

Sala 5  
Gab. —  
Est. 56  
Tab. 19  
N.º 42

Sala 5  
Gab. -  
Est. 56  
Tab. 19  
N.º 42

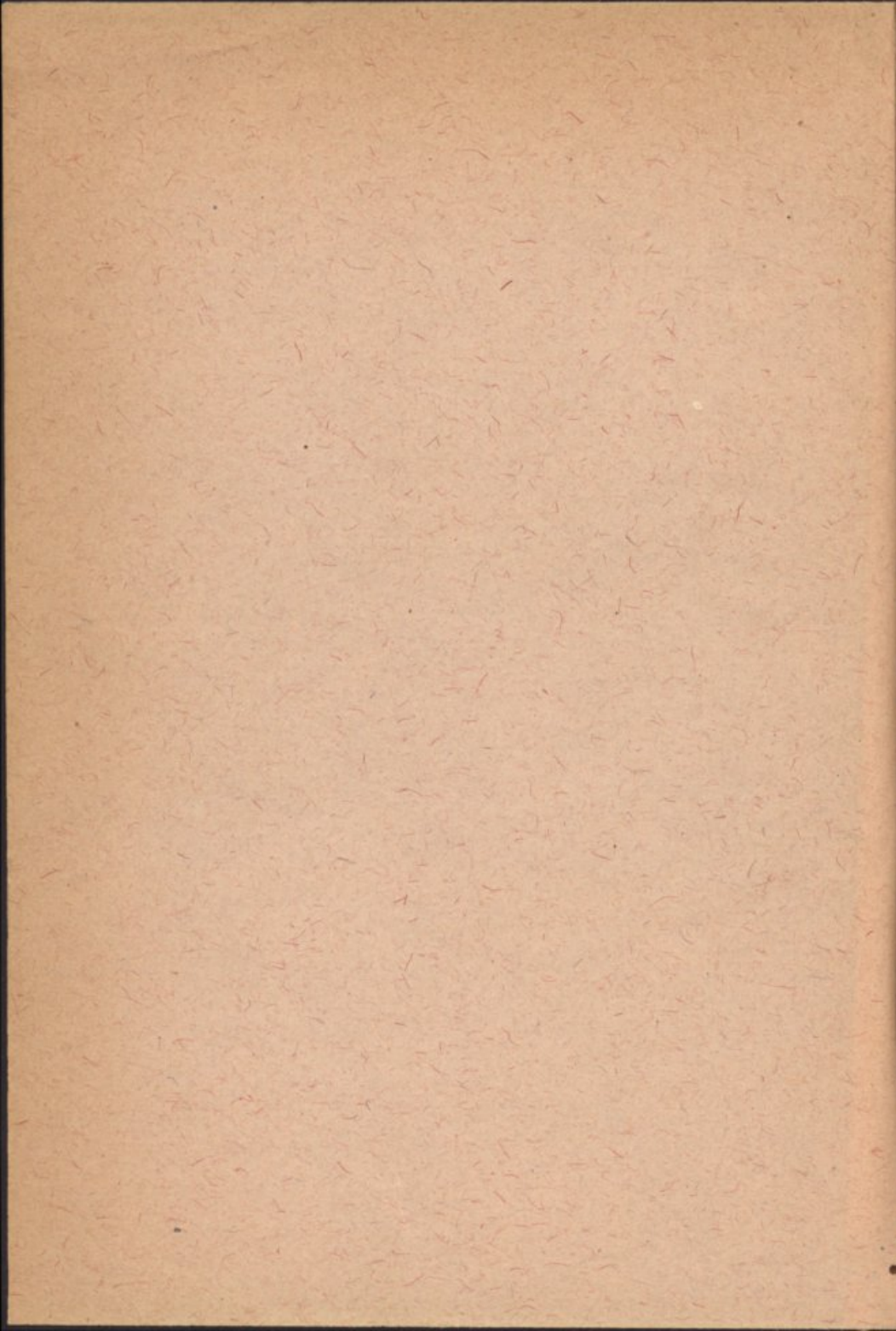


UNIVERSIDADE DE COIMBRA  
Biblioteca Geral



1301500996

614278893



Antonio de May-  
nelles Garrido

---

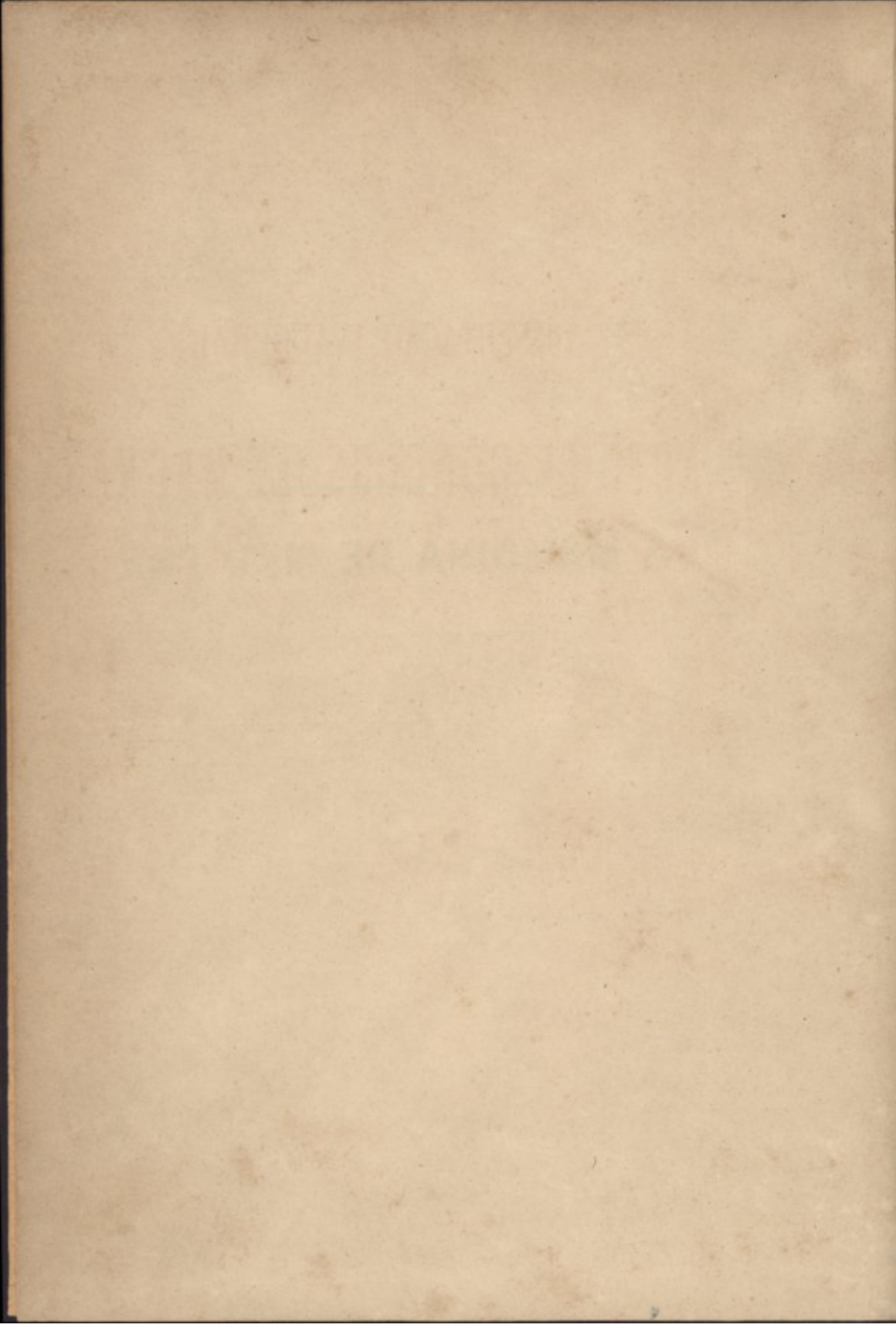
**Á MEMORIA DE MEU PAE**

---

.....  
.....  
..... o brilho da existencia  
Ficou no seu exemplo; a luz não vem do pó!

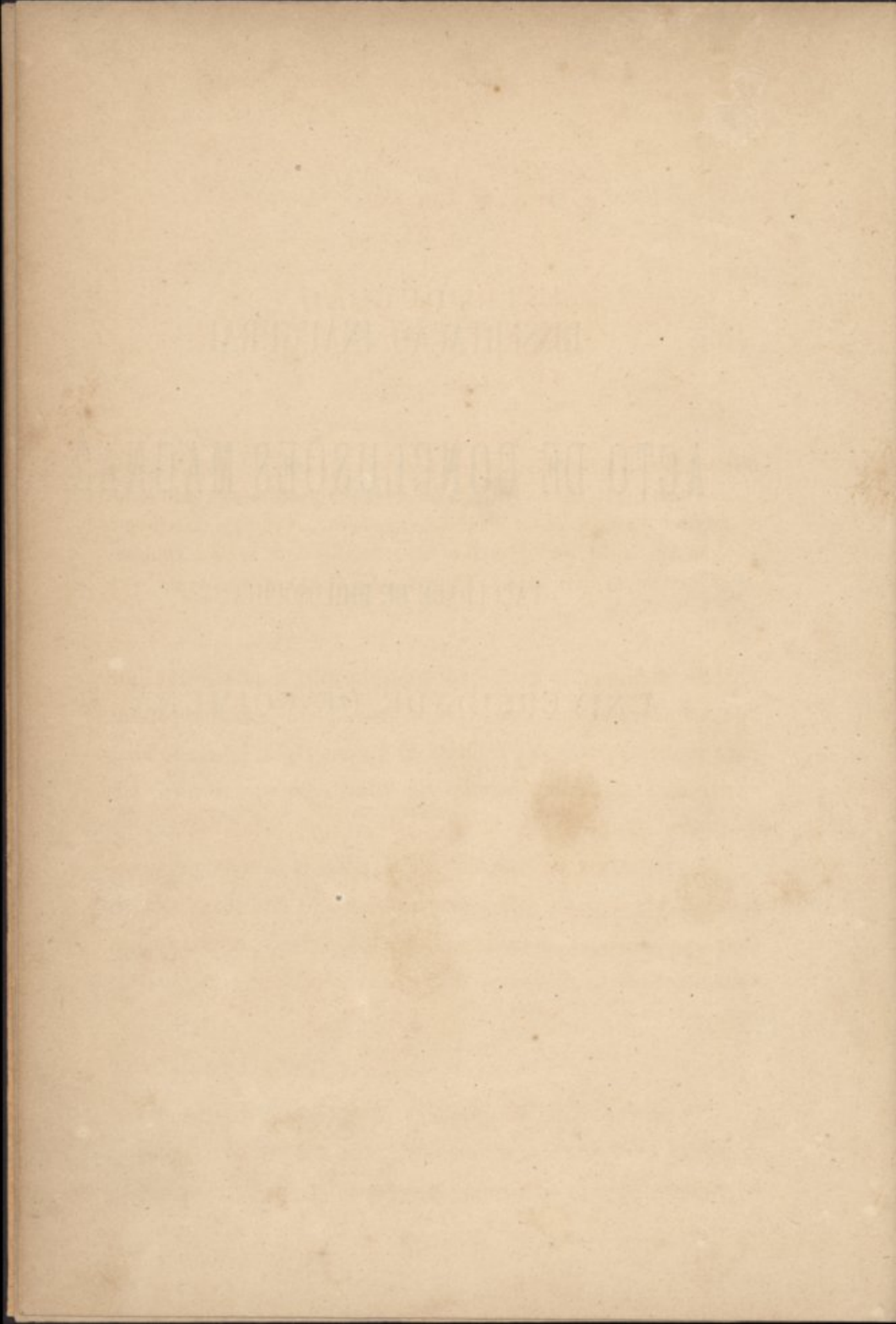
NUNES DA PONTA

1878



DISSERTAÇÃO INAUGURAL  
PARA O  
ACTO DE CONCLUSÕES MAGNAS  
NA  
FACULDADE DE PHILOSOPHIA  
DA  
UNIVERSIDADE DE COIMBRA







## INTRODUÇÃO

---

SUMMARIO: — Meios homogêneos: isotropos, anisotropos. Noções ácerca do ether. Expressão analytica da força elastica desenvolvida pelo deslocamento d'uma molecula n'um meio homogêneo. Principio da sobreposição das elasticidades. Superficie das elasticidades de Fresnel. Ellipsoide inverso das elasticidades. Theorema das direcções singulares.

Se, designando por  $L$  o comprimento d'uma recta que liga  $n$  moleculas n'um meio phisico qualquer,  $\frac{L}{n}$  ficar constante para todas as posições parallelas da mesma recta, podendo alias variar com os deslocamentos angulares, teremos um *meio homogêneo*.

A constancia ou variação de  $n$ , para as differentes direcções, divide a classe dos meios homogêneos em duas — *meios isotropos* e *meios anisotropos*. Os segundos comprehendem evidentemente os primeiros como caso particular.

---

Na generalidade das questões de phisica, e mormente nas de optica mathematica, somos obrigados a formular frequentes hypotheses, que se confirmam pela harmonia entre a experien-

cia e as consequencias d'ellas deduzidas. Esta necessidade manifesta-se sempre que a limitação dos sentidos impede que presenciemos factos de cuja observação e medida devem depender as bases da theoria, que pretendemos estabelecer.

Aquella confirmação, comtudo, não deve tomar-se como prova infallivel da realidade das hypotheses que adoptamos: podem apparecer factos novos não previstos que as contradigam; pode a mesma ordem de phenomenos sugerir-se a explicações diversas; podem emfim essas hypotheses ter perdido o character hypothetico por serem consequencias d'uma outra superior e mais geral, transformando-se assim em elos da cadeia logica que a liga aos factos.

Com tal criterio, considera-se a luz um movimento vibratorio, extremamente rapido, d'um fluido composto de moleculas tenuissimas, eminentemente elastico, de densidade muito pequena, envolvendo todos os corpos, preenchendo os espaços interplanetarios e penetrando até nos intersticios intermoleculares. Este fluido é o ether.

Resulta da extrema pequenez das suas moleculas e da facilidade com que se devem effectuar os deslocamentos, que o estado do ether intermolecular deve necessariamente depender da massa e posição das moleculas materiaes, assim como das forças que actuarem sobre ellas.

Esta dependencia faz prever homogeneidade nas propriedades opticas d'um corpo, quando a houver nas outras propriedades ligadas á sua constituição phisica. Em virtude porem das ideias expendidas ácerca da constituição do ether, parece que as suas moleculas devem estar tanto mais condensadas em

volta d'uma molecula material, quanto mais proximas estiverem d'ella; e assim a homogeneidade do ether differe da homogeneidade do corpo, tal como a definimos no principio.

Podemos comtudo, sem ir longe da verdade, admittir que, n'uma dada direcção, as distancias das moleculas d'ether são eguaes, limitando-se a influencia das moleculas materiaes a modificar a extensão d'essas distancias.

D'este modo a homogeneidade do ether comprehende-se na definição que demos de *meio homogeeo* em geral.

Postas estas ideias succintas ácerca do modo como os phisicos consideram a distribuição das moleculas d'ether nos meios homogeneos, apresentemos alguns principios geraes da theoria da elasticidade, de que teremos de fazer constante applicação no decurso d'este trabalho.

Sejam, n'um meio homogeeo qualquer, (a)

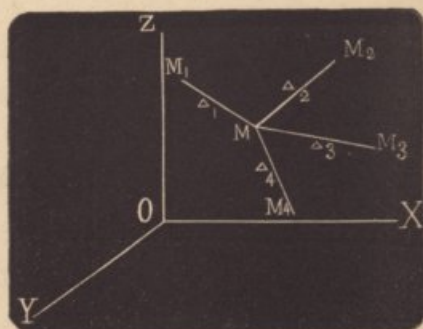
Fig. 1.<sup>a</sup>

$x, \quad y, \quad z,$

$x + \delta x_1, y + \delta y_1, z + \delta z_1,$

$x + \delta x_2, y + \delta y_2, z + \delta z_2,$

.....



(a) Material ou ethereo. Suppomos analogo o modo d'acção das forças intimas do ether e das forças moleculares.

as coordenadas rectangulares das moléculas  $M, M_1, M_2, \dots$  em relação ao systema d'eixos  $OX, OY, OZ$ .

A acção reciproca de duas moléculas á distancia

$$\Delta = \sqrt{\delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2}$$

exprime-se por

$$F = m^2 f(\Delta),$$

sendo  $m$  a massa de cada molécula.

Na impossibilidade de determinar *a priori* a forma da funcção  $f$ , admittimos, com verosimilhança, que  $f$  varia continuamente para variações continuas de  $\Delta$ , e que, crescendo  $\Delta$ ,  $f$  diminue rapidamente, sendo porisso muito limitada a sphera d'actividade de cada molécula.

Para as moléculas  $M$  e  $M_1$  as componentes, segundo os eixos, da força  $F$  serão

$$x_1 = m^2 f(\Delta_1) \frac{\delta x_1}{\Delta_1}, \quad y_1 = m^2 f(\Delta_1) \frac{\delta y_1}{\Delta_1}, \quad z_1 = m^2 f(\Delta_1) \frac{\delta z_1}{\Delta_1}.$$

Para as moléculas  $M$  e  $M_2, M$  e  $M_3, \dots$  teremos analogamente

$$x_2 = m^2 f(\Delta_2) \frac{\delta x_2}{\Delta_2}, \quad y_2 = m^2 f(\Delta_2) \frac{\delta y_2}{\Delta_2}, \quad z_2 = m^2 f(\Delta_2) \frac{\delta z_2}{\Delta_2},$$

$$x_3 = m^2 f(\Delta_3) \frac{\delta x_3}{\Delta_3}, \quad y_3 = m^2 f(\Delta_3) \frac{\delta y_3}{\Delta_3}, \quad z_3 = m^2 f(\Delta_3) \frac{\delta z_3}{\Delta_3},$$

.....

Portanto as componentes, segundo os eixos, da acção total do meio sobre a molecula M serão

$$x = m^2 \Sigma f(\Delta) \frac{\delta x}{\Delta}, \quad y = m^2 \Sigma f(\Delta) \frac{\delta y}{\Delta}, \quad z = m^2 \Sigma f(\Delta) \frac{\delta z}{\Delta};$$

e as condições do seu equilibrio

$$\Sigma f(\Delta) \frac{\delta x}{\Delta} = 0, \quad \Sigma f(\Delta) \frac{\delta y}{\Delta} = 0, \quad \Sigma f(\Delta) \frac{\delta z}{\Delta} = 0 \dots (1)$$

Estas equações servir-nos-ão para simplificar as que estabelecermos no caso do movimento.

Supponhamos agora que a molecula M experimenta um deslocamento muito pequeno n'uma dada direcção, e que as projecções d'esse deslocamento sobre os eixos são, depois do tempo  $t$ ,  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ . (a)

Designando por  $\Delta_1 + \rho_1$ ,  $\Delta_2 + \rho_2, \dots$  as distancias actuaes de cada uma das moleculas á molecula M, as componentes, segundo os eixos, da força elastica desenvolvida pelo deslocamento da molecula M serão, no instante  $t$ ,

$$x = m^2 \Sigma f(\Delta + \rho) \frac{\delta x - \xi}{\Delta + \rho},$$

$$y = m^2 \Sigma f(\Delta + \rho) \frac{\delta y - \eta}{\Delta + \rho},$$

---

(a) Tão somente consideramos deslocamentos taes, que a força elastica desenvolvida seja proporcional á primeira potencia do desvio.

$$z = m^2 \Sigma f(\Delta + \rho) \frac{\delta z - \zeta}{\Delta + \rho};$$

ou, identificando com as expressões que se deduzem da forma da trajetória no mesmo instante,

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = m \Sigma f(\Delta + \rho) \frac{\delta x - \xi}{\Delta + \rho},$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = m \Sigma f(\Delta + \rho) \frac{\delta y - \eta}{\Delta + \rho},$$

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = m \Sigma f(\Delta + \rho) \frac{\delta z - \zeta}{\Delta + \rho}.$$

Estas equações tomam uma forma mais commoda desenvolvendo  $f(\Delta + \rho)$  pela formula de Taylor e fazendo os desprezos permittidos pela natureza dos deslocamentos. Teremos assim para a primeira

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = m \Sigma \left[ f(\Delta) + \rho f'(\Delta) \right] \left( 1 - \frac{\rho}{\Delta} \right) \frac{\xi - \delta x}{\Delta}.$$

D'onde, attendendo ás equações (1) e exprimindo  $\rho$  em função de  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ , pela formula

$$\rho = - \frac{\xi \delta x + \eta \delta y + \zeta \delta z}{\Delta},$$

vem, ordenando em ordem a  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ ,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \xi}{dt^2} &= \xi \sum m \left\{ \frac{f(\Delta)}{\Delta} + \left[ f'(\Delta) - \frac{f(\Delta)}{\Delta} \right] \frac{\delta x^2}{\Delta^2} \right\} \\ &+ \eta \sum m \left[ f'(\Delta) - \frac{f(\Delta)}{\Delta} \right] \frac{\delta x \delta y}{\Delta^2} \\ &+ \zeta \sum m \left[ f'(\Delta) - \frac{f(\Delta)}{\Delta} \right] \frac{\delta x \delta z}{\Delta^2} \end{aligned}$$

E symmetricamente para as duas ultimas

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \eta}{dt^2} &= \xi \sum m \left[ f'(\Delta) - \frac{f(\Delta)}{\Delta} \right] \frac{\delta x \delta y}{\Delta^2} \\ &+ \eta \sum m \left\{ \frac{f(\Delta)}{\Delta} + \left[ f'(\Delta) - \frac{f(\Delta)}{\Delta} \right] \frac{\delta y^2}{\Delta^2} \right\} \\ &+ \zeta \sum m \left[ f'(\Delta) - \frac{f(\Delta)}{\Delta} \right] \frac{\delta y \delta z}{\Delta^2}, \\ \frac{d^2 \zeta}{dt^2} &= \xi \sum m \left[ f'(\Delta) - \frac{f(\Delta)}{\Delta} \right] \frac{\delta x \delta z}{\Delta^2} \\ &+ \eta \sum m \left[ f'(\Delta) - \frac{f(\Delta)}{\Delta} \right] \frac{\delta y \delta z}{\Delta^2} \\ &+ \zeta \sum m \left\{ \frac{f(\Delta)}{\Delta} + \left[ f'(\Delta) - \frac{f(\Delta)}{\Delta} \right] \frac{\delta z^2}{\Delta^2} \right\}. \end{aligned}$$

Os nove polynomios, que nas expressões precedentes são factores dos coefficients  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ , não contem variaveis; são parametros que caracterisam a constituição geral do meio.

D'esses nove só ha seis distinctos como immediatamente se conclue do exame das formulas. Igualando-os por simplicidade ás seis primeiras letras do alphabeto na ordem seguinte:

$$A = \Sigma m \left\{ \frac{f(\Delta)}{\Delta} + \left[ f'(\Delta) - \frac{f(\Delta)}{\Delta} \right] \frac{\partial x^2}{\Delta^2} \right\},$$

$$B = \Sigma m \left\{ \frac{f(\Delta)}{\Delta} + \left[ f'(\Delta) - \frac{f(\Delta)}{\Delta} \right] \frac{\partial y^2}{\Delta^2} \right\},$$

$$C = \Sigma m \left\{ \frac{f(\Delta)}{\Delta} + \left[ f'(\Delta) - \frac{f(\Delta)}{\Delta} \right] \frac{\partial z^2}{\Delta^2} \right\},$$

$$D = \Sigma m \left[ f'(\Delta) - \frac{f(\Delta)}{\Delta} \right] \frac{\partial y \partial z}{\Delta^2},$$

$$E = \Sigma m \left[ f'(\Delta) - \frac{f(\Delta)}{\Delta} \right] \frac{\partial x \partial z}{\Delta^2},$$

$$F = \Sigma m \left[ f'(\Delta) - \frac{f(\Delta)}{\Delta} \right] \frac{\partial x \partial y}{\Delta^2},$$

reduzem-se as expressões das componentes da força elástica a

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = A\xi + F\eta + E\zeta,$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = F\xi + B\eta + D\zeta,$$

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = E\xi + D\eta + C\zeta;$$

ou a

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} &= A\theta \cos \alpha + F\theta \cos \beta + E\theta \cos \gamma \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} &= F\theta \cos \alpha + B\theta \cos \beta + D\theta \cos \gamma \\ \frac{d^2\zeta}{dt^2} &= E\theta \cos \alpha + D\theta \cos \beta + C\theta \cos \gamma \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2),$$



sendo  $\theta$  o deslocamento real e  $\alpha, \beta, \gamma$  os angulos que forma com os eixos coordenados.

