=\frac{z'}{m\sqrt[m]{z^{m-1}}}$.

No caso de $m=2$, é $y'=\frac{z'}{2\sqrt{z}}$. E assim:

A derivada da raiz quadrada d'uma quantidade é egual á derivada da quantidade, dividida pelo dobro da raiz.

Por exemplo: $y=\sqrt[4]{(a+bx^2)^5}$

..

dá $$y' = \frac{5(a+bx^2)^4 . 2bx}{4\sqrt[4]{(a+bx^2)^{15}}} = \frac{5}{2}bx\sqrt[4]{(a+bx^2)};$$

e $$y = \frac{x}{-x+\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{x(x+\sqrt{a^2+x^2})}{a^2}$$

dá $$y' = \frac{a^2}{(a^2+2x^2-2x\sqrt{a^2+x^2})\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{2x}{a^2} + \frac{a^2+2x^2}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}.$$

16. Obtida a derivada y' de y, podem depois formar-se as derivadas successivas y'', y''' . . .

Por exemplo: $y = x^m$, $y = x^{-1}$, $y = \sqrt{x}$,

dão respectivamente:

$$y' = mx^{m-1},\ y'' = m(m-1)x^{m-2} .. y^{(n)} = m(m-1)..(m-(n-1))x^{m-n};$$

$$y' = -\frac{1}{x^2},\ y'' = +\frac{2}{x^3}, \ldots\ldots\ldots y^{(n)} = \mp\frac{2.3\ldots n}{x^{n+1}};$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}},\ y'' = -\frac{1}{2^2\sqrt{x^3}}, \ldots y^{(n)} = \pm\frac{1.3\ldots(2n-3)}{2^n\sqrt{x^{2n-1}}}.$$

17. Sabendo derivar todas as funcções algebricas, facilmente se applica a serie de Taylor [(A) do n.° 6] ao desenvolvimento d'estas funcções em series ordenadas segundo as potencias ascendentes de h, quando se muda x em $x+h$.

I. Seja $y = x^{-1}$. Com as derivadas y', y'', . . . que acabamos de formar, a fórmula (A) dará a progressão arithmetica

$$\frac{1}{x+h} = \frac{1}{x} - \frac{h}{x^2} \ldots\ldots\ldots\ldots \pm \frac{h^n}{x^{n+1}}.$$

II. Seja $y=\frac{x^2-a^2}{x}=x-\frac{a^2}{x}$. Serão $y'=1+\frac{a^2}{x^2}$, $y''=-\frac{2a^2}{x^3}$,...,

e $$f(x+h)=\frac{x^2-a^2}{x}+\left(1+\frac{a^2}{x^2}\right)h-\frac{a^2}{x^3}h^2\ldots\ldots$$

III. Seja $y=\sqrt{x}$. Com as derivadas y', y'',... que achamos, teremos

$$\sqrt{(x+h)}=\sqrt{x}+\frac{h}{2\sqrt{x}}-\frac{h^2}{8\sqrt{x^3}}+\ldots\pm\frac{1.3\ldots(2n-3)}{2^n\sqrt{x^{2n-1}}}\cdot\frac{h^n}{1.2.3\ldots n}.$$

IV. Seja $y=x^m$, e m qualquer. Teremos:

$$(x+h)^m=x^m+mhx^{m-1}+\ldots\frac{m(m-1)\ldots(m-(n-1))}{1\;.\;2\ldots\ldots\ldots n}h^nx^{m-n}.$$

Mas cumpre advertir que uma serie só representa a funcção desenvolvida, quando é convergente para o valor da mesma funcção.

Outra demonstração da regra de derivação das potencias, para qualquer expoente

18. Mudando x em $x+h$, a funcção $y=x^m$ torna-se em

$$(x+h)^m=x^m+y'h+\ldots,$$

ou, dividindo por x^m, e pondo $h=zx$,

$$\left(1+\frac{h}{x}\right)^m=(1+z)^m=1+\frac{y'z}{x^{m-1}}+\ldots.$$

Como se pode variar h de modo que z fique constante, deve $(1+z)^m$ ser independente de x; o que dá $\dfrac{y'}{x^{m-1}} = \text{constante}.$

É pois $$y' = x^{m-1} fm;$$

representando fm uma funcção unicamente de m, sem x.

Para determinar m, temos assim

$$(x+h)^m = x^m + hx^{m-1} fm + \ldots,$$

e similhantemente

$$(x+h)^n = x^n + hx^{n-1} fn + \ldots, \quad (x+h)^{m+n} = x^{m+n} + hx^{m+n-1} f(m+n) + \ldots$$

Mas a multiplicação de $(x+h)^m$ por $(x+h)^n$ dá

$$(x+h)^{m+n} = x^{m+n} + hx^{m+n-1}(fm+fn) + \ldots;$$

logo $f(m+n) = fm + fn$, que é conhecida com o nome de equação da definição das funcções exponenciaes: da qual, considerando n como augmento de m, ou $f(m+n) = fm + nf'm + \ldots$, resulta $fn = nf'm$.

Esta equação mostra que, por ser n independente de m, devem ser $f'm$ uma constante a independente de m, e $f''m$, $f'''m$, ... nullos.

Será por tanto $fn = an$, e do mesmo modo $fm = am$: o que dá

$$(x+h)^m = x^m + mahx^{m-1} + \ldots$$

Para determinar a constante a, façamos $m=1$ nesta equação.

Ficará $x+h = x+ah$; o que dá $a=1$, e por conseguinte

$$y' = mx^{m-1}.$$

Para $y = z^m$, sendo z funcção de x, temos

$$f(x+h) = (z+hz'+\ldots)^m = z^m + mh^{m-1}z' + \ldots, \text{ que dá}$$

$$y' = mz^{m-1} z'.$$

Funcções de funcções

19. Em alguns dos exemplos precedentes, a expressão, que se pretendia derivar, não era funcção immediata da variavel principal, mas sim d'outra variavel tambem dependente da principal. Foi d'este modo que, suppondo z funcção de x, e $y = z^m$, achamos $y' = mz^{m-1}z'$.

Considerar assim a relação entre duas variaveis como expressa por intermedio de relações entre essas e outras variaveis, não só generaliza a investigação das derivadas, mas permitte muitas vezes simplifical-a, egualando a novas variaveis algumas das partes de funcções complicadas, á similhança do que se praticou no exemplo do n.° 14.

Tractemos pois d'esta classe de funcções, que se chamam *funcções de funcções*.

20. Supponhamos que, em vez da funcção

$$y = fx \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1),$$

se dá o systema equivalente das duas

$$y = \varphi z,\ z = \mathrm{F}x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2),$$

da eliminação de z entre as quaes resultaria (1). Tracta-se de achar a derivada de (1), sem fazer essa eliminação.

Antes d'isso observaremos que, por haver, em (1) e na 1.ª de (2), duas variaveis principaes x e z, não se pode usar da mesma notação y' para exprimir a derivada de y em ordem a cada uma d'ellas; mas, como a derivada equivale ao coefficiente differencial (n.° 3), podemos designar por $\dfrac{dy}{dx}$ e $\dfrac{dy}{dz}$ as derivadas de y relativas a x e z: advertindo que, adoptada esta notação, não se devem executar operações analyticas sobre as differenciaes dx e dz; porque estas, escriptas como denominadores, não só indicam divisões, mas tambem mostram em ordem a qual das variaveis se fez a derivação designada pelo respectivo coefficiente differencial: nem tão pouco se devem suppor os dy eguaes, porque são differentes os relativos a cada uma das duas variaveis x, e z.

Bem entendido isto, se mudarmos x em $x+h$, mudar-se-hão z e y em

$$z+k=\mathrm{F}(x+h),\ f(x+h)=\varphi(z+k),$$

que dão:

$$k=h\frac{dz}{dx}+\ldots,\ f(x+h)=y+k\frac{dy}{dz}+\ldots=fx+h\frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx}+\ldots.$$

Mas é (eq. 1) $\quad f(x+h)=fx+h\dfrac{dy}{dx}+\ldots;$

logo $$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3).$$

Portanto: *Quando* y *é funcção de* z, *e* z *funcção de* x, *a derivada de* y *em ordem a* x *é egual ao producto das derivadas de* y *em ordem a* z *e de* z *em ordem a* x, *deduzidas de* (2), *nas quaes* z *e* x *são as respectivas variaveis principaes.*

21. Supponhamos que a equação (1) resulta das tres

$$z=\mathrm{F}x,\ u=\psi x,\ y=\varphi(z,u).$$

Mudando x em $x+h$, mudam-se z, u, y em

$$z+k=\mathrm{F}(x+h),\ u+i=\psi(x+h),\ f(x+h)=\varphi(z+k,u+i).$$

As duas primeiras dão

$$k=\frac{dz}{dx}h+\ldots,\ i=\frac{du}{dx}hx\ldots.$$

Em quanto á ultima, podemos mudar primeiro z em $z+k$, e depois mudar no resultado u em $u+i$, o que dará successivamente

$$\varphi(z+k, u)=\varphi(z, u)+k\frac{d\varphi}{dz}+\ldots, \varphi(z+k, u+i)=\varphi(z, u)+i\frac{d\varphi}{du}+k\frac{d\varphi}{dz}+\ldots$$

Substituindo depois na segunda d'estas as expressões de i e k, será emfim:

$$f(x+h)=fx+h\left(\frac{d\varphi}{du}.\frac{du}{dx}+\frac{d\varphi}{dz}.\frac{dz}{dx}\right)+\ldots.;$$

e comparando com

$$f(x+h)=fx+h\frac{dy}{dx}+\ldots.,$$

teremos $$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}+\frac{dy}{dz}.\frac{dz}{dx}\ldots.$$

Em geral, se, em vez de (1), tivermos o systema equivalente:

$$z_1=\varphi_1(x),\ z_2=\varphi_2(x),\ldots,\ y=\psi(z_1,\ z_2,\ldots)\ldots\ldots(4):$$

mudando x em $x+h$, resultarão

$$z_1+k_1=\varphi_1(x+h),\ z_2+k_2=\varphi_2(x+h),\ldots;\ f(x+h)=\psi(z_1+k_1,\ z_2+k_2,\ldots),$$

que dão

$$k_1=h\frac{d\varphi_1}{dx}+\ldots;\ k_2=h\frac{d\varphi_2}{dx}+\ldots;\ f(x+h)=fx+k\frac{d\psi}{dz_1}+k_2\frac{d\psi}{dz_2}+\ldots,$$

ou $$f(x+h)=fx+h\left(\frac{d\psi}{dz_1}\cdot\frac{dz_1}{dx}+\frac{d\psi}{dz_2}\cdot\frac{dz_2}{dx}+\ldots\right),$$

e por conseguinte $$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz_1}\cdot\frac{dz_1}{dx}+\frac{dy}{dz_2}\cdot\frac{dz_2}{dx}+\ldots\ldots\ldots\ldots(5).$$

Portanto: *A derivada d'uma funcção* y *composta de qualquer modo de muitas funcções* $z_1, z_2, \ldots$ *é egual á somma das derivadas respectivas, que se obtém considerando só como variavel cada uma das componentes, isto é, applicando a equação* (3) *a cada uma.*

As derivações dos productos e dos quocientes são casos particulares d'este theorema.

Seja, por exemplo, $$y=\frac{(1-x^2)^2-(3-2x)x}{4-5x}.$$

Pondo $$z=1-x^2,\ u=3x-2x^2,\ t=4-5x,$$

e por conseguinte $$y=\frac{z^2-u}{t},\ \text{serão:}$$

$$\frac{dz}{dx}=-2x,\frac{du}{dx}=3-4x,\frac{dt}{dx}=-5;\ \frac{dy}{dz}=\frac{2z}{t},\frac{dy}{du}=-\frac{1}{t},\frac{dy}{dt}=-\frac{z^2-u}{t^2},$$

e $$y'=-\frac{4zx}{t}-\frac{3-4x}{t}+\frac{5(z^2-u)}{t^2}=\frac{16x^3-15x^4-7}{(4-5x)^2}.$$

22. Quando as expressões das variaveis $z, u, \ldots$ não viessem a ser complicadas, seria melhor não fazer a transformação precedente, e operar como se ella estivesse feita, suppondo-a tacitamente.

Por exemplo: $y = (a - 2x + x^3)^3 (a - x)$

dará $y' = 3(a - 2x + x^3)^2 (-2 + 3x^2)(a - x) - (a - 2x + x^3)^3$,

ou $y' = (a - 2x + x^3)^2 (-7a + 8x + 9ax^2 - 10x^3)$,

Funcções exponenciaes e logarithmicas

23. Funcções exponenciaes. Seja $y = a^x$.

Mudando x em $x + h$, e depois dividindo por a^x, resultam successivamente

$$f(x+h) = a^{x+h} = a^x + y'h + \ldots, \quad a^h = 1 + \frac{y'}{a^x} h + \ldots.$$

E como, por ser independente de x o primeiro membro da ultima equação, tambem o deve ser o segundo, teremos

$$y' = ka^x;$$

representando k uma constante, que vamos determinar.

Substituindo na serie de Taylor as derivadas successivas

$$y' = ka^x, \; y'' = k^2 a^x, \ldots . y^{(n)} = k^n a^x,$$

vem $$a^{x+h} = a^x + ka^x h + \frac{1}{2} k^2 a^x h^2 + \frac{1}{2.3} k^3 a^x h^3 + \ldots :$$

que, para $x = 0$, dá $$a^h = 1 + hk + \frac{1}{2} h^2 k^2 + \frac{1}{2.3} h^3 k^3 + \ldots;$$

e, para $x=0$, $h=1$, dá $\quad a=1+k+\frac{1}{2}k^2+\frac{1}{2.3}k^3+\ldots,$

da qual se tira, pelo methodo inverso das series,

$$k=(a-1)-\frac{1}{2}(a-1)^2+\frac{1}{3}(a-1)^3+\ldots.$$

24. As duas equações

$$a=1+k+\frac{1}{2}k^2+\frac{1}{2.3}k^3+\ldots,\ k=(a-1)-\frac{1}{2}(a-1)^2+\frac{1}{3}(a-1)^3+\ldots,$$

estabelecem a relação entre a base a dos logarithmos definidos pela equação $y=a^x$ e a constante k; de sorte que, dada uma d'estas quantidades, se obtem logo a outra.

Assim, fazendo $k=1$, a expressão de a reduz-se á base dos logarithmos naturaes, ou neperianos,

$$e=2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\ldots=2,718281828\ldots.$$

E, fazendo $kh=1$, a expressão de a^h dá

$$a^{\frac{1}{k}}=e,\quad \text{ou}\quad k=\frac{\text{Log}\,a}{\text{Log}\,e}=la=\frac{1}{\log e}.$$

A primeira d'estas expressões de k tem logar em um systema de qualquer base, a segunda no systema de base e, e a terceira no de base a; systemas que se distinguem pelas tres notações Log., l, log., segundo a convenção adoptada (*Alg. Sup.*, n.º 154).

25. Sendo z funcção de x, e $y = a^z$,

teremos $$y' = ka^z z' = a^z z'\, la.$$

Portanto: *Acha-se a derivada d'uma funcção exponencial, multiplicando a mesma funcção pela derivada do expoente e pelo logarithmo natural da base.*

Por exemplo: $$y = e^{mz}, \quad y = a^{3x+1}, \quad y = a^{\sqrt{2x+1}},$$

dão, respectivamente: $$y' = me^{mz}z', \; y' = 3a^{3x+1}la, \; y' = a^{\sqrt{2x+1}} \cdot \frac{la}{\sqrt{2x+1}}.$$

26. Funcções logarithmicas. Seja $y = \operatorname{Log} x$.

Será $$\operatorname{Log}(x+h) = \operatorname{Log} x + y'h + \ldots, \text{ ou } \operatorname{Log}\frac{x+h}{x} = y'h + \ldots,$$

ou, pondo $h = zx$, $$\operatorname{Log}(1+z) = y'xz + \ldots.$$

Como, variando x, se pode tomar h tal que z fique constante, deve $y'x$ ser uma constante M independente de x, e por conseguinte $y' = \frac{M}{x}$. Determinemos M.

Substituindo na serie de Taylor as derivadas successivas

$$y' = \frac{M}{x}, \; y'' = -\frac{M}{x^2}, \; y''' = \frac{2M}{x^3}, \ldots \; y^{(n)} = \pm \frac{2.3\ldots(n-1)\,M}{x^n},$$

vem $$\operatorname{Log}(x+h)=\operatorname{Log} x+\mathrm{M}\left(\frac{h}{x}-\frac{h^2}{2x^2}+\frac{h^3}{3x^3}\cdots\mp\frac{h^n}{nx^n}\right)$$

ou $$\operatorname{Log}(1+z)=\mathrm{M}\left(z-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{3}z^3\cdots\cdots\mp\frac{1}{n}z^n\right).$$

E se, chamando a a base dos logarithmos, fizermos $1+z=a$ nesta serie, resultará

$$1=\mathrm{M}\left[(a-1)-\frac{1}{2}(a-1)^2+\frac{1}{3}(a-1)^3\ldots\mp\frac{1}{n}(a-1)^n\right],$$

isto é, $$1=\mathrm{M}k=\frac{\mathrm{M}}{\log e}.$$

Logo (*) $$\mathrm{M}=\log e=\frac{1}{l\,a}.$$

27. A funcção $y=\log z$ dá $y'=\dfrac{\mathrm{M}z'}{z}=\dfrac{z'}{z\,la}$.

Logo: *Acha-se a derivada do logarithmo d'uma funcção dividindo a derivada d'essa funcção pela mesma funcção, e multiplicando pelo modulo.*

Não deve esquecer que nos logarithmos naturaes ou neperianos o modulo é egual á unidade.

(*) Como $y=a^{\log y}=e^{ly}$ dá $\log y=ly\log e=\mathrm{M}\,ly$, vê-se que M é o factor constante, chamado modulo, pelo qual se devem multiplicar os logarithmos naturaes para ter os d'outro systema de base a *(Alg. Sup.*, *n.°* 154).

Exemplos:

$$y = l\,\frac{u}{t},\ y' = \frac{tu' - ut'}{ut};\ y = \log z^n,\ y' = \frac{nz'}{z}\,\mathrm{M};$$

$$y = \log\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},\ y' = \frac{\mathrm{M}}{x(1+x^2)};$$

$$y = \log(x + \sqrt{1+x^2}),\ y' = \frac{\mathrm{M}}{\sqrt{1+x^2}};\ y = l\sqrt{\left(\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}-x}\right)},\ y' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$y = l\,\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}},\ y' = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}.$$

28. Chamando *differencial logarithmica* de y a expressão $\frac{dy}{y}$, podem tomar-se facilmente de cór as regras fundamentaes da differenciação das funcções algebricas, dizendo que: *A differencial logarithmica d'um producto é a somma das differenciaes logarithmicas dos seus factores; a do quociente é a differença das do dividendo e divisor; e a da potencia é o producto do expoente pela da raiz.*

29. Tambem o uso dos logarithmicos facilita o calculo das derivadas. Assim:

I. $y = z^t$ dá $ly = t\,lz,\ \frac{y'}{y} = t\,\frac{z'}{z} + t'lz,\ y' = y\left(t\,\frac{z'}{z} + t'lz\right);$

e por isso a derivada de $y = z^z$ é $y' = z^z z'(1 + lz)$,

II. $y = a^{(b^z)}$ dá $ly = b^z\,la,\ y' = yb^z z'\,la\,lb = a^{(b^z)}\,b^z z'\,la\,lb.$

III. $y = z^{(t^u)}$ dá $l\,y = t^u\, l\,z$, $y' = z^{(t^u)}\, t^u \left[\dfrac{z'}{z} + (u\,\dfrac{t'}{t} + u'\,l\,t)\,l\,z\right].$

Outra demonstração das regras para differenciar as potencias, os logarithmos e as exponenciaes

30. Demonstraremos agora estas regras considerando as derivadas como o limite de $\dfrac{f(x+h) - fx}{h}$ correspondente a $h = 0$.

