
ut videam
ANO
1926 X 1936
DA REVOLUÇÃO
NACIONAL

DISSERTAÇÃO

SOBRE

LINHAS GEODESICAS

LINHAS GEODESICAS

DISSERTAÇÃO DE CONCURSO

PARA UMA SUBSTITUIÇÃO DE MATHEMATICA

NA

ESCOLA POLYTECHNICA

POR

JOÃO IGNACIO DO PATROCINIO DA COSTA

Doutor em Mathematica e bacharel formado em Philosophia

COIMBRA
IMPRENSA DA UNIVERSIDADE
1877

AO

Excellentissimo e Reverendissimo Senhor

D. ANTONIO ALVES MARTINS

Bispo de Vizeu, do Conselho de Sua Majestade,
Ministro e Secretario de Estado honorario,
Par do Reino, Doutor em Theologia,
etc., etc., etc.

EM TESTIMUNHO DE AMISADE E RESPEITO

D.

O Auctor.

Relação das obras consultadas para a organisação d'este trabalho

---

BERTRAND ...... Traité de calcul différentiel.

NAVIER .... Leçons d'analyse a l'École Polytechnique.

PUISSANT .... Traité de géodésie.

BIOT .... Traité élémentaire d'astronomie physique.

LAPLACE .... Traité de mécanique céleste.

LEGENDRE ...... Analyse des triangles tracés sur la surface d'un sphe-roïde (nas *Memoires de l'Institut pour l'année 1806*).

PONTÉCOULANT... Théorie analytique du système du monde.

DISSERTAÇÃO

SOBRE

LINHAS GEODESICAS

I

O desejo de saber conserva-se inherente á natureza do homem; ávida de conhecimentos, a humanidade trabalha sempre para se enriquecer de maior numero de ideias.

Pequenas na sua origem, augmentam, desenvolvem-se as sciencias pelos trabalhos dos seus cultores. Quer nas sciencias de observação, quer nas de razão pura, um certo numero de factos, coordenados por um mestre, constituem já um corpo de doutrina; mas novos factos accrescem á collecção, um novo, um melhor arranjo é dado á disposição d'aquelles conhecimentos, e a sciencia progride. A arvore do saber humano extende de contínuo mais longos e mais numerosos os seus ramos.

II

A esta lei do progresso não podiam, não deviam fazer excepção as sciencias mathematicas, aquellas justamente que são o maior titulo de gloria para a razão, para a intelligencia humana. Por meio d'ellas medimos as distancias não só entre pontos inaccessiveis sobre o planeta que habitamos, mas entre este e demais corpos do systema solar e, quanto é possivel, a outros ainda; predizemos as posições dos astros, pesamos as massas, determinamos as suas fórmas e, não parando no presente, procuramos até saber qual a futura sorte d'estes seres.

Os beneficios que á sociedade tem vindo, e mais ainda hão de vir, dos conhecimentos methematicos, são palpaveis, manifestos; a navegação, a viação, as construcções civis e militares, as innumeras invenções que, utilisando as fôrças da natureza, poupam ao homem trabalho e fadigas materiaes, e lhe proporcionam melhores, maiores, ou mais numerosas commodidades e bens, o proclamam altamente.

Mas por si mesma, e independentemente de applicações industriaes, a cultura da sciencia das grandezas é já um nobilissimo exercicio da actividade intellectuctual; acontece até que muitas vezes estudos theoricos chegam mais tarde a ter utilissima applicação. Mal podiam pensar os philosophos gregos, investigando as propriedades das secções conicas, que estavam preparando valiosos materiaes para um grande edificio, a astronomia moderna; a geometria das superficies de segunda ordem, já importante no movimento de rotação dos corpos, tem tambem no estudo da elasticidade dos meios solidos e na theoria mathematica do calor brilhante e luminoso emprego.

III

Ramo das sciencias astronomicas, a geodesia é um corpo de doutrina que mais immediatas applicações tem na sociedade. Se as suas theorias elementares bem podiam bastar ás necessidades geographicas, nem por isso deixa de ser conveniente o justificar pelas fórmulas da alta geodesia o emprego practico das primeiras. Cabe então o apreciar melhor a influencia que pode ter nos resultados a pequena inexactidão da hypothese relativa á figura da terra, e ver como permittidas simplificações de fórmulas mais complicadas fazem recahir nas da pequena geodesia.

Os factos geologicas, e não menos as relações cosmogonicas do nosso globo com os outros corpos do systema planetario, indicam e accusam o primitivo estado fluido do globo terrestre. Esta fluidez e o movimento de rotação estão indicando um ellipsoide de revolução para figura do planeta que habitamos, e é por isso muito natural integrar n'esta hypothese as equações differenciaes das linhas geodesicas, e discutir as propriedades das mesmas linhas. Mas pelas successivas revoluções geologicas, e ainda por effeito de causas da ordem d'aquellas que operam actualmente, a fórma da terra podia bem afastar-se um pouco d'aquella figura theorica, e importante se torna por isso discutir a questão na hypothese de um espheroide pouco achatado.

Estas duas discussões, e ainda a hypothese de superficie espherica, serão o objecto da segunda parte d'esta dissertação; na primeira faremos a deducção das equações differenciaes das linhas geodesicas, e bem assim o estudo de algumas propriedades geraes das mesmas linhas.

PARTE PRIMEIRA

Equações differenciaes e propriedades geraes das linhas geodesicas

1. Partindo da condição de ser uma linha geodesica a mais curta que se pode traçar entre dois pontos sobre uma superficie, o calculo das variações conduz promptamente ás equações differenciaes da mesma linha.

Sabe-se para isso que devemos tornar minimo o integral

$$s = \int \sqrt{dy^2 + dy^2 + dz^2},$$

e fazer portanto

$$\delta \int \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = 0;$$

mas por existir a linha sobre uma superficie

$$u = f(x, y, z) = 0,$$

teremos de combinar a condição antecedente com $\delta u = 0$.

Multiplicando pois δu pela indeterminada λ, sommando com $\delta s = 0$, e egualando a zero os coefficientes de δx, δy, δz, virá

$$d\left(\frac{dx}{ds}\right) + \lambda \frac{du}{dx} = 0,$$

$$d\left(\frac{dy}{ds}\right) + \lambda \frac{du}{dy} = 0,$$

$$d\left(\frac{dz}{ds}\right) + \lambda \frac{du}{dz} = 0,$$

e pela eliminação de λ acham-se as equações da linha geodesica:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{du}{dz}\, d\left(\frac{dy}{ds}\right) = \frac{du}{dy}\, d\left(\frac{dz}{ds}\right), \\ \\ \frac{du}{dx}\, d\left(\frac{dz}{ds}\right) = \frac{du}{dz}\, d\left(\frac{dx}{ds}\right), \\ \\ \frac{du}{dy}\, d\left(\frac{dx}{ds}\right) = \frac{du}{dx}\, d\left(\frac{dy}{ds}\right) \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Sómente duas d'estas equações differenciaes são distinctas, e uma qualquer das tres se pode tirar das outras duas pela eliminação da derivada parcial da funcção u que entrar em ambas. Até uma só das equações (1) com $u=0$ podem ser tomadas por equações da curva; porque, devendo esta verificar as tres equações differenciaes e a da superficie sobre que está, é a intercepção d'essas quatro superficies, e duas só já a determinam, sendo consequencias d'estas as outras duas restantes.

2. Das tres equações (1) conclue-se que *o plano osculador da linha mais curta traçada sobre uma superficie é sempre perpendicular a essa superficie.*

Com effeito, sabe-se que o angulo φ de dois planos

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

$$A'x + B'y + C'z + D' = 0,$$

é dado pela expressão

$$\cos\varphi = \frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\ \sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}};$$

ora (Navier, *Leçons d'analyse*, 2.ª ed. n.º 233) é

$$(dyd^2z - dzd^2y)(x' - x) + (dzd^2x - dxd^2z)(y' - y)$$
$$+ (dxd^2y - dyd^2x)(z' - z) = 0$$

a equação do plano osculador a uma curva, e

$$\frac{du}{dx}(x'-x)+\frac{du}{dy}(y'-y)+\frac{du}{dz}(z'-z)=0$$

a do plano tangente á superficie $u=0$; e por isso temos para expressão do angulo d'estes dois planos

$$\cos\varphi=\frac{(dyd^2z-dzd^2y)\frac{du}{dx}+(dzd^2x-dxd^2z)\frac{du}{dy}+(dxd^2y-dyd^2x)\frac{du}{dz}}{\sqrt{(dyd^2z-dzd^2y)^2+(dzd^2x-dxd^2z)^2+(dxd^2y-dyd^2x)^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{du}{dx}\right)^2+\left(\frac{du}{dy}\right)^2+\left(\frac{du}{dz}\right)^2}}.$$

Tomando ds por variavel independente, dividindo ambos os termos do quebrado por ds^2, e dando um outro arranjo ao numerador, este se torna em

$$\frac{dy}{ds}\left[\frac{du}{dx}d\left(\frac{dz}{ds}\right)-\frac{du}{dz}d\left(\frac{dx}{ds}\right)\right]+\frac{dx}{ds}\left[\frac{du}{dz}d\left(\frac{dy}{ds}\right)-\frac{du}{dy}d\left(\frac{dz}{ds}\right)\right]$$

$$+\frac{dz}{ds}\left[\frac{du}{dy}d\left(\frac{dx}{ds}\right)-\frac{du}{dx}d\left(\frac{dy}{ds}\right)\right],$$

e em virtude das equações (1) ficará assim

$$\cos\varphi=0,$$

ou o plano osculador normal á superficie.

3. Esta propriedade de que goza a linha geodesica é caracteristica, e pode até servir para obter as equações differenciaes (1) da mesma linha.