Para um deslocamento paralelo ao eixo dos  $x$ , igual a  $\xi$ , temos

$$\alpha = 0, \beta = 90^\circ, \gamma = 90^\circ;$$

e as componentes da força elastica reduzem-se a

$$X_\xi = A\xi, Y_\xi = F\xi, Z_\xi = E\xi \dots \dots \dots (3)$$

Para um deslocamento paralelo ao eixo dos  $y$ , igual a  $\eta$ , temos

$$\alpha = 90^\circ, \beta = 0, \gamma = 90^\circ;$$

e as componentes da força elastica reduzem-se a

$$X_\eta = F\eta, Y_\eta = B\eta, Z_\eta = D\eta \dots \dots \dots (3')$$

Finalmente para um deslocamento paralelo ao eixo do  $z$ , igual a  $\zeta$ , temos

$$\alpha = 90^\circ, \beta = 90^\circ, \gamma = 0;$$

e as componentes da força elastica reduzem-se a

$$X_\zeta = E\zeta, Y_\zeta = D\zeta, Z_\zeta = C\zeta \dots \dots \dots (3'')$$

Sommando membro a membro cada uma das equações (3) com as correspondentes em (3') e (3''), achamos

$$X_{\xi} + X_{\eta} + X_{\zeta} = A\xi + F\eta + E\zeta = \frac{d^2\xi}{dt^2},$$

$$Y_{\xi} + Y_{\eta} + Y_{\zeta} = F\xi + B\eta + D\zeta = \frac{d^2\eta}{dt^2},$$

$$Z_{\xi} + Z_{\eta} + Z_{\zeta} = E\xi + D\eta + C\zeta = \frac{d^2\zeta}{dt^2},$$

que exprimem o principio chamado *da sobreposição das elasticidades*. Pode enunciar-se assim :

*A componente, segundo cada um dos eixos coordenados, da força elastica desenvolvida por um deslocamento qualquer  $\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$  pode considerar-se a somma das tres componentes, segundo esse mesmo eixo, das forças elasticas desenvolvidas por tres deslocamentos successivos, parallellos aos eixos e tendo por valores respectivos as projecções  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  do deslocamento real.*

Retomemos as expressões (2). Referidas a um deslocamento igual á unidade, são

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = A \cos \alpha + F \cos \beta + E \cos \gamma,$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = F \cos \alpha + B \cos \beta + D \cos \gamma,$$

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = E \cos \alpha + D \cos \beta + C \cos \gamma,$$

que podem tomar a forma

$$\frac{d^2z}{dt^2} = A \cos \alpha + F \cos \beta + E \cos \gamma = K \cos u,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = F \cos \alpha + B \cos \beta + D \cos \gamma = K \cos v,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = E \cos \alpha + D \cos \beta + C \cos \gamma = K \cos w,$$

sendo K a resultante, e  $u, v, w$  os angulos que ella forma com as componentes.

Projectemos agora a resultante K sobre a direcção do deslocamento. A projecção terá por valor

$$P = K(\cos \alpha \cos u + \cos \beta \cos v + \cos \gamma \cos w) = A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta \\ + C \cos^2 \gamma + 2 D \cos \alpha \cos \beta + 2 E \cos \beta \cos \gamma + 2 F \cos \alpha \cos \gamma.$$

Se construirmos uma superficie cujos raios vectores, formando com os eixos coordenados os angulos  $\alpha, \beta, \gamma$ , forem proporcionaes a  $\sqrt{\rho}$ , a equação d'essa superficie será

$$r^2 = A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta + C \cos^2 \gamma + 2 D \cos \alpha \cos \beta \\ + 2 E \cos \beta \cos \gamma + 2 F \cos \alpha \cos \gamma,$$

ou, em coordenadas rectangulares,

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2 Dyz + 2 Eax + 2 Fxy$$

— equação da *superfície de elasticidade* de Fresnel.

Se, em vez de raios vectores directamente proporcionaes a  $\sqrt{\rho}$ , se tomarem inversamente proporcionaes, a superfície construida terá por equação

$$\frac{1}{r^2} = A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta + C \cos^2 \gamma + 2 D \cos \alpha \cos \beta \\ + 2 E \cos \beta \cos \gamma + 2 F \cos \alpha \cos \gamma,$$

ou, em coordenadas rectangulares,

$$1 = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2 Dyz + 2 Exz + 2 Fxy$$

— equação do *ellipsoide inverso das elasticidades*.

Uma superfície do 2.º grau pode sempre referir-se aos eixos principaes, reduzindo-se a sua equação á forma

$$kx^2 + mx^2 + ny^2 = 1.$$

Se, os tomarmos no ellipsoide inverso para eixos coordenados, os coëfficientes D, E, F serão identicamente nullos e as componentes, segundo os eixos, reduzir-se-ão a

$$K \cos u = k \cos \alpha,$$

$$K \cos v = m \cos \beta,$$

$$K \cos w = n \cos \gamma.$$

Examinêmos estas formulas:

Para

$$K = k,$$

$$u = 0, v = 90^\circ, w = 90^\circ,$$

$$\alpha = 0, \beta = 90^\circ, \gamma = 90^\circ;$$

para

$$K = m,$$

$$u = 90^\circ, v = 0, w = 90^\circ,$$

$$z = 90^\circ, \beta = 0, \gamma = 90^\circ;$$

finalmente para

$$K = n,$$

$$u = 90^\circ, v = 90^\circ, w = 0,$$

$$\alpha = 90^\circ, \beta = 90^\circ, \gamma = 0.$$

\* Logo: n'um meio elastico homogeneo existem tres direcções, e só tres taes, que um deslocamento effectuado parallelamente a uma d'ellas desenvolve uma reacção elastica parallelamente ao deslocamento produzido. Estas direcções, chamadas eixos de elasticidade, são os eixos principaes do ellipsoide inverso.

Tomando-as para eixos coordenados simplificam-se as formulas sem nada prejudicar a sua generalidade.

Podemos ainda dar á equação do ellipsoide inverso outra forma, muitas vezes mais conveniente, substituindo á consideração da força elastica a da velocidade de propagação, que é proporcional á sua raiz quadrada. Assim, designando por  $a$ ,  $b$ ,  $c$  as velocidades de propagação dos deslocamentos parallellos aos eixos de elasticidade, teremos para as componentes da força elastica desenvolvida por um deslocamento, cujos angulos formados com os eixos coordenados são  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , as expressões

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = a^2 \cos \alpha, \quad \frac{d^2\eta}{dt^2} = b^2 \cos \beta, \quad \frac{d^2\zeta}{dt^2} = c^2 \cos \gamma;$$

d'onde se deduz para a equação do ellipsoide inverso

$$a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2 = 1. \quad (a)$$

\* Quando dois dos seus eixos forem eguaes, o ellipsoide se-rá de revolução, e qualquer deslocamento effectuado no plano diametral, normal ao eixo de revolução, produzirá uma reacção elastica parallelle ao deslocamento. E' o que se dá nos crysters uniaxiaes.

Quando os tres eixos forem eguaes, o ellipsoide reduzir-se-á

---

(a) Por considerações analogas se pode reduzir a superficie de elasticidade de Fresnel á forma

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2.$$

a uma esphera, e então, qualquer que seja a direcção do deslocamento, a reacção elastica por elle desenvolvida ser-lhe-á sempre parallela. E' o que se dá nos crystaes do systema regular e em geral em todos os meios isotropos.

E' ainda pela consideração do ellipsoide inverso das elasticidades que podemos demonstrar um theorema, chamado—das *direcções singulares*—, de alta importancia na theoria da elasticidade e de que teremos de fazer applicação. Pode enunciar-se assim :

*Um deslocamento parallello a qualquer dos eixos d'uma secção diametral, feita no ellipsoide inverso, desenvolve uma reacção elastica, contida no plano normal á secção que passa pela direcção do deslocamento.*

Se demonstrarmos que um deslocamento segundo um dos eixos da secção diametral desenvolve uma força elastica, cuja componente perpendicular a esse deslocamento é ao mesmo tempo normal ao plano da secção diametral, teremos, por lhe ser equivalente, demonstrado o principio anterior.

Seja com effeito

$$x = By + Cz$$

a equação d'um plano diametral do ellipsoide inverso, e

$$\frac{1}{r^2} = a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \cos^2 \beta + c^2 \cos^2 \gamma$$

a equação d'este ellipsoide em coordenadas polares.

Para um raio vector qualquer  $u$  ( $X, Y, Z$ ) da intersecção do plano diametral e do ellipsoide inverso temos as equações de condição

$$\cos X = B \cos Y + C \cos Z \dots \dots (4),$$

$$\frac{1}{u^2} = a^2 \cos^2 X + b^2 \cos^2 Y + c^2 \cos^2 Z;$$

ás quaes podemos ainda juntar a relação conhecida

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1 \dots \dots (4')$$

Para que  $u$  seja maximo ou minimo, isto é, para que o raio vector em questão seja um dos eixos da secção diametral elliptica, é necessario que se realize a condição

$$a^2 \operatorname{sen} X \cos X + b^2 \operatorname{sen} Y \cos Y \frac{dY}{dX} + c^2 \operatorname{sen} Z \cos Z \frac{dZ}{dX} = 0 \dots (4'')$$

Eliminando  $\frac{dY}{dX}$  e  $\frac{dZ}{dX}$  entre as equações

$$\operatorname{sen} X \cos X + \operatorname{sen} Y \cos Y \frac{dY}{dX} + \operatorname{sen} Z \cos Z \frac{dZ}{dX} = 0,$$

$$- \operatorname{sen} X + B \operatorname{sen} Y \frac{dY}{dX} + C \operatorname{sen} Z \frac{dZ}{dX} = 0,$$



obtidas pela derivação de (4) e (4') em ordem a X, vem

$$\frac{dY}{dX} = \frac{\text{sen } X (\cos Z + C \cos X)}{\text{sen } Y (B \cos Z + C \cos Y)},$$

$$\frac{dZ}{dX} = \frac{-\text{sen } X (\cos Y + B \cos X)}{\text{sen } Y (B \cos Z - C \cos Y)},$$

que substituídos em (4'') dão

$$a^2 \cos X (B \cos Z - C \cos Y) + b^2 \cos Y (\cos Z + C \cos X) \\ - c^2 \cos Z (\cos Y + B \cos X) = 0 \dots \dots (5).$$

Esta equação determina a direcção dos eixos na secção diametral.

Imaginemos agora um plano tirado por um dos eixos da secção diametral que passe pela direcção da força elastica desenvolvida por um deslocamento paralelo a esse eixo; e decomponhamos n'este plano a força elastica em duas componentes, uma parallela outra perpendicular ao deslocamento.

Se o plano auxiliar fôr normal ao plano da secção diametral, tambem o será a componente perpendicular ao deslocamento — o que se pretende demonstrar.

Para o verificar procuremos a equação que exprime a perpendicularidade dos dois planos em questão. Se ella concordar com a equação (5), tornar-se-á evidente que as duas direcções dos

eixos da secção diametral gozam da propriedade acima enunciada.

Seja

$$x = B'y + C'z$$

a equação do plano auxiliar.

Os cosenos dos ângulos que forma com os eixos coordenados a força elástica desenvolvida pelo deslocamento  $u$  (X, Y, Z) são

$$\frac{a^2 \cos^2 X}{F}, \frac{b^2 \cos^2 Y}{F}, \frac{c^2 \cos^2 Z}{F}.$$

Para que o plano auxiliar contenha o deslocamento e a direcção da força elástica por elle desenvolvida, são necessarias as duas equações de condição

$$\cos X = B' \cos Y + C' \cos Z,$$

$$a^2 \cos X = B' b^2 \cos Y + C' c^2 \cos Z;$$

d'onde immediatamente se deduz

$$B' = \frac{(a^2 - c^2) \cos X}{(b^2 - c^2) \cos Y}, \quad C' = -\frac{(a^2 - b^2) \cos X}{(b^2 - c^2) \cos Z}.$$

Substituindo estes valores em

$$BB' + CC' + 1 = 0,$$

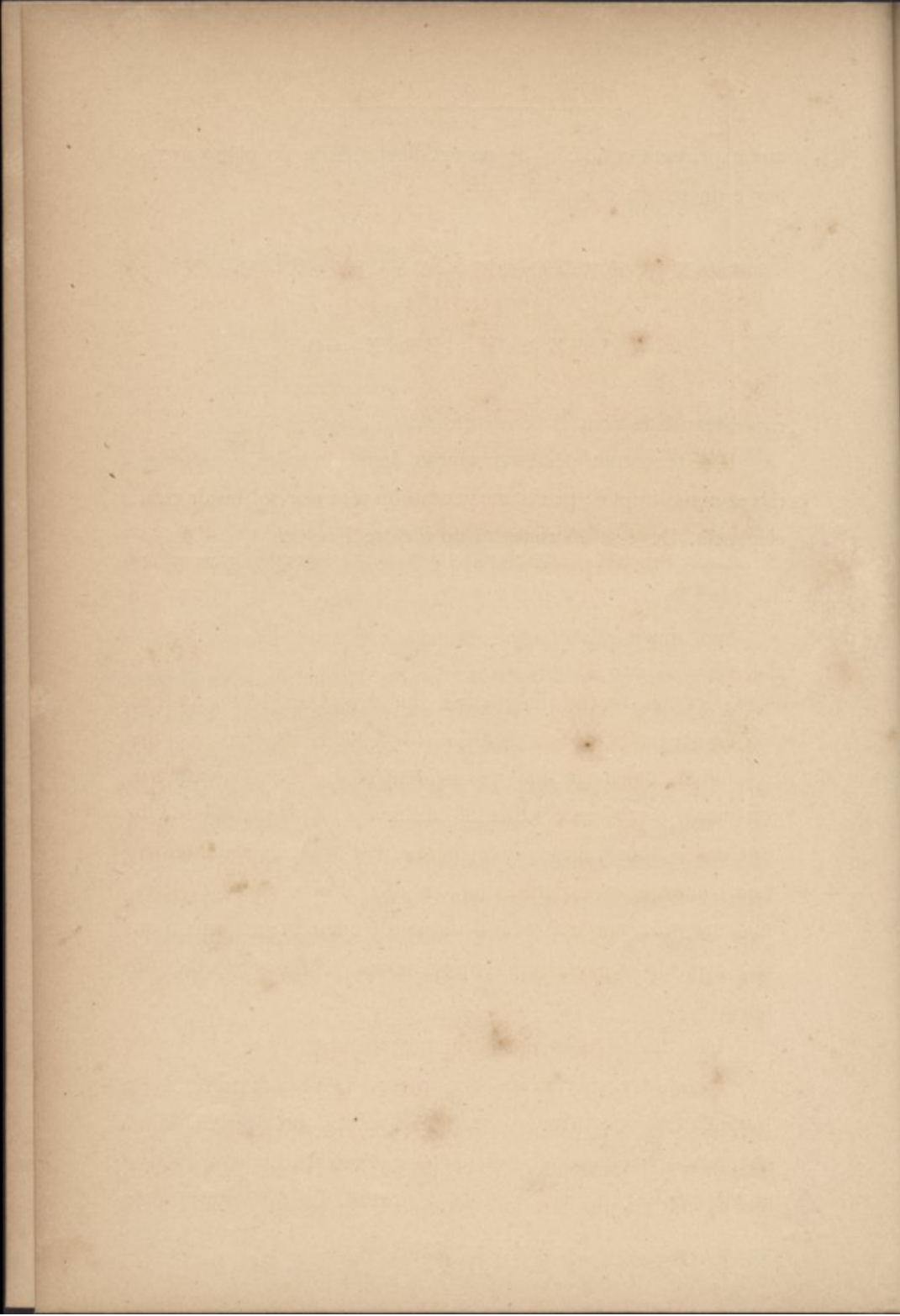
que exprime a condição de perpendicularidade do plano auxiliar e da secção diametral, vem

$$a^2 \cos X (B \cos Z - C \cos Y) + b^2 \cos Y (\cos Z + C \cos X)$$

$$- c^2 \cos Z (\cos Y + B \cos X) = 0,$$

cuja identidade com (5) é manifesta.

Este theorema pode ter outras demonstrações e algumas talvez mais simples; preferimos contudo esta por sobresair pela elegancia. Deve-se ao engenho do illustre Fresnel.



## CAPITULO I

---

SUMMARIO:— Theoria de Fresnel. Theoria de Cauchy. Concordancia aproximada das duas theorias. Processos para a construcção das ondas planas. Expressão analytica da lei de variação das velocidades de propagação.

Fresnel, fazendo applicação dos principios geraes da theoria da elasticidade (que dedusimos) mediante algumas hypotheses, umas plausiveis mas não evidentes, outras absolutamente erroneas, estabeleceu a theoria mechanica da propagação da luz nos meios homogeneos. Esta theoria não só teve constantemente a confirmação experimental das suas leis e consequencias; mas até provocou a previsão de novos phenomenos, que d'outra sorte talvez passassem sempre desapercibidos aos olhos dos phisicos.

Isto deve á primeira vista surprehender.

Desapparecerá porém a surpresa, se attendermos a que Fresnel, nos seus primeiros trabalhos sobre a propagação da luz nos meios homogeneos, longe de seguir o methodo deductivo no descobrimento das leis, ao contrario, guiado sempre pela

observação, generalisou, induzindo. Uma vez de posse das leis pelo methodo perfeitamente natural, quando quiz dar conta d'ellas por uma theoria mechanica, não admira que a conduzisse intencionalmente para o ponto a que mirava, e que na escolha das hypotheses se determinasse mais pela facilidade com que ellas concordavam com os resultados obtidos d'ante-mão, do que pela sua probabilidade intrinseca. É o que immediatamente se conclue da leitura pela ordem chronologica das memorias de Fresnel sobre esta materia.

Depois que Fresnel apresentou a sua theoria muitos phisicos e mathematicos tentaram corrigir-lhe os defeitos, devendo mencionar-se em especial Cauchy, que em 1829 publicou uma theoria perfeitamente independente das hypotheses de Fresnel, deduzindo as leis da propagação da luz da simples consideração do movimento vibratorio das moleculas d'ether nos meios homogeneos.

Esta theoria, cuja identidade com a de Fresnel não se pode estabelecer rigorosamente, mostra comtudo que, no caso do poder birefringente dos meios ser pouco inergico, (o que se dá em todos os conhecidos até hoje) se podem sem erro sensivel tomar por verdadeiros os resultados a que Fresnel chegou (a), o que é, como veremos, de vantagem attendendo á sua grande simplicidade. Assim as duas theorias, tendo a principio pro-

---

(a) Ainda assim é necessario admittir entre os coefficients, de que depende a constituição do meio, relações cuja significação phisica é actualmente desconhecida.

cedido por caminhos diversos, tocam-se n'um ponto a partir do qual proseguem d'accordo na deducção das consequencias.

Eis traçado o nosso plano: — Apresentaremos em resumo as bases da theoria de Fresnel no que ella tem de particular, sem nos demorarmos com a justificação e analyse das hypotheses de que lança mão. Isso levar-nos-ia muito longe; alem de que, depois dos trabalhos de Cauchy, teem mais um valor historico do que actualmente scientifico.

Em seguida exporemos a theoria de Cauchy, estabelecendo no ponto conveniente a ligação com a de Fresnel para depois não haver mais do que um caminho a seguir.

### THEORIA DE FRESNEL.

Supponhamos n'um meio homogeneo uma molecula d'ether vibrando simultaneamente em todas as direcções; a propagação d'estas vibrações attingirá, passado um certo tempo, uma serie de pontos que se acham distribuidos n'uma superficie — a superficie d'onda.

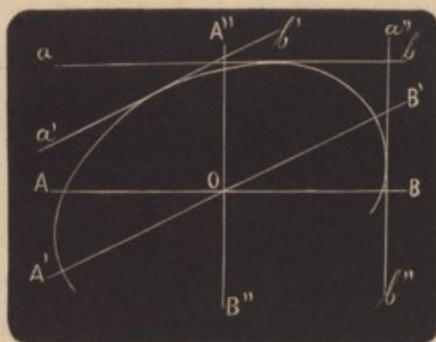
Esta superficie, evidentemente espherica nos meios isotropos, mas d'outra forma nos meios anisotropos, vae-se dilatando com o tempo, ficando comtudo semelhante na forma e semelhantemente collocada em relação a qualquer das suas posições anteriores.

A determinação da forma e posição d'esta superficie, assim como da direcção das vibrações em cada um dos seus pontos, resumindo as leis da propagação da luz, constitue o principal problema que temos a resolver.

Fresnel simplifica-o extremamente, substituindo a consideração da superfície d'onda pela dos seus planos tangentes.

Fig. 2.<sup>a</sup>

Com effeito; supponhamos que n'um meio homogêneo uma infinidade d'ondas planas  $AB$ ,  $A'B'$ ,  $A''B''$  . . . ., passando pelo ponto  $O$  e propagando-se parallelamente a si mesmas, partem n'um dado momento em todas as direcções.



Decorrido o tempo  $t$ , estas ondas estarão (no caso geral) a differentes distancias do ponto de partida commum conforme a direcção da sua propagação, e cada uma d'ellas pode considerar-se, em virtude do principio de Huyghens combinado com o das interferencias, como a envolvente da infinidade d'ondas elementares, produzidas pelas vibrações de cada um dos pontos d'essas ondas consideradas nas suas posições primitivas.

Se as ondas planas nas diversas posições  $ab$ ,  $a'b'$ ,  $a''b''$  . . . . se propagassem em sentido inverso, cruzar-se-iam, passado o mesmo tempo, no ponto  $O$ .

Do que fica dito resulta que todas essas ondas planas serão tangentes á onda elementar commum produzida pelo ponto  $O$ ; e por esse facto a sua superficie pode considerar-se como a envolvente d'uma infinidade d'ondas planas, que, partindo simultaneamente do centro em todas as direcções, se propagam parallelamente a si mesmas com as suas velocidades respectivas.



A determinação da superfície d'onda acha-se por este artificio reduzida ao calculo das velocidades de propagação normal das ondas planas.

Vejamos como Fresnel se conduziu na determinação de taes velocidades.

Alem da hypothese, hoje accite por todos os phisicos, da transversalidade das vibrações luminosas, hypothese a que Fresnel foi induzido pela impossibilidade de harmonizar a não-interferencia dos raios polarisados em angulo recto com a direcção longitudinal das vibrações, a sua theoria assenta, como já indicamos, n'outras hypotheses que podem resumir-se nas seguintes :

1.<sup>a</sup> — *As vibrações da luz polarisada são perpendiculares ao plano de polarisação.*

2.<sup>a</sup> — *As forças elasticas desenvolvidas pela propagação d'um systema d'ondas planas de vibrações rectilineas e transversaes differem das forças elasticas desenvolvidas pelo deslocamento d'uma só molecula em um factor constante, independente da direcção do plano d'onda e dependente simplesmente da direcção das vibrações.*

3.<sup>a</sup> — *As componentes das forças elasticas perpendiculares ao plauo d'onda não produzem effeito optico.*

4.<sup>a</sup> — *A velocidade de propagação d'uma onda plana n'um meio homogeneo é proporcional á raiz quadrada da componente efficaç desenvlvida pelas vibrações da onda.*

Foram as leis experimentaes da dupla refracção que levaram Fresnel a estabelecer estas hypotheses, necessarias para explicar e correlacionar certos phenomenos ; não admira por-

tanto que a theoria mechanica, tomando por base taes hypotheses, chegue ás mesmas leis que foram incentivo para o estabelecimento d'ellas.

Pondo de parte, pelas razões que ha pouco demos, a exposição das provas por via das quaes Fresnel pretendia justificar em particular cada uma das suas hypotheses, diremos apenas que não podem resistir a uma critica séria e minuciosa.

Fresnel, propondo-se explicar os phenomenos luminosos pela consideração do ether homogeo, cuja constituição assenta e define, devia prescindir de qualquer hypothese accessoria sobre as suas propriedades; porque, ou essas propriedades hypotheticas eram incompativeis com a sua constituição, ou então seriam uma consequencia de que a theoria devia dar conta.

Tal é a hypothese em que Fresnel considera a incompressibilidade do ether como causa da nullidade optica da componente longitudinal das forças elasticas, não lhe sendo embaraço a conciliação d'esta propriedade com a fluidez e elasticidade que se attribuem ao ether. A acção reciproca das moleculas deve dar só por si conta tanto da incompressibilidade do ether, se fôr real, como das leis da propagação das ondas.

Outro tanto acontece com a hypothese, que consiste em admitir, que a força elastica, desenvolvida pela propagação d'um systema d'ondas planas de vibrações rectilineas e parallelas, differe da força elastica, desenvolvida pelo deslocamento parallelo d'uma só molecula, em um factor constante independente da direcção particular do plano d'onda.

Cauchy demonstrou a falsidade d'esta independencia, e por este facto veriamos, se tivéssemos estudado as razões que indu-

ziram Fresnel a estabelecer as duas primeiras hypotheses, que os phenomenos da dupla refracção deixam indecisa a direcção das vibrações com relação ao plano de polarisação, tornando-se egualmente legitimo suppôr que ellas se executam n'esse plano, ou n'um plano perpendicular.

Feita esta ligeira apreciação das hypotheses de Fresnel, vejamos como d'ellas se deduzem as leis da propagação das ondas planas.

Para que uma onda plana se possa propagar sem alteração n'um meio homogeneo, isto é, conservando a sua direcção e polarisação, é evidentemente necessario que as forças elasticas desenvolvidas sejam parallelas aos deslocamentos. Mas, como pela terceira hypothese Fresnel só considera efficaz a componente parallela ao plano d'onda, basta que as projecções das forças elasticas sobre esse plano satisfaçam aquella condição.

Por outro lado, a segunda hypothese de Fresnel permite suppôr as forças elasticas desenvolvidas pela propagação d'uma onda plana proporcionaes á força elastica desenvolvida pelo deslocamento parallello d'uma molecula unica.

Portanto, attendendo ainda á quarta hypothese, e á construcção do ellipsoide inverso das elasticidades, podemos concluir, que uma onda plana se propagará sem alteração, quando as vibrações d'essa onda forem parallelas a um dos eixos da secção elliptica, feita no ellipsoide inverso por um plano parallello ao plano d'onda; e sua velocidade de propagação normal será o valor reciproco do semi-eixo parallello á direcção das vibrações.

Quando as vibrações na onda plana tiverem uma direcção qualquer, ainda poderemos applicar o theorema das direcções singulares. Com effeito, o principio da sobreposição das elasticidades permite-nos a decomposição de cada vibração em tres: duas existentes no plano d'onda e parallelas ás direcções singulares, e uma normal ao plano d'onda, cujo effeito optico é nullo. D'esta decomposição resultam duas ondas planas de vibrações respectivamente parallelas ás duas direcções singulares, e propagando-se cada uma com a sua velocidade propria.