I. Sendo $$y = x^m\,, \quad \text{é} \quad y' = \lim.\ \frac{(x+h)^m - x^m}{h},$$

ou, pondo $h = \alpha\, x$, $$y' = \lim.\ \frac{(1+\alpha)^m - 1}{\alpha}\, x^{m-1}.$$

Para α infinitesimo é $(1+\alpha)^m - 1 = \beta$ infinitesimo, quando em logar de m se põem os dois inteiros que o comprehendem, e portanto tambem para m qualquer.

E como de $(1+\alpha)^m - 1 = \beta$ se tira

$$m = \frac{\log(1+\beta)}{\log(1+\alpha)} = \frac{\beta}{\alpha}\, \frac{\log(1+\beta)^{\frac{1}{\beta}}}{\log(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}$$

ou, pondo $\alpha = \dfrac{1}{i}$, $\beta = \dfrac{1}{i'}$, $$\frac{\beta}{\alpha} = m\, \frac{\log\left(1 + \dfrac{1}{i}\right)^i}{\log\left(1 + \dfrac{1}{i'}\right)^{i'}},$$

será $$y' = m x^{m-1} \lim.\ \frac{\log\left(1 + \dfrac{1}{i}\right)^i}{\log\left(1 + \dfrac{1}{i'}\right)^{i'}}.$$

II. Sendo $y = \text{Log}\, x$, é $y' = \lim. \dfrac{\text{Log}(x+h) - \text{Log}\, x}{h}$,

ou, pondo $x = ih$, $y' = \lim. \dfrac{\text{Log}\left(1 + \frac{1}{i}\right)^i}{x}$.

III. Sendo $y = a^x$, é $y' = \lim. \dfrac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \lim. \dfrac{a^h - 1}{h}$,

ou, pondo $a^h = 1 + \dfrac{1}{i}$, $y' = \lim. \dfrac{a^x \log a}{\log\left(1 + \frac{1}{i}\right)^i}$,

isto é, $y' = \dfrac{a^x \log a}{\lim. \log\left(1 + \frac{1}{i}\right)^i}$.

Para concluir a formação de y' nestas tres especies de funcções, resta portanto achar o limite da funcção $\left(1 + \frac{1}{i}\right)^i$, quando i tende para o infinito. O que faremos, seguindo o raciocinio empregado no logar respectivo do *Calc. diff.* de Serret.

1.° Se i é sempre inteiro e positivo, a fórmula do binomio de Newton dá

$$\left(1+\frac{1}{i}\right)^i = 1 + i\,.\,\frac{1}{i} + \frac{i(i-1)}{1\,.\,2}\,.\,\frac{1}{i^2} + \ldots \frac{i(i-1)\ldots(i-(n-1))}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,.\,.\,n}\,.\,\frac{1}{i^n} + \mathrm{R}_n,$$

sendo $$\mathrm{R}_n = \frac{i(i-1)\ldots(i-n+1)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,n\,.\,i^n}\left[\frac{i-n}{(n+1)i} + \frac{(i-n)(i-n-1)}{(n+1)\,.\,i\,.\,(n+2)i} + \ldots\right];$$

ou

$$\left(1+\frac{1}{i}\right)^i = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1\,.\left(1-\frac{1}{i}\right)}{1\,.\,.\,2} + \ldots \frac{1\,.\left(1-\frac{1}{i}\right)\left(1-\frac{2}{i}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{i}\right)}{1\,.\,.\,2\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,n} + \mathrm{R}_n,$$

$$\text{sendo } R_n = \frac{1\left(1-\frac{1}{i}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{i}\right)}{1\,.\,.\,2\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,n}\left[\frac{1-\frac{n}{i}}{n+1}+\frac{\left(1-\frac{n}{i}\right)\left(1-\frac{n+1}{i}\right)}{(n+1)\quad(n+2)}+\ldots\right].$$

A somma dos termos do segundo factor de R_n é evidentemente menor que a dos termos da progressão geometrica

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\ldots.=\frac{1}{n};$$

e por conseguinte é
$$R_n < \frac{1\left(1-\frac{1}{i}\right)\left(1-\frac{2}{i}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{i}\right)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,.\,3\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,n}\cdot\frac{1}{n}.$$

Mas esta desegualdade mostra que R_n tende para zero, quando n tende para o infinito; logo, tendendo i para o infinito, é

$$\lim\left(1+\frac{1}{i}\right)^i = 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\,.\,2}+\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3}+\ldots.=e.$$

2.º Se o numero positivo i não é sempre inteiro, sejam μ e $\mu+1$ dois inteiros que o comprehendem, e que tendem com elle para o infinito. Será $\left(1+\frac{1}{i}\right)^i$ comprehendido entre $\left(1+\frac{1}{\mu+1}\right)^\mu$ e $\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{\mu+1}$,

isto é, entre $\dfrac{\left(1+\frac{1}{\mu+1}\right)^{\mu+1}}{1+\frac{1}{\mu+1}}$ e $\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^\mu\left(1+\frac{1}{\mu}\right)$.

Ora, segundo acabamos de ver (1.º), os limites de $\left(1+\frac{1}{\mu+1}\right)^{\mu+1}$ e $\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{\mu}$

são e; e os de $1+\frac{1}{\mu+1}$ e $1+\frac{1}{\mu}$ são 1: portanto o limite de $\left(1+\frac{1}{i}\right)^{i}$ tambem é e.

3.º Se i é um numero negativo, inteiro ou fraccionario, $i=-\mu$, será

$$\left(1+\frac{1}{i}\right)^{i}=\left(1-\frac{1}{\mu}\right)^{-\mu}=\left(\frac{\mu}{\mu-1}\right)^{\mu}=\left(1+\frac{1}{\mu-1}\right)^{\mu}=\left(1+\frac{1}{\mu-1}\right)^{\mu-1}.\left(1+\frac{1}{\mu-1}\right)$$

que tem ainda por limite e.

É pois, em todos os casos, $\qquad \lim.\left(1+\frac{1}{i}\right)^{i}=e;$

o que substituido nas tres expressões de y' dá:

I. Para $y=x^{m}$ $\qquad y'=mx^{m-1}\frac{\log e}{\log e}=mx^{m-1}.$

II. Para $y=\mathrm{Log}\,x$ $\qquad y'=\frac{\mathrm{Log}\,e}{x}=\frac{\mathrm{M}}{x}.$

III. Para $y=a^{x}$ $\qquad y'=a^{x}\frac{\log a}{\log e}=a^{x}\,l\,a.$

Funcções circulares

31. Linhas trigonometricas. Seja $y = \operatorname{sen} x$;

e supponhamos que o raio do circulo é a unidade.

Mudando x em $x+h$ e em $x-h$, resultam

$$\operatorname{sen}(x+h) = \operatorname{sen} x + y'h + \ldots, \quad \operatorname{sen}(x-h) = \operatorname{sen} x - y'h + \ldots,$$

cuja differença $2 \operatorname{sen} h \cos x = 2y'h + \ldots$, dá

$$\frac{\operatorname{sen} h}{h} = \frac{y'}{\cos x} + \ldots;$$

e porque o limite de $\dfrac{\operatorname{sen} h}{h}$ é 1, será

$$\frac{y'}{\cos x} = 1, \quad \text{ou} \quad y' = \cos x.$$

Para $y = \cos x$ podemos discorrer similhantemente; ou notar que, por ser $\cos x = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\pi - x\right)$, é

$$y' = \cos\left(\frac{1}{2}\pi - x\right) \cdot \frac{d\left(\frac{1}{2}\pi - x\right)}{dx} = -\cos\left(\frac{1}{2}\pi - x\right) = -\operatorname{sen} x. \; (*)$$

(*) Ás derivadas successivas pode dar-se a fórma:

De $y = \operatorname{sen} x$, $\quad y' = \operatorname{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$, $y'' = \operatorname{sen}(x+\pi) \ldots, y^{(n)} = \operatorname{sen}\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$.

De $y = \cos x$, $\quad y' = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$, $y'' = \cos(x+\pi) \ldots, y^{(n)} = \cos\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$.

Para

$$y = \text{tang}\, x = \frac{\text{sen}\, x}{\cos x} \text{ é } \quad y' = \frac{\cos x . \cos x + \text{sen}\, x \,\text{sen}\, x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.$$

Para

$$y = \cot x = \text{tang}\left(\frac{1}{2}\pi - x\right) \text{é } \quad y' = -\sec^2\left(\frac{1}{2}\pi - x\right) = -\text{cosec}^2 x.$$

Teremos assim geralmente, sendo $z = fx$:

$$\frac{d\,\text{sen}\, z}{dx} = \cos z \,.\, z', \quad \frac{d\cos z}{dx} = -\text{sen}\, z \,.\, z',$$

$$\frac{d\,\text{tang}\, z}{dx} = \sec^2 z \,.\, z', \quad \frac{d\cot z}{dx} = -\text{cosec}^2 z \,.\, z'.$$

Portanto são eguaes:

A derivada do seno á do arco multiplicado pelo coseno; a derivada do coseno a menos a do arco multiplicada pelo seno; a derivada da tangente á do arco multiplicada pelo quadrado da secante; a derivada da cotangente a menos a do arco multiplicada pelo quadrado da cosecante.

Exemplos:

$$y = \cos l x, \; y' = -\frac{\text{sen}\, l x}{x}; \; y = \sec x, \; y' = \text{tang}\, x \sec x;$$

$$y = l\,\text{sen}\, x, \; y' = \cot x; \; y = l\,\text{tang}\, x, \; y' = \frac{1}{\cos^2 x\, \text{tang}\, x} = \frac{2}{\text{sen} 2x};$$

$$y = \cos x^{\text{sen}\, x}, \text{ ou } l y = \text{sen}\, x\, l \cos x, \; y' = \cos x^{\text{sen}\, x}\left(\cos x\, l \cos x - \frac{\text{sen}^2 x}{\cos x}\right).$$

32. Arcos. Seja y um arco cujo seno é x, o que se escreve assim:

$$y = \text{arc}(\text{sen} = x), \text{ ou } x = \text{sen}\, y;$$

onde são x a variavel principal, e y funcção de x.

Mudando x em $x+h$, vem $x+h = \text{sen}\, y + hy' \cos y + \ldots$; e por conseguinte $1 = y' \cos y$, ou $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. E do mesmo modo se procederá a respeito dos arcos expressos nas outras linhas trigonometricas.

Assim, sendo z e y funcções de x, teremos:

$$y = \text{arc}(\text{sen} = z),\ y' = \frac{z'}{\sqrt{1-z^2}};\quad y = \text{arc}(\cos = z),\ y' = -\frac{z'}{\sqrt{1-z^2}};$$

$$y = \text{arc}(\text{tang} = z), y' = \frac{z'}{1+z^2};\quad y = \text{arc}(\cot = z),\ y' = -\frac{z'}{1+z^2}.$$

Logo:

A derivada d'um arco é egual á do seno repartida pelo coseno; ou a menos a do coseno repartida pelo seno; ou á da tangente multiplicada pelo quadrado do coseno; ou a menos a da cotangente multiplicada pelo quadrado do seno.

Se o raio fosse r, e não a unidade, bastaria restabelecer a homogeneidade nas fórmulas (*Geom. Anal.*, n.º 7).

Assim: $\quad y = \text{arc}(\text{sen} = z), \quad y = \text{arc}(\text{tang} = z), \quad y = \text{tang}\, z,$

dariam: $\quad y' = \frac{rz^1}{\sqrt{r^2 - z^2}}, \qquad y' = \frac{r^2 z'}{r^2 + z^2}, \qquad y' = \frac{r^2 z'}{\cos^2 z}.$

As funcções $\text{sen}\, x$, $\cos x, \ldots$ chamam-se *inversas* de $\text{arc}(\text{sen} = x)$, $\text{arc}(\cos = x), \ldots$; e reciprocamente.

Em geral, resolvendo em ordem a x a equação $y = fx$, a funcção resultante $x = \varphi y$ é inversa de f, e f é inversa de φ.

Derivadas das equações

33. Seja z uma funcção $z=f(x, y)$

de duas variaveis independentes x, y, isto é, de duas variaveis, cada uma das quaes pode variar, sem que a sua variação influa na outra. Discorrendo como no n.º **20**, mudaremos x em $x+h$, e depois no resultado y em $y+k$; o que dará:

$$f(x+h, y)=f(x, y)+h\frac{dz}{dx}+\ldots,$$

e depois $$f(x+h, y+k)=f(x, y)+k\frac{dz}{dy}+h\frac{dz}{dx}+\ldots,$$

ou $$f(x+h, y+k)-f(x, y)=i=k\frac{dz}{dy}+h\frac{dz}{dx}+\ldots$$

Quando h e k forem os augmentos infinitesimos, ou differenciaes, de x e y, será i o correspondente de z; e a equação precedente dará:

$$dz=\frac{dz}{dx}dx+\frac{dz}{dy}dy\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1).$$

Os coefficientes $\frac{dz}{dx}$ e $\frac{dz}{dy}$ são os *coefficientes differenciaes parciaes* de z

em ordem a x e a y; $\frac{dz}{dx}dx$ e $\frac{dz}{dy}dy$ são as *differenciaes parciaes* de z

em ordem a x e a y; e $\frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy$ é a differencial completa ou total, dz, de z, que se compõem das duas parciaes (*).

34. Similhantemente, quando for z funcção de qualquer numero de variaveis x_1, x_2, $x_3 \ldots\ldots$,

teremos $$i = h_1 \frac{dz}{dx_1} + h_2 \frac{dz}{dx_2} + h_3 \frac{dz}{dx_3} + \ldots\ldots,$$

ou, segundo a notação de Leibnitz, passando ás differenciaes,

$$dz = \frac{dz}{dx_1} dx_1 + \frac{dz}{dx_2} dx_2 + \frac{dz}{dx_3} dx_3 + \ldots,$$

onde são $\frac{dz}{dx_1}, \frac{dz}{dx_2}, \frac{dz}{dx_3}, \ldots$ os coefficientes differenciaes parciaes de z em ordem a x_1, x_2, $x_3, \ldots$

(*) Alguns geometras designam por $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ o coefficiente differencial parcial de z em ordem a x; e por $\frac{dz}{dx}$ o coefficinte differencial, quando z é funcção só de x: outros designam o primeiro por $d\frac{z}{dx}$. Segundo estas notações:

em $dz = z'dx$ é $z' = \frac{dz}{dx}$;

em $dz = pdx + qdy$ é $p = \left(\frac{dz}{dx}\right)$ ou $= d\frac{z}{dx}$, $q = \left(\frac{dz}{dy}\right)$ ou $= d\frac{z}{dy}$.

35. Se na equação proposta tivessemos feito variar uma só variavel, achariamos immediatamente o coefficiente differencial parcial respectivo.

$$\text{Assim } \frac{dz}{dx}=\lim.\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h},\ \frac{dz}{dy}=\lim.\frac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k}.$$

E esta operação é permittida, por serem independentes as variaves x, y.

Por exemplo: $$z=\text{arc}\left(\text{tang}=\frac{x}{y}\right)$$

daria separadamente $$\frac{dz}{dx}=\frac{y}{x^2+y^2},\ \frac{dz}{dy}=-\frac{x}{x^2+y^2}.$$

36. Se fizermos variar x ou y em $\frac{dz}{dx}$, acharemos os coefficientes differenciaes de $\frac{dz}{dx}$ em ordem a x ou a y, os quaes se designam por $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dxdy}$. E do mesmo modo obteremos $\frac{d^2z}{dydx}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$, pelas variações de $\frac{dz}{dy}$ em ordem a x ou a y.

Assim, mudando y em $y+k$, em $\frac{dz}{dx}$; e x em $x+h$, em $\frac{dz}{dy}$: resultam

$$\frac{d^2z}{dxdy}=\lim.\frac{\frac{f(x+h,y+k)-f(x,y+k)}{h}-\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}}{k},$$

$$\frac{d^2z}{dydx}=\lim.\frac{\frac{f(x+h,y+k)-f(x+h,y)}{k}-\frac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k}}{h};$$

e, porque os segundos membros são identicos, teremos $\frac{d^2z}{dxdy}=\frac{d^2z}{dydx}$.

Similhantemente acharemos que é $\frac{d^3z}{dx^2dy}=\frac{d^3z}{dxdydx}=\frac{d^3z}{dydx^2}$;

e, em geral, que é indifferente a ordem das differenciações.

Em conformidade com isto, e com o que se disse no n.º 5, serão (*)

$$dz=\frac{dz}{dx}dx+\frac{dz}{dy}dy,\quad d^2z=\frac{d^2z}{dx^2}dx^2+2\frac{d^2z}{dxdy}dx\,dy+\frac{d^2z}{dy^2}dy^2,$$

e, em geral $d^mz=\sum A_\alpha\, dx^\alpha dy^{m-\alpha}\frac{d^mz}{dx^\alpha dy^{m-\alpha}}$,

designando A_α coefficientes numericos $A_0, A_1, \ldots A_m$.

(*) Por ser $d\left(\frac{d^{m+n}z}{dx^m\,dy^n}\right)=\frac{d^{m+n+1}z}{dx^{m+1}\,dy^n}dx+\frac{d^{m+n+1}z}{dx^m\,dy^{n+1}}dy$,

que pode considerar-se como o producto de $\frac{d^{m+n}z}{dx^m dy^n}$ por $\frac{dz}{dx}dx+\frac{dz}{dy}dy$, mudando depois nos numeradores os expoentes em indices: vê-se que, fazendo a mesma mudança, podemos escrever as *equações symbolicas:*

$$dz=\left[\frac{dz}{dx}dx+\frac{dz}{dy}dy\right],\ d^2z=\left[\frac{dz}{dx}dx+\frac{dz}{dy}dy\right]^2,\ldots d^mz=\left[\frac{dz}{dx}dx+\frac{dz}{dy}dy\right]^m.$$

E são assim A_α os coefficientes da fórmula do binomio de Newton.

Com effeito, se for $d^iz=\sum A_\alpha\, dx^\alpha\, dy^{i-\alpha}\frac{d^iz}{dx^\alpha\, dy^{i-\alpha}}=\left[\frac{dz}{dx}dx+\frac{dz}{dy}dy\right]^i$,

tambem será

$$d^{i+1}z=\sum A_\alpha\, dx^\alpha\, dy^{i-\alpha}\left[\frac{dz}{dx}dx+\frac{dz}{dy}dy\right]=\left[\frac{dz}{dx}dx+\frac{dz}{dy}dy\right]^{i+1};$$

37. Seja agora $$F(x, y) = 0$$
uma equação implicita entre as variaveis x, y.

Poderemos, sem a resolver em ordem a y, o que daria $y = fx$, achar as derivadas y', y'',..., considerando $F(x, y)$ como egual a outra variavel z, e formando os coefficientes differenciaes de z pelas regras precedentes.