Sejam (Fig. 1.ª) AM, MN... os elementos consecutivos de uma linha traçada sobre a superficie por tal modo, que o segundo elemento MN seja a projecção ortogonal de MM', prolongamento do primeiro e egual a elle; o terceiro elemento, aquelle que se segue a MN, esteja a respeito d'este como o mesmo MN está para com o primeiro, e assim por deante. Attenta a pequena extensão d'estes elementos, os quaes suppomos infinitamente pequenos de primeira ordem, assim como tambem o angulo $M'MN=i$, designando AM por ds e MN por ds', teremos $ds = ds'$ com desprezo de um infinitamente pequeno da terceira ordem, e a normal M'N, comprehendida entre a superficie e a extremidade M' do prolongamento do primeiro elemento, será infinitamente pequena de segunda. É o que facilmente se reconhece, tirando do triangulo rectangulo MM'N os valores de MN e M'N expressos em ds e i, desenvolvendo $sen\ i$ e $cos\ i$ em serie, e despresando os infinitamente pequenos de ordem superior á segunda.

Chamemos x, y, z as coordenadas rectangulares do ponto A do elemento ds, e $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ as da extremidade M d'este elemento; por ser MM' o prolongamento de ds e egual a ds, e designando por X, Y, Z as coordenadas da extremidade M', temos

$$x + 2dx = \mathrm{X},\ y + 2dy = \mathrm{Y},\ z + 2dz = \mathrm{Z}.$$

Ora acabamos de indicar que a normal M'N é da segunda ordem, e por isso pode ser considerada como diagonal de um parallelipipedo rectangulo com arestas da mesma ordem, e tenhamos assim

$$\mathrm{N'N} = \sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + d^2(z)^2}.$$

D'esta sorte serão d^2x, d^2y, d^2z as differenças entre as coordenadas de uma e as da outra extremidade da normal M'N; mas, como já fizeramos para o elemento AM, chamando agora X, Y, Z as coordenadas da extremidade M', e designando por X', Y', Z' as de N, teremos

$$\mathrm{X}' - \mathrm{X} = -d^2x,\ \mathrm{Y}' - \mathrm{Y} = -d^2y,\ \mathrm{Z}' - \mathrm{Z} = -d^2z.$$

Combinando estes valores com as equações da normal a uma superficie $z = \mathrm{F}(x, y)$

$$\mathrm{X}' - \mathrm{X} + \frac{dz}{dx}(\mathrm{Z}' - \mathrm{Z}),\ \mathrm{Y}' - \mathrm{Y} = \frac{dz}{dy}(\mathrm{Z}' - \mathrm{Z}),$$

vem

$$d^2x + \frac{dz}{dx}d^2z = 0,\ d^2y + \frac{dz}{dy}d^2z = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha);$$

e como, sendo a superficie dada pela equação implicita $u = 0$, as equações da normal se apresentam da fórma

$$Z'-Z=\frac{\frac{du}{dz}}{\frac{du}{dx}}(X'-X),\ Z'-Z=\frac{\frac{du}{dz}}{\frac{du}{dy}}(Y'-Y),$$

os valores

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{\frac{du}{dx}}{\frac{du}{dz}},\ \frac{dz}{dy}=-\frac{\frac{du}{dy}}{\frac{du}{dz}}$$

introduzidos em (α) nos dão

$$\frac{du}{dz}d^2x-\frac{du}{dx}d^2z=0,$$

$$\frac{du}{dz}d^2y-\frac{du}{dy}d^2z=0,$$

onde, dividindo por ds e tomando s por variavel independente, se cahe nas duas primeiras equações (1).

A terceira obtem-se pela eliminação da derivada parcial $\frac{du}{dz}$ entre as duas, e assim se chega ás equações differenciaes da linha geodesica pelo modo por que é traçada.

4. A propriedade caracteristica das linhas geodesicas pode revestir uma outra fórma, a qual se enuncia pelo seguinte theorema: *a projecção de uma linha geodesica sobre o plano tangente á superficie em um qualquer dos pontos da mesma linha tem n'esse ponto um raio de curvatura infinito.*

Para o demonstrar, seja primeiramente ρ o raio de curvatura em M da curva plana MM''N (Fig. 2.ª), tiremos no mesmo ponto a tangente MT, e tomando na curva o arco infinitamente pequeno MM$''$, abaixemos de M$''$ a perpendicular M$''$P sobre a tangente; ter-se-ha $\rho = \frac{\overline{MP}^2}{2M''P}$. Na verdade, tomando M para origem, a tangente para eixo dos x, a normal para o dos y, a fórmula conhecida da analyse

$$\rho = \frac{\left[1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

nos dá para o ponto M, onde é $x = 0$ e $\frac{dy}{dx} = 0$,

$$\rho = \frac{1}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}.$$

Ora, porque MP é da mesma ordem que MM$'$, applicando a PM$''$ a fórmula de Maclaurin e desprezando os infinitamente pequenos de ordem superior á segunda, será

$$PM'' = \frac{1}{2}\overline{PM}^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right),$$

e tirando d'aqui o valor de $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ para a substituir em ρ, sahe, como dissemos,

$$\rho = \frac{\overline{MP}^2}{2M''P}.$$

Seja agora (Fig. 3.ª) MM$'$ um arco infinitamente pequeno de linha geodesica, e MM'' a projecção de MM' sobre o plano tangente em M á superficie. O plano osculador é perpendicular ao plano tangente, e PM, tangente commum a MM' e MM'', é a intercepção d'estes dois planos; é claro por isso que a perpendicular abaixada de M' sobre o plano osculador do arco MM' no ponto M é egual a PM'', distancia de M'' á tangente MT. Mas, por um theorema de O. Bonnet (Bertrand, *Calc. diff.*, n.º 608), a distancia de um ponto de uma curva ao plano osculador infinitamente vizinho é um infinitamente pequeno da terceira ordem, e como MP, da mesma sorte que MM' e MM'', é de primeira, fica provado que ρ, cujo valor achamos ser

$$\rho=\frac{\overline{MP}^2}{2M''P},$$

é infinito.

5. A proposito d'esta doutrina vem naturalmente a da curvatura geodesica; antes d'isso porém consideremos os triangulos formados por linhas geodesicas infinitamente pequenas de primeira ordem. N'estes triangulos a differença entre a somma dos seus angulos e dois rectos é um infinitamente pequeno de segunda.

Para a demonstração d'este theorema convêm mostrar primeiro como, projectando um angulo qualquer sobre um plano formando com o d'aquelle um angulo infinitamente pequeno de primeira ordem, a differença entre a projecção e o angulo projectado é infinitamente pequena de segunda. Basta considerar os angulos planos como superficies indefinidas, mas que, não obstante, têm com outras superficies angulares razões finitas e determinadas; então chamando i a inclinação dos dois planos, α o angulo projectado e α' a sua projecção, teremos

$$\alpha'=\alpha\cos i,$$

e desenvolvendo $\cos i$ em serie

$$\alpha-\alpha'=\alpha\frac{i^2}{2}-\ldots\ldots,$$

que nos mostra ser de segunda ordem esta differença.

Posto isto, seja $AB'C'$ (Fig. 4.ª) a projecção do triangulo formado por linhas geodesicas infinitamente pequenas ABC sobre o plano tangente em A á superficie em que existem essas linhas. Como o arco AC e a sua projecção têm no ponto A a mesma tangente, e outro tanto acontece para o arco AB e a sua projecção AB', o angulo em A é o mesmo para os dois triangulos ABC e $AB'C'$. Quanto aos angulos B' e C' do triangulo $AB'C'$ podemos pôr $B' = B + \beta$, $C' = C + \gamma$, sendo β e γ angulos infinitamente pequenos da segunda ordem. A razão d'isto é porque, sendo infinitamente pequenas as linhas geodesicas AB, BC, AC, os planos tangentes á superficie em B e em C não podem deixar de fazer inclinações i, i' infinitamente pequenas, da mesma ordem que os arcos AB, BC, AC, com o plano tangente em A, visto que estes pontos A, B, C estão infinitamente proximos, e não suppomos a existencia de pontos singulares n'aquella pequena extensão; por isso, e attendendo ao que acima fica dito, vê-se que a differença entre os angulos B e B' é infinitamente pequena da segnnda ordem, e outro tanto acontece para com os angulos C e C'. Temos, portanto, $A + B' + C' = A + B + C + (\beta + \gamma)$. Mas, pelo theorema antecedentemente demonstrado, AB' e AC' têm em A raios de curvatura infinitos; o mesmo se dá com $B'C'$, pois que, quando BC seja projectado sobre o plano tangente em B, deve ser infinito o raio de curvatura da projecção, e como um e outro plano tangente differem infinitamente pouco por ser i infinitamente pequeno, tambem a projecção sobre um se pode tomar pela do outro.

Visto que no ponto A são infinitos os raios de curvatura dos lados do triangulo $AB'C'$, os angulos formados pelas cordas d'esses arcos e as tangentes ás extremidades são infinitamente pequenos de segunda ordem. Mas, junctando ou subtrahindo (consoante a disposição das cordas e dos arcos) estes angulos aos do triangulo formado pelas cordas, teremos os angulos do triangulo dos arcos; logo, chamando ω a somma algebrica dos seis angulos infinitamente pequenos de segunda ordem formados por cordas e tangentes, teremos $A + B' + C' = 180 + \omega$. Ora tinhamos achado $A + B' + C' = A + B + C + (\alpha + \beta)$, e por isso sahe

$$A + B + C = 180 + (\omega - \alpha - \beta),$$

que demonstra o theorema.

