
ut
videam
ANO
1926 X 1936
DA REVOLUÇÃO
NACIONAL

INTEGRAES E FUNCÇÕES ELLIPTICAS

DISSERTAÇÃO INAUGURAL

PARA O ACTO

DE

CONCLUSÕES MAGNAS

NA

FACULDADE DE MATHEMATICA

POR

ANTONIO ZEFERINO CANDIDO DA PIEDADE

L'analyse mathématique est la véritable base rationnelle du système entier de nos connaissances positives. Elle constitue la primière et la plus parfaite de toutes les sciences fondamentales.

A. COMTE — *Philosophie positive.*

COIMBRA
Imprensa da Universidade
1875

Rien n'est plus important ni plus digne d'intéret que l'étude attentive des procédés par lesquels, en partant des notions antérieurement acquises, on parvient à la connaissance d'une fonction nouvelle qui devient l'origine d'un nouvel ordre de notions analytiques.

HERMITE — *Note sur la théorie des fonctions elliptiques.*

AO

ILLUSTRISSIMO E EXCELLENTISSIMO SENHOR

FRANCISCO LOPES GAVICHO TAVARES DE CARVALHO

Bacharel formado em Direito pela Universidade de Coimbra,
Moço Fidalgo com exercicio no Paço,
Antigo Deputado da Nação,
Socio Provincial da Academia Real das Sciencias,
Socio Correspondente do Instituto Vasco da Gama,
e do Instituto de Coimbra

EM TESTIMUNHO DE MUITA ESTIMA, CONSIDERAÇÃO,
AMIZADE, E ETERNA GRATIDÃO

.... nada ha mais doce na vida litteraria do que associar á pouca ou muita gloria, que possa ter um livro, os nomes de pessoas queridas.

Lopes de Mendonça.

Off.

O auctor.

DISSERTAÇÃO INAUGURAL

Integraes e funcções ellipticas

PREFACIO

O calculo integral, ainda que mostre nas suas numerosas applicações a importancia e vastidão da analyse de que faz parte, apreciado na sua concepção verdadeiramente philosophica, produz no espirito, com o conhecimento do seu estado de atraso, a convicção da impossibilidade da sua organisação completa.

Na constituição racional das suas partes principaes faz-se depender, em theoria, a integração de toda e qualquer expressão differencial, da integração das funcções explicitas de primeira ordem e contendo uma só variavel independente. Mas nem meios se conhecem na maior parte dos casos para a reducção a este problema fundamental, nem o problema das *quadraturas* se sabe resolver na maior parte dos casos tambem.

Afastando do nosso espirito a incredulidade sobre o valor do esforço da intelligencia humana, parece-nos comtudo chimerica a esperança de um processo unico de integração, applicavel a todos os casos propostos. Com Lagrange consideramos este problema no numero d'aquelles dos quaes se não póde esperar solução geral.

Antes que tal resultado se conseguisse, o esforço empregado com esse fim teria de certo descoberto fontes mais latas, meios mais geraes de combinação e derivação de quantidades, que fariam mudar o rumo das explorações.

A mesma historia da sciencia em todos os seus ramos, e especificadamente na propria analyse mathematica, auctorisa este pensamento.

O atraso porém do calculo integral, bem que digno de sentir-se, não produz motivo de descredito para a actividade humana, nem auctorisa juizo desfavoravel para a analyse transcendente de que faz parte; bem pelo contrario, origina o elogio de uma e de outra: da primeira, attentando na multiplicidade das suas applicações; da segunda, creando por ahi mesmo a ideia do grande valor dos conhecimentos abstractos, que, poucos que sejam, multiplicam prodigiosamente as applicações ao mundo concreto.

Pondo de parte o importante, como difficil e atrasado problema da reducção de todos os casos ao das quadraturas, vejamos o estado em que este ultimo se encontra.

Decompõe-se naturalmente a questão em duas, attendendo ás diversas fórmas da funcção differencial, segundo se tracta das *funcções algebricas* ou das *funcções transcendentes*. A segunda acha-se n'um atraso prodigioso, reduzindo-se tudo quanto se sabe a meros artificios de calculo, as mais das vezes incoherentes ou injustificados, nunca unidos por um laço que os uniformise, e muito variados em numero, porque são muito limitados nas suas applicações.

A primeira, adiantada no que respeita á integração das *funcções racionaes,* que se póde julgar completa, acha-se comtudo n'um lastimoso atraso na outra e de certo mais importante parte, a das *funcções irracionaes.*

Os integraes d'estas expressões apenas se sabem determinar n'um pequeno numero de casos, uns em que essas expressões se sabem converter n'outras racionaes, outros em que por meio de reducções, embora complicadas, se transformam em expressões ainda irracionaes, mas cujos integraes se podem obter.

É a esta classe que pertencem as funcções e integraes ellipticos cujo estudo escolhemos para o nosso presente trabalho. Resultam estas expressões da reducção de um integral, que contém na expressão differencial um polynomio do quarto gráu debaixo de um radical quadrado. N'essa reducção obtem-se como seus residuos, alem de integraes que se conhecem, outros que se não sabem reduzir já, e que tomaram o nome de integraes ellipticos pela razão de depender de um d'elles a rectificação da ellipse.

A integração das expressões irracionaes tem sido objecto de importantes trabalhos. Abel e Liouville têm enriquecido a sciencia com methodos já para conhecer os casos em que taes expressões admittem integral algebrico ou transcendente, já para determinar esse integral quando tal determinação seja possivel.

D'estes casos, immensamente complicados, merecem especial attenção pelas suas numerosas applicações aos problemas de geometria, mecanica e theoria dos numeros, aquelles em que o radical é do segundo gráu.

Legendre foi, como se sabe, o primeiro que emprehendeu o estudo d'estas expressões no caso em que o polynomio contido pelo radical é do terceiro ou quarto gráu. Foi elle o primeiro em averiguar que as expressões d'esta especie se não podiam reduzir ás formas normaes conhecidas. Por isso, depois da sua reducção a tres fórmas simples, formou tábuas para o calculo numerico d'estas funcções, a que chamou *funcções ellipticas.*

Mais tarde Abel e Jacobi, aproveitando e analysando os trabalhos de Legendre, deram um novo e valiosissimo impulso ao estudo d'este tão importante ramo de analyse.

A consideração das funcções inversas aos integraes de Legendre mostrou a possibilidade de formar a sua theoria, analoga á das funcções trigonometricas, e o estudo d'estas duas especies de funcções foi emprehendido segundo as indicações de Abel.

Attentando na importancia d'estas funcções, é lastimoso o abandono que ellas têm merecido, especialmente dos geometras francezes.

A *Théorie des fonctions doublement périodiques* de Mrs. Briot e Bouquet, obra dirigida pelas indicações de Liouville, é quanto attesta o esforço dos geometras da França a este respeito; bem pelo contrario do que se tem feito na Allemanha, onde constantemente se estão publicando importantissimos tractados e memorias sobre o assumpto.

A importancia do estudo das funcções ellipticas seja Hermite que por nós a proclame. *Mais ce long travail,* diz este geometra, *a été feconde pour la science; c'est comme conséquences de ces recherches que nous ont été acquises plusieurs notions analytiques entièrement fondamentales, et en particulier ce que nous savons sur le mode même d'existence des fonctions intégrales.* E n'outro logar: *un autre résultat encore consiste dans ce sens plus complet et plus apro-*

fondi, que l'ont a été conduit à attacher en analyse à l'expression même de fonction, en reconnaissant et en caractérisant entre les diverses modes de dépendance de deux quantités des distinctions essentielles et dont les recherches auxquelles a donné lieu la théorie des fonctions elliptiques ont montré toute l'importance.

Ahi fica a razão da nossa escolha, motivada principalmente na importancia do assumpto, e no manifesto desamor por elle.

Dividiremos o nosso trabalho em duas partes. Na primeira estudaremos os *integraes ellipticos*, servindo-nos de norma os notaveis trabalhos de Legendre. Na segunda estudaremos as *funcções ellipticas*, servindo-nos de criterio principal os trabalhos de Abel.

Estas duas partes são precedidas de uma introducção, onde expomos a theoria das funcções de variavel imaginaria e dos integraes definidos d'estas funcções entre limites imaginarios, estudo cujo conhecimento se torna essencial na segunda parte.

INTRODUCÇÃO

RESUMO. — Representação das variaveis imaginarias, e das funcções d'estas variaveis. — Suas propriedades e distincções. — Integraes definidos contendo funcções d'aquella natureza e tomados entre limites imaginarios.

Uma variavel imaginaria da fórma $z = x + i\,y$, em que x e y representam variaveis reaes, e i o symbolo $\sqrt{-1}$, não póde, como qualquer variavel real, ser representada geometricamente por um ponto movendo-se sobre uma recta fixa, e na qual se tenha tomado para origem um ponto fixo tambem.

Cauchy propoz para taes variaveis uma elegante representação. Se num plano fixo se traçarem dois eixos coordenados, e uma curva, cujas coordenadas correntes sejam os diversos valores attribuidos a x e y, a cada par de valores d'estas variaves corresponderá um ponto d'essa curva, e por isso o ponto gerador d'ella representará a variavel complexa em questão.

D'esta fórma: cada ponto do eixo das abscissas é representado por um valor real de z correspondente a $y = 0$; e cada ponto do eixo das ordenadas por um valor imaginario da mesma variavel correspondente a $x = 0$.

Se, conforme este modo de representação, exprimissemos x e y em coordenadas polares, cujo raio e angulo vector fossem representados pelas letras ρ e φ, teriamos

$$z = \rho\,(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi);$$

por onde concluiriamos que a variavel imaginaria repre-

..

senta uma recta de grandeza e direcção determinadas, tirada pela origem para o ponto que na curva corresponde aos valores particulares dados a x e y.

Como se vê, a variação de z é completamente indeterminada; mas se x e y se fizerem variar de uma maneira continua, o ponto que representa z, descreverá uma curva de uma maneira continua tambem, curva que será determinada pela lei segundo a qual se fez variar x e y.

D'aqui se conclue uma importante propriedade das variaveis imaginarias, e que muito as distingue das variaveis reaes. Ao contrario d'estas, as variaveis imaginarias podem passar de um a outro valor determinado por uma infinidade de caminhos, correspondentes á infinidade de leis segundo as quaes se póde estabelecer a variação de x e de y.

Uma funcção de variavel imaginaria da fórma

$$F(z) = F(x + iy),$$

é sempre reductivel, depois de effectuadas as operações indicadas, a uma quantidade imaginaria da mesma fórma que a variavel:

$$F(z) = F(x + iy) = \varphi(x, y) + i\,\psi(x, y) \dots \quad (1)$$

sendo φ e ψ funcções reaes de x e y e de constantes tambem reaes.

A natureza porém da variavel não determina a natureza da funcção. Ao contrario: assim como póde ser imaginaria uma funcção de variavel real, póde ser real uma funcção de variavel imaginaria.

A propriedade expressa por (1), combinada com o que deixamos dicto sobre a maneira de representar as quantidades imaginarias, dá immediatamente uma primeira solução ao problema da representação d'estas funcções. Um ponto movendo-se num plano, e tendo por coordenadas $\varphi(x, y)$ e $\psi(x, y)$, dará ideia de tal representação.

Imaginando duas superficies cujas ordenadas verticaes sejam $\varphi(x, y)$ e $\psi(x, y)$, essas duas superficies representarão tambem a funcção, e teremos d'este modo uma segunda solução do mesmo problema.

As variações de z, indicadas pelo movimento do ponto que lhe corresponde no plano adoptado, produzirão na funcção variações indicadas, já pelo movimento no mesmo plano do ponto que representa essa funcção, já pela reunião das curvas descriptas nas duas superficies pelos extremos superiores das suas ordenadas verticaes, conforme o modo de representação preferido.

A continuidade nestas funcções é definida e intendida do mesmo modo que nas funcções de variavel real. Quando para cada valor da variavel entre certos limites, o modulo ou a differença

$$\Delta f(z) = f(z + \Delta z) - f(z)$$

decresce indefinidamente com Δz, a funcção diz-se *continua* dentro dos limites considerados.

Conseguintemente, e adoptando o primeiro modo de representação, será *continua* a funcção se pela continuidade da curva representativa da variavel se concluir a continuidade da curva representativa da funcção.

Como vimos, a mudança de valor da variavel imaginaria póde fazer-se por uma infinidade de caminhos, propriedade que evidentemente subsiste nas funcções de taes variaveis. Mas alem d'isso nestas funcções a um determinado caminho da variavel correspondem ou podem corresponder diversos caminhos para a funcção. Existe a este respeito uma importante distincção a fazer neste genero de funcções.

Se, ficando a variavel comprehendida numa certa porção do plano, a funcção adquire sempre o mesmo valor no mesmo ponto, qualquer que seja o caminho seguido para lá chegar, a funcção chama-se *monodroma* segundo a notação de Cauchy, *bem determinada* segundo Liouville, ou *uniforme* segundo Hermite; se a cada valor da variavel correspondem diversos valores da funcção, esta chama-se *ambigua* ou de *muitas accepções, mal determinada* ou *mal definida,* ou *não uniforme,* segundo as diversas notações indicadas.

As funcções algebricas racionaes, as exponenciaes e as trigonometricas, dão-nos ideia da primeira especie; as funcções irracionaes e logarithmicas fornecem exemplos da segunda.

Neste segundo grupo de funcções, correspondendo a um unico caminho da variavel, diversos caminhos da funcção, póde succeder que a um certo ponto da curva que representa a variavel, corresponda tambem um ponto unico representando a funcção. É que se tornaram eguaes os valores em geral diversos da funcção, ou que se encontraram no mesmo ponto as diversas curvas que a representam.

Esse ponto da curva que representa a variavel chama-se com bom fundamento, *ponto de ramificação.*

Se a funcção é *monodroma,* é claro que o valor adquirido por ella para um valor determinado da variavel, é independente do caminho seguido pela mesma variavel para lá chegar. Se porém a funcção for *ambigua,* esta propriedade não apresenta o mesmo gráu de simplicidade, mesmo a respeito de cada uma das curvas que representam a funcção, tomadas individualmente.

É facil de vêr que, neste caso, aquella propriedade desapparece ou subsiste a mesma para cada curva, segundo entre os valores extremos da variavel existir ou não um ou muitos pontos de ramificação.

Em resumo: se a variavel descrever uma curva fechada, a funcção descreverá tambem uma ou muitas curvas fechadas, conforme for *monodroma* ou *ambigua*. Exceptua-se o caso de passar a variavel por um ponto de ramificação, caso em que tal propriedade póde deixar de existir.

Um outro ponto de vista importante é preciso considerar no estudo das funcções de variavel imaginaria, porque elle nos conduz a outras propriedades que as distinguem das funcções de variavel real.

As funcções monodromas de variavel real têm por derivada uma funcção monodroma tambem. Tal propriedade se não verifica, em geral, nas funcções de variavel imaginaria.

Seja

$$u = f(z) = f(x + iy) = p + iq$$

uma tal funcção. A sua derivada

$$\frac{du}{dz} = \frac{\left(\frac{dp}{dx} + i\frac{dq}{dx}\right) + \left(\frac{dp}{dy} + i\frac{dq}{dy}\right)\frac{dy}{dx}}{1 + i\frac{dy}{dx}}$$

depende, em geral, como se vê, de $\frac{dy}{dx}$, que marca a direcção do deslocamento do ponto z no plano. É pois, em geral, $\frac{du}{dz}$ uma funcção ambigua.

