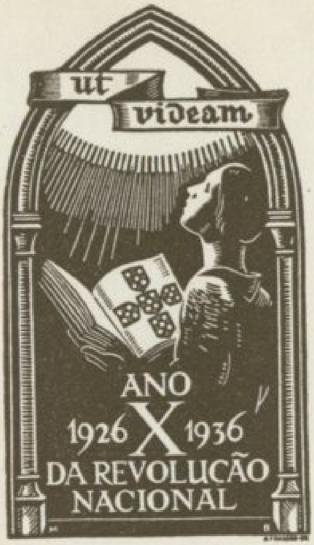
ut
videam
ANO
1926 X 1936
DA REVOLUÇÃO
NACIONAL

mathematica

DETERMINAÇÃO

DE

FUNCÇÕES ANALYTICAS

DETERMINAÇÃO
DE
FUNCÇÕES ANALYTICAS

ESTUDOS
SOBRE
ANALYSE INFINITESIMAL

DISSERTAÇÃO DE CONCURSO

POR

João Ignacio do Patrocinio da Costa

DOUTOR EM MATHEMATICA E BACHAREL FORMADO EM PHILOSOPHIA
PELA UNIVERSIDADE DE COIMBRA
PROFESSOR DE GREGO E DE MATHEMATICA ELEMENTAR
NO LYCEU NACIONAL DE VIZEU

COIMBRA
IMPRENSA DA UNIVERSIDADE
1873

PROLOGO

> Aos Geometras verdadeiramente taes pertence julgar se este meu trabalho será merecedor de alguma estimação.
>
> GARÇÃO STOCKLER.

O decreto de 22 de agosto de 1865, regulando os concursos para o magisterio superior, determina que os candidatos apresentem para um dos argumentos dos seus actos uma dissertação impressa sobre algum dos ramos de sciencias professadas na faculdade ou eschola respectiva. Á escolha dos candidatos deixou o legislador, e muito acertadamente, o objecto, a natureza e a extensão das suas memorias.

Em observancia do disposto na lei é, por tanto, que apresentamos ao acolhimento da Faculdade de

Mathematica, e ao dos outros mathematicos nossos compatriotas, as presentes lucubrações sobre um ramo das sciencias mathematicas, o qual, por causas diversas, podémos cultivar menos perturbada e mais desenvolvidamente.

Oxalá possa o nosso trabalho, satisfazendo ao espirito da lei, ser ainda util aos estudantes da Faculdade de Mathematica e aos das outras escholas mathematicas portuguezas, levando-os pelo exemplo a applicarem os vastos recursos da analyse, exercendo assim a sua actividade intellectual sobre um dos mais bellos ramos dos conhecimentos humanos. Tal foi, por certo, um dos fins do legislador que decretou a producção e a publicação d'esta especie de trabalhos, e tal não pode deixar de ser o desejo de nossos respeitaveis mestres. Para quem a sciencia é um sacerdocio não se pode deixar de suppor um amor firme pela cultura e pelo esplendor das sciencias no nosso paiz.

DETERMINAÇÃO

DE

FUNCÇÕES ANALYTICAS

1. Quando se chega a exprimir analyticamente a propriedade caracteristica de uma funcção, por isso que essa funcção fica assim perfeitamente definida, tem-se tudo o que é necessario para chegar ao conhecimento da sua natureza. Em conformidade com isto, quando nos for dada a equação ou equações, caracterisando uma especie de funcções de fórma desconhecida ou considerada como tal, é claro que pelo estudo d'essas equações, practicando sobre ellas transformações, hypotheses e operações convenientes, se deve determinar a fórma e por conseguinte a natureza da funcção definida. Os recursos analyticos poderão em casos especiaes não bastar para este intento, porque tal pode ser a propriedade que se queira impôr á funcção problematica, que, em resultado d'ella, seja o analysta

conduzido a operações inexequiveis, ou a difficuldades que o estado da sciencia não possa ainda vencer; mas não é menos certo que, em geral, os processos do calculo differencial e do calculo integral conseguem o fim que se pretende, como passamos a ver nos exercicios seguintes.

2. Seja o primeiro problema achar uma funcção $z = \varphi(x)$, que goza da propriedade expressa pela equação (*a*)

$$\varphi(x) \pm \varphi(y) = \varphi(x \pm y) \ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Como esta equação tem logar para qualquer valor de x e qualquer de y, derivando em ordem a x temos

$$\varphi'(x) = \varphi'(x \pm y),$$

por onde se vê que mudando x de valor, $\varphi'(x)$ conserva sempre o mesmo e é por isso uma constante a, pelo que temos

$$\frac{dz}{dx} = a,$$

(*a*) Duhamel. Calc. Inf. Liv. 4.º cap. 16, n.º 196.

e integrando

$$z = ax + b \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Substituindo $z = \varphi(x) = ax + b$ na equação (1), e determinando b pela condição de que (1) seja identicamente satisfeita, a substituição dá-nos

$$ax + b \pm ay \pm b = a(x \pm y) + b,$$

d'onde se deduz $b = 0$, ficando a qualquer. Conclue-se d'aqui que das funcções representadas por (2) sómente $z = ax$ satisfaz a (1), e por conseguinte a funcção procurada é $\varphi(x) = ax$, sendo a uma constante qualquer.

3. Procuremos em segundo logar determinar a funcção caracterisada pela condição seguinte (*a*)

$$\varphi(x) + \varphi(y) = \varphi(xy) \ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Derivando em ordem a x, e derivando tambem em ordem a y, temos as duas equações,

$$\varphi'(x) = \varphi'(xy) . y$$

$$\varphi'(y) = \varphi'(xy) . x,$$

(*a*) Duhamel, logar citado, n.º 197.

das quaes tiramos

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi'(y)} = \frac{y}{x}$$

ou

$$x\varphi'(x) = y\varphi'(y),$$

que nos indica ter $x\ \varphi'(x)$ um valor constante; designando por a este valor, e fazendo $\varphi\ (x) = z$, será

$$x\frac{dz}{dx} = a$$

e pela integração

$$z = a\,l x + b \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

O valor de z ou $\varphi\ (x)$ substituido em (1) dá o resultado

$$a\,l x + b + a\,l y + b = a\,l x y + b,$$

que exige ser $b=0$, e deixa a constante a arbitraria; logo a funcção procurada é $\varphi\ (x) = a.lx$, ou

$$\varphi(x) = \text{Log. } x \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3),$$

sendo a então o modulo para passar de systema neperiano para o de base qualquer.

Se em vez da funcção caracterisada pela equação (1), se pedisse uma, cuja propriedade caracteristica fosse

$$\varphi(x)-\varphi(y)=\varphi\left(\frac{x}{y}\right) \ldots\ldots\ldots \quad (1'),$$

derivando em ordem a x e em ordem a y, o que dá

$$\varphi'(x)=\varphi'\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{1}{y},$$

$$\varphi'(y)=\varphi'\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{x}{y^2},$$

e eliminando $\varphi'\left(\frac{x}{y}\right)$ entre estas duas equações, vem a mesma equação (2); logo a funcção pedida seria ainda $\varphi(x)=\text{Log. } x$, por que se determinava do mesmo modo $b=0$.

4. Procuremos agora achar a funcção, cuja propriedade caracteristica é (a)

$$\varphi(x)\,\varphi(y)=\varphi(x+y) \ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

(a) Duhamel, logar citado, n.º 198.

Derivando esta equação em ordem a x, e em ordem a y, temos as duas

$$\varphi'(x)\,\varphi(y)=\varphi'(x+y)$$

$$\varphi(x)\,\varphi'(y)=\varphi'(x+y),$$

que pela eliminação de $\varphi'(x+y)$ dão

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}=\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)},$$

e por conseguinte sendo a uma constante, e $\varphi(x)=z$, temos

$$\frac{dz}{z\,dx}=a.\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2);$$

a integração dá-nos

$$l.\,z=ax+lb$$

ou, passando para exponenciaes,

$$\frac{z}{b}=e^{ax},$$

e substituindo este valor de z na equação (1), temos

$$b\,e^{ax} \times b\,e^{ay} = b\,e^{a(x+y)}$$

o que exige ser $b=1$. A funcção procurada é pois

$$\varphi(x) = e^{ax}$$

ficando a arbitraria; e quando esta constante seja imaginaria da fórma $a=m \pm n\sqrt{-1}$, a funcção $\varphi(x)$ toma a expressão seguinte

$$\varphi(x) = e^{mx}(\cos nx \pm \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\, nx) \ldots \quad (3).$$

Sendo a fun ção $\varphi(x)$ caracterisada pela condição

$$\frac{\varphi(x)}{(y)} = \varphi(x-y) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1'),$$

vem

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(y)} = \varphi'(x-y), \quad \frac{\varphi(x)\varphi'(y)}{\varphi(y)^2} = \varphi'(x-y),$$

e pela eliminação de $\varphi'(x-y)$, e sendo a uma constante,

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}=\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}=a\,,$$

logo a funcção procurada é ainda dada por $\varphi(x)= =b\,e^{ax}$, e determinando b, $\varphi(x)=e^{ax}$.

5. Seja proposta a condição (a)

$$\varphi(x)\,\varphi(y)=\varphi(xy)\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1),$$

e tractemos de achar a funcção $z=\varphi(x)$ que ella caracterisa.