Podemos portanto enunciar o seguinte theorema fundamental da theoria de Fresnel:

*Em geral, uma onda plana polarisada, propagando se n'um meio homogeneo, parte-se em duas, polarisadas em angulo recto, para as quaes as direcções das vibrações e velocidades de propagação se determinam pelas direcções e pelos valores reciprocos dos semi-eixos da secção diametral, feita no ellipsoide inverso por um plano paralelo ao plano d'onda.*

A expressão algebraica da velocidade de propagação é facil de determinar.

Com effeito, designando por  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  os angulos que uma das direcções singulares correspondentes a um plano dado forma com os eixos da elasticidade, as componentes, segundo os eixos, da força elastica, desenvolvida por um deslocamento parallello áquella direcção, são

$$X = a^2 \cos \alpha, \quad Y = b^2 \cos \beta, \quad Z = c^2 \cos \gamma.$$

Consequentemente, em presença da quarta hypothese de

Fresnel, temos

$$v = \sqrt{a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \cos^2 \beta + c^2 \cos^2 \gamma}.$$

Quando a onda fôr parallela a um dos eixos de elasticidade, os valores das velocidades de propagação das duas ondas, em que se duplica a onda primitiva, serão

$$v_1 = a, v_2 = \sqrt{b^2 \cos^2 \beta - c^2 \sin^2 \beta}$$

ou

$$v_1 = b, v_2 = \sqrt{a^2 \cos^2 \alpha - c^2 \sin^2 \alpha}$$

ou

$$v_1 = c, v_2 = \sqrt{a^2 \cos^2 \alpha - b^2 \sin^2 \alpha},$$

conforme a onda fôr parallela ao eixo dos  $x$ , dos  $y$  ou dos  $z$ .

Quando, finalmente, o plano d'onda fôr parallelo a uma das secções circulares do ellipsoide inverso, a onda não soffrerá duplicatura, e propagar-se-á sem alteração com uma velocidade constante e independente da direcção das vibrações no plano d'onda.

### THEORIA DE CAUCHY.

Como Cauchy tracta de estabelecer a sua theoria independentemente de qualquer hypothese que relacione as forças elas-

ticas desenvolvidas pela propagação das ondas planas com a força elastica produzida pelo deslocamento d'uma molecula unica, tem necessidade de considerar o caso geral, em que todas as moleculas d'um meio homogeneo soffrem deslocamentos muito pequenos, e calcular as forças elasticas resultantes.

Sejam fig. (1.<sup>a</sup>)

$$x, \quad y, \quad z,$$

$$x + \delta x_1, y + \delta y_1, z + \delta z_1$$

$$x + \delta x_2, y + \delta y_2, z + \delta z_2$$

.....

as coordenadas rectangulares das moleculas  $M, M_1, M_2, \dots$  referidas aos eixos  $OX, OY, OZ$ .

As componentes, segundo os eixos, da acção total do meio ethereo sobre a molecula  $M$  são, como sabemos,

$$X = m^2 \Sigma f(\Delta) \frac{\delta x}{\Delta}, \quad Y = m^2 \Sigma f(\Delta) \frac{\delta y}{\Delta}, \quad Z = m^2 \Sigma f(\Delta) \frac{\delta z}{\Delta};$$

e as condições do seu equilibrio exprimem-se por

$$\Sigma f(\Delta) \frac{\delta x}{\Delta} = 0, \quad \Sigma f(\Delta) \frac{\delta y}{\Delta} = 0, \quad \Sigma f(\Delta) \frac{\delta z}{\Delta} = 0 \dots (6)$$

Durante o movimento as moleculas experimentam deslo-

camentos muito pequenos; as projecções d'esses deslocamentos sobre os eixos coordenados são funcções do tempo e das coordenadas das diferentes moléculas.

Designando-as, no instante  $t$ , por

$$\begin{array}{ccc} \xi, & \eta, & \zeta, \\ \xi + \delta\xi_1, & \eta + \delta\eta_1, & \zeta + \delta\zeta_1, \\ \xi + \delta\xi_2, & \eta + \delta\eta_2, & \zeta + \delta\zeta_2, \\ \dots\dots\dots \end{array}$$

as coordenadas respectivas serão, no mesmo instante,

$$\begin{array}{ccc} x + \xi, & y + \eta, & z + \zeta, \\ x + \delta x_1 + \xi + \delta\xi_1, & y + \delta y_1 + \eta + \delta\eta_1, & z + \delta z_1 + \zeta + \delta\zeta_1, \\ x + \delta x_2 + \xi + \delta\xi_2, & y + \delta y_2 + \eta + \delta\eta_2, & z + \delta z_2 + \zeta + \delta\zeta_2, \\ \dots\dots\dots \end{array}$$

e as distancias de cada uma das moléculas  $M_1, M_2, \dots\dots\dots$  á molécula  $M$

$$\Delta_1 + \rho_1, \Delta_2 + \rho_2, \dots\dots\dots$$

Em consequencia da pequenez dos deslocamentos, as poten-

cias superiores á primeira das quantidades  $\delta x_n$ ,  $\delta y_n$ ,  $\delta z_n$  e  $\rho_n$  podem desprezar-se nos calculos seguintes em presença das quantidades  $\delta x_n$ ,  $\delta y_n$ ,  $\delta z_n$  e  $\Delta_n$ .

Comparando as coordenadas relativas ao estado actual do ether com as primitivas, vê-se immediatamente, que para obter as componentes, segundo os eixos, da força elastica, que solicita a molecula M no instante  $t$ , basta substituir por  $\Delta_n$ ,  $\delta x_n$ ,  $\delta y_n$ ,  $\delta z_n$  os valores  $\Delta_n + \rho_n$ ,  $\delta x_n + \delta \xi_n$ ,  $\delta y_n + \delta \eta_n$ ,  $\delta z_n + \delta \zeta_n$  nas expressões correspondentes ao estado de repouso. Acharemos assim

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} = m \Sigma f(\Delta + \rho) \frac{\delta x + \delta \xi}{\Delta + \rho},$$

$$\frac{d^2 \eta}{dt^2} = m \Sigma f(\Delta + \rho) \frac{\delta y + \delta \eta}{\Delta + \rho},$$

$$\frac{d^2 \zeta}{dt^2} = m \Sigma f(\Delta + \rho) \frac{\delta z + \delta \zeta}{\Delta + \rho}.$$

Desenvolvendo  $f(\Delta + \rho)$  pela formula de Taylor, e fazendo os desprezos que permite a pequenez dos deslocamentos, reduzem-se a

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} = m \Sigma \left\{ f(\Delta) \frac{\delta x + \delta \xi}{\Delta} + \left[ \Delta f'(\Delta) - f(\Delta) \right] \frac{\rho \delta x}{\Delta^2} \right\},$$

$$\frac{d^2 \eta}{dt^2} = m \Sigma \left\{ f(\Delta) \frac{\delta x + \delta \eta}{\Delta} + \left[ \Delta f'(\Delta) - f(\Delta) \right] \frac{\rho \delta y}{\Delta^2} \right\},$$



$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = m \Sigma \left\{ f(\Delta) \frac{\partial x + \partial x'}{\Delta} + \left[ \Delta f'(\Delta) - f(\Delta) \right] \frac{\rho \delta z}{\Delta^2} \right\}.$$

Attendendo finalmente ás equações (6), e exprimindo  $\rho$  em função de  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  pela formula

$$\rho = \frac{\delta x \delta \xi + \delta y \delta \eta + \delta z \delta \zeta}{\Delta},$$

obteremos

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} &= m \Sigma f(\Delta) \frac{\delta \xi}{\Delta} + m \Sigma \frac{\Delta f'(\Delta) - f(\Delta)}{\Delta} \\ &\quad \left( \frac{\partial x^2}{\Delta^2} \delta \xi + \frac{\partial x \partial y}{\Delta^2} \delta \eta + \frac{\partial x \partial z}{\Delta^2} \delta \zeta \right) \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} &= m \Sigma f(\Delta) \frac{\delta \eta}{\Delta} + m \Sigma \frac{\Delta f'(\Delta) - f(\Delta)}{\Delta} \\ &\quad \left( \frac{\partial y^2}{\Delta^2} \delta \eta + \frac{\partial x \partial y}{\Delta^2} \delta \xi + \frac{\partial y \partial z}{\Delta^2} \delta \zeta \right) \\ \frac{d^2\zeta}{dt^2} &= m \Sigma f(\Delta) \frac{\delta \zeta}{\Delta} + m \Sigma \frac{\Delta f'(\Delta) - f(\Delta)}{\Delta} \\ &\quad \left( \frac{\partial z^2}{\Delta^2} \delta \zeta + \frac{\partial x \partial z}{\Delta^2} \delta \xi + \frac{\partial y \partial z}{\Delta^2} \delta \eta \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

A integração geral d'estas equações daria as leis, que regem todos os movimentos das moléculas d'ether, compatíveis com a constituição que lhe attribuímos. Basta-nos porém estabelecer, que o movimento em ondas planas de vibrações retilíneas e paralelas, produzidas por deslocamentos muito pe-

quenos das moléculas d'ether, é compatível com os movimentos possíveis do ether homogéneo; e das condições que exprimirem essa compatibilidade deduzir as leis d'aquelle movimento.

Sejam pois  $l$ ,  $m$ ,  $n$  os angulos que a normal a uma onda plana qualquer forma com os eixos coordenados; a equação do plano d'onda será

$$x \cos l + y \cos m + z \cos n = E.$$

Para um deslocamento qualquer d'essa onda a lei das distancias da molécula em vibração á posição de equilibrio, ponto que tomamos para origem do tempo, exprimir-se-á por

$$D = a \operatorname{sen} 2\pi \frac{vt}{\lambda},$$

sendo  $a$  uma função da amplitude,  $v$  a velocidade de propagação e  $\lambda$  o comprimento d'onda.

Tiremos pela origem das coordenadas um plano paralelo ás ondas; uma perpendicular a esse plano encontrará uma serie de moléculas, cujas posições são dadas pela equação

$$D = a \operatorname{sen} \frac{2\pi}{\lambda} (vt - E) \dots \dots \dots (8),$$

sendo  $E$  a distancia de cada molécula ao plano auxiliar.  $E$ , como  $E$  é constante para todos os pontos d'um plano paralelo ao

plano auxiliar, esta equação applicar-se-á a todos os pontos d'uma onda.

Posto isto designemos por  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  os angulos que faz a direcção das vibrações com os eixos coordenados; as projecções  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ , sobre os eixos, do deslocamento d'uma molecula serão dadas pelas equações

$$\left. \begin{aligned} \xi &= a \operatorname{sen} \frac{2\pi}{\lambda} (vt - E) \cos \alpha \\ \eta &= a \operatorname{sen} \frac{2\pi}{\lambda} (vt - E) \cos \beta \\ \zeta &= a \operatorname{sen} \frac{2\pi}{\lambda} (vt - E) \cos \gamma \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

Estes valores, substituidos nas equações differenciaes (7), devem satisfazer-lhes, se o movimento das ondas expresso por (8) fôr compativel com a constituição attribuida ao ether.

Para esta substituição necessitamos calcular  $\delta\xi$ ,  $\delta\eta$ ,  $\delta\zeta$ , e

$$\frac{d^2\xi}{dt^2}, \frac{d^2\eta}{dt^2}, \frac{d^2\zeta}{dt^2}.$$

Desenvolvendo  $\operatorname{sen} \frac{2\pi}{\lambda} (vt - E)$  na primeira das equações (9), teremos

$$\xi = a \cos \alpha \operatorname{sen} \frac{2\pi}{\lambda} vt \cos \frac{2\pi}{\lambda} E - a \cos \alpha \cos \frac{2\pi}{\lambda} vt \operatorname{sen} \frac{2\pi}{\lambda} E.$$

Variando e isolando  $\delta E$ , chegamos a

$$\delta \xi = \text{sen} \frac{2\pi}{\lambda} \delta E \left( -a \cos \alpha \text{sen} \frac{2\pi}{\lambda} vt \text{sen} \frac{2\pi}{\lambda} E - a \cos \alpha \cos \frac{2\pi}{\lambda} vt \cos \frac{2\pi}{\lambda} E \right) \\ - \left( 1 - \cos \frac{2\pi}{\lambda} \delta E \right) \left( a \cos \alpha \text{sen} \frac{2\pi}{\lambda} vt \cos \frac{2\pi}{\lambda} E - a \cos \alpha \cos \frac{2\pi}{\lambda} vt \text{sen} \frac{2\pi}{\lambda} E \right);$$

d'onde

$$\delta \xi = \frac{\lambda}{2\pi} \frac{d\xi}{dE} \text{sen} \frac{2\pi}{\lambda} \delta E - 2\xi \text{sen}^2 \frac{\pi}{\lambda} \delta E.$$

E symmetricamente

$$\delta \eta = \frac{\lambda}{2\pi} \frac{d\eta}{dE} \text{sen} \frac{2\pi}{\lambda} \delta E - 2\eta \text{sen}^2 \frac{\pi}{\lambda} \delta E,$$

$$\delta \zeta = \frac{\lambda}{2\pi} \frac{d\zeta}{dE} \text{sen} \frac{2\pi}{\lambda} \delta E - 2\zeta \text{sen}^2 \frac{\pi}{\lambda} \delta E.$$

Por outro lado da primeira das equações (9) deduz-se

$$\frac{d\xi}{dt} = a \frac{2\pi}{\lambda} v \cos \frac{2\pi}{\lambda} (vt - E) \cos \alpha;$$

d'onde

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = D \left( \frac{2\pi}{\lambda} v \right)^2 \cos \alpha.$$

E symmetricamente

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = D \left( \frac{2\pi}{\lambda} v \right)^2 \cos \beta,$$

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = D \left( \frac{2\pi}{\lambda} v \right)^2 \cos \gamma.$$

Substituindo estes valores nas equações (7), vem

$$-D \left( \frac{2\pi}{\lambda} v \right)^2 \cos \alpha = m \Sigma \frac{f(\Delta)}{\Delta} \left( \frac{\lambda}{2\pi} \frac{d\zeta}{dE} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{\lambda} \delta E - 2\zeta \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{\lambda} \delta E \right)$$

$$+ m \Sigma \frac{\delta \Delta f(\Delta) - f(\Delta)}{\Delta} \left( \frac{\lambda}{2\pi} \frac{d\zeta}{dE} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{\lambda} \delta E - 2\zeta \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{\lambda} \delta E \right) \frac{\delta x^2}{\Delta^2}$$

$$+ m \Sigma \frac{\delta \Delta f'(\Delta) - f'(\Delta)}{\Delta} \left( \frac{\lambda}{2\pi} \frac{d\eta}{dE} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{\lambda} \delta E - 2\eta \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{\lambda} \delta E \right) \frac{\delta x \delta y}{\Delta^2}$$

$$+ m \Sigma \frac{\delta \Delta f(\Delta) - f(\Delta)}{\Delta} \left( \frac{\lambda}{2\pi} \frac{d\zeta}{dE} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{\lambda} \delta E - 2\zeta \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{\lambda} \delta E \right) \frac{\delta x \delta z}{\Delta^2}, \text{etc.};$$

ou, ordenando em ordem ás projecções dos deslocamentos e aos seus coefficients differenciaes,

$$D \left( \frac{2\pi}{\lambda} v \right)^2 \cos \alpha = \xi \cdot 2 m \Sigma \left\{ \frac{f(\Delta)}{\Delta} + \frac{[\delta \Delta f'(\Delta) - f'(\Delta)] \delta x^2}{\Delta^3} \right\} \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{\lambda} \delta E$$

$$+ \eta \cdot 2 m \Sigma \frac{[\delta \Delta f'(\Delta) - f'(\Delta)] \delta x \delta y}{\Delta^3} \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{\lambda} \delta E$$

$$\begin{aligned}
& + \zeta \cdot 2m \Sigma \frac{[\delta \Delta f'(\Delta) - f(\Delta)] \delta x \delta z}{\Delta^3} \text{sen}^2 \frac{\pi}{\lambda} \delta E \\
- \frac{d\zeta}{dE} \cdot \frac{\lambda}{2\pi} m \Sigma \left\{ \frac{f(\Delta)}{\Delta} + \frac{[\delta \Delta f'(\Delta) - f(\Delta)] \delta x^2}{\Delta^3} \right\} \text{sen} \frac{2\pi}{\lambda} \delta E \\
- \frac{d\eta}{dE} \cdot \frac{\lambda}{2\pi} m \Sigma \frac{[\delta \Delta f'(\Delta) - f(\Delta)] \delta x \delta y}{\Delta^3} \text{sen} \frac{2\pi}{\lambda} \delta E \\
- \frac{d\zeta}{dE} \cdot \frac{\lambda}{2\pi} m \Sigma \frac{[\delta \Delta f'(\Delta) - f(\Delta)] \delta x \delta z}{\Delta^3} \text{sen} \frac{2\pi}{\lambda} \delta E, \text{ etc.}
\end{aligned}$$

Estas formulas simplificam-se extremamente se attendermos a que, em consequencia da constituição que attribuímos ao ether, os termos em que entram os coefficients differencias  $\frac{d\zeta}{dE}$ ,  $\frac{d\eta}{dE}$ ,  $\frac{d\zeta}{dE}$  são nullos.

Com effeito, podemos suppor toda a massa d'ether dividida em conjugados de duas moleculas a egual distancia, d'um e d'outro lado, do plano auxiliar, e de tal sorte situadas que a linha, que as une, passe pela origem das coordenadas.

Para cada uma das moleculas d'um conjugado

$$\begin{aligned}
m \frac{f(\Delta)}{\Delta} + \frac{[\delta \Delta f'(\Delta) - f(\Delta)] \delta x^2}{\Delta^3}, \\
\frac{[\delta \Delta f'(\Delta) - f(\Delta)] \delta x \delta y}{\Delta^3}, \\
\frac{[\delta \Delta f'(\Delta) - f(\Delta)] \delta x \delta z}{\Delta^3}
\end{aligned}$$

teem o mesmo valor e o mesmo signal; mas, como as distancias  $E$  das duas moleculas ao plano auxiliar são eguaes e de signal contrario,  $\text{sen} \frac{2\pi}{\lambda} \delta E$  tem o mesmo valor, e differente signal.

Restam-nos as moleculas existentes no plano auxiliar. Para essas  $E$  é evidentemente nullo, o que annulla  $\text{sen} \frac{2\pi}{\lambda} \delta E$ .

Posto isto, é evidente que os factores que multiplicam  $\frac{d\xi}{dE}$ ,  $\frac{d\eta}{dE}$ ,  $\frac{d\zeta}{dE}$ , sendo cada um a somma de duas ordens de termos, uns nullos outros que se annullam dois a dois, são nullos.

Ficam pois as equações differenciaes reduzidas a

$$\begin{aligned}
 D\left(\frac{2\pi}{\lambda} v\right)^2 \cos \alpha &= \xi \cdot 2m \Sigma \left\{ \frac{f(\Delta)}{\Delta} + \frac{[\delta \Delta f'(\Delta) - f(\Delta)] \delta x^2}{\Delta^3} \right\} \text{sen}^2 \frac{\pi}{\lambda} \delta E \\
 &+ \eta \cdot 2m \Sigma \frac{[\delta \Delta f'(\Delta) - f(\Delta)] \delta x \delta y}{\Delta^3} \text{sen}^2 \frac{\pi}{\lambda} \delta E \\
 &+ \zeta \cdot 2m \Sigma \frac{[\delta \Delta f'(\Delta) - f(\Delta)] \delta x \delta z}{\Delta^3} \text{sen}^2 \frac{\pi}{\lambda} \delta E, \\
 D\left(\frac{2\pi}{\lambda} v\right)^2 \cos \beta &= \xi \cdot 2m \Sigma \frac{[\delta \Delta f'(\Delta) - f(\Delta)] \delta x \delta y}{\Delta^3} \text{sen}^2 \frac{\pi}{\lambda} \delta E \\
 &+ \eta \cdot 2m \Sigma \left\{ \frac{f(\Delta)}{\Delta} + \frac{[\delta \Delta f'(\Delta) - f(\Delta)] \delta y^2}{\Delta^3} \right\} \text{sen}^2 \frac{\pi}{\lambda} \delta E \\
 &+ \zeta \cdot 2m \Sigma \frac{[\delta \Delta f'(\Delta) - f(\Delta)] \delta y \delta z}{\Delta^3} \text{sen}^2 \frac{\pi}{\lambda} \delta E,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D\left(\frac{2\pi}{\lambda} v\right)^2 \cos \gamma &= \xi \cdot 2m \Sigma \frac{[\delta \Delta f'(\Delta) - f(\Delta)] \delta x \delta z}{\Delta^3} \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{\lambda} \delta E \\
&+ \eta \cdot 2m \Sigma \frac{[\delta \Delta f'(\Delta) - f(\Delta)] \delta y \delta z}{\Delta^3} \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{\lambda} \delta E \\
&+ \zeta \cdot 2m \Sigma \left\{ \frac{f(\Delta)}{\Delta} + \frac{[\delta \Delta f'(\Delta) - f(\Delta)] \delta z^2}{\Delta^3} \right\} \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{\lambda} \delta E.
\end{aligned}$$

Os nove coefficients de  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ , dos quaes apenas seis são distinctos, dependem simplesmente da posição da onda e da natureza especifica do ether, que se põe em movimento. Eguando, para abreviar, estes coefficients ás letras L, M, N, P, Q, R, reduzimos as equações precedentes á forma

$$D\left(\frac{2\pi}{\lambda} v\right)^2 \cos \alpha = L\xi + R\eta + Q\zeta,$$

$$D\left(\frac{2\pi}{\lambda} v\right)^2 \cos \beta = R\xi + M\eta + P\zeta,$$

$$D\left(\frac{2\pi}{\lambda} v\right)^2 \cos \gamma = Q\xi + P\eta + N\zeta,$$

ou

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda} v\right)^2 \cos \alpha = L \cos \alpha + R \cos \beta + Q \cos \gamma,$$

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda} v\right)^2 \cos \beta = R \cos \alpha + M \cos \beta + P \cos \gamma,$$



$$\left(\frac{2\pi}{\lambda} v\right)^2 \cos \gamma = Q \cos \alpha + P \cos \beta + N \cos \gamma.$$

Estas equações de condição determinam as relações necessárias entre as quantidades que n'ellas entram, para que seja possível, no ether homogêneo o movimento vibratorio em ondas planas, como o enunciamos. Se estas equações não forem contraditorias, por si nos indicarão as condições do movimento.

D'ellas se deduz

$$\left. \begin{aligned} & \frac{L \cos \alpha + R \cos \beta + Q \cos \gamma}{\cos \alpha} \\ = & \frac{R \cos \alpha + M \cos \beta + P \cos \gamma}{\cos \beta} \\ = & \frac{Q \cos \alpha + P \cos \beta + N \cos \gamma}{\cos \gamma} \end{aligned} \right\} \dots\dots (10),$$

que, juntas á relação conhecida

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1,$$

bastam para determinar  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$ ,  $\cos \gamma$ .

Pode evitar-se esta eliminação, que daria para  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$ ,  $\cos \gamma$  tres grupos de valores, attendendo ás considerações seguintes.

Sabe-se pela geometria analytica que os valores  $s$  dos semi-eixos do ellipsoide, definido pela equação

$$A x^2 + B y^2 + C z^2 + 2 D yz + 2 E xz + 2 F xy = 1,$$

se exprimem por

$$\begin{aligned} \frac{1}{s^2} &= \frac{A \cos l + F \cos m + E \cos n}{\cos l} \\ &= \frac{F \cos l + B \cos m + D \cos n}{\cos m} \\ &= \frac{E \cos l + D \cos m + C \cos n}{\cos n}, \end{aligned}$$

sendo  $l, m, n$  os angulos, que cada eixo forma com os eixos coordenados.

Comparando estas expressões com (10), vê-se immediatamente que  $\alpha, \beta, \gamma$  podem considerar-se como os angulos, que formaria com os eixos coordenados cada eixo do ellipsoide

$$L x^2 + M y^2 + N z^2 + 2 P yz + 2 Q xz + 2 R xy = 1 \dots (11).$$

D'aqui se conclue que o movimento vibratorio em ondas planas se propagará sem alteração no ether homogeneo, quando a direcção das vibrações fôr parallela a um dos eixos do ellipsoide (11).

No caso de ser qualquer a direcção das vibrações, decompor-se-á cada uma em tres, respectivamente parallelas aos eixos do ellipsoide (11), resolvendo-se assim cada onda plana em tres, parallelas e polarisadas segundo os eixos do ellipsoide.

M. Cauchy chamou a este ellipsoide — *ellipsoide de polarisação*.

Pode, alem de determinar a direcção das vibrações para um dado plano d'onda e para um dado valor de  $\lambda$ , fornecer os valores da velocidade de propagação na direcção dos seus eixos.

Com effeito, designando por  $k$  um dos semi-eixos do ellipsoide de polarisação, temos evidentemente

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda} v\right)^2 = \frac{1}{k^2}.$$

D'onde

$$v = \frac{1}{k} \cdot \frac{\lambda}{2\pi}.$$

Em resumo pois: *Uma onda plana de vibrações rectilíneas e parallelas, propagando-se no ether homogéneo, dá origem a tres ondas planas parallelas, cujas direcções das vibrações se determinam respectivamente pelas direcções dos eixos do ellipsoide de polarisação. As velocidades de propagação de cada uma destas ondas obtém-se multiplicando os valores reciprocos de cada semi-eixo por  $\frac{\lambda}{2\pi}$ .*

Vejamos agora como se pode simplificar a equação do ellipsoide de polarisação.

