SIDONIO PAES

AS FORÇAS E OS MOVIMENTOS

Definições e postulados da Mecanica

COIMBRA
IMPRENSA DA UNIVERSIDADE
1902

AS FORÇAS E OS MOVIMENTOS

SIDONIO PAES

AS FORÇAS E OS MOVIMENTOS

Definições e postulados da Mecanica

COIMBRA
IMPRENSA DA UNIVERSIDADE
1902

Dissertação para concurso a um logar de professor do 3.º grupo das Escolas industriaes.

PREFACIO

A grande obra scientifica do seculo XIX não consistiu sómente na multidão surprehendente de descobertas brilhantes, no desenvolvimento vertiginosamente accelerado que em todos os ramos a sciencia antiga tomou.

Foi tambem, e sobretudo nas Mathematicas, um trabalho de critica e de revisão detalhado, microscopico, do immenso e riquissimo material accumulado nos seculos anteriores, a organisação e coordenação d'esses vastissimos conhecimentos, e a sua deducção de principios solidamente estabelecidos.

A entrada, principalmente, d'estas sciencias estava obstruida com um acervo de noções metaphysicas, que enredavam logo de uma maneira altamente nociva os primeiros passos do estudioso.

Os elementos eram incomprehensiveis. D'ahi uma nevoa que constantemente envolvia todas as demonstrações, e que se, por um lado, retardava o progredimento da sciencia, por outro lado, sob o ponto de vista pedagogico, não podia deixar de influir perniciosamente no espirito da creança, forçada a acreditar sob a palavra dos auctores e dos mestres na logica e na verdade das proposições e a attribuir deprimentemente a deficiencia propria a obscuridade dos raciocinios.

A pouco e pouco ia-se produzindo uma adaptação viciosa a essa maneira falsa de raciocionar, um poder maravilhoso de illudir a razão, chegando ao prodigio de *entender o incomprehensivel*.

Pasma-se hoje de como podiam satisfazer certas demonstrações, ainda infelizmente inseridas em livros actuaes.

*

A Arithmetica, a Analyse, a Geometria fôram naturalmente as primeiras a serem corrigidas e já hoje, mesmo entre nós, livros elementares seguem esta nova orientação.

A Mecanica e a Physica, mais complexas, começam agora a ser refundidas.

E ainda esta ordem de idêas, adoptada n'um ou n'outro livro elevado, se não extendeu aos primeiros graus de instrucção.

De fórma que temos hoje um contraste verdadeiramente lastimavel entre os compendios de Mathematica e os de Physica. Emquanto que naquelles, pelos quaes se principia, o estudante adquire um precioso habito de clareza, e rigor, n'estes a falta evidente de taes qualidades deve desalental-o.

*

As tres leis de Newton, para não citar senão um exemplo, apparecem na maior parte dos livros actuaes de Dynamica com enunciados sensivelmente eguaes aos primitivos.

São os seguintes:

1.ª Todo o corpo permanece no seu estado de repouso ou de movimento uniforme rectilineo, excepto quando é compellido pelas forças applicadas a uma mudança d'estado.

2.ª A mudança de movimento é proporcional á força impressa e tem logar na direcção em que essa força actua.

3.ª A reacção é sempre egual e opposta á acção; ou as acções de dois corpos um sobre o outro são sempre eguaes e oppostas.

Analysemos brevemente estas leis.

Encontra-se na *primeira* a affirmação de que um corpo não submettido á acção de forças está em repouso ou tem um movimento uniforme rectilineo.

Ora o movimento d'um corpo n'essas condições póde ser muito complexo.

Demonstra-se que o corpo póde estar animado d'um movimento de rotação em torno d'um eixo que se desloca continuamente.

O enunciado refere-se, pois, só ao movimento de translação, isto é, ao movimento d'um ponto, e não d'um corpo.

Mas, como faremos ver claramente, na exposição dos principios da Mecanica, não tem sentido dizer que o movimento é rectilineo e uniforme, sem dar os pontos relativamente ao qual esse movimento é considerado. Uma trajectoria rectilinea relativamente a certos eixos póde ser curva relativamente a outros. Uma velocidade constante póde transformar-se numa velocidade variavel conforme as referencias do movimento.

Falla-se além d'isso de forças. Se a noção de força, que se adopta, é composta com os factores—massa e acceleração—, a lei traduzirá apenas esta consequencia banal da definição de acceleração: que a uma acceleração nulla corresponde um movimento uniforme e rectilineo.

Supponhamos agora que se dá a antiga definição de força —causa de mudança de movimento—, definição perfeitamente esteril e metaphysica. O enunciado, tomado á letra, seria tautologico. Porque dizer que não ha força é dizer que não ha mudança de movimento, isto é, que o corpo está em repouso ou tem um movimento rectilineo e uniforme.

Adiante veremos qual é o sentido que deve attribuir-se a esta lei, conhecida pelo nome de *principio da inercia,* e a sua expressão rigorosa.

Passemos á *segunda lei.*

O enunciado é, em primeiro logar, vago. Diz-se que a mudança de movimento deve ter logar na direcção d'uma linha recta. Parece portanto que essa mudança se refere a um ponto e não se sabe de que ponto do corpo se tracta.

Por outro lado é fazer metaphysica dizer que a causa do movimento actua na direcção d'uma linha recta.

A lei, quando muito, poderá indicar que a força deve interpretar-se como uma medida da mudança de movimento.

Na *terceira lei* finalmente tambem ha incorrecção em dizer que as acções mutuas dos *corpos* são eguaes e oppostas. Os corpos deveriam substituir-se por *particulas.*

E as acções deverão ser interpretadas como accelerações mutuas.

Torna-se evidente a necessidade de emendar estes enunciados, e de usar d'uma linguagem precisa e rigorosa.

As conclusões a que a Mecanica antiga chegou são, em geral, verdadeiras, mas as noções e demonstrações carecem de clareza e de logica.

*

Embora modernamente haja uma corrente no sentido de não julgar commoda ou possivel a representação de todos os phenomenos pelas leis conhecidas do movimento, o estudo da Mecanica é ainda, e cremos que será sempre, indispensavel á Physica.

Por isso e pelo que atraz dissemos, pensamos que teria interesse, entre nós, uma exposição elementar dos principios que, no estado actual da sciencia, devem servir de base á Mecanica.

E não se diga que só no ensino superior deve ser feita a revisão da Mecanica antiga.

A sciencia é só uma; e não é a nosso ver tarefa facil varrer por completo do espirito erros que se infiltraram lenta e profundamente nos primeiros estudos e que tomaram raizes na linguagem scientifica.

Além de que os rudimentos da sciencia não são incompativeis com o rigor.

CAPITULO I

1. D'entre os multiplos phenomenos physicos o mais vulgar é o movimento dos corpos ou a sua mudança de logar com o tempo.

Essa mudança consiste numa successão particular de impressões dos sentidos, numa sequencia de percepções, que obedece a certas regras ou leis, em cuja constancia acreditamos pelas repetidas verificações que d'ellas se têem feito.

Um exemplo simples fará apprehender melhor esta idêa. Todos temos verificado que, tomando uma pedra n'uma mão e largando-a depois, a pedra cáe. A queda da pedra, é um movimento, que se dá sempre que nós fazemos aquella experiencia. Milhões de pessoas a têem feito. Todas recebem impressões dos sentidos que traduzem pela mesma fórma. Por isso acreditamos que todas as vezes que se renove a experiencia o resultado será o mesmo.

Admittimos aqui o chamado «principio da uniformidade da Natureza». É d'elle que resulta a possibilidade da sciencia natural, isto é, não só de descrever os acontecimentos naturaes, mas de prever como esses acontecimentos terão de futuro logar e ainda como elles se realisaram no passado.

A Mecanica é tambem uma sciencia natural. Estuda os movimentos dos corpos e tem por fim descrever esses movimentos e determinar os que se realisaram no passado e os que hão de ter logar no futuro.

2. A Mecanica constitue-se hoje d'uma maneira formal como a Arithmetica, a Analyse e a Geometria.

As noções fundamentaes, abstractas, introduzem-se por meio de definições e postulados, que são suggeridos pela observação e experiencia.

Criam-se assim symbolos ou mais propriamente objectos de raciocinio, cuja combinação é sujeita a regras convencionaes, e dá logar a proposições ou theoremas logicamente deduzidos.

Tres elementos de differente natureza entram portanto na constituição da sciencia que é indispensavel distinguir bem uns dos outros, a saber: definições, postulados e theoremas mathematicos.

Uma theoria d'esta especie é valida sempre que não haja contradicção entre os seus principios, mas só será util se fôr capaz de fornecer regras ás quaes obedeçam os acontecimentos naturaes.

3. Para descrever os movimentos dos corpos naturaes a sciencia introduz a concepção de *movimento de fórmas geometricas* (pontos e figuras).