Derivando (1) em ordem a x e em ordem a y, temos

$$\varphi'(x)\,\varphi(y)=\varphi'(xy)\,.\,y$$

$$\varphi(x)\,\varphi'(y)=\varphi'(xy)\,.\,x\,,$$

e pela eliminação de $\varphi'(xy)$

$$x\,\varphi'(x)\,\varphi(y)=y\,\varphi(x)\,\varphi'(y)\,;$$

(a) Duhamel, logar citado, n.º 199.

separando as variaveis é

$$\frac{x\,\varphi'(x)}{\varphi(x)}=\frac{y\,\varphi'(y)}{\varphi(y)},$$

e por conseguinte, sendo a uma constante,

$$\frac{x\,\varphi'(x)}{\varphi(x)}=a \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Ora, por ser $z=\varphi(x)$ e por tanto $\frac{dz}{dx}=\varphi'(x)$, a equação (2) torna-se em

$$\frac{x\,dz}{z\,dx}=a,$$

que pela separação, integração e passagem dos logarithmos para os numeros, nos dá por fim

$$z=b\,x^{a} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3).$$

Para determinar a constante b da integração, substituimos este valor de $z=\varphi(x)$ em (1) e temos

$$b\,x^{a}\times b\,y^{a}=b\,(xy)^{a}\,;$$

logo será $b=1$, e a funcção procurada

$$\varphi(x)=x^a.$$

Como a constante a fica arbitraria, quando ella for uma quantidade imaginaria com a fórma $a=m\pm n\sqrt{-1}$, a funcção $\varphi(x)$ terá a fórma seguinte, da qual a antecedente é um caso particular,

$$\varphi(x)=x^m(\cos n\,l.\,x\pm\sqrt{-1}\,sen.\,n\,l.\,x). \quad (4).$$

Para a funcção que deva satisfazer á condição

$$\frac{\varphi(x)}{\varphi(y)}=\varphi\left(\frac{x}{y}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1')$$

teremos do mesmo modo:

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(y)}=\varphi'\left(\frac{x}{y}\right).\frac{1}{y}, \quad \frac{\varphi(x)\varphi'(y)}{\varphi(y)^2}=\varphi'\left(\frac{x}{y}\right).\frac{x}{y^2},$$

$$\frac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)}=\frac{y\varphi'(y)}{\varphi(y)}=a,$$

e será por conseguinte a mesma funcção $\varphi(x)=$

$=bx^a$, ou antes $\varphi(x)=x^a$, porque pela condiç o

$$\frac{bx^a}{by^a}=b\left(\frac{x}{y}\right)^a$$

sahe ainda $b=1$.

6. Procuremos uma funcção tal, que a somma de duas funcções similhantes seja egual ao producto das mesmas. Será a equação do problema

$$\varphi(x)+\varphi(y)=\varphi(x)\varphi(y)\ \ldots\ldots\ldots\ (1),$$

que, derivada em ordem a x e em ordem a y, dá as equações

$$\varphi'(x)=\varphi'(x)\varphi(y)$$

$$\varphi'(y)=\varphi(x)\varphi'(y),$$

das quaes concluimos

$$\left.\begin{array}{l}\varphi'(x)\{1-\varphi(y)\}=0\\ \varphi'(y)\{1-\varphi(x)\}=0\end{array}\right\}\ \ldots\ldots\ldots\ (2).$$

Tracta-se de achar funcções que satisfaçam ás equações (2), e ver quaes d'ellas convenham á proposta; ora, como as equações (2) possam ser satisfeitas por qualquer d'estes systemas

$$1.^\circ \begin{cases} 1-\varphi(y)=0 \\ 1-\varphi(x)=0 \end{cases} \qquad 2.^\circ \begin{cases} 1-\varphi(y)=0 \\ \varphi'(y)=0 \end{cases}$$

$$3.^\circ \begin{cases} 1-\varphi(x)=0 \\ \varphi'(x)=0 \end{cases} \qquad 4.^\circ \begin{cases} \varphi'(x)=0 \\ \varphi'(y)=0 \end{cases},$$

vamos examinar qual d'estes é compativel com (1).

O 1.° dá $\varphi(y)=1$, $\varphi(x)=1$, que não satisfaz, pois torna (1) em $2=1$, resultado absurdo.

O 2.° dá $\varphi(y)=1$ e deixa $\varphi(x)$ arbitraria, mas só satisfaz á proposta, quando for $\varphi(x)=\infty$.

O 3.° está no caso do 2.°

O 4.°, finalmente, dando-nos $\varphi(x)=a$, $\varphi(y)=b$, resolve o problema, não com funcções das variaveis x e y, mas com quantidades commensuraveis ou incommensuraveis, ligadas entre si pela equação do segundo gráu

$$a+b=ab \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (3),$$

e que podem ser representadas pelas coordenadas da hyperbole, que é o logar geometrico da mesma equação. Das soluções numericas da mesma equação (3) uma só é inteira, como se reconhece tirando d'ella o valor de uma das variaveis, por exemplo

$$a = \frac{b}{b-1},$$

e advertindo que o numero 2 é o unico numero divisivel pelo seu antecedente, tendo logar por conseguinte a solução inteira com $a = b = 2$.

Se, egualando os primeiros membros das equações (2), estabelecermos a equação

$$\frac{\varphi'(x)}{1-\varphi(x)} = \frac{\varphi'(y)}{1-\varphi(y)}',$$

sendo c uma constante e fazendo $z = \varphi(x)$, virá

$$\frac{dz}{c - cz} = dx,$$

e integrando

$$-\frac{1}{c}\, l.\, k\,(1-z) = x,$$

ou

$$l.\, k\,(1-z) = -cx,$$

*

e passando para os numeros

$$k(1-z)=e^{-cx};$$

teremos pois

$$z=\varphi(x)=1-k^{-1}e^{-cx},\quad t=\varphi(y)=1-k^{-1}e^{-cy}.$$

Estas funcções, dando-nos na equação (1)

$$1-k^{-1}e^{-cx}+1-k^{-1}e^{-cy}=1$$

$$-k^{-1}e^{-cy}-k^{-1}e^{-cx}+k^{-2}e^{-c(x+y)},$$

ou

$$1=k^{-2}e^{-c(x+y)}$$

exigem $k=\pm 1$, e ou $c=0$ ou $x=-y$.

Ora $c=0$, tornando $\varphi(x)=\varphi(y)=1\mp e^{0}$, dá os valores numericos zero e 2, que correspondem ao systema $\varphi'(x)=0$, $\varphi'(y)=0$, discutido já no 4.º caso; $x=-y$, dando $\varphi(x)=1\pm e^{-cx}$, $\varphi(y)=1\pm e^{+cx}$, torna identica a equação (1) mas não resolve o problema, porque reduz $\varphi(y)$ a uma funcção de x; indica porém a modificação que se deve fazer no enunciado, para que a analyse o resolva no sentido do mesmo. Com effeito, sendo então o problema achar duas funcções de uma mesma variavel, determinadas pela condição

$$\varphi(x) + \varphi(-x) = \varphi(x)\,\varphi(-x),$$

fazendo o calculo, acham-se as funcções $z = 1 \pm e^{-cx}$, $t = 1 \pm e^{+cx}$, que lhe satisfazem.

Se, em vez de ser dada a condição (1), nos for pedida uma funcção tal, que a differença de duas funcções similhantes seja egual ao quociente das mesmas funcções, teremos

$$\varphi(x) - \varphi(y) = \frac{\varphi(x)}{\varphi(y)} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1')$$

e derivando

$$\varphi'(x) = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(y)}, \quad \varphi'(y) = \frac{\varphi(x)\,\varphi'(y)}{\varphi(y)^2},$$

ou

$$\frac{\varphi'(x)\left\{\varphi(y) - 1\right\}}{\varphi(y)} = 0, \quad \frac{\varphi'(y)\left\{\varphi(y)^2 - \varphi(x)\right\}}{\varphi(y)^2} = 0;$$

ora $\dfrac{\varphi'(y)\left\{\varphi(y)^2 - \varphi(x)\right\}}{\varphi(y)^2} = 0$, em virtude (1′) torna-se em

$$\frac{\varphi'(y)\left\{\varphi(x)\varphi(y)-2\varphi(x)\right\}}{\varphi(y)\varphi(x)-\varphi(x)}=\frac{\varphi'(y)\left\{\varphi(y)-2\right\}}{\varphi(y)-1}=0,$$

e, por conseguinte, temos de procurar as funcções, que, satisfazendo ás equações

$$\frac{\varphi'(x)\left\{\varphi(y)-1\right\}}{\varphi(y)}=0,\quad \frac{\varphi'(y)\left\{\varphi(y)-2\right\}}{\varphi(y)-1}=0 \dots\dots \quad (2')$$

convenham a (1'), o que se faz examinando os quatro systemas seguintes

$$1.^{\circ}\begin{cases}\varphi(y)-2=0\\ \varphi'(x)=0\end{cases}\qquad 2.^{\circ}\begin{cases}\varphi(y)-2=0\\ \varphi(y)-1=0\end{cases}$$

$$3.^{\circ}\begin{cases}\varphi'(y)=0\\ \varphi(y)-1=0\end{cases}\qquad 4.^{\circ}\begin{cases}\varphi'(y)=0\\ \varphi'(x)=0\end{cases}.$$

O 1.º dá a solução $\varphi(y)=2$, $\varphi(x)=4$; o 2.º é impossivel; o 3.º dá $\varphi(y)=1$, $\varphi(x)=\infty$; o 4.º, dando-nos $\varphi(x)=a$, $\varphi(y)=b$, resolve numericamente o problema pela equação do 2.º gráu

$$b^2-ab+a=0 \dots\dots\dots\dots \quad (3').$$

O valor de a tirado d'esta equação

$$a = \frac{b^2}{b-1}$$

nos faz ver que a unica solução em numeros inteiros é a já achada pelo primeiro systema $a=4$, $b=2$; o mesmo valor de a nos dá tambem $a=\infty$ quando $b=1$, como acharamos no 3.º