Em consequencia das hypotheses que estabelecemos ácerca da natureza das forças intimas do ether, será de raio muito pequeno a esphera de moléculas, a cuja acção está sujeita uma molécula qualquer; por conseguinte podemos não entrar em linha de conta com as moléculas, para as quaes os valores de  $\varepsilon x_n$ ,  $\varepsilon y_n$ ,  $\varepsilon z_n$ ,  $\Delta_n$  são muito grandes, e bem assim desprezar nas formulas, que estabelecemos, os quocientes da forma

$$\frac{\varepsilon x^a \varepsilon y^b \varepsilon z^c}{\Delta}, \quad \frac{\delta x^a \delta y^b \delta z^c}{\Delta^3},$$

quando fôr respectivamente

$$a + b + c - 1 > 1, \quad a + b + c - 3 > 1.$$

Desenvolvendo pois em serie  $\sin \frac{\pi}{\lambda} \delta E$  pela formula

$$\sin x = x - \frac{1}{2.3} x^3 + \frac{1}{2.3.4.5} x^5 + \dots,$$

attendendo a que é

$$\delta E = \varepsilon x \cos l + \varepsilon y \cos m + \varepsilon z \cos n$$

e effectuando os desprezos acima indicados, obtemos para os coefficients do ellipsoide de polarisação os valores

$$L = 2m \frac{\pi^2}{\lambda^2} \Sigma \left\{ \frac{f(\Delta)}{\Delta} + \left[ \delta \Delta f'(\Delta) - f(\Delta) \right] \frac{\delta x^2}{\Delta^3} \right\}$$

$$\left( \cos^2 l \delta x^2 + \cos^2 m \delta y^2 + \dots \right),$$

$$M = 2m \frac{\pi^2}{\lambda^2} \Sigma \left\{ \frac{f(\Delta)}{\Delta} + \left[ \delta \Delta f'(\Delta) - f(\Delta) \right] \frac{\delta y^2}{\Delta^3} \right\}$$

$$\left( \cos^2 l \delta x^2 + \cos^2 m \delta y^2 + \dots \right),$$

$$N = 2m \frac{\pi^2}{\lambda^2} \Sigma \left\{ \frac{f(\Delta)}{\Delta} + \left[ \delta \Delta f'(\Delta) - f(\Delta) \right] \frac{\delta z^2}{\Delta^3} \right\}$$

$$\left( \cos^2 l \delta x^2 + \cos^2 m \delta y^2 + \dots \right),$$

$$P = 2m \frac{\pi^2}{\lambda^2} \Sigma \left[ \delta \Delta f'(\Delta) - f(\Delta) \right] \frac{\delta y \delta z}{\Delta^3}$$

$$\left( \cos^2 l \delta x^2 + \cos^2 m \delta y^2 + \dots \right),$$

$$Q = 2m \frac{\pi^2}{\lambda^2} \Sigma \left[ \delta \Delta f'(\Delta) - f(\Delta) \right] \frac{\delta x \delta z}{\Delta^3}$$

$$\left( \cos^2 l \delta x^2 + \cos^2 m \delta y^2 + \dots \right),$$

$$R = 2m \frac{\pi^2}{\lambda^2} \Sigma \left[ \delta \Delta f'(\Delta) - f(\Delta) \right] \frac{\delta x \delta y}{\Delta^3}$$

$$\left( \cos^2 l \delta x^2 + \cos^2 m \delta y^2 + \dots \right).$$

Posto isto, tomemos para eixos coordenados os eixos de elasticidade do meio.

Em vista da constituição que attribuímos ao ether homogêneo, a cada molecula situada d'um lado de qualquer dos planos coordenados corresponderá outra, da mesma massa, situada do lado opposto e á mesma distancia. Sendo assim, nos sommatorios designados por  $\Sigma$ , desaparecerão todos os termos que contiverem qualquer das quantidades  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$ , elevada a uma potencia impar; por quanto esses termos serão eguaes dois a dois e de signaes contrarios.

Em consequencia d'isto, reduzem-se os coefficients do ellipsoide de polarisação a

$$L = 2m \frac{\pi^2}{\lambda^2} \Sigma \left\{ \frac{f(\Delta)}{\Delta} + \left[ \delta \Delta f'(\Delta) - f(\Delta) \right] \frac{\delta x^2}{\Delta^3} \right\}$$

$$\left( \cos^2 l \delta x^2 + \cos^2 m \delta y^2 + \cos^2 n \delta z^2 \right),$$

$$M = 2m \frac{\pi^2}{\lambda^2} \Sigma \left\{ \frac{f(\Delta)}{\Delta} + \left[ \delta \Delta f'(\Delta) - f(\Delta) \right] \frac{\delta y^2}{\Delta^3} \right\}$$

$$\left( \cos^2 l \delta x^2 + \cos^2 m \delta y^2 + \cos^2 n \delta z^2 \right),$$

$$N = 2m \frac{\pi^2}{\lambda^2} \Sigma \left\{ \frac{f(\Delta)}{\Delta} + \left[ \delta \Delta f'(\Delta) - f(\Delta) \right] \frac{\delta z^2}{\Delta^3} \right\}$$

$$\left( \cos^2 l \delta x^2 + \cos^2 m \delta y^2 + \cos^2 n \delta z^2 \right),$$

$$P = 4m \frac{\pi^2}{\lambda^2} \Sigma \left[ \delta \Delta f'(\Delta) - f(\Delta) \right] \frac{\delta y^2 \delta z^2}{\Delta^3} \cos m \cos n,$$

$$Q = 4m \frac{\pi^2}{\lambda^2} \Sigma \left[ \delta \Delta f'(\Delta) - f(\Delta) \right] \frac{\delta x^2 \delta z^2}{\Delta^3} \cos l \cos n,$$

$$R = 4m \frac{\pi^2}{\lambda^2} \Sigma \left[ \delta \Delta f'(\Delta) - f(\Delta) \right] \frac{\delta x^2 \delta y^2}{\Delta^3} \cos l \cos m;$$

ou a

$$L = \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \left[ (e^2 + \mu^2) \cos^2 l + (g^2 + t^2) \cos^2 m + (h^2 + s^2) \cos^2 n \right],$$

$$M = \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \left[ (e^2 + t^2) \cos^2 l + (g^2 + v^2) \cos^2 m + (h^2 + r^2) \cos^2 n \right],$$

$$N = \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \left[ (e^2 + s^2) \cos^2 l + (g^2 + r^2) \cos^2 m + (h^2 + \omega^2) \cos^2 n \right],$$

$$P = \frac{8\pi^2}{\lambda^2} r^2 \cos m \cos n,$$

$$Q = \frac{8\pi^2}{\lambda^2} s^2 \cos l \cos n,$$

$$R = \frac{8\pi^2}{\lambda^2} t^2 \cos l \cos m,$$

fazendo, para abreviar,

$$e^2 = \frac{m}{2} \Sigma \frac{f(\Delta) \delta x^2}{\Delta}, \quad g^2 = \frac{m}{2} \Sigma \frac{f(\Delta) \delta y^2}{\Delta}, \quad h^2 = \frac{m}{2} \Sigma \frac{f'(\Delta) \delta z^2}{\Delta},$$

$$r^2 = \frac{m}{2} \Sigma \left[ \delta \Delta f'(\Delta) - f(\Delta) \right] \frac{\delta y^2 \delta z^2}{\Delta^3},$$

$$s^2 = \frac{m}{2} \Sigma \left[ \delta \Delta f'(\Delta) - f(\Delta) \right] \frac{\delta x^2 \delta z^2}{\Delta^3},$$

$$t^2 = \frac{m}{2} \Sigma \left[ \delta \Delta f'(\Delta) - f(\Delta) \right] \frac{\delta x^2 \delta y^2}{\Delta^3},$$

$$\mu^2 = \frac{m}{2} \Sigma \left[ \delta \Delta f'(\Delta) - f(\Delta) \right] \frac{\delta x^4}{\Delta^3},$$

$$\nu^2 = \frac{m}{2} \Sigma \left[ \delta \Delta f'(\Delta) - f(\Delta) \right] \frac{\delta y^4}{\Delta^3},$$

$$\omega^2 = \frac{m}{2} \Sigma \left[ \delta \Delta f'(\Delta) - f(\Delta) \right] \frac{\delta z^4}{\Delta^3}.$$

Substituindo estes valores na equação do ellipsoide de polarização, teremos

$$\begin{aligned} & x^2 \left[ (e^2 + \mu^2) \cos^2 l + (g^2 + t^2) \cos^2 m + (h^2 + s^2) \cos^2 n \right] \\ & + y^2 \left[ (e^2 + t^2) \cos^2 l + (g^2 + \nu^2) \cos^2 m + (h^2 + r^2) \cos^2 n \right] \\ & + z^2 \left[ (e^2 + s^2) \cos^2 l + (g^2 + r^2) \cos^2 m + (h^2 + \omega^2) \cos^2 n \right] \\ & + 4 r^2 yz \cos m \cos n + 4 s^2 xz \cos l \cos n + 4 t^2 xy \cos l \cos m = \frac{\lambda^2}{4\pi^2} \end{aligned}$$



Dividindo o termo constante por  $\frac{\lambda^2}{4\pi^2}$ , obtemos um novo ellipsoide

$$\begin{aligned}
 & x^2 \left[ (e^2 + \mu^2) \cos^2 l + (g^2 + t^2) \cos^2 m + h^2 + s^2 \cos^2 n \right] \\
 & + y^2 \left[ (e^2 + t^2) \cos^2 l + (g^2 + v^2) \cos^2 m + (h^2 + r^2) \cos^2 n \right] \\
 & + z^2 \left[ (e^2 + s^2) \cos^2 l + (g^2 + r^2) \cos^2 m + (h^2 + \omega^2) \cos^2 n \right] \\
 & + 4 r^2 yz \cos m \cos n + 4 s^2 xz \cos l \cos n + 4 t^2 xy \cos l \cos m = 1
 \end{aligned}$$

A. Beer chamou-lhe *segundo ellipsoide de polarisação*.

Resume, como o primeiro, as leis da propagação das ondas planas, tendo sobre elle a vantagem de dar immediatamente, pelos valores reciprocos dos semi-eixos, as velocidades de propagação.

Expostas no que tem de essencial as theorias de Fresnel e de Cauchy, procuremos, se é possivel estabelecer entre ellas uma concordancia, pelo menos aproximada, mediante algumas relações de condicção entre os coefficients de que depende a constituição do meio.

Como nada sabemos de positivo ácerca da natureza da função  $f$ , vejamos até que ponto nos pode auxiliar a experiencia.

Tomemos com Rudberg tres prismas de topazio, talhados no crystal de maneira que as tres arestas de refrangencia sejam parallelas aos eixos de elasticidade, e façamos incidir sobre uma das faces de cada um d'estes prismas um raio luminoso perpendicular á aresta de refrangencia e polarizado n'um plano normal á mesma aresta. Este raio refractar-se-á decompondo-se nos seus elementos, como aconteceria n'um meio qualquer isotropo.

Determinado o indice de refração de cada um d'estes prismas, achamos tres valores differentes; o que prova que a luz se propaga n'elles com desigual velocidade. Rudberg achou para a risca F do espectro os valores 1,61701, 1,62652, 1,61914. Estes numeros são constantes, qualquer que seja a posição das faces lateraes do prisma em relação aos eixos d'elasticidade do crystal, uma vez que se conservem parallelas a um d'elles. Muda apenas, com a variação de posição nas faces lateraes, a direcção do raio, percorrendo diversos azimuths n'um plano perpendicular á aresta. Este mesmo facto se pode verificar directamente em muitos outros corpos.

Se admittirmos, como Fresnel, que o plano de polarisação é perpendicular ao plano de vibração, podemos concluir d'estas experiencias que — *n'um meio homogeneo a velocidade das ondas planas, parallelas a um dos eixos de elasticidade e cujas vibrações se propagam conservando-se parallelas ao mesmo eixo, é constante para qualquer posição das ondas.*

A expressão analytica d'esta lei vae simplificar-nos extremamente a equação do segundo ellipsoide de polarisação.

Consideremos em primeiro logar uma onda plana paral-

lela ao eixo dos  $x$ : serão para este caso os ângulos que a normal forma com os eixos

$$l = 90^\circ, m + n = 90^\circ;$$

e a equação do segundo ellipsoide de polarisação, correspondente a esta onda, tomará a forma

$$\begin{aligned} & x^2 \left[ g^2 + t^2 + \cos^2 n (h^2 + s^2 - g^2 - t^2) \right] \\ & + y^2 \left[ g^2 + v^2 + \cos^2 n (h^2 + r^2 - g^2 - v^2) \right] \\ & + z^2 \left[ g^2 + r^2 + \cos^2 n (h^2 + \omega^2 - g^2 - r^2) \right] \\ & + 4 r^2 yz \cos m \cos n = 1. \end{aligned}$$

Por conseguinte o valor da velocidade de propagação das vibrações paralelas ao eixo dos  $x$  será

$$\frac{1}{\sqrt{g^2 + t^2 + \cos^2 n (h^2 + s^2 - g^2 - t^2)}} \dots \dots (12)$$

O plano d'onda, sendo paralelo ao eixo dos  $x$ , é perpendicular ao plano dos  $yz$  e forma com o eixo dos  $y$  o ângulo  $n$ .

Ora a experiencia assigna á velocidade um valor constante, qualquer que seja a inclinação da onda em relação aos eixos dos  $y$  e dos  $z$ , isto é, qualquer que seja o valor de  $\cos n$ ; portanto, para que haja accordo entre a experiencia e a theoria, é necessario que em (12) seja nullo o coefficiente de  $\cos^2 n$ , d'onde resulta

$$h^2 + s^2 = g^2 + t^2.$$

Fazendo em seguida considerações analogas para ondas planas parallelas aos eixos dos  $y$  e dos  $z$ , chegaríamos ás equações de condição

$$e^2 + t^2 = h^2 + r^2,$$

$$e^2 + s^2 = g^2 + r^2.$$

Estas equações, conjunctamente com a relação

$$\cos^2 l + \cos^2 m + \cos^2 n = 1,$$

reduzem a equação do segundo ellipsoide de polarisação a

$$x^2 \left[ (e^2 + \mu^2 - g^2 - t^2) \cos^2 l + g^2 + t^2 \right] \\ + y^2 \left[ (g^2 + v^2 - e^2 - t^2) \cos^2 m + e^2 + t^2 \right]$$

$$+ z^2 \left[ (h^2 + \omega^2 - e^2 - s^2) \cos^2 n + e^2 + s^2 \right]$$

$$+ 4r^2 yz \cos m \cos n + 4s^2 xz \cos l \cos n + 4t^2 xy \cos l \cos m = 1;$$

ou, para abreviar, a

$$x^2 \left( \Gamma \cos^2 l + a^2 \right) + y^2 \left( \Lambda \cos^2 m + b^2 \right) + z^2 \left( \Pi \cos^2 n + c^2 \right)$$

$$+ 4r^2 yz \cos m \cos n + 4s^2 xz \cos l \cos n + 4t^2 xy \cos l \cos m = 1,$$

sendo, como sabemos,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  as velocidades de propagação das vibrações paralelas aos eixos de elasticidade.

Esta equação mostra que, em geral, nenhuma das tres direcções das vibrações, que correspondem a uma onda plana, assenta rigorosamente sobre o plano d'onda; porem a experiencia demonstra-nos que isso tem proxivamente logar em todos os meios birefrangentes conhecidos, isto é, que das tres direcções, que devem ter as vibrações d'uma onda plana, duas são *quasi-transversaes* e a terceira *quasi-longitudinal*. Sendo assim, podemos substituir, sem erro sensivel, os dois eixos do ellipsoide de polarisação, que dão as direcções das vibrações quasi-transversaes, pelos eixos da secção diametral, feita no mesmo ellipsoide parallelamente ao plano d'onda. Estes eixos determinam então approximadamente a direcção e a velocidade de propagação das vibrações quasi-transversaes, as unicas que impressionam a retina.

Resulta pois do que temos dito, que, se a secção diametral, feita no ellipsoide de polarisação pelo plano d'onda, coincidir com a secção diametral, feita pelo mesmo plano no ellipsoide inverso das elasticidades, os resultados da theoria de Cauchy serão proximamente identicos aos da de Fresnel.

Resta-nos portanto vêr quaes as relações que é necessario estabelecer entre os coefficients do ellipsoide de polarisação, para que tenha logar a coincidencia das duas secções diametraes para qualquer direcção da onda plana.

Seja

$$x \cos l + y \cos m + z \cos n = 0$$

a equação do plano d'onda.

A equação da projecção, sobre o plano dos  $yz$ , da secção diametral, feita pelo plano d'onda no ellipsoide de polarisação, será

$$\begin{aligned} & y^2 \left[ (I + \Lambda - 2t) \cos^2 l \cos^2 m + a^2 \cos^2 m + b^2 \cos^2 l \right] \\ & + z^2 \left[ (I + \Pi - 2s) \cos^2 l \cos^2 n + a^2 \cos^2 n + c^2 \cos^2 l \right] \\ & + 2yz \left[ (I + r - s - t) \cos^2 l + a^2 \right] \cos^2 m \cos^2 n = 1 \dots \dots \dots (13). \end{aligned}$$

O plano d'esta mesma secção corta o ellipsoide inverso

$$a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2 = 1$$

segundo uma ellipse, cuja projecção sobre o plano dos  $yz$  é representada por

$$y^2(a^2 \cos^2 m + b^2 \cos^2 l) + z^2(a^2 \cos^2 n + c^2 \cos^2 l)$$

$$+ 2 a^2 yz \cos m \cos n = 1 \dots \dots (14).$$

Para que as duas secções ellipticas coincidam, é necessario que se tornem identicas as equações (13) e (14).

Exprimindo analyticamente essa condição, para o que é necessario identificar os seus coefficients homologos, obteremos as equações

$$\Gamma + \Lambda - 2t = 0,$$

$$\Gamma + \Pi - 2s = 0,$$

$$\Gamma + r - s - t = 0.$$

A realidade da coincidência prova-se em particular, quando o plano d'onda fôr paralelo a um dos planos coordenados, pela identidade natural das equações consignadas.

Vemos pois, em conclusão, que pelo processo que acabamos de expôr, devido ao engenho de A. Beer, se pode estabelecer uma concordancia aproximada entre as theorias de Cau-

chy e de Fresnel, mediante um grupo de relações entre os coefficients de que depende a constituição do meio; relações que admittimos para se poderem explicar as suas propriedades opticas, apesar de desconhecida a sua significação phisica.

Devemos comtudo notar que, se supposessemos as vibrações parallelas ao plano de polarisação, hypothese contraria áquella de que partimos, chegaríamos a outras equações de condição. Tem ambas equal fundamento. Os factos da dupla refração são insufficientes n'esta conjunctura.

D'aqui em diante podemos dispensar na construcção das ondas planas o ellipsoide de polarisação, cujas relações com o plano d'onda são bastante complicadas, substituindo-lhe a construcção de Fresnel pelo ellipsoide inverso das elasticidades, cuja posição e dimensões são independentes d'aquelle plano.

Não é este, comtudo, o unico processo que se pode adoptar para a construcção das ondas planas. Ha mais.

**Construcção das ondas planas pela superficie de elasticidade de Fresnel.** — A equação da superficie de elasticidade de Fresnel em coordenadas rectangulares é

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2.$$

Esta superficie tem com o ellipsoide inverso das elasticidades uma relação tal, que cada um dos seus raios vectores é reciproco do raio vector do ellipsoide na mesma direcção.

D'aqui resulta immediatamente que os eixos das secções diametraes, feitas por um plano tirado pelo centro commum



das duas superficies, confundindo-se em direcção, teem valores reciprocos.

Podemos pois concluir que — *a qualquer direcção de propagação normal correspondem dois systemas d'ondas parallelas, cuja polarisação e velocidade de propagação são dadas pelas direcções e grandezas dos semi-eixos da secção diametral, feita por um plano normal á direcção da propagação na superficie de elasticidade de Fresnel.*

Esta construcção é chronologicamente anterior á construcção das ondas planas por via do ellipsoide inverso.

A superficie de elasticidade de Fresnel está estreitamente relacionada com o ellipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

reciproco do ellipsoide inverso, por um theorema notavel demonstrado por Magnus, que pode enunciar-se assim: *se do centro do ellipsoide reciproco se baixarem perpendiculares sobre os seus planos tangentes, o logar geometrico dos pés das perpendiculares é a superficie de elasticidade de Fresnel.*

Baixemos do centro do ellipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

uma perpendicular ao plano tangente

$$\frac{X x_1}{a^2} + \frac{Y y_1}{b^2} + \frac{Z z_1}{c^2} = 1$$

no ponto  $(x_1, y_1, z_1)$ ; as suas equações serão

$$X_1 = \frac{x_1}{a^2} Z_1, \quad Y_1 = \frac{y_1}{b^2} Z_1.$$

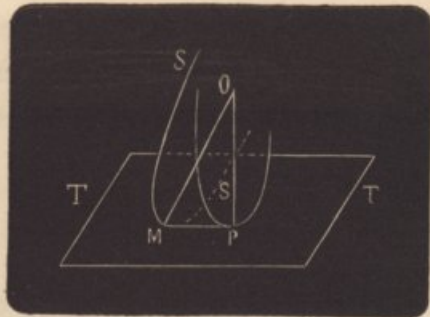
Para obter o logar geometrico dos pés de todas as normaes, baixadas do centro sobre os planos tangentes, basta eliminar  $x_1, y_1, z_1$  entre as equações da normal, do plano tangente e do ellipsoide reciproco, depois do que, recahimos na equação

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2.$$

**Construção das ondas planas por meio do ellipsoide**  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ . **Methodo de Plücker.**—Por

um ponto qualquer M (fig. 3.<sup>a</sup>) do ellipsoide reciproco tiremos um plano tangente TT. Baixemos do centro o raio vector OM e a perpendicular OP ao plano tangente. Em consequencia do theorema precedente, OP será um ponto da superficie de elasticidade de Fresnel, cujo centro coincidirá com o ponto O.

Fig. 3.<sup>a</sup>



Se pelo raio OM tirarmos um plano perpendicular ao pla-

no do triangulo MOP, este plano cortará no ellipsoide reciproco uma ellipse SS, de que OM será necessariamente um dos eixos.

Estendendo a construcção do ponto P a todos os pontos d'essa ellipse, a sequencia dos pontos assim obtidos, analogos a P, constituiriam uma secção diametral, feita na superficie de elasticidade de Fresnel por um plano tirado segundo OP, perpendicularmente ao plano MOP. Esta secção é evidentemente normal ao eixo da superficie cylindrica, formada pelo conjunto dos planos tangentes a todos os pontos da ellipse SS.

O raio vector OP d'aquella secção é necessariamente um dos seus eixos, visto que o plano MOP é uma secção principal do cylindro elliptico, e que tudo é symetrico em relação a elle.

Por conseguinte, attendendo á construcção de Fresnel por via da superficie de elasticidade, podemos concluir que —*tirando n'um ponto do ellipsoide reciproco um plano tangente e baixando do centro uma normal sobre esse plano, o seu comprimento representará a velocidade de propagação, e o plano que contem o ponto de tangencia, o pé da normal e o centro do ellipsoide representará o plano de vibração d'uma das duas ondas, que correspondem ao plano tirado pela normal, perpendicularmente ao plano dos tres pontos precedentes.*

Determinadas assim, por qualquer dos processos anteriormente indicados, a polarisação e a velocidade de propagação dos dois systemas d'ondas planas, que n'uma dada direcção se podem propagar n'um meio homogeneo, a construcção da superficie d'onda é uma questão puramente geometrica.

A determinação da sua equação completar-nos-á o conhe-

cimento das leis da propagação da luz, e a sua discussão nos indicará a variação dos phenomenos em cada caso particular.

Antes porém de apresentarmos os diversos processos de que os phisicos se tem servido para calcular a equação da superficie d'onda, deduzamos pela analyse a lei de variação, para as differentes direcções, das velocidades dos dois systemas d'ondas planas parallelas, que podem propagar-se n'um meio homogeneo; e conjunctamente apresentemos um processo de construcção para a determinação da sua polarisação, absolutamente independente de qualquer das construcções que ha pouco estudámos.

Tomemos para isso de novo o ellipsoide inverso

$$a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2 = 1.$$

Suppondo

$$a < b < c,$$

$a$  e  $c$  representarão os valores extremos entre os quaes podem oscillar as velocidades de propagação, sendo  $b$  o valor medio.

As secções diametraes d'este ellipsoide dão-nos, como sabemos, a polarisação e a velocidade dos dois systemas d'ondas parallelas, que podem propagar-se n'uma dada direcção.

Se considerarmos porém uma onda parallelas a qualquer das duas secções circulares do ellipsoide, a secção diametral parallelas á onda, por ser um círculo, deixa indeterminada a direcção das vibrações; e a velocidade de propagação é constante, qualquer que seja a sua polarisação.

As normaes ás secções circulares são pois direcções singulares de propagação, caracterizadas por esta propriedade especial.

As duas secções circulares cortam-se segundo o eixo medio do ellipsoide, e estão igualmente inclinadas sobre as secções principaes  $xy$  e  $yz$ , sendo os seus planos perpendiculares á secção principal  $xz$ .