O movimento das fórmas geometricas, como estas mesmas, não é perceptivel, é um conceito que é preciso definir.

É o primeiro symbolo que a Mecanica cria.

O seu estudo constitue a *Cinematica* ou *Geometria do movimento*.

Para chegar á previsão dos movimentos dos corpos naturaes a sciencia procura que relações existem entre os movimentos das fórmas geometricas por meio dos quaes se descrevem aquelles. Somos assim levados a certas noções abstractas como a *força* e a *massa*, e a regras chamadas *Leis do movimento*, que se formulam por meio d'aquellas noções.

São estas leis que nos permittem, partindo de certos dados, calcular os movimentos de fórmas geometricas que seriam a descripção dos movimentos passados ou futuros dos corpos naturaes.

4. Aos movimentos reaes dos corpos naturaes substituimos movimentos ideaes, puramente conceptuaes, que definiremos.

Mas como o movimento d'um corpo é, em geral, muito complexo, porque nem todas as suas partes têem o mesmo movimento, estabelecem-se para facilitar o estudo tres grandes divisões no movimento conceptual que se lhe substitue.

Uma primeira simplificação consiste em considerar uma pequena porção do corpo ou *particula*, tão pequena que as differenças no movimento das suas partes sejam despreziveis.

Esta particula será representada por um *ponto geometrico*. O movimento da particula dar-nos-hia já indicações valiosas do movimento do corpo a que ella pertence.

Em muitos casos seria mesmo praticamente sufficiente este conhecimento. Por ex., tractando-se de estudar a marcha d'um comboio, não nos interessam naturalmente a maneira como os passageiros se deslocaram dentro d'elle, os movimentos de balanceamento e trepidação, as voltas das rodas das carruagens, o movimento da agua na caldeira, o do vapor no embolo, etc. Basta-nos descrever o movimento d'uma pequena parte do comboio, qualquer que ella seja e por mais pequena que seja.

Este typo de movimento chama-se de *translação*.

Mas conhecido o movimento de uma particula muitas particularidades ficam ainda ignoradas, que sob outros pontos de vista podem ser essenciaes. As outras porções do corpo deslocam-se em relação á primeira particula. Aqui de novo se procede a uma simplificação.

Podemos primeiro suppôr que as differentes partes do corpo se conservam a distancias invariaveis. Ellas poderão ainda deslocar-se girando á volta da primeira particula. O corpo muda de aspecto. Introduz-se assim a concepção do *corpo rigido*, e o estudo do *movimento de rotação* em volta d'um ponto fixo.

Mas as distancias relativas das partes do corpo podem ainda variar. É a mudança da fórma do corpo ou *deformação*, terceira e ultima divisão no movimento conceptual do corpo.

MOVIMENTO DO PONTO GEOMETRICO

A. Posição

5. Para definir com precisão o movimento d'um ponto geometrico, é indispensavel dar primeiro as noções de posição e de medida do tempo.

Definição 1. Diz-se que é dada *a posição d'um ponto relativa a um conjuncto de pontos*, quando é dada a maneira de construir um ponto, partindo d'esse conjuncto.

Uma das maneiras mais usuaes (á qual se reduzem todas as outras) de dar a posição d'um ponto é a que vae ser descripta em seguida.

Sejam O, X, Y, Z (fig. 1) quatro pontos não situados no

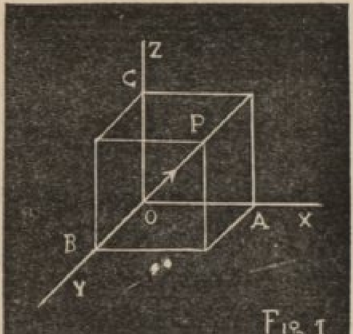

Fig. 1

mesmo plano. Unindo um d'estes tres pontos, por ex. O, com os restantes determinamos tres rectas OX, OY, OZ (eixos coordenados) situadas duas a duas nos planos XOY, XOZ, YOZ (planos coordenados). A partir de O (origem das coordenadas) sobre cada um dos eixos tomem-se tres segmentos OA, OB, OC, meçam-se referindo-os á mesma unidade, e affectem-se do signal + ou — os numeros obtidos, conforme terminarem nas semi-rectas OX, OY, OZ, ou nos seus prolongamentos. Conduzam-se por A, B e C planos parallelos aos eixos. Assim se constroe um ponto P, intersecção d'estes tres planos.

Os tres numeros representativos dos segmentos, com os seus signaes chamam-se as *coordenadas* do ponto P.

A posição do ponto P relativamente aos eixos coordenados (*systema de referencia*) será dada pelas tres coordenadas. Reciprocamente qualquer grupo de tres coordenadas determinará a posição d'um ponto.

6. Vejamos uma outra maneira de dar a posição d'um ponto, de que faremos muita vez uso e que tem uma importancia excepcional em Mecanica.

O conhecimento da distancia d'um ponto P do espaço ao ponto O, não determina aquelle ponto, mas sim uma infinidade de pontos cujo logar geometrico é uma esphera de centro O e de raio egual á distancia dada.

Se porém, nos derem a *direcção* da linha OP, ficará a indeterminação limitada aos dois pontos em que essa linha intercepta a esphera. Se além d'isso conhecermos uma regra para determinar qual d'estes pontos devemos escolher, isto é, se nos indicarem o *sentido* da linha OP, estará definida completamente a posição do ponto P.

Diz-se que é dado um *vector* OP, quando é dado o numero que mede a distancia de P a O (*grandeza do vector*) a direcção da recta OP (*direcção do vector*) e o sentido em que a recta OP é conduzida do ponto O (*sentido do vector*).

Representa-se geometricamente pelo segmento de recta OP com uma setta em qualquer ponto d'este segmento, para indicar o sentido (fig. 1).

Podemos então dizer que a posição d'um ponto P relativamente a um ponto O póde ser dada por o vector OP.

Reparemos, porém, em que para fixar a direcção e o sentido de OP, é implicitamente necessario o conhecimento de pelo menos dois pontos Z e X, por ex., independentes, o que nos conduziria a um systema de referencia.

7. Uma ultima nota ácerca da posição d'um ponto. Esta posição é sempre, segundo a definição, relativa a outros pontos. A expressão *posição absoluta* não tem sentido.

Isto está perfeitamente de harmonia com a noção usual de posição d'um corpo.

Quando queremos fixar um logar, indicar a maneira de o determinar, é sempre referindo-nos a outros logares. Se estes são desconhecidos temos de nos referir a outros. E assim sempre.

Esta nota tem uma importancia consideravel na Mecanica moderna, como veremos.

B. Tempo

8. A posição d'um ponto, como a definimos, deve ainda considerar-se relativa a um certo tempo. Para interpretar d'uma maneira rigorosa esta noção, vejamos como se mede o tempo.

O tempo mede-se pelos relogios. Analysemos um relogio. Por simplicidade tomemos a clepsydra, usada pelos antigos.

Essencialmente reduzia-se a um reservatorio para o qual corria agua, que sahindo por um orificio, se mantinha a um nivel sensivelmente constante. A agua que sahia do reservatorio era recebida num vaso graduado.

Para o graduar marcava-se a altura que a agoa attingia no vaso correndo durante o intervallo de duas voltas consecutivas do Sol ao meridiano, dividia-se em 24 partes eguaes, marcando 0 no ponto mais baixo, 1 no traço immediatamente superior e assim por diante.

A altura da agoa no vaso graduado dava a hora do dia. O numero de dias a partir d'uma certa epoca obtinha se contando as voltas do Sol ao meridiano, ou o numero de vezes que o vaso se enchia, suppondo que se esvasiava ao fim de cada 24 horas.

..

Ha aqui um phenomeno ou processo que tem logar continuamente e vem a ser o escoamento da agua do reservario para o vaso.

A quantidade d'este processo que se effectuou num certo intervallo de tempo é medida pela altura ou differença da altura da agoa no vaso graduado. Obtemos assim um numero que se toma para medida do intervallo de tempo.

Qualquer que seja o relogio adoptado, o tempo é sempre medido d'uma maneira semelhante. Ha sempre um processo que decorre ou se effectua d'uma maneira continua, que é a base da medição do tempo. Dois intervallos de tempo são eguaes se durante cada um d'elles, se effectuou a mesma quantidade do processo typo. São deseguaes no caso contrario, e as suas medidas estão entre si, como as das quantidades d'esse processo.

O tempo póde, portanto, ter medidas differentes, conforme os relogios adoptados.

O tempo é, assim, *relativo ao relogio*. Este fornece-nos a cada instante um numero t, que se toma para medida do intervallo de tempo decorrido desde um certo instante (origem do tempo) até ao instante considerado. Este numero é real e cresce continuamente quando se consideram instantes successivos.