Se, porém, x e y variarem de fórma que as quantidades p e q, verifiquem a condição

$$\frac{dp}{dy} + \frac{dq}{dx} = i\left(\frac{dp}{dx} - \frac{dq}{dy}\right),$$

ou as duas equivalentes

$$\frac{dp}{dx}=\frac{dq}{dy}, \frac{dq}{dx}=-\frac{dp}{dy} \dots\dots\dots (2)$$

a derivada será independente de $\frac{dy}{dx}$, e portanto uma funcção *monodroma*, como a das funcções de variavel real.

Cauchy chamou *monogenas* ás funcções que gozam da propriedade de terem por derivadas funcções *monodromas*, ou de terem uma derivada unica em cada ponto.

As condições (2) conduzem com facilidade ás equações

$$\frac{d^2 p}{dx^2}+\frac{d^2 p}{dy^2}=0, \frac{d^2 q}{dx^2}+\frac{d^2 q}{dy^2}=0.$$

Por onde se vê que as duas funcções p e q, tendo de satisfazer a uma mesma equação ás differenciaes parciaes, de segunda ordem $\frac{d^2 v}{dx^2}+\frac{d^2 v}{dy^2}=0$, não pódem ser arbitrarias.

A condição (2) tem uma significação geometrica de facil comprehensão. Ella indica que, fazendo gyrar de 90° uma das superficies, cujas ordenadas verticaes são p e q, em torno de uma vertical qualquer, e do eixo dos x para o dos y, o plano tangente d'essa superficie no ponto situado sobre essa vertical se torna parallelo ao plano tangente á outra superficie no ponto correspondente. D'onde legitimamente se conclue que, tirados por uma vertical qualquer dois planos comprehendendo um angulo recto, as suas intercessões com as superficies tem por tangentes rectas que fazem angulos eguaes com a vertical.

Considerando o outro modo de representação indicado para as funcções de variavel imaginaria, a condição (2) significa que as curvas descriptas pelo ponto u fazem entre si angulos eguaes aos das curvas descriptas pelo ponto z. Esta interpretação indicada por Cauchy é, como a primeira, de facillima demonstração.

Cauchy denominou *synectica* entre certos limites a funcção que se conserva *finita, continua, monodroma* e *monogena* dentro d'esses limites, reservando o nome de *asynecticas* ás funcções que perdem qualquer d'aquellas propriedades, num ou mais pontos comprehendidos entre aquelles mesmos limites.

Os pontos nos quaes a funcção se torna *asynectica* por ser *infinita* ou *discontinua* foram chamados por Schloemilch *pontos de excepção*.

Estes pontos pertencem á classe a que Cauchy deu o nome de *pontos singulares*, onde se reunem com outra especie de pontos em que já fallámos dando-lhe a denominação de *pontos de ramificação*, a que Bertrand chamou *pontos criticos*.

Graindorge propõe a este respeito uma conciliação entre as diversas nomenclaturas empregadas, que muito conviria adoptar, por uniformidade. Aos *pontos de ramificação* chama elle *pontos singulares*; e *pontos criticos* aos *de excepção* de Schloemilch.

Os integraes definidos tomados entre limites imaginarios têm a mesma definição dos que são tomados entre limites reaes. Attendendo á propriedade mencionada das variaveis imaginarias, que pódem passar de um a outro valor por uma infinidade de caminhos, é preciso no estudo d'estes integraes conhecer a influencia que advém ao integral com a variação do caminho seguido pela variavel entre os limites considerados, caminho que Neumann chama — *fio conductor da integração*.

Seja $\int_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz$ um integral definido, contendo uma funcção synectica, e tomado entre os limites z_0 e z_1, e procuremos a variação que experimenta este integral, quando pelo caminho $Z_0\, n\, Z_1$ (fig. 1) seguido pela variavel se substitue um outro como $Z_0\, m\, m'\, Z_1$, infinitamente proximo do primeiro. Suppondo que a cada ponto d'uma curva corresponde um da segunda, e sendo por exemplo m e n dois pontos correspondentes, vê-se, attendendo á natureza da funcção f, que ella toma o mesmo valor em n, quer se siga o caminho $Z_0\, m\, n$, quer $Z_0\, n$. A differença portanto entre o valor da funcção em m, seguindo o primeiro caminho, e em n, seguindo o segundo, é dada pela variação correspondente ao caminho $m\, n$, ou por $\delta f(z)$, segundo a notação conhecida para as funcções de variavel real, egualmente adoptada aqui.

Sendo, além d'isso, a funcção monogena, terá a mesma derivada no mesmo ponto, qualquer que seja o caminho seguido. Teremos pois

$$\delta f(z)\, dz = d f(z)\, \delta z.$$

Por outra parte a variação do integral é

$$\delta \int_{z_0}^{z_1} f(z)\, dz = \int_{z_0}^{z_1} (\delta f(z)\, dz + f(z)\, \delta\, dz);$$

e portanto

$$\delta \int_{z_0}^{z_1} f(z)\, dz = \int_{z_0}^{z_1} d \Big[f(z)\, \delta z \Big] = \Big[f(z)\, \delta z \Big]_{z_0}^{z_1}.$$

Como, além d'isso, os pontos extremos se correspondem nos dois caminhos, ou são independentes da variação de caminho, teremos $\delta z_0 = 0$, $\delta z_1 = 0$; e portanto

$$\delta \int_{z_0}^{z_1} fz\,dz = 0.$$

D'onde se conclue que um integral definido entre limites imaginarios e contendo uma funcção synectica entre esses limites, é independente do caminho de integração.

Como corollario d'esta verdade, conclue-se que o integral será nullo quando o caminho de integração for uma curva fechada, e a funcção se conservar synectica dentro d'essa curva. Conclue-se mais da mesma verdade que os integraes, correspondentes a duas curvas fechadas, são eguaes, se a funcção se conservar synectica em toda a porção do plano comprehendida pelas duas curvas.

Vejamos por ultimo o que acontece quando a curva de integração contém um ou mais *pontos de excepção,* e bem assim um ou mais *pontos de ramificação,* ou, segundo a nomenclatura de Graindorge, *pontos criticos* e *pontos singulares.*

Supponhamos em primeiro logar que na porção do plano considerada existe um ponto de excepção, como M (fig. 2), e seja $ABCDA$ um caminho de integração.

Tracemos em volta do ponto M um outro caminho qualquer como $abcd$. Se junctarmos os pontos A e a, C e c, pelas rectas Aa, Cc, vê-se, attendendo á primeira propriedade demonstrada, que o caminho $ABCcbaA$ póde ser substituido por $ADCcdaA$, visto não ser comprehendido por nenhum d'elles o ponto considerado. Representando pelo symbolo $\int$ anteposto ao caminho seguido, o integral correspondente, teremos pois

$$\int ABCcbaA = \int ADCcdaA;$$

ou, partindo cada um nas suas partes,

$$\int ABC + \int Cc + \int cba + \int aA =$$

$$= \int ADC + \int Cc + \int cda + \int aA$$

ou, simplificando,

$$\int ABC - \int ADC = \int cda - \int cba;$$

e, attendendo a que é

$$\int ADC = -\int CDA$$

$$\int cba = -\int abc,$$

$$\int ABC + \int CDA = \int cda + \int abc;$$

ou, emfim,

$$\int ABCDA = \int abcda$$

que traduz a seguinte propriedade:

O integral definido, contendo uma funcção synectica, tomado entre limites imaginarios, e correspondendo a uma curva que involve um ponto de excepção, póde substituir-se por outro qualquer que involva esse ponto, comtanto que a funcção se conserve synectica em ambos elles, e na porção do plano que elles comprehendem.

Poderemos assim substituir qualquer caminho involvendo o ponto considerado por um circulo de raio infinitamente pequeno, descripto em torno d'elle.

Representando por (a, b) as coordenadas do ponto de excepção, por r e φ o raio e angulo vector, e passando para coordenadas polares, o integral correspondente ao circulo descripto em torno d'esse ponto por uma unica revolução, será

$$i \int_{\varphi_0}^{\varphi_0 + 2\pi} f(a + ib + re^{i\varphi})\, re^{i\varphi} d\varphi$$

sendo φ_0 o valor inicial do angulo φ.

Suppondo além d'isso o raio infinitamente pequeno, e representando por λ o valor da funcção para esse valor do raio, e considerando, como ordinariamente acontece, λ independente de φ, teremos, representando por $\int_1 f(z)\,dz$ o integral definido no caso de haver um unico ponto critico,

$$\int_1 f(z)\,dz = 2i\pi\lambda.$$

Por um caminho analogo, achariamos

$$\int_n f(z)\,dz = 2i\pi(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n)$$

no caso de existirem n pontos criticos na curva de integração.

Se a curva de integração involver muitas vezes o mesmo ponto critico, achar-se-hia, sempre pelo mesmo caminho, que o integral correspondente equivale a uma revolução unica em torno do ponto por um circulo descripto á volta d'elle, e multiplicado o integral correspondente a esse circulo pelo numero que indica as revoluções, sendo emfim esse resultado positivo ou negativo, segundo o sentido da revolução.

Suppondo que a curva involve n vezes o mesmo ponto critico, achariamos, segundo a doutrina exposta, dando ao integral por indice inferior o numero que indica os pontos involvidos, e por indice superior o que indica as revoluções,

$$\int_1^n f(z)\,dz = \pm 2ni\pi\lambda.$$

E, considerando muitos pontos, e muitas revoluções em torno de cada um entre os limites z_0 e z_1, achariamos

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz = 2i\pi(\pm n_1\lambda_1 \pm n_2\lambda_2 \pm \ldots \pm n_p\lambda_p).$$

Quando a curva de integração fica comprehendida entre dois pontos, passando por um ponto critico, e não é, como nos casos suppostos até aqui, uma curva fechada, facilmente se veria que o integral se reduz ao valor que elle tomaria ao longo do caminho rectilineo comprehendido entre esses pontos, mais o valor que elle adquire pela revolução circular em volta do ponto considerado, e que se obtem pelo que já fica dicto. Schloemilch chama *integral linear*, a esse que corresponde ao caminho rectilineo entre os dois pontos limites, e representa-o por

$$\int\Big|_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz.$$

Depois de todas estas considerações, facilmente se deduz a formula geral de reducção para o calculo do integral tomado ao longo d'uma curva, contendo muitos pontos criticos, e comprehendido entre dois pontos limites:

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz = \int\Big|_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz +$$

$$+ 2i\pi(\pm n_1\lambda_1 \pm n_2\lambda_2 \ldots \pm n_p\lambda_p) \ldots \ldots (A)$$

formula que se applica, qualquer que seja a ordem em que os pontos criticos sejam involvidos.

A seu tempo veremos o uso que esta formula póde ter no objecto que faz a parte essencial do nosso trabalho.

PRIMEIRA PARTE

Integraes ellipticos

CAPITULO I

Resumo.—Origem dos integraes ellipticos das tres especies.—Methodos da sua deducção.—Critica d'esses methodos.—Estudo comparativo e valor real dos tres integraes.

A expressão integral

$$\int \frac{Fx\,dx}{\sqrt{X}}$$

em que X representa um polynomio do quarto gráu em x, e $F(x)$ uma funcção algebrica racional, não póde ainda até hoje ser reduzida a fórmas normaes conhecidas pelas theorias do calculo integral.

A sua reducção origina tres novas fórmas, que, na impossibilidade de mais simples expressão, se calculam numericamente. Chamam-se integraes ellipticos esses tres termos de reducção, pelo motivo noutro logar apontado já, e adiante justificado.

Vejâmos como se leva a effeito tal reducção.

Representando por a_1, a_2, a_3, a_4 as raizes da equação

$$X = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4$$

será

$$X = A_4\,(x-a_1)\,(x-a_2)\,(x-a_3)\,(x-a_4).$$

Fazendo

$$x = \frac{p+qy}{1+y} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

consegue-se reduzir X a um polynomio contendo tão sómente potencias pares da variavel, e com valores reaes de p e q.

Com effeito a substituição dá

$$X = A_4 \frac{\{(p-a_1)(p-a_2)+(q-a_1)(q-a_2)y^2\}\{(p-a_3)(p-a_4)+(q-a_3)(q-a_4)y^2\}}{(1+y)^4},$$

determinando p e q pelas condições

$$\left.\begin{array}{r} (p-a_1)\,(q-a_2)+(p-a_2)\,(q-a_1)=0 \\ (p-a_3)\,(q-a_4)+(p-a_4)\,(q-a_3)=0 \end{array}\right\} \ldots (2),$$

condições que conduzem sempre a valores reaes de p e q.

De facto (2) equivalem a

$$\left.\begin{array}{r} 2\,pq-(a_1+a_2)\,(p+q)+2\,a_1 a_2=0 \\ 2\,pq-(a_3+a_4)\,(p+q)+2\,a_3 a_4=0 \end{array}\right\} \ldots (3),$$

que dão

$$\left.\begin{aligned} p+q &= \frac{2\,(a_1 a_2 - a_3 a_4)}{(a_1+a_2)-(a_3+a_4)} \\ p\,q &= \frac{a_1 a_2\,(a_3+a_4) - a_3 a_4\,(a_1+a_2)}{(a_1+a_2)-(a_3+a_4)} \end{aligned}\right\} \ldots (4);$$

conseguintemente p e q são as raizes da equação

$$z^2 - \frac{2\,(a_1 a_2 - a_3 a_4)}{(a_1+a_2)-(a_3+a_4)}\,z +$$

$$+\,\frac{a_1 a_2\,(a_3+a_4) - a_3 a_4\,(a_1+a_2)}{(a_1+a_2)-(a_3+a_4)} = 0$$

que serão reaes, se forem reaes os coefficientes (4), e

$$p\,q < \frac{1}{4}\,(p+q)^2,$$

ou

$$\frac{(a_1 a_2 - a_3 a_4)^2}{\{(a_1+a_2)-(a_3+a_4)\}^2} -$$

$$-\,\frac{a_1 a_2\,(a_3+a_4) - a_3 a_4\,(a_1+a_2)}{(a_1+a_2)-(a_3+a_4)} > 0$$

que se reduz a

$$\frac{(a_1-a_3)\,(a_1-a_4)\,(a_2-a_3)\,(a_2-a_4)}{[a_1+a_2-(a_3+a_4)]^2}>0\ldots.\ (5).$$

Estas duas condições são manifestamente satisfeitas, qualquer que seja a natureza das raizes a_1, a_2, a_3, a_4.

Com effeito, tres casos se podem dar, attendendo a essa natureza: ou as quatro raizes são reaes; ou são duas reaes e duas imaginarias; ou todos quatro imaginarias.

1.° caso. A realidade das expressões (4) é evidente. Pelo que respeita a (5), suppondo as quatro quantidades dispostas pela ordem de grandeza $a_1 > a_2 > a_3 > a_4$, vê-se que os dois termos são positivos, e portanto satisfeita a condição expressa por aquella desegualdade.

2.° caso. Sejam a_1 e a_2 as duas raizes imaginarias, e façamos

$$a_1 = m + n\sqrt{-1}$$

$$a_2 = m - n\sqrt{-1}$$

teremos

$$a_1 a_2 = m^2 + n^2$$

$$a_1 + a_2 = 2m$$

quantidades reaes; logo as expressões (4) reaes. Quanto a (5), torna-se em

$$\frac{\{(m-a_3)^2+n^2\}\,\{(m-a_4)^2+n^2\}}{\{2m-(a_3+a_4)\}^2}$$

quantidade essencialmente positiva.