6. Passemos agora a tractar da curvatura geodesica.

A palavra *curvatura* indica o desvio da fórma rectilinea. Temos de distinguir curvatura total e curvatura n'um ponto; a primeira designa o angulo formado pelas duas tangentes ás extremidades de um arco, a segunda, e que usualmente se considera, vem a ser o limite da razão da primeira para o comprimento do mesmo arco. A curvatura pois de um arco n'um dos seus pontos é avaliada pelo limite de $\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$, sendo s o arco e α o angulo das duas tangentes; este limite é egual a $\frac{1}{\rho}$, sendo ρ o raio do circulo osculador no mesmo ponto.

Achamos (n.º 4) que para uma curva plana (Fig. 2.ª) o raio de curvatura tem a expressão $\frac{\overline{MP}^2}{2M''P}$; e como, por ser MM″ infinitamente pequeno, é a unidade o limite de $\frac{MM''}{PM}$, podemos fazer $\rho = \frac{\overline{MM''}^2}{2M''P}$. A curvatura do arco MM″ terá pois por medida $\frac{2M''P}{\overline{MM''}^2}$.

N'uma curva plana a curvatura dá ideia do grau de rapidez com que a curva se afasta da tangente no ponto que se considera. Na theoria das curvas existentes em qualquer superficie era natural introduzir uma expressão que indicasse o maior ou menor afastamento que n'um ponto dado uma curva tem a respeito da tangente n'esse ponto. Euler occupou-se d'ella nas curvas traçadas sobre a esphera, onde o circulo osculador tem a mesma importancia que nas curvas planas a tangente. Para aquellas demonstra-se (Bertrand, *Calc. diff.*, n.º 550) que a medida do afastamento tem uma expressão analoga á indicada antecedentemente para as curvas planas; a linha correspondente á recta M″P n'estas é nas curvas sobre a esphera o arco de circulo maximo abaixado perpendicularmente da extremidade M″ da porção infinitamente pequena da curva sobre o circulo osculador em M. Uma tal e tão importante expressão foi extendida a curvas traçadas sobre qualquer superficie; são correspondentes ao circulo osculador e ao arco de circulo maximo perpendicular a este, nas curvas sobre a esphera, duas linhas geodesicas sobre a superficie, uma das quaes é tangente á curva, a outra, partindo de um ponto infinitamente proximo do de contacto, marca a menor distancia d'esse ponto á linha geodesica tangente. A tangente e a perpendicular nas curvas planas, o circulo osculador e o arco perpendicular nas curvas sobre a esphera, são casos particulares sobre esta noção mais geral.

Seja (Fig. 5.ª) MM′M″ a curva, MP, M′P as duas linhas geodesicas; a expressão $\frac{2M'P}{\overline{MM'}^2}$, que indica bem o afastamento da curva a respeito da linha geodesica que a toca em M, chama-se curvatura geodesica da linha MM'', designação muito expressiva creada por Mr. Liouville.

7. A curvatura geodesica de uma linha n'um qualquer de seus pontos é egual á curvatura da projecção da mesma linha sobre o plano tangente á superficie no ponto considerado.

Para o demonstrar, tenhamos (Fig. 6.ª) um arco infinitamente pequeno da curva cuja curvatura geodesica no ponto M é $\frac{2M'P}{\overline{MM'}^2}$, sendo MT a linha geodesica tangente á curva em M, e M'P a que é mais curta de M' a MT. Sobre o plano tangente em M á superficie em que existem estas linhas projectemos o triangulo MPM'; por serem os lados MM', MP do triangulo tangentes um ao outro, as suas projecções tambem o serão, e a de MP, por ter infinito o raio de curvatura, será uma recta tangente á curva plana projecção de MM'. Seja MM''P' a projecção do triangulo; por estarem os tres pontos M, P, M' infinitamente proximos, M'P e MM' têm inclinações infinitamente pequenas sobre o plano tangente em M, e por isso podemos tomar estas linhas como eguaes á suas projecções, o que equivale a desprezar infinitamente pequenos de segunda ordem, e de ordens superiores, nos desenvolvimentos dos cosenos das inclinações. Pela mesma razão, visto que a inclinação de MP sobre o plano tangente tambem é infinitamente pequena de primeira ordem, a differença entre os angulos MPM' e MP'M'' é (n.º 5) um infinitamente pequeno de segunda ordem. Desprezando pois essa differença, teremos MPM' = MP'M''. Mas, como M'P é a linha mais curta de M' á curva MT, o angulo MPM' será recto; logo M''P', tomada como egual a M'P, será uma perpendicular abaixada de M'' sobre MP'. Em virtude d'isto, a curvatura da curva plana MM'' no ponto M será pois $\frac{2M''P'}{\overline{MM''}^2}$, ou antes $\frac{2M'P}{\overline{MM'}^2}$ por causa da egualdade adoptada entre M'P e MM' com suas projecções. Mas $\frac{2M'P}{\overline{MM'}^2}$ é a curvatura geodesica da curva MM' no ponto M; logo a curvatura geodesica é egual á curvatura da projecção.

8. A curvatura geodesica de uma linha n'um ponto dado é egual á *primeira curvatura* d'essa linha no mesmo ponto multiplicada pelo coseno do angulo que o plano osculador fórma com o plano tangente á superficie sobre que existe a linha.

Chamamos (Navier, *leçons d'analyse*, 2.ª ed. n.º 239) primeira curvatura de uma curva no espaço a que tem logar no sentido do plano osculador, e segunda curvatura o angulo formado por dois planos osculadores consecutivos, tambem chamado angulo de torção. Como é sabido, a primeira tem por expressão $\frac{1}{\rho}$, sendo ρ o raio do circulo osculador; chamando θ o angulo formado pelo plano d'esse circulo com o plano tangente, diremos pois que será $\frac{\cos\theta}{\rho}$ a curvatura geodesica da linha no mesmo ponto.

Para dar a demonstração d'este theorema seja (Fig. 7.ª) MM' a curva no espaço, MT a sua tangente no ponto M, e MM'' a projecção de MM' sobre o plano tangente em M á superficie em que existe MM'; é facil de ver que, tirando por M uma parallela MT' á tangente em M', o plano TMT' é o plano osculador de MM'. Chamemos α o angulo de contingencia formado pelas tangentes em M e M' á curva MM', e seja tambem α' o formado pela tangente em M'' e por MT. A primeira curvatura de MM' em M é $\frac{1}{\rho}=\frac{\alpha}{MM'}$, a de MM'' no mesmo ponto é $\frac{\alpha'}{MM''}$. Mas, como se acabou de provar, esta ultima é egual á curvatura geodesica da curva MM' em M, e podemos pôr MM' em vez de MM'' por ser de segunda ordem a differença entre MM' e MM''; logo, chamando $\varkappa$ a curvatura geodesica de MM' em M, teremos $\varkappa=\frac{\alpha'}{MM'}$.

Eliminando MM' entre as equações

$$\frac{1}{\rho}=\frac{\alpha}{MM'} \text{ e } \varkappa=\frac{\alpha'}{MM'},$$

virá

$$\varkappa=\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\alpha'}{\alpha}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(a).$$

Ora é facil de ver (Fig. 8.ª) que MT é o traço do plano osculador com o plano tangente, e cuja inclinação designamos por θ; tambem é manifesto que o angulo de contingencia α' é a projecção de α, e ambos estes são faces de um triedro, no qual é recto o diedro opposto á face α. Resolvendo, vem

$$\cos\theta = \frac{\operatorname{tg}\alpha'}{\operatorname{tg}\alpha}$$

ou, pondo os arcos pelas tangentes para serem infinitamente pequenos os angulos de contingencia,

$$\cos\theta = \frac{\alpha'}{\alpha},$$

que torna a equação (a) em

$$\varkappa = \frac{\cos\theta}{\rho}$$

e fica demonstrado o theorema.

9. Sabe-se que, podendo por uma curva passar uma infinidade de superficies, relativamente a cada uma d'ellas terá a curva sua curvatura geodesica. Isto mesmo se conhece tambem pela expressão de $\varkappa$, pois sendo para um dado ponto de uma curva um só o plano e circulo osculador, e diversos os planos tangentes por serem diversas as superficies, haverá assim diversos valores de $\frac{\cos\theta}{\rho}$ por ser ρ constante e θ variavel com os planos tangentes. Vê-se ainda, pelos valores extremos de $\cos\theta$, que a curvatura geodesica é nulla para as linhas geodesicas, como já se sabia, e é maxima quando o plano osculador da curva é tangente á superficie.

10. Muitos geometras allemães têm dado á curvatura geodesica (Fig. 5.ª) $\frac{2M'P}{\overline{MM'}^2}$ o nome de *curvatura de planificação;* vamos ver como esta designação tem tambem significação appropriada.

Mostra-se na geometria descriptiva que as linhas traçadas n'uma superficie planificavel conservam a mesma grandeza antes e depois da planificação, e que as tangentes a essas linhas o ficam sendo ás transformadas, ainda que venham estas a ter pontos de inflexão, nos quaes acontece serem cortadas pelas tangentes. As de linhas geodesicas traçadas nas superficies planificaveis serão pois linhas rectas, porque são estes os caminhos mais curtos nas superficies planas. Em virtude d'isto, supponde que a fig. 5.ª se refere a uma superficie planificavel, MM' será depois da planificação uma curva plana, MP e M'P linhas rectas, a primeira tangente a MM' e a segunda perpendicular á primeira. Portanto, e pelo que fica visto no n.º 6, $\frac{2\,M'P}{\overline{MM'}^2}$ é a curvatura da curva MM' depois da planificação da superficie.

