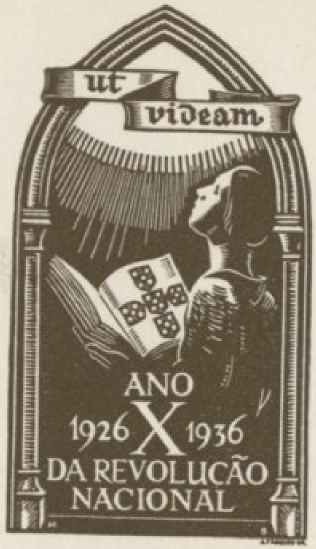
ut videam
ANO
1926 X 1936
DA REVOLUÇÃO
NACIONAL

ESTABILIDADE

DO

NOSSO SYSTEMA SOLAR

CONSIDERAÇÕES

SOBRE OS THEOREMAS DE LAPLACE

RELATIVOS

Á

ESTABILIDADE DO NOSSO SYSTEMA SOLAR

POR

Francisco Adolpho Manso-Preto

COIMBRA
IMPRENSA DA UNIVERSIDADE
1880

«La solution rigoreuse de ce problème,
«surpasse les moyens actuels de l'analyse,
«et nous sommes forcés de recourir aux
«approximations. Il est très compliqué, et
«l'analyse la plus délicate et la plus épi-
«neuse est indispensable, pour démêler dans
«le nombre infini des inégalités auxquelles
«les planètes sont assujetties, celles qui sont
«sensibles, et pour assigner leurs valeurs.»

LAPLACE — *Exp. do Syst. du monde.*

DISSERTAÇÃO DE CONCURSO

APRESENTADA

Á

FACULDADE DE MATHEMATICA

DA

UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Á

MEMORIA

DE SEUS MESTRES

OS

ILLUSTRISSIMOS E EXCELLENTISSIMOS SENHORES DOUTORES

RUFINO GUERRA OSORIO
JACOME LUIZ SARMENTO
JOSÉ TEIXEIRA DE QUEIROZ
RAYMUNDO VENANCIO RODRIGUES

DEDICA

Parva petunt manes.
OVID.

FRANCISCO ADOLPHO MANSO-PRETO

INTRODUCÇÃO

INTRODUCÇÃO

«L'histoire est le fond de toute
«science humaine.»

PONCELET.

Uma das paginas mais brilhantes da historia é, sem duvida, a que nos indica qual o caminho seguido através os tempos pelo espirito humano em procura das verdades de ordem physica.

A leitura d'esta pagina, sempre interessante, torna-se sobretudo proveitosa, quando faz a comparação dos diversos trabalhos effectuados, das diversas ideias emittidas sobre qualquer ponto de sciencia, quando exprime a sua successão, pondo de lado todas as minuciosidades, quando enumera os progressos realisados n'esta via, e quando fixa, por assim dizer, o andamento do movimento civilisador sobre o caminho seguido pelo genio do homem através os seculos.

Diz-nos então quaes foram os primeiros ensaios da sciencia, os seus desvarios, as suas decepções, as suas crenças e a sua infancia; ensina-nos como ella se fortificou, cresceu e luctou contra adversarios quasi sempre implacaveis: apresenta-nos as grandes figuras dos homens que lançaram os alicerces do edificio scientifico: aponta-nos as difficuldades que estes homens de genio experimentaram para fazer prevalecer as suas ideias — difficuldades tanto mais insuperaveis, quanto as novas ideias trazidas a lume eram mais radicaes, contrariavam mais prejuizos, offendiam mais interesses ou amores proprios: mostra-nos, finalmente, que o tempo faz pouco e pouco (verdade seja que muito lentamente) justiça a todos os obstaculos, a todas as accusações da rotina e a todas as objecções mais ou menos fundadas, mais ou menos malevolas, e que a verdade mais cedo ou mais tarde acaba por brilhar com uma viva luz.

Se ha sciencia cuja historia nos apresente exemplos frisantes do que deixamos dicto, é com certeza a *Mechanica Celeste*, principalmente quando nos conta as vicissitudes por que passou o importante problema do movimento da terra. Conhecido, ou antes quasi que adivinhado, por alguns espiritos predestinados desde a mais alta antiguidade, teve o movimento da terra constantemente contradictores acerrimos e os apostolos d'esta fecunda ideia viram-se por vezes expostos a perseguições dirigidas por aquelles cujos espiritos rachiticos não comprehendiam o seu grande alcance, e ainda mais pelos que ella lesava nos seus interesses e nas suas superstições.

Diz *Bertrand* que, tres seculos antes da nossa era, um philosopho, chamado *Cleantho*, pedia que se citasse *Aristarco* perante a justiça como blasphemador, por ter julgado a terra em movimento e ousado fazer do sol o centro immutavel do universo. Dois mil annos mais tarde, a razão humana não vai mais longe, realisa-se o voto de Cleantho, e *Galileu* é, por seu turno, accusado de blasphemia e impiedade. Um tribunal, temido por todos, condemna os seus escriptos, obriga-o a uma retractação desmentida pela sua consciencia, e, julgando-o indigno da liberdade de que elle abusou, rouba-lh'a em parte, querendo ainda mostrar n'isto grande indulgencia. [1] Sempre as mesmas illusões temerarias e sempre a mesma intolerancia!

Como dissemos, os philosophos da antiguidade acreditaram no movimento da terra; e sem que seja possivel determinar a origem d'esta opinião, é certo que ella tinha feito impressão no animo de *Archimedes*, bem como nos de *Aristoteles* e *Platão*, e que foi ensinada pelos philosophos da eschola de *Pythagoras*. *Cicero* e *Plutarcho* assim o dizem em termos muito precisos.

Não é portanto nova esta theoria; porém o numero dos seus adeptos foi diminuindo de edade para edade, e chegou a achar-se quasi completamente abandonada e como que esquecida. Mas as ideias são como as sementes; pódem, durante seculos, ficar infecundas, até que emfim um dos innumeraveis caminhantes que as calcam aos pés as levanta e as faz germinar maravilhosamente. Tal foi a sorte da ideia pythagorica, relativa ao systema do mundo. Lançada, havia dois mil annos, ao vento das gerações indifferentes, foi recolhida e reanimada por um filho d'aquellas regiões hyperboreas, que, segundo a expressão de *Herodoto*, contemporaneo de Pythagoras, se achavam cobertas de neve e de trevas perpetuas.

Copernico [2] foi o sabio a quem estava reservada a immortal gloria de fazer renascer esta velha ideia, e de a fazer retumbar assás alto para lhe ligar para sempre o seu nome.

Era então o *Almagesto de Ptolomeu* a regra universal das

---

[1] Bertrand. — *Les fondateurs de l'Astronomie.*

[2] Nicolau Copernico nasceu em 1473 em Thorn (Prussia polaca).

opiniões docilmente recebidas e transmittidas como evidentes e indubitaveis d'uma a outra geração. Copernico recusou sujeitar-se a esta auctoridade, e ousou libertar-se de tal jugo. A complicação dos movimentos admittidos pelas escholas não satisfazia o seu espirito, e escandalisava-o esta bizarra architectura, pois que não podia convir, segundo a sua opinião, a um tão majestoso edificio, e não corresponder á alta ideia de precisão que se lhe attribue. Impellido por este pensamento, e sem se importar com a opinião geral, procurou a verdade com tanto ardor como independencia de razão. Principiou por lêr attentamente os escriptos dos philosophos, para se familiariar com as suas doutrinas e verificar se alguns teriam indicado uma disposição mais simples do universo. «Tomei, diz elle, a resolução de tornar a lêr as obras de todos os philosophos, para procurar se algum d'elles tinha admittido para as espheras celestes outros movimentos differentes dos acceites nas escholas; e achei em Cicero que *Nicetas* acreditava no movimento de terra. Plutarcho informou-me, depois, que esta opinião tinha sido seguida por muitos outros.» Impressionado por estas ideias, applicou-as ás observações astronomicas, que, com o tempo, tinham augmentado consideravelmente, e teve a satisfação de as vêr sujeitar-se sem esforço á theoria do movimento da terra. O successo excedeu as suas esperanças, e a luz fez-se repentinamente no seu espirito. Pouco ambicioso de gloria, e muito amante de repouso, continuou silenciosamente os seus trabalhos, aperfeiçoando sem cessar a sua obra, e fortificando as suas convicções pelo estudo aturado das observações antigas e pela assidua comtemplação do céu, que, desgraçadamente, se achava muitas vezes encoberto pelos nevoeiros do Vistula.