3.º caso. Seja ainda

$$a_1 = m + n\sqrt{-1}$$

$$a_2 = m - n\sqrt{-1}$$

e

$$a_3 = m' + n'\sqrt{-1}$$

$$a_4 = m' - n'\sqrt{-1}.$$

Teremos

$$a_1\, a_2 = m^2 + n^2$$

$$a_3\, a_4 = m'^2 + n'^2$$

$$a_1 + a_2 = 2\,m$$

$$a_3 + a_4 = 2\,m'$$

e portanto as expressões (4) reaes. Pelo que réspeita a (5), tornar-se-ha em

$$\frac{\{(m-m')^2 + (n-n')^2\}\,\{(m-m')^2 + (n+n')^2\}}{(2\,m - 2\,m')^2}$$

quantidade essencialmente positiva.

Attentando nas expressões (4), parece cahir em defeito a transformação de que se tracta, quando for

$$a_1 + a_2 = a_3 + a_4,$$

e bem assim sendo

$$a_1 = a_4,\ a_2 = a_3,$$

tornando-se $p + q$ e $p q$ infinitos no primeiro caso, indeterminados no segundo.

Observando porém que a primeira hypothese reduz immediatamente o polynomio X á fórma procurada, fazendo $x = y + \frac{a_1 + a_2}{2}$, onde não entra p e q, e que a segunda elimina o radical; vê-se que estes casos excepcionaes não ficam comprehendidos nas conclusões a que chegamos, porque elles não carecem da transformação justificada.

Em resumo fica demonstrado que a expressão proposta $\int \frac{F(x)\,dx}{\sqrt{X}}$ póde sempre reduzir-se a $\int \frac{F(x)\,dx}{\sqrt{X'}}$, sendo X' um polynomio do quarto gráu, contendo tão sómente potencias pares de x, ou da fórma

$$X' = a + b x^2 + c x^4;$$

ou, conforme o valor achado,

$$X = \frac{M}{(1 + y)^4}$$

sendo

$$M = A_4 (q - a_1)(q - a_2)(q - a_3)(q - a_4) \times$$

$$\times \left[\frac{(p-a_1)(p-a_2)}{(q-a_1)(q-a_2)} + y^2\right] \left[\frac{(p-a_3)(p-a_4)}{(q-a_3)(q-a_4)} + y^2\right].$$

Fazendo, por simplicidade,

$$A_4 (q - a_1)(q - a_2)(q - a_3)(q - a_4) = n$$

$$-\frac{(p-a_1)(p-a_2)}{(q-a_1)(q-a_2)} = r$$

$$-\frac{(p-a_3)(p-a_4)}{(q-a_3)(q-a_4)} = s$$

teremos, finalmente

$$X = \frac{n(y^2 - r)(y^2 - s)}{(1+y)^4} \ldots\ldots\ldots (6).$$

Pelo que respeita a $F(x)$ póde sempre considerar-se uma funcção par, pois que, não o sendo, póde sempre fazer-se

$$F(x) = \frac{\varphi(x) + x\psi(x)}{f_1(x) + xf_2(x)} \ldots\ldots\ldots (7)$$

sendo φ, ψ, f_1 e f_2 funcções pares.

Com effeito, a fórma mais geral de $F(x)$ sendo

$$F(x)=\frac{a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\ldots+b_mx^m},$$

teremos

$$F(x)=\frac{(a_0+a_2x^2+\ldots)+x(a_1+a_3x^2+\ldots)}{(b_0+b_2x^2+\ldots)+x(b_1+b_3x^2+\ldots)}$$

que é a fórma (7).

Multiplicando os dois termos do segundo membro de (7) pelo denominador será

$$F(x)=\frac{[\varphi(x)+x\psi(x)][f_1(x)-xf_2(x)]}{[f_1(x)]^2-x^2[f_2(x)]^2}$$

onde se vê que o numerador contém, em geral, potencias pares e impares de x, e o denominador só potencias pares da variavel. Podemos portanto fazer, como precedentemente,

$$F(x)=\frac{M+xN}{P}=\frac{M}{P}+\frac{N}{P}x,$$

sendo M, N e P funcções pares.

Fazendo pois $\frac{M}{P}=\Phi(x^2)$, $\frac{N}{P}=\Psi(x^2)$, virá

$$F(x)=\Phi(x^2)+x\Psi(x^2),$$

sendo Φ e Ψ funcções racionaes fraccionarias.

Teremos assim para a expressão proposta

$$\int \frac{F(x)\,dx}{\sqrt{X}} = \int \frac{\Phi(x^2)\,dx}{\sqrt{X}} + \int \frac{\Psi(x^2)\,x\,dx}{\sqrt{X}}.$$

Mas o segundo integral, fazendo $x^2 = t$, e attendendo á fórma que vimos poder sempre attribuir-se a X, transforma-se em

$$\frac{1}{2}\int \frac{\Psi(t)\,dt}{\sqrt{a+bt+ct^2}}$$

que se determina pelos processos ordinarios de integração. Podemos portanto supprimil-o na reducção que nos occupa, e tractaremos simplesmente do primeiro, que é justamente o integral proposto, mas com funcção par, como pretendiamos provar.

Occupemo-nos portanto da expressão

$$\int \frac{F(x^2)\,dx}{\sqrt{X}}.$$

A hypothese (1), reduz X a (6), $F(x^2) = \Phi(y^2)$, e pelo valor

$$dx = \frac{(q-p)\,dy}{(1+y)^2}$$

teremos

$$\int \frac{F(x^2)\,dx}{\sqrt{X}} = (q-p)\int \frac{\Phi(y^2)\,dy}{\sqrt{n(y^2-r)(y^2-s)}} \ldots (8).$$

Ora a funcção $\Phi(y^2)$ póde sempre, sendo supposta fraccionaria, que é o caso mais geral, ser decomposta numa funcção inteira, e numa fracção que se decomporá em fracções parciaes da fórma

$$\frac{A}{(1+\lambda y^2)^p}.$$

Teremos pois, em conclusão, que o integral

$$\int \frac{F(x)\,dx}{\sqrt{X}}$$

origina na sua reducção tres grupos de integraes: uns que se obtem pelas fórmas conhecidas, exprimindo-se em potencias, logarithmos e arcos de circulo; outros da fórma

$$\int \frac{y^m\,dy}{\sqrt{n(y^2-r)(y^2-s)}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

sendo m um numero par; e finalmente, outros da fórma

$$\int \frac{dy}{(1+\lambda y^2)^p \sqrt{n(y^2-r)(y^2-s)}} \quad \ldots\ldots \quad (10).$$

Attendendo e combinando os signaes possiveis de n, r e s, vê-se que é sempre possivel dar a y um valor tal que

$$\int \frac{dy}{\sqrt{n(y^2-r)(y^2-s)}}$$

se reduza a

$$C\int\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

sendo z e k fracções positivas.

Attentando além disso na fórmula que exprime y em z, nos diversos casos possiveis, acha-se que todos se comprehendem na expressão geral

$$y^2=\frac{a+bz^2}{c+dz^2}$$

que reduz (9) e (10), attendendo a que

$$\Phi(y^2)=\Phi\left(\frac{a+bz^2}{c+dz^2}\right),$$

fica com a mesma fórma em z que tinha em y, ás fórmas

$$\int\frac{z^m dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}\;\ldots\ldots\;(11)$$

$$\int\frac{dz}{(1+\lambda z^2)^p\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}\;\ldots\;(12).$$

Vejamos a que estas se reduzem.

Fazendo $z=\operatorname{sen}\varphi$, o que é permittido attendendo á natureza de z, e fazendo $\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} = \Delta\varphi$, dá-se a estes integraes uma fórma trigonometrica mais simples.

Representando pela letra U o primeiro e pela letra V o segundo, dando a estas letras um indice egual ao expoente de $\operatorname{sen}\varphi$ no primeiro, e do binomio do denominador no segundo, teremos

$$U_m = \int \frac{\operatorname{sen}^m \varphi \, d\varphi}{\Delta\varphi}, \quad V_n = \int \frac{d\varphi}{(1+\lambda \operatorname{sen}^2\varphi)^n \Delta\varphi} \quad (13).$$

A formula que facilmente se deduz

$$\operatorname{sen}^{m-3}\varphi \cos\varphi \, \Delta\varphi = (m-3)\, U_{m-4} -$$

$$-(m-2)(1+k^2)\, U_{m-2} + (m-1)\, k^2\, U_m$$

mostra como U_m se póde deduzir de U_{m-2} e U_{m-4}, e portanto, como todos os integraes contidos na primeira das fórmas (13) se podem reduzir aos dois

$$U_0 = \int \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}, \quad U_2 = \int \frac{\operatorname{sen}^2\varphi \, d\varphi}{\Delta\varphi};$$

ou, sendo

$$\frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{\Delta\varphi} = \frac{1}{k^2}\left[\frac{1}{\Delta\varphi} - \Delta\varphi\right],$$

e portanto

$$U_2 = \frac{1}{k^2}\left[\int \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} - \int \Delta\varphi\, d\varphi\right],$$

a

$$\int \frac{d\varphi}{\Delta\varphi},\ \int \Delta\varphi\, d\varphi \ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

elementos ultimos do primeiro integral.

Analogamente, a formula a que se chega com alguma attenção

$$\frac{\operatorname{sen}\varphi \cos\varphi\, \Delta\varphi}{(1+\lambda \operatorname{sen}^2\varphi)^{n-1}} = \alpha_3 V_{n-3} + \alpha_2 V_{n-2} + $$

$$+ \alpha_1 V_{n-1} + \alpha_0 V_n$$

em que α_0, α_1, α_2, α_3 são funcções de n, k, λ, mostra como todos os integraes contidos na segunda fórma (13) se podem deduzir dos tres

$$V_{-1} = \int \frac{1+\lambda \operatorname{sen}^2\varphi}{\Delta\varphi}\, d\varphi,\ \ V_0 = \int \frac{d\varphi}{\Delta\varphi},$$

$$V_1 = \int \frac{d\varphi}{(1+\lambda \operatorname{sen}^2\varphi)\,\Delta\varphi}$$

dos quaes os dois primeiros pertencem ás duas fórmas já obtidas.

Em conclusão vê-se que a expressão

$$\int \frac{F(x)\,dx}{\sqrt{X}},$$

em que $F(x)$ é uma funcção algebrica racional, e X um polynomio do quarto gráu em x, origina, além de integraes conhecidos pelas theorias ordinarias do calculo integral, tres novas fórmas particulares que não podem reduzir-se ás primeiras. São ellas

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}},\quad \int \sqrt{\frac{1-k^2 z^2}{1-z^2}}\,.\,dz,$$

$$\int \frac{dz}{(1+\lambda z^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}},$$

ou, debaixo de fórma trigonometrica,

$$\int \frac{d\varphi}{\Delta\varphi},\quad \int \Delta\varphi\, d\varphi,\quad \int \frac{d\varphi}{(1+\lambda \operatorname{sen}^2\varphi)\, d\varphi}$$

que, tomados entre limites determinados, se chamam integraes ellipticos de primeira, segunda e terceira especie.

É de notar que o desapparecimento das potencias impares da variavel no polynomio que o radical affecta podia obter-se por outro methodo, seguramente mais rapido; mas o que apontamos e que é devido a Legendre tem sobre esse outro, tambem por aquelle geometra apontado, a grande vantagem de produzir debaixo do radical dois factores reaes e de fórma simples.

Um exame attento do methodo geral empregado na reducção precedente, e bem assim a comparação das fórmas finaes a que conduz com as que se obtêm pelas reducções ordinarias de expressões mais simples que aquella de que partimos, produzem no espirito o convencimento de que umas não podem exprimir-se nas outras consideradas na sua maxima generalidade. São novos elementos de calculo, de ordem mais elevada, transcendentes novas, que se podem affectar de caracteristicas proprias para lhes simplificar a notação, e cujos valores numericos se devem determinar construindo-se táboas com argumentos convenientes, que sirvam para o seu calculo em geral, do mesmo modo que se procedeu para os logarithmos, senos, etc.

Assim, segundo a notação de Legendre, estas tres fórmas representam-se do modo seguinte:

$$F(k,\varphi)=\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi},\quad E(k,\varphi)=\int_0^{\varphi}\Delta\varphi\, d\varphi,$$

$$\Pi_0(k,\lambda,\varphi)=\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{(1+\lambda\operatorname{sen}^2\varphi)\,\Delta\varphi}.$$

k chama-se *o modulo*, φ *a amplitude*, e λ *o parametro* d'estes integraes.

No capitulo seguinte mostraremos como a formação das táboas d'estes integraes se póde levar a effeito, lançando mão de propriedades que previamente serão apresentadas.

CAPITULO II

RESUMO.—Transformação dos integraes ellipticos de primeira e segunda especie pelos modulos e amplitudes. — Calculos numericos. — Formação de táboas. — Táboas de Legendre. — Ideia da sua construcção e uso.

Os integraes ellipticos das tres especies que apresentamos no capitulo precedente, considerados como elementos de calculo numerico, precisam de ser reduzidos em taboas. Legendre foi o primeiro que emprehendeu a sua formação, e suas são as primeiras táboas que se formaram. Estas táboas dão o valor numerico do integral quando se conhece o modulo e a amplitude. Nellas não entram as funcções de terceira especie pelo motivo de que tendo estas funcções, além da variavel principal, duas constantes arbitrarias, seria preciso que as suas táboas tivessem tres entradas, o que, como diz o mesmo Legendre, seria inexequivel.

Vejâmos como se póde obter a sua formação, começando pelos integraes de primeira especie.

O calculo d'estes integraes funda-se na seguinte propriedade, que passamos a demonstrar:

Todo o integral elliptico de primeira especie póde exprimir-se n'outro da mesma especie, mas de modulo maior e de amplitude menor; e vice-versa.

Com effeito, se no integral

$$F(k, \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}$$

fizermos, como Landen,

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{\operatorname{sen} 2\omega}{k + \cos 2\omega},$$

ou

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{sen} 2\omega}{k + \cos 2\omega},$$

teremos

$$F(k, \varphi) = \frac{2}{1+k} \int_0^{\omega} \frac{d\omega}{\sqrt{1 - k'^2 \operatorname{sen}^2 \omega}},$$

ou

$$F(k, \varphi) = \frac{2}{1+k} F(k', \omega) \ldots\ldots\ldots (15);$$

sendo os modulos e amplitudes ligados pelas relações

$$k' = \frac{2\sqrt{k}}{1+k} \ldots\ldots\ldots\ldots (16),$$

$$\operatorname{sen}(2\omega - \varphi) = k \operatorname{sen} \varphi \ldots\ldots\ldots (17).$$

Mas, atendendo a que é $k<1$, (16) mostra que é $k'>k$, e (17) que é $\omega<\varphi$; portanto as tres equações (15), (16) e (17) demonstram a primeira parte do theorema.

Quanto á segunda parte é ella uma consequencia immediata da primeira, e traduzida pelas equações

$$F(k',\omega)=\frac{1+k}{2}\,F(k,\varphi)\;\ldots\ldots\ldots\;(18)$$

$$k=\frac{1-\sqrt{1-k'^2}}{1+\sqrt{1-k'^2}}\;\ldots\ldots\ldots\;(19)$$

combinadas com (17).

Este theorema fornece dois processos de facil comprehensão para o calculo de um integral de primeira especie, consistindo um no decrescimento successivo das amplitudes, e augmento dos modulos, que tem por limite superior a unidade; outro, ao contrario, no decrescimento continuado dos modulos e diminuição das amplitudes, fazendo convergir aquelles para o seu limite inferior zero.