7. Procuremos tambem, se é possivel existir, as funcções definidas pela condição seguinte

$$\varphi(x)^m + \varphi(y)^n = \varphi(x+y)^{m+n} \ldots\ldots (1).$$

Derivando em ordem a x, teremos

$$m\,\varphi(x)^{m-1}\,\varphi'(x) = (m+n)\,\varphi(x+y)^{m+n-1}\,\varphi'(x+y),$$

derivando em ordem a y

$$n\,\varphi(y)^{n-1}\,\varphi'(y) = (m+n)\,\varphi(x+y)^{m+n-1}\,\varphi'(x+y),$$

e por tanto

$$m\,\varphi(x)^{m-1}\,\varphi'(x) = n\,\varphi(y)^{n-1}\,\varphi'(y).$$

Em quanto m for differente de n, não póde esta equação ter logar, senão fazendo

$$\varphi(x)^{m-1}\varphi'(x)=0, \qquad \varphi(y)^{n-1}\varphi'(y)=0,$$

a que só podemos satisfazer por qualquer d'estes quatro systemas

$$1.^{\circ}\begin{cases}\varphi(x)=0\\ \varphi(y)=0\end{cases} \qquad 2.^{\circ}\begin{cases}\varphi(x)=0\\ \varphi'(y)=0\end{cases}$$

$$3.^{\circ}\begin{cases}\varphi(y)=0\\ \varphi'(x)=0\end{cases} \qquad 4.^{\circ}\begin{cases}\varphi'(y)=0\\ \varphi'(x)=0\end{cases}.$$

Ora o 1.º não dá solução alguma; o 2.º ou está no mesmo caso ou é absurdo, porque dá $\varphi(x)=0$, $\varphi(y)=$ const., e sendo a fórma das funcções a mesma, logo que uma é nulla, tambem a outra o é; o 3.º está no caso do 2.º; o 4.º, dando-nos $\varphi(x)=a$, $\varphi(y)=b$, indica que não ha funcções, e o problema só póde ser resolvido com os numeros que exprimem as coordenadas da curva

$$a^m+b^n=(a+b)^{m+n} \ \ldots\ldots\ldots \ (2).$$

Logo porém que seja $m=n$, teremos

$$\varphi(x)^m+\varphi(y)^m=\varphi(x+y)^{2m} \ \ldots\ldots\ldots \ (1')$$

e

$$\varphi(x)^{m-1}\varphi'(x) = \varphi(y)^{m-1}\varphi'(y) = c,$$

d'onde

$$\varphi(x)^{m-1} d\varphi(x) = cdx,$$

integrando

$$\varphi(x)^m = m(cx + k),$$

e da mesma sorte

$$\varphi(y)^m = m(cy + k)$$

$$\varphi(x+y)^m = m(cx + cy + k).$$

Em virtude d'estes valores a equação (1′) torna-se em

$$m(cx+k) + m(cy+k) = m^2(cx+cy+k)^2,$$

ou, dividindo por m e desenvolvendo,

$$cx + cy + 2k = mc^2x^2 + mc^2y^2 + 2mc^2xy$$
$$+ 2mckx + 2mcky + mk^2,$$

equação que se tracta de tornar identica. Ora, como a identidade póde ter logar, ou egualando entre si os coefficientes das mesmas potencias das variaveis, ou aniquilando os termos variaveis e egualando as constantes que ficam, teremos pelo primeiro modo

$$mc^2=0, \quad c=2\,ckm, \quad mk^2=2\,k,$$

e pelo segundo

$$mk^2=2k, \quad x=-y,$$

d'onde resultam os systemas

$$1.^{\circ}\begin{cases} c=0 \\ k=\dfrac{2}{m} \end{cases}, \qquad 2.^{\circ}\begin{cases} m=0 \\ k=\infty \\ c= \text{ qualquer quantidade,} \end{cases}$$

$$3.^{\circ}\begin{cases} x=-y \\ k=\ 0 \end{cases} \qquad 4.^{\circ}\begin{cases} x=-y \\ k=\dfrac{2}{m}. \end{cases}$$

O 1.º dá $\varphi(x)^m=\varphi(y)^m=\varphi(x+y)^m=2$, que está no caso dos numeros e satisfaz a (1′) porque é $2+2=2^2$; o 2.º nenhuma solução dá; o 3.º e o 4.º satisfazem a $(1')$, mas não resolvem o problema tal como é proposto, porque fica $\varphi(y)$ uma funcção de x.

8. Occupemo-nos agora de determinar uma especie de funcções taes, que a somma de tres funcções similhantes seja egual ao producto das mesmas funcções, sendo estas sujeitas á condição de que uma d'ellas tomada com signal contrario é egual a uma similhante funcção da somma das variaveis das outras duas. As equações do problema são

$$\varphi(x)+\varphi(y)+\varphi(z)=\varphi(x)\varphi(y)\varphi(z) \ldots\ldots \quad (a)$$

$$-\varphi(z)=\varphi(x+y) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b),$$

que pela eliminação de $\varphi(z)$ dão

$$\varphi(x)+\varphi(y)-\varphi(x+y)=-\varphi(x)\varphi(y)\varphi(x+y) \ldots \quad (1).$$

Derivando esta equação (1) em ordem a x e em ordem a y, temos as duas

$$\varphi'(x) - \varphi'(x+y) = -\varphi'(x)\varphi(y)\varphi(x+y)$$

$$-\varphi(x)\varphi(y)\varphi'(x+y)$$

$$\varphi'(y) - \varphi'(x+y) = -\varphi(x)\varphi'(y)\varphi(x+y)$$

$$-\varphi(x)\varphi(y)\varphi'(x+y),$$

que, subtrahidas uma da outra, dão

$$\varphi'(x) - \varphi'(y) = \varphi(x+y)\{\varphi(x)\varphi'(y) - \varphi(y)\varphi'(x)\} \ldots \quad (2);$$

ora, tirando da equação (1) o valor de $\varphi(x+y)$ para o substituir em (2), obtem-se

$$\varphi'(x) - \varphi'(y) = \frac{\varphi(x) + \varphi(y)}{1 - \varphi(x)\varphi(y)}\{\varphi(x)\varphi'(y) - \varphi(y)\varphi'(x)\},$$

desembaraçando do denominador, reduzindo, e por fim separando as variaveis, virá

$$\frac{\varphi'(x)}{1+\varphi(x)^2} = \frac{\varphi'(y)}{1+\varphi(y)^2}$$

d'onde se conclue

$$\frac{\varphi'(x)}{1+\varphi(x)^2}=c, \qquad \frac{\varphi'(y)}{1+\varphi(y)^2}=c \ldots\ldots. \quad (3)$$

Para integrar estas equações, a primeira por exemplo, faremos $\varphi(x)=t$ e torna-se a equação em

$$\frac{\frac{dt}{dx}}{1+t^2}=c;$$

multiplicando por dx e integrando

$$arc(tg=t)=cx+d.$$

Logo é

$$\varphi(x)=t=tg(cx+d),$$

e tambem

$$\varphi(y)=tg(cy+d).$$

Ora $\varphi(z)$ deve tambem ter a fórma

$$\varphi(z)=tg(cz+d),$$

e, como em virtude de (b) é $\varphi(z) = -\varphi(x+y$, teremos primeiro

$$tg(cz+d) = -tg(cx+cy+d) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4),$$

e depois por causa de (a)

$$tg(cz+d) = -\frac{tg(cx+d)+tg(cy+d)}{1-tg(cx+d)\,tg(cy+d)},$$

isto é

$$tg(cz+d) = -tg(cx+cy+2d) \ldots\ldots\ldots \quad (5);$$

comparando agora as equações (4) e (5), determina-se $d=0$, e por conseguinte as funcções pedidas são

$$\varphi(x) = tg.\,cx, \quad \varphi(y) = tg.\,cy, \quad \varphi(z) = tg.\,cz.$$

9. Supponhamos ainda que temos a seguinte equação de definição para a funcção $\varphi(x)$

$$\varphi(x+y) = \frac{\varphi(x)+\varphi(y)}{1-\varphi(x)\varphi(y)} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1),$$

e procuremos essa funcção.

Derivando (1) em ordem a x e em ordem a y, teremos as duas equações

$$\varphi'(x+y)=\frac{\varphi'(x)\{1-\varphi(x)\varphi(y)\}+\varphi(y)\varphi'(x)\{\varphi(x)+\varphi(y)\}}{\{1-\varphi(x)\varphi(y)\}^2},$$

$$\varphi'(x+y)=\frac{\varphi'(y)\{1-\varphi(x)\varphi(y)\}+\varphi(x)\varphi'(y)\{\varphi(x)+\varphi(y)\}}{\{1-\varphi(x)\varphi(y)\}^2},$$

que nos dão

$$\varphi'(x)+\varphi'(x)\varphi(y)^2=\varphi'(y)+\varphi'(y)\varphi(x)^2,$$

e por tanto

$$\frac{\varphi'(x)}{1+\varphi(x)^2}=\frac{\varphi'(y)}{1+\varphi(y)^2}=c \;\ldots\ldots\; (2).$$

Ora estas equações (2) são as mesmas que as equações (3) do paragrapho antecedente, e dão por conseguinte

$$\varphi(x)=tg\,(cx+d),\quad \varphi(y)=tg\,(cy+d),$$

ou, antes, porque por (1) se determina ainda $d=0$,

$$\varphi(x)=tg\,cx,\quad \varphi(y)=tg\,cy.$$

10. Occupemo-nos tambem com as funcções definidas pela equação

$$\varphi(x+y)+\varphi(x-y)=2\varphi(x)\varphi(y) \ldots\ldots (1).$$

Tomando as derivadas da primeira e da segunda ordem em relação a x sómente, e fazendo o mesmo em relação a y, temos

$$\varphi'(x+y)+\varphi'(x-y)=2\varphi'(x)\varphi(y)$$

$$\varphi''(x+y)+\varphi''(x-y)=2\varphi''(x)\varphi(y)$$

$$\varphi'(x+y)-\varphi'(x-y)=2\varphi(x)\varphi'(y)$$

$$\varphi''(x+y)+\varphi''(x-y)=2\varphi(x)\varphi''(y),$$

e da segunda e quarta d'estas equações se deduz

$$\varphi(y)\varphi''(x)=\varphi(x)\varphi''(y),$$

d'onde

$$\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)}=\frac{\varphi''(y)}{\varphi(y)}=C^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

sendo C^2 uma constante.