É bom ser modesto, disse Voltaire, mas não se deve ser indifferente á gloria; e Copernico parece tel-o sido. Não teve ambição, nem até a maior e a mais pura de todas, a de deixar um grande nome; e o seu zelo pela verdade, reprimido pelo amor do descanço, não chegou nunca a compromettter o seu repouso. Sem prover os obstaculos que se encontrariam entre as suas opiniões e as decisões da egreja, suppunha que haveria difficuldades, e perferiu evital-as não publicando nada. Comtudo foi propagando as suas ideias, no revelando os seus segredos pouco a pouco, escolhendo os seus discipulos e não pensando que a fé scientifica obrigasse ao martyrio. Não occultou nunca a verdade; não lh'o permittia a sua lealdade; mas não a professava publicamente. Entretanto a sua reputação espalhava-se pouco a pouco, e o seu nome era já pronunciado com honra e respeito por toda a Europa. Chegavam-lhe pedidos de todos os lados para publicar o trabalho que devia immortalisar o seu nome e que a sua prudencia tinha, ha trinta annos, occultado ao publico. Depois de ter hesitado muito tempo, vencido a final pelas repetidas sollicitações de dois amigos [1], confiou o precioso manuscripto a um d'elles, que o fez imprimir por *Rheticus*, um dos mais enthusiastas e dos mais dedicados entre os discipulos que tinham ido beber na propria fonte a intelligencia da nova doutrina. O fim principal da obra de Copernico, que intitulou *De revolutionibus orbium coelestium*, consiste em estabelecer o duplo movimento da terra, pela simplicidade e regularidade que apresenta, e cujo majestoso complexo não tem necessidade d'outras provas para se impor inevitavelmonte ao espirito. Copernico mostrou,

---

[1] Estes dois amigos da sciencia, a quem se deve a publicação do livro do Copernico, foram o cardeal *Schomberg* e o bispo de *Kulm*, *Gisius*.

em primeiro logar, muito melhor do que tinham feito os seus antecessores, a superioridade da ideia do movimento da terra sobre todas as hypotheses que se tinham imaginado, para explicar bem o movimento diurno geral da esphera celeste. Em seguida refere egualmente ao movimento da terra o movimento annuo, executado na apparencia pelo sol. Sabia que *Marciano Capella*, a quem cita, fazia girar Mercurio e Venus em volta do sol. Porque, pergunta elle, parar no meio do caminho? Porque não fazem girar os outros planetas em volta do mesmo centro? Se o seguirmos, explicar-se-hão bem melhor certos phenomenos do que pelo systema antigo. Foi assim que Copernico traçou as orbitas dos planetas, assignou pela primeira vez á lua o logar de satellite da terra e avançou sobre a via do verdadeiro systema do mundo, collocando-lhe o sol no centro

A revolução diurna do céu não foi mais, para elle, do que uma illusão devida á rotação da terra; e a precessão dos equinocios reduziu-se a um movimento no eixo terrestre. Os circulos imaginados por Ptolomeu, para explicar os movimentos directos e retrogrados dos planetas, desappareceram: Copernico não viu n'estes singulares phenomenos senão apparencias produzidas pela combinação do movimento da terra em volta do sol com o dos planetas; e concluiu as dimensões respectivas das suas orbitas, até então ignoradas. Emfim, tudo n'este systema, diz Laplace, annuncia esta bella simplicidade que nos encanta nos meios da natureza, quando somos assás felizes para os conhecer [1].

Comtudo fez perder ao seu systema o cunho de simplicidade, continuando a fazer mover os planetas sobre circumferencias de

---

[1] Laplace, *Exp. du syst. du monde.*

circulos perfeitos; não ousando renunciar aos epicyclos, nem aos deferentes excentricos para explicar as desegualdades do movimento da terra e dos outros planetas; e, finalmente, suppondo que a terra no seu movimento em volta do sol lhe mostra constantemente a mesma face, como a lua faz á terra.

Porém, apesar d'estas sombras, Copernico não deixa de ser o principal fundador da astronomia moderna. Substituindo a realidade á illusão, fez desapparecer theorias phantasticas e prestou um immenso serviço á sciencia. Mas não foi no seu tempo que se reconheceu a grandeza d'este serviço. Poucos astronomos teriam então subscripto as seguintes enthusiasticas palavras de *Bailly:* «Restituindo á terra o movimento que ella recebeu do auctor da natureza, o homem acha-se transportado com ella; póde julgar da extensão do mundo pela sua viagem annual. Não são mais pequenos intervallos como os que percorre num globo de nove mil leguas de circuito; segue uma circumferencia da qual mais de sessenta milhões de leguas são o diametro. Eis-aqui a base d'uma grande parallaxe; e nesta longa estrada ha a escolher estações para estabelecer medidas. A cada passo da terra na sua orbita este deslocamento muda a apparencia do logar dos planetas no céu. Estes deslocamentos accumulados formam variações sensiveis. Tracta-se unicamente de conhecer bem o movimento proprio dos planetes e de bem estabelecer, em cada instante, o logar em que elle é visto do sol; e, comparando este logar com o logar observado da terra, obtem-se a differença e alteração que resultou do deslocamento do nosso globo. É uma verdadeira parallaxe... Esta parallaxe é tanto mais pequena, quanto mais afastado está o planeta de nós. Copernico concluiu d'aqui a relação da distancia de cada planeta ao raio da orbita da terra, isto é, o intervallo que separa a terra do sol. É o modulo das distancias de todos os planetas. Teve então as relações d'estas distancias, e uma escala de grandezas desde o covado, a toesa, a legua, até ao raio do globo; desde este raio do globo até ao raio da sua orbita annual; e, emfim, desde o raio d'esta orbita até ás distancias dos outros planetas que compõem o nosso systema solar. A astronomia dirigida por Copernico abraçava o universo pela successão das suas medidas. As partes não se achavam então destacadas, como na hypothese de Ptolomeu, e a sua união era um caracter de verdade» [1].

Este grande homem não foi testemunha do successo da sua obra; morreu, quasi subitamente, e mal teve a satisfação de sustentar nas suas mãos já desfallecidas o primeiro exemplar da sua obra. Setenta e tres annos depois da morte do seu auctor o livro *De revolutionibus orbium coelestium* foi condemnado pela Congregação do Index como «encerrando ideias dadas por muito verdadeiras sobre a situação e o movimento da terra, ideias inteiramente contrarias á Sagrada Escriptura.» O livro de Copernico foi condemnado *donec corrigatur:* são as palavras da sentença. Képler observa que teria sido melhor dizer *donec explicetur*. Bertrand [2] faz aqui mui judiciosamente notar que se, comprimindo a verdade, póde retardar-se por algum tempo o seu triumpho, é para o tornar em seguida mais completo. Não é, diz Pascal, o decreto de Roma sobre o movimento da terra que provará que ella se conserva em repouso; e se houvesse observações constantes que provassem que é ella que gyra, todos os homens conjunctamente não a impediriam de gyrar, nem poderiam deixar de gyrar com ella.»

---

[1] Bailly, *Hist. de l'astronomie moderne. Tom.* 1.º

[2] Bertrand — Obra cit.

Durante todo o seculo dezeseis a opinião de Copernico sobre o movimento da terra foi pouco seguida; havendo, pelo contràrio, um grande numero de astronomos que repelliam as suas ideias. É que Copernico foi um grande revolucionario na verdadeira accepção da palavra; e que, no mundo scientifico como no social, as ideias avançadas, ainda que verdadeiras, têm de vencer obstaculos de todas as especies e arrostar com muita resistencia antes de se estabelecerem definitivamente.

Tornaram-se notaveis entre os sectarios da nova ideia Rheticus [1] o primeiro e mais fervoroso discipulo do reformador da astronomia, Reinhold [2] e Maestlin, cujo mais bello titulo de gloria consiste em ter sido mestre de Képler. E, com effeito, Maestlin, apesar de partidista declarado de Copernico, ensinava a immobilidade da terra por causa da sua posição official de professor. Elle proprio o dá a entender no seu *Epitomae astronomiae* [3]. Que confissão!

D'entre os adversarios de Copernico sómente mencionaremos o primeiro dos grandes observadores modernos, Tycho-Brahé, que, em virtude da sua grande auctoridade e da celebridade do seu nome, esteve quasi mergulhando a sciencia no cháos d'onde ella acabava de sahir [4].