A denominação empregada pelos geometras allemães está assim justificada para as superficies planificaveis. Quanto ás superficies que o não são, podemos por todos os pontos da linha que considerarmos tirar planos tangentes, dos quaes a superficie envolvente será planificavel. Ora, quer consideremos a curva existente n'esta ultima superficie, quer n'aquella em que a tomamos, a sua curvatura geodesica é a mesma em ambos os casos, porque o angulo θ formado pelo plano osculador com o plano tangente é o mesmo, visto ser este ultimo commum ás duas superficies. Planificando pois a superficie envolvente dos planos tangentes, a transformada da linha proposta terá uma curvatura, a qual, pelo que acabamos de ver, é a mesma que a curvatura geodesica da linha relativamente á sua superficie.

Portanto, o termo curvatura de planificação compete bem ás curvas traçadas em qualquer superficie.

PARTE SEGUNDA

Integração das equações differenciaes das linhas geodesicas, e propriedades d'estas linhas, em superficies particulares

11. Passemos agora a integrar as equações (1) em hypotheses particulares sobre a natureza da superficie cuja equação é $u=0$, e investigar a natureza das linhas geodesicas e as propriedades que n'estes casos apresentam.

Supponhamos primeiro que a linha geodesica está sobre uma esphera. Então a funcção u será

$$u=x^2+y^2+z^2-r^2=0,$$

e derivando teremos

$$\frac{du}{dz}=2z,\ \frac{du}{dx}=2x,\ \frac{du}{dy}=2y,$$

o que torna as equações (1) em

$$zd\left(\frac{dy}{ds}\right)=yd\left(\frac{dz}{ds}\right),$$

$$xd\left(\frac{dz}{ds}\right)=zd\left(\frac{dx}{ds}\right),$$

$$yd\left(\frac{dx}{ds}\right)=xd\left(\frac{dy}{ds}\right),$$

e integrando por partes virá

$$\left.\begin{aligned} z\frac{dy}{ds}-y\frac{dz}{ds}&=\mathrm{C} \\ x\frac{dz}{ds}-z\frac{dx}{ds}&=\mathrm{C}' \\ y\frac{dx}{ds}-x\frac{dy}{ds}&=\mathrm{C}'' \end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2).$$

Como já observámos (n.° 1), duas d'estas equações, ou uma d'ellas e a da superficie, ou esta e uma obtida por combinação das outras, etc., podem ser tomadas para as duas equações da linha geodesica. O meio mais simples de ter duas equações em termos finitos é adoptar a da esphera e uma outra resultando das tres equações (2) multiplicadas respectivamente por x, y, z, e sommadas depois membro a membro.

Teremos então o systema

$$x^2+y^2+z^2-r^2=0,\ \mathrm{C}x+\mathrm{C}y'+\mathrm{C}''z=0$$

ou, fazendo

$$\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{C}''}=c,\ \frac{\mathrm{C}'}{\mathrm{C}''}=c',$$

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2+z^2-r^2&=0 \\ z+cx+c'y&=0 \end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3).$$

A origem das coordenadas é o centro da esphera, e a segunda d'estas equações é a de um plano que passa por essa origem; as duas equações (3) mostram portanto que na esphera a natureza das linhas geodesicas é serem ellas arcos de circulos maximos.

O plano representado pela segunda das equações (3) já passa pela origem, bastam por conseguinte dois outros pontos para elle ficar determinado. Assim, sendo (x', y', z'), (x'', y'', z'') dois pontos por onde passa a linha geodesica, postos na equação os valores d'estas coordenadas, temos duas equações de condição que determinam as constantes c e c'.

12. Supponhamos agora que a superficie sobre que está a linha geodesica é um ellipsoide de revolução em volta do eixo menor, o qual seja o dos z.

Como a equação geral das superficies de revolução e uma qualquer das equações (1) podem ser adoptadas por equações da linha geodesica em taes superficies, teremos

$$u = x^2 + y^2 + f(z) = 0,$$

$$\frac{du}{dx} d\left(\frac{dy}{ds}\right) = \frac{du}{dy} d\left(\frac{dx}{ds}\right).$$

Tomando as derivadas parciaes na primeira d'estas equações, introduzindo os seus valores na segunda, e integrando, virá

$$xdy - ydx = cds \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

Designando por s o arco de linha geodesica comprehendido entre os pontos M′ e M″ (Fig 9.ª), dos quaes são λ', λ'' as latitudes reduzidas, V′ e V″ os azimutes, e φ', φ'' as longitudes a contar do meridiano PA, chamando t e q as coordenadas rectangulares do ponto M″ da curva generatriz na posição PM″F, a qual pela revolução em volta do eixo Cz produziu a superficie, teremos

$$x = q\cos\varphi'', \quad y = q\,\mathrm{sen}\,\varphi'',$$

e differenciando,

$$\left.\begin{aligned} dx &= dq\cos\varphi'' - q\,\mathrm{sen}\,\varphi'' d\varphi'' \\ dy &= dq\,\mathrm{sen}\,\varphi'' + q\cos\varphi'' d\varphi'' \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (5).$$

d'onde resultará

$$xdy - ydx = q^2 d\varphi'',$$

e attendendo a (4)

$$q^2 d\varphi'' = cds \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6).$$

O triangulo elementar $a'm'$M″, rectangulo em m' dá $a'm' = ds\,\mathrm{sen}\,$V″; e porque φ'' e $\varphi'' - d\varphi''$ são as longitudes das extremidades do arco $a'm'$ de parallelo, e $q - dq$ o raio d'este, teremos, desprezando $dqd\varphi''$,

$$a'm' = qd\varphi'',$$

d'onde resulta

$$q \operatorname{sen} V' = c \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7).$$

Supponhamos que o meridiano PAE é em A perpendicular á linha geodesica, continuada até este ponto, e tomemos o mesmo plano pelo dos xz; designemos λ a latitude reduzida do ponto A, a longitude e azimut são respectivamente *zero* e 90°.

Na expressão differencial de um arco de curva

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

pondo os valores (5) de dx e dy, o de $dz = dt$, vem

$$ds^2 = dq^2 + q^2 d\varphi''^2 + dt^2,$$

e em virtude de (6) e depois eliminando $d\varphi''$, achamos as equações

$$\left.\begin{aligned} q^2(q^2 - c^2)\, d\varphi''^2 &= c^2\,(dt^2 + dq^2) \\ (q^2 - c^2)\, ds^2 &= q^2\,(dt^2 + dq^2) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (8).$$

13. Até aqui ainda a superficie $u = 0$ tem sido uma qualquer de revolução; sendo preciso, para continuar a integração, eliminar entre as equações (8) uma das variaveis t, q, ligadas entre si pela equação da meridiana generatriz, vamos agora introduzir nas mesmas equações o caracter de ser a superficie um ellipsoide de revolução em volta do eixo menor.

A equação da ellipse generatriz é

$$a^2t^2 + b^2q^2 = a^2b^2;$$

ora por ser λ'' a latitude reduzida do ponto M'', attendendo á definição d'esta quantidade (Puissant, *traité de géodesie*, n.° 168) e ás propriedades conhecidas da ellipse, temos

$$t = b \operatorname{sen} \lambda'',$$

e

$$q = a \cos \lambda'',$$

o que dá

$$c = a \operatorname{sen} V'' \cos \lambda''$$

ou antes $$c = a\cos\lambda$$

considerando que no ponto A se tem $\operatorname{sen} V = 1$.

Attendendo a que φ'' augmenta quando λ'' diminue, pondo nas equações (8) por t, q e c os seus valores, usando de um só accento para nos referirmos á extremidade M', e pondo por uniformidade ds' em logar de ds, as mesmas equações tornar-se-hão

$$\left.\begin{aligned} d\varphi' &= -\frac{d\lambda'\cos\lambda}{a\cos\lambda'}\sqrt{\frac{a^2\operatorname{sen}^2\lambda' + b^2\cos^2\lambda'}{\cos^2\lambda' - \cos^2\lambda}} \\ ds' &= -d\lambda'\cos\lambda'\sqrt{\frac{a^2\operatorname{sen}^2\lambda' + b^2\cos^2\lambda'}{\cos^2\lambda' - \cos^2\lambda}} \end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots(9).$$

Para as integrar, podemos com Legendre (*analyse des triangles tracés sur la superfice d'un sphéroïde*) servir-nos de um angulo auxiliar $\sigma = \operatorname{arc}\left(\cos = \frac{\operatorname{sen}\lambda'}{\operatorname{sen}\lambda}\right)$, ou seguir o processo de Puissant, usando dentro dos radicaes sómente de senos, e fazendo, por abreviação, $\frac{a^2 - b^2}{b^2} = \varepsilon$. Por este ultimo processo teremos primeiramente

$$(A)\ldots\ldots\ldots\left\{\begin{aligned} ds' &= -\frac{bd\operatorname{sen}\lambda'}{(\operatorname{sen}^2\lambda - \operatorname{sen}^2\lambda')^{\frac{1}{2}}}\sqrt{1 + \varepsilon\operatorname{sen}^2\lambda'}, \\ d\varphi' &= -\frac{b}{a}\cdot\frac{\cos\lambda\cos\lambda' d\lambda'}{\cos^2\lambda'(\operatorname{sen}^2\lambda - \operatorname{sen}^2\lambda')^{\frac{1}{2}}}\sqrt{1 + \varepsilon\operatorname{sen}^2\lambda'}, \end{aligned}\right.$$

e depois, desenvolvendo $\sqrt{1 + \varepsilon\operatorname{sen}^2\lambda'}$ até ao termo em ε^2 inclusivamente, integrando e deixando de dar accentos a s e a φ, acha-se

$$(B)\ldots\ldots \frac{s}{b} = \left\{1 + \frac{1}{4}\varepsilon\operatorname{sen}^2\lambda - \frac{3}{64}\varepsilon^2\operatorname{sen}^4\lambda\right\}\operatorname{arc}\left(\cos = \right.$$