Como, fazendo $z=\varphi(x)$, temos $\varphi'(x)=z'=\frac{dz}{dx}$, $\varphi''(x)=z''=\frac{dz'}{dz}\times\frac{dz}{dx}=\frac{z'dz'}{dz}$, tiraremos de (2)

$$\frac{z'dz'}{zdz}=C^2,$$

equação que integrada dá

$$\frac{z'^2}{2}=\frac{C^2z^2}{2}+\frac{D^2}{2} \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; (3),$$

sendo $\frac{D^2}{2}$ a constante arbitraria da integração.

A equação (3) dá-nos

$$z'=\frac{dz}{dx}=\sqrt{C^2z^2+D^2}\,;$$

d'onde, fazendo $\frac{D}{C}=\delta$,

$$dx=\frac{dz}{\sqrt{C^2z^2+D^2}}=\frac{1}{C}\times\frac{dz}{\sqrt{z^2+\delta^2}},$$

que pela integração (Calculo de Francoeur, 2.ª ed. de Coimbra, n.º 164) dá

$$Cx = l.\beta\left(z + \sqrt{z^2 + \delta^2}\right)$$

ou

$$e^{Cx} = \beta\left(z + \sqrt{z^2 + \delta^2}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

Da equação (4) tiramos

$$e^{Cx} - \beta z = \beta\sqrt{z^2 + \delta^2},$$

equação que pela elevação ao quadrado se torna

$$e^{2Cx} - 2\beta z\, e^{Cx} + \beta^2 z^2 = \beta^2 z^2 + \delta^2 \beta,$$

transpondo e reduzindo vem

$$e^{2Cx} - \delta^2 \beta^2 = 2\beta z\, e^{Cx},$$

d'onde

$$z = \frac{e^{2Cx} - \delta^2 \beta^2}{2\beta\, e^{Cx}},$$

e dividindo por e^{Cx}

$$z = \varphi(x) = \frac{e^{Cx} - \delta^2 \beta^2 e^{-Cx}}{2\beta} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

e da mesma sorte será

$$\varphi(y) = \frac{e^{Cy} - \delta^2 \beta^2 e^{-Cy}}{2\beta},$$

$$\varphi(x+y) = \frac{e^{C(x+y)} - \delta^2 \beta^2 e^{C(x+y)}}{2\beta}$$

$$\varphi(x-y) = \frac{e^{C(x-y)} - \delta^2 \beta^2 e^{-C(x-y)}}{2\beta}.$$

Para determinar as constantes introduzidas pelas integrações, substituamos estas expressões na equa-

*

ção (1), e desembaraçando dos denominadores resulta

$$\beta e^{C(x+y)} - \delta^2 \beta^3 e^{-C(x+y)} + \beta e^{C(x-y)} - \delta^2 \beta^3 e^{-C(x-y)} =$$

$$= e^{C(x+y)} - \delta^2 \beta^2 e^{C(x-y)} - \delta^2 \beta^2 e^{-C(x-y)} + \delta^4 \beta^4 e^{-C(x+y)},$$

d'onde tiramos as equações de condição

$$\beta = 1, \quad -\delta^2 \beta^3 = \delta^4 \beta^4, \quad \beta = -\delta^2 \beta^2, \quad \delta^2 \beta^3, = \delta^2 \beta^2,$$

que se reduzem a duas distinctas sómente. Os valores que satisfazem, e que são

$$\beta = 1, \quad \delta^2 = -1,$$

tornam as funcções procuradas nas seguintes

$$\varphi(x) = \frac{e^{Cx} + e^{-Cx}}{2}, \quad \varphi(y) = \frac{e^{Cy} + e^{-Cy}}{2}$$

$$\varphi(x+y) = \frac{e^{C(x+y)} + e^{-C(x+y)}}{2}, \quad \varphi(x-y) = \frac{e^{C(x-y)} + e^{-C(x-y)}}{2},$$

ficando a sua natureza dependente da constante C.

Quando esta constante é uma quantidade imaginaria da fórma $C = \pm m\sqrt{-1}$, então temos sempre, com qualquer dos signaes,

$$\varphi(x) = \frac{e^{mx\sqrt{-1}} + e^{mx\sqrt{-1}}}{2} = \cos mx,$$

e do mesmo modo

$$\varphi(y) = \cos my, \quad \varphi(x+y) = \cos m(x+y), \quad \varphi(x-y)$$
$$= \cos m(x-y),$$

e a equação (1) vem a ser

$$\cos m(x+y) + \cos m(x-y) = 2\cos mx \times \cos my,$$

a qual no caso de $m=1$ se torna na formula conhecida de trigonometria

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos x \cos y.$$

11. Tratemos egualmente das funcções que satisfazem á seguinte condição

$$\varphi(x)^2 - \varphi(y)^2 = \varphi(x+y)\,\varphi(x-y) \ldots\ldots (1).$$

Derivando (1) em ordem a x e em ordem a y, temos as equações

$$2\varphi(x)\varphi'(x)=\varphi'(x+y)\varphi(x-y)+\varphi(x+y)\varphi'(x-y)$$

$$2\varphi(y)\varphi'(y)=-\varphi'(x+y)\varphi(x-y)+\varphi(x+y)\varphi'(x-y,$$

cuja somma e subtracção nos dão

$$\left.\begin{array}{l}\varphi(x)\varphi'(x)+\varphi(y)\varphi'(y)=\varphi(x+y)\varphi'(x-y)\\ \varphi(x)\varphi'(x)-\varphi(y)\varphi'(y)=\varphi'(x+y)\varphi(x-y)\end{array}\right\}\ldots\ldots\ (2);$$

derivando estas equações em ordem a x e sommando os resultados, derivando tambem em ordem a y e subtrahindo, teremos estas

$$2\varphi'(x)^2+2\varphi(x)\varphi''(x)=\varphi''(x+y)\varphi(x-y)$$

$$+2\varphi'(x+y)\varphi'(x-y)+\varphi''(x-y)\varphi(x+y)$$

$$2\varphi'(y)^2+2\varphi(y)\varphi''(y)=-\varphi'(x+y)\varphi(x-y)$$

$$+2\varphi'(x+y)\varphi'(x-y)-\varphi''(x-y)\varphi(x+y),$$

cuja somma nos dá

$$\varphi'(x)^2+\varphi(x)\varphi''(x)+\varphi'(y)^2+\varphi(y)\varphi''(y)$$

$$=2\varphi'(x+y)\varphi'(x-y);$$

e porque do producto das equações (2) tiramos, attendendo a (1),

$$\varphi'(x+y)\,\varphi'(x-y)=\frac{\varphi(x)^2\,\varphi'(x)^2-\varphi(y)^2\,\varphi'(y)^2}{\varphi(x)^2-\varphi(y)^2},$$

será

$$\varphi'(x)^2+\varphi(x)\,\varphi''(x)+\varphi'(y)^2+\varphi(y)\,\varphi''(y)$$

$$=\frac{2\left\{\varphi(x)^2\,\varphi'(x)^2-\varphi(y)^2\varphi'(y)^2\right\}}{\varphi(x)^2-\varphi(y)^2}\;\ldots\ldots\ldots\;(3).$$

De (3) tiramos successivamente

$$\varphi(x)^2\,\varphi'(x)^2+\varphi(x)^2\left\{\varphi(x)\,\varphi''(x)+\varphi(y)\,\varphi''(y)\right\}$$

$$+\varphi(x)^2\,\varphi'(y)^2-\varphi(y)^2\,\varphi'(x)^2-\varphi(y)^2\left\{\varphi(x)\,\varphi''(x)\right.$$

$$\left.+\varphi(y)\,\varphi''(y)\right\}-\varphi(y)^2\,\varphi'(y)^2=2\,\varphi(x)^2\,\varphi'(x)^2$$

$$-2\,\varphi(y)^2\,\varphi'(y)^2,$$

$$\varphi(x)^2\varphi'(x)^2-\varphi(y)^2\varphi'(y)^2=\varphi(x)^2\varphi'(y)^2-\varphi(y)^2\varphi'(x)^2$$

$$+\{\varphi(x)^2-\varphi(y)^2\}\{\varphi(x)\varphi''(x)+\varphi(y)\varphi''(y)\},$$

$$\varphi(x)^2\{\varphi'(x)^2-\varphi'(y)^2\}+\varphi(y)^2\{\varphi'(x)^2-\varphi'(y)^2\}$$

$$=\{\varphi(x)^2-\varphi(y)^2\}\{\varphi(x)\varphi''(x)+\varphi(y)\varphi''(y)\},$$

$$\frac{\varphi(x)^2+\varphi(y)^2}{\varphi(x)\varphi''(x)+\varphi(x)\varphi''(y)}=\frac{\varphi(x)^2-\varphi(y)^2}{\varphi'(x)^2-\varphi'(y)^2},$$

e, applicando uma propriedade conhecida das proporções geometricas,

$$\frac{2\varphi(x)^2}{\varphi'(x)^2-\varphi'(y)^2+\varphi(x)\varphi''(x)+\varphi(y)\varphi''(y)}$$

$$=\frac{2\varphi(y)^2}{\varphi'(y)^2-\varphi'(x)^2+\varphi(x)\varphi''(x)+\varphi(y)\varphi''(y)},$$

ou

$$\frac{\varphi(x)^2}{\varphi'(y)^2-\varphi(y)\varphi''(y)-\varphi'(x)^2-\varphi(x)\varphi''(x)}$$

$$=\frac{\varphi(y)^2}{\varphi'(x)^2-\varphi(x)\varphi''(x)-\varphi'(y)^2-\varphi(y)\varphi''(y)}\ldots \quad (4).$$