Tycho-Brahé, sendo aliás admirador convicto de Copernico, não admittia o systema do illustre polaco, por lhe parecer que a doutrina do movimento da terra se achava em contradicção com as

---

[1] No seu livro, intitulado *De libris Revolutionum eruditissim Nic. Copernici Narratio*, *Rheticus* adopta francamente as ideias de Copernico e defende se com espirito contra os seus detractores.

[2] Foi o auctor de tabuas astronomicas calculadas segundo as observações de Copernico.

[3] Hoeffer, *Histoire de l'Astronomie.*

[4] Pontécoulant, *Th. anal. du système du monde.*

experiencias de cada dia; mas, apesar d'este desaccordo, o livro das revoluções impressionou-o muito, e as objecções do judicioso astronomo contra o systema de Ptolomeu pareciam-lhe decisivas. Por estas razões, e talvez arrastado pela vaidade de vincular o seu nome a um systema astronomico, Tycho-Brahé substituiu aos dois oppostos — de Ptolomeu e Copernico — o seu, que participava ao mesmo tempo de um e outro. Segundo elle a terra está em repouso no centro do universo; o sol é o centro dos movimentos de todos os planetas, e estes com o sol e a lua gyram em volta da terra.

Este systema, que, segundo a ordem natural das cousas, devia preceder o de Copernico, não era, com effeito, novo; antes de estabelecer o verdadeiro systema, pensou este auctor em dispor os corpos celestes como depois fez Tycho-Brahé; abandonou, porém, bem depressa estas ideias, por lhe parecer contrario á simplicidade da natureza fazer gyrar o centro commum dos planetas em volta d'um centro secundario.

«O systema de Tycho, diz Montucla, não é mais que uma engenhosa ficção, tal como a que poderiam imaginar os astronomos de qualquer outro planeta. Supponhamos, com effeito, que ha habitantes e astronomos em Marte, e que elles se obstinam em collocar-se no centro do universo; darão razão de todos os phenomenos por um systema similhante ao de Tycho; e o mesmo poderão fazer os astronomos de Jupiter, os de Saturno, etc. Até mesmo na lua os astronomos, se os lá ha, poderão reputar-se em repouso, e ao mesmo tempo satisfazer mathematicamente a todos os phenomenos astronomicos [1].»

---

[1] Montucla, *Histoire des mathématiques.*

Comtudo, se Tycho-Brahé não foi feliz na explicação dos movimentos dos corpos celestes, a historia da sciencia não póde deixar de reconhecer que se lhe devem grandes serviços. Novos instrumentos inventados e os antigos aperfeiçoados; uma precisão muito maior nas observações; um catalogo de estrellas muito superior aos de Hipparco e de Ulugh-Beigh; a descoberta da desegualdade da lua, a que chamou variação; a das desegualdades dos movimentos dos nodos e da inclinação da orbita lunar; a importante observação de que os planetas se movem muito além d'esta orbita; um conhecimento mais perfeito das refracções astronomicas; emfim numerosas observações dos planetas que serviram de base ás leis de Képler — taes são os principaes serviços que Tycho-Brahé prestou ás sciencias [1]. É por isso que a posteridade rectificou o juizo que elle fazia de si mesmo, quando, proximo a morrer, dizia aos seus discipulos, que o estremeciam: *Non frustra vixisse videor.*

É a Képler, um d'estes homens raros que a natureza dá de tempos a tempos ás sciencias para fazer desabrochar as grandes theorias preparadas pelos trabalhos de muitos seculos, segundo a expressão de Laplace, é a Képler que pertence a honra de ter estabelecido o verdadeiro systema planetario, retomando as ideias de Copernico sobre a posição central do sol, em volta do qual circulam os planetas, e acabando com as velhas hypotheses dos movimentos circulares uniformes e dos movimentos que se suppunha effectuarem-se nos epicyclos. Képler imaginou que o sol é o centro dos movimentos dos planetas circulando ao longo de cir-

---

[1] Laplace, obra cit.

cumferencias de ellipses de que o astro radioso occupa um dos fócos. Para pôr esta hypothese ao abrigo de toda a critica, para a estabelecer como uma verdade d'ahi por deante immutavel, fez um numero prodigioso de calculos com uma infatigavel perseverança. Apoiou-se principalmente sobre as observações do planeta Marte, feitas por Tycho-Brahé com uma exactidão notavel. Chegou assim a explicar todas as particularidades do movimento d'este planeta, explicação que tinha escapado aos esforços dos antigos astronomos. Estendendo aos outros planetas os resultados a que tinha chegado, achou, depois de dezesete annos de trabalho, as verdadeiras leis dos movimentos dos corpos celestes; e, dando-lhes o seu nome, creou para si a immortalidade na historia.

As leis de Képler, diz Bertrand, são o fundamento solido e inabalavel da astronomia moderna, a regra immutavel e eterna do deslocamento dos astros no espaço; nenhuma outra descoberta produziu tão numerosos trabalhos e tão grandes descobertas: mas o longo e penoso caminho que alli o conduziu só d'um pequeno numero é conhecido. Nenhum dos numerosos escriptos de Képler é considerado como classico, as suas obras são pouco lidas; mas a sua gloria será immortal, está escripta no céu; os progressos da sciencia não podem diminuil-a nem obscurecel-a; e os planetas, pela successão sempre constante dos seus movimentos regulares, contal-a-hão em todos os seculos [1].

O atraso em que se achavam as sciencias no tempo de Képler, não lhe permittiu apresentar provas infalliveis do movimento da terra, e os adversarios d'este systema continuaram amontoando objecções sobre objecções contra elle; não fundadas sobre a sciencia, em nada

[1] Bertrand, obra cit.

atacavam a sua veracidade, o que nos dispensa de as mencionarmos nesta rapida resenha da historia do movimento da terra.

Era, porém, chegada a occasião em que todas as sciencias tomaram um grande incremento; Galileu, entregando-se ao estudo da mechanica, que, desde Archimedes, não tinha dado um passo, encheu num dia o vasio que os separava [1], descobrindo as leis de acceleração dos corpos pesados, no meio dos phenomenos complicados que os occultam á percepção dos nossos sentidos. Lançando, em seguida, mão do maravilhoso instrumento que um acaso feliz vinha de fazer descobrir, instrumento que, dando ás sciencias astronomicas uma precisão e extensão inesperadas, fez ver no céu desegualdades novas e novos mundos, Galileu descobriu os quatro satellites de Jupiter, que lhe mostraram uma nova analogia da terra com os planetas; reconheceu as phases de Venus, que o convenceram do seu movimento em volta do sol; e, finalmente, observou as manchas e a rotação d'este astro. Publicando estas descobertas, fez ver que elles demonstravam o movimento da terra, como as suas descobertas em mechanica deitavam por terra as objecções que o pouco conhecimento d'esta sciencia tinha suggerido contra elle; e sustentou brilhantemente o systema de Copernico nas lições que professou na universidade de Padua. Estas lições deram logar a uma viva polemica da parte dos partidistas de Ptolomeu, e, o que foi bem mais perigoso para o illustre professor, da parte dos theologos que pretendiam ser esta doutrina contraria ás Sagradas Escripturas. O resultado d'esta discussão foi ser denunciado em Roma como impio, quando, em resposta aos seus inimigos, publicou a sua celebre obra —*Os Dialogos* —

---

1 Pontécoulant, obra cit.

na qual o duplo movimento da terra em volta do sol e de rotação sobre si mesma, se acha defendido por considerações astronomicas largamente deduzidas. Obrigado a apresentar-se em Roma, apesar da sua idade avançada, o illustre ancião foi bem depressa condemnado a fazer de joelhos abjuração publica de seus erros e a passar o resto de seus dias numa prisão.

Este acto teve, porém, um resultado completamente differente d'aquelle que os seus inimigos tinham em vista. A historia das suas desgraças, diz Bertrand, exaggerada como uma piedosa lenda, tornou mais firme o triumpho das verdades pelas quaes soffreu; o escandalo da sua condemnação perturbará sempre no seu orgulho os que querem ainda oppor a força á razão, e a justa severidade da opinião conserva a recordação como uma eterna mancha que lhe lança á fronte para os confundir [1]. Se a sentença proferida contra o illustre italiano demorou por algum tempo o reconhecimento das verdadeiras leis da natureza, a reacção não tardou a levantar a cabeça, e, passados annos, foi annullada a sentença da inquisição que condemnou Galileu.