Póde, pois, ser representado geometricamente sobre uma recta por um segmento contado a partir d'um ponto N para a direita (tempos futuros) ou para a esquerda (tempos passados).

Algebricamente contam-se como positivos os tempos futuros e como negativos os passados.

9. A noção de relatividade do tempo ao relogio ou processo typo, é muito importante, e só modernamente tem sido posta em evidencia, encontrando-se ainda na sciencia enunciados verdadeiramente paradoxaes, que resultam do desconhecimento ou desprezo d'esta noção, a unica que, na verdade, podemos ter.

É assim que ainda hoje se diz que *o dia sideral vae augmentando em duração.*

Ora, sendo o processo typo escolhido para medição do tempo a rotação do Globo relativamente ás estrellas, aquella proposição não tem sentido, visto que *por definição* devem ser eguaes os intervallos de tempo durante os quaes a Terra dá uma volta completa em torno do seu eixo de rotação.

O enunciado deverá ser corrigido.

10. Definimos a posição d'um ponto relativa a um conjuncto de pontos.

Á posição relativa de cada ponto no espaço associaremos um tempo t (contado a partir d'uma certa origem e por um certo relogio), de modo que á posição d'um ponto P corresponda um tempo t, e reciprocamente a cada tempo t corresponda uma posição do ponto P e só uma.

Definição 2. Dada a posição relativa de P e o tempo t *correspondente* diz-se que é dada *a posição relativa de* P *no tempo* t.

C. Definição do movimento do ponto

11. Fazendo variar t a posição de P póde ficar a mesma ou mudar. Isto equivale a dizer que designamos pela mesma letra P pontos que tem a mesma ou differentes posições em tempos diversos.

No primeiro caso diz-se que o ponto P fica fixo ou em *repouso*. No caso contrario, designando por x, y, z as coordenadas variaveis do ponto, a cada valor de t corresponde um grupo de valores de x, y, z.

x, y, z serão o que em linguagem mathematica se chamam funcções definidas de t.

Estas funcções poderão ser continuas ou não.

Para a descripção dos movimentos dos corpos, não precisamos, porém, de considerar uma generalidade tão grande.

Como um corpo para percorrer um certo caminho não póde deixar de occupar todas as posições intermediarias, convém restringil-a attribuindo sómente a x, y, z valores que variem continuamente com t, de maneira que as posições do ponto P, num intervallo qualquer, constituam uma curva continua (1). A esta curva chama-se *trajectoria* do ponto P.

Chegamos assim á:

Definição 3. *Movimento d'um ponto geometrico* P é a mudança da posição relativa de P com o tempo t, de fórma que o logar geometrico dos pontos designados pela mesma letra num intervallo qualquer seja uma curva continua.

12. O movimento d'um ponto geometrico é, pois, *por definição,* essencialmente relativo a um systema de referencia e a um relogio. A expressão «movimento absoluto», como «posição absoluta», e «tempo absoluto», não tem sentido.

Assim tão correcto é dizer que a Terra gira em volta do Sol, como dizer que o Sol se move em torno da Terra. Não é a primeira affirmação que dá a celebridade a COPER-

(1) Para isso não basta que x, y, z sejam funcções continuas de t, mas que sejam além d'isso susceptiveis de representação geometrica.

NICO, assim como não é na segunda que está o erro de PTOLOMEU. Se tomarmos um systema de referencia ligado invariavelmente á Terra, como faziam os antigos, e estudarmos o movimento de translação do Sol, relativo a este systema, acharmos que é approximadamente o seguinte: o centro do Sol descreve uma ellipse, um dos focos da qual é occupado pelo centro da Terra. Se ao contrario, como modernamente, quando se estudam os movimentos dos planetas, fixarmos o systema de referencia no Sol, acharemos que o centro da Terra descreve uma ellipse em torno do centro do Sol, situado num dos fócos.

A vantagem do systema de COPERNICO sobre o de PTOLOMEU está em que os movimentos conceptuaes a que precisamos de recorrer para descrever as nossas percepções sobre o systema planetario, são muito mais simples no primeiro systema do que no segundo.

A mesma nota póde ter logar relativamente á affirmação que se faz do movimento de rotação do globo em torno do seu eixo. Rigorosamente nem tem sentido dizer que são as estrellas que se movem, nem tão pouco que é a Terra que gira em torno do seu eixo polar.

O que é correcto, e o que poderá, como abreviatura, ser expresso por aquella fórma, é que no primeiro caso recorremos para a descripção das nossas percepções a movimentos conceptuaes relativos a eixos fixos na Terra, e no segundo a um systema de referencia ligado ás estrellas. Nada mais (1).

(1) Devemos observar que não é esta vulgarmente, mesmo em livros de sciencia a maneira como se interpretam os movimentos dos corpos naturaes. A maneira usual de dizer póde admittir-se como abreviação, mas para que não conduza a erros é indispensavel ter sempre presente a verdadeira significação que deve attribuir-se-lhe.

D. Descripção do movimento do ponto

13. Vê-se bem que o conhecimento completo do movimento d'um ponto P, assim definido, importa o conhecimento de cada posição de P e do tempo t correspondente.

Consideremos posições P_1, P_2, P_3, ... P_n do ponto P correspondentes aos tempos t_1, t_2, t_3, ... t_n. Quanto mais proximos tomarmos estes tempos, mais proximos serão os pontos P_1, P_2 ... A linha quebrada que os une tende para uma linha curva que é a trajectoria (fig. 2).

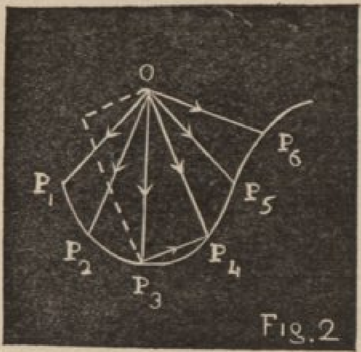

Fig. 2

Dado o systema de referencia e dada a trajectoria, nós temos uma indicação da maneira como o ponto P se move ou antes das posições que elle successivamente toma; mas ignoramos como a posição muda com o tempo. Para isso podemos construir um graphico da maneira seguinte:

Sobre uma linha vertical (fig. 3) marquemos pontos P_1, P_2, P_3, P_4 ... P_n a distancias proporcionaes ás distancias reaes d'esses pontos, isto é aos comprimentos dos arcos de trajectoria comprehendidos entre esses pontos.

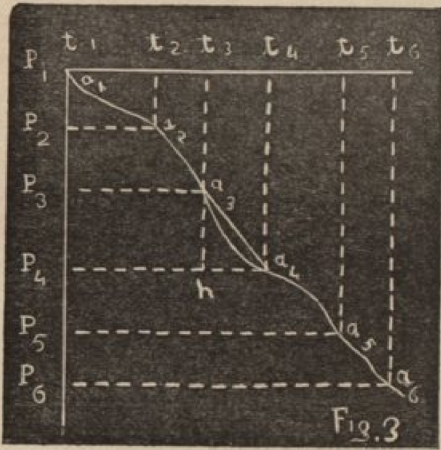

Fig. 3

Sobre uma linha horizontal passando pelo mesmo ponto P_1, tomemos a partir d'este ponto comprimentos $t_1 t_2$, $t_2 t_3$, $t_3 t_4$ . . ., proporcionaes ás differenças $t_2 - t_1$, $t_3 - t_2$, $t_4 - t_3$, dos tempos correspondentes ás posições consideradas.

Determinemos as intersecções das horizontaes conduzidas por P_2, P_3, P_4, . . . e das verticaes tiradas por t_2, t_3, t_4, ... Os pontos P_1, a_2, a_3, a_4, . . . poderão unir-se por uma linha quebrada que terá por limite uma linha curva, quando se multiplicam estes pontos de modo que as suas distancias tendam para zero.

Por meio d'este diagramma acha-se para cada tempo t a distancia a que o ponto P está de qualquer das suas posições, e reciprocamente dada a distancia d'uma posição de P a qualquer dos pontos P_1, P_2, P_3 . . . determina-se o tempo t correspondente.

As construcções auxiliares para a resolução d'estes dois problemas são evidentes.

14. Estudemos agora os dois graphicos (fig. 2 e 3) no caso particular em que a trajectoria é uma curva plana.

Os resultados facilmente se poderão generalisar, e, sob o ponto de vista elementar em que aqui nos collocamos, ha a maior vantagem em adquirir, por uma analyse facil, embora d'um caso particular, uma idêa nitida de todo o methodo scientifico da Mecanica.

Ao primeiro graphico (fig. 2) dá-se o nome de *mappa da trajectoria,* e ao segundo o de *carta dos tempos,* nomes que adoptamos, para commodidade da exposição.