Assim $$z' = \frac{dz}{dx} + \frac{dz}{dy} y' = 0 \text{ dá } y' = -\frac{\frac{dz}{dx}}{\frac{dz}{dy}}.$$

Por exemplo, de $y^2 + x^2 = r^2$, ou $x^2 + y^2 - r^2 = 0$, tiram-se

$$\frac{dz}{dx} = 2x, \ \frac{dz}{dy} = 2y, \ y' = -\frac{x}{y}.$$

38. D'este modo vem y' expresso em x e y; e não em x sómente, como aconteceria se tivessemos resolvido a proposta em ordem a y. Querendo pois ter y' expresso unicamente em x, resta eliminar y entre a proposta e a sua derivada.

Eliminando, por exemplo, y entre $x^2 + y^2 = r^2$ e a sua derivada $2x + 2yy' = 0$, virá $y'^2 = \frac{x^2}{r^2 - x^2}$.

---

e portanto, sendo a lei verdadeira para dz, tambem o é para d^2z, d^3z,.. $d^m z$, ou geral.

Similhantemente, por ser

$$d\left(\frac{d^{m+n+p+\dots} z}{dx^m dy^n dv^p \dots}\right) = \frac{d^{m+1+n+p+\dots} z}{dx^{m+1} dy^n dv^p \dots} dx + \frac{d^{m+n+1+p+\dots} z}{dx^m dy^{n+1} dv^p \dots} dy + \frac{d^{m+n+p+1+\dots} z}{dx^m dy^n dv^{p+1} \dots} dv + \dots,$$

que pode tomar-se como o producto *symbolico* de $\frac{d^{m+n+p+\dots} z}{dx^m dy^n dv^p \dots\dots}$ por $\frac{dz}{dx} dx + \frac{dz}{dy} dy + \frac{dz}{dv} dv + \dots$, vê-se que, sendo x, y, v,... variaveis independentes, e

$$z = f(x, y, v, \dots),$$

se pode escrever a *equação symbolica*: $$d^m z = \left[\frac{dz}{dx} dx + \frac{dz}{dy} dy + \frac{dz}{dv} dv + \dots\right]^m.$$

••

Cumpre advertir que a eliminação eleva em geral y' ao gráu que tem y na proposta; porque, se esta é do gráu n, y tem n valores; e como o calculo da derivação conserva em y' os radicaes que tem y, vê-se que y' tem egualmente n valores, ou que a equação em y' deve ser do gráu n. Se y' entra linearmente na derivada de $F(x, y) = 0$, é porque y tambem alli se acha, e envolve os mesmos radicaes, que a eliminação e a resolução devem reproduzir explicitamente.

39. Se derivarmos a derivada z' da primeira ordem, teremos

$$z'' = \frac{d^2z}{dx^2} + \frac{2\,d^2z}{dydx}y' + \frac{d^2z}{dy^2}y'^2 + \frac{dz}{dy}y'' = 0,$$

a qual dará y'' em funcção de x, y, y'.

Querendo y'' em funcção de x e y sómente, eliminaremos y' entre as derivadas $z' = 0$, $z'' = 0$. E querendo y'' em funcção de x unicamente, eliminaremos y e y' entre a primitiva e as duas derivadas, $z = 0$, $z' = 0$, $z'' = 0$. Mas estas eliminações elevarão o gráu de y.

Por exemplo: $\quad z = x^4 + 2ax^2y - ay^3 = 0$

dá $\quad z' = (2ax^2 - 3ay^2)y' + 4x^3 + 4axy = 0$

e $\quad z'' = (2ax^2 - 3ay^2)y'' + 8axy' - 6ayy'^2 + 12x^2 + 4ay = 0,$

entre as quaes e a proposta se deverão eliminar y' e y, para ter uma equação entre y'' e x.

40. Seja $\quad F(x, y, z) = 0$

uma equação implicita entre as tres variaveis, x, y, z.

Teremos $\quad \dfrac{dF}{dx}dx + \dfrac{dF}{dy}dy + \dfrac{dF}{dz}dz = 0.$

Se entre as mesmas variaveis houver outra relação

$$z = \varphi(x, y):$$

tirando d'ella $dz = \frac{dz}{dx} dx + \frac{dz}{dy} dy$, e substituindo na primeira, resultará

$$\left(\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{dx}\right) dx + \left(\frac{dF}{dy} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{dy}\right) dy = 0,$$

a qual dá a derivada $$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{dx}}{\frac{dF}{dy} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{dy}},$$

sem que seja necessario eliminar z de $F(x, y, z) = 0$.

Se não houver a relação $z = \varphi(x, y)$, podemos suppril-a considerando φ como arbitraria; e como então é arbitraria $\frac{dy}{dx}$, a equação differencial parte-se nas duas parciaes:

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{dx} = 0, \quad \frac{dF}{dy} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{dy} = 0.$$

É inutil insistir na doutrina analoga relativamente ás ordens superiores: sendo claro que se poderá differenciar cada uma das equações differenciaes de primeira ordem relativamente a x e relativamente a y; o que dará tres equações distinctas: e assim por diante.

Eliminação das constantes e das funcções arbitrarias

41. Equações entre duas variaveis. As derivadas successivas da proposta podem tambem servir para eliminar algumas constantes, ou porque o processo da derivação as faz immediatamente desapparecer, ou pela eliminação d'ellas entre as equações derivadas e a proposta. Mas cumpre advertir que não podem, de qualquer modo, eliminar-se ao todo, entre derivadas, parametros e variaveis, senão tantas quantas são as derivações successivas da proposta; e por isso, se a derivação faz desapparecer um parametro, e tentamos eliminar outro entre a equação primitiva e a derivada, reapparece por essa eliminação o que desapparecera.

É evidente que as equações, que se obtêm desembaraçadas d'alguns parametros, devem exprimir propriedades da proposta, ou da curva que ella representa, independentes dos mesmos parametros.

Assim a derivada $x+yy'=0$ da equação do circulo, $x^2+y^2=r^2$, por não conter r, exprime uma propriedade commum a todos os circulos cujo centro é a origem das coordenadas. Do mesmo modo $y=ax+b$ dá $y'=a$, que exprime uma propriedade commum a todas as rectas parallelas á proposta; mas, se entre estas equações eliminarmos a, resultará $y=xy'+b$, na qual reapparece b.

42. Tambem se pode eliminar uma constante c, resolvendo a proposta em ordem a ella, $c=\varphi(x, y)$, e tomando a derivada d'esta equação. E como este processo, e o da eliminação da constante entre a proposta $F(x, y)=0$ e a sua derivada, devem conduzir a resultados equivalentes, é claro que pelo segundo se deve chegar a uma equação em y', que não será linear quando em $\varphi(x, y)$ houver radicaes provenientes do gráu de c na proposta.

Por exemplo $\quad y^2-2cy+x^2=c^2,\ (y-c)y'+x=0,$

dão, eliminando c, $\quad (2y^2-x^2)y'^2+4xyy'+x^2=0.$

E a proposta, resolvida em ordem a c, e sendo derivada, daria

$$c = -y \pm \sqrt{2y^2 + x^2}, \quad 0 = -y' \pm \frac{2yy' + x}{\sqrt{2y^2 + x^2}},$$

que, desembaraçada do radical, é identica com a precedente.

43. Do que fica exposto se vê que, differenciando n vezes uma equação $F(x, y) = 0$, não pode $y^{(n)}$ entrar na ultima derivada da ordem n senão no primeiro gráu. E por isso, quando apparece uma equação da ordem n, na qual $y^{(n)}$ não entra linearmente, é porque esta equação não proveio immediatamente da differenciação successiva, mas sim de se combinarem entre si e com a proposta as equações derivadas, para eliminar algumas das constantes, das variaveis, ou das derivadas de y de ordem inferior.

44. Equações entre tres variaveis. Nestas equações apresentam-se resultados mais extensos, podendo as derivadas servir para a eliminação de funcções arbitrarias.

Seja $$z = f(t)$$

uma funcção arbitraria de t; e t uma funcção dada, $t = F(x, y)$, das variaveis independentes x, y.

Derivando separadamente em ordem a x e em ordem a y, e dividindo uma das derivadas pela outra, vem

$$\frac{dz}{dx} = f't\frac{dt}{dx}, \quad \frac{dz}{dy} = f't\frac{dt}{dy}, \quad \frac{dz}{dx}\,\frac{dt}{dy} = \frac{dz}{dy}\,\frac{dt}{dx};$$

desapparecendo a funcção arbitraria d'esta relação, que exprime a condição de ser z funcção de t.

Seja, por exemplo, $$z = f(x^2 + y^2);$$

onde $f(x^2+y^2)$ representa uma funcção arbitraria de x^2+y^2, como

$$\log(x^2+y^2),\ \sqrt{x^2+y^2},\ \frac{x^2+y^2}{\operatorname{sen}(x^2+y^2)},\ \text{etc. Teremos}$$

$$\frac{dz}{dx}=p=2xf'(x^2+y^2),\ \frac{dz}{dy}=q=2yf'(x^2+y^2);$$

e, eliminando $f'(x^2+y^2)$, virá $\quad py-qx=0,$

que é commum a todas as funcções de x^2+y^2.

Seja $\quad y-bz=f(x-az).$

Differenciando em ordem a x e z, e em ordem a y e z, vem

$$-bp=(1-ap).f',\quad 1-bq=-aq.f';$$

e eliminando f', resulta $\quad ap+bq=1,$

qualquer que seja a fórma de f.

Similhantemente $\quad \dfrac{y-b}{z-c}=f\left(\dfrac{x-a}{z-c}\right)$

dá $\quad z-c=p(x-a)+q(y-b).$

Opportunamente faremos sentir a importancia d'esta theoria. Por agora limitamo-nos a dizer que as tres equações da segunda ordem poderiam servir para eliminar duas funcções arbitrarias que existissem na primitiva, etc.

Mudança da variavel independente

45. Quando se differencía uma variavel y considerando-a como funcção d'outra x, dá-se a x um augmento differencial arbitrario, e procura-se o correspondente de y; depois, querendo differenciar a primeira derivada, dá-se ainda a x um augmento differencial arbitrario, e procura-se o correspondente d'ella: e assim successivamente. Mas, tanto por simplicidade, como para tornar mais facilmente comparaveis entre si os augmentos da variavel y e das suas derivadas, costuma tomar-se o mesmo augmento para x nas differenciações successivas. E assim, considerando x como variavel independente em $y=fx$, e tomando dx constante, os coefficientes differenciaes ou derivadas successivos são (n.º 5)

$$y'=\frac{dy}{dx},\quad y''=\frac{d^2y}{dx^2},\quad y'''=\frac{d^3y}{dx^3},\ldots$$

46. Qualquer questão tractada pelo calculo differencial conduz a expressões em $x, y, y', y'', \ldots$, taes como

$$\psi(x, y, y', y'', \ldots),$$

para fazer uso das quaes é necessario que da relação $y=Fx$, que liga y com x, se tirem $y', y'', \ldots$, e se substituam na mesma expressão.

Supponhamos porém que, ou por commodidade do calculo, ou pela natureza da questão, a variavel independente é t, e que por isso x e y se consideram como funcções de t. Devem então substituir-se em logar de y', $y'', \ldots$, nas quaes se toma x como variavel independente, as transformadas d'ellas, que resultam de considerar y como funcção de x, e x como funcção da variavel t, agora independente.

Temos assim (n.º 20) $\quad \dfrac{dy}{dt}=y'\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy'}{dt}=y''\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy''}{dt}=y'''\dfrac{dx}{dt},\ldots,$

que dão

$$y' = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}},\ y'' = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}},\ y''' = \frac{\frac{dy''}{dt}}{\frac{dx}{dt}}, \ldots;$$

ou, substituindo em y'', y''', ... as expressões de y', y'', ... que se forem obtendo (n.º 12),

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}},\ y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3},$$

$$y''' = \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{\frac{dx^2}{dt^2}\frac{d^3y}{dt^3} - \frac{dx}{dt}\cdot\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^3x}{dt^3} - 3\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^5}, \ldots$$

47. As expressões de $\frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^3x}{dt^3}, \ldots$, e de $\frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^3y}{dt^3}, \ldots$, que entram nas fórmulas precedentes, tiram-se das relações que ligam x e y com t.

Assim, se forem $x = \varphi t,\ y = f t,$

serão $\frac{dx}{dt} = \varphi' t,\ \frac{d^2x}{dt^2} = \varphi'' t, \ldots$, e $\frac{dy}{dt} = f' t,\ \frac{d^2y}{dt^2} = f'' t, \ldots$

Se x e y forem funcções implicitas de t, ou se as relações entre ellas e t forem dadas por duas equações em x, y, t, tiraremos $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$, das duas equações differenciaes de primeira ordem; depois $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, das de segunda ordem: e assim successivamente.

48. As fórmulas dos n.os 46 e 47 são geraes; e por isso se deduzem d'ellas as relativas aos casos particulares de se considerar x ou y como variavel independente.

No caso de ser x a variavel independente, é $t=x$; e aquellas fórmulas

dão $$\frac{dx}{dt}=1,\ \frac{d^2x}{dt^2}=0,\ldots,\ \text{e}\ \frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dt^2}=\frac{d^2y}{dx^2},\ldots$$

. . . .

No caso de ser y a variavel independente, é $t=y$; e as mesmas fórmulas

dão $$\frac{dy}{dt}=1,\ \frac{d^2y}{dt^2}=0,\ldots,\ \text{e}\ \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\dfrac{d^2x}{dy^2}}{\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^3},\ \frac{d^3y}{dx^3}=\frac{3\left(\dfrac{d^2x}{dy^2}\right)^2-\dfrac{dx}{dy}\dfrac{d^3x}{dy^3}}{\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^5},\ldots$$

49. Supponhamos, por exemplo, que a expressão de ψ do n.º 46 dá em coordenadas rectangulares a solução d'um problema relativo ás curvas planas; e que se quer applicar esta solução a uma curva cuja equação, $r=ft$, é dada em coordenadas polares r, t. Temos neste caso dois modos de applicar a expressão, de que se tracta: ou transformar a equação $r=ft$ em coordenadas rectangulares; ou transformar a expressão ψ em coordenadas polares pelo processo ensinado nos numeros precedentes, o que é quasi sempre mais commodo.

Referindo as coordenadas rectangulares á mesma origem e ao mesmo eixo dos x que as polares, a relação entre umas e outras é

$$x=r\cos t,\ y=r\,\mathrm{sen}\,t.$$

Se considerarmos pois t como variavel independente, e r, x, y, como variaveis que dependem de t pelas equações

$$r=ft,\ x=r\cos t,\ y=r\,\mathrm{sen}\,t,$$

teremos: $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{dr}{dt}\cos t-r\,\mathrm{sen}\,t,\ \dfrac{dy}{dt}=\dfrac{dr}{dt}\,\mathrm{sen}\,t+r\cos t,$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d^2r}{dt^2}\cos t-2\frac{dr}{dt}\,\mathrm{sen}\,t-r\cos t,\ \frac{d^2y}{dt^2}=\frac{d^2r}{dt^2}\,\mathrm{sen}\,t+2\frac{dr}{dt}\cos t-r\,\mathrm{sen}\,t,$$

....

por meio das quaes se formarão as expressões de y', y'', do n.º 46, que entram em ψ.

Assim a expressão $$\psi=\frac{xy'-y}{yy'+x}\dots\dots\dots\dots(a)$$

dá $$\psi=\frac{x\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}-y}{y\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}+x}=\frac{r\cos t\,\dfrac{r'\,\mathrm{sen}\,t+r\cos t}{r'\cos t-r\,\mathrm{sen}\,t}-r\,\mathrm{sen}\,t}{r\,\mathrm{sen}\,t.\dfrac{r'\,\mathrm{sen}\,t+r\cos t}{r'\cos t-r\,\mathrm{sen}\,t}+r\cos t}=\frac{r}{r'}\dots\dots(a').$$

Do mesmo modo $$\psi=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}\dots\dots\dots\dots(b)$$

dá

$$\psi=\frac{\left\{1+\left(\dfrac{r'\,\mathrm{sen}\,t+r\cos t}{r'\cos t-r\,\mathrm{sen}\,t}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{(r'\cos t-r\,\mathrm{sen}\,t)(r''\,\mathrm{sen}\,t+2r'\cos t-r'\,\mathrm{sen}\,t)-(r'\,\mathrm{sen}\,t+r\cos t)(r''\cos t-2r'\,\mathrm{sen}\,t-r\cos t)}{(r'\cos t-r\,\mathrm{sen}\,t)^3}},$$

ou
$$\psi = \frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2r'^2 - rr''} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (b').$$

E, para applicar ψ a uma curva, cuja equação $r = ft$ seja dada, restará substituir, em logar de r' e r'', as suas expressões

$$r' = \frac{dr}{dt} = f't,\ r'' = \frac{d^2r}{dt^2} = f''t.$$

50. Com as derivadas da equação $y = fx$ é facil, pelo que se disse no n.º 48, achar as da equação inversa $x = \varphi y$, sem resolver a primeira em ordem a x; porque as equações d'aquelle numero relativas ao caso de ser $y = t$, dão as derivadas $\frac{dx}{dy}, \frac{d^2x}{dy^2}, \ldots$ expressas em $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots$

Por exemplo, para $y = a^x$,

com as derivadas $\frac{dy}{dx} = ka^x,\ \frac{d^2y}{dx^2} = k^2a^x, \ldots$, achariamos

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{ka^x} = \frac{1}{ky},\ \frac{d^2x}{dy^2} = -\frac{k^2a^x}{k^3a^{3x}} = -\frac{1}{k(a^x)^2} = -\frac{1}{ky^2}, \ldots,$$

como achariamos pela resolução da proposta em ordem a x,

que dá
$$x = \frac{l\,y}{l\,a} = \frac{l\,y}{k}.$$

Similhantemente

$y = \operatorname{sen} x$ dá $\quad \frac{dy}{dx} = \cos x;\ \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}},$

$y = \operatorname{tang} x$ dá $\quad \frac{dy}{dx} = \sec^2 x;\ \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\sec^2 x} = \frac{1}{1 + y^2}.$

51. Nas derivadas da primeira ordem, por ser $\frac{dy}{dx}$ o quociente de $\frac{dy}{dt}$ dividida por $\frac{dx}{dt}$, qualquer que seja t (n.º 46), podemos empregar a notação $dy=\frac{dy}{dx}dx$, sendo dy e dx referidas a qualquer variavel independente. Por exemplo, sendo z e y qualquer variaveis, dependentes ou independentes, a equação $y=\operatorname{sen} z$ dá

$$dy=\cos z\,dz,\quad dz=\frac{dy}{\cos z}=\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}.$$

52. Se na expressão de ψ entra mais d'uma variavel independente, pode ainda applicar-se o mesmo methodo. Assim, entrando nella as variaveis x, y, z, ligadas pela equação $z=\mathrm{F}(x, y)$, e querendo transformar as derivadas de z, relativas a x e y, em outras relativas a novas variaveis s, t, de que são funcções as primeiras, consideraremos z como funcção de x e y, e x e y como funcções de s e t; e teremos

$$\frac{dz}{ds}=\frac{dz}{dx}\cdot\frac{dx}{ds}+\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{ds},\quad \frac{dz}{dt}=\frac{dz}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dt},$$

que, eliminando, darão $\frac{dz}{dx}$ e $\frac{dz}{dy}$ expressos em $\frac{dz}{ds}$, $\frac{dz}{dt}$, $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dy}{dt}$,

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\frac{dz}{ds}\cdot\frac{dy}{dt}-\frac{dz}{dt}\cdot\frac{dy}{ds}}{\frac{dx}{ds}\cdot\frac{dy}{dt}-\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dy}{ds}},\quad \frac{dz}{dy}=\frac{\frac{dz}{dt}\,\frac{dx}{ds}-\frac{dz}{ds}\,\frac{dx}{dt}}{\frac{dx}{ds}\,\frac{dy}{dt}-\frac{dx}{dt}\,\frac{dy}{ds}}.$$

Depois teremos similhantemente as derivadas de $\frac{dz}{dx}$ e $\frac{dz}{dy}$ relativas a

x e y, expressas nas suas derivadas relativas a s e t. Por exemplo, derivando $\frac{dz}{dx}$, vem

$$\frac{d\left(\frac{dz}{dx}\right)}{ds}=\frac{d^2z}{dx^2}\frac{dx}{ds}+\frac{d^2z}{dxdy}\frac{dy}{ds},\quad \frac{d\left(\frac{dz}{dx}\right)}{dt}=\frac{d^2z}{dx^2}\frac{dx}{dt}+\frac{d^2z}{dxdy}\frac{dy}{dt},$$

as quaes, depois de substituir nellas por $\frac{d\left(\frac{dz}{dx}\right)}{ds}$ e $\frac{d\left(\frac{dz}{dx}\right)}{dt}$ as derivadas, em ordem a s e t, da fracção que achamos para valor de $\frac{dz}{dx}$, darão, eliminando, $\frac{d^2z}{dx^2}$ e $\frac{d^2z}{dxdy}$.