Pelo primeiro processo o valor do integral proposto vem a depender de

$$F(1,\varphi)=\int_0^{\psi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\varphi}}=\int_0^{\psi}\frac{d\varphi}{\cos\varphi}$$

que se determina pelos processos ordinarios do calculo integral. A paginas 231 do 4.º volume do Francoeur vem o valor d'este integral, e, calculando a constante que lá se encontra, acha-se

$$\int_0^{\psi} \frac{d\varphi}{\cos\varphi} = \mathrm{l.\,tg}\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\psi\right).$$

Representando por

$$k,\ k_1\ k_2 \ldots k_n$$

os modulos successivos, e por

$$\varphi,\ \varphi_1,\ \varphi_2 \ldots \varphi_n$$

as amplitudes, teremos (15)

$$F(k, \varphi) = \frac{2}{1+k} F(k_1, \varphi_1),$$

$$F(k_1, \varphi_1) = \frac{2}{1+k_1} F(k_2, \varphi_2),$$

$$F(k_2, \varphi_2) = \frac{2}{1+k_2} F(k_3, \varphi_3),$$

. . . .

$$F(k_{n-1}, \varphi_{n-1}) = \frac{2}{1+k_{n-1}} F(k_n, \varphi_n),$$

que dão

$$F(k,\varphi)=\frac{2}{1+k}\cdot\frac{2}{1+k_1}\cdot\frac{2}{1+k_2}\cdots\frac{2}{1+k_{n-1}}F(k_n,\varphi_n)\ldots\ (a),$$

sendo os modulos successivamente calculados pelas relações

$$k_1=\frac{2\sqrt{k}}{1+k},\ k_2=\frac{2\sqrt{k_1}}{1+k_1},\ \ldots\ldots k_n=\frac{2\sqrt{k_{n-1}}}{1+k_{n-1}}$$

que dão

$$\frac{2}{1+k}=\frac{k_1}{\sqrt{k}},\ \frac{2}{1+k_1}=\frac{k_2}{\sqrt{k_1}},\ \ldots\ \frac{2}{1+k_{n-1}}=\frac{k_n}{\sqrt{k_{n-1}}},$$

e portanto (a)

$$F(k,\varphi)=\frac{k_1k_2k_3\ldots\ldots k_n}{\sqrt{k.k_1k_2\ldots\ldots k_{n-1}}}F(k_n,\varphi_n),$$

ou, ainda

$$F(k,\varphi)=\sqrt{\frac{k_1k_2k_3\ldots\ldots k_{n-1}}{k}}.k_n.F(k_n,\varphi_n).$$

Suppondo portanto k_n o valor limite do modulo, e φ_n o valor correspondente da amplitude que deve ser finito e determinado, ou suppondo $k_n = 1$, $\varphi_n = \psi$, teremos em fim a formula a empregar no calculo numerico de $F(k, \varphi)$, seguindo o primeiro processo

$$F(k, \varphi) = \sqrt{\frac{k_1 . k_2 . k_3 \ldots . k_{n-1}}{k}} . k_n \, \mathrm{l.tg}\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\psi\right) \ldots (20),$$

que se deve combinar com as formulas (16) e (17) por onde se calculam os modulos e amplitudes successivas.

Pelo segundo processo, o valor do integral proposto vem a depender do valor de

$$\int_0^\psi d\varphi = \psi.$$

Na mesma notação empregada no processo anterior, e usando das formulas que servem no presente, teriamos

$$F(k, \varphi) = \frac{1+k_1}{2} . \frac{1+k_2}{2} \ldots . \frac{1+k_n}{2} F(k_n, \varphi_n),$$

ou, attendendo aos valores limites de k e φ, $k_n = 0$, $\varphi_n = \psi$

$$F(k, \varphi) = \frac{\psi}{2^n} (1+k_1)(1+k_2) \ldots (1+k_n), \ldots (21),$$

formula que servirá no calculo, seguindo este processo, combinando-a com as equações (17) e (19), por onde se calcularão successivamente as amplitudes e os modulos.

É facil de ver, attentando nestes dois processos, que não é indifferente a sua escolha para o calculo de um dado integral, não vindo o seu numero conseguintemente a constituir uma abundancia, antes sendo o seu complexo indispensavel para constituir os meios do calculo em questão.

De facto o uso de cada um será determinado pela grandeza do modulo do integral proposto comparada com os limites 0 e 1 d'esta quantidade, o primeiro applicando-se quando o modulo estiver comprehendido entre $\frac{1}{2}$ e 1, o segundo quando estiver entre 0 e $\frac{1}{2}$.

O seguinte exemplo numerico, transcripto de um tractado sobre este assumpto de Oskar Schloemilch, illucidará a doutrina exposta, mostrando a brevidade com que se obtem um valor muito proximo do limite para o modulo, quando o seu valor primitivo não está muito afastado d'elle. Como se vê nesse exemplo, pertencente ao primeiro processo, duas phases de calculo são bastantes para achar um modulo que differe do limite 1 numa unidade da setima casa decimal.

Seja

$$k=\frac{24}{25},\ \varphi=\frac{1}{3}\pi=60^\circ;$$

o calculo dá

$$k_1=0{,}9997917,\ k_2=0{,}9999999$$

$$\varphi_1=58^\circ 7' 14'',15$$

$$\varphi_2=58^\circ 6' 39'',57.$$

Temos pois (20)

$$F\left(\frac{24}{25}, \frac{1}{3}\pi\right) = \sqrt{\frac{k_1}{k}}.\,\mathrm{l.\,tg}\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\psi\right) =$$

$$= \sqrt{\frac{0,9997917}{0,96}}.\,\mathrm{l.\,tg}\,74^\circ 3' 19'',79 = 1,278522.$$

De uma maneira inteiramente analoga se procede no calculo dos integraes ellipticos de segunda especie.

Seja

$$E(k, \varphi) = \int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}.\, d\varphi$$

um integral de segunda especie. Pelo emprego da mesma substituição usada nos de primeira, e junctando a ambos os membros $k \operatorname{sen} \varphi = \int_0^\varphi k \cos \varphi\, d\varphi$, obteremos

$$E(k, \varphi) + k \operatorname{sen} \varphi = \int_0^\varphi (\Delta\varphi + k \cos \varphi)\, d\varphi =$$

$$= 2\int_0^\omega \frac{1 + k \cos 2\omega}{\sqrt{1 + 2k \cos 2\omega + k^2}}\, d\omega =$$

$$= \frac{2}{1+k}\int_0^\omega \frac{1 + k(1 - 2\operatorname{sen}^2 \omega)}{\sqrt{1 - \frac{4k}{1+k}\operatorname{sen}^2 \omega}}\, d\omega;$$

ou, emfim, fazendo

$$\frac{2\sqrt{k}}{1+k} = k' \ldots\ldots\ldots\ldots (22),$$

$$E(k, \varphi) + k \operatorname{sen} \varphi = (1+k)\, E(k', \omega) + (1-k)\, F(k', \omega) \ldots (23).$$

Esta equação dá, attendendo a (18),

$$E(k, \varphi) + k \operatorname{sen} \varphi = (1+k)\, E(k', \omega) + \frac{1}{2}(1-k^2)\, F(k, \varphi),$$

d'onde

$$\frac{1}{2}(1-k^2) F(k,\varphi) = E(k,\varphi) - (1+k) E(k',\omega) + k \operatorname{sen}\varphi \ldots (24).$$

Esta ultima relação mostra que todo o integral elliptico de primeira especie póde ser reduzido a dois integraes de segunda; e a equação (23) mostra que um integral elliptico de segunda especie póde ser expresso n'um de primeira, e n'um de segunda de modulo maior e amplitude menor, ou vice-versa, conforme d'ella se tira $E(k, \varphi)$ ou $E(k', \omega)$.

Seria prolixo mostrar como esta propriedade conduz ao calculo numerico dos integraes de segunda especie, com a aproximação que se desejar.

Pelo que respeita aos integraes de terceira especie, comquanto a mesma substituição empregada nos das duas primeiras especies, lhes seja tambem applicavel, comtudo conduz a formulas em extremo complicadas; e como por outro lado, segundo dissemos no principio d'este capitulo estes integraes não são reductiveis a taboas, omittimos essa transformação.

Além d'isso Legendre mostrou no primeiro tomo do seu notavel tratado das funcções ellipticas muitas e importantes propriedades d'esta especie de integraes, que fazem com que em grande parte de casos, o conhecimento dos integraes das duas primeiras especies, conduza ao conhecimento dos de terceira.

Mostrou este geometra que *sendo os seus parametros imaginarios, aquelles integraes se reduzem a outros que os tem reaes;* que *os integraes completos d'esta especie, ou cuja amplitude é de 90° se exprimem sempre nos das duas primeiras especies;* que *essa mesma reducção é possivel n'uma immensidade de casos;* emfim, que *sempre o valor d'estes integraes póde ser determinado por series muito convergentes,* e *bem adequadas ao seu calculo.*

Abstemo-n'os de justificar todas estas propriedades, porque dariamos ao nosso trabalho latitude superior á que desejamos.

Depois do que fica dicto, e attendendo a que, pela periodicidade da quantidade $\operatorname{sen}^2 \varphi$ que entra nos integraes das tres especies, o conhecimento do valor d'estes integraes para as amplitudes comprehendidas entre 0 e 90°, dá o seu conhecimento para qualquer amplitude, comprehende-se como se podem formar as taboas d'estas funcções. Calculados os integraes para uma serie de arcos comprehendidos entre 0° e 90°, determinar-se-hão os dos arcos intermedios por meio da interpolação, e os dos arcos superiores pela periodicidade.

Legendre apresenta primeiro uma toboa contendo os valores d'estes integraes completos de primeira e segunda especie, de decima em decima de gráu, ou de 6′ em 6′, e achando os seus logarithmos com 14 decimaes. A segunda taboa contém os valores dos integraes de primeira e segunda especie de 30′ em 30′, para o modulo cujo angulo é 45°, e com 12 decimaes. Emfim a taboa IX contém os valores d'estes integraes, calculados de gráu em gráu da amplitude e do angulo do modulo, com 10 decimaes de 0 até 45° do angulo do modulo, e com 9 d'ahi até 90°.

No capitulo seguinte vamos ver como o calculo d'estes integraes se póde levar a effeito pelo seu desenvolvimento em series adequadas a este fim.

contém os valores d'estes integraes, calculados de grão em grau da amplitude e do angulo do modulo, com 10 decimaes, de 0 até 45° do angulo do modulo, e com 9 d'ahi até 90°.

No capitulo seguinte vamos ver como o calculo d'estes integraes se póde levar a effeito pelo seu desenvolvimento em series adequadas a este fim.

CAPITULO III

RESUMO. — Desenvolvimentos em series dos integraes ellipticos das duas primeiras especies. — Integraes completos. — Reducção a estes. — Valores das series obtidas. — Transformações que augmentam a convergencia.

Começaremos pelo desenvolvimento dos integraes completos, e tão sómente para os das duas primeiras especies. Estas series além da sua importancia directa para o conhecimento d'estes integraes, tem como veremos o grande valor de serem os mais simples elementos para a formação das series dos integraes com amplitudes quaesquer.

Seja pois

$$K=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}}$$

um integral completo de primeira especie. Desenvolvendo a potencia do binomio que entra no denominador, acharemos

$$K = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left(1 + \frac{1}{2} k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} k^4 \operatorname{sen}^4 \varphi + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} k^6 \operatorname{sen}^6 \varphi + \ldots \right) d\varphi.$$

Por outra parte a formula (Francoeur, 4.ª parte, n.º 190)

$$\int \operatorname{sen}^m x\, dx = -\frac{\cos x \operatorname{sen}^{m-1} x}{m} + \frac{m-1}{m} \int \operatorname{sen}^{m-2} x\, dx$$

dá, fazendo $m = 2n$, e, tomando o integral entre os limites 0 e $\frac{1}{2}\pi$,

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \operatorname{sen}^{2n} x\, dx = \frac{2n-1}{2n} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \operatorname{sen}^{2n-2} x\, dx,$$

$$\frac{2n-1}{2n} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \operatorname{sen}^{2n-2} x\, dx =$$

$$= \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \operatorname{sen}^{2n-4} x\, dx$$

$$\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\operatorname{sen}^{2n-4}x\,dx=$$

$$=\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\frac{2n-5}{2n-4}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\operatorname{sen}^{2n-6}x\,dx,$$

....

$$\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdots\frac{2n-(2n-3)}{2n-(2n-4)}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\operatorname{sen}^{2n-(2n-2)}x\,dx=$$

$$=\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdots\cdot\frac{2n-(2n-1)}{2n-(2n-2)}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}dx;$$

ou

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\operatorname{sen}^{2n}x\,dx=\frac{1.3.5\ldots.(2n-1)}{2.4\ldots.\;\;2n}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Esta formula dá, fazendo successivamente $n=0$, 1, 2, 3......, multiplicando os resultados por 1, $\frac{1}{2}k^2$, $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot k^4$ etc., e sommando, attendendo além d'isso a que para $n=0$ se reduz a $\frac{\pi}{2}$,

$$K=\frac{\pi}{2}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k^4+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 k^6+\right.$$

$$\left.\ldots+\left(\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots\;\;2n}\right)^2 k^{2n}\right\}\ldots(25).$$

Esta serie é muito convergente para valores muito pequenos de k.

Se porém o modulo não for convenientemente pequeno, poderá a formula (25) ser substituida por outra em que esta quantidade seja tão pequena como se quizer, empregando a transformação expressa pela formula (18).

Assim, effectuando essa transformação uma só vez, teriamos

$$K=F\left(k,\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1+k_1}{2}F(k_1,\pi)=(1+k_1)F\left(k_1,\frac{\pi}{2}\right)$$

attendendo a que é

$$\int_0^{\pi}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}=2\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}.$$

Temos portanto, combinando esta relação com (25),

$$K=\frac{\pi}{2}(1+k_1)\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2 k_1^2+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k_1^4+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 k_1^6+\ldots+\left(\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots\ 2n}\right)^2 k^{2n}\right\}\ldots(26)$$

sendo k_1 determinado por (19).

É facil de ver as formulas que serviriam, feitas duas, tres ou mais transformações, e de concluir que o calculo de K se póde fazer por series tão convergentes como se quizer.

Procede-se d'uma maneira inteiramente analoga para os integraes completos de segunda especie. Assim representando por E um integral completo d'esta especie

$$E=\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\varphi\,\Delta\varphi=\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\varphi\,(1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi)^{\frac{1}{2}},$$

teremos

$$E=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\left\{1-\frac{1}{2}k^2\operatorname{sen}^2\varphi-\frac{1}{2.4}k^4\operatorname{sen}^4\varphi-\right.$$

$$\left.-\frac{3}{2.4.6}k^6\operatorname{sen}^6\varphi\ldots\right\}d\varphi,$$

..

ou, integrando pela formula apresentada,

$$E = \frac{\pi}{2}\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 - \frac{1.3}{(2.4)^2}k^4 - \frac{1.3^2.5}{(2.4.6)^2}k^6 \ldots\right\},$$

a que se póde dar a fórma mais symetrica

$$E = \frac{\pi}{2}\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{k^2}{1} - \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \frac{k^4}{3} - \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 \frac{k^6}{5} - \right.$$

$$\left. \ldots - \left(\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots\;\;2n}\right)^2 \frac{k^{2n}}{2n-1}\right\} \ldots (27).$$

Poderiamos, como fizemos para o integral de primeira especie, achar formulas que exprimissem E em modulos menores, e tanto como quizessemos. A facilidade porém de as obter, dispensa-nos de nos demorarmos mais neste ponto, limitando-nos a apresentar a formula analoga a (26) que dá o valor de E, feita uma unica transformação, a saber:

$$E = \frac{\pi}{2}(1-k_1)\left\{1 + 5\left(\frac{1}{2}\right)^2 k_1^2 + 9\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k_1^4 + \right.$$

$$\left. + \ldots + (4n+1)\left(\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots\;\;2n}\right)^2 k_1^{2n}\right\} \ldots (28).$$

Passemos aos integraes de primeira e segunda especie de qualquer amplitude.