Consideremos sobre o mappa da trajectoria duas posições P_3 e P_4, por exemplo, do ponto movel P, definidas pelos respectivos vectores OP_3 e OP_4. Estes vectores serão, em geral, de grandezas e direcções differentes.

Se em vez de nos darem OP_3 e OP_4 nos dessem OP_3 e o vector P_3P_4 que chamaremos *deslocamento* do ponto P no tempo $t_4 - t_3$ (fig. 2), unindo o ponto O com P_4 teriamos determinado o vector OP_4. Esta propriedade póde exprimir-se dizendo que OP_4 é a *somma geometrica* ou a *resultante* de OP_3 e P_3P_4.

Como a figura indica OP_4 é a diagonal do parallelogrammo construido sobre OP_3 e P_3P_4. É a *regra do parallelogrammo,* que se applica a muitos outros elementos do movimento em Mecanica e que apparece aqui como um simples theorema da Geometria dos vectores.

E. Velocidade

15. A grandeza do deslocamento P_3P_4, é dada pelo mappa da trajectoria. Mas de P_3 a P_4 decorreu um certo tempo $t_4 - t_3$, que póde ser maior ou menor, conforme o movimento do ponto P.

Esta consideração leva-nos á noção nova de velocidade do movimento.

É natural procurar o valor da razão $\frac{\widehat{P_3 P_4}}{t_4 - t_3}$ do comprimento do arco da trajectoria comprehendido entre P_3 e P_4 para o intervallo de tempo $t_4 - t_3$, a que chamaremos *grandeza da velocidade media* entre P_3 e P_4.

A *velocidade media* será, por definição, um vector da mesma direcção e sentido que $P_3 P_4$ e com a grandeza que acabamos de lhe attribuir.

Consideremos agora posições de P intermedias a P_3 e P_4, cada vez mais proximas de P_3; a corda que une P_3 a cada um d'esses pontos vae mudando de direcção e tendendo para a direcção da tangente á trajectoria em P_3 (1).

Definição 4. Ao mesmo tempo a razão $\frac{\widehat{P_3 P_4}}{t_4 - t_3}$ tende para um limite que se chama a grandeza da *velocidade no instante* t_3 ou no *ponto* P_3, a qual será um vector com a direcção da tangente á trajectoria no mesmo ponto, e com o sentido do movimento.

16. Na curva da carta dos tempos a rasão $\frac{\widehat{P_3 P_4}}{t_4 - t_3}$ dá a *inclinação* ou *declive* da corda $t_3 t_4$ e o limite considerado dá a inclinação da tangente a essa curva.

D'esta maneira, o vector velocidade no instante t, tem uma grandeza que é determinada pela tangente á curva

(1) Por definição de tangente a uma curva.

dos tempos, e uma direcção que é a da tangente á trajectoria no ponto correspondente.

Introduzindo a noção de velocidade, como que substituimos ás duas curvas, trajectoria e curva dos tempos, as suas tangentes nos diversos pontos e condensamos num só vector as direcções das tangentes ás duas curvas em pontos correspondentes.

A curva dos tempos póde ser uma linha recta. Neste caso a grandeza do vector-velocidade é constante e diz-se que o movimento é *uniforme*. Se, porém, a velocidade fôr variavel convirá estudar as suas mudanças.

17. Podemos agora proceder sobre o vector-velocidade como sobre o vector-posição, isto é, construir um diagramma das velocidades, analogo ao mappa da trajectoria.

Para isso tracemos a partir d'um ponto qualquer C os vectores-velocidades nos pontos P_1, P_2, ... P_6 da trajectoria, CV_1, CV_2, ... CV_6. As extremidades d'estes vectores formam uma linha quebrada, que se approximará cada vez mais d'uma curva á medida que considerarmos maior numero de pontos intermediarios sobre a trajectoria.

A curva limite chama-se *hodographo*.

Os pontos V_1, V_2, V_3 ... podem considerar-se posições successivas d'um ponto V movel.

F. Acceleração

18. Relativamente ao movimento d'este ponto o hodographo representa o papel de mappa da trajectoria e poderá construir-se uma carta dos tempos, semelhantemente ao que se fez para o ponto movel P.

Tendo agora o mappa da trajectoria e a carta dos tempos do movimento do ponto V, podemos construir um *segundo hodographo.*

Este segundo hodographo está para o primeiro como o primeiro hodographo para o mappa da trajectoria do ponto P.

Assim como os raios do primeiro representam as velocidades de P, assim os do segundo dão as de V; e se aquelle nos determinava a mudança do movimento de P em grandeza e direcção, este dará as mudanças de velocidade de P relativamente a O.

Á velocidade do ponto V no primeiro hodographo ou á mudança de velocidade de P relativamente a O, dá-se o nome de *acceleração* do ponto P.

As construcções geometricas effectuadas poderiam repetir-se indefinidamente. Chegariamos assim a um terceiro hodographo, depois a um quarto e assim successivamente. Tem-se reconhecido porém que é, em geral, sufficiente para a descripção dos movimentos a consideração do segundo hodographo.

19. Estudemos mais detalhadamente a acceleração. Ha duas maneiras de a interpretar.

Consideremos no primeiro hodographo dois raios CV_3 e CV_4, por exemplo. Podemos conceber a transformação da velocidade CV_3 em AV_4 por dois processos.

1.° Applicando a regra do parallelogrammo aos dois vectores CV_3 e $V_3 V_4$, determina-se a sua resultante que é CV_4.

2.° Como a differença entre as duas velocidades CV_3 e CV_4 é ao mesmo tempo, em grandeza e direcção, podemos imaginar que se passa d'uma para outra, modificando primeiro a grandeza de CV_4 e fazendo em seguida girar CV_3 em torno de CV_4 de modo que as duas direcções coincidam.

20. No primeiro caso as considerações feitas para o vector — posição que nos levaram á noção de velocidade media e velocidade instantanea ou actual do ponto P, applicam-se aqui ao vector-velocidade, e conduzem-nos á noção de acceleração media e acceleração actual do mesmo ponto.

Acceleração media entre dois pontos será assim a velocidade media do ponto V, entre os mesmos pontos.

Definição 5. *Acceleração no instante t* do movel P será a velocidade no instante t do movel V.

Esta acceleração é, pois, um vector que tem, para o ponto V_3, os seguintes elementos: *a)* grandeza egual ao limite da razão $\frac{\widehat{V_3 V_4}}{t_4 - t_3}$ (do comprimento do arco da trajectoria de V entre os pontos V_3 e V_4 para o intervallo do tempo correspondente) quando o ponto V_4 se approxima de V_3, limite que é dado pela inclinação da tangente no ponto correspondente a V_3 da carta dos tempos respectiva; *b)* direcção da tangente ao primeiro hodographo no ponto V_3; *c)* sentido do movimento de V no mesmo ponto.

21. O segundo processo de derivar a velocidade CV_3 conduz-nos a separar na mudança de velocidade duas partes. Uma é a variação de grandeza, e outra a de direcção.

Imaginemos um caso particular em que só tenha logar a segunda variação.

Como a velocidade é constante em grandeza o hodographo será evidentemente uma circumferencia.

A fig. 4 representa, ao lado um do outro, o mappa da trajectoria e o primeiro hodographo d'um movimento d'esta natureza.

A acceleração depende aqui sómente da mudança de direcção do movimento, isto é, da mudança de direcção da tangente á trajectoria.

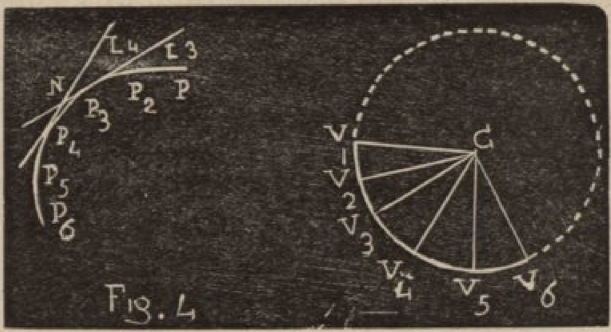

Fig. 4

Para o mesmo comprimento do arco entre os dois pontos P_3 e P_4 esta mudança póde ser maior ou menor.

Para a avaliar tomemos a razão $\dfrac{L_3 \hat{N} L_4}{\widehat{P_3 P_4}}$ do angulo das tangentes em P_3 e P_4 para o comprimento do arco $P_3 P_4$. Esta razão importantissima em Geometria tem o nome de *curvatura media* da curva entre os pontos P_3 e P_4.

Quando se faz tender P_4 para P_3 o limite d'aquella razão chama-se *curvatura* da curva no ponto P_3 (1).

---

(1) Notemos que poderiamos á semelhança da carta dos tempos construir um diagramma onde, em vez de marcar na linha horizontal comprimentos proporcionaes aos tempos, os marcassemos em proporção com as grandezas dos angulos formados pela tangente á curva em P_1 com as tangentes aos pontos P_2, P_3, ...