$$\left. = \frac{\operatorname{sen}\lambda'}{\operatorname{sen}\lambda}\right) + \left\{\frac{1}{4}\varepsilon\operatorname{sen}^2\lambda - \frac{3}{64}\varepsilon^2\operatorname{sen}^4\lambda\right\}\left\{\frac{\operatorname{sen}\lambda'}{\operatorname{sen}\lambda}\left(1 - \right.\right.$$

$$-\frac{\operatorname{sen}^2\lambda'}{\operatorname{sen}^2\lambda}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big\} - \frac{1}{32}\varepsilon^2\operatorname{sen}^4\lambda\left\{\frac{\operatorname{sen}^3\lambda'}{\operatorname{sen}^3\lambda}\left(1-\frac{\operatorname{sen}^2\lambda'}{\operatorname{sen}^2\lambda}\right)^{\frac{1}{2}}\right\},$$

$$\varphi = \operatorname{arc}\left(\cos = \frac{\operatorname{tang}\lambda'}{\operatorname{tang}\lambda}\right) -$$

$$-\left\{\frac{1}{2}\varepsilon - \frac{3}{8}\varepsilon^2 - \frac{1}{16}\varepsilon^2\operatorname{sen}^2\lambda\right\}\cos\lambda\left\{\operatorname{arc}\left(\cos=\frac{\operatorname{sen}\lambda'}{\operatorname{sen}\lambda}\right)\right\}$$

$$+\frac{1}{16}\varepsilon^2\operatorname{sen}^2\lambda\cos\lambda\left\{\frac{\operatorname{sen}\lambda'}{\operatorname{sen}\lambda}\left(1-\frac{\operatorname{sen}^2\lambda'}{\operatorname{sen}^2\lambda}\right)^{\frac{1}{2}}\right\},$$

sem constantes arbitrarias, porque com $s=0$ temos $\varphi=0$ e $\lambda=\lambda'$.

Fazendo agora $\sigma = \operatorname{arc}\left(\cos=\frac{\operatorname{sen}\lambda'}{\operatorname{sen}\lambda}\right)$, que é o arco subsidiario de Legendre, e $\omega = \operatorname{arc}\left(\cos=\frac{\operatorname{tang}\lambda'}{\operatorname{tang}\lambda}\right)$, dá-se ás duas equações a fórma seguinte:

$$\left.\begin{aligned} \frac{s}{b} = {} & \left(1+\frac{1}{4}\varepsilon\operatorname{sen}^2\lambda - \frac{3}{64}\varepsilon^2\operatorname{sen}^4\lambda\right)\sigma + \\ & + \left(\frac{1}{8}\varepsilon\operatorname{sen}^2\lambda - \frac{1}{32}\varepsilon^2\operatorname{sen}^4\lambda\right)\operatorname{sen}2\sigma \\ & - \frac{1}{256}\varepsilon^2\operatorname{sen}^4\lambda\operatorname{sen}4\sigma \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (A),$$

$$\left.\begin{aligned} \varphi = \omega & - \left\{\frac{1}{2}\varepsilon - \frac{3}{8}\varepsilon^2 - \frac{1}{16}\varepsilon^2\operatorname{sen}^2\lambda\right\}\sigma\cos\lambda \\ & + \frac{1}{32}\varepsilon^2\operatorname{sen}^2\lambda\cos\lambda\operatorname{sen}2\sigma \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (B).$$

Como, em virtude das definições de σ e ω e da ligação entre a latitude reduzida e a verdadeira, temos as relações

$$\cos\sigma = \frac{\operatorname{sen}\lambda'}{\operatorname{sen}\lambda},\ \cos\omega = \frac{\operatorname{tang}\lambda'}{\operatorname{tang}\lambda},\ \operatorname{tang}\lambda' = \frac{b}{a}\operatorname{tang} H',$$

quando for $\sigma = 90°$, será $\lambda' = 0$, $H' = 0$ e $\omega = 90°$, e pelas equações antecedentes (A) e (B) fica

$$s = b\left(1 + \frac{1}{4}\varepsilon\operatorname{sen}^2\lambda - \frac{3}{64}\varepsilon^2\operatorname{sen}^4\lambda\right)90°$$

$$\varphi = 90°\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\varepsilon - \frac{3}{8}\varepsilon^2\right)\cos\lambda + \frac{1}{16}\varepsilon^2\operatorname{sen}^2\lambda\cos\lambda\right\}.$$

A segunda d'estas equações faz-nos ver que o ponto onde a linha geodesica encontra o equador tem a longitude um pouco menor do que sería sobre uma esphera. A outra equação mostra que a porção da mesma linha terminada no equador e no meridiano que corta perpendicularmente é egual ao quadrante de uma ellipse, cujos semieixos sejam b e $b\sqrt{1+\varepsilon\operatorname{sen}^2\lambda}$. Na verdade, representando por $[s_{,}]$ o valor da quarta parte da ellipse de semieixos a e b, temos (Navier, *Leçons d'analyse*, 2.ª ed., n.º 321)

$$[s_{,}] = \frac{1}{2}\pi a\left\{1 - \left(\frac{1}{2}e\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}e^2\right)^2 - \ldots\right.$$

$$\left. - \frac{1}{2n-1}\left(\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}e^n\right)^2\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha).$$

A quantidade $e^2 = \dfrac{c^2}{a^2} = \dfrac{a^2-b^2}{a^2}$ é para o nosso caso

$$\frac{b^2(1+\varepsilon\operatorname{sen}^2\lambda) - b^2}{b^2(1+\varepsilon\operatorname{sen}^2\lambda)},$$

e teremos pois

$$e^2=\frac{\varepsilon\,\text{sen}^2\lambda}{1+\varepsilon\,\text{sen}^2\lambda}=\varepsilon\,\text{sen}^2\lambda\,(1-\varepsilon\,\text{sen}^2\lambda+\ldots)=\varepsilon\,\text{sen}^2\lambda-\varepsilon^2\,\text{sen}^4\lambda,$$

despresando as potencias de ε superiores á segunda.

Será assim

$$\left(\frac{1}{2}e\right)^2=\frac{1}{4}\varepsilon\,\text{sen}^2\lambda-\frac{1}{4}\varepsilon^2\,\text{sen}^4\lambda,$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}e^2\right)^2=\frac{3}{64}e^4=\frac{3}{64}\varepsilon^2\,\text{sen}^4\lambda.$$

Pondo agora em (α) 90° por $\frac{1}{2}\pi$, e por a e as potencias de e os seus valores em ε, virá

$$[s_,]=90^\circ b\sqrt{1+\varepsilon\,\text{sen}^2\lambda}\left\{1-\frac{1}{4}\varepsilon\,\text{sen}^2\lambda+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4}\varepsilon^2\,\text{sen}^4\lambda-\frac{3}{64}\varepsilon^2\,\text{sen}^4\lambda\right\}=$$

$$90^\circ b\left\{1+\frac{1}{2}\varepsilon\,\text{sen}^2\lambda-\frac{1}{8}\varepsilon^2\,\text{sen}^4\lambda\right\}\left\{1-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4}\varepsilon\,\text{sen}^2\lambda+\frac{1}{4}\varepsilon^2\,\text{sen}^4\lambda-\frac{3}{64}\varepsilon^2\,\text{sen}^4\lambda\right\}=$$

$$90^\circ b\left\{1+\frac{1}{2}\varepsilon\,\text{sen}^2\lambda-\frac{1}{8}\varepsilon^2\,\text{sen}^4\lambda-\frac{1}{4}\varepsilon\,\text{sen}^4\lambda\right.$$

$$\left.-\frac{1}{8}\varepsilon^2\,\text{sen}^4\lambda+\frac{1}{4}\varepsilon^2\,\text{sen}^4\lambda-\frac{3}{64}\varepsilon^2\,\text{sen}^4\lambda\right\},$$

isto é

$$[s_{,}] = 90^\circ b \left\{ 1 + \frac{1}{4} \varepsilon \operatorname{sen}^2\lambda - \frac{3}{64} \varepsilon^2 \operatorname{sen}^4\lambda \right\} \ldots\ldots\ldots (\beta).$$

Ora quando é $\sigma = 90^\circ$, o arco s da linha geodesica tem por valor o segundo membro d'esta ultima equação, e teremos por conseguinte

$$s = [s_{,}].$$

Q. E. D.

14. Como, em virtude dos valores de c (n.° 13) sahe, tractando-se de V',

$$\operatorname{sen} V' = \frac{\cos \lambda}{\cos \lambda'},$$

attendendo a estas relações e aos valores de $\cos \sigma$ e $\cos \omega$, vê-se que para $\sigma = 180^\circ$ é $\lambda' = -\lambda$ e por isso $\omega = 180^\circ$, $H' = -H$, $V' = 90^\circ$; os valores de φ e de s tornam-se em

$$\varphi = 180^\circ \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \varepsilon - \frac{3}{8} \varepsilon^2 \right) \cos \lambda + \frac{1}{16} \varepsilon^2 \operatorname{sen}^2\lambda \cos \lambda \right\},$$

$$s = 180^\circ b \left\{ 1 + \frac{1}{4} \varepsilon \operatorname{sen}^2\lambda - \frac{3}{64} \varepsilon^2 \operatorname{sen}^4\lambda \right\},$$

isto é, duplos do que eram para $\sigma = 90^\circ$. Portanto, a porção de linha geodesica que, no outro hemiellipsoide, fica entre o equador e um parallelo da mesma latitude que o primeiro é n'esse parallelo tambem perpendicular ao meridiano.