Se em $F(k, \varphi)$ fizermos $k = \frac{2\sqrt{k_1}}{1+k_1}$, teremos

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} = \frac{1+k_1}{\sqrt{1+2k_1 \cos^2 2\varphi + k_1^2}} =$$

$$= (1+k_1) \left\{ 1 + k_1 e^{2\varphi\sqrt{-1}} \right\}^{-\frac{1}{2}} \left\{ 1 + k_1 e^{-2\varphi\sqrt{-1}} \right\}^{-\frac{1}{2}}.$$

Desenvolvendo as potencias dos dois factores do segundo membro, e multiplicando os resultados, obter-se-hão termos em que entram potencias pares positivas e negativas de e; e finalmente passando d'estas exponenciaes imaginarias para cosenos, achar-se-ha

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} = A_0 - A_2 \cos 2\varphi + A_4 \cos 4\varphi - A_6 \cos 6\varphi \ldots (A)$$

sendo

$$A_0 = (1+k_1) \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k_1^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k_1^4 + \ldots \right\}$$

$$A_2 = 2(1+k_1) \left\{ \frac{1}{2} k_1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 . \frac{3}{4} k_1^3 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \frac{5}{6} k_1^5 + \ldots \right\}$$

etc.

O primeiro coefficiente, comparado com (26), dá

$$A_0 = \frac{2}{\pi} K.$$

Da mesma fórma se acharia

$$A_2 = \frac{4}{\pi} \left\{ 2 \frac{K-E}{k^2} - K \right\};$$

e emfim, que todos os coefficientes se podem exprimir nos integraes completos do mesmo modulo, de primeira e segunda especie, porquanto a formula

$$(n-1) A_n = 2(n-2) \frac{2-k^2}{k^2} . A_{n-2} - (n-3) A_{n-4}$$

mostra como todos estes coefficientes se exprimem nos dois primeiros, e estes já vimos como se exprimem em K e E.

Se em $F(k, \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$, substituirmos o valor (A) e integrarmos, acharemos

$$F(k, \varphi) = A_0 \varphi - \frac{1}{2} A_2 \operatorname{sen} 2\varphi + \frac{1}{4} A_4 \operatorname{sen} 4\varphi \ldots\ldots$$

$$\pm \frac{1}{2^n} A_{2n} \operatorname{sen} 2n\varphi \ldots\ldots\ldots \quad (29).$$

Analogamante achariamos

$$E(k,\varphi)=B_0\varphi+\frac{1}{2}B_2\operatorname{sen}2\varphi-\frac{1}{4}B_4\operatorname{sen}4\varphi$$

$$\ldots\ldots\pm\frac{1}{2n}B_{2n}\operatorname{sen}2\varphi,\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (30),$$

sendo

$$(2n+1)B_{2n}=\frac{2}{k^2}(2-k^2)(2n-2)B_{2n-2}-(2n-5)B_{2n-4}$$

e

$$B_0=\frac{2}{\pi}E,\ B_2=\frac{4}{\pi}.\frac{(2-k^2)E-2(1-k^2)K}{3k^2}.$$

Estas formulas achadas para o desenvolvimento de $F(k,\varphi)$ e de $E(k,\varphi)$ são pouco convergentes, por isso não têm o valor pratico que bem era de desejar para o calculo d'estas funcções.

CAPITULO IV

RESUMO. — Operações com os integraes ellipticos de todas as especies. — Formulas e reducções.

Sabe-se que as funcções a que conduz a integração das expressões racionaes fraccionarias, e bem assim das irracionaes, sempre que o integral não contenha um polynomio de gráu superior ao segundo, gozam da propriedade de poderem ser combinadas por somma, diminuição, etc.; isto é, que se póde sempre: *dadas duas funcções homogeneas mas de diversos argumentos, determinar uma funcção da mesma especie, que seja a sua somma, a sua differença, etc., e tal que o seu argumento se exprima por uma relação determinada entre os argumentos das funcções dadas*. São estas propriedades, como tambem é sabido, que dão áquellas funcções a sua maxima importancia.

Vamos ver que eguaes propriedades se verificam tambem nos integraes ellipticos de todas as especies.

Começando pelos de primeira, e pela somma, façamos

$$f(x)+f(y)=f(z) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

sendo

$$f(x)=\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

$$f(y)=\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}},$$

$$f(z)=\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}};$$

tracta-se de determinar z em funcção de x e y.

Façamos

$$f(x)+f(y)=C \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

sendo C uma constante. A differenciação dá, reduzindo ao mesmo denominador o resultado e dividindo por $1-k^2x^2y^2$

$$\frac{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}{1-k^2x^2y^2}dx+$$

$$+\frac{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{1-k^2x^2y^2}dy=0.$$

Integrando por partes, representando por M o primeiro integral e o segundo por N, temos

$$M = \frac{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}{1-k^2x^2y^2} . x -$$

$$-\int \frac{xy\{2k^2(x^2+y^2)-(1+k^2)(1+k^2x^2y^2)\}\,dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}(1-k^2x^2y^2)^2} -$$

$$-\int \frac{2k^2x^2y^2}{(1-k^2x^2y^2)^2}\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}\,dx,$$

ou, fazendo

$$\frac{xy\{2k^2(x^2+y^2)-(1+k^2)(1+k^2x^2y^2)\}}{(1-k^2x^2y^2)^2} = A$$

$$\frac{2k^2x^2y^2}{(1-k^2x^2y^2)^2} = B,$$

$$M = \frac{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}{1-k^2x^2y^2} x -$$

$$-\int \frac{A\,dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} -$$

$$-\int B\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}\,dx.$$

Analogamente se acharia

$$N=\frac{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{1-k^2x^2y^2}y-$$

$$-\int\frac{A\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}-$$

$$-\int B\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}\,dy.$$

Por fim, attendendo a que é

$$M+N=C_1,$$

e além d'isso

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}+$$

$$+\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}=0\;\ldots\ldots\ldots\;(c)$$

$$\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}.\,dx+\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}\,dy=0,$$

teremos

$$\frac{x\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}+y\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{1-k^2x^2y^2}=C_1 \ldots (d)$$

como condição para que seja verificada a relação (b).

Para $x=0$, (d) dá

$$y=C_1,$$

e como, na mesma hypothese, é $fx=0$, teremos (b)

$$C=f(C_1),$$

e portanto, fazendo $C_1=z$,

$$f(x)+f(y)=f(z) \ldots\ldots\ldots\ldots (31)$$

como se pretendia, sendo z ligado com x e y pela relação (d)

$$z=\frac{x\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}+y\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{1-k^2x^2y^2} \ldots (32).$$

Passando para funcções trigonometricas pelas hypotheses

$$x=\text{sen}\,\varphi,\ y=\text{sen}\,\psi,\ z=\text{sen}\,\sigma,$$

obteremos (31)

$$F(k, \varphi) + F(k, \psi) = F(k, \sigma) \ldots\ldots (33),$$

sendo (32)

$$\operatorname{sen} \sigma = \frac{\operatorname{sen} \varphi \cos \psi \, \Delta \psi + \operatorname{sen} \psi \cos \varphi \, \Delta \varphi}{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi \operatorname{sen}^2 \psi} \ldots (34).$$

É o theorema da addição dos integraes ellipticos de primeira especie que póde enunciar-se do seguinte modo: «*dois integraes ellipticos de primeira especie, do mesmo modulo e de amplitudes diversas, podem sempre reduzir-se pela sua somma a um integral da mesma especie, do mesmo modulo e com a amplitude determinada.*

A amplitude σ póde determinar-se pelo seno, usando de (34), ou por qualquer outra linha trigonometrica, transformando esta formula.

É assim que se póde achar

$$\operatorname{tg} \sigma = \frac{\operatorname{tg} \varphi \, \Delta \psi + \operatorname{tg} \psi \, \Delta \varphi}{1 - \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \psi \, \Delta \varphi \, \Delta \psi} \ldots\ldots (35)$$

formula, como se vê, muito apta para o calculo de σ.

O theorema da subtracção deduz-se de (33) e (34), mudando ψ em $-\psi$, e attendendo a que $F(k, \psi)$ se muda em $-F(k, \psi)$.

Temos assim (33)

$$F(k, \varphi) - F(k, \psi) = F(k, \sigma) \ldots\ldots (36)$$

sendo (34)

$$\operatorname{sen}\sigma = \frac{\operatorname{sen}\varphi\cos\psi\,\Delta\psi - \operatorname{sen}\psi\cos\varphi\,\Delta\varphi}{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi\operatorname{sen}^2\psi} \ldots (37),$$

ou (35)

$$\operatorname{tg}\sigma = \frac{\operatorname{tg}\varphi\,\Delta\psi - \operatorname{tg}\psi\,\Delta\varphi}{1+\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\psi\,\Delta\psi\,\Delta\varphi} \ldots\ldots (38).$$

Se em (33) fizermos $\varphi = \psi$, acharemos, pondo φ_2 por σ,

$$2F(k, \varphi) = F(k, \varphi_2),$$

sendo

$$\operatorname{sen}\varphi_2 = \frac{2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\,\Delta\varphi}{1-k^2\operatorname{sen}^4\varphi}.$$

Analogamente,

$$F(k, \varphi_2) + F(k, \varphi) = F(k, \varphi_3)$$

dá

$$3F(k, \varphi) = F(k, \varphi_3),$$

sendo

$$\operatorname{sen}\varphi_3 = \frac{\operatorname{sen}\varphi_2\cos\varphi\,\Delta\varphi + \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi_2\,\Delta\varphi_2}{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi\operatorname{sen}^2\varphi_2}$$

podendo φ_3 exprimir-se só em φ, pelas formulas deduzidas no caso antecedente. O que é bastante para mostrar como se podem multiplicar por qualquer numero os integraes ellipticos de primeira especie, e determinar o producto.

Egualmente se vê com clareza como é possivel a divisão de um integral d'esta especie por qualquer numero, e como se levaria a effeito.

Passemos aos integraes da segunda especie. Façamos

$$E(k, \varphi) + E(k, \psi) = x \,\ldots\ldots\ldots\, (A).$$

Differenciando vem

$$dx = \Delta\varphi\, d\varphi + \Delta\psi\, d\psi \,\ldots\ldots\ldots\, (a);$$

mas, attendendo a que, segundo o theorema da somma dos integraes de primeira especie, se tem

$$\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} + \frac{d\psi}{\Delta\psi} = 0 \,\ldots\ldots\ldots\ldots\, (b),$$

ou

$$\Delta\psi\, d\varphi + \Delta\varphi\, d\psi = 0,$$

virá, sommando com (a),

$$dx = [\Delta\varphi + \Delta\psi]\,[d\varphi + d\psi] \,\ldots\ldots\, (c).$$

Sabe-se que a equação (b) conduz á seguinte relação entre φ, ψ, σ

$$\cos\sigma = \cos\varphi\cos\psi - \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\psi\,\Delta\sigma \;\ldots\ldots (39)$$

que póde ser posta debaixo das fórmas

$$\left.\begin{array}{l}\cos\varphi = \cos\sigma\cos\psi + \operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\psi\,\Delta\varphi \\ \cos\psi = \cos\sigma\cos\varphi + \operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\varphi\,\Delta\psi\end{array}\right\}\ldots\ldots (40).$$

D'estas equações, tirando os valores de $\Delta\varphi$ e $\Delta\psi$, e pondo em (c), resulta

$$dx = \left(\frac{\cos\varphi - \cos\psi\cos\sigma}{\operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\sigma}\right)d\varphi + \left(\frac{\cos\psi - \cos\varphi\cos\sigma}{\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\sigma}\right)d\psi,$$

ou

$$dx = \frac{d\,(\operatorname{sen}^2\varphi + \operatorname{sen}^2\psi + 2\cos\sigma\cos\varphi\cos\psi)}{\operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\sigma},$$

ou ainda (40)

$$dx = k^2\,d\,(\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\psi);$$

que dá

$$x = k^2\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\psi + E\,(k, \sigma)$$

visto que $\varphi = 0$, dá (36) $\psi = \sigma$, e (A), $x = E\,(k, \sigma)$.

Temos portanto (A)

$$E(k,\varphi)+E(k,\psi)=E(k,\sigma)+k^2 \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\psi \operatorname{sen}\sigma \,..\, (41),$$

relação que estabelece o theorema da somma dos integraes ellipticos de segunda especie.

Para os integraes ellipticos de terceira especie, limitamo-nos a apresentar a formula que traduz o respectivo theorema, e a dizer que a ella se chegaria por um caminho inteiramente analogo.

Temos para estes integraes

$$\Pi_0(h,k,\varphi)+\Pi_0(h,k,\psi)=\Pi_0(h,k,\sigma)+$$

$$+\int_0^{\operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\psi} \frac{h \operatorname{sen}\sigma .\, d(\operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\psi)}{1+h\operatorname{sen}^2\sigma-2h\Delta\sigma\cos\sigma\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\psi+h(h+k^2\operatorname{sen}^2\sigma)\operatorname{sen}^2\varphi\operatorname{sen}^2\psi} \,..\, (42)$$

onde se não acha effectuada a integração por ella depender dos valores de k e h.

Os theoremas respectivos para as outras operações sobre os integraes de segunda e terceira especie, seriam evidentemente deduzidos das formulas (41) e (42) como para os de primeira especie o foram de (33).

CAPITULO V

Resumo. — Applicações. — Rectificações, especialmente da ellipse e da hyperbole. — Ideia de usos mais latos.

Vejâmos como o conhecimento dos integraes ellipticos póde conduzir á obtenção de um arco de ellipse rectificado. Seja (fig. 3) $BM = s$ o arco que se pretende conhecer, contado a partir da extremidade B do eixo menor. Sabe-se que, traçados os dois circulos concentricos com a ellipse, e cujos raios são os dois semi-eixos a e b, um ponto qualquer da ellipse M, tem a mesma abscissa que o ponto N do circulo exterior, e a mesma ordenada que o ponto Q do circulo interior dado pela sua intersecção com o raio AN. Temos portanto, representando por x e y as coordenadas de M, e por φ o angulo BAN,

$$x = a \operatorname{sen} \varphi$$

$$y = b \cos \varphi;$$

logo

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = (a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)\, d\varphi^2 =$$

$$= [a^2 - (a^2 - b^2) \operatorname{sen}^2 \varphi]\, d\varphi^2 = a^2 \left\{ 1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \operatorname{sen}^2 \varphi \right\} d\varphi^2.$$

Portanto, fazendo $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=k$, que marca a excentricidade, teremos

$$s=a\int_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}.\,d\varphi=a\,E(k,\varphi).$$

Por onde se vê como a rectificação da ellipse depende de um integral elliptico de segunda especie.