D'esta maneira em logar da curva dos tempos teriamos uma outra, e o declive da tangente a esta curva no ponto correspondente a P_3 seria precisamente a curvatura da trajectoria no ponto P_3.

Vejamos a relação que ha entre a curvatura e a acceleração neste caso particular do movimento.

A grandeza da acceleração media γ_m entre P_3 e P_4 é como vimos medida pela velocidade media de V entre V_3 e V_4, ou pela relação $\frac{\widehat{V_3 V_4}}{t_4 - t_3}$ do comprimento do arco $V_3 V_4$ para o tempo gasto na passagem de V_3 para V_4.

Mas designando por r o raio da circumferencia hodographo é evidentemente

$$\frac{\widehat{V_3 V_4}}{r} = V_3 \hat{C} V_4 = L_3 \hat{N} L_4 \ .$$

A curvatura media C_m entre os pontos P_3 e P_4 será, pois,

$$C_m = \frac{L_3 \hat{N} L_4}{\widehat{P_3 P_4}} = \frac{\widehat{V_3 V_4}}{r \,.\, \widehat{P_3 P_4}} \ ;$$

e, como a velocidade do ponto P é constante e egual a r,

$$\widehat{P_3 P_4} = (t_4 - t_3)\, r$$

e por isso

$$\gamma_m = \frac{\widehat{V_3 V_4}}{t_4 - t_3} = C_m \times r^2 \ .$$

Fazendo tender o ponto V_4 para o ponto V_3, ou P_4 para P_3, a acceleração media transforma-se no limite na acceleração no ponto P_3 e a curvatura media na curvatura no mesmo ponto. E como o raio r da circumferencia hodographo mede a grandeza da velocidade do ponto P, podemos concluir que no movimento considerado a *acceleração no instante* t *é egual ao producto da curvatura da trajectoria do ponto* P *correspondente pelo quadrado da grandeza da velocidade do mesmo ponto.*

22. É facil agora de ver que, substituindo no enunciado do theorema anterior as palavras «acceleração no instante t» por «acceleração *normal* no instante t», elle ficará ainda verdadeiro no caso geral em que ha simultaneamente mudança de grandeza e direcção de velocidade.

Entende-se por *acceleração normal* o vector com a direcção da normal á trajectoria, que se obtem decompondo a acceleração em duas, naquella direcção e na da tangente á mesma curva. Á componente nesta ultima direcção chama-se *acceleração tangencial.*

Ora para passar do vector velocidade CV_3 para CV_4, podemos conceber que numa primeira phase o vector CV_3 gira em torno de C de modo a coincidir em direcção e sentido com CV_4, sem mudar de grandeza. Esta phase corresponde ao movimento particular que acabamos de estudar. A velocidade conserva-se constante em grandeza e egual a CV_3 e a acceleração será dada pelo theorema do numero precedente.

Mas esta acceleração no limite quando V_4 se approxima de V_3 é precisamente a componente normal da acceleração do movimento mais geral, agora considerado.

G. 2.ª descripção do movimento do ponto

23. As noções de velocidade e acceleração permittem descrever o movimento do ponto d'uma maneira differente da primitivamente dada.

Tinhamos visto que o movimento d'um ponto geometrico fica inteiramente determinado quando for conhecida a trajectoria, e o tempo para cada posição da trajectoria.

Vamos agora demonstrar o seguinte importante:

Theorema. *Dada a velocidade d'um ponto numa posição e a acceleração do mesmo ponto em todas as posições, o movimento é inteiramente determinado.*

Com effeito, pelo theorema anterior que liga a acceleração normal com a curvatura da trajectoria e a grandeza da velocidade, vê-se que é possivel determinar a forma inicial da trajectoria, isto é, a curvatura para o ponto cuja velocidade é conhecida. Considerando um ponto visinho, da grandeza da acceleração nesse ponto conclue-se a mudança de velocidade devida á mudança de posição, e portanto a grandeza da velocidade na nova posição. Conhecida esta e a acceleração normal fica determinada a curvatura do elemento de trajectoria immediato. E continuando assim, e com o grau de precisão que se requeira, poderá construir-se a trajectoria.

D'esta e da grandeza da velocidade em cada ponto passa-se para a carta dos tempos, do modo como vamos expôr. Como a grandeza da velocidade d'um ponto representa o declive da tangente á curva dos tempos no ponto correspondente, podemos traçar esta tangente para o ponto inicial e tomar sobre ella um comprimento muito pequeno (determinado pelo grau de approximação) que será o primeiro elemento da curva do tempo. Pela extremidade d'este elemento faz-se passar uma horizontal que irá determinar sobre a vertical que passa pelo ponto inicial uma nova posição do ponto movel. A esta posição corresponde uma grandeza de velocidade conhecida, e repetindo o processo construir-se-ha um novo elemento da curva dos tempos; e assim successivamente.

24. Para se comprehender o alcance do ultimo theorema, lembraremos a applicação que se fez d'elle á determinação dos movimentos dos planetas. NEWTON descobriu que a acceleração nestes movimentos obedece a uma lei simples, que permitte o seu conhecimento em qualquer posição. É a lei da *gravitação*. Conhecendo a grandeza da velocidade numa posição, o movimento fica determinado.

Não é, porém, pelo methodo indicado na demonstração do citado theorema que se constroe praticamente a trajectoria e se calculam os tempos correspondentes ás diversas posições do ponto movel, mas sim pela applicação d'uma analyse mathematica, complexa e inteiramente fóra do caracter elementar d'este trabalho.

25. Uma outra questão importante no estudo do movimento do ponto geometrico é a da resolução do problema da mudança de origem de referencia, que se póde formular assim:

PROBLEMA. Dados o movimento do ponto P e do ponto O', relativos a um systema de referencia com a origem em O, pede-se o movimento de P relativo a um systema de referencia com eixos parallelos aos do primeiro e com a origem em O'.

Sejam (fig. 5) P_1 e P_2 duas posições de P relativas a O, e O'_1 e O'_2 as duas posições correspondentes de O'.

O'_1P_1 é o vector que define a primeira posição de P relativa a O'; e o vector $O'_1P'_2$ parallelo a O'_2P_2 define a segunda.

..

Os pontos P_1 e P'_2 são, pois, as posições correspondentes a P_1 e P_2. Ora a figura mostra que $P_1P'_2$ é o vector resultante de P_1P_2 e $P_2P'_2$.

Mas o primeiro d'estes vectores P_1P_2 é o deslocamento de P em relação a O, e o segundo $P_2P'_2$, sendo da mesma direcção, e grandeza e de sentido contrario a $O'_1O'_2$ representa evidentemente o deslocamento de O relativo a O'.

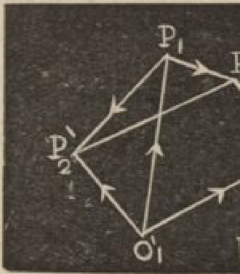

Fig. 5

Logo o deslocamento de P relativo a O' obtem-se achando pela *regra do parallelogrammo* a resultante do deslocamento de P relativo a O e do deslocamento de O relativo a O'.

Facilmente se demonstraria tambem que, addicionando geometricamente as velocidades (ou accelerações) actuaes de P relativamente a O e de O relativamente a O', isto é, applicando a mesma regra do parallelogrammo, se obtem a velocidade (ou acceleração) de P relativa a O'.

De fórma que o problema dos movimentos relativos d'um ponto reduz-se em ultima analyse á addição geometrica de vectores, ou á chamada regra do parallelogrammo.

26. Esta regra do parallelogrammo tem a sua principal importancia em ser o fundamento da synthese de movimentos, isto é, da construcção dos movimentos complexos a partir de outros simples.

Visto que o movimento de P relativo a O′ é obtido como resultante do movimento de P relativo a O e do de O relativo a O′, podemos, considerando estes dois movimentos independentes, dizer que o movimento de P relativo a O′ é proveniente do movimento de P relativo a O e d'outro egual ao de O relativo a O′.

Então o deslocamento do ponto, a velocidade, e a acceleração obter-se-hão pela addição geometrica dos deslocamentos, velocidades e accelerações dos dois movimentos independentes.

Esta concepção póde ter utilidade, se se reconhecer que a descripção d'um movimento feito segundo ella é exacta.

27. Temos até aqui considerado o caso particular do movimento d'um ponto cuja trajectoria é uma curva plana e por considerações geometricas simples chegamos a dar uma idêa dos principaes theoremas de Cinematica.

Os resultados que alcançamos são susceptiveis de extensão ao caso da trajectoria não ser plana.

Podemos, com effeito, projectar o ponto P sobre os planos coordenados, e obter assim tres curvas planas (1), que são os logares geometricos das projecções de P sobre cada um dos planos.