Ora teremos necessariamente

$$\frac{\varphi(x)^2}{\varphi'(y)^2-\varphi(y)\varphi''(y)-\varphi'(x)^2-\varphi'(x)\varphi''(x)}=\text{constante},$$

e, para o mostrar, demonstraremos primeiro que é tambem

$$\varphi'(y)^2-\varphi(y)\varphi''(y)=\varphi'(x)^2-\varphi(x)\varphi''(x)=\text{constante}.$$

Para isso, desenvolvendo pela formula de Taylor tanto $\varphi(x+y)$ como $\varphi(x-y)$, e multiplicando estes dois desenvolvimentos, temos

$$\varphi(x+y)\varphi(x-y)=\left\{\varphi(x)+y\varphi'(x)+\frac{y^2}{1.2}\varphi''(x)\right.$$

$$\left.+\frac{y^3}{1.2.3}\varphi'''(x)+\ldots..\right\}\left\{\varphi(x)-y\varphi'(x)+\frac{y^2}{1.2}\varphi''(x)\right.$$

$$\left.-\frac{y^3}{1.2.3}\varphi'''(x)+\ldots..\right\},$$

attendendo á equação (1) e ordenando em relação ás potencias de y

$$\varphi(x)^2 - \varphi(y)^2 = \varphi(x)^2 + \left\{ \varphi(x)\varphi'(x) - \varphi(x)\varphi'(x) \right\} y$$

$$+ \left\{ \frac{\varphi(x)\varphi''(x)}{2} - \varphi'(x)^2 + \frac{\varphi(x)\varphi''(x)}{2} \right\} y^2 + \left\{ \frac{\varphi(x)\varphi'''(x)}{6} \right.$$

$$\left. - \frac{\varphi'(x)\varphi''(x)}{2} + \frac{\varphi'(x)\varphi''(x)}{2} - \frac{\varphi(x)\varphi'''(x)}{6} \right\} y^3 + My^4,$$

ou reduzindo e trocando os signaes

$$\varphi(y)^2 = \left\{ \varphi'(x)^2 - \varphi(x)\varphi''(x) \right\} y^2 + My^4 + Ny^6 + .. \quad (5).$$

Como o primeiro membro d'esta equação é funcção sómente de y, no segundo não deve entrar x senão apparentemente, e por isso os coefficientes das potencias pares de y, unicas que elle contém, devem reduzir-se a constantes: logo será

$$\varphi'(x)^2 - \varphi(x)\varphi''(x) = D^2, \ldots\ldots \quad (6)$$

e do mesmo modo

$$\varphi'(y)^2 - \varphi(y)\varphi''(y) = D^2,$$

pelo que, attendendo á equação (4), se conclue, como enunciamos,

$$\frac{\varphi(x)^2}{D^2 - \varphi'(x)^2 - \varphi(x)\varphi''(x)} = C \ldots\ldots\ (7).$$

Seguindo o espirito do methodo até aqui empregado, teremos de integrar a equação (7) para achar a fórma de $\varphi(x)$; o mesmo se consegue porém integrando a equação (6), e é o que vamos fazer primeiro.

Pondo $z = \varphi(x)$, e por tanto $\varphi'(x) = \frac{dz}{dx} = z', \varphi''(x) = z'' = \frac{dz'}{dz} \times \frac{dz}{dx} = \frac{z'dz'}{dz}$, a equação (6) toma a fórma

$$\frac{z'\,dz'.\,z}{dz} - z'^2 + D^2 = 0 \ldots\ldots\ldots$$

da qual tiramos

$$\frac{dz}{z} = \frac{z'\,dz'}{z'^2 - D^2}$$

e integrando

$$l.\,z = \frac{1}{2}\,l.\,\alpha^2\,(z'^2 - D^2) = l.\,\alpha\sqrt{z'^2 - D^2},$$

ou

$$z^2 = \alpha^2 z'^2 - \alpha^2 D^2,$$

onde, pondo por z'^2 o seu valor $\frac{dz^2}{dx^2}$, e multiplicando por dx^2, obtemos

$$z^2 dx^2 = \alpha^2 dz^2 - \alpha^2 D^2 dx^2,$$

que nos dá

$$dx = \alpha \frac{dz}{\sqrt{z^2 + \alpha^2 D^2}} : \ldots\ldots\ldots$$

Integrando esta equação (Calc. de Franc. l. c), temos

$$\frac{x}{\alpha} = l.\beta\left(z + \sqrt{z^2 + \alpha^2 D^2}\right), \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

e portanto

$$e^{\frac{x}{\alpha}} - \beta z = \beta \sqrt{z^2 + \alpha^2 D^2},$$

elevando ao quadrado e reduzindo

$$e^{\frac{2x}{\alpha}}-2\beta z e^{\frac{x}{\alpha}}=\alpha^2\beta^2D^2,$$

d'onde tiramos, tendo multiplicado por $e^{-\frac{x}{\alpha}}$,

$$z=\varphi(x)=\frac{e^{\frac{x}{\alpha}}-\alpha^2\beta^2D^2e^{-\frac{x}{\alpha}}}{2\beta},$$

sendo por conseguinte

$$\varphi(y)=\frac{e^{\frac{y}{\alpha}}-\alpha^2\beta^2D^2e^{-\frac{y}{\alpha}}}{2\beta}$$

$$\varphi(x+y)=\frac{e^{\frac{x+y}{\alpha}}-\alpha^2\beta^2D^2e^{-\frac{x+y}{\alpha}}}{2\beta}$$

$$\varphi(x-y)=\frac{e^{\frac{x-y}{\alpha}}-\alpha^2\beta^2D^2e^{-\frac{x-y}{\alpha}}}{2\beta}.$$

Para determinar as constantes vamos substituir estas expressões na equação (1), e depois de feita a multiplicação por 4 β^2, e executada a reducção dos termos, fica

$$-e^{-\frac{2y}{\alpha}} - \alpha^4\beta^4 D^4 e^{-\frac{2y}{\alpha}} =$$

$$-\alpha^2\beta^2 D^2 e^{-\frac{2y}{\alpha}} - \alpha^2\beta^2 D^2 e^{\frac{2y}{\alpha}},$$

d'onde se tiram estas duas equações de condição

$$\alpha^2\beta^2 D^2 = 1, \quad \alpha^4\beta^4 D^4 = \alpha^2\beta^2 D^2,$$

das quaes a segunda não é distincta da primeira, e portanto sómente podemos determinar uma das tres constantes α, β, D em funcção das outras duas, que ficam arbitrarias.

Temos pois $\varphi(x)$ com a fórma

$$\varphi(x) = \frac{e^{x \times \frac{1}{\alpha}} - e^{-x \times \frac{1}{\alpha}}}{2\beta}$$

Com os valores particulares das duas arbitrarias $\beta = \pm\sqrt{-1}, \alpha = \mp\frac{1}{m}\sqrt{-1}$, d'onde $\frac{1}{\alpha} = \pm m\sqrt{-1}$, usando de qualquer dos signaes, temos sempre

$$\varphi(x) = \frac{e^{mx\sqrt{-1}} - e^{-mx\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = sen.\, mx,$$

e quando m é a unidade, a equação (1) é a formula conhecida de trigonometria

$$sen^2 x - sen^2 y \quad sen(x+y)\, sen(x-y)$$

Se nos tivessemos servido da equação (7) depois de ter d'ella eliminado $\varphi(x)\, \varphi''(x)$ por meio de (6), achariamos

$$\frac{z^2 - 2CD^2}{-2C} = \left(\frac{dz}{dx}\right)^2,$$

d'onde

$$\frac{dz}{\sqrt{z^2 - 2CD^2}} = \frac{dx}{\sqrt{-2C}},$$

e integrando

$$\frac{x}{\sqrt{-2C}}=l.K(z+\sqrt{z^2-2CD^2}\ ,$$

que é o mesmo que o integral (8), mudando n'elle α em $\sqrt{-2C}$ e β em K. E assim se verifica que qualquer das equações (6) e (7) conduz á mesma funcção $\varphi\,(x)$, como necessariamente devia acontecer.

12. Nos problemas que até aqui temos tractado a condição que servia para determinar uma funcção era expressa por meio de funcções, cada uma de sua variavel, mas todas similhantes; ora, quando houver equações entre funcções de differente natureza, caracterisando essas funcções, o methodo é ainda applicavel e determina umas e outras.

Para exemplo d'este caso sejam duas funcções $\psi\,(x)$ e $\varphi\,(x)$ ligadas entre si pela equação

$$\psi\,(x)^2=1\mp\varphi\,(x)^2\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (1')$$

e satisfazendo á condição expressa por

$$\psi\,(x-y)-\psi\,(x+y)=\pm\,2\,\varphi\,(x)\,\varphi\,(y)\ldots\ (1);$$

tractemos de determinar as funcções que tal condição e relação caracterisam.

Derivando (1) duas vezes em ordem a x, e da mesma sorte em ordem a y, temos

$$\psi'(x-y)-\psi'(x+y)=\pm 2\,\varphi(y)\,\varphi'(x)$$

$$\psi''(x-y)-\psi''(x+y)=\pm 2\,\varphi(y)\,\varphi''(x)$$

$$-\psi'(x-y)-\psi'(x+y)=\pm 2\,\varphi(x)\,\varphi'(y)$$

$$\psi''(x-y)-\psi''(x+y)=\pm 2\,\varphi(x)\,\varphi''(y),$$

d'onde se conclue

$$\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)}=\frac{\varphi''(y)}{\varphi(y)}=\text{constante} \;\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2),$$

equação que temos integrado (n.º 10) e nos dá

$$\varphi(x)=\frac{e^{ax}-\alpha^2\beta^2 e^{-ax}}{2\beta};$$

mas fazendo $\frac{1}{2\beta}=A$, $-\frac{\alpha^2\beta^2}{2\beta}=B$, daremos a $\varphi(x)$ a fórma

$$\varphi(x)=Ae^{ax}+Be^{-ax} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3),$$

que se presta aqui melhor á determinação das constantes.