Os angulos que formam com os eixos dos  $x$  e dos  $z$  são dados por

$$\cos X_1 = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}, \quad \cos Z_1 = \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}},$$

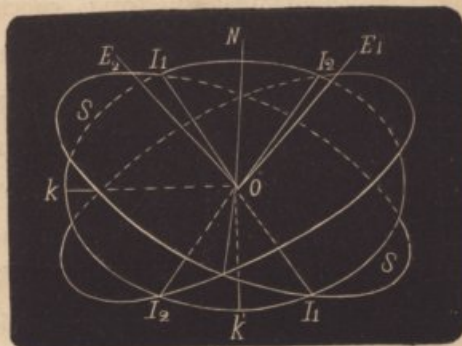
$$\cos X_2 = -\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}, \quad \cos Z_2 = \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}};$$

e, como  $\frac{1}{b}$  é o raio das secções circulares, será  $b$  a velocidade das ondas planas que lhes forem parallelas, qualquer que seja a sua polarisação.

Posto isto, seja  $O$  (fig. 4.<sup>a</sup>) o centro da secção diametral  $SS$ , feita no ellipsoide inverso por um plano perpendicular á normal a uma onda plana qualquer, e  $ON$  essa normal.

Designemos além d'isso por  $I_1I_1$  e  $I_2I_2$  as intersecções do plano diametral com as

secções circulares, e por  $OE_1$  e  $OE_2$  as suas normaes.

Fig. 4.<sup>a</sup>

Sendo  $Ok$  e  $Ok'$  os eixos da secção diametral, os planos  $NOk$  e  $NOk'$  representarão os planos de vibração das duas ondas que podem propagar-se perpendicularmente a  $ON$ .

Mas  $I_1I_1$  e  $I_2I_2$ , por ser

$$I_1I_1 = I_2I_2 = \frac{2}{b},$$

são diâmetros eguaes da ellipse  $SS$  e portanto estão igualmente inclinados sobre cada um dos seus eixos.

Logo os planos de vibração, que são bissectores dos dois angulos diedros oppostos pela aresta, formados por dois planos que passam por  $ON$  e por  $I_1I_1$  e  $I_2I_2$ , tambem dividem em duas partes eguaes os angulos formados por dois planos que, passando por  $ON$ , são perpendiculares a  $ONI_1$  e  $ONI_2$ . Estes planos passam evidentemente por  $OE_1$  e  $OE_2$ , que são perpendiculares a  $I_1I_1$  e  $I_2I_2$ .

Consequentemente podemos concluir que — *tirando pela normal a um plano dois, que passem pelas normaes ás secções circulares, os planos bissectores dos angulos diedros assim formados são os planos de vibração das duas ondas que podem propagar-se parallelamente ao primeiro.*

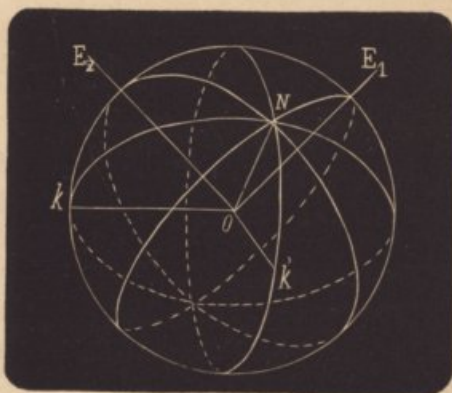
Ainda a consideração das normaes ás secções circulares nos vae servir d'auxilio na determinação pela analyse da lei de variação das velocidades de propagação.

Cortemos no ellipsoide inverso uma secção diametral, e

Fig 5.<sup>a</sup>

levantemos do centro a sua normal e as normaes ás secções circulares.

Sejam  $N$ ,  $E_1$ ,  $E_2$  (fig. 5.<sup>a</sup>) as intersecções das tres normaes com uma esfera de raio = 1, descripta do ponto  $O$  como centro.



Tirando dois círculos máximos pela normal  $ON$  e pelas normaes ás secções circulares, os círculos máximos bissectores dos ângulos diedros, formados por aquelles, são os planos de vibração das duas ondas, que podem propagar-se parallelamente á secção diametral proposta.

Os eixos  $Ok$  e  $Ok'$  da secção diametral coincidirão em direcção com os diâmetros perpendiculares a  $ON$  dos círculos máximos que representam os planos de vibração.

Isto posto, tomemos a equação polar do ellipsoide inverso

$$a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \cos^2 \beta + c^2 \cos^2 \gamma = \frac{1}{r^2},$$

ou

$$r^2 \left[ (a^2 - b^2) \cos^2 \alpha + (c^2 - b^2) \cos^2 \gamma + b^2 \right] = 1 \dots (14).$$

Tractemos de exprimir  $\alpha, \beta, \gamma$  em funcção dos ângulos  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$ , que a normal forma com as normaes ás secções circulares.

Sejam :

$$\psi_1 = E_1Ok, \psi_2 = E_2Ok,$$

$$\chi_1 = E_1Ok', \chi_2 = E_2Ok',$$

$$E_1ONE_2 = \theta,$$

$$E_1ONk = E_2ONk' = 180^\circ - \frac{1}{2} \theta.$$

Para  $Ok$ , raio vector do ellipsoide inverso, teremos

$$\cos \psi_1 = \cos \alpha \cos X + \cos \gamma \cos Z,$$

$$\cos \psi_2 = -\cos \alpha \cos X + \cos \gamma \cos Z;$$

d'onde

$$\cos \alpha = \frac{\cos \psi_1 - \cos \psi_2}{2 \cos X}, \quad \cos \gamma = \frac{\cos \psi_1 + \cos \psi_2}{2 \cos Z}.$$

Substituindo estes valores na equação (14), vem

$$r_k^2 \left[ \frac{a^2 - b^2}{4 \cos^2 X} (\cos \psi_1 - \cos \psi_2)^2 + \frac{c^2 - b^2}{4 \cos^2 Z} (\cos \psi_1 + \cos \psi_2)^2 + b^2 \right] = 1;$$

ou, pondo em vez de  $\cos X$  e  $\cos Z$  os seus valores,

$$\frac{1}{r_k^2} = b^2 + (c^2 - a^2) \cos \psi_1 \cos \psi_2 \dots \dots \dots (15).$$



Por outro lado os triangulos esfericos  $NE_1k$  e  $NE_2k$  dão

$$\cos \psi_1 = -\cos \frac{1}{2} \theta \operatorname{sen} \varphi_1, \quad \cos \psi_2 = -\cos \frac{1}{2} \theta \operatorname{sen} \varphi_2;$$

e o triangulo esferico  $E_1NE_2$  dá

$$\cos \theta = \frac{\cos 2Z - \cos \varphi_1 \cos \varphi_2}{\operatorname{sen} \varphi_1 \operatorname{sen} \varphi_2}.$$

D'esta ultima deduz-se

$$\cos \frac{1}{2} \theta = \frac{\sqrt{\cos 2Z - \cos (\varphi_1 + \varphi_2)}}{\sqrt{2} \operatorname{sen} \varphi_1 \operatorname{sen} \varphi_2},$$

que reduz as primeiras a

$$\cos \varphi_1 = -\frac{\sqrt{\cos 2Z - \cos (\varphi_1 + \varphi_2)}}{\sqrt{2} \operatorname{sen} \varphi_1 \operatorname{sen} \varphi_2} \operatorname{sen} \varphi_1,$$

$$\cos \varphi_2 = -\frac{\sqrt{\cos 2Z - \cos (\varphi_1 + \varphi_2)}}{\sqrt{2} \operatorname{sen} \varphi_1 \operatorname{sen} \varphi_2} \operatorname{sen} \varphi_2.$$

Substituindo finalmente estes valores em (15), vem

$$\frac{1}{r_k^2} = b^2 + \frac{c^2 - a^2}{2} \left[ \cos 2Z - \cos (\varphi_1 + \varphi_2) \right];$$

ou, por ser

$$\cos 2Z = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 Z = \frac{2b^2 - a^2 - c^2}{a^2 - c^2},$$

$$\frac{1}{v_k^2} = \frac{a^2 + c^2}{2} + \frac{a^2 - c^2}{2} \cos(\varphi_1 + \varphi_2) \dots (16).$$

Se em (15) tivéssemos substituídos por  $\cos \psi_1$  e  $\cos \psi_2$  os valores de  $\cos \chi_1$  e  $\cos \chi_2$ , correspondentes ao raio vector  $Ok'$ , acharíamos, por processo analogo,

$$\frac{1}{v_k^2} = \frac{a^2 + c^2}{2} + \frac{a^2 - c^2}{2} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \dots (17).$$

As equações (16) e (17) representam evidentemente os quadrados das velocidades dos dois systemas d'ondas, que podem propagar-se perpendicularmente á normal ON.

Estas formulas, apresentadas por Fresnel, dão-nos as velocidades de propagação em funcção das constantes do meio,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e dos angulos que a normal á onda plana forma com as normaes ás secções circulares.

Subtraindo-as vem

$$\frac{1}{v_k^2} - \frac{1}{v_k'^2} = v_k^2 - v_k'^2 = (c^2 - a^2) \operatorname{sen} \varphi_1 \operatorname{sen} \varphi_2,$$

que resume a lei conhecida por — lei de Biot e de Brewster.

Foi primeiro formulada e verificada por Biot; mais

tarde elle proprio reconheceu que se continha implicitamente em formulas mais complicadas, que Brewster tinha deduzido das suas observações.

A discussão das formulas de Fresnel conduz a resultados interessantes e permite, como vamos vêr, um agrupamento elegante dos phenomenos.

A uma direcção qualquer definida pelos angulos  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  correspondem duas ondas, que se propagam com as velocidades  $v_k$  e  $v_{k'}$ . Podemos portanto dividir todas as ondas em duas secções: ondas correspondentes a  $v_k$  ou *de primeira especie*; ondas correspondentes a  $v_{k'}$  ou *segunda especie*.

Tractemos das primeiras (fig. 6.<sup>a</sup>).

$$v_k = \frac{a^2 + c^2}{2} + \frac{a^2 - c^2}{2} \cos(\varphi_1 + \varphi_2).$$

$\varphi_1 + \varphi_2$  attinge o valor minimo, quando a normal cahe no angulo das normaes ás secções circulares, que o eixo dos Z divide ao meio. Então é

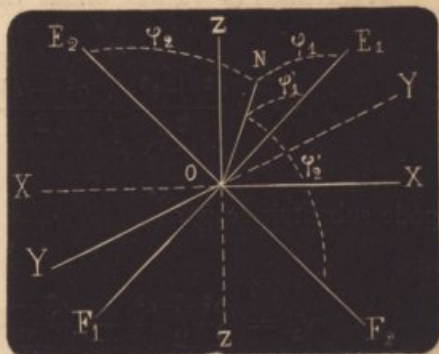
$$\varphi_1 + \varphi_2 = 2Z$$

e

$$v_k = b,$$

valor reciproco do eixo medio do ellipsoide inverso.

Fig. 6.<sup>a</sup>



$\varphi_1 + \varphi_2$  attinge o valor maximo quando a normal coincide com o plano dos  $xy$ . Então é

$$\varphi_1 + \varphi_2 = 180^\circ$$

e

$$v_k = c,$$

valor reciproco do eixo menor do ellipsoide inverso.

A velocidade das ondas de primeira especie varia pois entre  $c$  e  $b$ .

Esta secção póde subdividir-se n'uma infinidade de grupos secundarios, caracterisados pela constancia do valor  $\varphi_1 + \varphi_2$ . As normaes das ondas do mesmo grupo constituem as generatrizes d'um cone do segundo grau, cujas linhas focaes são as normaes ás secções circulares e cujo eixo principal coincide com o eixo dos  $z$ .

Estes cones teem por limites, por um lado, o plano dos  $xy$  e, pelo outro, o angulo  $E_1OE_2$ .

Tractemos agora das ondas de segunda especie (fig. 6.<sup>a</sup>).

$$v_{k'} = \frac{a^2 + c^2}{2} + \frac{a^2 - c^2}{2} \cos(\varphi_1 - \varphi_2),$$

pode substituir-se por

$$v_{k'} = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{a^2 - c^2}{2} \cos(\varphi'_1 + \varphi'_2),$$

desde que seja

$$\varphi'_1 = \varphi_1, \quad \varphi'_2 = 180^\circ - \varphi_2.$$

N'esta ultima forma de  $v'_k$  a normal ON acha-se referida a  $E_1O$  e  $F_2O$ .

$\varphi'_1 + \varphi'_2$  attinge o valor minimo, quando a normal cahe no angulo das normaes ás secções circulares, que é dividido ao meio pelo eixo dos  $x$ . Então é

$$\varphi'_1 + \varphi'_2 = 2 X$$

e

$$v'_k = b,$$

valor reciproco do eixo medio do ellipsoide inverso.

$\varphi'_1 + \varphi'_2$  attinge o valor maximo quando a normal coincide com o plano dos  $yz$ . Então é

$$\varphi'_1 + \varphi'_2 = 180^\circ,$$

$$v'_k = a,$$

valor reciproco do eixo maior do ellipsoide inverso.

A velocidade das ondas de segunda especie varia pois entre  $b$  e  $a$ .

Analogamente ao que vimos para as ondas de primeira especie, a secção das ondas de segunda especie pode subdividir-se n'uma infinidade de grupos secundarios, caracterisados pela constancia do valor  $\varphi_1 - \varphi_2$ . As normaes das ondas do mesmo grupo constituem um cone do segundo grau, cujas linhas focaes são ainda as normaes ás secções circulares, mas cujo eixo principal coincide com o eixo dos  $x$ .

Como limites d'estes cones temos, por um lado, o plano dos  $yz$  e, por outro, o angulo  $E_1OF_2$ .

O limite inferior das velocidades das ondas de primeira especie é o limite superior das velocidades das ondas de segunda especie. Por isto chamamos ás primeiras — *rapidas*; ás segundas — *lentas*.

---

## CAPITULO II

---

SUMMARIO : — Superficie d'onda. Processos para a determinação da sua equação. Polarisação das vibrações em cada um dos seus pontos. Discussão.

Os eixos de elasticidade, para ondas planas paralelas aos planos de elasticidade, e as direcções singulares, para ondas planas quaesquer, permitem a decomposição do movimento luminoso n'um systema binario de movimentos taes, que, separando-se espontaneamente, se propagam sem alteração na mesma direcção com diversa velocidade e polarisados em angulo recto.

A associação de todos os systemas binarios simultaneamente originados, desenvolvidos pela propagação d'uma infinidade d'ondas planas que, crusando-se no mesmo ponto, partem ao mesmo tempo em todas as direcções, é-nos fornecida pela sua superficie envolvente, a qual, como ja dissemos, constitue a — *superficie d'onda*.

Esta resume as porções das ondas planas que não são des-

truidas pela interferencia, e representa o logar geometrico das particulas depositarias do movimento.

Vejamos como por diferentes methodos podemos chegar a determinar a sua equação.

**Methodo de Senarmont.** — Para a determinação da equação da superficie d'onda Senarmont serve-se, como auxiliar, da — *superficie das velocidades normaes*. Esta obtem-se elevando n'um ponto qualquer d'um plano uma perpendicular e marcando sobre ella, a partir do plano, dois comprimentos eguaes aos valores reciprocos dos semi-eixos da secção elliptica, feita no ellipsoide inverso parallelamente ao plano dado: os dois pontos assim determinados pertencem á superficie das velocidades normaes.

Repetindo a mesma construcção para todos os planos que podem passar pelo mesmo ponto, obtemos uma infinidade de pontos, cujo logar geometrico é a superficie pretendida.

Tirando por cada ponto d'esta superficie planos perpendiculares ás extremidades dos raios vectores, e determinando a envolvente d'esses planos, teremos construida a superficie d'onda.

Procuremos pois em primeiro logar a equação da superficie das velocidades normaes.

Sejam :

$l, m, n$  — os angulos que forma com os eixos coordenados a normal a uma onda plana ;



$\alpha, \beta, \gamma$  — os angulos que forma com os eixos coordenados um dos eixos da secção elliptica, feita no ellipsoide inverso por um plano paralelo á onda;

$\varphi, \chi, \psi$  — os angulos que forma com os eixos coordenados a direcção da força elastica, desenvolvida por um deslocamento paralelo á direcção  $(\alpha, \beta, \gamma)$ .

Uma recta auxiliar  $(u, v, w)$ , perpendicular ao plano formado pelas direcções do deslocamento e da força elastica, estará sobre o plano d'onda, e será por conseguinte perpendicular á sua normal, sendo esta ultima tambem perpendicular ao deslocamento.

Exprimindo estas relações entre as diferentes rectas  $(l, m, n)$ ,  $(\alpha, \beta, \gamma)$ ,  $(\varphi, \chi, \psi)$ ,  $(u, v, w)$ , obtemos as equações

$$\cos \alpha \cos l + \cos \beta \cos m + \cos \gamma \cos n = 0 \dots \dots (1),$$

$$\cos u \cos l + \cos v \cos m + \cos w \cos n = 0 \dots \dots (2),$$

$$\cos u \cos \alpha + \cos v \cos \beta + \cos w \cos \gamma = 0 \dots \dots (3),$$

$$\cos u \cos \varphi + \cos v \cos \chi + \cos w \cos \psi = 0.$$

D'estas a ultima pode reduzir-se a

$$a^2 \cos \alpha \cos u + b^2 \cos \beta \cos v + c^2 \cos \gamma \cos w = 0 \dots (4),$$

por ser

$$\cos \varphi = \frac{a^2 \cos \alpha}{R}, \quad \cos \chi = \frac{b^2 \cos \beta}{R}, \quad \cos \psi = \frac{c^2 \cos \gamma}{R},$$

sendo R a resultante da força elastica.

Emfim a expressão que nos dá a velocidade de propagação das vibrações parallelas a  $(\alpha, \beta, \gamma)$  é

$$r^2 = a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \cos^2 \beta + c^2 \cos^2 \gamma \dots \dots \dots (5).$$

As equações (1), (2), (3), (4), (5) a dez variaveis  $\alpha, \beta, \gamma, l, m, n, u, v, w, r$  dão pela eliminação das seis quantidades  $\alpha, \beta, \gamma, u, v, w$  uma relação entre  $l, m, n, r$  que é a equação da superficie das velocidades normaes.

Esta eliminação effectua-se com facilidade pelo methodo dos coefficients indeterminados.

Com effeito, multiplicando as equações (2), (3), (4) respectivamente por 1, A, B e sommando-as, vem

$$\begin{aligned} \cos u \left[ (A + Ba^2) \cos \alpha + \cos l \right] + \cos v \left[ (A + Bb^2) \cos \beta + \cos m \right] \\ + \cos w \left[ (A + Bc^2) \cos \gamma + \cos n \right] = 0. \end{aligned}$$

Determinando A e B pelas condições de serem nullos os coefficients de  $\cos u, \cos v, \cos w$ , temos as equações

$$\left. \begin{aligned} (A + B a^2) \cos \alpha + \cos l &= 0 \\ (A + B b^2) \cos \beta + \cos m &= 0 \\ (A + B c^2) \cos \gamma + \cos n &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6),$$

que somadas, depois de se multiplicarem respectivamente por  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$ ,  $\cos \gamma$ , dão, atendendo a (1) e (5),

$$A = - B r^2.$$

Tendo em vista esta expressão, deduzem-se de (6) os valores

$$\cos \alpha = \frac{\cos l}{B^2 (r^2 - a^2)},$$

$$\cos \beta = \frac{\cos m}{B^2 (r^2 - b^2)},$$

$$\cos \gamma = \frac{\cos n}{B^2 (r^2 - c^2)},$$

que substituídos em (1) dão

$$\frac{\cos^2 l}{r^2 - a^2} + \frac{\cos^2 m}{r^2 - b^2} + \frac{\cos^2 n}{r^2 - c^2} = 0,$$

equação polar da superfície das velocidades normaes.

Determinada esta, deduzamos agora a equação da superfície d'onda.

Sejam  $\rho$  ( $\lambda, \mu, \nu$ ) as coordenadas correntes da onda plana, normal á extremidade do raio vector  $r$  ( $l, m, n$ ) da superfície das velocidades normaes.

Designando por  $\varepsilon$  o angulo variavel que formam os raios vectores da onda plana com a direcção fixa  $r$  ( $l, m, n$ ), temos

$$\cos \varepsilon = \frac{r}{\rho} = \cos l \cos \lambda + \cos m \cos \mu + \cos n \cos \nu \dots \dots \dots (7)$$

e conjunctamente

$$\left. \begin{aligned} \cos^2 l + \cos^2 m + \cos^2 n &= 1 \\ \frac{\cos^2 l}{r^2 - a^2} + \frac{\cos^2 m}{r^2 - b^2} + \frac{\cos^2 n}{r^2 - c^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (8)$$

A equação da envolvente de todos os planos, definidos pelas equações (7) e (8), determina-se derivando-as em ordem aos parametros variaveis, e depois eliminando entre as propostas e as equações derivadas as quantidades que particularisam a posição do plano d'onda.

Derivando pois em ordem a  $\cos l$  e  $\cos m$ , que suppomos serem os parametros variaveis independentes, obtemos os dois systemas de equações :

$$\left. \begin{aligned}
 \cos \lambda + \cos \nu \frac{d \cos n}{d \cos l} - \frac{1}{\rho} \frac{dr}{d \cos l} &= 0 \\
 \cos l + \cos n \frac{d \cos n}{d \cos l} &= 0 \quad \dots(9)
 \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{\cos l}{r^2 - a^2} + \frac{\cos n}{r^2 - c^2} \frac{d \cos n}{d \cos l} - \frac{rdz}{d \cos l} \left[ \frac{\cos^2 l}{(r^2 - a^2)^2} + \frac{\cos^2 m}{(r^2 - b^2)^2} + \frac{\cos^2 n}{(r^2 - c^2)^2} \right] = 0$$

$$\left. \begin{aligned}
 \cos \mu + \cos \nu \frac{d \cos n}{d \cos m} - \frac{1}{\rho} \frac{dr}{d \cos m} &= 0 \\
 \cos m + \cos n \frac{d \cos n}{d \cos m} &= 0 \quad \dots(10)
 \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{\cos m}{r^2 - b^2} + \frac{\cos n}{r^2 - c^2} \frac{d \cos n}{d \cos m} - \frac{rdr}{d \cos m} \left[ \frac{\cos^2 l}{(r^2 - a^2)^2} + \frac{\cos^2 m}{(r^2 - b^2)^2} + \frac{\cos^2 n}{(r^2 - c^2)^2} \right] = 0$$

Em presença da regra que enunciamos, temos de eliminar entre as propostas (7) e (8) e os systemas (9) e (10), as quantidades  $l, m, n, r, \frac{d \cos n}{d \cos l}, \frac{d \cos n}{d \cos m}, \frac{d \cos r}{d \cos l}, \frac{d \cos r}{d \cos m}$ .

Procedamos por partes.

Eliminemos primeiro os coefficients differenciaes pelo methodo dos coefficients indeterminados.

Multiplicando as equações (9) respectivamente por 1, A, B e sommando, vem

$$\frac{d \cos n}{d \cos l} \left( \cos v + A \cos n + B \frac{\cos n}{r^2 - c^2} \right) - \frac{dr}{d \cos l} \left\{ Br \left[ \frac{\cos^2 l}{(r^2 - a^2)^2} + \frac{\cos^2 m}{(r^2 - b^2)^2} + \frac{\cos^2 n}{(r^2 - c^2)^2} \right] + \frac{1}{\rho} \right\} + \cos \lambda + A \cos l + B \frac{\cos l}{r^2 - a^2} = 0.$$

Determinando A e B pela condição de serem nullos os coefficients de  $\frac{d \cos n}{d \cos l}$  e  $\frac{dr}{d \cos l}$ , obtemos as equações

$$\left. \begin{aligned} \cos v + A \cos n + B \frac{\cos n}{r^2 - c^2} &= 0 \\ Br \left[ \frac{\cos^2 l}{(r^2 - a^2)^2} + \frac{\cos^2 m}{(r^2 - b^2)^2} + \frac{\cos^2 n}{(r^2 - c^2)^2} \right] + \frac{1}{\rho} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (11).$$

É escusado repetir o mesmo calculo para as equações (10), pois que, pela sua inspecção, se vê immediatamente que chegariamos a duas equações identicas a (11).

A determinação de A e B por (11) reduz as sommas de (9) e (10) a duas equações, que reunidas a (11), constituem o systema :

$$\left. \begin{aligned} \cos \lambda + A \cos l + B \frac{\cos l}{r^2 - a^2} &= 0 \\ \cos \mu + A \cos m + B \frac{\cos m}{r^2 - b^2} &= 0 \\ \cos \nu + A \cos n + B \frac{\cos n}{r^2 - c^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots(12).$$

$$B r \left[ \frac{\cos^2 l}{(r^2 - a^2)^2} + \frac{\cos^2 m}{(r^2 - b^2)^2} + \frac{\cos^2 n}{(r^2 - c^2)^2} \right] + \frac{1}{\rho} = 0$$

A somma das tres primeiras d'estas equações respectivamente multiplicadas por  $\cos l$ ,  $\cos m$ ,  $\cos n$  determinam A pela formula

$$A + \frac{r}{\rho} = 0;$$

e a somma dos quadrados das mesmas determinam B, por A se achar determinado, pela formula

$$B = \frac{r}{\rho} (r^2 - \rho^2).$$

Os valores de A e B substituidos em (12) reduzem-nas a

$$\left. \begin{aligned} \cos \lambda - \frac{r}{\rho} \cos l &= (\rho^2 - r^2) \frac{\cos \lambda}{\rho^2 - a^2} \\ \cos \mu - \frac{r}{\rho} \cos m &= (\rho^2 - r^2) \frac{\cos \mu}{\rho^2 - b^2} \\ \cos \nu - \frac{r}{\rho} \cos n &= (\rho^2 - r^2) \frac{\cos \nu}{\rho^2 - c^2} \end{aligned} \right\} \dots (13).$$

$$\frac{1}{\rho^2 - r^2} = r^2 \left[ \frac{\cos^2 l}{(r^2 - a^2)^2} + \frac{\cos^2 m}{(r^2 - b^2)^2} + \frac{\cos^2 n}{(r^2 - c^2)^2} \right]$$

$$= r^2 \left[ \frac{\cos^2 \lambda}{(\rho^2 - a^2)^2} + \frac{\cos^2 \mu}{(\rho^2 - b^2)^2} + \frac{\cos^2 \nu}{(\rho^2 - c^2)^2} \right]$$

Resta-nos eliminar  $l, m, n, r$ .