Designando por P_1, P_2, P_3 essas projecções, estes pontos movem-se segundo trajectorias planas e o seu movimento determina o de P. O estudo d'este ultimo movimento póde, pois, fazer-se depender do estudo já feito.

(1) Duas bastam, como é evidente, á determinação da trajectoria.

28. Limitar-nos-hemos aqui a dar as definições geraes dos elementos do movimento.

Em vez de suppôr o ponto P projectado sobre os tres planos, imaginemol-o projectado sobre os tres eixos.

Teremos tres pontos x, y, z moveis segundo linhas rectas.

Definição 6. O *deslocamento* do ponto P entre duas posições (x, y, z, t) e (x', y', z', t') será o vector resultante (1) dos deslocamentos correspondentes dos pontos x, y e z.

Definição 7. *Velocidade* no instante t do ponto P será analogamente o vector resultante das velocidades no mesmo instante dos pontos x, y, z.

Definição 8. *Acceleração* no instante t do ponto P é o vector resultante das accelerações de cada um dos pontos x, y, z.

MOVIMENTO DE ROTAÇÃO

29. Em vez d'uma particula consideremos agora um systema de particulas, que se movem de modo que as suas distancias permanecem invariaveis.

E supponhamos alem d'isso que este systema preenche d'uma maneira continua o espaço limitado por uma superficie fechada.

---

(1) A resultante de tres vectores não situados no mesmo plano é, em grandeza e direcção, a recta que tem por projecção os tres segmentos representativos dos vectores componentes. O sentido é o do movimento.

Definição 9. Um tal systema chama-se *corpo rigido* e a superficie referida diz-se *superficie do corpo.*

O movimento d'um corpo rigido ficará determinado se fôr conhecido o movimento de tres das suas particulas não situadas em linha recta. A razão é que, com os tres pontos que as definem, fica determinado um systema de referencia, e relativamente a elle as outras particulas são fixas, por definição.

Quando se refere o movimento a eixos que passam pelo ponto representativo d'uma particula do corpo o movimento diz-se de *rotação* em volta do ponto.

O caso mais simples do movimento de rotação é aquelle em que os pontos do corpo se movem parallelamente a um plano.

Se este plano é, por exemplo, o plano (x, y) do systema de referencia, então a coordenada z da posição de cada ponto fica constante, e o corpo gira em torno d'uma recta fixa, o eixo dos z, que se chama eixo de rotação.

Cada ponto descreve uma circumferencia, de plano parallelo ao plano invariavel.

Consideremos uma linha de particulas do corpo parallela a este plano e seja θ o angulo que ella faz no tempo t com uma recta fixa no plano, por ex., o eixo dos x.

No tempo t' este angulo tomou o valor θ'. Então chama-se *velocidade angular* da linha considerada o limite da razão $\frac{\theta' - \theta}{t' - t}$, quando $t' - t$ tende para zero.

Qualquer outra linha de particulas parallela ao plano faz um angulo constante com a primeira, e terá, portanto, a mesma velocidade angular.

Definição 10. Chama-se *velocidade angular* do corpo a velocidade angular de qualquer linha de particulas parallela ao plano fixo.

Designando por ω a velocidade angular do corpo, é evidente que será ωr a velocidade de qualquer ponto situado á distancia r do eixo de rotação.

No caso geral o movimento póde considerar-se como sendo a cada instante uma rotação em torno d'um eixo que vae mudando de posição.

DEFORMAÇÃO

30. Resta considerar a mudança das distancias dos diversos pontos do corpo. É a chamada *deformação*.

Limitar-nos-hemos aqui a notar que ha neste movimento dois aspectos fundamentaes que convem separar, a saber: a mudança de grandeza do corpo sem mudança de fórma, e a mudança de fórma sem mudança de grandeza.

Á primeira dá-se o nome de *dilatação* e á segunda de *escorregamento*.

Toda a dilatação se reduz a mudança de comprimento.

Todo o escorregamento se avalia por mudanças de angulo.

CAPITULO II

A. Postulados

1. Até aqui temos estudado os movimentos conceptuaes, de que nos servimos para a descripção do movimento dos corpos, d'uma maneira geral.

A observação e a experiencia tem conduzido á descoberta de que a descripção mecanica do Universo póde ser feita com certos typos particulares de movimento; ou por outras palavras que se podem estabelecer relações constantes entre os elementos dos movimentos conceptuaes necessarios a essa descripção.

Essas relações são as chamadas leis do movimento, que introduziremos como postulados. Aos corpos perceptiveis ou naturaes substituimos symbolos, que são fórmas geometricas, cujo movimento obedece a certas regras. Os postulados dão precisamente essas regras.

Estes postulados referem-se todos a particulas dos corpos, cuja posição póde ser definida por pontos.

De modo que, quando fallarmos do movimento d'uma particula, entender-se-ha que nos referimos ao movimento do ponto que a define.

Depois de enunciarmos estes postulados restará ver como se concebem os corpos construidos de particulas.

2. Postulado I. *Cada particula exerce influencia sobre o movimento de outra particula; essa influencia é tanto maior quanto mais proximas se acham as duas particulas.*

Por este postulado devemos entender que para determinar o movimento d'uma particula concorrem todas as outras, qualquer que seja a sua distancia; mas que para as maiores distancias a acção das particulas é menor.

Por ex., uma particula da Terra é influenciada no seu movimento por qualquer particula da estrella mais afastada.

Porém, se esta particula se achasse collocada no Sol, a sua influencia seria maior, e maior ainda se pertencesse á propria Terra.

3. Postulado II. *É possivel determinar um systema de referencia relativamente ao qual uma particula isolada permanece em repouso ou se move com movimento uniforme.*

Neste enunciado apparece a expressão *particula isolada* que é preciso em primeiro logar definir.

Esta nova noção, corresponde á necessidade que temos d'uma simplificação.

Pelo postulado I o movimento de cada particula soffre a influencia de todas as outras particulas do Universo. Esta concepção tornaria impossivel a descripção mecanica, se por acaso não fosse permittido quando estudamos o movimento d'uma particula ou grupo de particulas excluir ou desprezar a acção das outras particulas.

O mesmo postulado diz-nos, porém, que a influencia diminue com a distancia. Ella torna-se mesmo pela sua pequenez impossivel de medir, para particulas muito distantes.

Mas, ainda quando apreciavel, podemos numa primeira approximação desprezal-a, sabendo, porém, que se commetteu um erro e que o valor d'esse erro é precisamente o desprezo d'essa influencia.

É isto que se chama isolar um grupo de particulas. Um grupo de particulas isolado toma o nome de *campo*.

Não ha, segundo o primeiro postulado, systemas de particulas isolados, mas ha-os approximadamente isolados. Estes podemos concebel-os como rigorosamente isolados, isto é, não attender á influencia das particulas exteriores.

Mas agora o postulado II, conhecido com o nome de *lei da inercia*, parece absurdo, pois que se a particula se acha isolada, não ha systema de referencia. O que se quer significar, porém, é que as outras particulas se consideram como não exercendo influencia no movimento da primeira, mas se suppõem presentes para a determinação d'um systema de referencia.

O postulado II refere-se ao campo mais simples — uma particula — e a propriedade que por este postulado attribuimos a cada particula denomina-se a sua *inercia*.

4. Postulado III. *As accelerações de duas particulas, relativas ao mesmo systema de referencia, são determinadas pela sua posição* (e velocidade) *relativa; têem a direcção da linha que une os pontos representativos das duas particulas e sentidos oppostos.*

Deve entender-se que as duas particulas constituem um campo. O systema de referencia será determinado por outras particulas situadas a distancias taes que a sua influencia é desprezivel.

Tem-se reconhecido que para esta theoria ter utilidade, é necessario suppôr que não só as duas particulas podem mudar de posição relativa, mas que para a mesma posição podem ter velocidades quaesquer. As accelerações é que devem suppôr-se eguaes para a mesma posição.

A esta ultima affirmativa não convem, porém, attribuir-se-lhe uma inteira generalidade. Se para os movimentos de translação e rotação ella parece não soffrer excepção, para a deformação a regra seria muito particular e deveria antes suppôr-se que as accelerações podem depender tambem das velocidades das duas particulas e não sómente das posições.

5. Postulado IV. *A relação da acceleração da particula* A *devida á particula* B *para a acceleração de* B *devida a* A *é constante, qualquer que seja a posição de* A *e* B, *e o campo.*

Este postulado diz-nos que a parte da acceleração da particula A devida á acção de B está numa relação constante com a parte da acceleração de B devida a A.

Essa relação depende da qualidade ou individualidade das particulas A e B, mas é independente da posição d'essas particulas e do campo de que ellas fazem parte.

O postulado conduz-nos a classificar as particulas segundo o valor d'esta relação, a formar uma escala das relações das accelerações mutuas.