Para obter o quarto da ellipse, fariamos $\varphi=\frac{1}{2}\pi$, e teriamos

$$s=a\,E\left(k,\frac{1}{2}\pi\right).$$

Usando da theoria da addição dos integraes de segunda especie, poderemos achar a somma de dois arcos de ellipse, e resolver muitos outros e importantes problemas a respeito dos arcos d'esta secção conica.

Para a hyperbole, (fig. 4), sendo OA o seu semi-eixo maior, AB o semi-eixo menor, $OB=\sqrt{a^2+b^2}$ a sua excentridade, e tomando $OC=\frac{\overline{AB}^2}{OB}=\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$ uma terceira proporcional a OB e AB; finalmente, tirando por C a parellela CD ao segundo eixo, teremos para um ponto qualquer M

$$M'C=y=OC.\operatorname{tg}M'OC=\frac{b^2\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

representando por φ o angulo $M'OC$.

Da equação

$$x=\frac{a}{b}\sqrt{y^2+b^2}$$

tira-se para valor da abcissa

$$x=\frac{a}{\cos\varphi}\sqrt{1-\frac{a^2}{a^2+b^2}\operatorname{sen}^2\varphi},$$

ou, fazendo $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=k,$

$$x=\frac{a}{\cos\phi}\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}.$$

Teremos pois

$$ds=\frac{b^2\,d\varphi}{\sqrt{a^2+b^2}.\cos^2\varphi\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}},$$

que dá, por fim,

$$s=\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}F(k,\varphi)-\sqrt{a^2+b^2}\,E(k,\varphi)+$$

$$+\sqrt{a^2+b^2}\,\Delta.\varphi\operatorname{tg}\varphi.$$

Por onde se vê como um arco de hyperbole póde ser rectificado fazendo uso dos integraes ellipticos de primeira e segunda especie.

Entre os arcos da hyperbole podem fazer-se combinações analogas ás que se podem fazer com os arcos da ellipse, bem como se podem comparar arcos de ambas estas curvas. Nós tocamos muito por alto este ponto porque nos desvia do nosso fim. Queremos neste capitulo apenas, justificando o nome dado aos integraes que estamos estudando, mostrar algumas das suas applicações.

Querendo dilatar estas applicações, veriamos como uma immensidade de problemas de geometria e mechanica vem a depender d'estes integraes.

Já n'outro logar as apontámos, e com isso nos satisfazemos. Estudal-as por miudo pertenceria a outro livro que não tivesse este caracter.

SEGUNDA PARTE

Funcções ellipticas

CAPITULO VI

RESUMO. — Definição e propriedades das funcções ellipticas. — Suas especies e distincções.

De certo que a analyse teria conduzido o espirito do homem ao conhecimento das funcções goniometricas e cyclometricas, arcos e linhas trigonometricas, se a geometria se não tivesse antecipado no seu descobrimento, e enumeração de suas propriedades.

Assim os integraes

$$\int_0^z \frac{z}{\sqrt{1-z^2}} = \text{ar sen } z, \int_0^z \frac{dz}{1+z^2} = \text{arc tg } z$$

dariam, invertendo estas funcções, e fazendo arc sen $z = u$, arc tg $z = v$

$$z = \text{sen } u, \quad z = \text{tg } v;$$

e do mesmo modo para as outras e analogas funcções.

O estudo dos integraes respectivos daria o conhecimento das propriedades d'estas funcções. Emfim nenhum dos caracteres que a geometria lhes assignou ficaria por descobrir.

C'est, diz Hermite, *en quittant le champ de l'algèbre et en quelque sorte dès l'abord du calcul intégral, qu'on est amené naturellement et sans effort à l'origine véritablement féconde d'une infinité de fonctions nouvelles, distinctes essentiellement les unes des autres, offrant pour chacune d'elles un ordre de notions analytiques propres, en même temps que de caractères communs qui les réunissent en grandes catégories, et dont l'étude aprofondie est l'un des objets les plus intéressants de la science actuelle.*

Este caminho porem que não é originario no estudo das funcções goniometricas e cyclometricas, tem este caracter no estudo das funcções ellipticas, que só a analyse, e muito modernamente, estudou na sua definição, propriedades e numerosas applicações.

Attentando no valor do estudo das funcções circulares e trigonometricas, na maneira como o calculo integral a ellas conduz pela inversão de certos integraes, facil nos parece o apparecimento no espirito da ideia de estudar as funcções inversas dos integraes ellipticos. São estas funcções inversas que receberam de Abel o nome de funcções ellipticas.

Fazendo para os integraes ellipticos de primeira especie

$$F(k, \varphi) = u \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (43)$$

tem-se a notação inversa

$$\varphi = am\,(u), \text{ mod. } k$$

ou, mais simplesmente, $\ldots\ldots\ldots$ (44)

$$\varphi = am\,(u, k)$$

e diz-se : φ *egual a amplitude de* u *e* k.

Para valores particulares do modulo, como $k=0$, $k=1$, tem-se

$$u=F(0,\varphi)=\varphi.$$

$$u=F(1,\varphi)=\mathrm{l.\,tg}\left(\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{2}\varphi\right)$$

ou

$$\varphi=2\,\mathrm{arc\,tg}\,e^u-\frac{1}{2}\pi;$$

valores que dão por (44)

$$u=am(0,u),$$

$$\varphi=am(1,u)=2\,\mathrm{arc\,tg}\,e^u-\frac{1}{2}\pi.$$

Como vimos na primeira parte, o conhecimento dos integraes ellipticos de primeira especie de qualquer modulo e amplitude, póde sempre fazer-se depender do conhecimento de um integral completo, e de um outro não completo, do mesmo modulo, e cuja amplitude é inferior a $\frac{1}{2}\pi$. Esta propriedade é expressa pela formula

$$\int_0^{m\pi\pm\omega}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}=2mK\pm\int_0^{\omega}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}\dots\text{(45)}.$$

Fazendo

$$\int_0^{\omega} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = u, \int_0^{m\pi \pm \omega} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = v,$$

tem-se

$$\omega = am(u), \quad m\pi \pm \omega = am(v),$$

$$v = 2mK \pm u;$$

logo

$$am(2mK \pm u) = m\pi \pm am(u) \ldots\ldots (46)$$

que mostra uma propriedade correspondente e fundamental para as funcções ellipticas.

De

$$\int_0^{-\psi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = -\int_0^{\psi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$$

tira-se facilmente

$$am(-\varphi) = -am(\varphi) \ldots\ldots\ldots (47)$$

que indica outra propriedade, como se vê, de summa importancia tambem.

Póde dar-se uma imagem geometrica d'estas relações entre as amplitudes e os integraes, construindo a curva das amplitudes (fig. 5), que tem por abcissas o valor do integral, ou u, e por ordenadas as respectivas amplitudes, ou φ.

Sendo $\varphi=0$, para $u=0$, vê-se que a curva passa pela origem.

A inclinação da tangente com o eixo dos x é dada por

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{d.am(u)}{du}=\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi},$$

que para $\varphi=0$, dá $\alpha=45°$;

para $\varphi=\pi$, $\alpha=\operatorname{arc}(\operatorname{tg}=\sqrt{1-k^2})$;

e, para $\varphi=2\pi$, $\alpha=45°$.

Vê-se pois que a curva, dividindo ao meio o angulo das coordenadas na origem, se vae successivamente abatendo sobre o eixo dos x, até um limite inferior, crescendo depois até novamente adquirir a inclinação de 45°, e assim indefinidamente.

Fazendo

$$u=\pm K, \pm 2K, \pm 3K, \ldots \pm mK,$$

acha-se para φ

$$\varphi = \pm \frac{\pi}{2}, \pm 2\frac{\pi}{2}, \pm 3\frac{\pi}{2} \ldots \pm m\frac{\pi}{2};$$

o que mostra que os pontos da curva das amplitudes que tem por abcissas multiplos do integral completo, se acham sobre uma recta, passando pela origem das coordenadas.

Fazendo

$$u = 2K + u',$$

acha-se, por (46),

$$\varphi = \pi + am(u'),$$

por onde se vê que se $C_1 D_1$ se fizesse coincidir com AB_1, a porção de curva $C_1 n D_1$ coincidiria com $A m B_1$.

Fazendo

$$u = 2K - u',$$

acha-se pela mesma equação (46)

$$\varphi = \pi - am(u'),$$

por onde se vê que o arco $B_1 C_1$ é egual a AB_1, mas em ordem inversa.

E estas propriedades, que a discussão das equações (46) e (47) manifestam, dão perfeito conhecimento da curva em questão.

A fórma normal dos integraes ellipticos de primeira especie

$$u=\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \ldots\ldots\ldots (48)$$

ou

$$u=\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi},$$

dá para inversa, ou para funcção elliptica correspondente, por ser $\varphi = am(u)$,

$$z = \text{sen.}\, am(u) \ldots\ldots\ldots\ldots (49).$$

Analogamente todos os integraes ellipticos que se podem reduzir ou fazer depender de (48), originam respectivas funcções ellipticas de primeira especie tambem, e que se acham do mesmo modo.

Por entre essa infinidade de funcções, cuja existencia se concebe, tres têm sido consideradas como merecendo especial attenção, porque ellas constituem a base de todas as outras; têm um caracter especificado de maior simplicidade relativa, ou pelo menos podem ser consideradas como os termos de reducção de todas as outras.

Estas tres funcções da amplitude são, além de (49) que dá o *seno da amplitude*, o *coseno da amplitude* e *delta da amplitude*, que se deduzem, como inversas dos integraes

$$v = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(k'^2+k^2z^2)}} \ldots\ldots (50)$$

$$t = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(z^2-k'^2)}} \ldots\ldots (51);$$

das quaes a primeira dá

$$z = \cos.\, am(v) \ldots\ldots\ldots\ldots (52),$$

e a segunda

$$z = \Delta\, am(t) \ldots\ldots\ldots\ldots (53).$$

Estas tres funcções (49), (52) e (53), são, como as funcções goniometricas, sujeitas á periodicidade. Este caracter porém, ao mesmo tempo que marca uma importante analogia entre estas duas ordens de funcções, pela diversidade com que se apresenta em cada uma, assignala simultaneamente a sua dessimilhança. Vamos estudar este caracter da periodicidade nas tres funcções que definimos, e veremos como elle marca a estas funcções uma ordem mais elevada que para as funcções goniometricas.

Por ser (46)

$$am\,(4\,K \pm u) = 2\,\pi \pm am\,(u)$$

será

$$\operatorname{sen} am\,(4\,K \pm u) = \pm \operatorname{sen} am\,(u),$$

que dá, attendendo a (47),

$$\operatorname{sen} am\,(u \pm 4\,K) = \operatorname{sen} am\,(u) \ldots\ldots \quad (54).$$

Do mesmo modo

$$\cos am\,(u \pm 4\,K) = \cos am\,(u) \ldots\ldots \quad (55)$$

$$\Delta\, am\,(u \pm 4\,K) = \Delta\, am\,(u) \ldots\ldots\ldots \quad (56)$$

formulas estas que mostram como as tres funcções em questão, adquirem o mesmo valor quando a variavel augmenta de $4\,K$.

É de notar, porém, como caracter distinctivo d'estas funcções, que o seu periodo não é um numero absoluto, como nas funcções goniometricas, pois que, attendendo á significacão de K, elle depende do valor do modulo.

Não é só esta a differença entre as duas ordens de funcções. Estudando a sua periodicidade debaixo de um ponto de vista mais geral vamos ver, começando pelo seno da amplitude, que estas tres funcções são duplamente periodicas, pois que têm, alem do periodo real $4\,K$ que já determinámos, um segundo periodo imaginario.

É realmente esta propriedade das funcções ellipticas, a mais importante e digna de ser convenientemente analysada. Tem ella sido, como se sabe, objecto de serios e importantissimos trabalhos, que tem conduzido a curiosas conclusões. Jacobi havia demonstrado de uma maneira clara e precisa que a dupla periodicidade marcava o maximo d'esta propriedade em qualquer funcção, provando ser absurda a existencia de uma funcção com mais de dois periodos.

Briot e Bouquet, seguindo os trabalhos de Liouville sobre as funcções duplamente periodicas, mostram como esta propriedade se manifesta nas funcções ellipticas; e Liouville, corroborando a proposição de Jacobi, demonstra que só estas funcções gosam de tal propriedade.

O seu estudo fará no nosso trabalho o objecto do capitulo seguinte.

CAPITULO VII

RESUMO. — Dupla periodicidade das tres funcções ellipticas de primeira ordem: *seno, coseno, e* Δ, *da amplitude.*

Comecemos pela primeira d'estas funcções, estudando o integral correspondente

$$U = \int_0^z f(z)\,dz$$

sendo

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

e determinemos o valor d'este integral entre limites dados, apreciando os valores de que elle é susceptivel quando varia o caminho da integração.

Como se vê, $f(z)$ apresenta quatro *pontos singulares*

$$z = +1, z = -1, z = \frac{1}{k}, z = -\frac{1}{k}$$

em que passa pelo infinito.

Estes quatros pontos estão: os dois primeiros, situados sobre o eixo do x, á direita e á esquerda da origem; os dois segundos, sobre este eixo na mesma collocação relativa, ou fóra e um abaixo outro acima, segundo K for uma quantidade real ou imaginaria. É o que mostra a representação de Cauchy, que n'outro logar apresentámos.

Considerando o caso mais geral sejam (fig. 6) B_1, B_2, C_1, C_2 estes quatro pontos, e sejam A e M os pontos limites do integral.

Como se vê, muitos são os caminhos que podem seguir-se para ir de A a M. De todos estes caminhos o mais geral, porém, é evidentemente aquelle em que o ponto movel, partindo de A, cerca muitas vezes cada um dos pontos, e volta a A, para seguir pelo caminho rectilineo AM.

Para termos, portanto, a formula geral do valor do integral, precisamos de determinar o seu valor parcial, suppondo que o ponto movel envolve individualmente muitas vezes cada um dos pontos singulares em questão.

Assim: se, partindo de A, envolve B_1 por um circulo de raio r, que se deve depois fazer infinitamente pequeno, nós temos, segundo a notação já adoptada na introducção;

$$\int A D_1 m_1 D_1 A = \int A D_1 + \int D_1 m_1 D_1 + \int D_1 A.$$

Ora, o integral circular torna-se, pela transformação em coordenadas polores, em

$$\int D_1 m_1 D_1 = -ir \int_0^{2\pi} f(1 - r e^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta,$$

que se annulla para $r = 0$.

Quanto aos dois integraes rectilineos, suppondo que a funcção parte de A com o valor inicial $+1$, e attendendo a que a funcção tem no segundo trajecto em todos os pontos o mesmo valor mas com signal contrario, e que ao mesmo tempo os limites são os mesmos mas em ordem inversa, vê-se que elles dão precisamente o mesmo valor; vindo assim a ficar o integral em questão, que, por brevidade, representaremos por F,

$$F=2\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}.$$

O valor do integral correspondente a uma segunda revolução em volta do mesmo ponto B_1 seria $-F$, attendendo a que $f(z)$ começaria essa revolução com o mesmo valor, mas signal contrario ao que tinha no principio da primeira. Uma terceira revolução daria o valor $+F$; e assim por deante.