A somma das tres primeiras d'estas equações, previamente multiplicadas por  $\cos \lambda, \cos \mu, \cos \nu$ , é

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{\cos^2 \lambda}{\rho^2 - a^2} + \frac{\cos^2 \mu}{\rho^2 - b^2} + \frac{\cos^2 \nu}{\rho^2 - c^2},$$

que, por ser independente dos parametros variaveis, representa a equação da superficie d'onda.

Subtraindo-a da identidade

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{\cos^2 \lambda}{\rho^2} + \frac{\cos^2 \mu}{\rho^2} + \frac{\cos^2 \nu}{\rho^2},$$



toma a forma

$$\frac{a^2 \cos^2 \lambda}{\rho^2 - a^2} + \frac{b^2 \cos^2 \mu}{\rho^2 - b^2} + \frac{c^2 \cos^2 \nu}{\rho^2 - c^2} = 0,$$

de que se faz mais frequente uso.

Pelas formulas conhecidas

$$x = \rho \cos \lambda, \quad y = \rho \cos \mu, \quad z = \rho \cos \nu,$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

reduz-se a

$$(x^2 + y^2 + z^2)(a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2) - a^2(b^2 + c^2)x^2$$

$$- b^2(a^2 + c^2)y^2 - c^2(a^2 + b^2)z^2 + a^2 b^2 c^2 = 0,$$

que é a equação da superficie d'onda em coordenadas rectangulares.

Ainda podemos, com Hamilton, dar-lhe a forma mais symmetrica

$$\frac{a^2 x^2}{a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2 - a^2}$$

$$+ \frac{b^2 y^2}{a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2 - b^2}$$

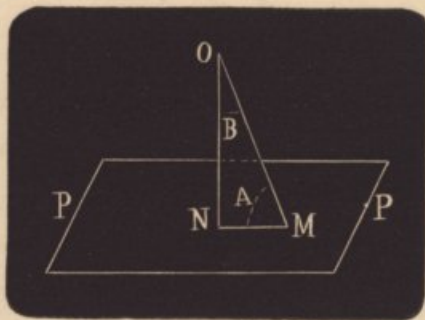
$$+ \frac{c^2 z^2}{a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2 - c^2} = 0.$$

Lançando mão da equação polar da superfície d'onda, demonstra-se com facilidade um theorema, por meio do qual podemos em geral determinar a direcção das vibrações n'um ponto qualquer da superfície d'onda, sem a consideração dos eixos da secção diametral do ellipsoide inverso.

Com effeito, seja  $M$  (fig. 7.<sup>a</sup>) um ponto qualquer da superfície d'onda; por esse ponto tiremos o raio vector  $OM$  e o plano tangente  $PP$ .

O problema actual resume-se em determinar o valor do angulo que o raio vector  $OM$  faz com a direcção das vibrações no plano  $PP$ .

Sendo  $\alpha, \beta, \gamma$  os angulos que a direcção das vibrações faz com os eixos coordenados, e  $\rho$  ( $\lambda, \mu, \nu$ ) as coordenadas polares do raio vector  $OM$ , deduz-se facilmente das equações (13), attendendo á ultima das equações (12),

Fig. 7.<sup>a</sup>

$$\frac{\cos \lambda}{\rho^2 - a^2} = \frac{\cos \alpha}{\rho \sqrt{\rho^2 - r^2}}, \quad \frac{\cos \mu}{\rho^2 - b^2} = \frac{\cos \beta}{\rho \sqrt{\rho^2 - r^2}}, \quad \frac{\cos \nu}{\rho^2 - c^2} = \frac{\cos \gamma}{\rho \sqrt{\rho^2 - r^2}}.$$

Substituindo estes valores em

$$\frac{\cos^2 \lambda}{\rho^2 - a^2} + \frac{\cos^2 \mu}{\rho^2 - b^2} + \frac{\cos^2 \nu}{\rho^2 - c^2} = \frac{1}{\rho^2},$$

vem

$$\cos \alpha \cos \lambda + \cos \beta \cos \mu + \cos \gamma \cos \nu = \sqrt{1 - \frac{r^2}{\rho^2}} = \cos A,$$

ou

$$\cos^2 A + \frac{r^2}{\rho^2} = 1,$$

sendo A o angulo que se pretendia determinar.

Por ser

$$\frac{r}{\rho} = \cos B,$$

A e B são complementares ; por conseguinte a direcção das vibrações ha-de ser tal, que forme com ON um angulo recto em N. Será pois NM.

*Logo: a direcção das vibrações n'um ponto qualquer da superficie d'onda é dada pela projecção do raio vector, tirado para esse ponto, sobre o plano tangente á superficie d'onda no mesmo ponto.*

Para os pontos em que o raio vector é normal á superficie d'onda, a sua projecção sobre o plano tangente é nulla ; e a direcção das vibrações fica por determinar. N'este caso temos de recorrer ás secções diametraes do ellipsoide inverso, ou a qualquer dos outros processos que estudámos.

O plano ONM é o plano de vibração.

O plano de polarisação será, adoptando a hypothese de

Fresnel, perpendicular ás vibrações ; mas, como em geral estas são obliquas ao raio vector, o plano de polarisação não passará por este raio. Comtudo, attendendo á quasi-transversalidade das vibrações em todos os meios birefrangentes actualmente conhecidos, podemos tomar, sem erro sensível, por plano de polarisação o plano que, passando pelo raio vector, é perpendicular ao plano de vibração.

**Equação da superficie d'onda em coordenadas parametricas dos seus planos tangentes.** — Como uma superficie é sempre a envolvente dos seus planos tangentes, pode representar-se por uma equação entre as coordenadas parametricas d'esses planos e quantidades constantes ou parametros.

Deve entender-se por coordenadas parametricas d'um plano os valores reciprocos dos segmentos que elle intercepta nos tres eixos coordenados. Por este meio um plano fica completamente determinado.

As equações

$$v_k^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} + \frac{a^2 - c^2}{2} \cos(\varphi_1 + \varphi_2),$$

$$v_{k'}^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} + \frac{a^2 - c^2}{2} \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

permitted-nos achar muito facilmente a equação da superficie d'onda, expressa nas coordenadas de que acabamos de fallar.

Façamos, para abreviar,

$$\frac{a^2 + c^2}{2} = p, \quad \frac{a^2 - c^2}{2} = q;$$

as expressões de  $v_k$  e  $v_{k'}$  reduzir-se-ão a

$$v_k^2 = p + q \cos(\varphi_1 + \varphi_2),$$

$$v_{k'}^2 = p + q \cos(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Tiremos pela origem uma recta n'uma direcção qualquer, definida por  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$ ; os dois pares de planos, perpendiculares a essa recta e ás distancias da origem

$$\rho^2 = v_k^2 = p + q \cos(\varphi_1 + \varphi_2),$$

$$\rho^2 = v_{k'}^2 = p + q \cos(\varphi_1 - \varphi_2),$$

são, e só elles, planos tangentes á superficie d'onda.

Consequentemente

$$(\rho^2 - v_k^2) (\rho^2 - v_{k'}^2) = 0,$$

que resume aquellas duas condições, é a equação da superficie d'onda.

Resta-nos exprimir  $\rho$ ,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  em funcção das coordenadas parametricas.

Designando por  $u, v, w$  as coordenadas parametricas do plano tangente, definido por  $\rho(\varphi_1, \varphi_2)$ , os segmentos, que esse plano intercepta nos eixos coordenados, serão  $\frac{1}{u}, \frac{1}{v}, \frac{1}{w}$ , e a sua equação em coordenadas ordinarias será

$$ux + vy + wz = 1.$$

Ora, sendo  $l, m, n$  os angulos que a normal á onda plana forma com os eixos coordenados, teremos evidentemente

$$\cos l = u\rho, \cos m = v\rho, \cos n = w\rho;$$

logo

$$\rho^2 = \frac{1}{u^2 + v^2 + w^2}$$

Finalmente para exprimir  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  em  $u, v, w$  temos as formulas

$$\cos \varphi_1 = \cos X \cos l + \cos Z \cos n = \rho(u \cos X + w \cos Z)$$

$$\cos \varphi_2 = -\cos X \cos l + \cos Z \cos n = \rho(w \cos Z - u \cos X).$$

Obtidos assim todos os elementos para a substituição emprehendamol-a.

A equação

$$\left(\rho^2 - v_k^2\right) \left(\rho^2 - v_k^2\right) = 0$$

pode transformar-se em

$$\rho^4 - (v_k^2 + v_{k'}^2) + v_k^2 v_{k'}^2 = 0 \dots \dots (14).$$

Mas

$$v_k^2 + v_{k'}^2 = 2p + 2q \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 = 2p + 2q \rho^2 (w^2 \cos^2 Z - u^2 \cos^2 X),$$

ou, attendendo a que é

$$\rho^2 = \frac{1}{u^2 + v^2 + w^2},$$

$$v_k^2 + v_{k'}^2 = p^2 - q^2 + q^2 (\cos^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_2) + 2pq \cos \varphi_1 \cos \varphi_2;$$

e

$$v_k^2 v_{k'}^2 = p^2 - q^2 + 2q^2 \rho^2 (u^2 \cos^2 X + w^2 \cos^2 Z)$$

$$+ 2pq \rho^2 (w^2 \cos^2 Z - u^2 \cos^2 X),$$

ou, attendendo a que é

$$\rho^2 = \frac{1}{u^2 + v^2 + w^2},$$

$$v_k^2 v_{k'}^2 = \rho^2 \left\{ u^2 [p^2 - q^2 + 2q(q - p)] \cos^2 X + v^2 (p^2 - q^2) \right.$$

$$\left. + w^2 [p^2 - q^2 + 2q(p + q)] \cos^2 Z \right\}.$$

Pondo os valores de  $v_k^2$ ,  $v_k'^2$  e  $v_k^2 + v_k'^2$  em (14), depois de n'elles haver substituido os valores de  $p$ ,  $q$ ,  $\cos X$ ,  $\cos Z$ , obtemos a equação

$$\begin{aligned} & (u^2 + v^2 + w^2)(u^2 b^2 c^2 + v^2 a^2 c^2 + w^2 a^2 b^2) \\ & - [u^2(b^2 + c^2) + v^2(a^2 + c^2) + w^2(a^2 + b^2)] + 1 = 0. \end{aligned}$$

Finalmente, attendendo ainda á relação

$$\zeta^2 = \frac{1}{u^2 + v^2 + w^2},$$

chegamos com facilidade a

$$\begin{aligned} & u^2(\zeta^2 - b^2)(\zeta^2 - c^2) + v^2(\zeta^2 - a^2)(\zeta^2 - c^2) \\ & + w^2(\zeta^2 - a^2)(\zeta^2 - b^2) = 0, \end{aligned}$$

a que podemos dar a forma mais simples

$$\frac{u^2}{\zeta^2 - a^2} + \frac{v^2}{\zeta^2 - b^2} + \frac{w^2}{\zeta^2 - c^2} = 0,$$

cuja identidade com a equação da superficie d'onda que determinámos pelo methodo de Senarmont é facil d'obter.



**Construcção da superfície d'onda pelo ellipsoide reciproco**  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ . — Cortemos este ellipsoide por um plano diametral qualquer, e marquemos sobre a normal ao centro da secção diametral dois comprimentos directamente proporcionaes aos eixos da secção elliptica assim determinada. Repetindo a mesma construcção para todas as secções diametraes do ellipsoide reciproco, obteremos uma superficie, cuja equação passamos a determinar.

Attendendo ás relações dos ellipsoides

$$a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2 = 1,$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

e designando por  $\rho$  ( $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$ ) as coordenadas polares da superficie, cuja equação pretendemos, vê-se immediatamente que para a obter basta substituir na equação da superficie das velocidades normaes, determinada por Senarmont, as quantidades  $r^2$ ,  $a^2$ ,  $b^2$ ,  $c^2$ ,  $l$ ,  $m$ ,  $n$  por  $\frac{1}{\rho^2}$ ,  $\frac{1}{a^2}$ ,  $\frac{1}{b^2}$ ,  $\frac{1}{c^2}$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$ .

Feita a substituição obtemos a equação

$$\frac{\cos^2 \lambda}{\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{a^2}} + \frac{\cos^2 \mu}{\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{b^2}} + \frac{\cos^2 \nu}{\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{c^2}} = 0,$$

ou

$$\frac{\cos^2 \lambda}{\rho^2 - a^2} + \frac{\cos^2 \mu}{\rho^2 - b^2} + \frac{\cos^2 \nu}{\rho^2 - c^2} = 0,$$

que é, como sabemos, a equação da superfície d'onda.

A reciprocidade dos ellipsoides

$$a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2 = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

permite que deduzamos do segundo, sem o auxilio de calculo directo, mas por simples permutações, theoremas sobre a velocidade e polarisação das ondas, analogos áquelles que deduzimos do primeiro.

Antes porem occupemo-nos das suas propriedades.

Baixemos do centro O do ellipsoide

$$a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2 = 1$$

uma perpendicular sobre o plano tangente no ponto P ( $x', y', z'$ ).

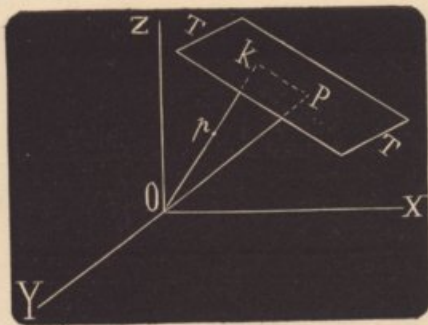
Se a partir de O (fig. 8.<sup>a</sup>) tomarmos sobre ella um comprimento tal, que

$$Op \times Ok = 1,$$

será  $p$  um ponto do ellipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Fig. 8.<sup>a</sup>



Com efeito, a equação do plano tangente no ponto  $P(x', y', z')$  é

$$a^2 x' X + b^2 y' Y + c^2 z' Z = 1;$$

e, por ser  $P$  um ponto do primeiro elipsoide, teremos

$$a^2 x'^2 + b^2 y'^2 + c^2 z'^2 = 1 \dots \dots \dots (15).$$

As equações da normal ao plano tangente são

$$X_1 = \frac{a^2 x'}{c^2 z'} Z_1, Y_1 = \frac{b^2 y'}{c^2 z'} Z_1,$$

e as coordenadas do ponto  $k$ , pé da normal,

$$X'_1 = \frac{a^2 x'}{a^4 x'^2 + b^4 y'^2 + c^4 z'^2},$$

$$Y'_1 = \frac{b^2 y'}{a^4 x'^2 + b^4 y'^2 + c^4 z'^2},$$

$$Z'_1 = \frac{c^2 z'}{a^4 x'^2 + b^4 y'^2 + c^4 z'^2};$$

portanto

$$Ok^2 = X'_1{}^2 + Y'_1{}^2 + Z'_1{}^2 = \frac{1}{a^4 x'^2 + b^4 y'^2 + c^4 z'^2}.$$

Designando por  $x'', y'', z''$  as coordenadas do ponto  $p$ , temos

$$Op^2 = x''^2 + y''^2 + z''^2 = \frac{1}{Ok^2} = a^4 x'^2 + b^4 y'^2 + c^4 z'^2.$$

Além d'isto, por estarem na mesma recta tirada da origem, os pontos  $p$  e  $k$  dão

$$\frac{x''}{X'_1} = \frac{y''}{Y'_1} = \frac{z''}{Z'_1} = \frac{Op}{Ok};$$

d'onde

$$x' = \frac{x''}{a^2}, y' = \frac{y''}{b^2}, z' = \frac{z''}{c^2}.$$

Substituindo finalmente estes valores em (15), temos

$$\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} + \frac{z''^2}{c^2} = 1;$$

o que prova que o ponto  $p$  ( $x'', y'', z''$ ), construido pelo processo geometrico que apresentámos, é um ponto do ellipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Prevê-se que, tomando para ponto de partida o ponto  $p$  do segundo ellipsoide, obteríamos pelo processo indicado um ponto correspondente no primeiro; demonstremos porem que o ponto assim determinado é exactamente aquelle de que partimos para obter  $p$ .

Com effeito, para calcular as suas coordenadas basta em

$$a^2 x'', b^2 y'', c^2 z''$$

substituir por

$$a^2, b^2, c^2, x', y', z'$$

respectivamente

$$\frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}, \frac{1}{c^2}, a^2 x', b^2 y', c^2 z';$$

o que dá

$$(x) = \frac{1}{a^2} \cdot a^2 x' = x', (y) = \frac{1}{b^2} \cdot b^2 y' = y', (z) = \frac{1}{c^2} \cdot c^2 z' = z'.$$

Logo o ponto achado coincide com P.

Passemos agora ao enunciado dos theoremas que, como acima dissemos, a reciprocidade dos dois ellipsoides permite deduzir do segundo :

1.º

*Os planos bissectores dos angulos diedros, formados por dois planos que passam por uma direcção dada e pelas normaes ás secções circulares do segundo ellipsoide, são os planos de vibração dos dois raios que podem propagar-se n'aquella direcção. A direcção das vibrações é determinada pelo plano d'onda que é em geral obliquo á direcção de propagação.*

2.º

$$\frac{1}{v_k^2} = \frac{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}}{2} + \frac{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2}}{2} \cos(\theta_1 + \theta_2) \dots (16),$$

$$\frac{1}{v_k^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2} \cos(\theta_1 - \theta_2) \dots (17);$$

sendo  $v_k$  e  $v_{k'}$  as velocidades de propagação dos dois raios correspondentes a uma dada direcção e  $\theta_1$  e  $\theta_2$  angulos que ella forma com as normaes ás secções circulares do segundo ellipsoide.

Estas normaes representam com relação ao segundo ellipsoide papel analogo ao das normaes ás secções circulares do primeiro. Os seus angulos com os eixos dos  $x$  e dos  $z$  são dados por

$$\cos X'_1 = \sqrt{\frac{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2}}}, \quad \cos Z'_1 = \sqrt{\frac{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2}}},$$

$$\cos X'_2 = -\sqrt{\frac{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2}}}, \quad \cos Z'_2 = \sqrt{\frac{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2}}}.$$

3.º

$$\frac{1}{v_k^2} - \frac{1}{v_{k'}^2} = \left( \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) \sin \theta_1 \sin \theta_2.$$

*A differença dos quadrados dos valores reciprocos das velocidades dos dois raios, correspondentes á mesma direcção*

de propagação, é proporcional ao producto dos senos dos angulos, que a direcção dada forma com as normaes ás secções circulares do segundo ellipsoide.

As expressões (16) e (17) podiam sugeitar-se a uma discussão analoga á que fizemos nas expressões (16) e (17) da pag. 74.

Discutamos agora parallelamente as equações da superficie d'onda

$$(u^2 + v^2 + w^2)(u^2b^2c^2 + v^2a^2c^2 + w^2a^2b^2) - [u^2(b^2 + c^2) + v^2(a^2 + c^2) + w^2(a^2 + b^2)] + 1 = 0,$$

$$(x^2 + y^2 + z^2)(a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2) - [a^2x^2(b^2 + c^2) + b^2y^2(a^2 + c^2) + c^2z^2(a^2 + b^2)] + a^2b^2c^2 = 0;$$

a primeira expressa em coordenadas parametricas dos seus planos tangentes e a segunda em coordenadas rectangulares.

### Intersecções da superficie d'onda com os tres eixos coordenados

COORDENADAS PARAMETRICAS

COORDENADAS RECTANGULARES

Para

Para

$$v = 0, w = 0,$$

$$y = 0, z = 0,$$

obtemos a equação biquadrada

obtemos a equação biquadrada

$$u^4b^2c^2 - u^2(b^2 + c^2) + 1 = 0,$$

$$x^4 - x^2(b^2 + c^2) + b^2c^2 = 0,$$

que se resolve em

$$u_1 = \pm \frac{1}{c}, u_2 = \pm \frac{1}{b}.$$

D'onde

$$x_1 = \pm c, x_2 = \pm b.$$

Teremos analogamente:

para

$$u = 0, w = 0,$$

$$y_1 = \pm a, y_2 = \pm c;$$

para

$$u = 0, v = 0,$$

$$z_1 = \pm a, z_2 = \pm b.$$

que se resolve em

$$x_1 = \pm c, x_2 = \pm b.$$

Teremos analogamente:

para

$$x = 0, z = 0,$$

$$y_1 = \pm a, y_2 = \pm c;$$

para

$$x = 0, y = 0,$$

$$z_1 = \pm a, z_2 = \pm b.$$

### Secções principaes

COORDENADAS PARAMETRICAS

Para obter as equações das secções principaes da superficie d'onda basta fazer na sua equação successivamente  $u = 0$ ,  $v = 0$ ,  $w = 0$ .

COORDENADAS RECTANGULARES

Para obter as equações das secções principaes da superficie d'onda basta na sua equação fazer successivamente  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ .



Assim :

fazendo

$$w = 0,$$

obtemos para a secção principal  $xy$ 

$$[(u^2 + v^2)c^2 - 1](u^2b^2 + v^2a^2 - 1) = 0,$$

que se resolve em

$$(u^2 + v^2)c^2 = 1, u^2b^2 + v^2a^2 = 1,$$

— a primeira representa um círculo de raio  $c$ , a segunda uma ellipse, cujos semi-eixos são  $a$  e  $b$ .

Teremos analogamente :  
para a secção principal  $xz$

$$(u^2 + w^2)b^2 = 1, u^2c^2 + w^2a^2 = 1,$$

— a primeira é um círculo de

Assim :

fazendo

$$z = 0,$$

obtemos para a secção principal  $xy$ 

$$(x^2 + y^2 - c^2)(a^2x^2 + b^2y^2 - a^2b^2) = 0,$$

que se resolve em

$$x^2 + y^2 = c^2, a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b^2,$$

— a primeira representa um círculo de raio  $c$ , a segunda uma ellipse, cujos semi-eixos são  $a$  e  $b$ .

Teremos analogamente :  
para a secção principal  $xz$

$$x^2 + z^2 = b^2, a^2x^2 + c^2z^2 = a^2c^2,$$

— a primeira é um círculo de

raio  $b$ , a segunda uma ellipse,  
cujos semi-eixos são  $a$  e  $c$  ;  
para a secção principal  $yz$

$$(v^2 + w^2)a^2 = 1, v^2c^2 + w^2b^2 = 1,$$

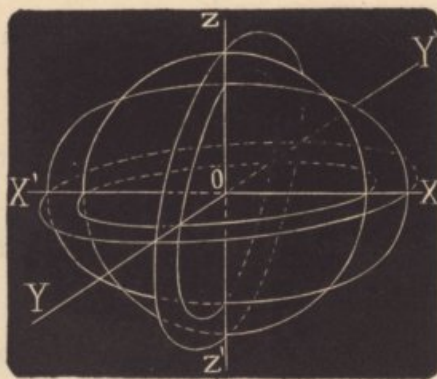
— a primeira é um circulo de  
raio  $a$ , a segunda uma ellipse,  
cujos semi-eixos são  $b$  e  $c$ .

raio  $b$ , a segunda uma ellipse,  
cujos semi-eixos são  $a$  e  $c$  ;  
para a secção principal  $yz$

$$y^2 + z^2 = a^2, b^2y^2 + c^2z^2 = b^2c^2,$$

— a primeira é um circulo de  
raio  $a$ , a segunda uma ellipse,  
cujos semi-eixos são  $b$  e  $c$ .

Por serem homocentricas, as tres secções principaes podem  
representar-se nas suas naturaes relações pela fig. 9.<sup>a</sup>

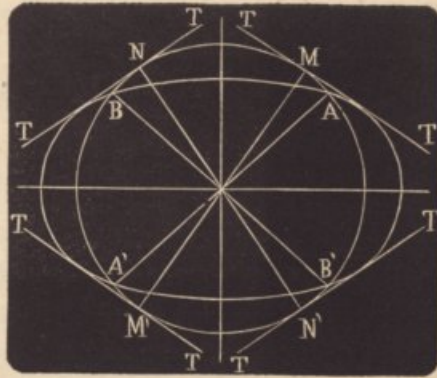
Fig. 9.<sup>a</sup>

Em consequencia das relações de grandeza entre  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  
vê-se immediatamente que, na secção principal  $xz$ , o circulo e  
a ellipse se cortam nos quatro pontos  $A$ ,  $A'$ ,  $B$ ,  $B'$ . (fig. 10.<sup>a</sup>)  
Podemos tirar a estas duas curvas quatro tangentes communs,

paralelas duas a duas, e symetricas com relação aos eixos dos  $x$  e dos  $z$ .

As rectas tiradas pelo centro perpendicularmente ás tangentes communs, e os diametros que ligam os quatro pontos A, B, A', B' merecem particular menção.