Fórmula de Maclaurin

53. Fazendo $x=0$ na serie de Taylor, e designando $f, f', f'', \ldots$ os valores correspondentes de $fx, f'x, f''x, \ldots$, resulta

$$fh=f+hf'+\frac{1}{2}h^2f''+\frac{1}{1.2}h^3f'''+\ldots$$

Mudando h em x, o que não altera as funcções $fx, f'x, f''x$, que são independentes de h, nem por conseguinte $f, f', f''\ldots$: fica

$$fx=f+xf'+\frac{1}{2}x^2f''+\frac{1}{2.2}x^2f'''+\ldots\ldots\ldots\ldots(\mathrm{B}).$$

Esta fórmula é a de Maclaurin ou de Stirling, a qual se deduz assim da de Taylor.

54. Mas tambem da serie de Maclaurin se pode deduzir a de Taylor. Com effeito, suppondo $fx = \varphi(x+h)$ em (B), vem

$$\varphi(x+h) = \varphi h + x\varphi' h + \frac{1}{2}x^2\varphi'' h + \frac{1}{2.3}\varphi''' h + \ldots,$$

na qual, chamando x e h o que se chamou h e x, vem a serie (A).

Vê-se pois que as duas fórmulas têm a mesma generalidade; e que a vantagem da de Taylor, para desenvolver em serie segundo as potencias de h as funcções da fórma $f(x+h)$, consiste em se poder fazer nestas $h = 0$ antes da differenciação.

Mas a fórmula de Maclaurin é d'uma applicação muito extensa; e o seu uso preferivel frequentes vezes ao das outras na desenvolução em serie.

55. A duas fórmulas de Maclaurin e de Taylor demonstram-se tambem facilmente pelo methodo dos coefficientes indeterminados.

Fórmula de Maclaurin. Seja

$$fx = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots..$$

Formando as derivadas successivas, teremos

$$f'x = B + 2Cx + 3Dx^2 + \ldots,\ f''x = 2C + 2.3\,Dx + \ldots,\ f'''x = 2.3D + \ldots;$$

depois, fazendo $x = 0$, acharemos

$$f = A,\ f' = B,\ f'' = 2\,C,\ f''' = 2.3\,D, \ldots.$$

e por conseguinte (B).

Fórmula de Taylor. Seja

$$f(x+h) = A + Bh + Ch^2 + Dh^3 + \ldots.$$

Formando as derivadas em ordem a h, e attendendo a que é (n.º 20)

$$\frac{df(x+h)}{dh}=f'(x+h)\cdot\frac{d(x+h)}{dh}=f'(x+h),$$

teremos

$$f'(x+h)=\mathrm{B}+2\mathrm{C}h+3\mathrm{D}h^2+\ldots,$$

$$f''(x+h)=2\mathrm{C}+2.3\mathrm{D}h+\ldots$$

$$f'''(x+h)=2.3.\mathrm{D}+\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

depois, fazendo $h=0$, acharemos

$$fx=\mathrm{A},\ f'x=\mathrm{B},\ f''x=2\mathrm{C},\ f'''x=2.3\,\mathrm{D},\ldots$$

e por conseguinte (A).

Esta demonstração do theorema fundamental do calculo differencial é sem duvida simplicissima; mas, além do emprego anticipado da fórma da serie, o qual é commum a outras demonstrações, suppõe conhecida a derivada das potencias.

Nem quizemos por isso omittil-a, nem podiamos collocal-a em primeiro logar.

Dos casos em que a serie de Taylor é insufficiente

56. A serie (A) do n.º 6 pode ser defeituosa e inapplicavel ao desenvolvimento da funcção $f(x+h)$, quando se dá a x um valor determinado a; porque, no caso de haver potencias negativas, ou radicaes, na funcção fx, pode acontecer que, mudando x em $x+h$, as constantes, que entram com $a+h$ nos denominadores ou debaixo dos radicaes, destruam a, e fique alli sómente h; havendo assim potencias negativas ou fraccionarias de h em $f(a+h)$, contra a hypothese em que se funda a serie (A).

Por exemplo, mudando x em $x+h$, e fazendo depois $x=a$, nas expressões

$$y=\sqrt{x}+\sqrt[3]{(x-a)^4},\ y=\frac{1}{(x-a)^m}+\sqrt{x},$$

teriamos, respectivamente,

$$Y=\sqrt{a}+\frac{h}{2\sqrt{a}}+h^{\frac{3}{4}}-\frac{h^2}{8\sqrt{a^3}}\ldots,\ Y=h^{-m}+\sqrt{a}+\frac{h}{2\sqrt{a}}-\frac{h^2}{8\sqrt{a^3}}\ldots$$

Similhantemente $\quad y=\cot x,\ y=\log x,$

dão, para $x=0$, $\quad Y=\cot h,\ Y=\log h,$

que devem conter nos seus desenvolvimentos potencias negativas de h, por isso que $h=0$ as deve tornar infinitas.

Vê-se pois que, se as regras dadas subsistem em quanto não se attribuem a x valores determinados, nem sempre succede o mesmo quando x toma valores particulares; porque se pode então cair em uma excepção do theorema de Taylor. Convém por isso ter caracteres, que denunciem esta circumstancia; e saber como, dando-se ella, se poderá achar o verdadeiro desenvolvimento de $f(a+h)$.

53. Supponhamos que $x = a$ faz desapparecer um termo P de fx. Então P tem a fórma $P = Q(x-a)^m$.

1.° Se m é inteiro e positivo, a derivada da ordem m contém um termo sem $x-a$; e por isso o factor Q, que a hypothese $x = a$ faz desapparecer das $m-1$ primeiras derivadas, torna a apparecer nas da ordem m e seguintes. Neste caso o theorema de Taylor não é insufficiente.

Por exemplo, de $$y = (x-a)^2(x-b) - ax^2$$

tiram-se $$y' = (x-a)^2 + 2(x-a)(x-b) - 2ax,$$
$$y'' = 4(x-a) + 2(x-b) - 2a,\ y''' = 6,$$

que, para $x = a$, se reduzem a

$$y = -a^3,\ y' = -2a^2,\ y'' = -2b,\ y''' = 6;$$

e a serie de Taylor dá $\quad Y = -a^3 - 2a^2h - bh^2 + h^3.$

2.° Se m é uma fracção comprehendida entre os limites l e $l+1$, a hypothese $x = a$ anniquila todas as l primeiras derivadas de P; mas na seguinte, da ordem $l+1$, entra o factor $(x-a)^{m-l-1}$, que tem o expoente negativo, e que $x = a$ torna infinito: e o mesmo acontece d'ahi por diante; de sorte que a serie de Taylor é insufficiente a partir d'esse termo. E assim devia acontecer; porque o radical de $(x-a)^m$, desapparecendo da serie, mas conservando-se em $f(a+h)$, faria que os dois membros não tivessem egual numero de valores, se no segundo não entrasse h affecto do mesmo radical.

Por exemplo, em $$y = x^3 + (x-b)(x-a)^{\frac{5}{2}},$$

quando se faz $x = a$, tornam-se infinitas as derivadas da terceira ordem e das seguintes; sendo por isso a serie de Taylor insufficiente desde o quarto termo. E com effeito, mudando x em $a+h$, esta funcção torna-se

em $$Y = a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + (a-b)h^{\frac{5}{2}} + h^3 + h^{\frac{7}{2}}.$$

O mesmo acontece no primeiro exemplo do numero precedente, desde o terceiro termo.

3.° Se m é negativo, $x-a$ entra no denominador de P e de suas derivadas, as quaes a hypothese $x=a$ torna infinitas; sendo assim a serie de Taylor inapplicavel desde o primeiro termo ao desenvolvimento, no qual h tem potencias negativas.

Por exemplo $$y=(x^2-ax)^{-\frac{1}{2}}$$

dá, para $x=a$, $$Y=\frac{1}{a}\left(\frac{h}{a}\right)^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2a}\left(\frac{h}{a}\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{3}{8a}\left(\frac{h}{a}\right)^{\frac{3}{2}}\dots$$

O mesmo tem logar no segundo exemplo do numero precedente.

58. Para ver mais claramente a correspondencia que ha entre o apparecimento d'um termo com potencia fraccionaria ou negativa de h e o facto de se tornarem infinitas as derivadas a partir d'esse termo, supponhamos que, ordenado o desenvolvimento em relação a h, a menor potencia fraccionaria de h seja m, comprehendido entre os inteiros l e $l+1$, sendo $l<0$ no caso de m negativo. Teremos

$$f(a+h)=A+Bh+Ch^2+\dots Lh^l+Mh^m+\dots$$

Tomando as derivadas successivas d'esta equação em ordem a h, vem:

$$f'(a+h)=B+2Ch+3Dh^2+\dots lLh^{l-1}+mMh^{m-1}+\dots,$$

$$f''(a+h)=2C+3.2Dh\dots+l(l-1)Lh^{l-2}+m(m-1)Mh^{m-2}+\dots,$$

....

$$f^{(l)}(a+h)=l(l-1)(l-2)\dots 1L+m(m-1)(m-2)\dots(m-l+1)Mh^{m-l}+\dots,$$

$$f^{(l+1)}(a+h)=m(m-1)(m-2)\dots(m-l)Mh^{m-l-1}+\dots$$

Se fizermos $h=0$, as l primeiras darão

$$B=f'a,\ C=\frac{1}{2}f''a,\ D=\frac{1}{1.2.3}f'''a,\ldots L=\frac{1}{1.2\ldots l}f^{(l)}a;$$

e a serie

$$f(a+h)=fa+hf'a+\frac{1}{2}h^2f''a+\ldots\frac{1}{1.2.3\ldots l}h^lf^{(l)}a+Mh^m+\ldots$$

coincidirá com a de Taylor até o termo em h^l; mas a coincidencia acabará nesse termo, porque $h=0$ torna infinitas $f^{(l+1)}a$ e as derivadas seguintes. Portanto:

1.° *Em quanto* $x=a$ *não torna infinitas alguma das funcções* y, y', y'',..., *o desenvolvimento que dá a serie de Taylor não é defeituoso.*

2.° *Se* $x=a$ *torna infinita alguma das funcções* y, y', y'',..., *as seguintes o serão egualmente; o theorema de Taylor é defeituoso desde o termo que tem a primeira derivada infinita; e o expoente de* h *nesse termo deve ser negativo, ou fraccionario, e menor que o inteiro egual á ordem d'aquella derivada.*

Assim, se $x=a$ tornar y infinito, tambem y', y'',... serão infinitos, e h terá potencias negativas.

É necessario advertir que, no caso de ser fx a somma de muitas funcções, podem as derivadas da mesma ordem das funcções componentes ser umas infinitas e outras finitas; e por isso deve discorrer-se a respeito de cada uma d'ellas separadamente. Assim é que no primeiro exemplo do n.° 56 o termo $\sqrt{x}$ não dá derivada infinita para $x=a$, e o termo $\sqrt[3]{(x-a)^4}$ dá y'', y'''....... infinitas; e por isso deve sommar-se $\sqrt{(a+h)}=\sqrt{a}+\frac{h}{2\sqrt{a}}-\frac{h^2}{8\sqrt{a^3}}+\ldots$, que só tem potencias inteiras e positivas de h, com $\sqrt[3]{(a+h-a)^4}=h^{\frac{4}{3}}$.

Como a derivada da ordem n de $y=x^m$ tem a fórma $y^{(n)}=Ax^{m-n}$, nenhum valor de x differente de zero a torna infinita; e por isso a fórmula do binomio $(x+h)^m$ tem logar para todos os valores de x differentes de zero. O mesmo se pode dizer das series do $\log(x+h)$, que, pondo $x=1$, dá a de $\log(1+h)$; e das de $\operatorname{sen}(x+h)$ e $\cos(x+h)$, que, pondo $x=0$, dão as de $\operatorname{sen}h$ e $\cos h$.

59. Para obter o desenvolvimento que, a partir do termo defeituso da serie de Taylor, deve substituir esta serie, mudaremos x em $a+h$ na funcção proposta, e, por meio das series conhecidas, desenvolveremos $f(a+h)$, ou $f(a+h)$ menos a parte achada.

Por exemplo $$y=c+(x-b)\sqrt{x-a}$$

dá $$y'=\frac{3x-2a-b}{2\sqrt{x-a}};$$

e como $x=a$ torna infinitas y' e as derivadas seguintes, deve h ter um expoente fraccionario entre 0 e 1. Com effeito, mudando x em $a+h$, resulta

$$Y=c+(a-b)\,h^{\frac{1}{2}}+h^{\frac{3}{2}},$$

que se compõem de c e da parte que não dá a serie de Taylor.

Do mesmo modo $$y=c+x+(x-b)(x-a)^{\frac{3}{2}}$$

dá

$$y'=1+(x-a)^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{2}(x-b)(x-a)^{\frac{1}{2}},\ y''=3(x-a)^{\frac{1}{2}}+\frac{3}{4}(x-b)(x-a)^{-\frac{1}{2}};$$

e como $x=a$ torna infinitas y'' e as derivadas seguintes, o desenvolvimento de $f(a+h)$ tem uma potencia fraccionaria de h entre 1 e 2. Com effeito, substituindo $a+h$ em logar de x na proposta, resulta

$$y=c+a+h+(a-b)\,h^{\frac{3}{2}}+h^{\frac{5}{2}},$$

que se compõem de $c+a+h$ e da parte que não dá a serie de Taylor.

60. Para desenvolver em serie $f(a+h)$ menos a parte achada pela fórmula de Taylor, podemos empregar o processo seguinte:

Seja A a parte achada pela fórmula de Taylor. Se dividirmos $f(a+h)-A$, depois de convenientemente reduzida, pela maior potencia h^m de h que for factor d'este resto, isto é, por uma potencia de h tal que $h=0$ não torne o quociente nullo nem infinito, teremos

$$\frac{f(a+h)-\mathrm{A}}{h^m}=\mathrm{M}.$$

Seja B a parte de M independente de h, isto é, o valor de M correspondente a $h=0$. Se dividirmos $\mathrm{M}-\mathrm{B}$ pela maior potencia h^n de h que for factor d'este resto, teremos

$$\frac{\mathrm{M}-\mathrm{B}}{h^n}=\mathrm{N}.$$

E assim por diante. D'onde resulta, por substituições successivas,

$$f(a+h)=\mathrm{A}+\mathrm{B}h^m+\mathrm{C}h^{m+n}+\mathrm{D}h^{m+n+p}+\ldots.$$

61. Supponhamos que $x=a$ faz desapparecer de y um radical que subsiste em y', isto é, que a primeira potencia de $x-a$ multiplica este radical. Então y' tem, para $x=a$, mais valores do que tem y; porque, subsistindo em y' o radical que desapparecera de y, o numero dos valores de y' é, em geral, egual ao dos valores de y, multiplicado pelo gráu do mesmo radical.

Se, pela elevação ás potencias convenientes, fizermos desapparecer o radical da proposta, e differenciarmos a equação resultante, $z=f(x,y)=0$, teremos $\frac{dz}{dx}+\frac{dz}{dy}y'=0$. Mas, segundo o que fica dito, para $x=a$, devem corresponder a cada valor b de y dois, pelo menos, α e β de y': logo, chamando A e B os valores de $\frac{dz}{dx}$ e $\frac{dz}{dy}$ relativos ao systema de valores a e b que se considera, terão logar simultaneamente as equações $\mathrm{A}+\mathrm{B}\alpha=0$, $\mathrm{A}+\mathrm{B}\beta=0$, que dão $\mathrm{B}(\alpha-\beta)=0$; ou $\mathrm{B}=0$, $\mathrm{A}=0$, $y'=\frac{0}{0}$.

Assim a equação da primeira ordem reduz-se a uma identidade, e não determina y'.

Como $x=a$ anniquila o primeiro termo da derivada de segunda ordem

$$\frac{dz}{dy}y''+\frac{d^2z}{dy^2}y'^2+2\frac{d^2z}{dxdy}y'+\frac{d^2z}{dx^2}=0,$$

e como em $\frac{d^2z}{dy^2}, \frac{d^2z}{dxdy}, \frac{d^2z}{dx^2}$, não ha radicaes, esta equação derivada, do segundo gráu em y', dará dois valores α e β de y' correspondentes a cada um dos de y.

Se a cada valor de $y=fa$ corresponderem tres valores de y', anniquilar-se-hão tambem os tres coefficientes differenciaes de segunda ordem; e, para ter $y'=f'a$, será necessario recurrer á derivada de terceira ordem, na qual se anniquilarão os coefficientes de y'' e y''', e que dará tres valores de y' para cada valor de y.

Em geral, para ter y' por meio da equação desembaraçada do radical que $x=a$ faz desapparecer de y, será necessario recorrer á derivada da ordem d'esse radical.

Por exemplo, $x=a$ reduz a $y=a$ e $y'=1+\sqrt{a-b}$ respectivamente a equação $y=x+(x-a)\sqrt{x-b}$ e a sua derivada $y'=1+\sqrt{x-b}+\frac{x-a}{2\sqrt{x-b}}$, correspondendo assim dois valores de y' a $x=a$, $y=a$. Mas, se desembaraçarmos a proposta do radical, e tomarmos as duas primeiras derivadas, teremos

$$(y-x)^2=(x-a)^2(x-b),\ 2(y-x)(y'-1)=(x-a)(3x-a-2b),$$

$$(y-x)y''+(y'-1)^2=3x-2a-b,$$

que, para $x=a$, se reduzem respectivamente a

$$y=a,\ 0=0,\ (y'-1)^2=a-b;$$

e da ultima d'estas tiram-se os valores de y', $y'=1\pm\sqrt{a-b}$, identicos com os já achados.

Similhantemente a derivada de $y=(x-a)(x-b)^{\frac{1}{3}}$ reduz-se, para

$x=a$, a $y'=\sqrt[3]{(a-b)}$. Mas, fazendo desapparecer o radical, e tomando as tres primeiras derivadas, teremos

$$y^3=(x-a)^3(x-b),\quad 3y^2y'=(x-a)^2(4x-3b-a),$$

$$y^2y''+2yy'^2=2(x-a)(2x-a-b),\ y^2y'''+6yy'y''+2y'^3=2(4x-3a-b),$$

que $x=a$ reduz respectivamente a $y=0$, $0=0$, $0=0$, $y'^3=a-b$; e a ultima dá $y'=\sqrt[3]{(a-b)}$, como do primeiro modo.