A theoria do movimento da terra é hoje ensinada em toda a parte e até no Observatorio Romano. Como prova d'esta asserção citaremos as linhas seguintes, extrahidas d'uma memoria do illustre padre Secchi: O movimento da terra é uma verdade que, em os nossos dias, não carece de demonstração; é, com effeito, um corollario de toda a sciencia astronomica.

Descobertas as leis que regulam os movimentos dos corpos celestes, tornava-se preciso medir as forças que os governam. Era

---

[1] Bertrand, obra cit.

necessario um grande genio para se abalançar a tentar tal empresa; e por isso bem merece Descartes o reconhecimento de todos os seculos por ter feito o primeiro esforço para remontar dos effeitos ás causas que os produzem e para deduzir dos phenomenos o principio que põe em movimento a materia. O systema dos turbilhões que apresentou é, sem duvida, falso, vulneravel em muitos pontos e nada susceptivel de se submetter aos processos analyticos : mas fez epocha na historia da sciencia por ser o primeiro passo dado no caminho tão escabroso que os seus successores deviam percorrer com tanta gloria. Este systema, acolhido a principio com grande enthusiasmo, pouco tempo gosou do favor dos astronomos; concorreram para este resultado as descobertas que Képler e Galileu tinham já feito, as que se fizeram posteriormente, e o seu proprio auctor, que, erigindo em principio a duvida de tudo, prescreveu que todas as opiniões se devem submetter a um rigoroso exame.

Estava reservada ao illustre Newton a gloria de nos fazer conhecer o principio geral dos movimentos celestes. Verdade seja que, já anteriormente, tinha Képler entrevisto a gravitação universal e Hooke indicado que os movimentos planetarios são o resultado d'uma força primitiva de projecção, combinada com a força attractiva do sol; estas indicações eram, porém, muito vagas e pouco convincentes pela falta absoluta de provas. Tornava-se preciso um homem de genio, que, combinando estas descobertas com as de Galileu sobre as quedas dos graves e de Huighens sobre a força centrifuga, e generalisando-as, soubesse deduzir a lei da gravidade. É o que fez Newton na sua obra dos *Principios mathematicos de philosophia natural,* livro unico e incomparavel, e que Lagrange chamou, sem que ninguem ousasse contradizel-o, a mais alta producção do espirito humano.

É nelle que se encontra exposta e demonstrada com a maior lucidez a descoberta da attracção universal, manancial abundantissimo que dois seculos de trabalhos permanentes não poderam ainda esgotar. Alli Newton demonstrou ser a attracção a mola simplicissima d'uma machina complicadissima — o universo — ; indicou como ella faz nascer e entretem no oceano as oscillações que se observam debaixo do nome de fluxo e refluxo do mar; e, finalmente, explicou como ella regula com uma perfeita disciplina o deslocamento secular dos planos em que se movem os planetas, a alteração insensivel mas constante das suas orbitas e o movimento lento e regular do eixo da terra. Foi assim que o illustre sabio inglez reduziu a um unico principio a theoria physica do universo, encadeando com uma admiravel simplicidade todos os grandes phenomenos do systema do mundo.

Comtudo, se Newton fez muito, não fez tudo; e a parte de gloria e de trabalho que deixou aos seus successores foi ainda muito grande. Com effeito, se exceptuarmos o que diz respeito ao movimento elliptico dos planetas e dos cometas, á attracção dos corpos esphericos e ás relações das massas dos planetas acompanhados de satellites com a massa do sol, todas as suas outras descobertas ficaram apenas esboçadas. Felizmente Newton teve successores dignos de si: os geometras do seculo 18.º e os do actual souberam, applicando a analyse ao principio de gravitação universal, deduzir d'elle todos os phenomenos astronomicos, e explicar as numerosas desegualdades do movimento dos planetas e dos seus satellites. Concorreram muito para isto Euler, Clairaut, d'Alembert, Lagrange e, principalmente, o insigne Laplace.

Este illustre mathematico consagrou a sua vida ao estudo dos maiores objectos que podem occupar o espirito humano. As maravilhas do céu, as altas questões de philosophia natural, as combinações engenhosas e profundas da analyse mathematica, todas as leis do universo, tudo isto, diz Fourier [1], foi presente ao seu pensamento, e os seus esforços foram coroados por descobertas immortaes. Não só reuniu na sua Mechanica Celeste, o Almagesto do seculo 18.°, tudo o que as sciencias mathematicas e physicas tinham já inventado e que serve de fundamento á astronomia; como tambem ajunctou a esta sciencia descobertas capitaes que lhe pertencem e que tinham escapado aos seus predecessores.

Reconhecido por todos o movimento da terra e, em geral, o dos planetas em volta do sol, e achada a lei segundo a qual elle se effectua, restava saber se ella explicava todas as particularidades do movimento, e se eram ou não verdadeiras as leis que Képler tinha deduzido da observação. É o que Newton fez, como dissemos, attendendo á attracção que o sol exerce sobre os corpos do nosso systema planetario, deduzindo tudo o que se refere ao movimento elliptico e o que têm feito um grande numero de auctores depois d'elle.

Mas, como a lei da attracção é universal, os planetas actuam uns sobre os outros e actuam egualmente sobre o sol; e d'estas differentes attracções resultam nos seus movimentos ellipticos perturbações, de que a observação tinha já mostrado a existencia e que é necessario determinar para obter o conhecimento exacto dos movimentos planetarios.

Os esforços dos mathematicos têm conseguido com que se possam exprimir estas perturbações pelas variações dos elementos

---

[1] Fourier, *Éloge historique de Mr. le marquis de Lap'ace.*

da orbita elliptica, reduzindo-se assim este importante problema a uma questão de analyse.

As variações dos elementos das ellipses planetarias são de duas especies; umas não desarranjam a orbita primitiva do planeta: as outras, pelo contrario, alteram os proprios elementos da orbita e não se póde decidir *à priori* se o seu effeito, apesar de insensivel num curto espaço de tempo, não virá algum dia a alterar a estabilidade do nosso systema solar.

Laplace, a quem, como dissémos, não escapou nenhuma das grandes questões da mechanica celeste, resolveu este problema concluindo que a estabilidade do nosso systema solar se acha assegurada, fundando-se para isto em duas condições — a invariabilidade dos eixos maiores das orbitas e a pequena extensão dos limites das variações das suas excentricidades e das suas inclinações.

Foi esta importante doutrina que escolhemos para these da dissertação de concurso que ora offerecemos á intelligente apreciação da illustrada Faculdade de Mathematica.

Dividimos o nosso modesto trabalho em duas partes: na primeira expomos muito resumidamente o problema, tal como foi resolvido por Laplace e Pontécoulant; na segunda, mostramos, segundo nos parece, que não são verdadeiros os resultados a que chegaram, seguindo assim a opinião de mathematicos abalisados, que não admittem aquella doutrina.

PRIMEIRA PARTE

EXPOSIÇÃO DO PROBLEMA TAL COMO FOI TRACTADO POR PONTÉCOULANT E LAPLACE

«La constance des moyens mouvements des planètes et des grands axes de leurs orbites, est un des phénomènes les plus remarquables du système du monde.»

LAPL. *Exp. du syst. du monde.*

Euler e Lagrange tinham achado, baseando-se em calculos que suppunham rigorosos, uma desegualdade secular na expressão do eixo maior; sendo este resultado do calculo corroborado pela observação, que tinha feito ver variações nas revoluções de Jupiter e Saturno.

Laplace, logo no principio da sua carreira, atacou este resultado e pretendeu mostrar que o eixo maior, differente nisto de todos os elementos ellipticos, é invariavel; pelo menos quando se limita á approximação á primeira potencia das forças perturbadoras por uma parte, e, pela outra, ás terceiras potencias, inclusivamente, das inclinações e das excentricidades das orbitas.

Passados annos Lagrange retomou a questão; pretendeu dar uma demonstração directa e independente de qualquer gráu de approximação, e chegou a pôr a differencial do eixo maior debaixo d'uma fórma da qual deduziu *à priori* que nenhuma desegualdade secular póde nella existir; mas sómente quando se desprezam as potencias da força perturbadora superiores á primeira.

Em seguida, Poisson calculou os termos seculares da differencial do eixo maior, dependentes do quadrado da força perturbadora, e até á quarta ordem, exclusivamente, em relação ás inclinações e ás excentricidades; e, seguindo o exemplo de Lagrange, buscou demonstrar *à priori* que todos os termos d'esta especie se destroem sem nenhuma excepção, por mais longe que se leve a approximação a respeito das excentricidades e das inclinações.