Continuando a discussão da linha geodesica conhece-se que ella corta outra vez o equador, e chega ao parallelo de partida n'um ponto differente do primeiro, porque é então a sua longitude

$$\varphi = 360^\circ \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \varepsilon - \frac{3}{8} \varepsilon^2 \cos \lambda \right) + \frac{1}{16} \varepsilon^2 \operatorname{sen}^2\lambda \cos \lambda \right\};$$

e, attendendo á pequenez de ε, e bem assim a que n'esse parallelo de partida torna a linha geodesica a cortar perpendicularmente o meridiano, vê-se que esta linha fórma sobre o ellipsoide de revolução uma especie de helice comprehendida entre dois parallelos egualmente distantes do equador.

15. Mostramos (n.º 13) que o arco da linha geodesica comprehendida entre o equador e um meridiano que encontra perpendicularmente tem a mesma extensão que o quarto de ellipse cujos semieixos sejam b e $b\sqrt{1+\varepsilon\,\mathrm{sen}^2\lambda}$, sendo λ a latitude reduzida do ponto onde tem logar a perpendicularidade. O mesmo se pode fazer ver por outra fórma.

Legendre (memoria citada), attendendo a que para ser real o valor do arco s, cuja expressão differencial é, com a nossa notação,

$$ds = -\frac{b\,d\,.\,\mathrm{sen}\,\lambda'}{(\mathrm{sen}^2\lambda - \mathrm{sen}^2\lambda')^{\frac{1}{2}}}\sqrt{1+\varepsilon\,\mathrm{sen}^2\lambda'},$$

deve λ' estar comprehendido entre $+\lambda$ e $-\lambda$, faz observar que a $\mathrm{sen}\,\lambda'$ se pode dar a fórma

$$\mathrm{sen}\,\lambda' = \mathrm{sen}\,\lambda\cos\sigma,$$

a qual, porque λ é constante, reduz o valor de ds a

$$ds = bd\sigma\sqrt{1+\varepsilon\,\mathrm{sen}^2\lambda\cos^2\sigma}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\alpha').$$

Acha depois para uma ellipse construida com os semieixos b e $b\sqrt{1+\varepsilon\,\mathrm{sen}^2\lambda}$, e onde as abscissas se contam sobre o eixo menor, a expressão differencial do arco correspondente á abcissa $b\cos\sigma$; é claro que á abcissa x da ellipse se pode dar esta ultima expressão, a qual satisfaz á correspondencia de signaes e valores limites de x e σ.

Designando por $s_{,}$ esse arco, a sua expressão differencial será

$$ds_{,} = bd\sigma\sqrt{1+\varepsilon\,\mathrm{sen}^2\lambda\cos^2\sigma}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\beta').$$

Para o mostrar, notemos que um arco de ellipse, cujos semieixos maior e menor sejam a e b, é dado pela fórmula (Navier, logar citado)

$$s_{,}=\int dx\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x^2}{a^2-x^2}}\ldots\ldots\ldots\ldots(\gamma');$$

ora porque na ellipse de que agora nos occupamos as abcissas se contam sobre o eixo menor, o que equivale a mudar em (γ') b em a e reciprocamente, introduzindo os seus valores e os da abcissa $x=b\cos\sigma$, teremos

$$s_{,}=\int -b\,\mathrm{sen}\,\sigma\,d\sigma\sqrt{1+(1+\varepsilon\,\mathrm{sen}^2\lambda)\frac{\cos^2\sigma}{1-\cos^2\sigma}},$$

e portanto

$$ds_{,}=-b\,\mathrm{sen}\,\sigma\,d\sigma\sqrt{\frac{\mathrm{sen}^2\sigma+(1+\varepsilon\,\mathrm{sen}^2\lambda)\cos^2\sigma}{\mathrm{sen}^2\sigma}},$$

ou

$$ds_{,}=-b\,d\sigma\sqrt{1+\varepsilon\,\mathrm{sen}^2\lambda\cos^2\sigma}\ldots\ldots\ldots\ldots(\delta').$$

Na fórmula (γ'), que suppõem a extremidade do eixo menor por origem dos arcos, o integral deve por isso ser tomado entre os limites zero e x, a que correspondem os da outra coordenada b e y; como porém no caso presente estão trocados os nomes ás coordenadas, vê-se que os limites do integral devem ser invertidos. Esta mudança equivale a trocar o signal no segundo membro, o que reduzirá finalmente (δ') a (β'), e fica demonstrada a expressão differencial do arco $s_{,}$.

Como os segundos membros de (α') e (β') são os mesmos, segue-se que temos

$$ds=ds_{,};$$

e d'aqui se conclue que os arcos de linha geodesica podem ser indefinidamente assimilhados aos da ellipse. A constante arbitraria da integração virá a significar que na linha geodesica indefinidamente prolongada n'um ou n'outro sentido um ponto qualquer deve ser tomado para ponto de partida.

16. Por isso que, conformemente ao que fica exposto, uma linha geodesica traçada entre dois pontos de um ellipsoide de revolução, sendo prolongada, ha de necessariamente cortar em angulo recto um e depois muitos meridianos, segue-se que, quaesquer que sejam os dois pontos do ellipsoide, têm logar para a linha geodesica que por elles passa as propriedades demonstradas. Quando porém os dois pontos estejam em um mesmo meridiano ou no equador, a linha geodesica será n'esse caso o respectivo arco de meridiano ou de equador, e a sua natureza é de uma curva necessariamente fechada e definida.

17. Passamos agora a suppor que a superficie sobre que assenta a linha geodesica, sem ser um ellipsode de revolução pouco achatado, é com tudo pouco differente da fórma espherica.

Tomando por unidade o raio da esphera circumscripta a essa superficie, a sua equação será

$$x^2+y^2+z^2-1-2\alpha u'=0,$$

sendo α um coefficiente muito pequeno, e u' uma funcção de x e de y. Com effeito, as coordenadas de um ponto da superficie pouco differem das da esphera circumscripta, pelo que será α muito pequeno; e pela mesma razão, quando u' fosse funcção de x, y e z, poderiamos n'essa funcção pôr em vez de z a quantidade $\sqrt{1-x^2-y^2}$, a qual differe de z de uma quantidade muito pequena, e isto equivale a desprezar em $2\alpha u'$ as quantidades de segunda ordem, o que podemos fazer em virtude da natureza de α.

Tomando as derivadas parciaes da funcção

$$x^2+y^2+z^2-1-2\alpha u'$$

e substituindo-as nas equações (1) da linha geodesica, teremos para equações differenciaes d'esta linha sobre o espheroide

$$\left.\begin{aligned} xd^2y-yd^2x&=\alpha\frac{du'}{dx}d^2y-\alpha\frac{du'}{dy}d^2x,\\ xd^2z-zd^2x&=\alpha\frac{du'}{dx}d^2z,\\ yd^2z-zd^2y&=\alpha\frac{du'}{dy}d^2z. \end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots(9).$$

Chamando r o raio vector tirado do centro da esphera circumscripta para um ponto da superficie, θ o angulo que este raio vector faz com o eixo dos z, e φ o angulo formado pelo plano dos zx e aquelle que contém o eixo dos z e o raio vector, temos as equações

$$x = r \operatorname{sen} \theta \cos \varphi,$$

$$y = r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi,$$

$$z = r \cos \theta,$$

as quaes, differenciadas totalmente, e attendendo á expressão de um arco de curva no espaço, nos dão

$$ds^2 = dr^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta d\varphi^2 + r^2 d\theta^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (10).$$

Como a superficie differe pouco da esphera e de um ellipsoide de revolução ligeiramente achatado, suppondo o eixo dos z o da revolução do ellipsoide, pode a latitude h do ponto da superficie tomar-se como complemento do angulo θ formado pelo raio vector com o eixo de rotação; teremos pois $h = 90^\circ - \theta$, que reduz os valores de x e de y a

$$x = \cos h \cos \varphi, \quad y = \cos h \operatorname{sen} \varphi \ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

Ora como u' é funcção de x e de y, sel-o-ha por conseguinte de h e de φ, pelo que, differenciando a funcção u' sob um e outro aspecto, e egualando as differenciaes totaes, virá

$$\frac{du'}{dx} dx + \frac{du'}{dy} dy = \frac{du'}{dh} dh + \frac{du'}{d\varphi} d\varphi,$$

d'onde resultará, attendendo a combinações e differenciações das equações (11)

$$\frac{du'}{dx} = -\frac{\cos \varphi}{\operatorname{sen} h} \cdot \frac{du'}{dh} - \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\cos h} \cdot \frac{du'}{d\varphi},$$

$$\frac{du'}{dy} = -\frac{\operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen} h} \cdot \frac{du'}{dh} + \frac{\cos \varphi}{\cos h} \cdot \frac{du'}{d\varphi}.$$

Multiplicando a primeira d'estas equações por d^2y e a segunda por d^2x, subtrahindo depois a segunda da primeira, e attendendo aos valores de *sen* φ e *cos* φ que se tiram de (11), teremos

$$\frac{du'}{dx}d^2y-\frac{du'}{dy}d^2x=-\frac{\frac{du'}{dh}}{\operatorname{sen}h\cos h}(xd^2y-yd^2x)-\frac{\frac{du'}{dx}}{\cos^2 h}(xd^2x+yd^2y),$$

equação que se reduz a

$$\frac{du'}{dx}d^2y-\frac{du'}{dy}d^2x=\frac{du'}{d\varphi}ds^2,$$

tomando em consideração as equações (9) e despresando α na equação do espheroide.

Integrando a primeira das equações (9), attendendo ás outras duas e mais á equação

$$(xdz-zdx)\cos\varphi+(ydz-zdy)\operatorname{sen}\varphi=-r^2d\theta,$$

chegaremos finalmente a

$$r^2d\theta=c'ds\operatorname{sen}\varphi+c''ds\cos\varphi-$$

$$-\alpha ds\cos\varphi\int ds\left\{\frac{du'}{dh}\cos\varphi+\frac{du'}{d\varphi}\operatorname{sen}\varphi\operatorname{tg}h\right\}$$

$$-\alpha ds\operatorname{sen}\varphi\int ds\left\{\frac{du'}{dh}\operatorname{sen}\varphi-\frac{du'}{d\varphi}\cos\varphi\operatorname{tg}h\right\},$$

sendo c' e c'' constantes arbitrarias.