Vê-se pois em resumo que: *se o caminho da integração, começando em* A *e terminando neste mesmo ponto, envolver* n *vezes o ponto singular* B_1, *o integral correspondente terá por valor, zero, ou* F, *conforme* n *for um numero par ou impar.*

Do mesmo modo para o ponto B_2, com a differença de que, sendo os limites do integral *zero* e -1, acharemos depois de uma revolução, $-F$, zero depois de duas; em resumo: $-F$ *ou zero, conforme o numero de revoluções for impar ou par.*

Fazendo, por simplicidade

$$2\int_0^{+\frac{1}{k}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}=\pm G$$

acharemos que: *se o caminho de integração, partindo de* A, *e terminando neste mesmo ponto, envolver muitas vezes,* m *por exemplo, os pontos* C_1 *ou* C_2, *o valor do integral será zero ou* $\pm$ G, *conforme* m *for par ou impar, referindo-se o signal* + *ao movimento em volta de* C_1 *e o signal* — *ao que se suppõe em volta de* C_2.

Posto isto, e no caso mais geral, em que se considera o caminho partindo de A, envolvendo muitas vezes B_1, voltando a A e envolvendo muitas vezes B_2, em seguida C_1 e C_2, voltando sempre a A no fim de cada revolução, para a final seguir de A a M pelo caminho rectilineo, teremos para valor do integral

$$\int_0^z f(z)\,dz = pF + qG + \int\Big|_0^z \left\{\pm f(z)\right\} dz \ldots \quad (57),$$

sendo o signal de $f(z)$ no integral linear o que esta funcção tiver quando voltar á origem para seguir o caminho rectilineo AM; e, sendo p e q numeros que podem ser positivos ou negativos, pares ou impares, sempre inteiros.

Discutindo todos os casos possiveis quanto aos valores pares ou impares de p e q, com o fim de conhecer nesses diversos casos o signal de $f(z)$, acha-se finalmente que todos os valores do integral (57) estão comprehendidos nas duas formulas

$$\int_0^z f(z)\,dz = 2mF + n(F-G) + \int\Big|_0^z f(z)\,dz \ldots \quad (58)$$

$$\int_0^z f(z)dz = (2m+1)F + n(F-G) - \int\Big|_0^z f(z)dz \ldots \quad (59),$$

sendo m e n numeros inteiros, pares ou impares.

O conhecimento do integral proposto fica portanto reduzido á determinação de F e $F-G$.

O primeiro é

$$F=2\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}=2K.. \quad (60);$$

o segundo, é o valor de $\int f(z)\,dz$ correspondente ao caminho que, começando em A envolve seguidamente os pontos B_1 e C_1. E como por este caminho podemos substituir um outro composto de AD_1, do circulo em volta de B_1, da porção rectilinea D_1E_1, do circulo em volta de C_1, e finalmente da porção rectilinea E_1A_1, sendo cada um dos circulos de raio infinitamente pequeno; e, por ultimo, attendendo a que, não existindo, por hypothese, nenhum ponto singular dentro do triangulo AE_1D_1, podemos, conforme vimos na introducção d'este trabalho, substituir o caminho rectilineo E_1A_1 por E_1D_1A, teremos

$$F-G=\int\Big|_0^{1-r} f(z)\,dz+\text{integral circular}+$$

$$+\int\Big|_{1-r}^{\frac{1}{k}-r}\Big\{-(fz)\Big\}\,dz+\text{integral circular}+$$

$$+\int\Big|_{\frac{1}{k}-r}^{1-r}\Big\{+f(z)\Big\}\,dz+\int\Big|_{1-r}^{0}\Big\{+f(z)\Big\}\,dz.$$

Fazendo $r=0$, os integraes circulares, como já vimos, annullam-se; o primeiro destroe-se visivelmente com o ultimo; e os dois restantes, sommando-se, fica por fim

$$F-G=-2\int_1^{\frac{1}{k}}\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}.$$

Sendo k uma fracção positiva e real esta expressão é imaginaria, e pode reduzir-se a

$$F-G=-\frac{2}{i}\int_1^{\frac{1}{k}}\frac{dz}{\sqrt{(z^2-1)(1-k^2z^2)}},$$

onde os dois factores binomios são ambos positivos, e o radical real.

Finalmente, pondo

$$1-k^2=k_i^2,\ z=\frac{1}{\sqrt{1-k_i^2x^2}},$$

vem

$$F-G=2i\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k_i^2x^2)}}=2iK_1\ldots\ (61).$$

A k e k_1 chamou Legendre *modulos complementares*.

Vê-se pois que F e $F - G$ se reduzem aos integraes ellipticos completos K e K' de modulos k e k_1, sendo assim (58), (59)

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = 4mK + i.2nK_1 +$$

$$+ \int\Big|_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = (4m+2)K +$$

$$+ i.2nK_1 - \int\Big|_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}};$$

ou

$$U = 4mK + i.2nK_1 + u,$$

$$U = (4m+2)K + i.2nK_1 - u,$$

representando por u o valor do integral linear, e por U o do integral geral.

Invertendo estes integraes e attendendo ás precedentes relações, acharemos

$$\operatorname{sen} am\,(4\,m\,K + i.\,2\,n\,K_1 + u) = \operatorname{sen} am\,(u)\ldots \quad (62),$$

$$\operatorname{sen} am\,\{(4\,m+2)\,K + i.\,2\,n\,K_1 - u\} = \operatorname{sen} am\,(u)\ldots \quad (63).$$

Por onde se vê que: *o seno da amplitude tem, alem do periodo real* 4 K_1 *já assignalado no capitulo precedente, um outro imaginario de indice* i. 2 K_1.

Póde representar-se geometricamente esta dupla periodicidade do seno da amplitude de uma maneira muito elegante, e inteiramente analoga á da simples periodicidade das funcções trignometricas.

Assim (fig. 7), tirados os dois eixos OX e OY, e tomando sobre elles a partir da origem $OA = 4\,K$, $OC = 2\,K_1$, vê-se claramente pela doutrina exposta que o valor que o seno da amplitude toma em qualquer ponto M interior d'este rectangulo, se reproduz em todos os pontos M_1, M_2, etc., M', M'_1, M'_2 etc., collocados noutros e eguaes rectangulos, nas mesmas condições.

Dentro do mesmo rectangulo vê-se facilmente que ha quatros pontos em que esta funcção tem o mesmo valor absoluto, mas positivo em dois, negativo noutros dois, estando cada um d'esses pontos collocado numa das quatro partes em que o rectangulo é dividido pelas linhas ac e bd. De sorte que, estas quatro partes são para esta funcção, o que os quatro quadrantes do circulo são para o seno ordinario.

Vê-se mais que em cada rectangulo a funcção em questão é nulla nos seis pontos

$$0,\ 2\,K,\ 4\,K,\ i.\,2\,K_1,\ 2\,K + i.\,2\,K_1,\ 4\,K + i.\,2\,K_1,$$

e infinita em tres

$$i.K, 2K+i.K_1, 4K+i.K_1.$$

Considerando porém todos os rectangulos successivos como tendo dois lados communs cada um com os seguintes, os seis zeros reduzem-se a dois zeros simples, os tres infinitos a dois infinitos simples, sobrepondo-se os restantes.

Completando as mais importantes propriedades d'esta funcção, facilmente se mostraria, como fazem Briot e Bouquet, que ella é impar e monodroma.

Em conclusão, e seguindo a nomenclatura de Liouville: *O seno da amplitude é uma funcção monodroma, impar, duplamente periodica, com dois zeros e dois infinitos simples.*

Ás proporções do presente trabalho não nos permittem dar todo o desenvolvimento que desejaramos a esta doutrina.

Assim, pelo que respeita ás duas restantes funcções, apenas diremos que, por um caminho inteiramente analogo, se chegaria a analogas conclusões para ellas.

Para o coseno póde proceder-se: já, discutindo directamente a formula

$$\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(k'^2+k^2z^2)}}=u$$

que lhe dá origem, já, e mais simplesmente, definindo esta funcção pela relação

$$\cos am(u)=\sqrt{1-\text{sen}^2 am(u)}.$$

Achar-se-ia por qualquer dos caminhos que:

O coseno da amplitude é uma funcção monodroma, par, duplamente periodica, sendo $4K$ *o indice do periodo real, e* $2K + i.2K_1$ *o do periodo imaginario, com dois zeros e dois infinitos simples.*

Para a funcção *delta da amplitude* achar-se-ia, pelo mesmo caminho, que: *É uma funcção monodroma, par, duplamente periodica com os indices* $2K$ *e* $i.4K_1$ *com dois zeros e dois infinitos em cada parellelogrammo.*

As conclusões a que chegamos suppõe K e K_1, e portanto k, reaes. No caso contrario a questão complica-se extremamente, e espera ainda a sua solução.

Não terminaremos este capitulo sem duas palavras que, embora por alto, signifiquem um convencimento nosso, corroborando o que dissemos no fim do primeiro capitulo.

É a dupla periodicidade das funcções ellipticas, ao mesmo tempo que o mais valioso titulo do seu valor, a mais conveniente prova da sua cathegoria superior. *Cette propriété importante,* diz Hermite, *manifeste d'une manière toute particulière la différence de nature des fonctions que la possèdent avec les fonctions algébriques rationnelles, et leur imprime leur caractère le plus apparent en quelque sorte de fonctions transcendantes.*

Desde que estas funcções manifestam propriedades tão essencialmente distinctas de outras, não póde ficar no espirito a mais leve duvida do seu caracter e natureza essencialmente distincto tambem. E d'ahi a importancia superior do seu estudo, já debaixo do ponto de vista meramente theoretico já no campo verdadeiramente pratico.

CAPITULO VIII

Resumo. — Operações dos argumentos nas tres funcções ellipticas de primeira especie.— Formulas e deducções. — Representação geometrica.

Vimos no capitulo IV que é sempre possivel satisfazer á condição

$$f(x) + f(y) = f(z) \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; (64)$$

sendo

$$f(x) = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

e analogamente $f(y)$ e $f(z)$, desde que as variaveis x, y e z, fossem ligadas pela relação

$$z = \frac{x\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)} + y\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{1-k^2x^2y^2} \ldots (65).$$

É este theorema, apresentado a primeira vez por Euler, que a elle foi conduzido por uma especie de milagre d'estes comtudo que só são proprios dos grandes genios, pela integração da equação

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}+\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}=0$$

que estabelece as bases para a deducção de sen $am\,(a+b)$, cos $am\,(a+b)$, $\Delta\, am\,(a+b)$, em funcção das similhantes dos argumentos simples. É este theorema de primeira importancia pois que foi o ponto de partida para a creação da theoria das funcções ellipticas.

Designando respectivamente $f(x), f(y), f(z)$, por a, b, c, tem-se (64)

$$a+b=c$$

sendo alem d'isso

$$x=\text{sen}\,am\,(a)$$

$$y=\text{sen}\,am\,(b),$$

$$z=\text{sen}\,am\,(c)=\text{sen}\,am\,(a+b);$$

logo (65)

$$\text{sen}\,am(a+b)=\frac{\text{sen}\,am(a)\cos am(b)\Delta am(b)+\text{sen}\,am(b)\cos am(a)\Delta\, am(a)}{1-k^2\,\text{sen}^2\,am\,(a)\,\text{sen}^2\,am\,(b)}\,.. \quad (66)$$

que corresponde á formula de $\operatorname{sen}(a+b)$ em trigonometria, e a ella se reduz para $k=0$.

Analogamente, transformando (64) para dar o coseno, ou tirando de lá o valor de $\sqrt{1-z^2}$, e fazendo as substituições indicadas, acharemos

$$\cos am(a+b)=\frac{\cos am(a)\cos am(b)-\operatorname{sen} am(a)\operatorname{sen} am(b)\,\Delta am(a)\,\Delta am(b)}{1-k^2\operatorname{sen}^2 am(a)\operatorname{sen}^2 am(b)}\ldots (67).$$

Emfim, tirando de (65) o valor de $\sqrt{1-k^2z^2}$, teriamos

$$\Delta am(a+b)=\frac{\Delta am(a)\,\Delta am(b)-k^2\operatorname{sen} am(a)\operatorname{sen} am(b)\cos am(a)\cos am(b)}{1-k^2\operatorname{sen}^2 am(a)\operatorname{sen}^2 am(b)}\ldots (68).$$

D'estas formulas fundamentaes e por um caminho inteiramente analogo ao que se segue em trigonometria, deduzem-se facilmente muitas relações importantes no calculo d'estas funcções ellipticas.

Assim, fazendo $a=b$ em (66), (67), (68), acha-se immediatamente

$$\operatorname{sen} am(2a)=\frac{2\operatorname{sen} am(a)\cos am(a)\,\Delta am(a)}{1-k^2\operatorname{sen}^4 am\,a},$$

$$\cos am\,2(a)=\frac{1-2\operatorname{sen}^2 am(a)+k^2\operatorname{sen}^4 am(a)}{1-k^2\operatorname{sen}^4 am(a)},$$

$$\Delta am(2a)=\frac{1-2k^2\operatorname{sen}^2 am(a)+k^2\operatorname{sen}^4 am(a)}{1-k^2\operatorname{sen}^4 am(a)};$$

e analogamente se achariam muitas outras.

Os theoremas da somma e multiplicação dos argumentos das funcçges ellipticas de primeira especie podem ser representados geometricamente por uma construcção simples e elegante que mostra como pelo conhecimento dos argumentos dados, se determina o argumento somma ou producto. O que deixamos dicto porém é sufficiente para dar ideia do modo como estas operações podem executar-se e da sua importancia. Tanto nos basta, tanto queriamos conseguir.

Terminaremos o nosso trabalho, dando no capitulo seguinte ideia do modo de representar estas funcções por series, abstendo-nos do estudo analogo nas funcções das outras duas ordens, por ser trabalho alem de muitissimo dilatado, muito laborioso e de menos importancia. Por outra parte, o estudo das funcções de primeira especie bem aclara o caminho a seguir nas de segunda e terceira especie.

CAPITULO IX

Resumo. — Desenvolvimento em serie das funcções de primeira especie. — Exposição de methodos para esse fim. — Sua critica e confrontação.

As tres funcções ellipticas de primeira especie que estamos estudando podem desenvolver-se em serie, fazendo uso dos diversos methodos conhecidos para esse fim.

Podemos, por exemplo, servir-nos da formula de Mac-Laurin, que se applica evidentemente ás funcções synecticas, embora de variavel imaginaria.

O seno da amplitude é uma funcção synectica para valores do modulo inferiores a K_1; teremos pois, com esta restricção, segundo a formula apontada, e, attendendo a que esta funcção é impar,

$$\operatorname{sen} am(x) = \left(\frac{d \operatorname{sen} am(x)}{dx}\right)_0 \frac{x}{1} + \left(\frac{d^3 \operatorname{sen} am(x)}{dx^3}\right)_0 \frac{x^3}{1.2.3} +$$

$$+ \left(\frac{d^5 \operatorname{sen} am(x)}{dx^5}\right)_0 \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \ldots \quad (69).$$

Mas é

$$\frac{d \operatorname{sen} am(x)}{dx} = \cos am(x)\, \Delta\, am(x) \;\ldots\ldots\; (a)$$

$$\frac{d^2 \operatorname{sen} am(x)}{dx^2} = -(1+k^2) \operatorname{sen} am(x) + 2k^2 \operatorname{sen}^3 am(x)$$

$$\frac{d^3 \operatorname{sen} am(x)}{dx^3} = [-(1+k^2) + 6k^2 \operatorname{sen}^2 am(x)] \cos am(x)\, \Delta\, am(x) \;\ldots\; (b)$$

etc.
que dão, fazendo $x = 0$,

$$\left[\frac{d \operatorname{sen} am(x)}{dx}\right]_0 = 1$$

$$\left[\frac{d^3 \operatorname{sen} am(x)}{dx^3}\right]_0 = -(1+k^2)$$

etc.