6. Para esse fim toma-se uma particula P como termo de comparaação, como padrão. A relação da acceleração de P devida a outra particula A para a acceleração de A devida a P será constante, qualquer que seja a posição das duas particulas e o campo. Essa relação é expressa por um certo numero que associaremos á particula A. Introduz-se assim d'uma maneira clara a noção de massa pela seguinte :

Definição 11. *Massa d'uma particula* A relativa á particula padrão P ou, simplesmente, massa de A é a razão da acceleração de P devida a A para a acceleração de A devida a P.

A massa é, portanto, relativa á particula P escolhida para padrão. A massa d'esta particula é representada pelo numero 1. As massas das outras particulas são tambem numeros que representam relações por quociente de accelerações.

7. POSTULADO V. *A força da particula* A *sobre a particula* B *é egual e opposta á força de* B *sobre* A.

Neste postulado que corresponde á antiga *lei da acção e reacção* intervem uma noção nova, a de força, que se cria pela seguinte:

Definição 12. Chama-se *força exercida pela particula* A *sobre a particula* B, ao vector que tem grandeza egual ao producto da massa de B pela acceleração de B devida a A, e a direcção e sentido d'esta acceleração.

A grandeza do vector-força obtem-se multiplicando um numero de unidades de massa, por um numero de unidades de acceleração.

Pelo postulado III já sabiamos que as direcções da acceleração de A devida a B e da de B devida a A são communs e os sentidos oppostos. Logo as forças de A sobre B e de B sobre A terão direcções eguaes e sentidos oppostos. O que ha de novo no postulado V é que as grandezas d'essas forças são eguaes.

Por outras palavras o que este postulado affirma é que, se depois de determinadas as massas de todas as particulas, relativas a uma certa particula P padrão, as compararmos entre si, acharemos que a razão geometrica da acceleração de A devida a B para a acceleração de B devida a A é egual á razão da massa de B para a massa de A. Abreviadamente: as accelerações *são inversamente proporcionaes ás massas.*

8. A noção de força tal como a apresentamos no numero anterior é perfeitamente clara. A força dá uma medida do movimento. Duas particulas estão em presença uma da outra. O movimento de uma depende como o indicam os anteriores postulados de dois factores: um é, por assim dizer, o caracter individual d'essa particula, a sua massa; o outro é a influencia que a segunda particula exerce sobre a primeira, ou a acceleração d'esta devida á outra.

Para obter esta medida toma-se o vector-acceleração de A devida a B e modifica-se o seu comprimento de fórma que se torne egual ao producto d'elle pelo numero que representa a massa de A.

B. Synthese do movimento

9. Introduzamos no campo (A, B) uma terceira particula.

É claro que poderiamos conceber que a presença da particula C alterasse a acção de A sobre B, sem contradizer o postulado IV. O que este postulado, com effeito, estabelece é a constancia da relação das accelerações mutuas de A e B, quando o campo varia.

Mas nada nos diz com relação ás grandezas absolutas d'estas accelerações. D'ahi resulta naturalmente esta pergunta: *A grandeza da acceleração da particula* A *em presença de* B *não é alterada quando se introduz no campo uma terceira particula* C?

Supponhamos, pois, primeiro que, sendo a acceleração de A, no campo constituido por A e B, representada pelo vector b (fig. 6) e no campo formado por A e C pelo vector c, no campo das tres particulas estas accelerações continuam a ser as mesmas. Se assim fôr é applicavel a regra do parallelogrammo das accelerações e a acceleração total resultante será o vector d, diagonal do parallelogrammo de lados b e c.

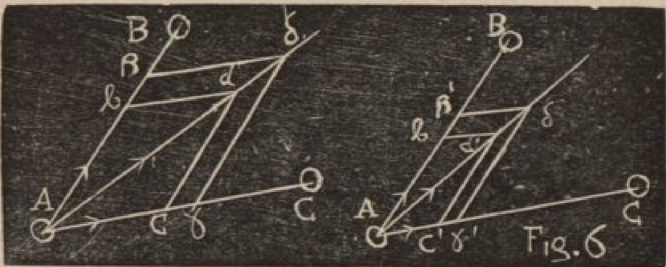

Fig. 6

Se, ao contrario, suppomos que, pela introducção da particula C no campo, a acceleração de A devida a B é o vector b', e pela presença de B a acceleração de A devida a C se muda em c', então a acceleração resultante será d', diagonal do parallelogrammo de lados b' e c'.

A synthese do movimento não poderá fazer-se pela regra do parallelogrammo das accelerações.

Esta observação póde applicar-se tambem ás forças.

Seja m a massa de A, $m \times b$ e $m \times c$ serão respectivamente as grandezas das forças de B e C sobre A, nos campos (A, B), e (A, C). Estas forças são representadas pelos vectores β e γ, de grandezas eguaes a $m \times b$ e $m \times c$.

A *resultante* na primeira hypothese será a diagonal d do parallelogrammo de lados β e γ. É a regra conhecida pelo nome de *parallelogrammo das forças*.

Imaginemos, porém, que esta hypothese é rejeitada, e que as accelerações a e b se transformam em a' e b' quando se considera o campo (A, B, C).

Então as forças de B sobre A e de C sobre A serão $m \times a'$ e $m \times b'$ em grandeza, e a resultante será a diagonal δ' do parallelogrammo construido sobre os lados β' e γ'.

N'esta hypothese, porém, a resultante não se obtem applicando a regra do parallelogrammo ás chamadas forças de B sobre A e de C sobre A. Estas forças relativas aos campos (A, B) e (A, C) são modificadas pela consideração do campo (A, B, C), e a synthese do movimento torna-se menos simples.

Não bastaria o conhecimento das accelerações dos movimentos simples, seria necessario medir as accelerações para cada variação do campo.

Mas a primeira hypothese é sufficiente para descrever as nossas percepções relativas a muitos movimentos dos corpos, sendo porém duvidoso que possa dar explicação dos phenomenos physicos para cuja descripção é necessario fazer intervir a acção de particulas a distancias muito pequenas.

Emquanto que, por exemplo, para descrever os movimentos dos corpos celestes, e ainda dos graves á superficie da Terra, ha toda a razão para crer, que o postulado é util e commodo, ha, ao contrario, phenomenos de cohesão que difficilmente podem ser explicados sem suppôr a acção de duas moleculas modificada pela presença d'uma terceira.

C. Concepção d'um corpo. Novos postulados

10. É necessario agora indicar quaes são os symbolos que substituimos aos corpos naturaes, e a sua relação com as particulas, de que até aqui temos sómente fallado.

Supponhamos que, depois de dividir um corpo em partes de egual grandeza e fórma, não podemos distinguir essas partes umas das outras por nenhuma differença de qualidade. Diremos então que o corpo é *homogeneo*.

No caso contrario o corpo diz-se *heterogeneo*.

O nosso symbolo para o corpo homogeneo, será uma figura, limitada por uma superficie geometrica fechada, e cujos pontos interiores representam particulas de *egual massa*, uniformemente distribuidas.

A massa do corpo homogeneo é a somma das massas das suas particulas.

Para os corpos heterogeneos a experiencia mostra que quanto menores forem as partes em que se dividem esses corpos, mais essas partes se approximam da homogeneidade.

Poderemos então conceber um corpo heterogeneo como formado de particulas homogeneas.

Nos corpos homogeneos em virtude da uniformidade da distribuição das particulas, ha uma relação constante entre a massa de qualquer porção do corpo e o seu volume.

Essa relação chama-se *densidade* do corpo.

Nos corpos heterogeneos esta relação é variavel de ponto para ponto, porque a massa das particulas é differente. Considera-se então a *densidade num ponto do corpo* que é o limite para que tende a relação da massa para o volume d'uma porção do corpo contendo o ponto, quando esse volume tende para zero.

11. O que acabamos de dizer leva-nos ao enunciado de mais dois postulados:

Postulado VI. *Cada corpo e cada parte individual d'um corpo tem uma massa constante e a massa do corpo é a somma das massas das suas partes.*

Postulado VII. *Cada corpo póde ser concebido como formado de particulas, que preenchem d'uma maneira contínua o volume limitado pela superficie do corpo.*

12. A estes dois postulados, attendendo a que não podemos conceber dois corpos naturaes occupando no mesmo tempo o mesmo espaço, deverá accrescentar-se o seguinte:

Postulado VIII. *Dois corpos nunca occuparão no mesmo instante o mesmo espaço.*

D. Medida das massas

13. Queremos ainda dar uma ligeira ideia da maneira de medir praticamente as massas dos corpos.

Precisamos para isso de introduzir primeiro a noção de *acceleração d'um corpo.*

Demonstra-se que existe em cada corpo um ponto chamado *centro de massa* ou *de inercia* que se move como uma particula de massa egual á massa do corpo que fosse actuada pela resultante do systema de forças applicado ao corpo, supposto rigido.