Continuando esta analyse, o illustre auctor da *Mechanica Celeste* acha a expressão do arco do meridiano terrestre

$$s=\varepsilon+\alpha\varepsilon\left\{u_i'+\left(\frac{d^2u_i'}{dh^2}\right)\right\}+\frac{\alpha\varepsilon^2}{1.2}\left\{\left(\frac{du_i'}{dh}\right)+\left(\frac{d^3u_i'}{dh^3}\right)\right\}+\ldots,$$

onde $u_{,}'$ designa o valor de u' na origem do arco, e é $\varepsilon = h - h_{,}$ a differença em latitude dos dois pontos extremos do mesmo arco. Se a figura da terra fosse um ellipsoide de revolução, sería elle uma curva plana; tal não se pode dar porém (pag. 11 d'esta dissertação), os parallelos não são circulos, e a observação do afastamento do arco da meridiana a respeito do plano do meridiano celeste é ainda um meio de esclarecer os conhecimentos sobre a figura da terra. A expressão d'este afastamento é achada (*Mec. Celeste*, liv. 3.º, cap. 5.º)

$$\mathrm{V} - \mathrm{V}_{,} = -\frac{\alpha\varepsilon}{\cos^2 h_{,}} \left\{ \left(\frac{du'_{,}}{d\varphi}\right) \operatorname{tg} h_{,} + \left(\frac{d^2 u'_{,}}{d\varphi dh}\right) \right\}.$$

Mas se o nosso planeta não é todo elle perfeitamente um ellipsoide, podemos conceber muito bem em cada ponto da sua superficie um ellipsoide osculador, onde, a partir do ponto de contacto e n'uma pequena extensão, as linhas geodesicas, as longitudes e latitudes serão as mesmas que sobre a superficie da terra. Este ellipsoide tangente varía de um para outro lado do globo que habitamos, e as medidas geodesicas feitas em differentes paizes accusam as ligeiras deformações. Mais numerosas serão ellas, e mais claras ideias terá a humanidade sobre a figura do corpo celeste onde lhe foi destinado existir.

FIM.

APPENDIX

Principio da minima acção; sua applicação ao movimento de um ponto sobre uma superficie

As equações de movimento de um ponto impellido unicamente pela acção de uma percussão inicial, e sujeito a ficar sobre uma superficie, vão-nos dar uma propriedade notavel da sua trajectoria.

Sabe-se que, quando as forças componentes X, Y, Z não encerram explicitamente o tempo nem a velocidade, e a expressão

$$Xdx + Ydy + Zdz$$

é a differencial exacta de uma funcção $F(x, y, z)$ das coordenadas, temos

$$v^2 = h^2 + 2F(x, y, z) - 2F(a, b, c) \dots\dots\dots\dots (a)$$

em virtude da relação que ha entre o trabalho das forças e a força viva do ponto material. Ora n'estas condições o integral $\int vds$ relativo ao movimento do ponto sobre a superficie para ir de um ponto dado A a outro dado B será um *minimo*.

Com effeito, tomando a variação do mesmo integral, attendendo á equação das forças vivas e a que é $ds = vdt$, vem

$$\frac{1}{2}\delta v^2 = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z \dots\dots\dots\dots (b).$$

Mas chamando N a resistencia normal que a superficie oppõe, $U=0$ a equação da superficie, V a funcção

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{dU^2}{dx^2}+\frac{dU^2}{dy^2}+\frac{dU^2}{dz^2}}}$$

e λ, μ, ν os angulos que a normal faz com os eixos, temos para equações do movimento do ponto

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}&=X+N\cos\lambda\\ \frac{d^2y}{dt^2}&=Y+N\cos\mu\\ \frac{d^2z}{dt^2}&=Z+N\cos\nu\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (c),$$

e para expressão dos cosenos d'aquelles angulos

$$\cos\lambda=V\frac{dU}{dx},\ \cos\mu=V\frac{dU}{dy},\ \cos\nu=V\frac{dU}{dz}.$$

Ora multiplicando as tres equações (*c*) respectivamente por δx, δy, δz, sommando e attendendo a que é zero a variação total

$$\delta U=\frac{dU}{dx}\delta x+\frac{dU}{dy}\delta y+\frac{dU}{dz}\delta z,$$

virá

$$X\delta x+Y\delta y+Z\delta z=\frac{d^2x}{dt^2}\delta x+\frac{d^2y}{dt^2}\delta y+\frac{d^2z}{dt^2}\delta z,$$

ou, attendendo a (b) e multiplicando por dt,

$$\frac{1}{2}\delta v^2 \times dt = \frac{d^2x}{dt}\delta x + \frac{d^2y}{dt}\delta y + \frac{d^2z}{dt}\delta z,$$

e, porque é $vdt = ds$,

$$ds\delta v = \frac{d^2x}{dt}\delta x + \frac{d^2y}{dt}\delta y + \frac{d^2z}{dt}\delta z \ldots\ldots\ldots\ldots (d).$$

A conhecida expressão da differencial de um arco de curva no espaço dá-nos tambem

$$\delta ds = \frac{dx}{ds}\delta dx + \frac{dy}{ds}\delta dy + \frac{dz}{ds}\delta dz,$$

onde, multiplicando por $v = \frac{ds}{dt}$ e invertendo a ordem das operações no segundo membro, ficará

$$v\delta ds = \frac{dx}{dt}d\delta x + \frac{dy}{dt}d\delta y + \frac{dz}{dt}d\delta t \ldots\ldots\ldots\ldots (e).$$

Mas sabe-se que

$$\delta\int vds = \int\delta . vds$$

e

$$\delta . vds = ds\delta v + v\delta ds,$$

pelo que, tomando em conta (d) e (e), teremos

$$\delta . vds = d\left(\frac{dx}{dt}\delta x + \frac{dy}{dt}\delta y + \frac{dz}{dt}\delta z\right),$$

e integrando

$$\int\delta . vds = \frac{dx}{dt}\delta x + \frac{dy}{dt}\delta y + \frac{dz}{dt}\delta z + C.$$

Ora, tomando o integral entre os limites relativos aos pontos fixos A e

B, a constante desapparece por subtracção; e porque para aquelles pontos são nullas as variações δx, δy, δz, ficar-nos-ha assim

$$\delta\int v ds = \int \delta v ds = 0,$$

condição commum tanto ao maximo como ao minimo. Mas é evidente que não pode haver maximo; por quanto, tomando sobre a superficie entre os pontos fixos A e B trajectorias de comprimentos indefinidos, se faz crescer o integral $\int v ds$ além de todo o limite. Logo o integral $\int v ds$ é um minimo; *Q. E. D.*

Este theorema é conhecido pelo nome de ***principio da minima acção.*** Achado por *Maupertuis,* o qual pela primeira vez o fez sabido com a publicação do seu *Ensaio de cosmologia,* não é mais do que uma consequencia logicamente deduzida das leis experimentaes que a natureza nos revela, e as quaes estão implicitas nas equações differenciaes do movimento; insanamente pretenderam alguns philosophos demonstral-o *a priori* por meras considerações metaphysicas.

Assim entendido, mostremos que quando um ponto se move em virtude unicamente de uma velocidade inicial, e obrigado a ficar sobre uma superficie, descreve sobre esta uma *linha geodesica.* N'estas condições as forças X, Y, Z são nullas e a equação (a) nos mostra que é

$$v = \text{const.};$$

e porque o principio tem applicação e deve ser minimo $\int v ds$, o integral $\int ds$ é minimo e o arco s descripto pelo movel é uma linha geodesica.

O mesmo se pode ver por outra consideração.

Por serem nullas X, Y, Z, as equações (c) se reduzem a

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \text{N}\cos\lambda,\ \frac{d^2y}{dt^2} = \text{N}\cos\mu,\ \frac{d^2z}{dt^2} = \text{N}\cos\nu,$$

e como, tomando s por variavel independente, temos

$$\frac{d^2x}{dt^2} = v^2\frac{d^2x}{ds^2},\ \frac{d^2y}{dt^2} = v^2\frac{d^2y}{ds^2},\ \frac{d^2z}{dt^2} = v^2\frac{d^2z}{ds^2},$$

multiplicando convenientemente estas equações e as tres antecedentes por factores $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, e combinando por subtracção, damos ás equações do movimento do ponto a fórma equivalente

$$\frac{dxd^2y - dyd^2x}{ds^3} = \frac{N}{v^2}\left(\frac{dx}{ds}\cos\mu - \frac{dy}{ds}\cos\lambda\right),$$

$$\frac{dzd^2x - dxd^2z}{ds^3} = \frac{N}{v^2}\left(\frac{dz}{ds}\cos\lambda - \frac{dx}{ds}\cos\nu\right),$$

$$\frac{dyd^2z - dzd^2y}{ds^3} = \frac{N}{v^2}\left(\frac{dy}{ds}\cos\nu - \frac{dz}{ds}\cos\mu\right).$$

Multiplicando-as agora respectivamente por $\cos\nu$, $\cos\mu$, $\cos\lambda$ e sommando vem

$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{dxd^2y - dyd^2x}{ds^3}\cos\nu + \dfrac{dzd^2x - dxd^2z}{ds^3}\cos\mu + \\ \dfrac{dyd^2z - dzd^2y}{ds^3}\cos\lambda = 0\end{array}\right\}\ldots\ldots(f);$$

por outra parte sabemos tambem que, por ser

$$(dyd^2z - dzd^2y)(x' - x) + (dzd^2x - dxd^2z)(y' - y)$$
$$+ (dxd^2y - dyd^2x)(z' - z) = 0$$

a equação do plano osculador a uma curva, chamando α, β, γ os angulos que a perpendicular a este plano faz com os eixos, teremos

$$\cos\alpha = \frac{dyd^2z - dzd^2y}{\sqrt{(dyd^2z - dzd^2y)^2 + (dzd^2x - dxd^2z)^2 + (dxd^2y - dyd^2x)^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{dzd^2x - dxd^2z}{\sqrt{(dyd^2z - dzd^2y)^2 + (dzd^2x - dxd^2z)^2 + (dxd^2y - dyd^2x)^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{dxd^2y - dyd^2x}{\sqrt{(dyd^2z - dzd^2y)^2 + (dzd^2x - dxd^2z)^2 + (dxd^2y - dyd^2x)^2}}$$

e em virtude d'estes valores a equação (f) nos dá finalmente

$$\cos\lambda\,\cos\alpha + \cos\mu\,\cos\beta + \cos\nu\,\cos\gamma = 0,$$

isto é, o plano osculador normal á superficie, e portanto é uma linha geodesica a trajectoria do movel sobre a superficie.