Se $(x-a)^2$ multiplica o radical de y, este radical desapparecerá de y e y' pela hypothese $x=a$, mas reapparecerá em y''; e por isso a cada systema de valores de y e y' corresponderá mais d'um valor de y''. Desembaraçando pois do radical a proposta $y=fx$, e procurando y'' por meio da derivada de segunda ordem da equação implicita resultante $z=0$, esta equação deverá ser satisfeita independentemente dos valores de y'', e dar $y''=\frac{0}{0}$. De sorte que será necessario passar ás derivadas das ordens seguintes para obter y''.

Do mesmo modo discorreremos, quando $(x-a)^3$ for o multiplicador do radical de y; e assim por diante.

Por exemplo $x=a$ reduz a $y=a$, $y'=1$, $y''=2\sqrt{a}$, a equação $y=x+(x-a)^2\sqrt{x}$ e as suas primeira e segunda derivadas. Mas, se desembaraçarmos a proposta do radical, e tomarmos as quatro primeiras derivadas, teremos

$$(y-x)^2=(x-a)^4x,\ 2(y-x)(y'-1)=(x-a)^3(5x-a),$$

$$(y'-1)^2+(y-x)\,y''=2(x-a)^2(5x-2a),$$

$$3(y'-1)\,y''+(y-x)\,y'''=6(x-a)(5x-3a),$$

$$3y''^2+4(y'-1)\,y'''+(y-x)\,y^{\text{IV}}=12(5x-4a),$$

que a hypothese $x=a$ reduz respectivamente a

$$y=a,\ 0=0,\ y'=1,\ 0=0,\ y''=2\sqrt{a},$$

em conformidade com o que achamos pelo primeiro methodo.

Limites da serie de Taylor. Fórma do resto nas series de Taylor e de Maclaurin

62. Se considerarmos um termo Ah^{α} da serie ascendente de $f(a+h)$, a somma d'elle com os seguintes terá a fórma $h^{\alpha}(A+Bh^{\beta})$; sendo β positivo, assim como todos os expoentes de h que entram em B. E como, fazendo h indefinidamente pequeno, Bh^{β} póde approximar-se contínua e indefinidamente de zero, poderá h tomar-se tão pequeno que seja $A > Bh^{\beta}$.

Portanto: *sempre será possivel dar a* h *valores tão pequenos, que qualquer termo da serie de* f (a + h) *seja maior que a somma de todos os seguintes.*

63. Quando fa e $f'a$ são finitos, póde pois tomar-se h tão pequeno na serie $f(a+h) = fa + hf'a + \ldots$, que seja $hf'a$ maior que a somma dos termos seguintes, e que por isso o signal da differença $f(a+h) - fa$ dependa do signal de $f'a$; sendo assim fa crescente ou decrescente, segundo for $f'a$ positivo ou negativo. Por exemplo, como $fa = \operatorname{sen} a$ e $fa = \cos a$ dão respectivamente $f'a = \cos a$ e $f'a = -\operatorname{sen} a$, vê-se que no primeiro quadrante o seno cresce com o arco, e o coseno decresce.

Assim: *se* f'x *se conservar positiva desde* x = a *até* x = a + h, *sem que nesse intervallo se torne infinita,* fx *crescerá em todo elle.*

64. Posto isto, fazendo crescer h desde 0 até b na funcção $f'(a+h)$, sejam h_1 o valor de h que dá o minimo resultado $f'(a+h_1) = f'p$, e h_2 o que dá o maximo resultado $f'(a+h_2) = f'q$.

Se fizermos $$f(a+h) = fa + Mh \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1),$$

e chamarmos P, Q, dois limites entre os quaes M esteja comprehendido, teremos

$$f(a+h) - fa - Ph > 0, \quad -f(a+h) + fa + Qh > 0:$$

quantidades que são nullas para $h = 0$; e que, pelo que acabâmos de vêr, crescerão desde $h=0$ até $h=b$, ficando ambas maiores que zero, se, entre estes limites, as suas derivadas em ordem a h forem positivas, isto é, se forem

$$f'(a+h)-\mathrm{P}>0, \quad -f'(a+h)+\mathrm{Q}>0.$$

E porque é evidente que estas condições se verificarão se tomarmos por P o minimo valor de $f'(a+h)$ e por Q o maximo, teremos (1), ficando M comprehendido entre $f'p$ e $f'q$.

Sejam $f''(a+h_1)=f''p$ e $f''(a+h_2)=f''q$ o minimo e o maximo valor de $f''(a+h)$, desde $h=0$ até $h=b$.

Se fizermos $$f(a+h)=fa+hf'a+\mathrm{M}h^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

e chamarmos P, Q, dois limites entre os quaes M esteja comprehendido, isto é, dois numeros taes que sejam

$$f(a+h)-fa-hf'a-\mathrm{P}h^2>0, \quad -f(a+h)+fa+hf'a+\mathrm{Q}h^2>0,$$

satisfaremos, pelo que acabamos de vêr, a estas condições, entre os dois valores 0 e b de h, se, entre elles, forem as derivadas

$$f'(a+h)-f'a-2\mathrm{P}h>0, \quad -f'(a+h)+f'a+2\mathrm{Q}h>0;$$

e estas serão egualmente satisfeitas, entre os mesmos limites de h, se, entre elles, forem as suas derivadas

$$f''(a+h)-2\mathrm{P}>0, \quad -f''(a+h)+2\mathrm{Q}>0.$$

E porque é evidente que estas desegualdades se verificarão, entre os mesmos valores de h, tomando por 2P e 2Q o minimo e o maximo valor de $f''(a+h)$, teremos (2), sendo M comprehendido entre $\frac{1}{2}f''p$ e $\frac{1}{2}f''q$.

Seguindo o mesmo discurso: se chamarmos $f^{(n)}(a+h_1)=f^{(n)}p$ e $f^{(n)}(a+h_2)=f^{(n)}q$ o minimo e o maximo valor de $f^{(n)}(a+h)$, entre os limites 0 e b de h; e se, fazendo

$$f(a+h)=fa+hf'a+\frac{1}{2}h^2f''a+\ldots\frac{h^{n-1}}{1.2..(n-1)}f^{(n-1)}a+\mathrm{M}h^n\ ,\ldots(3),$$

procurarmos dois numeros P e Q que comprehendam M, ou para os quaes sejam

$$f(a+h)-fa-hf'a\ldots-\mathrm{P}h^n>0,\ -f(a+h)+fa+hf'a\ldots+\mathrm{Q}h^n>0:$$

facilmente se vê que chegaremos ás condições

$$f^{(n)}(a+h)-1.2\ldots n\mathrm{P}>0,\ -f^{(n)}(a+h)+1.2\ldots n\mathrm{Q}>0,$$

ás quaes evidentemente satisfazem

$$1.2\ldots n\mathrm{P}=f^{(n)}p,\ 1.2\ldots n\mathrm{Q}=f^{(n)}q.$$

Teremos pois (3), sendo M comprehendido entre $\dfrac{f^{(n)}p}{1.2\ldots n}$ e $\dfrac{f^{(n)}q}{1.2\ldots n}$.

65. Como $1.2\ldots n.\mathrm{M}$ está comprehendido entre o minimo $f^{(n)}p$ e o maximo $f^{(n)}q$ dos valores que toma $f^{(n)}x$ desde $x=a$ até $x=a+h$, segue-se que o seu valor será um d'entre estes, correspondente a $x=a+\theta h$, representando θ um numero positivo e menor que a unidade. Logo, se, desde x até $x+h$, nenhuma das derivadas das n primeiras ordens for infinita, será, com a fórma dada por Lagrange,

$$f(x+h)=fx+hf'x+\ldots\frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}x+\frac{h^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(x+\theta h)\ldots(\mathrm{A}').$$

D'este modo poderemos apreciar o limite do erro que se commette quando se pára em um termo da serie de Taylor, até a ordem do qual as derivadas são finitas.

66. Tambem se pode exprimir do modo seguinte o resto da fórmula de Taylor.

Sejam x, z, variaveis independentes;

$$\text{e}\quad fz - fx - (z-x)f'x \ldots - \frac{(z-x)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{(n-1)}x = \varphi(z,\, x) \ldots (a).$$

Differenciando em ordem a x, e reduzindo, vem

$$-\frac{(z-x)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{(n)}x = \frac{d\varphi\,(z,\, x)}{dx} \ldots\ldots\ldots\ldots (b).$$

Segundo o que vimos no numero precedente, é

$$\varphi\,(x,\, z) = \varphi\,(x,\, y + z - y) = \varphi\,(x,\, y) + (z-y)\frac{d[\varphi(x,\, y + \theta_1(z-y))]}{d\,[y + \theta_1\,(z-y)]},$$

que, fazendo $x = z$, e attendendo a ser $\varphi\,(z,\, x) = 0$ em virtude de (a),

se reduz a $$0 = \varphi\,(z,\, y) + (z-y)\frac{d[\varphi(z,\, y + \theta_1(z-y))]}{d\,[y + \theta_1\,(z-y)]},$$

ou pondo x em logar de y, a

$$\varphi\,(z,\, x) = -(z-x)\frac{d\,[\varphi\,(z,\, x) + \theta_1\,(z-x)]}{d\,[z,\, x + \theta_1(z-x)]}.$$

Mudando x em $x+\theta_1(z-x)$ na expressão (b) de $\frac{d\varphi(z,x)}{dx}$, e substituindo o resultado nesta de $\varphi(z,x)$, vem

$$\varphi(z,x)=\frac{(z-x)^n(1-\theta_1)^{n-1}}{1.2.\ldots.(n-1)}f^{(n)}[x+\theta_1(z-x)].$$

Finalmente, substituindo esta em (a), e pondo $z=x+h$, resulta a fórma dada por Cauchy,

$$f(x+h)=fx+hf'x+..+\frac{h^{n-1}}{1.2..(n-1)}f^{(n-1)}x+\frac{h^n(1-\theta_1)^{n-1}}{1.2..(n-1)}f^{(n)}(x+\theta_1 h)..(\mathrm{A}'').$$

Sendo assim $(1-\theta_1)^n f^{(n+1)}(x+\theta_1 h)$ o factor que no n.º 6 chamamos $\mathrm{P}^{(n)}$.

67. Como já notámos (n.º 53), a serie de Tayler converte-se na de Maclaurin, fazendo $x=0$, e mudando depois h em x.

Operando pois esta mudança em (A′) e (A″), obteremos as fórmas analogas da serie completa de Maclaurin:

$$fx=f+xf'+\ldots\frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}+\frac{x^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(\theta x)\ldots\ldots(\mathrm{B}'),$$

$$fx=f+xf+\ldots\frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}+\frac{(1-\theta_1)^{n-1}x^n}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n)}(\theta_1 x)\ldots(\mathrm{B}'').$$

68. Para que uma serie represente a funcção desenvolvida, é necessario, como dissemos no fim do n.º 17, que seja convergente para a funcção, isto é, que o resto convirja para zero. O que poderá verificar-se recorrendo a alguma das fórmas que tem o resto nas fórmulas (A′) e (A″), (B′) e (B″) (*).

Exemplos:

I. A expressão $y=a^x$ dá $\quad y'=ka^x,\ y''=k^2a^x,\ldots y^{(n)}=k^n a^x.$

Como estas derivadas são finitas para os valores finitos de x, a serie

$$a^{x+h}=a^x+kha^x+\ldots+\frac{k^{n-1}h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}a^x+\frac{k^nh^n}{1.2\ldots n}a^{x+\theta h}$$

será convergente, por tender para zero a razão $\frac{hk}{i}$ de dois termos consecutivos.

E o resto convergirá para zero; porque, tomando $i>hk$, e escrevendo o coefficiente de $a^{x\cdot\theta h}$ debaixo da fórma $\frac{hk}{1}.\frac{hk}{2}\ldots\frac{hk}{i-1}\times\frac{hk}{i}.\frac{hk}{i+1}\ldots\frac{hk}{n}$, vê-se que, para n infinito, o segundo factor é infinitesimo. Portanto a serie representa a^{x+h}, qualquer que seja o valor finito de x.

II. Tomando as derivadas de Log x, acha-se

$$\operatorname{Log}(x+h)=\operatorname{Log}x+\frac{h}{x}\ldots\mp\frac{h^{n-1}}{(n-1)x^{n-1}}\pm\frac{1}{(n-1)}\frac{h^n(1-\theta_1)^{n-1}}{(x+\theta_1h)^n}.$$

Como a razão de dois termos consecutivos, $\frac{i}{i+1}.\frac{h}{x}=\frac{1}{1+\frac{1}{i}}.\frac{h}{x}$, tende

---

(*) A serie de Taylor pode transformar-se em fracção continua. (Veja-se o opusculo do sr. Francisco Gomes Teixeira, intitulado: *Desenvolvimento das funcções em fracção contínua*. Coimbra, 1871).

para o limite $\frac{h}{x}$. a serie é convergente, nos casos de ser $\frac{h}{x} < 1$, ou $\frac{h}{x}$ negativo e $-\frac{h}{x} < 1$. E em ambos estes casos, o limite do resto,

$$\frac{1}{n-1}\left(\frac{h}{x}\right)^n\left(\frac{1}{1+\theta_1\frac{h}{x}}\right).\left(\frac{1-\theta_1}{1+\theta_1\frac{h}{x}}\right)^{n-1}$$

é zero. Portanto a serie representa Log $(x+h)$, quando $\frac{h}{x}$ está comprehendido entre -1 e $+1$.

III. Seja a serie do binomio de Newton

$$(x+h)^m = x^m + mhx^{m-1} + .. \frac{m.(m-1)..(m-(n-1))}{1.2......(n-1)} h^n(1-\theta_1)^{n-1}(x+h\theta_1)^{m-n}.$$

Como a razão $\frac{m-(i-1)}{i}.\frac{h}{x}$ de dois termos consecutivos tende para o limite $\frac{h}{x}$, a serie é convergente nos casos de ser $\frac{h}{x}$ positivo e < 1 ou $-\frac{h}{x}$ positivo e < 1.

Sendo $m - i < i$, $m < i' < m + 1$, e escrevendo o resto debaixo da fórma de producto dos factores $\pm m.\frac{m-1}{1}..\frac{m-i+1}{i-1}, \frac{m-i}{i}..\frac{m+1-i''}{i'-1}$,

$$\frac{i'-m}{i'}..\frac{n-1-m}{n-1}, \left(1+\theta_1\frac{h}{x}\right)^{m-1}.\left(\frac{h}{x}\right)^n\left(\frac{1-\theta_1}{1+\theta_1\frac{h}{x}}\right)^{n-1} x^m; \text{ onde}$$

o primeiro factor é finito, o segundo é o producto de fracções proprias, o terceiro é o producto de fracções que tendem para o limite superior 1, e o quarto tende para zero: vê-se que, em ambos os casos, o limite d'esse producto é zero. Portanto a serie representa $(x+h)^m$, ou quando m é inteiro e positivo, ou quando $\frac{h}{x}$ está comprehendido entre -1 e $+1$.

Fórmula de Lagrange

69. Sejam as equações

$$u = fy,\ y = \psi(t + x\varphi y) \dots\dots\dots\dots\dots (1).$$

Tracta-se de desenvolver u em ordem ás potencias de x, sem eliminar y entre as propostas (1).

Derivando a primeira separadamente em ordem a x e a t, e depois eliminando $f'y$, teremos

$$\frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx} \cdot f'y,\ \frac{du}{dt} = \frac{dy}{dt} \cdot f'y,\ \frac{du}{dt} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot \frac{dy}{dt};$$

ou, multiplicando por $\varphi' y$,

$$\frac{du}{dt} \cdot \frac{d\varphi y}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot \frac{d\varphi y}{dt} \dots\dots\dots\dots\dots (2).$$

Similhantemente, derivando a segunda das mesmas equações (1), e eliminando ψ', acharemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \varphi y,$$

ou, multiplicando por $f'y$, $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{du}{dt}\varphi y$ .... (3).

Derivando esta equação em ordem a x, e attendendo a (2), vem

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{du}{dt}\frac{d\varphi y}{dx} + \frac{d^2u}{dxdt}\varphi y = \frac{du}{dx}\frac{d\varphi y}{dt} + \frac{d^2u}{dxdt}\varphi y = \frac{d\left(\frac{du}{dx}\varphi y\right)}{dt};$$

ou, em virtude de (3), $\dfrac{d^2u}{dx^2} = \dfrac{d\left(\frac{du}{dt}(\varphi y)^2\right)}{dt}$.

Em geral, se for $\dfrac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} = \dfrac{d^{n-2}\left(\frac{du}{dt}(\varphi y)^{n-1}\right)}{dt^{n-2}}$

a derivação, attendendo a (2) e a (3), dará

$$\frac{d^nu}{dx^n} = \frac{d^{n-2}\left(\frac{d^2u}{dtdx}(\varphi y)^{n-1} + (n-1)\frac{du}{dt}\frac{d\varphi y}{dx}.(\varphi y)^{n-2}\right)}{dt^{n-2}}$$

$$= \frac{d^{n-2}\left(\frac{d^2u}{dtdx}(\varphi y)^{n-1} + (n-1)\frac{du}{dx}\frac{d\varphi y}{dt}(\varphi y)^{n-2}\right)}{dt^{n-2}}$$

$$= \frac{d^{n-1}\left(\frac{du}{dx}(\varphi y)^{n-1}\right)}{dt^{n-1}} = \frac{d^{n-1}\left(\frac{du}{dt}(\varphi y)^n\right)}{dt^{n-1}}.$$

Portanto a lei é verdadeira para qualquer valor de n.

70. Posto isto, fazendo $x=0$, ficam

$$u=f(\psi t),\ \varphi y=\varphi(\psi t),\ \left(\frac{du}{dt}\right)=f'(\psi t)\cdot\psi' t;$$

e a fórmula de Maclaurin dá

$$(\mathrm{C})\ldots\ldots u=\begin{cases} f(\psi t)+xf'(\psi t).\psi' t.\varphi(\psi t)+\dfrac{x^2}{2}\,\dfrac{d\,[f'(\psi t).\psi' t.(\varphi(\psi t))^2]}{dt} \\ +\ldots\dfrac{x^n}{1.2\ldots n}\,\dfrac{d^{n-1}[f'(\psi t).\psi' t.(\varphi(\psi t))^n]}{1.2\ldots n\,dt^{n-1}}. \end{cases}$$

Da fórmula (C) resulta immediatamente a que achou Lagrange para $u=fy,\ y=t+x\varphi y$ (*), que é

$$u=ft+xf't.\varphi t+\frac{x^2}{2}\frac{d[f't.(\varphi t)^2]}{dt}+\ldots\frac{x^n d^{n-1}[f't.(\varphi t)^n]}{1.2\ldots n\,dt^{n-1}}\ldots(\mathrm{C}_1).$$

Quando for $u=y$, deverá na fórmula (C) fazer-se $ft=\psi t$, e $f'(\psi t)=1$; e na fórmula (C_1) fazer-se $ft=t$, e $f't=1$.

(*) E tambem a fórmula (C) resulta de (C_1), substituindo nesta $f(\psi t)$ em logar de ft, e $\varphi(\psi t)$ em logar de φt.