Mudando x em $x-y$, a equação (1') nos dá

$$\psi(x-y)=\sqrt{1\mp\varphi(x-y)^2},$$

ou attendendo a (3)

$$\psi(x-y)=\sqrt{1\mp 2AB\mp A^2e^{2a(x-y)}\mp B^2e^{-2a(x-y)}},$$

e dando á equação (1) a fórma

$$\psi(x-y)=\psi(x+y)\pm 2\varphi(x)\varphi(y)$$

temos ainda, em virtude de (1′) e de (3),

$$\psi(x-y)=\sqrt{1\mp 2AB\mp A^2 e^{2a(x+y)}\mp B^2 e^{-2a(x+y)}\pm \atop \pm 2(Ae^{ax}+Be^{-ax})(Ae^{ay}+Be^{-ay})};$$

será por tanto

$$\sqrt{1\mp 2AB\mp A^2 e^{2a(x-y)}\mp B^2 e^{-2a(x-y)}}=$$

$$=\sqrt{1\mp 2AB\mp A^2 e^{2a(x+y)}\mp B^2 e^{-2a(x+y)} \atop \pm 2(Ae^{ax}+Be^{-ax})(Ae^{ay}+Be^{-ay})} \ldots\ldots\ldots \quad (4).$$

Elevando ao quadrado teremos

$$1\mp 2AB\mp A^2 e^{2a(x-y)}\mp B^2 e^{-2a(x-y)}=1\mp 2AB\mp A^2 e^{2a(x+y)}$$

$$\mp B^2 e^{-2a(x+y)}+4[A^2 e^{a(x+y)}+AB\,e^{a(x-y)}+ABe^{-a(x-y)}$$

$$+B^2 e^{-a(x+y)}]^2\pm 4[A^2 e^{a(x+y)}+ABe^{a(x-y)}+AB\,e^{-a(x-y)}$$

$$+B^2 e^{-a(x+y)}]\times\sqrt{1\mp 2AB\mp A^2 e^{2a(x+y)}\mp B^2 e^{-2a(x+y)}},$$

transpondo os termos racionaes, desenvolvendo o quadrado do parenthesis e reduzindo, vem

$$\mp A^2\, e^{2a(x-y)} \mp B^2\, e^{-2a(x-y)} \pm A^2\, e^{2a(x+y)} \pm B^2\, e^{-2a(x+y)}$$

$$-4A^4\, e^{2a(x+y)} - 4A^2 B^2\, e^{2a(x-y)} - 4A^2 B^2\, e^{-2a(x-y)}$$

$$-4B^4\, e^{-2a(x+y)} - 8A^3 B e^{2ax} - 8A^3 B e^{2ay} -$$

$$-16A^2 B^2 - 8AB^3\, e^{-2ay}$$

$$-8AB^3 e^{-2ax} = \pm 4[A^2 e^{a(x+y)} + AB e^{a(x-y)} + AB e^{-a(x-y)}$$

$$+B^2 e^{-a(x+y)}] \times \sqrt{1 \mp 2AB \mp A^2 e^{2a(x+y)} \mp B^2 e^{-2a(x+y)}},$$

e por fim, elevando ao quadrado e ordenando os termos, obtem-se a seguinte equação

$$\left.\begin{array}{r} + \quad A^4 \\ +16A^8 \\ \mp\ 8A^6 \end{array}\right| e^{4a(x+y)} + \left.\begin{array}{r} B^4 \\ +16B^8 \\ \mp\ 8B^6 \end{array}\right| e^{-4a(x+y)} + \left.\begin{array}{r} A^4 \\ \pm\ 8A^4 B^2 \\ +16A^4 B^4 \end{array}\right| e^{4a(x-y)}$$

$$
\begin{array}{r|r|r|l}
+ B^4 & e^{-4a(x-y)} + 64A^6B^2 & e^{4ax} + 64A^2B^6 & e^{-4ax} \\
\pm 8A^2B^4 & \pm 8A^6 & \pm 8B^6 & \\
+16A^4B^4 & +32A^6B^2 & +32A^2B^6 & \\
 & -2A^4 & -2B^4 & \\
 & \mp 8A^4B^2 & \mp 8A^2B^4 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|r|r|l}
+64A^6B^2 & e^{4ay} + 64A^2B^6 & e^{-4ay} + 64A^7B & e^{4ax+2ay} \\
\pm 8A^4B^2 & \pm 8A^2B^4 & \mp 16A^5B & \\
\mp 8A^4B^2 & +32A^2B^6 & & \\
+32A^6B^2 & -2A^2B^2 & & \\
-2A^2B^2 & \mp 8A^2B^4 & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|r|l}
+64A^7B & e^{2ax+4ay} \pm 16A^5B & e^{4ax-2ay} \\
\mp 16A^6B & +64A^5B^3 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|r|l}
\pm 16AB^5 & e^{-4ax+2ay} \pm 16A^3B^3 & e^{-2ax+4ay} \\
+64A^3B^5 & +64A^5B^3 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|r|l}
\pm 16A^3B^3 & e^{2ax-4ay} \pm 16AB^5 & e^{-4ax-2ay} \\
+64A^3B^5 & +64AB^7 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|r|l}
\mp 16AB^5 & e^{-2ax-4ay} + 256A^6B^2 & e^{2a(x+y)} \\
+64AB^7 & \mp 32A^4B^2 &
\end{array}
$$

$$\left.\begin{array}{l} +256\,A^2B^6 \\ \mp\ 32\,A^2B^4 \end{array}\right| e^{-2a(x+y)} + \left.\begin{array}{l} 256\,A^4B^4 \\ \pm\ 32\,A^4B^2 \end{array}\right| e^{2a(x-y)}$$

$$\left.\begin{array}{l} +256\,A^4B^4 \\ \pm\ 32\,A^2B^4 \end{array}\right| e^{-2a(x-y)} + \left.\begin{array}{l} 384\,A^6B^3 \\ \mp\ 16\,A^3B^3 \\ \pm\ 16\,A^6B \end{array}\right| e^{2ax}$$

$$\left.\begin{array}{l} +384\,A^3B^5 \\ \mp\ 16\,A^3B^3 \\ \pm\ 16\,AB^6 \end{array}\right| e^{-2ax} \quad \left.\begin{array}{l} +384\,A^5B^3 \\ \mp\ 16\,A^3B^3 \\ \pm\ 16\,A^3B^3 \end{array}\right| e^{2ay}$$

$$\left.\left.\begin{array}{l} +384\,A^3B^5 \\ \pm\ 16\,A^3B^3 \\ \mp\ 16\,A^3B^3 \end{array}\right| e^{-2ay} \begin{array}{l} +576\,A^4B^4 \\ +\ \ 4\,A^2B^2 \end{array}\right\} =$$

$$= \mp 16\,A^6\,e^{4a(x+y)} \mp 16\,B^6\,e^{-4a(x+y)} \mp 32\,A^5\,B\,e^{4ax+2ay}$$

$$\mp 32\,AB^5\,e^{-2ax-4ay} \mp 32\,AB^5\,e^{-4ax-2ay} \mp 32\,A^5\,B\,e^{2ax+4ay}$$

$$\mp 16\,A^4B^2\,e^{4ax} \mp 16\,A^2B^4\,e^{-4ax} \mp 16\,A^4B^2\,e^{4ay} \mp 16\,A^2B^4\,e^{-4ay}$$

$$\left.\begin{array}{l} +16\,A^4 \\ \mp 32\,A^5B \\ \mp 64\,A^4B^2 \end{array}\right| e^{2a(x+y)} + \left.\begin{array}{l} 16\,B^4 \\ \mp 32\,AB^5 \\ \mp 64\,A^2B^4 \end{array}\right| e^{-2a(x+y)}$$

$+16A^2B^2$	$e^{2a(x-y)}+16A^2B^2$	$e^{-2a(x-y)}$
$\mp 32A^3B^3$	$\mp 32A^3B^3$	
$+32A^3B$	$e^{2ax}+32AB^3$	e^{-2ax}
$\mp 64A^4B^2$	$\mp 64A^2B^4$	
$\mp 32A^3B^3$	$\mp 32A^3B^3$	
$+32A^3B$	$e^{2ay}+32AB^3$	e^{-2ay}
$\mp 64A^4B^2$	$\mp 64A^2B^4$	
$\mp 32A^3B^3$	$\mp 32A^3B^3$	

$$+64A^2B^2 \mp 128A^3B^3 \mp 64A^2B^4 \mp 16A^4B^2.$$

Comparando os coefficientes das mesmas exponenciaes, obtemos as equações de condição a que as constantes A e B devem satisfazer:

$$\mp 16A^6 = A^4 + 16A^8 \mp 8A^6$$

$$\mp 16B^6 = B^4 + 16B^8 \mp 8B^6$$

$$\mp 32A^5B = 64A^7B \mp 16A^5B$$

$$\mp 32AB^5 = 64AB^7 \mp 16AB^5$$

$$\mp 16\,A^4\,B^2 = 96\,A^6\,B^2 \pm 8\,A^6 - 2\,A^4 \mp 8\,A^4\,B^2$$

$$\mp 16\,A^2\,B^4 = 96\,A^2\,B^6 \pm 8\,B^6 - 2\,B^4 \mp 8\,A^2\,B^4$$

$$\mp 16\,A^4\,B^2 = 96\,A^6\,B^2 - 2\,A^2\,B^2$$

$$\mp 16\,A^2\,B^4 = 96\,A^2\,B^6 - 2\,A^2\,B^2$$

$$16\,A^4 \mp 32\,A^5\,B \mp 64\,A^4\,B^2 = 256\,A^6\,B^2 \mp 32\,A^4\,B^2$$

$$16\,B^4 \mp 32\,AB^5 \mp 64\,A^2\,B^4 = 256\,A^2\,B^6 \mp 32\,A^2\,B^4$$

$$16\,A^2\,B^2 \mp 32\,A^3\,B^3 = 256\,A^4\,B^4 \pm 32\,A^4\,B^2$$

$$16\,A^2\,B^2 \mp 32\,A^3\,B^3 = 256\,A^4\,B^4 \pm 32\,A^2\,B^4$$

$$32A^3B \mp 64A^4B^2 \mp 32A^3B^3 = 384A^5B^3 \mp 16A^3B^3 \pm 16A^5B$$

$$32AB^3 \mp 64A^2B^4 \mp 32A^3B^3 = 384A^3B^5 \mp 16A^3B^3 \pm 16AB^5$$

$$32A^3B \mp 64A^4B^2 \mp 32A^3B^3 = 384A^5B^3$$

$$32AB^3 \mp 64A^2B^4 \mp 32A^3B^3 = 384A^3B^5$$

$$A^4 \pm 8\,A^4\,B^2 + 16\,A^4\,B^4 = 0$$

$$B^4 \pm 8\,A^2\,B^4 + 16\,A^4\,B^4 = 0$$

$$\pm 16\,A^5\,B + 64\,A^6\,B^3 = 0$$

$$\pm 16\,A\,B^5 + 64\,A^3\,B^5 = 0$$

$$\pm 16 A^3 B^3 + 64 A^3 B^5 = 0$$

$$\pm 16 A^3 B^3 + 64 A^5 B^3 = 0$$

$$64A^2B^2 \mp 128A^3B^3 \mp 16A^2B^4 \mp 16A^4B^2 = 576A^4B^4 + 4A^2B^2.$$

Como não póde servir $A=0$, $B=0$, tiramos das duas primeiras equações

$$A^2 = B^2 = \mp \frac{1}{4},$$

valores que satisfazem a todas as outras, sendo $AB = \pm \frac{1}{4}$. Separando os dois casos do signal duplo, temos no primeiro estes dois systemas de valores para A e B

$$1.^\circ \begin{cases} A = \frac{1}{2}\sqrt{-1} \\ B = -\frac{1}{2}\sqrt{-1}, \end{cases} \qquad 2.^\circ \begin{cases} A = -\frac{1}{2}\sqrt{-1} \\ B = \frac{1}{2}\sqrt{-1}, \end{cases}$$

e no segundo tambem estes dois systemas

$$1.^\circ \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = -\frac{1}{2} \end{cases} \qquad 2.^\circ \begin{cases} A = -\frac{1}{2} \\ B = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Pondo por tanto estes valores em $\varphi(x) = Ae^{ax} + Be^{-ax}$, acham-se respectivamente

$$\varphi(x) = \frac{\sqrt{-1}\, e^{ax} - \sqrt{-1}\, e^{-ax}}{2} = \frac{-e^{ax} + e^{-ax}}{2\sqrt{-1}} \,.. \quad (5),$$

$$\varphi(x) = \frac{-\sqrt{-1}\, e^{ax} + \sqrt{-1}\, e^{-ax}}{2} = \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2\sqrt{-1}} \,.. \quad (5'),$$

$$\varphi(x) = \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5''),$$

$$\varphi(x) = \frac{-e^{ax} + e^{-ax}}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5''').$$

Resta determinar $\psi(x)$, o que é facil com os valores achados $A^2 = B^2 = \mp \frac{1}{4}$, $AB = \pm \frac{1}{4}$.

Com effeito, por ser

$$\sqrt{1 \mp \varphi(x)^2} = \sqrt{1 \mp 2AB \mp A^2 e^{2ax} \mp B^2 e^{-2ax}},$$

é

$$\psi(x) = \sqrt{1 \mp \varphi(x)^2} = \sqrt{1 - \frac{2}{4} + \frac{e^{2ax}}{4} + \frac{e^{-2ax}}{4}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2 + e^{2ax} + e^{-2ax}}{4}},$$

ou finalmente

$$\psi(x) = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6).$$

Quando a constante a for uma quantidade imaginaria $a = \pm q\sqrt{-1}$, as funcções tornam-se

$$\begin{cases} \varphi(x) = \pm \operatorname{sen} q\,x \\ \psi(x) = \cos q\,x \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} \varphi(x) = \pm \sqrt{-1} \operatorname{sen} q\,x \\ \psi(x = \cos q\,x \end{cases}$$

13. Seja pedido ultimamente achar as funcções F, definidas pela equação

$$F(x+y,x+y)+F(x-y,x-y)=2\,F(x,y)\,F(y,x) \ldots \quad (a),$$

sendo

$$\left.\begin{array}{l} F(x+y,x+y)=\psi(x+y)\,\varphi(x+y) \\ F(x-y,x-y)=\psi(x-y)\,\varphi(x-y) \\ F(x,y)=\psi(x)\,\varphi(y) \\ F(y,x)=\psi(y)\,\varphi(x) \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

e dando-se a relação

$$\varphi(x)=\frac{1+\psi(x)^2}{2\psi(x)^2} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (c).$$

Da equação (a) e das equações (b) de definição tiramos

$$\psi(x+y)\varphi(x+y)+\psi(x-y)\varphi(x-y)=2\psi(x)\varphi(y)\psi(y)\varphi(x) \,. \quad (1),$$

e derivando duas vezes em ordem a x e em ordem a y

$$\psi'(x+y)\varphi(x+y) + \psi(x+y)\varphi'(x+y) + \psi'(x-y)\varphi(x-y)$$

$$+\psi(x-y)\varphi'(x-y) = 2\psi'(x)\varphi(y)\psi(y)\varphi(x) +$$

$$+2\psi(x)\varphi(y)\psi(y)\varphi'(x),$$

$$\left.\begin{array}{r}\psi''(x+y)\varphi(x+y)+2\psi'(x+y)\varphi'(x+y)+\psi(x+y)\varphi''(x+y)\\ +\varphi''(x-y)\varphi(x-y)+2\psi'(x-y)\varphi'(x-y)+\psi(x-y)\varphi''(x-y)\end{array}\right\}=$$

$$=2\psi''(x)\varphi(y)\psi(y)\varphi(x)+4\psi' x\varphi(y)\psi(y)\varphi'(x)+$$

$$+2\psi(x)\varphi(y)\psi(y)\varphi''(x),$$

$$\psi'(x+y)\varphi(x+y)+\psi(x+y)\varphi'(x+y)-\psi'(x-y)\varphi(x-y)-$$

$$-\psi(x-y)\varphi'(x-y)=2\psi(x)\varphi'(y)\psi(y)\varphi(x)+2\psi(x)\varphi(y)\psi'(y)\varphi(x),$$

$$\left.\begin{array}{r}\psi''(x+y)\varphi(x+y)+2\psi'(x+y)\varphi'(x+y)+\psi(x+y)\varphi''(x+y)\\ +\psi''(x-y)\varphi(x-y)+2\psi'(x-y)\varphi'(x-y)+\psi(x-y)\varphi''(x-y)\end{array}\right\}=$$

$$=2\psi(x)\varphi''(y)\psi(y)\varphi(x)+4\psi(x)\varphi'(y)\psi'(y)\varphi(x)+$$

$$+2\psi(x)\varphi(y)\psi''(y)\varphi(x);$$

egualando os segundos membros da segunda e quarta d'estas equações, e dividindo por $2\,\varphi(x)\,\psi(x)\,\varphi(y)\,\psi(y)$, temos

$$\frac{\psi''(x)\,\varphi(x)+2\,\psi'(x)\,\varphi'(x)+\psi(x)\,\varphi''(x)}{\psi(x)\,\varphi(x)}=$$

$$=\frac{\psi''(y)\,\varphi(y)+2\,\psi'(y)\,\varphi'(y)+\psi(y)\,\varphi''(y)}{\psi(y)\,\varphi(y)},$$

e por conseguinte

$$\frac{\psi''(x)\,\varphi(x)+2\,\psi'(x)\,\varphi'(x)+\psi(x)\,\varphi''(x)}{\psi(x)\,\varphi(x)}=c. \quad (2)$$

Derivando tambem duas vezes a equação (c) teremos

$$\varphi'(x)=\frac{2\,\psi(x)\,\psi'(x)\times 2\,\psi(x)^2-4\,\psi(x)\,\psi'(x)\{1+\psi(x)^2\}}{4\,\psi(x)^4}=$$

$$=\frac{4\,\psi(x)^3\psi'(x)-4\,\psi(x)\,\psi'(x)-4\,\psi(x)^3\,\psi'(x)}{4\,\psi(x)^4}=-\frac{\psi'(x)}{\psi(x)^3},$$

$$\varphi''(x)=-\frac{\psi''(x)\,\psi(x)^3-3\,\psi'(x)^2\,\psi(x)^2}{\psi(x)^6}=$$

$$=\frac{-\psi(x)\,\psi''(x)+3\,\psi'(x)^2}{\psi(x)^4},$$

e estes valores de $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$ com o de $\varphi(x)$ tornam a equação (2) desembaraçada dos denominadores na seguinte

$$\psi''(x)\times\frac{1+\psi(x)^2}{2\psi(x)^2}+2\psi'(x)\times-\frac{\psi'(x)}{\psi(x)^3}+\psi(x)\times$$

$$\times\frac{3\psi'(x)^2-\psi(x)\psi''(x)}{\psi(x)^4}=c\psi(x)\times\frac{1+\psi(x)^2}{2\psi(x)^2},$$

onde, multiplicando por $2\,\psi(x)^3$, temos

$$\psi(x)\psi''(x)+\psi(x)^3\psi''(x)-4\psi'(x)^2+6\psi'(x)^2-$$

$$-2\psi(x)\psi''(x)=c\psi(x)^2+c\psi(x)^4,$$

ou reduzindo e fazendo $\psi(x)=z$

$$z^3z''+2z'^2-zz''=cz^2+cz^4\ldots\ldots\quad(3).$$

Esta equação differencial da segunda ordem e do segundo grau em z' deve, integrada, dar a funcção $\psi(x)$ que se procura: occupemo-nos por tanto da sua integração.