Este trabalho de Poisson despertou de novo a attenção de Lagrange e Laplace: estudando novamente este objecto, foram conduzidos, ao mesmo tempo, um e outro, e por considerações differentes, a novas expressões das differenciaes dos movimentos ellipticos, com que enriqueceram a Mechanica celeste. Por meio d'estas formulas simplificaram a demonstração de Poisson, sem nada mudar todavia á sua fórma e ao seu principio.

É esta solução de Laplace que vamos expôr; comtudo, habituados a manusear a obra de Pontécoulant, *Théorie analytique du système du monde*, que neste ponto, como em quasi todos, segue passo a passo as pisadas do insigne auctor da Mechanica celeste, referir-nos-hemos de preferencia a elle.

I

Começa Pontécoulant por estabelecer as equações differenciaes do movimento d'um systema de corpos submettidos ás suas acções mutuas, segundo a lei da attracção de Newton, restringindo desde logo a extensão d'esta questão pela hypothese que as partes do systema estão assás affastadas entre si, para que se possa abstrahir da figura dos corpos attrahentes e consideral-os como massas concentradas no seu centro de gravidade.

Depois de ter decomposto em dois mais simples o movimento d'um corpo completamente livre no espaço, como se faz ordinariamente em mechanica, um de translação commum a todos os pontos do corpo, e que é em geral o do seu centro de gravidade, e outro de rotação em volta d'este centro, acha, introduzindo a condição de os corpos do systema estarem sujeitos ás attracções mutuas uns dos outros, proporcionalmente ás suas massas e na razão inversa do quadrado das distancias, acha que as formulas, que dão em cada instante a posição do centro de gravidade do corpo m no espaço, em relação a tres eixos fixos tomados arbitrariamente, são

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{1}{m}\cdot\frac{d\lambda}{dx} \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{1}{m}\cdot\frac{d\lambda}{dy} \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{1}{m}\cdot\frac{d\lambda}{dz} \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots\dots \quad (1)$$

sendo x, y, z as coordenadas do centro de gravidade do corpo m, cujo movimento se considera, e λ uma funcção das massas de todos os corpos do systema e das suas distancias mutuas, que se define analyticamente do modo seguinte:

$$\lambda = \frac{mm'}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}} +$$

$$+ \frac{mm''}{\sqrt{(x''-x)^2+(y''-y)^2+(z''-z)^2}} +$$

$$+ \frac{m'm''}{\sqrt{(x''-x')^2+(y''-y')^2+(z''-z')^2}} +$$

$$+ \text{etc.}$$

na qual x', y', z', x'', y'', z'', etc, representam as coordenadas, relativas aos mesmos eixos, dos outros corpos do systema, que têm respectivamente as massas m', m'', etc.

Fazendo applicação ao nosso systema solar das equações (1), é preciso dar-lhes uma outra fórma para que ellas nos possam servir para comparar a theoria com a observação; e, com effeito, aquellas equações dão-nos o movimento absoluto do centro de gravidade do corpo m no espaço, quando é certo que não podemos observar senão movimentos relativos. Para isso refere Pontécoulant ao centro do sol os movimentos dos planetas e dos cometas, ficando assim as equações (1) substituidas pelas seguintes que d'ellas se deduzem, nesta hypothese,

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{Mx}{r^3}+\Sigma\frac{mx}{r^3}&=\frac{1}{m}\cdot\frac{d\lambda}{dx}\\ \frac{d^2y}{dt^2}+\frac{My}{r^3}+\Sigma\frac{my}{r^3}&=\frac{1}{m}\cdot\frac{d\lambda}{dy}\\ \frac{d^2z}{dt^2}+\frac{Mz}{r^3}+\Sigma\frac{mz}{r^3}&=\frac{1}{m}\cdot\frac{d\lambda}{dz}\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

em que M representa a massa do sol, λ a mesma funcção que na equação (1), e r, r', r'', etc., as distancias dos differentes corpos do systema, m, m', m'', etc., ao centro de M, isto é,

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

$$r'=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2},$$

$$r''=\sqrt{x''^2+y''^2+z''^2},$$

etc.

Lagrange [1] deu ainda a estas equações uma forma muito mais simples, empregando em logar da funcção λ a seguinte:

$$R = m'\left\{\frac{1}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}} - \frac{xx'+yy'+zz'}{r'^3}\right\}+$$

$$+ m''\left\{\frac{1}{\sqrt{(x''-x)^2+(y''-y)^2+(z''-z)^2}} - \frac{xx''+yy''+zz''}{r''^3}\right\}+$$

$+$ etc.

e fazendo para abreviar,

$$M+m=\mu,$$

o que transforma desde logo as equações (2) nestas outras

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\mu x}{r^3}&=\frac{dR}{dx}\\ \frac{d^2y}{dt^2}+\frac{\mu y}{r^3}&=\frac{dR}{dy}\\ \frac{d^2z}{dt^2}+\frac{\mu z}{r^3}&=\frac{dR}{dz}\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (a)$$

A funcção R, que Lagrange introduziu na Mechanica Celeste, é de grande vantagem, visto que tem a propriedade de representar

---

1 Lagrange. *Oeuvres completes*, tomo 4.º

pelas sua differenças parciaes as expressões das forças devidas á attracção que os corpos m', m'', etc. do systema exercem sobre o corpo m cujo movimento se considera, decompostos segundo os eixos das coordenadas, o que lhe fez dar o nome de *funcção perturbadora.*

Mudando successivamente nas equações (a) as lettras m, x, y, z, r nas lettras m', x', y', z', r'; m'', x'', y'', z'', r'', etc. e reciprocamente formar-se-hão tres equações similhantes para cada um dos corpos m', m'', etc, o que dará um systema de tantas equações differenciaes de segunda ordem, quantos são as coordenadas x, y, z, x', y', z', etc. que ha para determinar em funcção do tempo.

II

Obtidas d'este modo as equações differenciaes do movimento de translação do centro de gravidade de cada um dos corpos do systema em volta do corpo central, attendendo ás attracções mutuas de todos os corpos do systema, tracta Pontécoulant de proceder á sua integração. Infelizmente, a solução rigorosa do problema excede os meios actuaes da analyse, e é forçoso recorrer ás approximações, sendo para isto d'um grande auxilio a consideração da pequenez das massas dos corpos do systema em comparação com a do sol.

D'entre os methodos que se têm apresentado para resolver d'este modo o problema, tem o principal logar, e é d'elle que Pontécoulant lança mão, o processo devido a Euler, porém muito aperfeiçoado por Lagrange, conhecido pelo nome de *methodo de variação das constantes arbitrarias.*

*

Não é nosso intento, nem mesmo o permitte o pouco tempo que podemos dispôr para este trabalho, expôr aqui este fecundo methodo de analyse, que consiste em fazer variar as constantes arbitrarias que entram nos integraes das equações differenciaes, ou com o fim de obter soluções particulares, ou para tornar estes integraes extensivos a outras equações.

Lagrange dá uma ideia geral d'este methodo, quando diz: «Supponhamos que em um problema dado se tem chegado a integrar completamente as equações de que elle depende, mas abstrahindo de certas forças que actuam sobre os corpos em uma razão qualquer das distancias, e que se podem considerar como forças perturbadoras do movimento do systema.

«Póde reduzir-se o effeito d'estas forças, sobretudo na hypothese de serem muito pequenas, a não fazer variar na solução geral senão as constantes arbitrarias introduzidas pelas differentes integrações; e como deve haver duas constantes arbitrarias por cada variavel, pois que estes variaveis dependem de equações differenciaes de segunda ordem, póde operar-se de modo que não só as suas expressões finitas, como tambem as suas expressões differenciaes, sejam as mesmas como se as constantes arbitrarias de que se tracta ficassem invariaveis; de modo que, em cada instante, os logares dos corpos no espaço, assim como as suas velocidades e as suas direcções, sejam representadas pelas mesmas formulas, attendendo ás forças perturbadoras, como quando se abstráe d'estas forças, caso que tem logar para os planetas.