Fig. 10



Designando por  $n$  o coefficiente de inclinação da recta TT', a sua equação será, por ser tangente ao circulo,

$$z = nx \pm b \sqrt{1 + n^2},$$

e, por ser tangente á ellipse,

$$z = nx \pm \sqrt{c^2 n^2 + a^2};$$

d'onde

$$n = \pm \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 - c^2}}.$$

As rectas MM' e NN', normaes ás tangentes, terão por equação

$$z = -\frac{1}{n} x = \pm \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - b^2}} x,$$

que representa, como é facil verificar, a equação das normaes ás secções circulares do ellipsoide inverso

$$a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2 = 1$$

Logo, em virtude das propriedades que reconhecemos a este ellipsoide, uma onda plana normal ás rectas  $MM'$  ou  $NN'$ , isto é, parallela aos planos que se podem tirar pelas tangentes communs perpendicularmente ao plano  $xz$ , propaga-se sem alteração, qualquer que seja a direcção das vibrações; e a sua velocidade é constante e independente d'essa direcção.

As rectas  $AA'$  e  $BB'$  offerecem-nos propriedades analogas com relação ao ellipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Com effeito, a sua equação é, attendendo ás equações do circulo e da ellipse,

$$z = \pm \frac{a}{c} \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - b^2}} x,$$

que representa, como é facil verificar, a equação das normaes ás secções circulares do ellipsoide reciproco

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Logo, em virtude das propriedades que reconhecemos a este ellipsoide, um raio parallelo a qualquer das direcções  $AA'$  ou

BB' propaga-se sem desdobramento, e com uma velocidade constante, qualquer que seja a sua polarisação.

### **Pontos singulares e planos tangentes singulares.**

A inspecção da secção principal  $xz$  faz prever singularidades nos pontos de intersecção da ellipse e do circulo. N'esses pontos a superficie d'onda tem evidentemente mais d'um plano tangente, e os planos tirados pelas quatro tangentes communs ao circulo e á ellipse, perpendicularmente ao plano  $xz$ , ser-lhes-ão tangentes em mais d'um ponto. Taes pontos e taes planos são por conseguinte — singulares.

Vejamos como por meio das equações da superficie d'onda em coordenadas parametricas e rectangulares podemos estudar as suas propriedades.

Para isso tomemos em conta as considerações seguintes.

Seja

$$f(x, y, z) = 0$$

a equação d'uma superficie em coordenadas rectangulares.

A equação do plano tangente no ponto  $(x', y', z')$  será

$$\frac{df}{dx'} (x - x') + \frac{df}{dy'} (y - y') + \frac{df}{dz'} (z - z') = 0;$$

e as coordenadas parametricas d'este plano

$$u' = \frac{\frac{df}{dx'}}{x' \frac{df}{dx'} + y' \frac{df}{dy'} + z' \frac{df}{dz'}}$$

$$v' = \frac{\frac{df}{dy'}}{x' \frac{df}{dx'} + y' \frac{df}{dy'} + z' \frac{df}{dz'}}$$

$$w' = \frac{\frac{df}{dz'}}{x' \frac{df}{dx'} + y' \frac{df}{dy'} + z' \frac{df}{dz'}}$$

Inversamente:

Seja

$$F(u, v, w) = 0$$

a equação da mesma superfície em coordenadas parametricas dos seus planos tangentes.

O ponto de contacto  $(u', v', w')$  do plano tangente com a superfície representar-se-á por

$$\frac{dF}{du'} (u - u') + \frac{dF}{dv'} (v - v') + \frac{dF}{dw'} (w - w') = 0;$$

e as coordenadas rectangulares d'esse ponto por

$$x' = \frac{\frac{dF}{du'}}{u' \frac{dF}{du'} + v' \frac{dF}{dv'} + w' \frac{dF}{dw'}}$$

$$y' = \frac{\frac{dF}{dv'}}{u' \frac{dF}{du'} + v' \frac{dF}{dv'} + w' \frac{dF}{dw'}}$$

$$z' = \frac{\frac{dF}{dw'}}{u' \frac{dF}{du'} + v' \frac{dF}{dv'} + w' \frac{dF}{dw'}}$$

Representando a superfície em coordenadas rectangulares, os pontos, para os quaes se annullam os coefficients differenciaes da equação

$$\frac{df}{dx'}(x - x') + \frac{df}{dy'}(y - y') + \frac{df}{dz'}(z - z') = 0,$$

são pontos singulares. Em cada um d'estes a superfície tem uma infinidade de planos tangentes, e a envolvente d'esses planos será uma superfície conica, cujo vertice coincidirá com o ponto singular. Por isso se lhe chama *cone tangente*.

A sua equação é

$$\begin{aligned} & \frac{d^2f}{dx'^2}(x - x')^2 + \frac{d^2f}{dy'^2}(y - y')^2 + \frac{d^2f}{dz'^2}(z - z')^2 \\ & + 2 \frac{d^2f}{dx'dy'}(x - x')(y - y') + 2 \frac{d^2f}{dx'dz'}(x - x')(z - z') \end{aligned}$$

$$+ 2 \frac{d^2 f}{dy' dz'} (y - y') (z - z') = 0 \dots \dots \dots (18).$$

Se pelo contrario representarmos a superficie em coordenadas parametricas, a nullidade dos coefficients differenciaes da equação

$$\frac{dF}{du'} (u - u') + \frac{dF}{dv'} (v - v') + \frac{dF}{dw'} (w - w') = 0$$

significa que o plano representado por esta equação toca a superficie n'uma infinidade de pontos.

A serie d'estes pontos constitue a curva de contacto da superficie e do plano tangente singular. A equação d'esta curva representada no espaço será

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 F}{du'^2} (u - u')^2 + \frac{d^2 F}{dv'^2} (v - v')^2 + \frac{d^2 F}{dw'^2} (w - w')^2 \\ & + 2 \frac{d^2 F}{du' dv'} (u - u') (v - v') + 2 \frac{d^2 F}{du' dw'} (u - u') (w - w') \\ & + 2 \frac{d^2 F}{dv' dw'} (v - v') (w - w') = 0 \dots \dots \dots (19). \end{aligned}$$

Façamos applicação do que deixamos dito ás equações da superficie d'onda.



COORDENADAS PARAMETRICAS.

COORDENADAS RECTANGULARES.

Para os planos tangentes singulares temos as equações de condição

$$\frac{dF}{du'} = 0, \quad \frac{dF}{dv'} = 0, \quad \frac{dF}{dw'} = 0,$$

ou

$$2u[u^2b^2c^2 + v^2a^2c^2 + w^2a^2b^2 + b^2c^2(u^2 + v^2 + w^2) - (b^2 + c^2)] = 2uH = 0,$$

$$2v[u^2b^2c^2 + v^2a^2c^2 + w^2a^2b^2 + a^2c^2(u^2 + v^2 + w^2) - (a^2 + c^2)] = 2vH' = 0,$$

$$2w[u^2b^2c^2 + v^2a^2c^2 + w^2a^2b^2 + a^2b^2(u^2 + v^2 + w^2) - (a^2 + b^2)] = 2wH'' = 0.$$

Estas tres equações vão determinar-nos as coordenadas parametricas dos planos tangentes singulares.

Podem ser satisfeitas conjuntamente por uma de quatro maneiras diversas:

1.ª — Sendo

Para os pontos singulares temos as equações de condição

$$\frac{df}{dx'} = 0, \quad \frac{df}{dy'} = 0, \quad \frac{df}{dz'} = 0,$$

ou

$$2x[a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 + a^2(z^2 - b^2 - c^2)] = 2xK = 0,$$

$$2y[a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 + b^2(r^2 - a^2 - c^2)] = 2yK' = 0,$$

$$2z[a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 + c^2(r^2 - a^2 - b^2)] = 2zK'' = 0.$$

Estas tres equações vão determinar-nos as coordenadas rectangulares dos pontos singulares.

Podem ser satisfeitas conjuntamente por uma de quatro maneiras diversas:

1.ª — Sendo

$$u = 0, v = 0, w = 0.$$

Absurdo. Um plano não pode ser simultaneamente paralelo aos tres eixos coordenados.

2.<sup>a</sup>—Sendo

$$H = 0, H' = 0, H'' = 0.$$

Absurdo. Cahe-se nas relações antagonicas

$$u^2 + v^2 + w^2 = \frac{1}{c^2},$$

$$u^2 + v^2 + w^2 = \frac{1}{b^2}.$$

3.<sup>a</sup> — Sendo nullas duas das coordenadas  $u, v, w$ , e uma das quantidades  $H, H', H''$ , aquella que é factor da coordenada que não se annulla. Ex:

$$u = 0, v = 0, H'' = 0.$$

Absurdo. Acha-se para  $w$  o valor

$$w^2 = \frac{a^2 + b^2}{2 a^2 b^2},$$

$$x = 0, y = 0, z = 0.$$

Absurdo. Os pontos singulares não podem coincidir com o centro da superficie d'onda.

2.<sup>a</sup>—Sendo

$$K = 0, K' = 0, K'' = 0.$$

Absurdo. Cahe-se nas relações antagonicas

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = b^2,$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = c^2.$$

3.<sup>a</sup>—Sendo nullas duas das coordenadas  $x, y, z$ , e uma das quantidades  $K, K', K''$ , aquella que é factor da coordenada que não se annulla. Ex:

$$x = 0, y = 0, K'' = 0.$$

Absurdo. Acha-se para  $z$  o valor

$$z^2 = \frac{a^2 + b^2}{2}$$

contradictorio com o que ha pouco deduzimos directamente da equação da superficie d'on la.

4.<sup>a</sup>—Sendo nullas duas das quantidades  $H, H', H''$ , e uma das coordenadas  $u, v, w$ , aquella que fôr factor da terceira. Ex:

$$H = 0, H' = 0, w = 0.$$

Por exclusão adoptamos esta.

Teremos então para determinar as coordenadas dos planos tangentes singulares um dos tres grupos:

1. <sup>o</sup>	2. <sup>o</sup>	3. <sup>o</sup>
$H = 0$	$H = 0$	$H' = 0$
$H' = 0$	$H'' = 0$	$H'' = 0$
$w = 0$	$v = 0$	$u = 0$

Tomemos o segundo.

São-lhe equivalentes

$$v = 0,$$

contradictorio com o que ha pouco deduzimos directamente da equação da superficie d'onda.

4.<sup>a</sup>—Sendo nullas duas das quantidades  $K, K', K''$ , e uma das coordenadas  $x, y, z$ , aquella que fôr factor da terceira. Ex :

$$K = 0, K' = 0, z = 0.$$

Por exclusão adoptamos esta.

Teremos então para determinar as coordenadas dos pontos singulares um dos tres grupos :

1. <sup>o</sup>	2. <sup>o</sup>	3. <sup>o</sup>
$K = 0$	$K = 0$	$K' = 0$
$K' = 0$	$K'' = 0$	$K'' = 0$
$z = 0$	$y = 0$	$x = 0$

Tomemos o segundo.

São-lhe equivalentes

$$y = 0,$$

$$u^2b^2c^2 + w^2a^2b^2 + b^2c^2(u^2 + w^2) \\ - (b^2 + c^2) = 0,$$

$$u^2b^2c^2 + w^2a^2b^2 + a^2b^2(u^2 + w^2) \\ - (a^2 + b^2) = 0.$$

Subtraindo as duas ultimas equações membro a membro, antes e depois de multiplicada a primeira por  $a^2$  e a segunda por  $c^2$ , podemos substituir-lhes

$$v = 0,$$

$$b^2(u^2 + w^2) - 1 = 0,$$

$$u^2c^2 + w^2a^2 - 1 = 0.$$

Estas equações mostram-nos:

1.º — que os planos tangentes singulares são parallellos ao eixo dos  $y$ ;

2.º — que são tangentes ao circulo e á ellipse da secção principal  $xz$ .

As suas coordenadas são :

$$a^2x^2 + c^2z^2 + a^2(r^2 - b^2 - c^2) = 0,$$

$$a^2x^2 + c^2z^2 + c^2(r^2 - a^2 - b^2) = 0.$$

Subtraindo as duas ultimas equações membro a membro, antes e depois de dividir a primeira por  $a^2$  e a segunda por  $c^2$ , podemos substituir-lhes

$$y = 0,$$

$$x^2 + z^2 = b^2,$$

$$a^2x^2 + c^2z^2 = a^2c^2.$$

Estas equações mostram-nos:

1.º — que os pontos singulares estão na secção principal  $xz$ ;

2.º — que coincidem com as intersecções do circulo e da ellipse n'essa secção.

As suas coordenadas são :

$$u' = \pm \frac{1}{b} \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{c^2 - a^2}},$$

$$v' = 0,$$

$$w' = \pm \frac{1}{b} \sqrt{\frac{c^2 - b^2}{c^2 - a^2}}.$$

Se em vez de partirmos do primeiro grupo, lançassemos mão de qualquer dos outros dois, procedendo analogamente, determinaríamos para planos tangentes singulares, os que, sendo perpendiculares às secções principaes  $xy$  ou  $yz$ , fossem tangentes simultaneamente ao circulo e á ellipse d'uma ou d'outra d'essas secções.

Mas como nas secções principaes  $xy$  e  $yz$  o circulo e a ellipse não se encontram, os planos tangentes determinados pelos grupos 1.º e 3.º são imaginarios.

Os unicos planos tangentes singulares da superficie d'onda são pois os determinados pelo 2.º grupo.

Construamos agora a equa-

$$x' = \pm c \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{c^2 - a^2}},$$

$$y' = 0,$$

$$z' = \pm a \sqrt{\frac{c^2 - b^2}{c^2 - a^2}}.$$

Se em vez de partirmos do primeiro grupo, lançassemos mão de qualquer dos outros dois, procedendo analogamente, determinaríamos para pontos singulares, os que, estando situados na secção principal  $xy$  ou  $yz$ , coincidissem com as intersecções do circulo e da ellipse d'uma ou d'outra d'essas secções.

Mas como nas secções principaes  $xy$  e  $yz$  o circulo e a ellipse não se encontram, os pontos singulares determinados pelos grupos 1.º e 3.º são imaginarios.

Os unicos pontos singulares da superficie d'onda são pois os determinados pelo 2.º grupo.

Construamos agora a equa-

ção (19) da curva de contacto.

Calculando para isso as diferentes derivadas  $\frac{d^2F}{du'^2}, \frac{d^2F}{dv'^2}, \dots$  e substituindo por  $u', v', w'$  os seus valores, achamos

$$\frac{d^2F}{du'^2} = 8 \frac{c^2(b^2 - a^2)}{c^2 - a^2},$$

$$\frac{d^2F}{dv'^2} = -2 \frac{(c^2 - b^2)(b^2 - a^2)}{b^2},$$

$$\frac{d^2F}{dw'^2} = 8 \frac{a^2(c^2 - b^2)}{c^2 - a^2},$$

$$\frac{d^2F}{du'dv'} = 0,$$

$$\frac{d^2F}{du'dw'} = \pm 4 \frac{(a^2 + c^2)}{c^2 - a^2}$$

$$\sqrt{(c^2 - b^2)(b^2 - a^2)},$$

$$\frac{d^2F}{dv'dw'} = 0.$$

A equação da curva de contacto será pois

ção (18) do cone tangente.

Calculando para isso as diferentes derivadas  $\frac{d^2f}{dx'^2}, \frac{d^2f}{dy'^2}, \dots$  e substituindo por  $x', y', z'$  os seus valores, achamos

$$\frac{d^2f}{dx'^2} = 8 a^2 c^2 \frac{b^2 - a^2}{c^2 - a^2},$$

$$\frac{d^2f}{dy'^2} = -2 (b^2 - a^2) (c^2 - b^2),$$

$$\frac{d^2f}{dz'^2} = 8 a^2 c^2 \frac{c^2 - b^2}{c^2 - a^2},$$

$$\frac{d^2f}{dx'dy'} = 0,$$

$$\frac{d^2f}{dx'dz'} = \pm 4 ac (a^2 + c^2)$$

$$\sqrt{\frac{(b^2 - a^2)(c^2 - b^2)}{c^2 - a^2}},$$

$$\frac{d^2f}{dy'dz'} = 0.$$

A equação do cone tangente será pois

$$\begin{array}{l}
 4b^2c^2(b^2-a^2)(u-u')^2 \\
 -(c^2-b^2)(b^2-a^2)(c^2-a^2)(v-v')^2 \\
 +4a^2b^2(c^2-b^2)(w-w')^2 \\
 +4b^2(a^2+c^2)\sqrt{(c^2-b^2)(b^2-a^2)} \\
 (u-u')(w-w')=0.
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{l}
 4a^2c^2(b^2-a^2)(x-x')^2 \\
 -(c^2-a^2)(b^2-a^2)(c^2-b^2)(y-y')^2 \\
 +4a^2c^2(c^2-b^2)(z-z')^2 \\
 +4ac(a^2+c^2)\sqrt{(b^2-a^2)(c^2-b^2)} \\
 (x-x')(z-z')=0.
 \end{array}$$

Indaguemos a natureza d'esta curva.

Para isso projectemol-a sobre o plano dos  $xy$  (fig. 11.<sup>a</sup>); a equação da projecção n'esse plano será

$$\begin{array}{l}
 4b^2c^2(b^2-a^2)(u-u')^2 \\
 -(b^2-a^2)(c^2-a^2)(c^2-b^2)(u-u')^2 \\
 +4b^2a^2(c^2-b^2)w'^2 \\
 -4b^2(a^2+c^2)\sqrt{(b^2-a^2)(c^2-b^2)} \\
 \cdot (u-u')w'=0 \dots (20),
 \end{array}$$

que representa evidentemente a equação d'uma ellipse, cujo

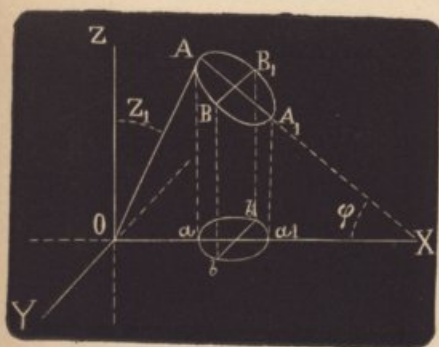
Indaguemos as particularidades d'este cone.

A sua equação representa um cone do segundo gráu de que uma das secções principaes coincide com o plano dos  $xz$ .

A folha externa d'este cone toca pela sua convexidade a superficie d'onda no ponto singular, alargando-se para o exterior como o pavilhão d'um porta voz; a outra, ao contrario, é tangente á superficie d'onda pela sua concavidade, envolvendo por assim dizer a parte interna d'esta superficie.

A secção do plano  $xz$  na superficie d'onda e nos quatro

eixo  $aa_1$  coincide com o eixo dos  $x$ .

Fig. 11.<sup>a</sup>

A curva de contacto será pois também uma ellipse.

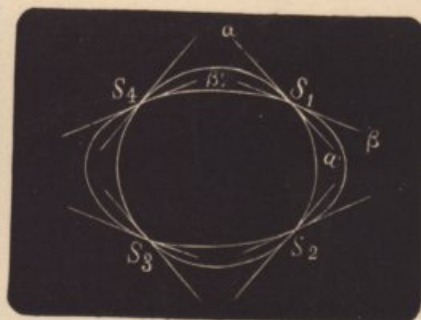
Um dos seus eixos,  $AA_1$ , coincide com a tangente commum ao circulo e á ellipse na secção principal  $xz$ , e forma com  $aa_1$  o angulo

$$\varphi = Z_1.$$

O outro,  $BB_1$ , é igual á sua projecção  $bb_1$ , em consequencia da perpendicularidade do plano da curva de contacto sobre o plano dos  $xz$ .

Podemos portanto estabelecer entre os eixos da curva de

cones tangentes acha-se representada na fig. 13.<sup>a</sup>

Fig. 13.<sup>a</sup>

Um plano qualquer tirado por um ponto singular corta a superficie d'onda segundo uma curva na qual esse ponto é também singular.

A natureza da singularidade depende da posição do plano secante com relação ao cone de contacto. Assim o ponto singular será duplo, de reversão ou isolado, conforme o plano secante fôr interior, tangente ou exterior ao cone de contacto.

A reciproca é verdadeira.

A consideração do segundo d'estes cazos levou Plücker á determinação por um processo



contacto e as suas projecções as indirecto da equação do cone  
relações tangente.

Com effeito, seja

$$BB_1 = bb_1, \quad \left. \begin{aligned} \Lambda A_1 &= \frac{aa_1}{\cos Z_1} = \frac{aa_1}{\sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}} \end{aligned} \right\} \dots (21) \quad A(x-x') + B(y-y') + C(z-z') = 0$$

que nos permitem conhecer  $\Lambda A_1$  e  $BB_1$  em função de  $aa_1$  e  $bb_1$ .

Determina-se  $aa_1$  fazendo  $v=0$  em (20) e tomando a differença dos valores reciprocos das raizes  $u_1$  e  $u_2$  da equação resultante, visto que essas raizes são os valores reciprocos das distancias  $Oa$  e  $Oa_1$  dos vertices da ellipse á origem. Effectuando as operações indicadas, e substituindo por  $u', v', w'$  os seus valores, acha-se facilmente

$$aa_1 = \frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2} = \\ = \frac{1}{b} (c^2 - b^2) \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{c^2 - a^2}}$$

a equação d'um plano tirado pelo ponto singular  $(x', y', z')$ ; a intersecção d'este plano com a superficie d'onda projecta-se no plano  $xy$  segundo uma curva, cuja equação se pode representar por

$$f\left(x, y, \frac{Ax + By - Ax' - By' - Cz'}{C}\right) = 0$$

Se o ponto singular fôr de reversão, a sua projecção será um ponto da mesma natureza, e por consequente teremos, n'esse caso, a equação de condição

$$\left(\frac{d^2f}{dx'dy'}\right)^2 - \frac{d^2f}{dx'^2} \frac{d^2f}{dy'^2} = 0.$$

Para determinar  $bb_1$  basta, por ser paralelo ao eixo dos  $y$ , fazer  $u = 0$  em (20), resolver a equação resultante em ordem a  $v$ , e tomar o dobro do valor reciproco d'uma das raizes, que n'este caso são eguaes. Feito isto e substituindo por  $u'$ ,  $v'$ ,  $w'$  os seus valores, obtem-se

$$bb_1 = \frac{2}{v} = \frac{1}{b} \sqrt{(b^2 - a^2)(c^2 - b^2)}.$$

Introduzindo estes valores em (21), vem

$$AA_1 = \frac{1}{b} \sqrt{(b^2 - a^2)(c^2 - b^2)},$$

$$BB_1 = \frac{1}{b} \sqrt{(b^2 - a^2)(c^2 - b^2)};$$

d'onde

$$AA_1 = BB_1.$$

Logo: *As curvas de contacto são circulos, cujo raio é egual*

Mas, para que isto se dê, é necessario que o plano secante seja tangente ao cone de contacto.

Portanto, se considerarmos A, B, C como variaveis, esta ultima equação representará a envolvente de todos os planos tangentes no ponto singular.

Effectuando pois as derivações necessarias, e substituindo por  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  os seus valores, achamos para a equação do cone de contacto

$$(c^2 - b^2)A^2 + (c^2 - a^2)B^2 + (b^2 - a^2)C^2 + \frac{a^2 + c^2}{ac} \sqrt{(b^2 - a^2)(c^2 - b^2)}AC = 0.$$

Se do centro da superficie d'onda baixarmos perpendiculares sobre as geratrizes dos cones de contacto, construiremos dois cones suplementares dos primeiros, que se cruzam no vertice commum.

a metade da porção  $AA_1$  da tangente commum na secção principal  $xz$ , comprehendida entre os pontos de contacto.

Em resumo, pois, podemos concluir, que a um plano tangente singular da superficie d'onda corresponde uma infinidade de raios tirados do centro para cada um dos pontos da curva de contacto.

Estes raios constituem um cone do segundo grau de base circular. Uma das suas geratrizes, a que coincide com a normal á secção circular do ellipsoide inverso parallela á curva de contacto, é perpendicular á base do cone.

Para determinarmos a polarisação de cada um dos raios que constituem este cone, temos, segundo a regra estabelecida, de os projectar sobre o plano tangente á superficie d'onda, isto é, sobre o plano da curva de contacto.

A sua equação deduz-se immediatamente da precedente, substituindo por A e B as relações

$$A = \frac{Cx}{z}, \quad B = \frac{Cy}{z},$$

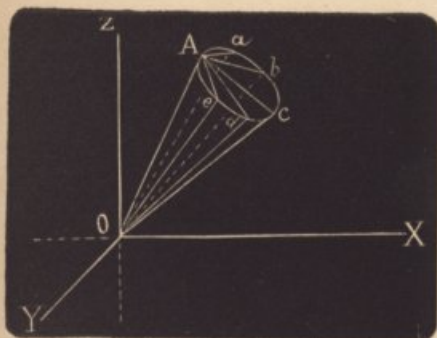
em que  $x, y, z$  representam as coordenadas correntes do novo cone.

Obteriamos assim

$$(b^2 - a^2)z^2 + (c^2 - a^2)y^2 + (c^2 - b^2)x^2 + \frac{a^2 + c^2}{ac} \sqrt{(b^2 - a^2)(c^2 - b^2)}xz = 0.$$

A polarisação das ondas planas normaes ás geratrizes dos cones supplementares, isto é, tangentes aos cones de contacto, determina-se, como sabemos, projectando sobre cada uma

Assim se designarmos (fig. 12.<sup>a</sup>) por A o ponto em que a

Fig. 12.<sup>a</sup>

geratriz normal encontra a curva de contacto, as direcções das vibrações nas geratrizes  $Oa, Ob, Oc, \dots$  serão paralelas ás cordas  $Aa, Ab, Ac, \dots$  tiradas do ponto A para os diferentes pontos da circumferencia.

d'ellas o raio vector, tirado para o ponto singular.