Com effeito, fazendo $t+x\varphi y=z$ nas equações (1), e por conseguinte $y=\psi z$, estas equações equivalem a $u=f(\psi z)$, $z=t+x\varphi(\psi z)$, ás quaes, applicando a fórmula (C_1), vem (C). (Bertrand, *Calc. diff.*, n.º 312.)

Desenvolvimento em serie das funcções de muitas variaveis

71. I. Extensão da Fórmula de Taylor. Seja $z = f(x, y)$ uma funcção de duas variaveis independentes, x, y.

Para desenvolver $Z = f(x+h, y+k)$

em serie ordenada segundo as potencias e productos de h e k, podemos mudar primeiramente x em $x+h$, e depois y em $y+k$ no resultado; ou mudar primeiramente y em $y+k$, e depois x em $x+h$.

Mudando x em $x+h$, virá

$$f(x+h, y) = z + h\frac{dz}{dx} + \frac{h^2}{2}\frac{d^2z}{dx^2} + \ldots;$$

e depois, mudando y em $y+k$, os termos d'esta tornar-se-hão em

$$z + k\frac{dz}{dy} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2z}{dy^2} + \ldots,\ h\left(\frac{dz}{dx} + k\frac{d^2z}{dxdy} + \ldots\right),\ \frac{h^2}{2}\left(\frac{d^2z}{dx^2} + \ldots\right),$$

e assim por diante; e portanto será

$$Z = z + k\frac{dz}{dy} + h\frac{dz}{dx} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2z}{dy^2} + kh\frac{d^2z}{dxdy} + \frac{h^2}{2}\frac{d^2z}{dx^2} + \ldots,$$

cujo termo geral é $\frac{h^m\, k^n}{1.2\ldots m \times 1.2\ldots n} \cdot \frac{d^{m+n}z}{dx^m\, dy^n}$;

excepto para $m = 0$ ou para $n = 0$, aos quaes corresponderão os termos respectivos $\frac{k^n}{1.2\ldots n}\frac{d^nz}{dy^n}$, $\frac{h^m}{1.2\ldots m}\frac{d^mz}{dx^m}$.

Se mudassemos y em $y+k$ e depois x em $x+h$, teriamos

$$Z = z + h\frac{dz}{dx} + k\frac{dz}{dy} + \frac{h^2}{2}\frac{d^2z}{dx^2} + hk\frac{d^2z}{dydx} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2z}{dy^2} + \ldots,$$

cujo termo geral é $\dfrac{k^n h^m}{1.2\ldots n \times 1.2\ldots m}\cdot\dfrac{d^{n+m}z}{dy^n dx^m}$.

72. Comparando termo a termo estes resultados, que devem ser identicos, acha-se que é $\dfrac{d^{m+n}z}{dx^m\, dy^n} = \dfrac{d^{n+m}z}{dy^n\, dx^m}$. D'onde resulta, em conformidade com o que já vimos no n.º 36, que: *para tomar as derivadas successivas d'uma funcção relativamente a duas variaveis, é indifferente a ordem pela qual se faz a differenciação.*

Por exemplo, de $z = \dfrac{x^3}{y^2}$ tiram-se:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{3x^2}{y^2},\ \frac{dz}{dy} = -\frac{2x^3}{y^3},\ \frac{d^2z}{dydx} = \frac{d^2z}{dxdy} = -\frac{6x^2}{y^3},$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{6x}{y^2},\ \frac{d^2z}{dy^2} = \frac{6x^3}{y^4},\ \frac{d^3z}{dx^2dy} = \frac{d^3z}{dydx^2} = \frac{d^3z}{dxdydx} = -\frac{12x}{y^3},$$

$$\frac{d^3z}{dy^2dx} = \frac{d^3z}{dydxdy} = \frac{d^3z}{dxdy^2} = \frac{18x^2}{y^4}.$$

73. Discorrendo d'um modo similhante áquelle pelo qual chegámos ás fórmulas dos n.os 65 e 66; ou, antes, fazendo $h = \alpha h'$, $k = \alpha k'$, e desenvolvendo z em ordem a α pela fórmula de Maclaurin: vê-se que, depois d'um termo da ordem $n-1$, o resto da serie é (*)

$$R_n = \sum \frac{h^i k^{n-i} d^n f(x+\theta h, y+\theta k)}{1.2\ldots i \times 1.2\ldots(n-i) dx^i dy^{n-i}},$$

ou $$R_n = n(1-\theta_1)^{n-1} \sum \frac{h^i k^{n-i} d^n f(x+\theta_1 h, y+\theta_1 k)}{1.2\ldots i \times 1.2\ldots(n-i)\, dx^i dy^{n-i}}$$

74. Para desenvolver as funcções de tres, quatro, ou mais variaveis $Z = f(x_1 + h_1, x_1 + h_2, x_3 + h_3, \ldots)$, seguiremos um processo similhante: mudando x_1 em $x_1 + h_1$, e desenvolvendo $f(x_1 + h_1, x_2, x_3, \ldots)$; depois mudando, nos termos d'este desenvolvimento, x_2 em $x_2 + h_2$, o que dará $f(x_1 + h_1, x_2 + h_2, x_3, \ldots)$; e assim por diante.

75. II. Extensão da Fórmula de Maclaurin. Seja

$$y = f(x, x_1, x_2, \ldots x_{n-1}) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (a).$$

Ponhamos $$y = f + \Sigma\,(qx, x_1, x_2, \ldots \times x^p \,.\, x_1^{p_1} \,.\, x_2^{p_2} \ldots) \ldots (b).$$

(*) Se usarmos da notação symbolica empregada na pag. 34, isto é, se tomarmos $\left[\frac{du}{dx}\right]^i \times \left[\frac{du}{dy}\right]^{n-i}$ como representando $\frac{d^{i+n-i}u}{dx^i dy^{n-i}}$, este resto exprimir-se-ha pelas fórmulas symbolicas:

$$R_n = \frac{\left(h\left[\frac{du}{dx}\right] + k\left[\frac{du}{dy}\right]\right)^n}{1.2\ldots\ldots n}, \text{ ou } R_n = \frac{(1-\theta_1)^{n-1}\left(h\left[\frac{dv}{dx}\right] + k\left[\frac{dv}{dy}\right]\right)^n}{1.2\ldots\ldots\ldots\ldots(n-1)};$$

sendo $u = f(x + \theta h, y + \theta k)$, $v = f(x + \theta_1 h, y + \theta_1 k)$.

Differenciando p vezes em ordem a x, depois p_1 vezes em ordem a x_1, depois p_2 vezes em ordem a x_2, e assim por diante; e fazendo por fim nullos $x, x_1, x_2, \ldots$: vê-se que é

$$q_{x, x_1, x_2, \ldots} = \frac{d^{p+p_1+p_2+\ldots} y}{1.2\ldots p dx^p \times 1.2\ldots p_1 \times dx_1^{p_1} \times 1.2\ldots p_2 dx_2^{p_2} \times \ldots} \ldots (c);$$

onde se devem fazer nullos $x, x_1, x_2, \ldots$ depois da differenciação.

Assim a proposta (a) desenvolve-se em serie ordenada segundo as potencias e productos de $x, x_1, x_2, \ldots$, pela fórmula (b), na qual f e $q_{x, x_1, x_2, \ldots}$ são os valores (a) de y e (c) de

$$\frac{d^{p+p_1+p_2+\ldots} y}{1.2\ldots p dx^p \times 1.2\ldots p_1 dx_1^{p_1} \times 1.2\ldots p_2 dx_2^{p_2} \times \ldots},$$

depois de nelles ter feito $x, x_1, x_2, \ldots$ nullos.

Parando no termo da ordem $p + p_1 + \ldots - 1 = n - 1$, vê-se, como no n.º 73, que o resto é

$$R_n = \sum \frac{x^p . x_1^{p_1} . x_2^{p_2} \ldots \times d^{p+p_1+p_2+\ldots} f^{(n)} (\theta x, \theta x_1, \theta x_2, \ldots)}{1.2\ldots p dx^p \times 1.2\ldots p_1 dx^{p_1} \times 1.2\ldots p_2 dx^{p_2} \times \ldots},$$

ou

$$R_n = n(1-\theta_1)^{n-1} \sum \frac{x^p . x_1^{p_1} . x_2^{p_2} \ldots \times d^{p+p_1+p_2+\ldots} f^{(n)} (\theta x, \theta x_1, \theta x_2, \ldots)}{1.2\ldots p dx^p \times 1.2\ldots p_1 dx^{p_1} \times 1.2\ldots p_2 dx^{p_2} \times \ldots}$$

76. III. Fórmula de Laplace. Sejam as equações

$$\left.\begin{array}{c} u = f(y_1, y_2, \ldots y_n), \\ y_1 = \psi_1(t_1 + x_1 z_1),\ y_2 = \psi_2(t_2 + x_2 z_2), \ldots y_n = \psi_n(t_n + x_n z_n), \\ z_1 = \varphi_1(y_1, y_2, \ldots y_n),\ z_2 = \varphi_2(y_1, y_2, \ldots y_n), \ldots z_n = \varphi_n(y_1, y_2, \ldots y_n), \end{array}\right\} \ldots (1);$$

onde $x_1, x_2, \ldots x_n$ e $t_1, t_2, \ldots t_n$ entram como variaveis independentes, Serão $\dfrac{dy_1}{dt_1}=\left(1+x_1\sum\dfrac{dz_1}{dy_i}\cdot\dfrac{dy_i}{dt_1}\right).\psi'_1,\ \dfrac{dy_1}{dx_1}=\left(z_1+x_1\sum\dfrac{dz_1}{dy_i}\cdot\dfrac{dy_i}{dx_1}\right).\psi'_1;$

e, eliminando ψ'_1 e reduzindo, virá

$$\frac{dy_1}{dx_1}-z_1\frac{dy_1}{dt_1}=x_1\sum_2^n\frac{dz_1}{dy_i}\left(\frac{dy_1}{dt_1}.\frac{dy_i}{dx_1}-\frac{dy_1}{dx_1}.\frac{dy_i}{dt_1}\right).$$

Mas, se entre as $n-1$ ultimas equações da segunda linha de (1) eliminassemos todas as $n-1$ variaveis $y_2, y_3, \ldots$, menos uma d'ellas y_i, ficaria uma equação entre y_1 e y_i, que, resolvida em ordem a y_i, daria

$$y_i=\mathrm{F}(y_1,\ x_2,\ x_3,\ldots,\ t_2,\ t_3,\ldots);$$

depois, derivando em ordem a x_1 e em ordem a t_1, e por fim eliminando F' entre as duas derivadas, viria

$$\frac{dy_i}{dx_1}\cdot\frac{dy_1}{dt_1}-\frac{dy_i}{dt_1}\cdot\frac{dy_1}{dx_1}=0,\ldots\ldots\ldots\ldots(2);$$

e por conseguinte $\displaystyle\sum_2^n\frac{dz_1}{dy_i}\left(\frac{dy_i}{dx_1}\ \frac{dy_1}{dt_1}-\frac{dy_i}{dt_1}\cdot\frac{dy_1}{dx_1}\right)=0.$

Portanto é $\displaystyle\frac{dy_1}{dx_1}-z_1\frac{dy_1}{dt_1}=0;$

e do mesmo modo $\displaystyle\frac{dy_i}{dx_i}-z_i\frac{dy_i}{dt_i}=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3).$

Attendendo a (3) e (2), teremos pois

$$\frac{du}{dx_1}=\sum_1^n\frac{du}{dy_i}\cdot\frac{dy_i}{dx_1}=z_1\frac{du}{dt_1}-\sum_2^n\left(z_1\frac{du}{dy_i}\frac{dy_i}{dt_1}-\frac{du}{dy_i}\cdot\frac{dy_i}{dx_1}\right)$$

$$=z_1\frac{du}{dt_1}-\frac{1}{\frac{dy_1}{dt_1}}\sum_2^n\frac{du}{dy_i}\left(\frac{dy_1}{dx_1}\cdot\frac{dy_i}{dt_1}-\frac{dy_1}{dt_1}\cdot\frac{dy_i}{dx_1}\right)=z_1\frac{du}{dt_1}.$$

Similhantemente $$\frac{du}{dx_i}=z_i\frac{du}{dt_i}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4),$$

que, applicada a $u=z_i$ dá $\frac{dz_i}{dx_i}=z_i\frac{dz_i}{dt_i}\ldots;$

e, eliminando z_i entre esta e (4), vem

$$\frac{du}{dx_i}\cdot\frac{dz_i}{dt_i}=\frac{du}{dt_i}\cdot\frac{dz_i}{dx_i}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5).$$

77. Differenciando (4), e attendendo a (5) e a (4), acha-se

$$\frac{d^2u}{dx_i^2}=\frac{dz_i}{dx_i}\cdot\frac{du}{dt_i}+z_i\frac{d^2u}{dt_i\,dx_i}=\frac{dz_i}{dt_i}\cdot\frac{du}{dx_i}+z_i\frac{d^2u}{dt_i\,dx_i}=\frac{d\left(z_i\frac{du}{dx_i}\right)}{dt_i}=\frac{d\left(z_i^2\frac{du}{dt_i}\right)}{dt_i}.$$

Em geral, se for $\dfrac{d^{p-1}u}{dx_i{}^{p-1}} = \dfrac{d^{p-2}\left(z_i{}^{p-1}\dfrac{du}{dt_i}\right)}{dt_i{}^{p-2}}$,

será

$$\frac{d^pu}{dx_i^p} = \frac{d^{p-2}\left[(p-1)\,z_i{}^{p-2}\dfrac{dz_i}{dx_i}.\dfrac{du}{dt_i} + z_i{}^{p-1}\dfrac{d^2u}{dt_i\,dx_i}\right]}{dt_i{}^{p-2}}$$

$$= \frac{d^{p-2}\left[(p-1)\,z_i{}^{p-2}.\dfrac{dz_i}{dt_i}.\dfrac{du}{dx_i} + z_i{}^{p-1}\dfrac{d^2u}{dx_i\,dt_i}\right]}{dt_i{}^{p-2}},$$

ou

$$\frac{d^pu}{dx_i^p} = \frac{d^{p-1}\left(z_i{}^{p-1}\dfrac{du}{dx_i}\right)}{dt_i{}^{p-1}} = \frac{d^{p-1}\left(z_i^p\dfrac{du}{dt_i}\right)}{dt_i{}^{p-1}} \text{........(6).}$$

Portanto esta fórmula tem logar para qualquer valor de p.

78. Como, em virtude de (6), a expressão de $\dfrac{d^pu}{dx_i^p}$ correspondente a $x_i = 0$ é a mesma, quer se supponha x_i nullo antes da differenciação, quer depois; e como, em virtude de (4), $\left(z_i^p\dfrac{du}{dt_i}\right)$ pode formar-se achando o coefficiente differencial $\dfrac{du}{dx_i}$, mudando nelle z_i em $z_i{}^p$, e fazendo depois x_i nullo: teremos, seguindo este processo,

$$\frac{d^pu}{dx_i^p} = \frac{d^{p-1}\left(z_i^p\dfrac{du}{dt_i}\right)}{dt_i{}^{p-1}} = \frac{d^{p-1}\left[\dfrac{du}{dx_i}\right]}{dt_i{}^{p-1}},$$

e por conseguinte

$$\frac{d^{p+p'}u}{dx_i{}^p\,dx_{i'}{}^{p'}}=\frac{d^{p-1}\left(\dfrac{d^{p'}\left[\dfrac{du}{dx_i}\right]}{dx_{i'}{}^{p'}}\right)}{dt_i{}^{p-1}}=\frac{d^{p-1}\left(\dfrac{d\left[\dfrac{d^{p'}u}{dx_{i'}{}^{p'}}\right]}{dx_i}\right)}{dt_i{}^{p-1}}.$$

Mas, suppondo $x_{i'}=0$, será tambem, com a mesma interpretação,

$$\frac{d^{p'}u}{dx_{i'}{}^{p'}}=\frac{d^{p'-1}\left[\dfrac{du}{dx_{i'}}\right]}{dt_{i'}{}^{p'-1}};$$

logo

$$\frac{d^{p+p'}u}{dx_i{}^p\,dx_{i'}{}^{p'}}=\frac{d^{p+p'-2}\left[\dfrac{d^2u}{dx_i\,dx_{i'}}\right]}{dt_i{}^{p-1}dt_{i'}{}^{p'-1}};$$

comtanto que se mudem z_i em $z_i{}^p$ e $z_{i'}$ em $z_{i'}{}^{p'}$, e se façam x_i e $x_{i'}$ nullos depois da differenciação, em $\left[\dfrac{d^2u}{dx_i\,dx_{i'}}\right]$.

79. Progredindo do mesmo modo, vê-se que se pode escrever a fórmula (b) assim:

$$u=\mathrm{u}+\sum x_1{}^{p_1}.x_2{}^{p_2}..x_n{}^{p_n}\,\frac{d^{p_1+p_2...-n}\left[\dfrac{d^nu}{dx_1.dx_2...dx_n}\right]}{1.2..p_1dt_1{}^{p_1-1}\times1.2..p_2dt_2{}^{p_2-1}..\times1.2..p_ndt_n{}^{p_n-1}}..\text{(D)};$$

entendendo-se que em $\left[\dfrac{d^nu}{dx_1.dx_2...dx_n}\right]$ se devem mudar respectivamente $z_1, z_2, ... z_n$ em $z_1{}^{p_1}, z_2{}^{p_2}, ... z_n{}^{p_n}$, e fazer $x_1, x_2, ... x_n$ nullos.

Tal é a fórmula de Laplace (*Mec. Cel.*, liv. 2.º, n.º 21).

..

80. Nesta fórmula comprehende-se a de Lagrange, quando é $n=1$, ou $u=fy$ e $y=\psi(t+xz)$.

Com effeito teremos então

$$\frac{du}{dx}=\frac{du}{dy}\cdot\frac{dy}{d(t+xz)}\cdot\left(z+x\frac{dz}{dx}\right)=\frac{du}{d(t+xz)}\left(z+x\frac{dz}{dx}\right),$$

que, pelas mudanças indicadas, se torna em $\frac{du}{dt}z^p$, e por conseguinte (D) em

$$u=\mathrm{u}+\sum\frac{x^p}{1.2\ldots p}\,\frac{d^{p-1}\left(\frac{du}{dt}.z^p\right)}{dt^{p-1}},$$

identica á fórmula (C).

II

APPLICAÇÕES DO CALCULO DIFFERENCIAL

Desenvolvimento em serie das funcções d'uma variavel

Faremos applicação das fórmulas que ficam demonstradas.