«Considerando debaixo d'este ponto de vista a variação das constantes arbitrarias, achei que a funcção que representa o integral de todas as forças perturbadoras, multiplicadas cada uma pelo elemento da distancia de que elle depende, gosa da propriedade, que as suas differenças parciaes, relativas a cada uma das constantes arbitrarias são expressas unicamente por funcções differenciaes d'estas mesmas constantes sem o tempo; de modo que teremos, para as variações d'estas constantes, equações differenciaes que não encerram senão estas constantes com as differenças parciaes da funcção de que se tracta, relativas a cada uma dellas, como acontece com as perturbações dos planetas; forma extremamente vantajosa para o calculo das variações das constantes, e sobretudo para a determinação das suas variações seculares» [1].

Usando d'este methodo, que reduz a uma simples questão de analyse a solução d'um dos mais importantes problemas do systema do mundo, tracta Pontécoulant de integrar as equações (a) na hypothese de serem nullos os seus segundos membros, isto é, as equações

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\mu x}{r^3}=0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{\mu z}{r^3}=0$$

$$\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{\mu z}{dt^2}=0$$

que nos dão o movimento do corpo m do systema, attendendo apenas á acção do corpo central, e desprezando as acções mutuas

---

[1] Lagrange, Obra cit. Tomo 6.°

dos outros corpos do systema, que são muito pequenas relativamente áquella, em virtude de serem tambem muito pequenas as suas massas comparadas com a do sol.

Os integraes a que Pontécoulant chegou, fazendo para simplificar

$$\mu = 1,$$

são :

$$\left.\begin{array}{r} cz + c'y + c''x = 0 \\[2em] r = \dfrac{a\,(1 - e^2)}{1 + e\cos(r - \omega)} \\[2em] t + l = a^{\frac{3}{2}}(u - e\,\mathrm{seu}\,u) \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(b)}$$

Estes integraes, que são os do movimento elliptico, contêm sete constantes arbitrarias c, c', c'', a, e, ω *e* l; mas nem todas são distinctas, porque cinco d'entre ellas acham-se ligadas pela seguinte equação de condição,

$$c^2 + c'^2 + c''^2 = (1 - e^2)$$

o que reduz o seu numero a seis, como devia ser.

As letras que entram nestas formulas têm uma significação certa e determinada em mechanica celeste, o que nos dispensa definil-as : notaremos comtudo que as constantes arbitrarias não são outra cousa mais que os elementos do movimento elliptico. c, c', c'' determinam a posição da orbita descripta pelo corpo m no espaço ; as constantes a e e a sua natureza, e as duas ultimas arbitrarias ω e l dependem, a primeira da posição do perihelio e a segunda da epocha de passagem do corpo por este ponto.

Estes elementos determinam portanto completamente a grandeza e a posição da orbita; são por conseguinte diversos para os differentes planetas: mas ficam os mesmos para cada planeta em particular, quando se abstrae dos desarranjos que elle experimenta da parte dos outros planetas. É por esta razão que os elementos das orbitas não entram nas equações differenciaes, visto que elles são communs para todos os planetas; entram, porém, em seguida como constantes arbitrarias nos integraes d'estas equações, isto é, nas equações algebricas das orbitas.

Agora, para applicar a theoria de variação das constantes arbitrarias ao calculo das perturbações dos corpos do nosso systema solar, é preciso determinar as variações do movimento elliptico, visto que ellas são, como vimos, as constantes arbitrarias que a integração introduziu. Para mais facilidade, Pontécoulant em logar de procurar as variações das seis constantes distinctas que encerram as equações (b), preferiu achar as variações das constantes a, α, φ, l, g, k; as constantes α, φ, e k estão ligadas ás precedentes pelas relações

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\sqrt{c^2 + c''^2}}{c}, \quad \operatorname{tang}\alpha = -\frac{c''}{c},$$

$$k^2 = c^2 + c'^2 + c''^2 = a\,(1 - e^2);$$

vindo assim φ a representar a inclinação da orbita sobre o plano de xy e α a longitude do seu nodo contada sobre o mesmo plano a partir do eixo dos x; a constante ω, que exprime a longitude do perihelio, contada sobre o plano da orbita a partir d'uma linha fixa tomada arbitrariamente, fica substituida pela constante g, que é o valor que toma, quando se suppõe que a linha fixa é a intersecção da orbita com o plano dos xy.

Achou assim, por calculos muito longos para serem apresentados nesta resumida exposição, que estamos fazendo,

$$da = 2a^2\, dt\left(\frac{dR}{dl}\right),$$

$$dl = -\,2a^2\, dt\left(\frac{dR}{da}\right),$$

$$dk = dt\left(\frac{dR}{dg}\right),$$

$$dg = -\,dt\left(\frac{dR}{dk}\right) - \frac{\cos\varphi\, dt}{k \operatorname{sen}\varphi}\left(\frac{dR}{d\varphi}\right),$$

$$d\alpha = \frac{dt}{k \operatorname{sen}\varphi}\left(\frac{dR}{d\varphi}\right),$$

$$d\varphi = \frac{\cos\varphi\, dt}{k \operatorname{sen}\varphi}\left(\frac{dR}{dg}\right) - \frac{dt}{k \operatorname{sen}\varphi}\left(\frac{dR}{d\alpha}\right).$$

D'estas formulas conclue Pontécoulant as que se referem á variação das seis arbitrarias que considerou na theoria do movimento elliptico, substituindo as constantes l, k e g pelos seus valores em funcção d'estas arbitrarias.

Finalmente dá ainda outra fórma áquellas variações introduzindo tres novas constantes que se acham ligadas aos elementos do movimento elliptico por relações muito simples.

Para isso, designa por ε a longitude da época o que lhe dá logo a relação

$$nl = \varepsilon - \omega$$

em que é, por hypothese,

$$n = a^{-\frac{3}{2}};$$

e substitue as duas constantes α e φ pelas quantidades p e q, que se exprimem em funcções d'aquellas do modo seguinte:

$$p = \text{tang}\,\varphi\,\text{sen}\,\alpha,$$

$$q = \text{tang}\,\varphi\,\cos\alpha;$$

o que tem a vantagem de fazer desapparecer dos denominadores a quantidade sen φ, que é muito pequena, quando se suppõe a inclinação de orbita sobre o plano fixo pouco consideravel, e que se torna nulla quando se refere a posição do corpo ao plano da sua orbita; acha facilmente, para determinar as variações dos seis elementos da orbita elliptica, as equações seguintes :

$$\left.\begin{aligned}
da &= 2a^2ndt\left(\frac{dR}{d\varepsilon}\right),\\
d\varepsilon &= \frac{andt\sqrt{1-e^2}}{e}(1-\sqrt{1-e^2})\left(\frac{dR}{de}\right) - 2\,a^2ndt\left(\frac{dR}{da}\right),\\
de &= -\frac{andt\sqrt{1-e^2}}{e}(1-\sqrt{1-e^2})\left(\frac{dR}{d\varepsilon}\right) - \frac{andt\sqrt{1-e^2}}{e}\left(\frac{dR}{d\omega}\right),\\
d\omega &= \frac{andt\sqrt{1-e^2}}{e}\left(\frac{dR}{de}\right),\\
dp &= \frac{andt}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{dR}{dq}\right),\\
dq &= -\frac{andt}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{dR}{dp}\right).
\end{aligned}\right\}\ldots(c)$$

III

É d'este modo que Pontécoulant chegou a exprimir as variações differenciaes dos elementos da orbita elliptica pelas differenças parciaes da funcção perturbadora relativas a estes mesmos elementos e multiplicadas por coefficientes que não contêm o tempo. Vê-se, pois, que para achar os seus valores finitos, devemos differenciar cada termo de R em relação a estes elementos e proceder em seguida á sua integração.

Infelizmente, esta integração é impossivel no estado actual da analyse, o que torna egualmente impossivel obter rigorosamente os valores finitos das variações dos elementos ellipticos; sendo preciso recorrer ás aproximações successivas para determinar para estas variações valores aproximados, mais ou menos exactos.

Soccorre-se para isso Pontécoulant da consideração de que são muito pequenas as excentricidades e as inclinações das orbitas que descrevem os corpos que compõem o nosso systema solar, e desenvolve R em uma serie infinita de senos e cosenos de angulos que crescem proporcionalmente ao tempo t; de sorte que cada um dos termos d'este desenvolvimento será da fórma

$$m' \mathrm{A} \cos (i'n't - int + \mathrm{A}),$$

sendo i e i' numeros inteiros que podem ter todos os valores desde

$-\infty$ até $+\infty$ e k uma serie cujo primeiro termo é da ordem $i'-i$ em relação ás excentricidades e ás inclinações.