Fazendo

$$z' = \frac{dz}{dx} = p \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

e por conseguinte $z'' = p\frac{dp}{dz}$, a equação (3) torna-se nesta

$$c(z^4 + z^2) = (z^3 - z)p\frac{dp}{dz} + 2p^2,$$

ou multiplicando por dz e transpondo o termo em p^2,

$$[c(z^4 + z^2) - 2p^2]\,dz = (z^3 - z)\,pdp,$$

onde, fazendo

$$p = zy \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

e por tanto $dp = zdy + ydz$, nos vem

$$[c(z^4 + z^2) - 2z^2y^2]\,dz = yz(z^3 - z)(zdy + ydz),$$

e pondo em um membro os termos em dz e em outro os termos em dy,

$$[c(z^4 + z^2) - 2z^2y^2 - z(z^3 - z)y^2]\,dz = (z^3 - z)z^2ydy,$$

reduzindo e supprimindo o factor commum z^2,

$$[c(z^2+1)-(z^2+1)y^2]dz=(z^3-z)y\,dy,$$

ou

$$(c-y^2)(z^2+1)dz=(z^3-z)y\,dy$$

e finalmente, dividindo por $(c-y^2(z^3-z)$, teremos a equação

$$\frac{z^2+1}{z^3-z}dz=\frac{y}{c-y^2}dy\ldots\ldots\ldots \quad (6),$$

na qual as variaveis se acham separadas e que integrada dá

$$-\frac{1}{2}l(c-y^2)=-lz+l(z+1)+l(z-1)+lH,$$

ou passando para os numeros

$$\frac{1}{(c-y^2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{(z^2-1)H}{z}.$$

Elevando ao quadrado ambos os membros d'esta equação, e tirando o valor de y^2, temos

$$y^2 = c - \frac{z^2}{(z^2-1)^2 H^2},$$

e como pela equação (5) é $y^2 = \frac{p^2}{z^2}$, teremos

$$p^2 = cz^2 - \frac{z^4}{(z^2-1)^2 H^2} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (7).$$

Em virtude de (7) e de (4) será pois

$$\frac{dz}{dx} = \pm\sqrt{\frac{cH^2(z^2-1)^2 z^2 - z^4}{(z^2-1)^2 H^2}} =$$

$$= \pm\frac{z}{(z^2-1)H}\sqrt{cH^2(z^2-1)^2 - z^2},$$

$$dx = \frac{H(z^2-1)dz}{\pm z\sqrt{cH^2(z^2-1)^2 - z^2}},$$

e fazendo

$$z^2 = t \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (8)$$

e por tanto $2z\,dz = dt$, vem

$$dx \frac{H(t-1)\,dt}{\mp 2t\sqrt{cH^2(t-1)^2 - t}},$$

onde, dividindo por H ambos os termos da fracção que constitue o segundo membro, e pondo $\pm\sqrt{c}$ por factor do radical, ficará

$$dx = \frac{(t-1)\,dt}{\pm 2t\sqrt{c}\sqrt{(t-1)^2 - \frac{t}{cH^2}}} \dots\dots \quad (9)$$

Façamos ainda

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{(t-1)^2 - \frac{t}{cH^2}} &= t - u \\ c &= a^2 \\ \alpha &= 2 + \frac{1}{a^2H^2} \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots \quad (10);$$

quadrando a primeira d'estas equações, reduzindo e tirando o valor de t, vem, usando das novas constantes,

$$t=\frac{u^2-1}{2u-\alpha}\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (11)$$

sendo por tanto

$$t-1=\frac{u^2-1-2u+\alpha}{2u-\alpha}$$

$$t-u=\frac{-u^2-1+u\alpha}{2u-\alpha}$$

$$dt=\frac{2(u^2-u\alpha+1)\,du}{(2u-\alpha)^2}.$$

Por meio d'estes valores a equação (9) torna-se

$$dx=\frac{2(u^2-1-2u+\alpha)(u^2-u\alpha+1)(2u-\alpha)^2\,du}{\pm 2a(2u-\alpha)^3(u^2-1)(-u^2+u\alpha-1)},$$

ou

$$dx=\frac{(u^2-1-2u+\alpha)\,du}{\pm a(\alpha-2u)(u^2-1)}\dots\dots\dots \quad (12),$$

e por conseguinte

$$a\,dx = \frac{(u^2-1)\,du + (\alpha - 2u)\,du}{\pm(\alpha - 2u)(u^2-1)} = \pm\left\{\frac{du}{\alpha - 2u} + \frac{du}{u^2-1}\right\},$$

e por tanto, integrando e pondo no primeiro membro a constante arbitraria,

$$ax + L = \pm\left\{-\frac{1}{2}\,l.\,(\alpha - 2u) - \frac{1}{2}\,l\,(u+1)\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\,l\,(u-1)\right\}.$$

Temos pois os dois integraes

$$ax + L = l.\,\frac{(u-1)^{\frac{1}{2}}}{(\alpha - 2u)^{\frac{1}{2}}\,(u+1)^{\frac{1}{2}}},$$

$$ax + L' = l.\,\frac{(\alpha - 2u)^{\frac{1}{2}}\,(u+1)^{\frac{1}{2}}}{(u-1)^{\frac{1}{2}}},$$

ou, passando para os numeros

$$e^{ax+L}=\frac{\sqrt{u-1}}{\sqrt{(\alpha-2u)(u+1)}}, \dots\dots\dots (13)$$

$$e^{ax+L'}=\frac{\sqrt{(\alpha-2u)(u+1)}}{\sqrt{u-1}}, \dots\dots\dots (14)$$

e o producto que os representa a ambos

$$\left[e^{ax+L}-\frac{\sqrt{u-1}}{\sqrt{(\alpha-2u)(u+1)}}\right]\left[e^{ax+L'}-\right.$$

$$\left.-\frac{\sqrt{(\alpha-2u)(u+1)}}{\sqrt{u-1}}\right]=0$$

tambem é integral da proposta. Neste integral vem x em funcção de u; mas como das equações (8) e (11) resulta

$$z^2=\frac{u^2-1}{2u-\alpha},$$

eliminando u entre esta equação e (13) ou (14) teremos uma equação entre x e z, que resolvida em ordem a z dará a funcção $\varphi(x)$ pedida. Por exemplo quando for $\alpha=2$, o que tem logar fazendo $H=\infty$ na 3.ª das equações (10), será

$$z^2=\frac{u^2-1}{2(u-1)}=\frac{u+1}{2},$$

e como, quadrando a equação (14), vem

$$e^{2\alpha x+2L'}=\frac{(\alpha-2u)(u+1)}{u-1}=\frac{-2(u-1)(u+1)}{u-1}=$$

$$=-2(u+1)=-4z^2,$$

ficando por isso

$$e^{\alpha x+L'}=2z\sqrt{-1},$$

fazendo $\frac{e^{L'}}{2\sqrt{-1}}=A$, teremos finalmente

$$z=\psi(x)=A\,e^{\alpha x}\ldots\ldots\ldots\ldots\ (15).$$

Temos pois o integral particular $\psi(x) = Ae^{ax}$, que satisfaz a (3), correspondendo á hypothese de $H = \infty$ ou $\alpha = 2$; substituindo-o em (c) resulta

$$\varphi(x) = \frac{1 + A^2 e^{2ax}}{2A^2 e^{2ax}} = \frac{A^{-2} e^{-2ax} + 1}{2}.$$

Pondo, para determinar A, estas expressões de $\varphi(x)$ e de $\psi(x)$ na equação (1), teremos

$$A e^{a(x+y)} \times \frac{A^{-2} e^{-2a(x+y)} + 1}{2} + A e^{a(x-y)} \times$$

$$\times \frac{A^{-2} e^{-2a(x-y)} + 1}{2} = 2 A^2 e^{a(x+y)} \times \frac{A^{-2} e^{-2ax} + 1}{2} \times$$

$$\times \frac{A^{-2} e^{-2ay} + 1}{2},$$

ou

$$A^{-1} e^{-a(x+y)} + A e^{a(x+y)} + A^{-1} e^{-a(x-y)} + A e^{a(x-y)} =$$

$$= (e^{ay-ax} + A^2 e^{a(x+y)}) (A^{-2} e^{-2ay} + 1) =$$

$$A^{-2} e^{-a(x+y)} + e^{-a(x-y)} + e^{a(x-y)} + A^2 e^{a(x+y)}.$$

Egualando os coefficientes das mesmas exponenciaes, será

$$A^{-1}=A^{-2}, A=A^2, A^{-1}=1, A=1,$$

logo é $A=1$ e

$$\psi(x)=e^{ax} \qquad \varphi(x)=\frac{e^{-2ax}+1}{2}$$

$$\psi(y)=e^{ay} \qquad \varphi(y)=\frac{e^{-2ay}+1}{2}$$

$$\psi(x+y)=e^{a(x+y)} \qquad \varphi(x+y)=\frac{e^{-2a(x+y)}+1}{2}$$

$$\psi(x-y)=e^{a(x-y)} \qquad \varphi(x-y)=\frac{e^{-2a(x-y)}+1}{2}$$

sendo por tanto as funcções F

$$F(x,y)=e^{ax}\times\frac{e^{-2ay}+1}{2}$$

$$F(y,x) = e^{ay} \times \frac{e^{-2ax}+1}{2}$$

$$F(x+y,x+y) = e^{a(x+y)} \times \frac{e^{-2a(x+y)}+1}{2}$$

$$F(x-y,x-y) = e^{a(x-y)} \times \frac{e^{-2a(x-y)}+1}{2}$$

FIM.

1873

P. DA COSTA - DISSERTAÇÃO DE CONCURSO

MATHEMATICA