Mas por uma demonstração simples, de que prescindimos, se provaria que a curva de intersecção de qualquer dos cones suplementares com o cone de contacto respectivo é um circulo, cujo plano, perpendicular á secção principal  $xz$ , a corta segundo a tangente á ellipse no ponto singular.

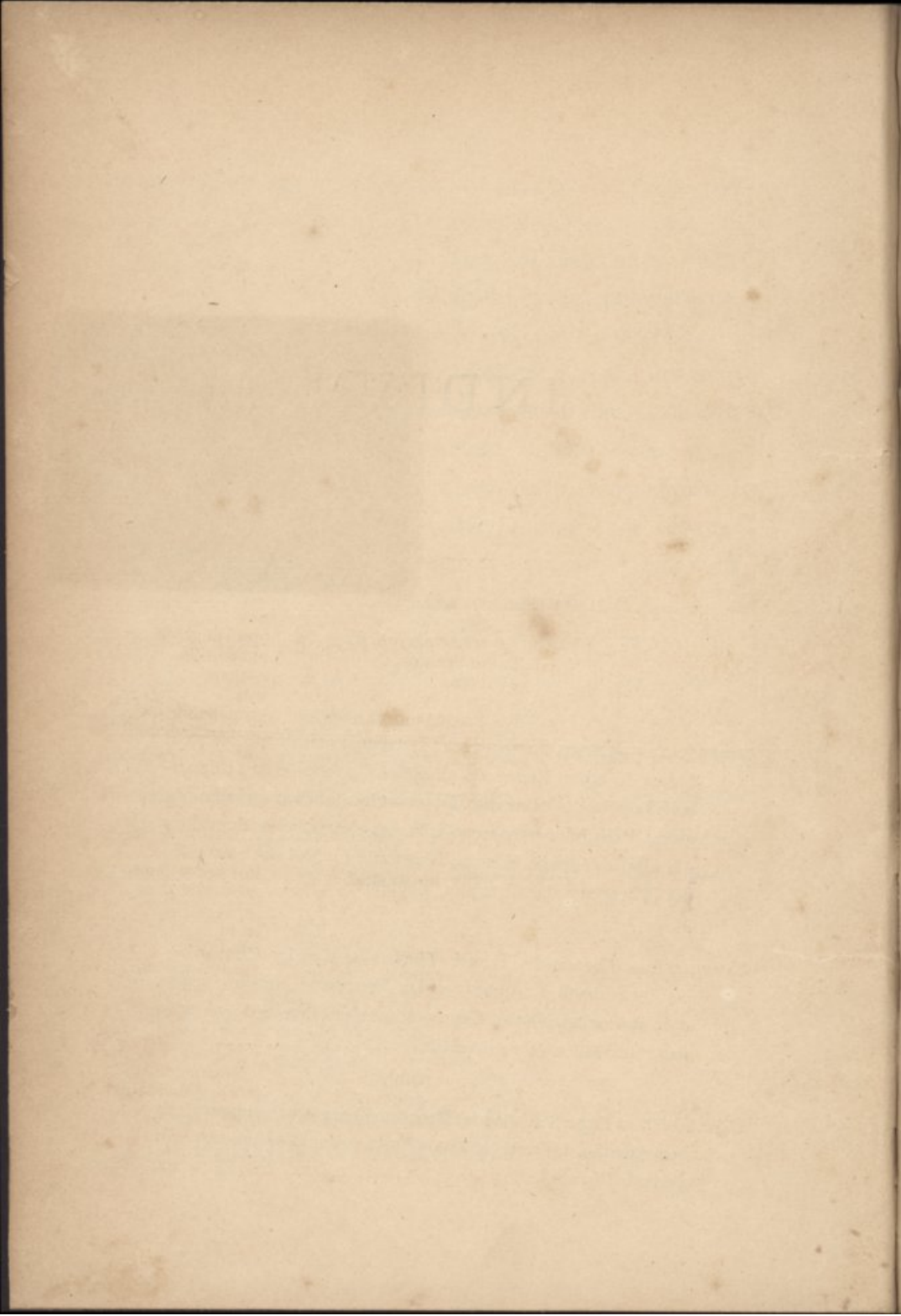
Por conseguinte, se n'esse circulo tirarmos cordas do ponto singular para cada um dos pontos da circumferencia, ellas representarão as direcções das vibrações das ondas planas tangentes ao cone do contacto.

O estudo da refração simples, dupla e conica seria uma importante applicação do trabalho que deixamos feito.

# INDICE

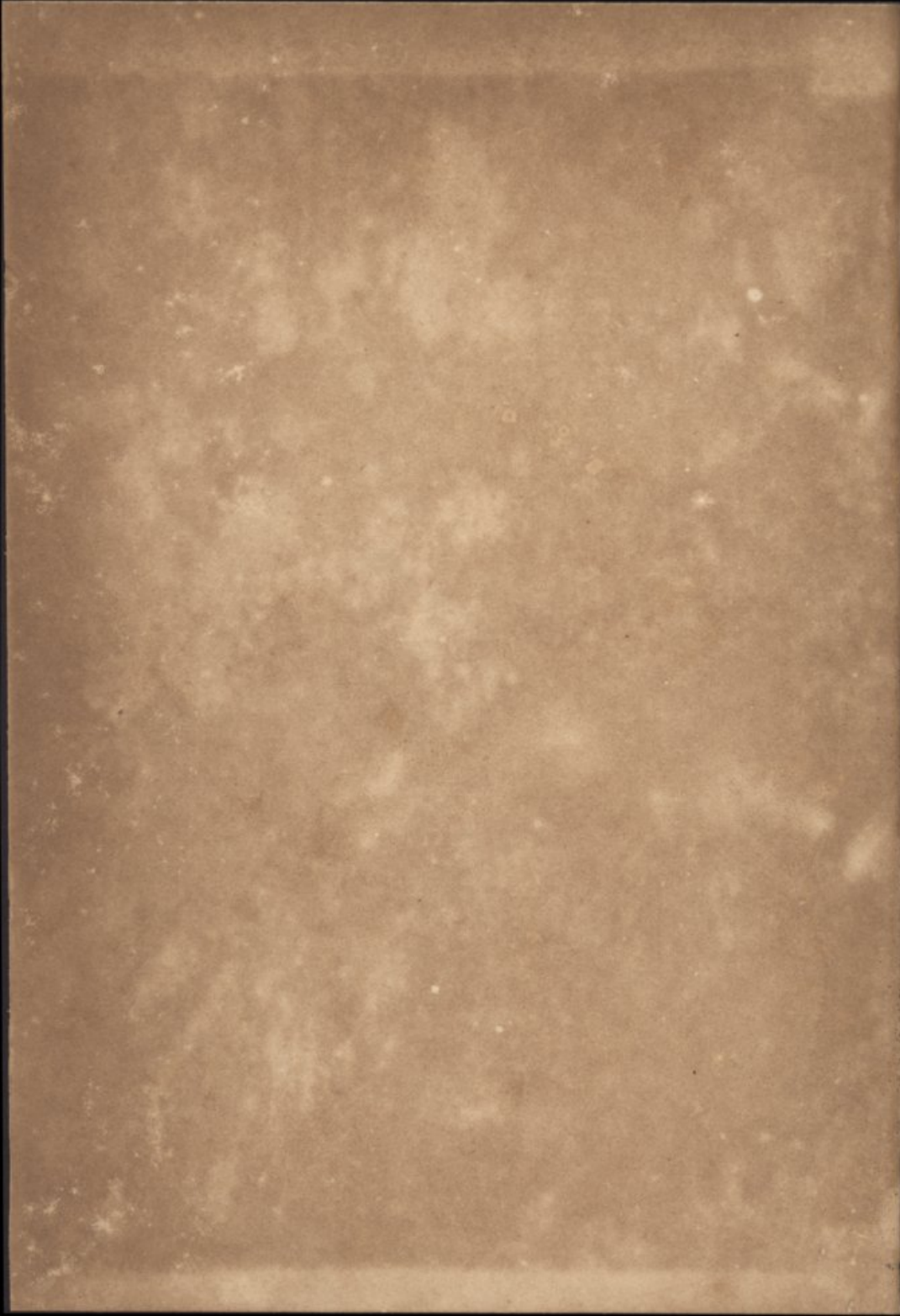
---

	PAG.
INTRODUÇÃO. — Meios homogêneos : isotropos, anisotropos. Noções acerca do ether. Expressão analytica da força elastica desenvolvida pelo deslocamento d'uma molecula n'um meio homogêneo. Principio da sobreposição das elasticidades. Superficie das elasticidades de Fresnel. Ellipsoide inverso das elasticidades. Theorema das direcções singulares.....	27
CAPITULO I. — Theoria de Fresnel. Theoria de Cauchy. Concordancia aproximada das duas theorias. Processos para a construção das ondas planas. Expressão analytica da lei de variação das velocidades de propagação.....	78
CAPITULO II. — Superficie d'onda. Processos para a determinação da sua equação. Polarisação das vibrações em cada um dos seus pontos. Discussão.....	124

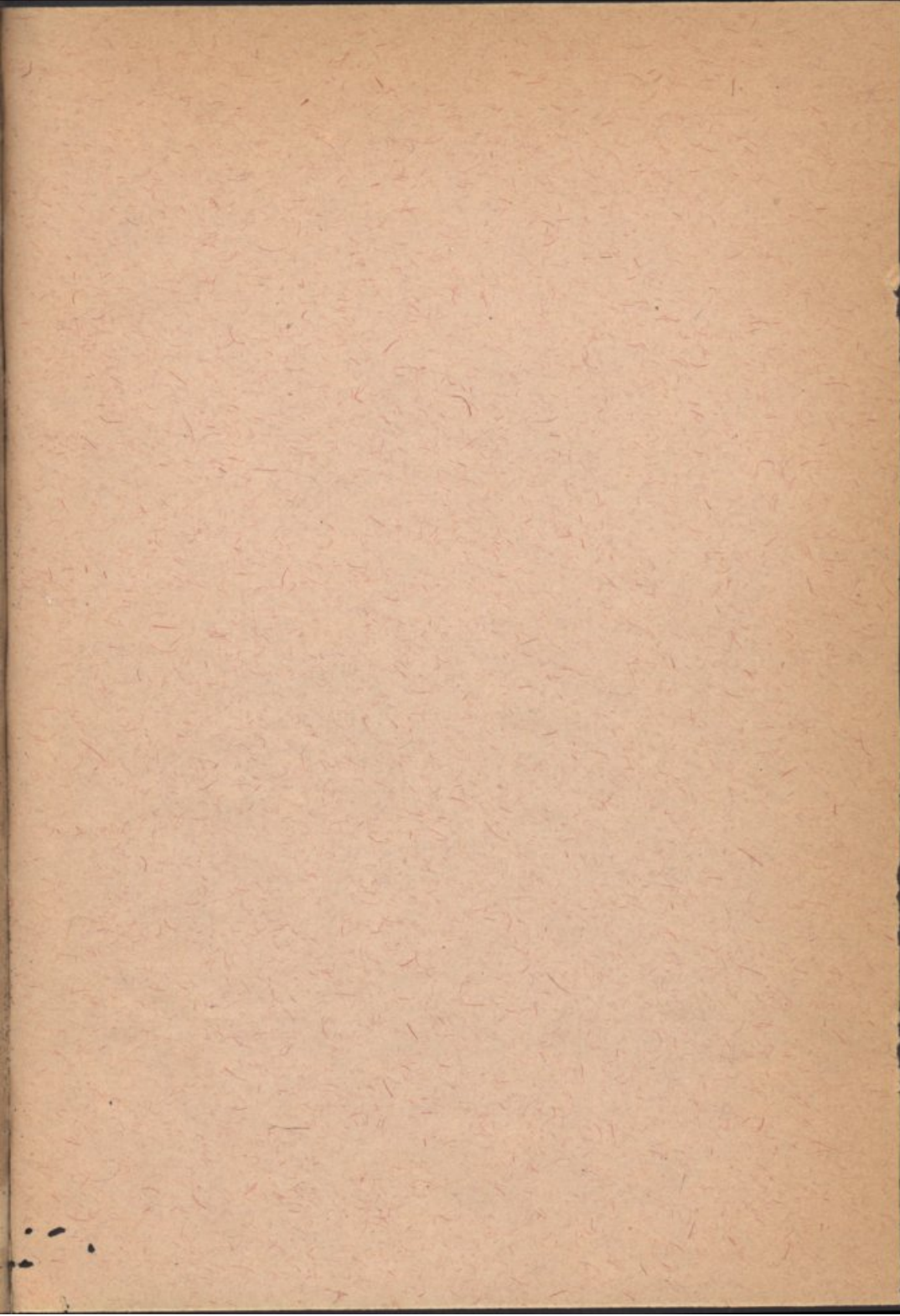


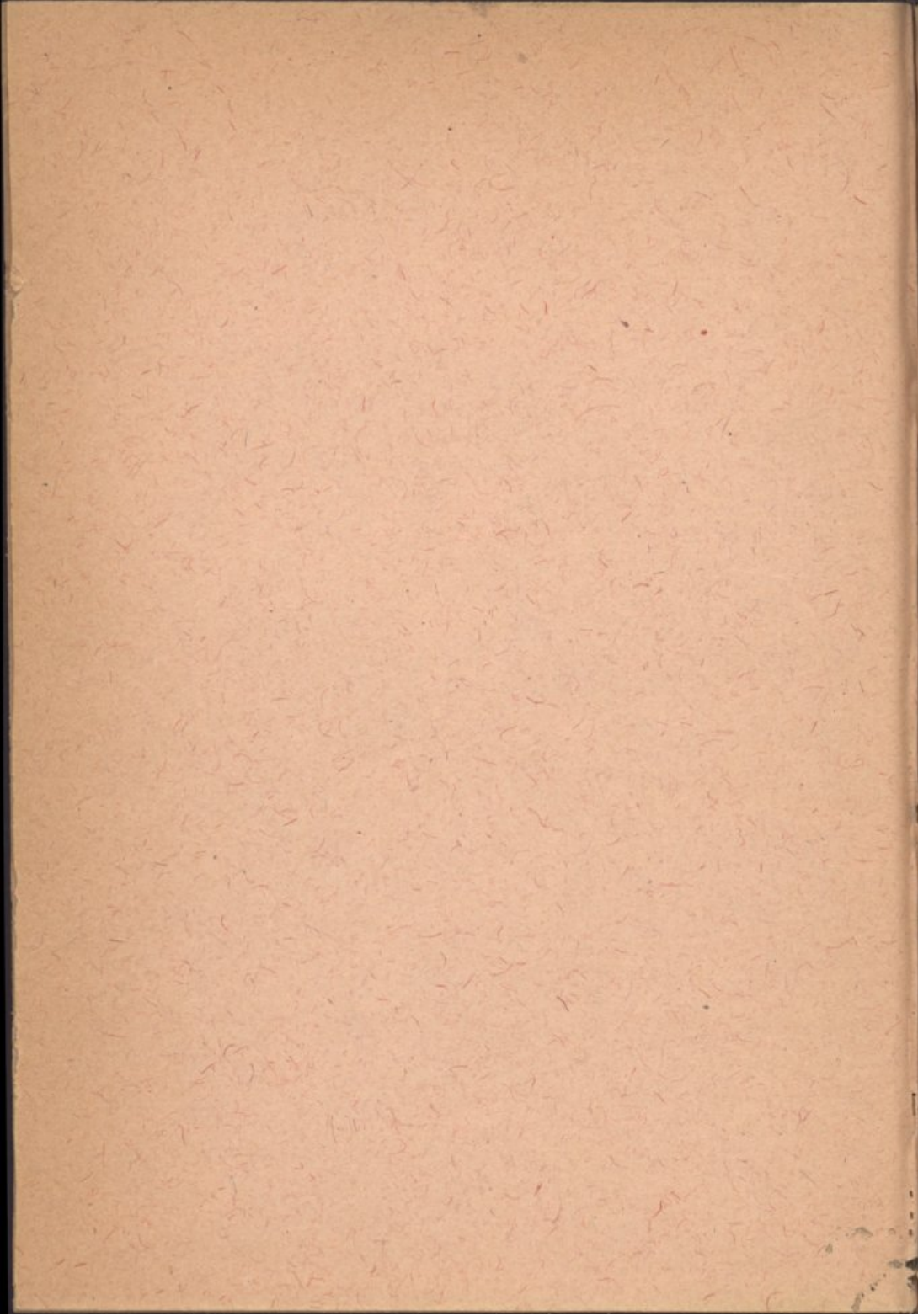
## ERRATAS

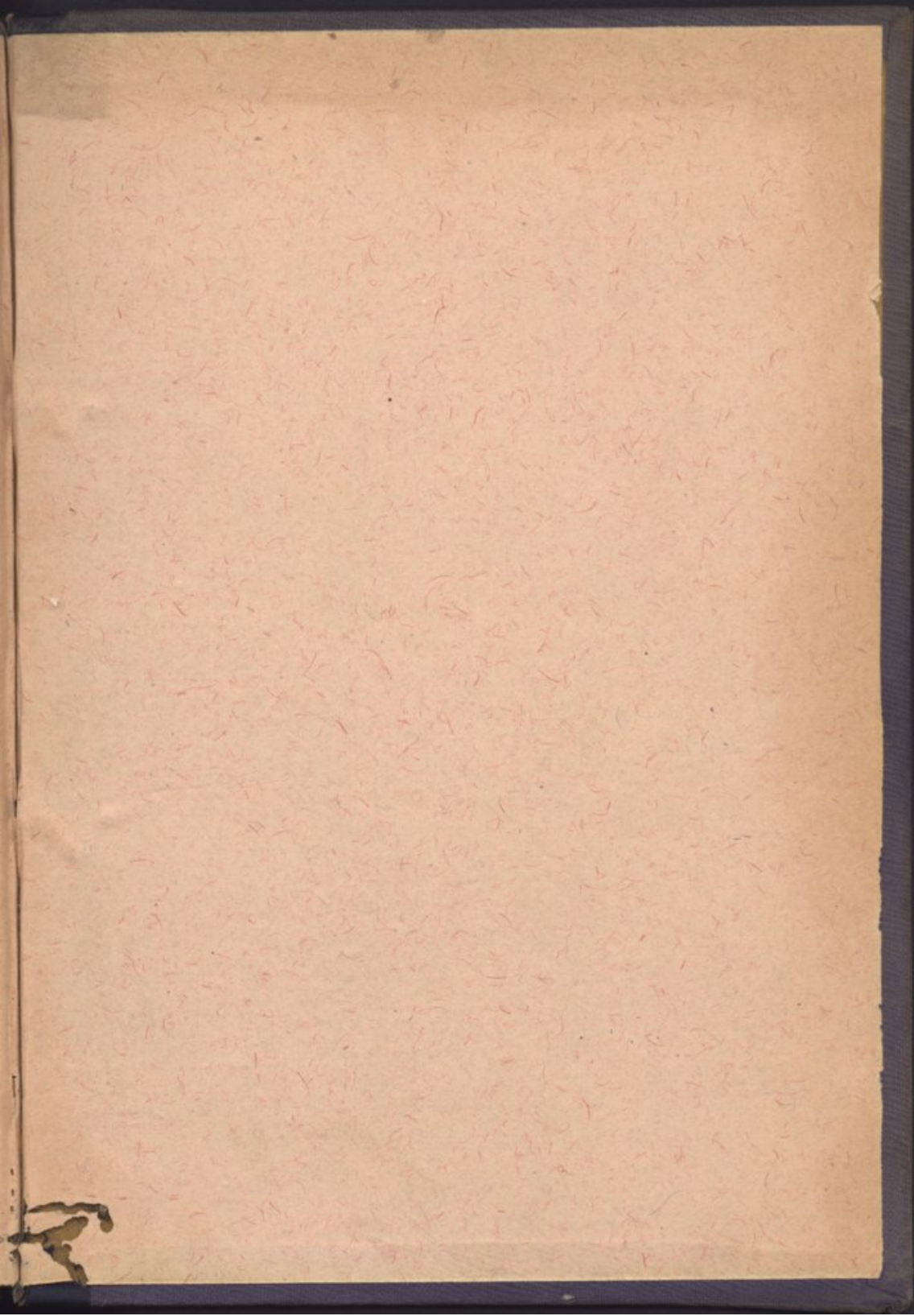
<i>Pag.</i>	<i>Linhas</i>	<i>Erros</i>	<i>Emendas</i>
20	13	Se,	Se
30	19	birefringente	birefrangente
33	11	indicamos	indicámos
35	25	e sua	e a sua
36	4	trez	tres
36	12	propagando se	propagando-se
36	22	da elasticidade	de elasticidade
38	6	fig. (1. <sup>a</sup> )	(fig. 1. <sup>a</sup> )
		$\frac{\delta x + \delta \eta}{\Delta}$	$\frac{\delta y + \delta \eta}{\Delta}$
40	18	$\frac{\delta x + \delta \zeta}{\Delta}$	$\frac{\delta z + \delta \zeta}{\Delta}$
41	1	$\frac{\delta x + \delta \zeta}{\Delta}$	$\frac{\delta z + \delta \zeta}{\Delta}$
44	9	Por outro lado	Por outro lado,
49	5	enunciamos	enunciámos
57	3	$h^2 + s^2$ )	$(h^2 + s^2)$
57	12	tem	teem
57	15	condicção	condição
75	11	ou <i>segunda</i>	ou <i>de segunda</i>
76	18	$\cos(\varphi_1 - \varphi_2)$ ,	$\cos(\varphi_1 - \varphi_2)$
79	11	ja	já
		$rdz$	$rdr$
85	3	$\overline{dcosl}$	$\overline{dcosl}$
85	7	enunciamos	enunciámos
102	2 e 3	correspondentes	correspondentes
113	8	$z^2$	$r^2$

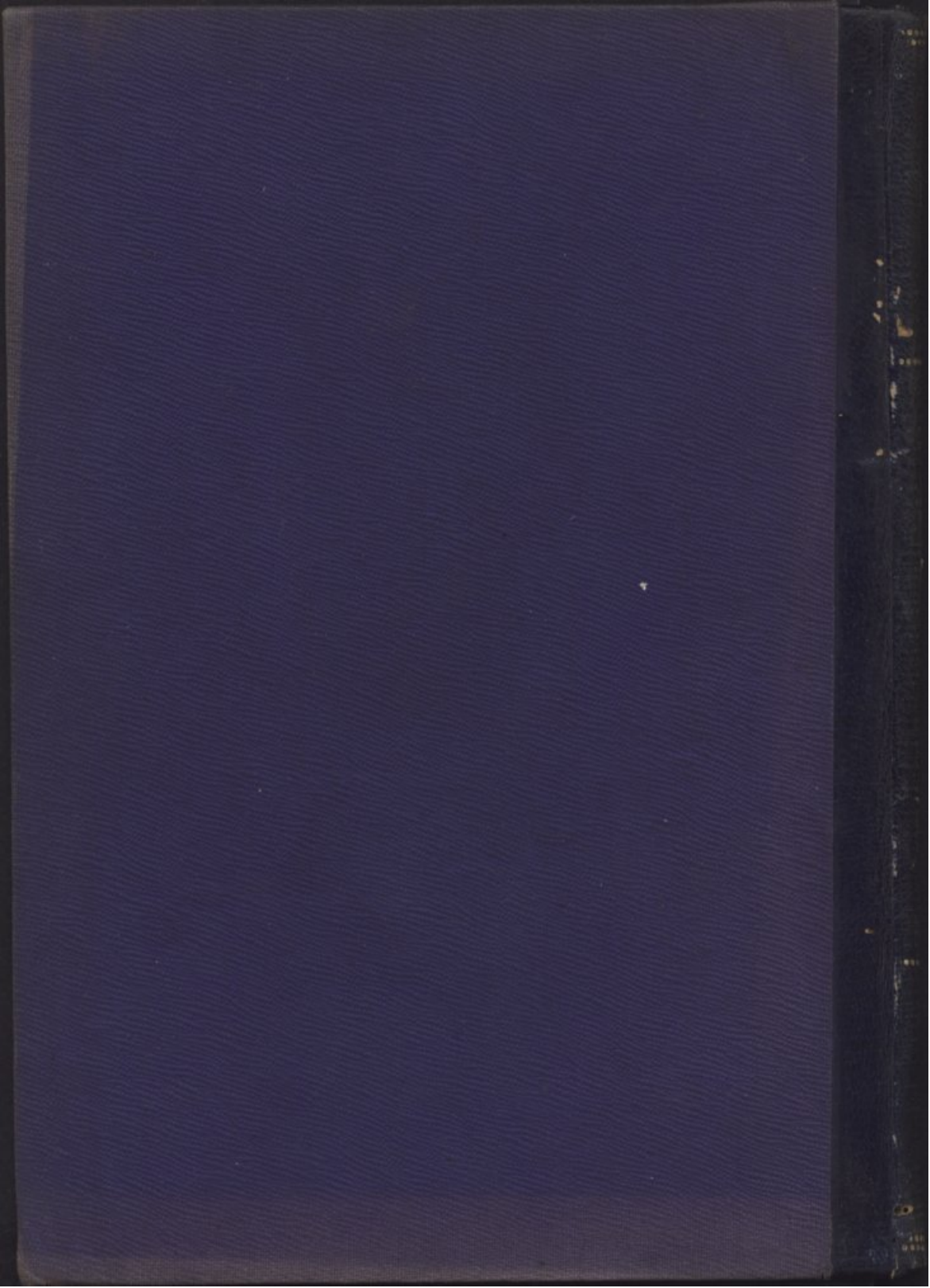












18778

CARRIDO - DISSERTACION

IN AGRICULTURA Y FARMACOLOGIA.