81. I. Da Fórmula de Taylor. Seja

$$y = \log \operatorname{sen}(x+h).$$

Chamando M o modulo, teremos

$$y' = \mathrm{M}\cot x,\ y'' = -\frac{\mathrm{M}}{\operatorname{sen}^2 x},\ y''' = \frac{2\,\mathrm{M}\cos x}{\operatorname{sen}^3 x}, \ldots,$$

e $\log \operatorname{sen}(x+h) = \log \operatorname{sen} x + \mathrm{M}\,h\cot x - \mathrm{M}\,h^2 \dfrac{\cot x}{\operatorname{sen} 2x} + \ldots$

A differença $\log \operatorname{sen}(x+h) - \log \operatorname{sen} x = \Delta$ será

$$\Delta = \mathrm{M}\,h\cot x\left(1 - \frac{h}{\operatorname{sen} 2x} + \frac{h^2}{3\operatorname{sen}^2 x}\right) - \frac{\mathrm{M}\,h^4}{4\operatorname{sen}^4 x}\left(1 - \frac{2}{3}\operatorname{sen}^2 x\right)\ldots;$$

e similhantemente

$$\Delta_1 = \log\cos(x+h) - \log\cos x,\ \Delta_2 = \log\operatorname{tang}(x+h) - \log\operatorname{tang} x,$$

serão

$$\Delta_1 = -Mh\operatorname{tang} x\left(1 + \frac{h}{\operatorname{sen} 2x} + \frac{h^2}{3\cos^2 x}\right) - \frac{Mh^4}{4\cos^4 x}\left(1 - \frac{2}{3}\cos^2 x\right)\ldots,$$

$$\Delta_2 = \frac{2Mh}{\operatorname{sen} 2x}\left(1 - h\cot 2x + \frac{2}{3}h^2(1 + 2\cot^2 2x)\right) + \frac{4Mh^4\cos 2x}{\operatorname{sen}^4 2x}\left(1 - \frac{\operatorname{sen}^2 2x}{6}\right)\ldots:$$

onde h representa o augmento do arco rectificado (Vid. *Alg. Sup.*, n.º 158).

Tendo, por exemplo, $\log\operatorname{sen} 27^\circ 30'$, e querendo $\log\operatorname{sen} 27^\circ 33'$, poremos $h = \text{arc de } 3' = 3\operatorname{sen} 1'$, e faremos o calculo do modo seguinte:

$\log h$	6.94085		6.94085	1.º termo	0,00072803
$\log M$	9.63778		6.86215	2.º	78
$\log\cot x$ ...	0,28352	c. $\operatorname{sen} 2x$	0.08664	3.º	0
	6.86215		3.88964	Δ	0,0007273
			$\log\operatorname{sen} 27^\circ 30'$		9.6644056
			$\log\operatorname{sen} 27\ 33'$		9.6651329.

Este methodo é principalmente util quando se querem calcular os logarithmos dos senos com grande approximação (Vej. o *Conn. des Temps* para 1817).

82. Da Fórmula de Maclaurin. Seja $y = \operatorname{arc}(\operatorname{tang} = x)$. Serão

$$y' = \cos^2 y,\ y'' = -\operatorname{sen} 2y \cdot y' = -\operatorname{sen} 2y\cos^2 y,\ y''' = -2\cos^3 y\cos 3y;$$

e, em geral, se for $y^{(2n-1)} = A_{2n-1}\cos(2n-1)y\cos^{(2n-1)} y$, teremos

$$y^{(2n)} = A_{2n}\operatorname{sen} 2ny\cos^{2n} y,\ y^{(2n+1)} = A_{2n+1}\cos(2n+1)\cos^{2n+1} y,$$

sendo $\quad A_{2n} = -(2n-1)A_{2n-1},\ A_{2n+1} = 2A_{2n}$:

logo, [fórm. (B)], $\quad \text{arc}(\text{tang} = x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 \ldots;$

fórmula que dá a expressão notavel $\quad \frac{1}{4}\pi = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots$

Similhantemente se acharão as series de $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, a^x, $\log(1+x)$; e, em geral, as de todas as funcções de x, cujo desenvolvimento proceder segundo as potencias inteiras e positivas d'esta variavel.

83. Para desenvolver y em ordem ás potencias descendentes de x, basta mudar na sua expressão x em $\frac{1}{t}$, desenvolver y em ordem ás potencias ascendentes de t, e depois restituir $\frac{1}{x}$ em logar de t.

Por exemplo $\quad y = \sqrt{x^2 - a^2} = x\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} = x\sqrt{1-t^2}$

dá $\quad y = x\left(1 - \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{8}t^4 - \ldots\right) = x - \frac{a^2}{2x} - \frac{a^4}{8x^3} \ldots$

84. Tambem pode servir o theorema de Maclaurin para resolver as equações entre duas variaveis em ordem a uma d'ellas, e para desenvolver as funcções implicitas; como se vê nos exemplos seguintes:

1.° De $\quad my^3 - yx = m,$

derivando e fazendo $x=0$, tiram-se

$$f=1,\ f'=\frac{1}{3m},\ f''=0,\ f'''=-\frac{2}{27m^3},\ldots;$$

e [fórm. (B)], $\qquad y=1+\frac{x}{3m}-\frac{x^3}{81m^3}+\ldots$

2.° De $\qquad \operatorname{sen} y = x \operatorname{sen}(P+y)$

tiram-se

$$y'=\frac{\operatorname{sen}(P+y)}{\cos y - x\cos(P+y)}=\frac{\operatorname{sen}^2(P+y)}{\operatorname{sen} P},$$

$$y''=\frac{\operatorname{sen} 2(P+y)}{\operatorname{sen} P}y',\ y'''=\frac{2y'^2\cos 2(P+y)+y''\operatorname{sen} 2(P+y)}{\operatorname{sen} P}$$

$$=\frac{2\operatorname{sen}(P+y)\operatorname{sen} 3(P+y)}{\operatorname{sen}^2 P}y';$$

....

depois $\qquad f=0,\ f'=\operatorname{sen} P,\ f''=\operatorname{sen} 2P,\ f'''=2\operatorname{sen} 3P,\ldots;$

e, [fórm. (B)], $\qquad y\operatorname{sen} 1''=x\operatorname{sen} P+\frac{1}{2}x^2\operatorname{sen} 2P+\frac{1}{3}x^3\operatorname{sen} 3P+\ldots$

3.° De $\qquad \cos m-\cos(m+y)=x\operatorname{sen} m$

tiram-se

$$y'=\frac{\operatorname{sen} m}{\operatorname{sen}(m+y)},\ y''=-\frac{\operatorname{sen}^2 m\cos(m+y)}{\operatorname{sen}^3(m+y)},\ y'''=\frac{\operatorname{sen}^3 m\,(1+2\cos^2(m+y))}{\operatorname{sen}^3(m+y)};$$

depois $\quad f=0,\ f'=1,\ f''=-\cot m,\ f'''=1+3\cot^2 m,\ldots,$

e [fórm. (B)] $\quad y \operatorname{sen} 1''=x-\frac{1}{2}x^2\cot m+\frac{1}{6}x^3(1+3\cot^2 m)+\ldots$

4.º De $\cos(z+y)=-x\operatorname{sen} z\cos A+\cos z\sqrt{1-x^2}=Bx+\cos z\sqrt{1-x^2}$,

querendo y em serie ordenada segundo as potencias de x, tiram-se:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{x\cos z}{\sqrt{1-x^2}}-B}{\operatorname{sen}(z+y)},\ \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{\cos z\operatorname{sen}(z+y)}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}-\left(\frac{x\cos z}{\sqrt{1-x^2}}-B\right)^2\frac{\cos(z+y)}{\operatorname{sen}(z+y)}}{\operatorname{sen}^2(z+y)}\ldots;$$

depois $\quad f=0,\ f'=\cos A,\ f''=\cot z\operatorname{sen}^2 A,\ldots,$

e, [fórm. (B)], $\quad y\operatorname{sen} 1''=x\cos A+\frac{1}{2}x^2\cot z\operatorname{sen}^2 A+\ldots$

85. Se alguma das funcções $f,\ f',\ f'',\ldots$ é infinita, não se pode applicar a fórmula de Maclaurin, porque a serie não procede segundo as potencias inteiras e positivas da variavel. E então é necessario recorrer ao processo indicado no n.º 60, ou antes transformar a funcção de modo que naquella, que depois houver de ser desenvolvida, não se dê o mesmo inconveniente.

Para isso muitas vezes aproveita a hypothese $y=x^k z$, determinando a constante k de modo que $x=0$ não torne infinita nenhuma das funcções $z,\ z',\ z'',\ldots$

Por exemplo, o desenvolvimento de $y=\cot x$ não pode proceder segundo as potencias positivas de x, por ser $\cot 0 = \infty$. Mas, fazendo $y = \frac{z}{x}$, não ha o mesmo inconveniente em $z = x \cot x = \frac{x \cos x}{\operatorname{sen} x}$, na qual, desenvolvendo o numerador e o denominador, e simplificando, vem

$$z = \frac{1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2.3.4}x^4 \ldots}{1 - \frac{1}{2.3}x^2 + \frac{1}{2.3.4.5}x^4 \ldots};$$

depois $$f = 1,\ f' = 0,\ f'' = -\frac{2}{3},\ f''' = 0, \ldots,$$

o que dá $$z = 1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{3^2.5} \ldots,$$

e finalmente $$y = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{3^2.5} \ldots$$

86. III. Da Fórmula de Lagrange. **Exemplos:**

1.° Para $$u = y^m,\ y = t + xy^n$$

são $$ft = t^m,\ f't = mt^{m-1},\ \varphi t = t^n,$$

e [form. (C_1)] $$y^m = t^m + mxt^{m+n-1} + \frac{m(m+2n-1)}{2}x^2 t^{m+2n-2} + \ldots$$

2.° Para resolver a equação $\alpha + \beta y + \gamma y^2 + \delta y^3 + \ldots = 0,$

fariamos $\quad t=-\frac{\alpha}{\beta},\ x=1,\ \varphi y=-\frac{\gamma y^2+\delta y^3+\ldots}{\beta},\ fy=y.$

E para resolver $\quad \alpha+\beta y+\gamma y^n=0,$

fariamos $\quad t=-\frac{\alpha}{\beta},\ x=-\frac{\gamma}{\beta},\ \varphi y=y^n,\ fy=y.$

3.º Na equação transcendente $\quad y=t+e\operatorname{sen} y,$

que pertence ao *problema de Kepler*, quando e é a razão da excentricidade da ellipse para o semieixo maior, t a anomalia media, e y a anomalia do excentrico, temos $x=e$, $\varphi y=\operatorname{sen} y$, $fy=y$; e (form. C_1)

$$y=t+e\operatorname{sen} t+\frac{e^2}{2}\,\frac{d(\operatorname{sen}^2 t)}{dt}+\frac{e^3}{1.2.3}\,\frac{d(\operatorname{sen}^3 t)}{dt^3}+\ldots,$$

ou $$y=t+e\operatorname{sen} t+\frac{e^2}{2}\operatorname{sen} 2t+\frac{e^3}{8}(\operatorname{sen} 3t-\operatorname{sen} t)+\ldots$$

4.º Para $\quad u=y^m,\ y=\cos(t+x\log y),$

teriamos

$$(u)=\cos^m t,\ (\varphi)=\log\cos t,\ \left(\frac{d^n u}{dx^n}\right)=\frac{d^{n-1}[-m\cos^{m-1}t\operatorname{sen} t\,(\lg\cos t)^n]}{dt^{n-1}},$$

e (fórm. C)

$$u=\cos^m t-x.m\cos^{m-1}t\operatorname{sen} t\log\cos t$$

$$+\frac{x^2}{2}m\log\cos t\left[\begin{array}{l}(m-1)\operatorname{sen}^2 t\cos^{m-2}t\log\cos t\\ -\cos^m t\log\cos t+2\,\mathrm{M}\operatorname{sen}^2 t\cos^{m-2}t\end{array}\right]$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots$$

Resolução das equações

87. Pelos principios expostos podem verificar-se, a respeito das equações, muitos theoremas que por outro modo já demonstráramos.

I. Seja $$fx = (x-a)^m (x-b)^n \ldots \times P;$$

designando P o producto dos factores lineares deseguaes.

A derivação dá

$$f'x = (x-a)^{m-1}(x-b)^{n-1} \ldots [mP(x-b)\ldots + nP(x-a)\ldots + \ldots]:$$

por onde se vê que $(x-a)^{m-1}(x-b)^{n-1}$ é o maior divisor commum de $fx = 0$ e da sua derivada $f'x = 0$; theorema conhecido a respeito das raizes eguaes (*Alg. Sup.*, n.º 49).

II. A funcção $$fx = \log(\cos x \pm \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,x)$$

dá $$f'x = \frac{-\mathrm{sen}\,x \pm \sqrt{-1}\cos x}{\cos x \pm \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,x} = \pm\sqrt{-1} = \frac{d(\pm x\sqrt{-1})}{dx};$$

logo $$\log(\cos x \pm \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,x) = \pm x\sqrt{-1},$$

sem ajuntar constante A, porque $x = 0$ mostraria que é $A = 0$.

D'onde se conclue o theorema conhecido (*Alg. Sup.*, n.º 159), do qual seria facil deduzir as fórmulas (K), (L) e (M), e por conseguinte os factores de $x^m \pm a^m$ (*Alg. Sup.*, n.os 102 e 103).

III. Supponhamos $fx = x^m + px^{m-1} + \ldots + u$ decomposta nos seus factores lineares $x - a$, $x - b, \ldots$ Será, identicamente,

$$\log fx = \log(x-a) + \log(x-b) + \ldots$$

Tomando as derivadas, recairemos na equação (1) do n.º 117 da *Alg. Sup.*; e por conseguinte no theorema de Newton sobre as sommas das potencias das raizes, as quaes formam uma serie recurrente cuja escala de relação é $-p, -q, \ldots -u$.

IV. Seja k o valor approximado d'uma das raizes da equação

$$fx = x^m + px^{m-1} + \ldots u = 0,$$

e y o erro. Teremos

$$x = k + y,\ 0 = f(k+y) = fk + yf'k + \frac{1}{2}y^2 f''k + \frac{1}{6}y^3 f'''k + \ldots,$$

ou $$x = k + y,\ y = -\frac{fk}{f'k} - \frac{1}{2}\frac{y^2 f''k}{f'k} - \frac{1}{6}\frac{y^3 f'''k}{f'k} \ldots (*).$$

Usando de duas approximações successivas de y, isto é, substituindo $-\frac{fk}{f'k} - \frac{1}{2}\left(\frac{fk}{f'k}\right)^2 \frac{f''k}{f'k}$ em logar de y no segundo membro, e desprezando

(*) Para a transformação em fracção continua pode vêr-se o n.º 10 do já citado *Desenvolvimento das funcções em fracções continuas*.

os termos de ordem $\left(\frac{fk}{f'k}\right)^4$, acharemos

$$y=-\frac{fk}{f'k}-\frac{1}{2}\left(\frac{fk}{f'k}\right)^2\frac{f''k}{f'k}+\frac{1}{6}\left(\frac{fk}{f'k}\right)^3\left(\frac{f'''k}{f'k}-3\left(\frac{f''k}{f'k}\right)^2\right).$$

O mesmo se acharia applicando a fórmula (C_1), como se fez no n.º 86, 2.º, com $\alpha=fk$, $\beta=f'k$, $\gamma=\frac{1}{2}f''k$, $\delta=\frac{1}{6}f'''k$; a qual daria

$$y=t-\frac{\frac{1}{2}t^2f''k+\frac{1}{6}t^3f'''k+\ldots}{f'k}+\frac{tf''k+\ldots}{f'k}\times\frac{\frac{1}{2}t^2f''k+\ldots}{f'k}+\ldots$$

Por exemplo, da equação $fx=x^3-2x-5=0$ tira-se $k=2,1$ para valor approximado d'uma das raizes (*Alg. Sup.*, n.º 70); e por conseguinte: $fk=0,061$; $f'k=11,23$; $f''k=12,6$; $f'''k=6$. O que dá

$$\frac{fk}{f'k}=\frac{61}{11230},\ \frac{f''k}{f'k}=\frac{1260}{1123},\ \frac{f'''k}{f'k}=\frac{600}{1123};$$

e portanto

$$x=2,1-0,00543188-0,00001655-0,0000009=2,09455148.$$

Das expressões

$$\frac{0}{0},\ 0\times\infty,\ \frac{\infty}{\infty},\ 0^{\circ},\ \infty^{\circ},\ \infty-\infty.$$

88. Fórma $\frac{0}{0}$. Vimos (*Alg. Sup.*, n.º 29, 2.º) que, se $x=a$ reduz a $\frac{0}{0}$ uma fracção $\frac{fx}{Fx}$, é $x-a$ factor commum dos seus termos; e que, para ter nesse caso o valor da fracção, é necessario desembaraçar os termos da potencia mais elevada de $x-a$ que divide ambos.

Mudando x em $x+h$, vem

$$\frac{f(x+h)}{F(x+h)}=\frac{fx+hf'x+\frac{1}{2}h^2f''x+\ldots}{Fx+hF'x+\frac{1}{2}h^2F''x+\ldots};$$

depois, fazendo $x=a$, o que torna fx e Fx nullos, e simplificando, fica

$$\frac{f(a+h)}{F(a+h)}=\frac{f'a+\frac{1}{2}hf''a+\ldots}{F'a+\frac{1}{2}hF''a+\ldots};$$

e finalmente, pondo $h=0$, acha-se $\quad\frac{fa}{Fa}=\frac{f'a}{F'a}.$

No caso de ser tambem $f'a=0$, ou $F'a=0$, a fracção será nulla, ou infinita.

Se, além de $fa=0$ e $Fa=0$, forem $f'a=0$ e $F'a=0$, a fracção $\frac{f(a+h)}{F(a+h)}$, simplificando e fazendo $h=0$, será $\frac{fa}{Fa}=\frac{f''a}{F''a}$. E em geral, se forem nullos $fa, f'a, \ldots f^{(n)}a$ e $Fa, F'a, \ldots F^{(n)}a$, a fracção

$$\frac{f(a+h)}{F(a+h)}=\frac{fa+hf'a+\ldots\ldots\frac{1}{1.2\ldots(n+1)}h^{n+1}f^{(n+1)}a}{Fa+hF'a+\ldots\frac{1}{1.2\ldots(n+1)}h^{n+1}F^{(n+1)}a},$$

simplificando e fazendo $h=0$, reduzir-se-ha a $\frac{fa}{Fa}=\frac{f^{(n+1)}a}{F^{(n+1)}a}$.

Logo: *Para ter o valor d'uma fracção que a hypothese* $x=0$ *reduz á fórma* $\frac{0}{0}$, *derivaremos simultaneamente os seus dois termos tantas vezes quantas forem necessarias para que aquella hypothese não anniquile a derivada de um d'elles.*

E necessariamente alguma das derivadas ha de deixar de anniquilar-se; porque, se assim não acontecesse, seriam $f(a+h)$ e $F(a+h)$ nullos para todos os valores de h, isto é, seriam fx e Fx nullos para todos os valores de x.

89. Exemplos:

I. A expressão $\frac{x^n-1}{x-1}$, que equivale a $\Sigma(1+x+\ldots\, x^{n-1})$, toma a fórma $\frac{0}{0}$ para $x=1$. A differenciação dos dois termos dá, para essa hypothese, o seu valor $\frac{nx^{n-1}}{1}=n$; como deve dar.

II. A hypothese $x=0$ dá a $\frac{a^x-b^x}{x}$ a fórma $\frac{0}{0}$. Derivando, acha-se o seu valor $\frac{a^x la-b^x lb}{1}=l\left(\frac{a}{b}\right)$.

III. A hypothese $x = 90^\circ$ reduz $\dfrac{1 - \operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x + \cos x - 1}$ á fórma $\dfrac{0}{0}$. A derivação dá o seu valor $\dfrac{-\cos x - \operatorname{sen} x}{\cos x - \operatorname{sen} x} = 1$.

Do mesmo modo se vê que:

para $x = a$, é
$$\frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{a^2x}}{a - \sqrt[4]{(ax^3)}} = \frac{16a}{9};$$

para $x = a$, é
$$\frac{x^3 - ax^2 - a^2x + a^3}{x^2 - a^2} = 0.$$

IV. A hypothese $x = c$ reduz á fórma $\dfrac{0}{0}$ a fracção

$$\frac{fx}{\mathrm{F}x} = \frac{ax^2 + ac^2 - 2acx}{bx^2 - 2bcx + bc^2}, \text{ e tambem } \frac{f'x}{\mathrm{F}'x} = \frac{ax - ac}{bx - bc};$$

mas, recorrendo a nova derivação, acha-se $\dfrac{a}{b}$.