Chamando F o termo d'esta serie independente do tempo t e considerando sómente este termo, virão para as variações dos elementos termos proporcionaes ao elemento do tempo e, portanto, depois de feitas as integrações para obter as variações finitas d'estes elementos, apparecerão termos independentes da posição dos corpos do systema e que crescerão com o tempo.

A esta parte das perturbações que os differentes corpos do systema experimentam em virtude da acção mutua que exercem uns sobre os outros, deu-se o nome de *desegualdades seculares*, guardando-se o de *desegualdades periodicas* para a parte das perturbações provenientes dos outros termos do desenvolvimento de R. Estes ultimos dependem unicamente das posições relativas dos corpos do systema e reproduzem-se quando estes voltam ás mesmas posições: e, como estes periodos são curtos, essas variações muito pequenas, por serem da ordem das massas, apenas farão oscillar os elementos da ellipse em volta d'um estado medio do qual pouco se afastarão: as desegualdades seculares vão constantemente augmentando, e são as mais difficeis de determinar tanto pela observação como pela theoria. Aquellas não desarranjam a orbita primitiva do corpo; não são, por assim dizer, senão desvios passageiros que elle faz na sua carreira regular, e basta applicar estas variações aos logares dos differentes corpos, dados pelas táboas ordinarias do movimento. Não acontece o mesmo ás variações seculares. Estas alteram os proprios elementos da orbita descripta pelo corpo; e, ainda que o seu effeito seja insensivel num curto espaço de tempo, póde comtudo tornar-se por fim muito consideravel e é impossivel concluir *à priori* se elle não virá algum dia a alterar a estabilidade do nosso systema solar.

É por isso que nos vamos occupar apenas com estas desegualdades.

Como vimos, R é uma funcção conhecida das coordenadas do corpo perturbado e dos corpos perturbadores e da primeira ordem em relação ás massas, de modo que, para ter uma primeira aproximação, despreza Pontécoulant as potencias das massas perturbadoras superiores á primeira, isto é, substitue em R, em logar das coordenadas x, y, z, x', y', z', etc., os seus valores relativos ao movimento elliptico.

Chamando F_1 a funcção a que se reduz F, nesta hypothese, e attendendo a que a differencial de F_1 em relação a nt é necessariamente nulla, teremos, para determinar as desegualdades seculares, as formulas

$$\left.\begin{aligned}
&da=0,\\
&de=-\frac{andt\sqrt{1-e^2}}{e}\left(\frac{dF_1}{d\omega}\right),\\
&d\varepsilon=\frac{andt\sqrt{1-e^2}}{e}(1-\sqrt{1-e^2})\left(\frac{dF_1}{de}\right)-2a^2ndt\left(\frac{dF_1}{da}\right),\\
&d\omega=\frac{andt\sqrt{1-e^2}}{e}\left(\frac{dF_1}{de}\right),\\
&dp=\frac{andt}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{dF_1}{dq}\right),\\
&dq=-\frac{andt}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{dF_1}{dp}\right).
\end{aligned}\right\}\ (d)$$

Da primeira das equações (*d*) deduz logo Pontécoulant que, abstrahindo das desegualdades periodicas, a expressão do eixo maior é invariavel.

Esta propriedade notavel — que os eixos maiores das orbitas dos corpos que compõem o nosso systema solar não estão sujeitas senão a desegualdades periodicas dependentes de configuração que têm entre si, e que, portanto, desprezando estas variações, os seus eixos maiores são constantes e os seus movimentos medios uniformes — constitue, segundo este auctor, um dos phenomenos mais interessantes da disposição do systema do mundo.

Das equações (*d*) deduz ainda Pontécoulant por considerações muito longas para terem aqui cabimento, as duas formulas seguintes:

$$\left.\begin{array}{r} m\sqrt{a}\,.e^2+m'\sqrt{a'}\,.e'^2+m''\sqrt{a''}\,.e''^2+\text{etc}\ldots=\text{const.} \\ m\sqrt{a}\,.\text{tang}^2\varphi+m'\sqrt{a'}\,\text{tang}^2\varphi'+m''\sqrt{a''}\text{tang}^2\varphi''^2+\ldots=\text{const.} \end{array}\right\}(e)$$

das quaes conclue que, sendo os eixos maiores inalteraveis e muito pequenas num dado instante as excentricidades e inclinações, estas quantidades se conservarão constantemente encerradas em limites muito estreitos: e como, diz elle, as excentricidades e inclinações dos corpos que compõem o nosso systema solar são actualmente muito pequenas, conservar-se-hão assim constantemente. Notaremos todavia que esta conclusão não é verdadeira senão quando as radicaes $\sqrt{a}$, $\sqrt{a'}$, $\sqrt{a''}$ etc., forem todos positivos.

Pontécoulant estende os resultados a que chegou, attendendo sómente á primeira potencia das massas perturbadoras, ao caso em que se considerem os quadrados e os productos destas massas e concluiu que: *Os movimentos medios dos corpos que compõem o nosso systema solar e os eixos maiores das suas orbitas são invariaveis, quando se abstrahe das desegualdades periodicas e se desprezam as quantidades de terceira ordem em relação ás forças perturbadoras.* Observa, porém, que este resultado não teria logar se os movimentos medios do corpo perturbado e dos corpos perturbadores, tivessem entre si relações commensuraveis. Este caso não tem logar em a natureza, quando se attende só á primeira potencia das forças perturbadoras; mas poderá apresentar-se quando se leve mais longe a approximação. É o que acontece na theoria de Jupiter e Saturno: os seus movimentos medios são taes que duas vezes o de Jupiter é quasi egual a cinco vezes o de Saturno.

É sobre estes theoremas que Laplace fundou a estabilidade do nosso systema solar: examinal'os-hemos, na segunda parte d'este trabalho, consoante as nossas forças o permittirem, e mostraremos, segundo nos parece, que não são verdadeiros.

SEGUNDA PARTE

ANALYSE DOS THEOREMAS PRECEDENTES

> «A la vérité, dans les dernières tentatives de la mécanique celeste, on a voulu attribuer cet ordre à une prétendue invariabilité du grand-axe des orbites des astres; mais, comme nous pouvons maintenant le prouver rigoureusement, c'est là une grossière erreur.»
>
> WRONSKY, *Messianisme.*

Depois de ter exposto muito resumidamente, na primeira parte d'este trabalho, o modo como Laplace e Pontécoulant demonstraram os theoremas sobre que basearam a estabilidade do nosso systema solar, cumpre-nos, em vista do plano que nos propozemos seguir, fazer a analyse d'aquelles theoremas.

Para isto, começaremos por discutir a plausibilidade das hypotheses em que se fundaram, e apreciaremos, em seguida, o valor das fórmulas d'onde os deduziram.

I

A primeira hypothese de Pontécoulant consiste em suppor que os differentes corpos que compõem o systema se acham sufficien-

*

temente affastados entre si, para que se possa abstrahir da sua figura e considerar a sua massa reunida no centro de gravidade respectivo.

Em absoluto parece-nos não ser isto exacto; e o proprio auctor nos confirma nesta opinião quando diz, depois da analyse que apresenta para fundamentar aquella hypothese: «emfim a constituição do systema solar permitte ainda applicar aos planetas e aos cometas as considerações em que nos apoiámos para estabelecer as equações differenciaes do movimento, e as acções reciprocas d'estes corpos uns sobre os outros são *quasi* as mesmas como se as suas massas estivessem reunidas no seu centro de gravidade.»

E devemos notar que, para chegar a esta conclusão, é preciso suppor que são solidos todos os corpos do systema: se pois, neste caso, a hypothese não é rigorosamente exacta, o que acontecerá quando alguns dos corpos estiverem na maior parte cobertos por grandes camadas liquidas, como acontece ao nosso planeta e a mais alguns, e ainda quando elles forem gazosos como tem logar nos planetas?

Em seguida decompõe as forças perturbadoras segundo tres eixos rectangulares passando por um ponto fixo qualquer, o que tambem nos parece pouco acceitavel. A este respeito diz o ex.^{mo} sr. dr. José Falcão: «Além d'isso parece-nos que ha outro vicio geral, no modo porque Pontécoulant estabelece o grande problema da mechanica celeste; e vem a ser, que quando tracta de determinar a direcção das forças perturbadoras, toma, para esta direcção as tres coordenadas quaesquer do espaço, o que constitue uma determinação meramente arbitraria d'aquella direcção, em quanto é certo que aquellas coordenadas nada têm de commum com a natureza do problema, mas sómente são as condições geraes do espaço no qual elle tem logar [1].»