E portanto (69)

$$\operatorname{sen} am(x) = x - \frac{1+k^2}{1.2.3} x^3 \;\ldots\ldots\; (70).$$

Para $k = 0$ achar-se-hia a formula conhecida, que dá o desenvolvimento do seno em funcção do arco.

Para o coseno temos, attendendo a que é uma funcção par, e que é synectica para valores do modulo inferiores a K_1, teremos

$$\cos am(x) = \left[\frac{d^2 \cos am(x)}{d x^2}\right]_0 \frac{x^2}{1.2} +$$

$$+ \left[\frac{d^4 \cos am(x)}{d x^4}\right]_0 \frac{x^4}{1.2.3.4} +$$

$$+ \left[\frac{d^6 \cos am(x)}{d x^6}\right]_0 \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots \quad (71);$$

que dá, determinando os coefficientes directamente, ou por (70), attendendo á dependencia das duas funcções,

$$\cos am(x) = 1 - \frac{1}{1.2} x^2 + \frac{1 + 4k^2}{1.2.3.4} x^4 \ldots \quad (72);$$

que, do mesmo modo, dá o desenvolvimento do coseno no arco, quando se fizer $k = 0$.

Analogamente achariamos para a terceira funcção

$$\Delta\, am(x) = 1 - \frac{k^2}{1.2} x^2 + \frac{k^2 (4 + k^2)}{1.2.3.4} x^4 \ldots \quad (73),$$

sendo sempre o modulo inferior a K_1.

D'estas series muitas outras se podem deduzir, algumas de grande importancia.

Assim, sendo

$$d\,am(x) = \Delta\,am(x)\,dx,$$

obtem-se por (73), e, integrando,

$$am(x) = x - \frac{k^2}{1.2.3}x^3 + \frac{k^2(4+k^2)}{1.2.3.4.5}x^5 \ldots \quad (74).$$

Weierstrass, a quem a sciencia deve importantissimos trabalhos sobre este delicado assumpto, obteve uma nova representação das tres funcções que estamos estudando, em expressões fraccionarias, cujos termos são series racionaes em relação a x e k^2, e muito convergentes para valores reaes ou imaginarios d'estas duas quantidades. Além d'isso os denominadores das fracções são eguaes em todas as funcções.

Este eminente geometra achou, por uma analyse trabalhosa, mas simples

$$\left.\begin{aligned} \text{sen}\,am(x) &= \frac{e^p}{e^s} \\ \cos am(x) &= \frac{e^q}{e^s} \\ \Delta\,am(x) &= \frac{e^r}{e^s} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (75),$$

sendo p, q, r, s, dados pelas expressões

$$p = a + bx - \int_x^K dx \int_x^K \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 am(x)},$$

$$q = -\int_0^x dx \int_0^x \frac{\Delta^2 am(x)}{\cos^2 am(x)}\, dx,$$

$$r = -\int_0^x dx \int_0^x \frac{k^2 \cos^2 am(x)}{\Delta^2 am(x)}\, dx,$$

$$s = -\int_0^x dx \int_0^x k^2 \operatorname{sen}^2 am(x)\, dx,$$

e

$$a = (K - E)\, K - G$$

$$b = -(K - E).$$

Tirando de (70)

$$\operatorname{sen}^2 am(x) = x^2 - \frac{1 + k^2}{3} x^4 + \frac{2 + 13k^2 + 2k^4}{5.9} x^6 \ldots,$$

multiplicando por k^2, e, fazendo duas integrações, acha-se

$$s = -\frac{k^2}{3.4}x^4 + \frac{k^2+k^4}{3.5.6}x^6 - \frac{2k^2+13k^4+2k^6}{5.7.8.9}x^8 \ldots;$$

e, por ultimo, sendo

$$e^s = 1 + \frac{s}{1} + \frac{s^2}{1.2} + \frac{s^3}{1.2.3} + \ldots,$$

$$e^s = 1 - \frac{k^2}{3.4}x^4 + \frac{k^2+k^4}{3.5.6}x^6 - \frac{8k^2+17k^4+8k^6}{4.5.7.8.9}x^8 \ldots (76).$$

Achado assim e^s, obteremos e^p, e^q, e^r, da maneira mais simples multiplicando e^s (75), respectivamente por (70), (72), (73). Obtem-se assim, depois de longo trabalho,

$$e^p = x - \frac{1+k^2}{1.2.3}x^3 + \frac{1+4k^2+k^4}{1.2.3.4.5}x^5 -$$

$$- \frac{1+9(k^2+k^4)+k^6}{1.2.3.4.5.6.7}x^7 + \ldots\ldots (77),$$

$$e^q = 1 - \frac{1}{1.2}x^2 + \frac{1+2k^2}{1.2.3.4}x^4 - \frac{1+6k^2+8k^4}{1.2.3.4.5.6}x^6 +$$

$$+ \frac{1+12k^2+60k^4+32k^6}{1.2.3.4.5.6.7.8}x^8 - \ldots (78),$$

$$e^r = 1 - \frac{k^2}{1.2}x^2 + \frac{2k^2+k^4}{1.2.3.4}x^4 - \frac{8k^2+6k^4+k^6}{1.2.3.4.5.6}x^6 +$$

$$+ \frac{32k^2+60k^4+12k^6+k^8}{1.2.3.4.5.6.7.8}x^8 - \ldots\ldots \quad (79).$$

Em seguida, acharemos

$$\operatorname{sen} am(x) = \frac{x - A_3x^3 + A_5x^5 - A_7x^7 + \ldots\ldots}{1 - M_4x^4 + M_6x^6 - M_8x^8 + \ldots\ldots},$$

$$\cos am(x) = \frac{1 - B_3x^3 + B_5x^5 - B_7x^7 + \ldots\ldots}{1 - M_4x^4 + M_6x^6 - M_8x^8 + \ldots\ldots},$$

$$\Delta\, am(x) = \frac{1 - C_3x^3 + C_5x^5 - C_7x^7 + \ldots\ldots}{1 - M_4x^4 + M_6x^6 - M_8x^8 + \ldots\ldots},$$

representando por A_3, A_5, A_7, etc., B_3, B_5, B_7, etc., C_3, C_5, C_7, etc., M_4, M_6, M_8, etc., os coefficientes das formulas antecedentes.

As series (76), (77), (78), (79) devidas a Weierstrass, foram designadas por elle do seguinte modo

$$e^s = Al(x),$$

$$e^p = Al(x)_1,$$

$$e^q = Al(x)_2,$$

$$e^r = Al(x)_3,$$

dando-lhes o nome de *funcções abelianas,* por terem sido previstas por Abel. No tratado elementar do calculo de Lacroix, e na nota de Hermite sobre as funcções ellipticas, se encontram muitas propriedades d'estas funcções.

Segundo esta nova representação, as tres funcções ellipticas de que nos estamos occupando serão definidas pelas relações

$$\operatorname{sen} am\,(x) = \frac{A\,l\,(x)_1}{A\,l\,(x)},$$

$$\cos am\,(x) = \frac{A\,l\,(x)_2}{A\,l\,(x)},$$

$$\Delta\, am\,(x) = \frac{A\,l\,(x)_3}{A\,l\,(x)}.$$

Além dos dois modos porque estas funcções podem ser representadas, um outro, e verdadeiramente interessante, existe ainda, devido aos importantes trabalhos de Abel e Jacobi, secundados, ampliados, e mesmo tornados mais rigorosos, por muitos outros analystas, no numero dos quaes figura, em primeira linha, Schloemilch.

Neste terceiro modo, são estas funcções representadas por series periodicas. O que estas formulas apresentam de mais notavel é que, em ultima analyse, as funcções ellipticas de todas as especies, se reduzem a uma unica funcção transcendente, a celebre funcção Θ, a que se deu o nome de *funcção de Jacobi,* em homenagem ao auctor de tão notavel reducção.

A transformação dá para as tres funcções de primeira especie de que nos occupamos, fazendo

$$e^{-\frac{\pi K_1}{K}} = q,$$

$$\operatorname{sen} am \frac{2Kx}{\pi} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{2\sqrt[4]{q}\operatorname{sen} x - 2\sqrt[4]{q^9}\operatorname{sen} 3x + 2\sqrt[4]{q^{25}}\operatorname{sen} 5x \dots}{1 - 2q\cos 2x + 2q^4 \cos 4x - 2q^9 \cos 6x \dots}$$

$$\cos am \frac{2Kx}{\pi} =$$

$$= \sqrt{\frac{k'}{k}} \frac{2\sqrt[4]{q}\cos x + 2\sqrt[4]{q^9}\cos 3x + 2\sqrt[4]{q^{25}}\cos 5x \dots}{1 - 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x - 2q^9\cos 6x \dots}$$

$$\Delta am \frac{2Kx}{\pi} =$$

$$= \sqrt{k'} \frac{1 + 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x + 2q^9\cos 6x + \dots}{1 - 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x - 2q^9\cos 6x + \dots}$$

Fazendo $\frac{2Kx}{\pi} = u$, que dá $x = \frac{\pi u}{2K}$;

$$1 - 2q\cos\frac{\pi u}{2K} + 2q^4\cos\frac{2\pi u}{K} -$$

$$- 2q^9\cos\frac{3\pi u}{K} + \dots = \Theta(u),$$

$$2\sqrt[4]{q}\ \mathrm{sen}\,\frac{\pi u}{2K} - 2\sqrt[4]{q^9}\ \mathrm{sen}\,\frac{3\pi u}{2K} +$$

$$+\,2\sqrt[4]{q^{25}}\ \mathrm{sen}\,\frac{5\pi u}{2K}\ \ldots\ldots = H(u),$$

vem

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{sen}\,am\,(u) &= \frac{1}{\sqrt{k}}\,\frac{H(u)}{\Theta(u)} \\ \cos am\,(u) &= \sqrt{\frac{k'}{k}}\,\frac{H(u+K)}{\Theta(u)} \\ \Delta\,am\,(u) &= \sqrt{k'}\,\frac{\Theta(u+K)}{\Theta(u)} \end{aligned}\right\}\ \ldots\ldots\ (80).$$

Emfim, sendo

$$k\,[H(u)]^2 + k'\,[\Theta(u+K)]^2 = [\Theta(u)]^2,$$

que dá

$$H(u) = \sqrt{\frac{[\Theta(u)]^2 - k'\,[\Theta(u+K)]^2}{k}},$$

vê-se que as tres funcções de primeira especie, de que nos temos occupado, vem a depender unicamente da funcção Θ. O mesmo se veria para todas as restantes funcções ellipticas.

Num caminho completamente inverso do que temos seguido, vê-se, pelo que fica dicto, como se chega ás funcções ellipticas, partindo da funcção Θ que as define. É o caminho seguido por muitos analystas, e, entre elles, Mr. Hermite, no trabalho a que já nos referimos.

FIM.

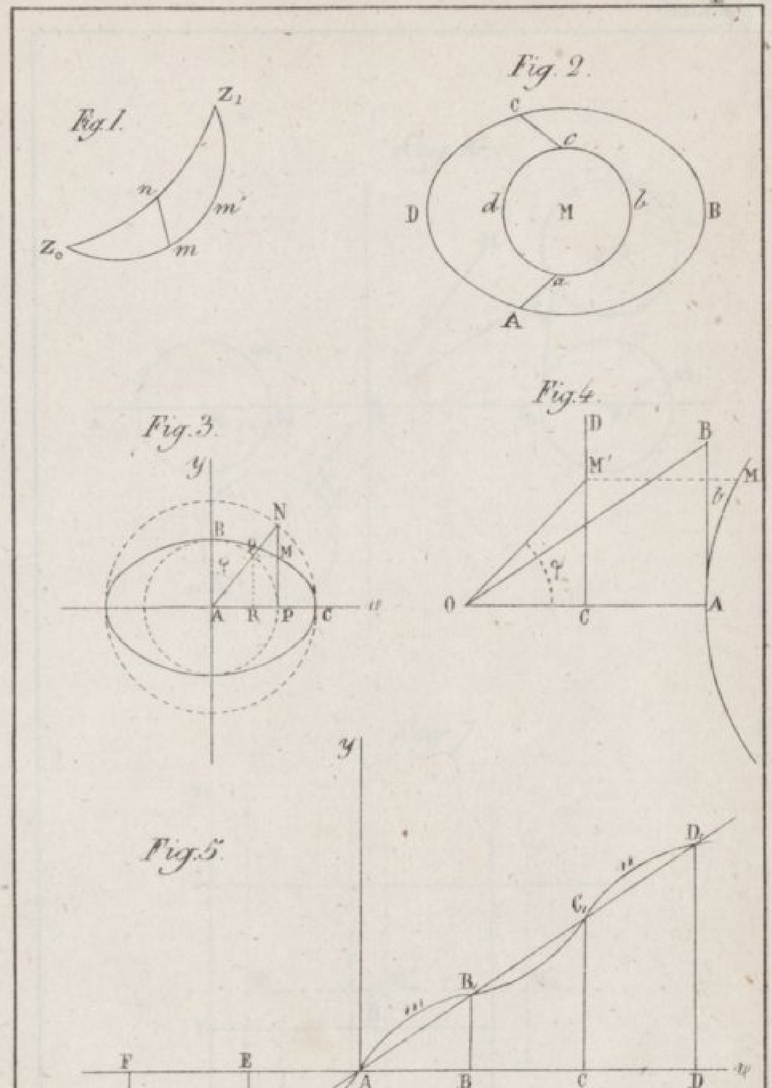


Fig. 1.
Z1
n
m'
Z0
m
Fig. 2.
C
c
D
d
M
b
B
a
A
Fig. 3.
y
N
B
M
A
R
P
C
x
Fig. 4.
D
B
M'
M
b
φ
O
C
A
Fig. 5.
y
D1
C1
B1
F
E
A
B
C
D
x
E1
F1

Fig. 6.

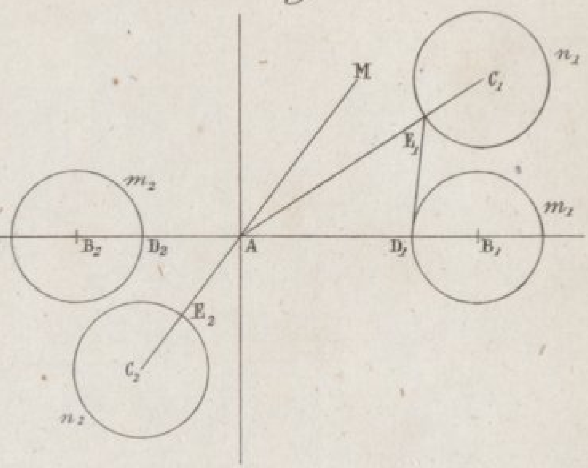
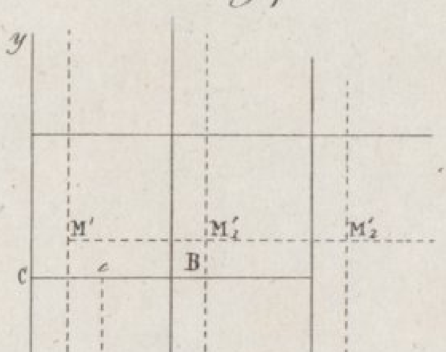


Fig. 7.



1875

C. DA PIEDADE - DISSERTAÇÃO INAUGURAL

MATHEMATICA