Para $x = 1$ são
$$\frac{1 - x + lx}{1 - \sqrt{2x - x^2}} = -1, \quad \frac{x^2 - x}{1 - x + lx} = -2.$$

90. O methodo exposto, por se fundar no theorema de Taylor, deixa de ser applicavel quando este theorema o não fôr até a ordem do primeiro termo que não se anniquila. O que facilmente se reconhece, por se tornar então infinita alguma das derivadas a que chegarmos.

Neste caso: desenvolveremos o numerador e o denominador em serie das potencias de h (n.º 60); faremos $x = a$; supprimiremos nos dois termos a potencia mais elevada de h, que os dividir ambos; e faremos $h = 0$.

Seja, por exemplo, a fracção $\dfrac{fx}{\mathrm{F}x}=\dfrac{(x-c)\sqrt{(x-b)}+\sqrt{(x-c)}}{\sqrt{2c}-\sqrt{(x+c)}+\sqrt{(x-c)}}$,

que $x=c$ reduz a $\dfrac{0}{0}$. Como esta hypothese torna infinita a derivada de $\sqrt{(x-c)}$, não podemos applicar o theorema de Taylor senão ao desenvolvimento dos primeiros termos; e para $\sqrt{(x-c+h)}$ servir-nos-hemos da fórmula do binomio.

Teremos assim $$\frac{f(c+h)}{\mathrm{F}(c+h)}=\frac{h^{\frac{1}{2}}+h\sqrt{c-b}+\ldots}{h^{\frac{1}{2}}-\dfrac{1}{2\sqrt{2c}}h+\ldots},$$

que, dividindo por $h^{\frac{1}{2}}$ e fazendo $h=0$, se reduz a $\dfrac{fc}{\mathrm{F}c}=1$.

91. Fórma $0\times\infty$. Supponhamos que a hypothese $x=a$, tornando fx nulla e $\mathrm{F}x$ infinita, dá a $fx\times\mathrm{F}x$ a fórma $0\times\infty$. Por ser então $\dfrac{fa}{\dfrac{1}{\mathrm{F}a}}=\dfrac{0}{0}$,

será $$fa\times\mathrm{F}a=\frac{f'a}{\left(\dfrac{1}{\mathrm{F}a}\right)'}=-\frac{f'a}{\mathrm{F}'a}\times(\mathrm{F}a)^2.$$

Por exemplo a expressão $(1-x)\operatorname{tang}\dfrac{1}{2}\pi x$, que $x=1$ reduz a $0\times\infty$, é, nesta hypothese, pelas fórmulas precedentes,

$$\frac{-1}{\dfrac{-\dfrac{1}{2}\pi}{\operatorname{sen}^2\dfrac{1}{2}\pi}}=\frac{2}{\pi},\ \text{ou}\ \frac{-1}{\dfrac{-\dfrac{1}{2}\pi}{\cos^2\dfrac{1}{2}\pi}}\times\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\pi=\frac{2}{\pi}.$$

92. Fórma $\frac{\infty}{\infty}$. Se a hypothese $x=a$ reduz $\frac{fx}{Fx}$ a $\frac{\infty}{\infty}$, tornando fx e Fx infinitas, será $\frac{fa}{Fa}=\frac{\frac{1}{Fa}}{\frac{1}{fa}}=\frac{0}{0}$, e por conseguinte

$$\frac{fa}{Fa}=\frac{\left(\frac{1}{Fa}\right)'}{\left(\frac{1}{fa}\right)'}=\frac{F'a}{f'a}\times\left(\frac{fa}{Fa}\right)^2;$$

ou tambem, simplificando (*), $\frac{fa}{Fa}=\frac{f'a}{F'a}$.

Assim, para $x=a$, é $\frac{\operatorname{tang}\left(\frac{1}{2}\frac{\pi x}{a}\right)}{\frac{x^2}{a(x^2-a^2)}}=\frac{\left(\frac{1}{Fa}\right)}{\left(\frac{1}{fa}\right)}=-\frac{4a}{\pi}$.

93. Reduz-se a estes casos o de ter Fx^{fx} a fórma indeterminada, por ser $fa=0$ e $Fa=\infty$, ou $fa=\infty$ e $Fa=1$, ou $fa=0$ e $Fa=0$. Porque é $Fx^{fx}=e^{fx\,l\,Fx}$; e nestas hypotheses $fx\,l\,Fx=\frac{fx}{\frac{1}{lFx}}=\frac{lFx}{\frac{1}{fx}}$ toma a uma das fórmas $0\times\infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$.

(*) Se $\frac{fa}{Fa}$ for nulla, não o será $\frac{fa}{Fa}+C=\frac{fa+CFa}{Fa}=\frac{f'a+CF'a}{F'a}=\frac{f'a}{F'a}+C$; e portanto ainda teremos $\frac{fa}{Fa}=\frac{f'a}{F'a}$. Se $\frac{fa}{Fa}$ for infinita, será nulla $\frac{Fa}{fa}=\frac{F'a}{f'a}$, e portanto infinita $\frac{fa}{Fa}=\frac{f'a}{F'a}$. Assim, para $x=\infty$, sendo a positivo, é

$$\frac{a^x}{x}=\frac{f'}{F'}=\frac{a^x\log a}{1}=\infty.$$

..

Assim, por ser $x\,l\,x = \dfrac{lx}{\dfrac{1}{x}} = 0$ para $x = 0$, é $0^0 = e^0 = 1$. E, por ser $x\,l\dfrac{1}{x} = \dfrac{l\left(\dfrac{1}{x}\right)}{\dfrac{1}{x}} = 0$ para $x = 0$, é $\infty^0 = e^0 = 1$.

94. Fórma $\infty - \infty$. Finalmente, se $x = a$ reduz $fx - Fx$ a $\infty - \infty$, tornando fx e Fx infinitas, é

$$fa - Fa = \frac{\dfrac{1}{Fa} - \dfrac{1}{fa}}{\dfrac{1}{Fa \times fa}} = \frac{0}{0} = \frac{\left(\dfrac{1}{Fa} - \dfrac{1}{fa}\right)'}{\left(\dfrac{1}{Fa \times fa}\right)'}.$$

Por exemplo, para $x = \dfrac{1}{2}\pi$, é

$$x \operatorname{tang} x - \frac{\pi}{2}\sec x = \frac{\dfrac{2\cos x}{\pi} - \dfrac{\cot x}{x}}{\dfrac{2}{\pi x} \cdot \dfrac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x}} = \frac{\dfrac{2}{\pi} - \dfrac{1}{x \operatorname{sen} x}}{\dfrac{2}{\pi x}\cot x} = -1.$$

95. O methodo exposto, fundado no que se disse no n.º 88, suppõe que são determinadas as derivadas de fx e Fx, para $x = a$; mas ha casos em que não tem isso logar. Por exemplo, $\dfrac{fx}{Fx} = \dfrac{x + \cos x}{x + \operatorname{sen} x}$ dá $\dfrac{f'x}{F'x} = \dfrac{1 - \operatorname{sen} x}{1 + \cos x}$, onde são $f'x$ e $F'x$ indeterminadas para $x = \infty$, em quanto que na mesma hypothese é

$$\frac{fx}{Fx} = \frac{1 + \dfrac{\cos x}{x}}{1 + \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}} = 1.$$

Dos maximos e minimos

96. Funcções d'uma variavel. Seja $y = fx$.

Se, dando a x valores consecutivos, a funcção fx, sempre *crescente* ou sempre *decrescente* para os valores de x comprehendidos entre $x - \varepsilon$ e a, se tornar sempre *decrescente* ou sempre *crescente* para os comprehendidos entre a e $a + \varepsilon$, sendo ε tão pequeno quanto se quizer: o valor de y, correspondente ao de $x = a$, que separa os incrementos das diminuições, chama-se *maximo* no primeiro caso, e *minimo* no segundo.

Assim, sendo h uma quantidade muito pequena comprehendida entre 0 e ε, teremos respectivamente:

$$\text{Para} \quad fa \left\{ \begin{array}{c} \text{maxima} \\ \\ \text{minima} \end{array} \right\} \cdots \left\{ \begin{array}{c} fa > f(a \pm h) \\ \\ fa < f(a \pm h) \end{array} \right\}.$$

E como na serie $f(a \pm h) - fa = \pm hf'a + \frac{1}{2} h^2 f''a \pm \ldots$ se pode sempre tomar h tão pequena que o signal do segundo membro seja o do seu primeiro termo, vê-se que, em quanto subsistir este termo, não pode haver maximo nem minimo.

Portanto, a condição de ser fa maxima ou minima exige que seja $f'a = 0$.

97. Satisfeita esta condição, a serie precedente torna-se em

$$f(a \pm h) = fa + \frac{1}{2} h^2 f''a \pm \ldots,$$

a qual mostra que fa será maxima quando $f''a$ for negativa, e será minima quando $f''a$ for positiva (*).

98. Se for tambem $f'''a=0$, a serie

$$f(a\pm h)=fa\pm\frac{1}{2.3}h^3f'''a+\frac{1}{2.3.4}f^{IV}a\pm\ldots,$$

feitos raciocinios similhantes, mostra que a condição, tanto do maximo como do minimo, exige que seja $f'''a=0$; e que, satisfeita ella, será fa maxima ou minima, segundo for $f^{IV}a$ negativa ou positiva.

Do mesmo modo proseguiremos quando se desvanecerem mais derivadas. E teremos a regra geral seguinte:

Achadas as raizes reaes da equação $f'x=0$, *substitua-se cada uma d'ellas por* x *em* $f'x$, $f''x,\ldots$, *até apparecer uma derivada que não seja nulla. Se esta derivada for de ordem par e positiva, a raiz corresponderá a uma funcção* minima; *se for de ordem par e negativa, a raiz corresponderá a uma funcção* maxima; *e se for de ordem impar, não haverá maximo nem minimo.*

99. Exemplos:

I. $y=\sqrt{2px}$ dá $y'=\dfrac{p}{\sqrt{2px}}$; e porque nenhum valor finito de x anniquila y', a funcção y não tem maximo, nem minimo.

II. $y=b-(x-a)^2$ dá $y'=-2(x-a)$, $y''=-2$; logo $x=a$ corresponde a um maximo $y=b$; o que por outra parte é manifesto.

Pelo contrario $y=b+(x-a)^2$ dá um minimo.

(*) Pondo $a-h=a_1$ e $a+h=a'$, teremos

$$fa=fa_1+hf'a_1+\ldots,\ fa=fa'-hf'a'+\ldots$$

Logo, para que fa seja maxima, devem ser $f'a_1$ positiva, e $f'a'$ negativa; e o contrario para que seja minima.

Poderemos pois tambem reconhecer se fa é maxima ou minina, examinando se $f'x$ muda de signal, passando, em $x=a$, de positiva a negativa, ou inversamente.

Em geral $y' = X(x-a)^n$ dá $y^{(n+1)} = n(n-1) \ldots 2.1\, X + K(x-a)$: por conseguinte, se n for impar, a raiz $x = a$ corresponderá a y maximo ou minimo, segundo fizer X negativo ou positivo.

III. De $y = \dfrac{x}{1+x^2}$ tiram-se

$$y' = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2},\ y'' = -\frac{4x}{(1+x^2)^3} - 2yy';$$

logo $x = 1$ corresponde ao maximo $\dfrac{1}{2}$; e $x = -1$ corresponde ao minimo $-\dfrac{1}{2}$, ou ao maximo negativo.

IV. Dividir o numero a em duas partes taes que o producto da potencia do gráu m d'uma pela potencia do gráu n da outra seja o maximo.

Chamando x uma das partes, o producto proposto e as suas primeira e segunda derivadas são:

$$y = x^m (a-x)^n,\ y' = x^{m-1}(a-x)^{n-1}[ma - x(m+n)],$$

$$y'' = x^{m-2}(a-x)^{n-2}[(m+n-1)(m+n)\,x^2 - \ldots]:$$

logo $y' = 0$ dá: $x = 0$, para m não menor que 1; $x = a$, para n não menor que 1; e $x = \dfrac{ma}{m+n}$.

A ultima d'estas raizes corresponde ao maximo $m^m n^n \left(\dfrac{a}{m+n}\right)^{m+n}$; as outras correspondem ao minimo, quando m e n são respectivamente pares.

O mesmo se vê mais facilmente applicando a y' o que se disse na nota ao n.º 97.

Para dividir a em duas partes cujo producto seja o maximo, basta fazer $m = n = 1$ nesta solução; o que dá $x = \frac{1}{2}a$, e o maximo $\frac{1}{4}a^2$.

V. Achar o numero x, cuja raiz do gráu x é maxima.

Temos $y = \sqrt[x]{x}$, $y' = y\frac{1 - lx}{x^2}$; e por conseguinte $y' = 0$ dá $lx = 1$, ou $x = e = 2{,}71828\ldots$, base dos logarithmos de Neper.

VI. Achar o numero x, que tem o maior excesso sobre a sua potencia do gráu m.

Temos $y = x - x^m$, $y' = 0 = 1 - mx^{m-1}$, $x = \sqrt[m-1]{\frac{1}{m}}$.

VII. Determinar as cordas supplementares da ellipse, que fazem entre si o maior angulo.

Chamando a, b, os semieixos, α a tangente do angulo que uma das cordas supplementares faz com o eixo maior, e θ o angulo d'essas cordas, deve ser maxima (*Geom. Anal.*, n.º 80) a funcção $\operatorname{tang}\theta = \frac{a^2\alpha^2 + b^2}{\alpha(a^2 - b^2)}$, ou, omittindo o factor constante do denominador, a funcção $y = a^2\alpha + \frac{b^2}{\alpha}$, que dá $y' = a^2 - \frac{b^2}{\alpha^2}$, $y'' = +\frac{2b^2}{\alpha^3}$. Logo o maximo, positivo ou negativo, corresponde a $\alpha = \pm\frac{b}{a}$, e as cordas pedidas concorrem em uma das extremidades do eixo menor. Por onde se vê que fazem entre si o maior angulo os diametros conjugados eguaes (*Geom. Anal.*, n.os 80, 4.º e 94, 3.º).

VIII. D'entre os triangulos de egual perimetro $2p$ ou *isoperimetros*, e da mesma base a, achar o que tem a maior superficie y.

Designando x e $2p - a - x$ os dois lados desconhecidos, a area

$$y = \sqrt{p(p-a)(p-x)(a+x-p)},$$

dá

$$\frac{2y'}{y} = -\frac{1}{p-x} + \frac{1}{a+x-p}, \quad \frac{2(yy''-y'^2)}{y^2} = -\left(\frac{1}{(p-x)^2} + \frac{1}{(a+x-p)^2}\right).$$

Fazendo pois $y' = 0$, será $x = p - \frac{1}{2}a$, e y'' negativa; e o maximo

$y = \frac{1}{2} a\sqrt{p(p-a)}$: e por ser o outro lado $2p - x - a = p - \frac{1}{2}a$, o triangulo pedido é isosceles.

Para achar a base a do triangulo cuja área é a maior das de todos os triangulos isosceles isoperimetros, isto é, para achar o valor de a correspondente ao maximo de $z = a^2(p-a)$, teremos

$$z' = 2ap - 3a^2 = 0, \quad z'' = 2p - 6a,$$

que dão
$$a = \frac{2}{3}p, \quad z'' = -2p.$$

Portanto, d'entre todos os triangulos isoperimetros, o equilatero é o de maior área.

E, em geral, o polygono equilatero é o de maior área d'entre todos os isoperimetros. Com effeito seja ABCDE (Fig. 2) o polygono maximo. Se AB não é egual a BC, construa-se o triangulo isosceles AIC tal, que seja $AI + IC = AB + BC$: será a área do triangulo AIC maior que a de ABC, e por conseguinte AICDE > ABCDE, o que é contra a hypothese.

IX. Achar o minimo de todos os triangulos construidos sobre uma base de grandeza dada $BC = a$ (Fig. 3), e circumscriptos ao circulo OF.

Sejam: o raio $OF = r$, $BF = BD = x$, o perimetro $= 2p$, e conseguintemente $CF = CE = a - x$, $AE = AD = p - a$. Serão a, $p - x$, $p - a + x$ os tres lados; e $y = \sqrt{px(p-a)(a-x)}$ a área do triangulo, ou, por ser $p = \frac{y}{r}$, $\quad r^2y = x(y - ar)(a - x)$,

que dá

$$y = \frac{ar(x^2 - ax)}{r^2 - ax + x^2}, \quad \frac{y'}{ar^3} = \frac{2x - a}{(r^2 - ax + x^2)^2},$$

$$\frac{y''}{2ar^3} = \frac{1}{(r^2 - ax + x^2)^2} - \frac{(2x-a)^2}{(r^2 - ax + x^2)^3}.$$

Como $y' = 0$ dá $x = \frac{1}{2}a$ e $y = \frac{a^3r}{a^2 - 4r^2}$, este valor de x satisfaz ao problema para $\frac{1}{2}a > r$; o ponto F é o meio de BC; e os outros dois lados são eguaes entre si e (*) a $\frac{a^3}{a^2-4r^2}-\frac{1}{2}a$.

X. Tomemos sobre os lados d'um quadrado ABCD (Fig. 4) as partes eguaes Aa, Bb, Cc, Dd: a figura $abcd$ será um quadrado. Com effeito: 1.º por serem eguaes os quatro triangulos dAa, aBb, bCc, cDd, que têm eguaes dois a dois os lados que comprehendem os angulos rectos A, B, C, D, é $abcd$ equilatero; 2.º por serem complementares os angulos Aad e Bab, é recto o angulo dab, assim como os outros b, c, d.

Posto isto, procuremos o menor de todos os quadrados y^2 assim inscriptos no quadrado dado.

Sendo $AB=m$, $Aa=x$, será $aB=m-x$; e do triangulo Aad tira-se $y^2=2x^2-2mx+m^2$, quê, para $y'=0$, dá $x=\frac{1}{2}m$, e y'' positiva. Portanto o ponto a está no meio de AB.

XI. D'entre os parallelipipedos rectangulos, eguaes em volume a um cubo dado a^3, e construidos sobre a mesma base b, achar o de menor superficie.

Chamando x e z as outras duas arestas, serão: $bxz=a^3$ o volume; e bx, $bz=\frac{a^3}{x}$, $xz=\frac{a^3}{b}$, as áreas d'estas faces. Pretende-se achar o minimo da área total, que é o dobro da somma d'aquellas tres,

$$y=\frac{2a^3}{b}+\frac{2a^3}{x}+2bx:$$

o que dá $$y'=2b-\frac{2a^3}{x^2}=0,\ x=\sqrt{\frac{a^3}{b}}=z, \text{ e } y'' \text{ positiva.}$$

(*) Pondo $OA=t$, a figura (3) daria

$$AC^2=t^2+r^2+2rt+\frac{1}{4}a^2,\ AC=\frac{1}{2}a+\sqrt{t^2-r^2},$$

entre as quaes, eliminando AC, resolvendo a resultante em ordem a t, usando do valor positivo e substituindo-o em AC, viria o mesmo valor $\frac{a^3}{a^2-4r^2}-\frac{1}{2}a$, que dá a substituição de $x=\frac{1}{2}a$ em $p-x$; como devia ser.