Por resultante do systema de forças entende-se a *resultante* do systema de vectores representativos, que se determina pela theoria geometrica dos vectores.

A *acceleração do corpo* é a acceleração do centro de inercia.

Na proximidade da Terra os corpos cáem com uma acceleração approximadamente constante para o mesmo logar e de direcção vertical, relativamente a eixos fixos á superficie do Globo, sendo um d'elles a vertical (1) do logar

(1) A vertical é dada pelo fio do prumo em repouso relativo á Terra.

e sendo a unidade de tempo o segundo solar medio. Attribue-se esta acceleração á acção das particulas da Terra sobre as particulas do corpo. Na queda livre d'um corpo suppomos esta acção unica. A força resultante que actua sobre o corpo é egual em grandeza ao producto da massa do corpo pela sua acceleração.

Esta acceleração, sendo constante no mesmo logar, a massa do corpo será proporcional ao peso.

Para determinar as massas dos corpos proximo da superficie da Terra basta pois pesal-os numa balança commum. Os corpos que se equilibram na mesma balança terão massas eguaes. A massa unidade será a d'um corpo particular escolhido como padrão.

Para os corpos celestes as massas são determinadas pela applicação da lei de attracção newtoniana.

Observemos ainda que a relação das massas, deduzida da observação directa das velocidades produzidas pela sua acção mutua, coincide com a relação das massas determinada pela balança.

E. Escolha do systema de referencia

14. É sobre o systema de definições e postulados apresentados que se construirá a Mecanica racional.

Para que esta sciencia seja util é indispensavel que os movimentos descriptos por ella dêem uma representação dos movimentos observados.

Tudo se reduz a que seja possivel escolher systemas de referencia taes que relativamente a elles os postulados se appliquem aos corpos naturaes.

Tivemos já occasião de notar a relatividade do movimento.

Esta relatividade extende-se ainda á noção de força dada, como claramente se vê notando que a força exercida sobre um corpo é a resultante das forças exercidas sobre as suas particulas, e que estas ultimas forças são formadas por componentes, eguaes em grandeza ao producto da massa da particula pela acceleração devida a outra particula.

Ora esta acceleração não tem sentido se não fôr dado o systema de referencia.

Mas ha mais. Emquanto a posição d'uma particula, a sua velocidade e acceleração podem ser descriptas relativamente a qualquer systema de referencia determinado pelas partes dos corpos naturaes, o mesmo não succede para a força. Ha systemas de referencia para os quaes não tem sentido a expressão *força sobre um corpo*.

Daremos a seguir alguns exemplos.

15. Supponhamos que escolhiamos para origem das coordenadas a posição d'uma particula do systema de corpos cujo movimento pretendemos descrever. Essa particula teria uma acceleração nulla. Mas então attendendo a que as massas são dadas pela relação das accelerações, a massa d'esta parte do corpo deveria ser infinita, o que é contra um dos postulados.

Assim quando se estudam os movimentos dos corpos relativamente á Terra, não podemos tomar a origem no centro da Terra sem considerar a massa da Terra como infinita. Como, porém, esta ultima tem um valor finito, que póde ser determinado, resulta que se commette um erro, applicando os postulados.

Designando por m a massa do corpo e por M a da Terra despreza-se evidentemente a fracção $\frac{m}{M}$.

16. Tambem o postulado da acção e reacção implica uma restricção egual sobre a escolha de origem de referencia.

Consideremos com effeito um systema de dois corpos e substituamos esses corpos por particulas definindo os centros de inercia.

Escolhendo a origem do systema de referencia no centro de inercia d'um dos corpos, a força exercida pelo outro sobre este deve ser nulla para que a acceleração da particula, onde se collocou a origem, o seja tambem.

Mas em virtude do citado postulado seria tambem zero a força do segundo corpo sobre o primeiro, isto é a acceleração d'aquelle não resultaria de acções e reacções entre as partes do systema.

É necessario, pois, tomar uma origem tal que o systema possa ser considerado isolado de todos os outros corpos; por outras palavras que o erro commettido, não attendendo á influencia dos corpos externos, seja desprezivel. Para isso é preciso que esses corpos estejam a distancias muito grandes relativamente ás distancias entre os pontos mais afastados do systema.

No estudo, por exemplo, do movimento d'um corpo proximo da Terra póde, com approximação sufficiente, considerar-se isolado o systema formado pela Terra e o corpo.

Outro exemplo.

Para o estudo dos movimentos dos planetas póde desprezar-se a influencia das estrellas.

Collocando a origem do systema de referencia no centro de inercia do systema solar, teremos resolvida a difficuldade, e não deverá então ligar-se sentido á phrase «força exercida sobre o Sol por uma estrella».

17. Vejamos ainda como em face d'estes principios deve ser expressa a lei da attracção newtoniana. Não tem sentido dizer, como é costume, que os corpos se attrahem na rasão directa das massas e na inversa do quadrado das distancias.

Deve em primeiro logar substituir-se a palavra «corpos» pela palavra «particulas».

Mas ainda não é tudo.

A attracção é uma força; como tal é relativa. Necessario é, pois, fixar o systema de referencia.

Poderia entender-se a lei como indicando a existencia d'um systema de referencia, em relação ao qual a força entre duas particulas seria directamente proporcional ao producto das suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da sua distancia.

Nesta ordem de idêas, procurando pôl-a de harmonia com os factos observados, reconheceu-se que, para o systema solar, a força entre duas particulas, relativa a eixos de referencia dirigidos para as estrellas mais distantes com a origem no centro de inercia d'aquelle systema, tem effectivamente as relações indicadas com as massas d'essas particulas e distancias respectivas.

Se quizermos dar-lhe um enunciado mais geral, podemos dizer que a força entre duas particulas d'um systema *isolado* é proporcional ao producto das massas e inversamente proporcional ao quadrado da sua distancia, servindo as particulas exteriores para a determinação do systema de referencia (1).

18. Temo-nos referido apenas nestes exemplos ao systema de referencia.

(1) Convém, porém, notar que com esta forma geral a lei não foi ainda verificada; e accrescentaremos que parece não poder applicar-se ás particulas, que, como as d'um corpo, se encontram a distancias muito pequenas.

Faremos agora algumas observações relativamente á escolha do processo de medir o tempo.

Como temos notado, o movimento depende d'esta medida.

Ao numero indicado por um relogio como medida do tempo, corresponde sempre noutro relogio outro numero.

Designando por t o tempo do primeiro relogio e por t' o do segundo, t será, pois, uma funcção definida de t'.

A mudança de processo padrão para a medida do tempo é, pois, em ultima analyse, uma mudança de variavel.

Póde ser conveniente em certos casos effectual-a.

É assim que emquanto na Astronomia em certas observações (observações meridianas) se adopta o *tempo sideral*, para o qual o processo typo é a rotação da Terra relativa ás estrellas, em tudo o mais a unidade de tempo escolhida (segundo solar medio) é differente. Esta escolha foi subordinada á condição de ser util e commoda á vida e usos civis. Aqui a dependencia é simples porque o tempo medido pelo segundo processo é um multiplo do tempo medido pelo primeiro.

19. Cabe neste logar, como exemplo, examinar que sentido deve ligar-se á affirmação citada no n.º 9, do crescimento successivo do dia sideral, a qual foi estabelecida para pôr de accordo com certas observações a lei da gravitação.

Deveria antes dizer-se que, com a medida do tempo adoptada, esta lei não está em exacta concordancia com alguns factos particulares.

E, se reconhecermos que uma mudança naquella medida supprime estas pequenas excepções, devemos então corrigir assim o enunciado: que ha um processo typo de medição do tempo para o qual a lei da gravitação provê com mais rigor á descripção mecanica do systema solar.

F. Nota final

Para terminar resta-nos observar que os postulados estabelecidos são apenas os primeiros postulados da Mecanica.

No seu desenvolvimento ulterior será necessario introduzir outros. É assim que para a descripção dos movimentos dos corpos celestes e dos graves á superficie da Terra se assigna á força uma lei — a lei da gravitação — que deve ser considerada como um novo postulado, applicavel a certa classe de movimentos.

Mas ha mais. A Mecanica baseada nos principios que exposemos fica demasiado larga.

Abrange typos de movimento que não são necessarios á descripção dos phenomenos.

Os postulados que apresentamos são as respostas que a experiencia dá a certas perguntas que o nosso espirito é naturalmente levado a formular.

No desenvolvimento da theoria apparecem noções como as de trabalho e energia, que permittem collocar questões novas. A experiencia mostra que se deve restringir por meio d'outro postulado — *o principio da conservação da energia* — a generalidade excessiva d'aquella theoria.

INDICE