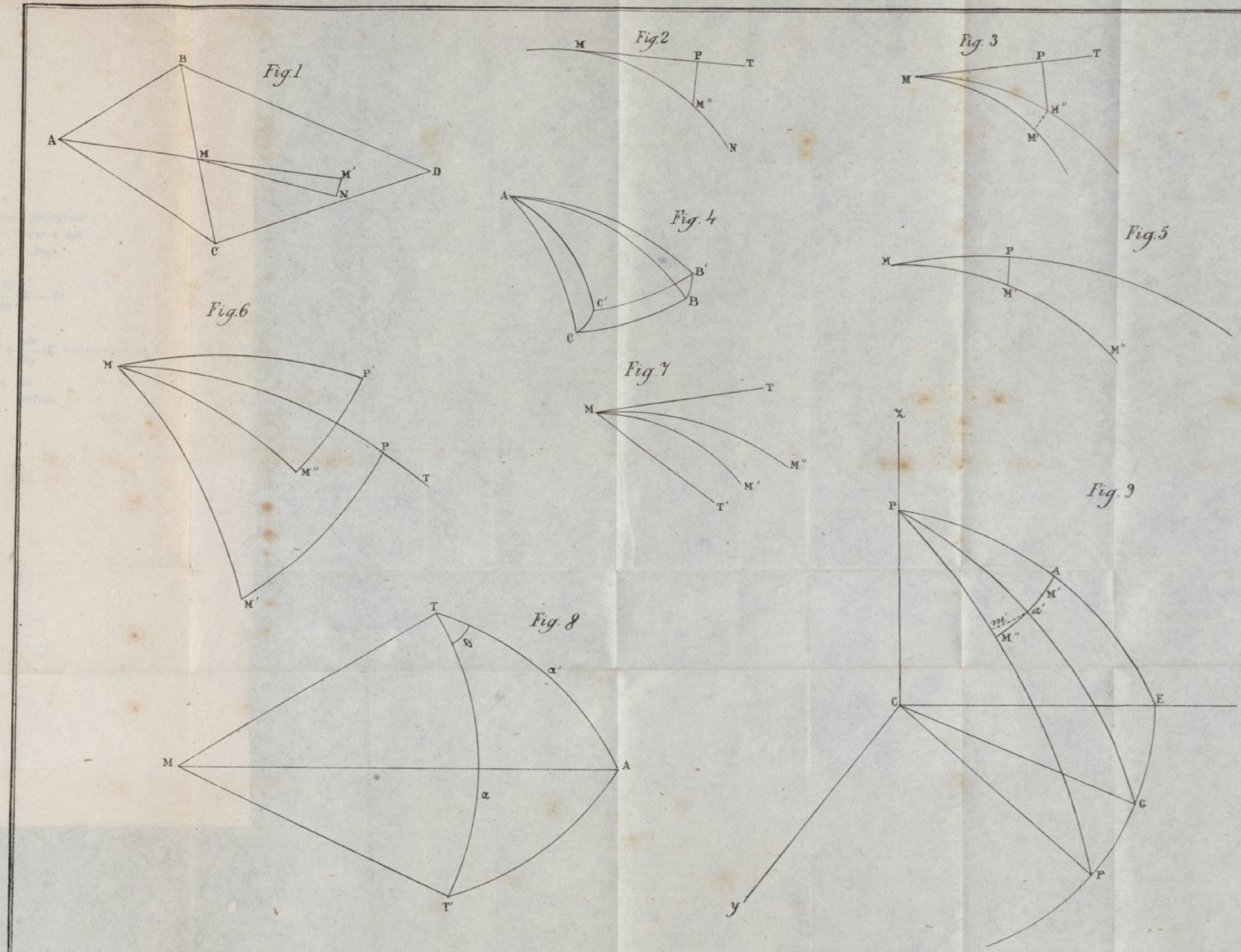

Fig. 1
Fig. 2
Fig. 3
Fig. 4
Fig. 5
Fig. 6
Fig. 7
Fig. 8
Fig. 9

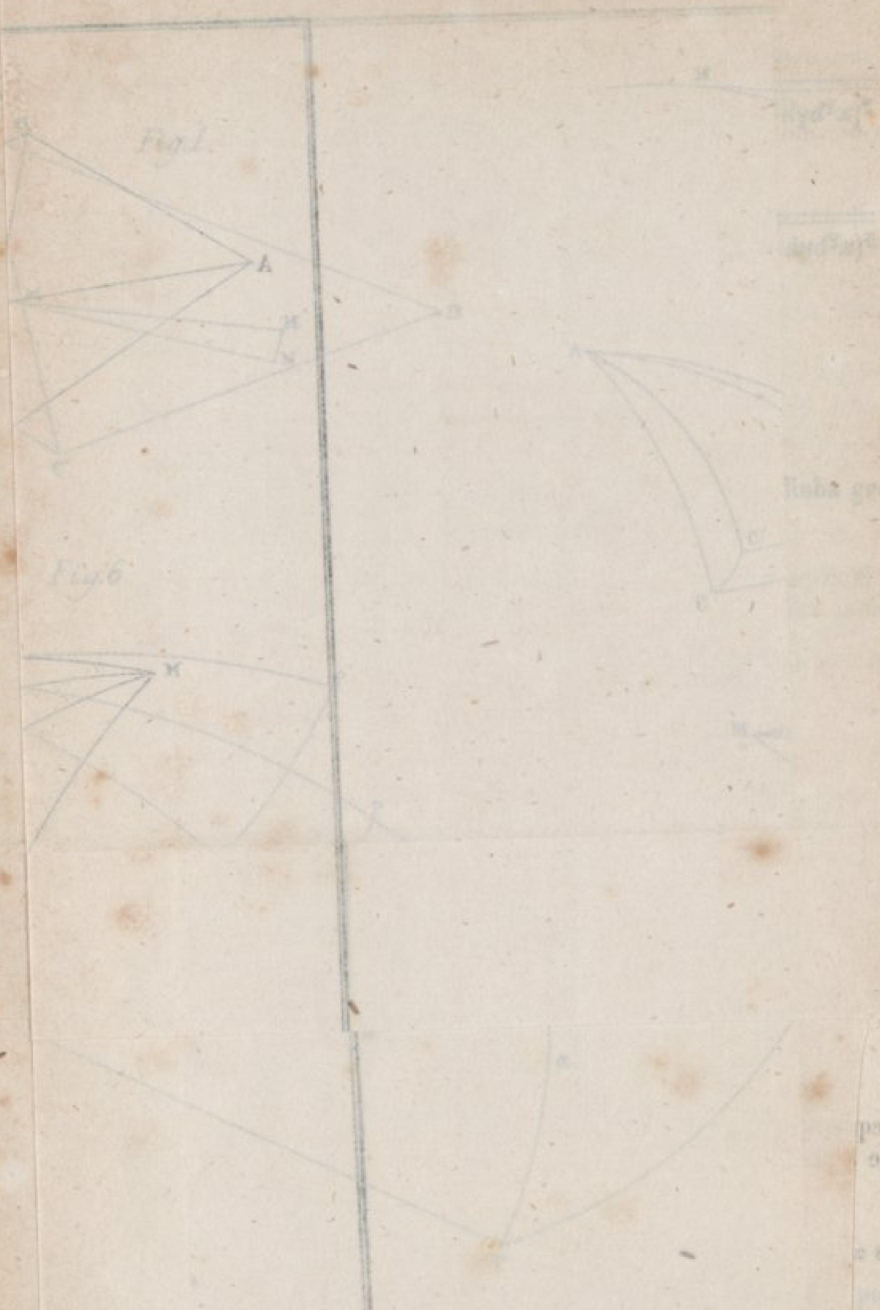
Fig.1
Fig.6

ERRATAS

Pagina 11,	linha 1	geologicas	*lêa-se*	geologicos
» 13,	» 8	$dy^2 + dy^2$	»	$dx^2 + dy^2$
» 16,	» 16	$d^2(z)^2$	»	$(d^2z)^2$
» 16,	» 24:			

$$X' - X + \frac{dz}{dx}(Z' - Z),\ Y' - Y = \frac{dz}{dy}(Z' - Z)$$

lêa-se

$$X' - X + \frac{dz}{dx}(Z' - Z) = 0,\ Y' - Y + \frac{dz}{dy}(Z' - Z) = 0$$

Pagina 24,	linha 5	para	*lêa-se*	por
» 31,	» 10	superfice	»	surface

MATHEMATICA

P. DA COSTA - DISSERTAÇÃO DE CONCURS

1877