Parece-nos tambem que na avaliação das forças perturbadoras deixa Pontécoulant de mencionar uma que consideramos importante: é a que resulta da resistencia do ether. Segundo a propria theoria de Pontécoulant, um dos effeitos d'esta resistencia é diminuir constantemente o eixo maior e augmentar a velocidade augular bem como a velocidade absoluta do planeta, fazendo approximar este astro do sol.

Devemos confessar que nenhum vestigio d'esta resistencia tem sido percebido até hoje nos movimentos dos planetas e dos satellites, em que a grandeza das massas, comparada á extensão das superficies, torna sem duvida esta força completamente insensivel. Não acontece, porém, o mesmo no movimento dos cometas; e, segundo os calculos de Encke, é preciso, no caso do cometa de curto periodo que tem o nome d'este illustre astronomo, attender á resistencia do ether para fazer concordar entre si as vinte passagens ao perihelio que tem sido observadas e das quaes a mais antiga remonta ao anno de 1785.

Finalmente o theorema da invariabilidade dos eixos maiores suppõe que a funcção perturbadora R esteja desenvolvida em serie de senos e cosenos dos multiplos dos movimentos medios e que as perturbações o sejam tambem. Não tem logar por conseguinte, na theoria dos cometas, em que as perturbações são calculadas pelas quadraturas para cada revolução anomalistica.

---

[1] Dr. José Falcão, *Dissertação inaugural*.

II

Acabamos de ver que são pouco admissiveis as hypotheses em que Pontécoulant se funda para deduzir os theoremas em que assenta a estabilidade do nosso systema solar. Vejamos agora, se, admittindo mesmo como rigorosas aquellas hypotheses, se podem tirar as conclusões a que elle chegou.

Notemos desde já que, para chegar áquelles resultados é preciso desenvolver a funcção perturbadora R em uma serie da forma

$$R = \Sigma\, m'k \cos\,(i'n't - int + A) \, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

em que o signal Σ se refere aos numeros i e i' que podem tomar todos os valores comprehendidos entre $-\infty$ e $+\infty$; e k representa uma serie cujo primeiro termo é de ordem $i'-i$ em relação ás excentricidades das orbitas e suas inclinações reciprocas, sendo os outros termos de ordem superior [1]: ora uma serie póde sem duvida dar o valor numerico approximado de funcção que representa, mas nunca a sua natureza intima, da qual resultam as propriedades que a caracterisam.

[1] Parte primeira, pag. 43.

Parece-nos pois que o emprego da serie (a) não é rigoroso, quando se pretende deduzir d'elle theoremas, que só devem ser fundados em a natureza intima da funcção.

Mas ainda quando isto assim não fosse e da serie (a) se podessem deduzir aquelles theoremas, para que o seu uso seja permittido é preciso que ella seja convergente; o que terá logar quando as excentricidades e inclinações reciprocas das orbitas dos corpos celestes forem quantidades muito pequenas: se isto assim não for a serie será divergente e um numero qualquer dos seus termos não poderá representar nem ao menos o valor approximado da funcção.

Ora, em o nosso systema solar, as orbitas dos planetas Ceres, Juno, Vesta e Mercurio [1] não podem considerar-se como pouco inclinadas quer entre si, quer ás outras orbitas; as excentricidades de Pallas, de Vesta e de Mercurio [2] não são muito pequenas fracções; e, portanto, não se poderá julgar sufficientemente convergente para que o seu emprego seja permittido. Isto pelo que diz respeito aos planetas: o que diremos, porém, dos cometas que têm grandes excentricidades e cujas inclinações variam desde 0° até 90°?

Hansen, o illustre director do observatorio de Gotha, cuja morte a astronomia ainda hoje deplora, diz com relação a este objecto: «No desenvolvimento de funcção perturbadora, em mul-

1 Além dos planetas acima mencionados, têm tambem grandes inclinações os planetas: Heba, Egeria, Eunomia, Melpomene, Calliope, Thalia, Phocea, Euphrosina, Atalante, e muitos outros que seria ocioso mencionar.

2 Podem tambem citar-se: Hebe, Iris, Melpomene, Atalante, Isis, Nysa, Calypso, Alexandre, Eurydice, etc.

tiplos dos senos e cosenos dos movimentos médios dos corpos celestes que se consideram, somos inevitavelmente levados a desenvolver os coefficientes em series infinitas, ordenadas segundo as potencias crescentes da excentricidade e da inclinação; se quizermos exprimir explicitamente, por transcendentes, estas series ou a sua somma, isto é, os proprios coefficientes, a convergencia natural da funcção perturbadora fica consideravelmente diminuida, ainda quando as excentricidades e inclinações são pequenas: mas, se ellas forem um pouco consideraveis, esta convergencia diminue de tal modo, que somos obrigados a renunciar ao emprego das series infinitas a que somos conduzidos. Para chegar á solução do problema que nos occupa, é preciso então, na funcção perturbadora e em todas as outras funcções cujo desenvolvimento é necessario, evitar as series infinitas ordenadas segundo as potencias da excentricidade e da inclinação.

«Evitar completamente o emprego de semelhantes series infinitas é a base do methodo que vou principiar a expôr [1]».

Mas o erro principal da demonstração, erro tão grosseiro que parece quasi impossivel ter sido commettido pelo insigne auctor da Mechanica-celeste, é um vicio logico, pelo qual, querendo demonstrar que os eixos maiores hão de ser constantemente inalteraveis, parte da hypothese que são muito pequenas as excentricidades e inclinações das orbitas, em quanto para demonstrar que as excentricidades e inclinações se hão de conservar sempre muito pequenas, se funda na constancia dos eixos maiores.

---

[1] Hansen, *Mémoire sur la determination des perturbations absolues.*

E, com effeito, examinando as equações

$$m\sqrt{a}.e^2 + m'\sqrt{a'}.e'^2 + m''\sqrt{a''}.e''^2 + \ldots = \text{const.}$$

$$m\sqrt{a}.\text{tang}.^2\varphi + m'\sqrt{a'}.\text{tang}^2\varphi' + m''\sqrt{a''}\,\text{tang}^2\varphi'' + \ldots = \text{const.}$$

d'onde foi deduzido este ultimo theorema, vê-se que elle só terá logar se as quantidades a, a', a''... forem constantes; em quanto para demonstrar que estas quantidades se conservarão sempre constantes lança mão do desenvolvimento em serie da funcção perturbadora R, o que só se póde fazer quando a serie em questão for convergente; isto é, quando as excentricidades e inclinações forem muito pequenas.

E vem a proposito notar que é preciso suppor para deduzir o theorema de que nos occupamos, que os radicaes $\sqrt{a}, \sqrt{a'}, \sqrt{a''}$, etc., são todos positivos; isto é, que os differentes corpos do systema se movem todos no mesmo sentido. Não tem portanto logar o theorema para a maioria dos corpos do nosso systema solar — os cometas — dos quaes uns têm movimento directo e outros movimento retrogrado.

E ainda quando esta hypothese fosse verdadeira, observa muito judiciosamente o illustre sabio, a quem fomos buscar a epigraphe que anteposémos a esta parte do nosso trabalho, ainda nesta hypothese, esta invariabilidade das excentricidades é que seria o principio da invariabilidade do eixo maior das orbitas, e por consequencia o principio primario da estabilidade de todo o systema, d'esta estabilidade que Laplace quer fazer derivar da invariabilidade do eixo maior das orbitas; porque é, com effeito, partindo da hypothese que as excentricidades ficarão sempre muito pequenas, que se conclue a invariabilidade dos eixos maiores.

III

Mostrámos, segundo nos parece, que são pouco admissiveis as hypotheses em que Laplace e Pontécoulant se fundaram para deduzir os theoremas relativos á estabilidade do nosso systema solar; demonstrámos, em seguida, que, ainda suppondo plausiveis aquellas hypotheses, os resultados a que chegaram não se podem considerar rigorosos, visto que a demonstração involve um circulo vicioso; e fizemos ver que, mesmo verdadeiros, não se podem applicar a grande parte dos corpos do systema ; podemos, portanto, concluir, sem receio de nos enganarmos, que se não podem considerar como verdadeiros os principios em que assentaram aquella importante theoria, e que se não póde prever qual será o estado do nosso systema solar em um futuro remoto.

FIM.

1880

MANSO-PRETO - DISSERTAÇÃO DE CONCURSO

MATHEMATICA