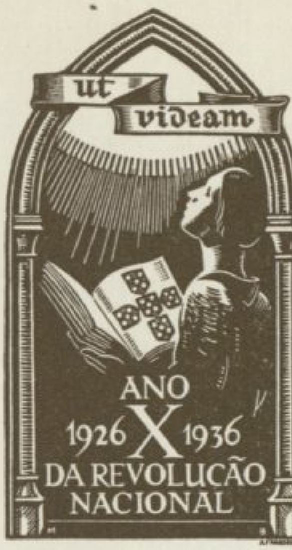
ut videam
ANO
1926 X 1936
DA REVOLUÇÃO
NACIONAL

ACCELERAÇÃO SECULAR

DO

MEDIO MOVIMENTO DA LUA

Em Junho de 1870

CONSIDERAÇÕES

SOBRE A

EQUAÇÃO SECULAR DO MEDIO MOVIMENTO DA LUA

POR

JOÃO JOSÉ D'ANTAS PEREIRA DE SOUTO RODRIGUES

> In treating a great problem of approximation experience shows that nothing is more easy than to neglect, as insignificant, considerations wich ultimately prove to be of the greatest importance.
>
> ADAMS — *On the sec. var.*

COIMBRA
IMPRENSA DA UNIVERSIDADE
1870

INTRODUCÇÃO

> Un des spectacles les plus dignes d'intéresser un œil philosophique, est sans contredit celui du développement de l'esprit humain et des diverses branches de ses connaissances.
>
> MONTUCLA — *Hist. des Mat.*

Progressos verdadeiramente prodigiosos se têm realisado nestes ultimos dois seculos em todos os ramos dos conhecimentos humanos.

D'entre as sciencias que maior desenvolvimento têm attingido, durante este periodo, occupa um dos primeiros logares a mechanica celeste.

Desde a publicação da obra immortal de Newton, tem ella de tal sorte progredido, que constitue hoje uma das producções mais grandiosas do genio do homem, tanto pela fecundidade de seus resultados, como pela perfeição de seus methodos.

Nada mais facil do que estabelecer as equações differenciaes do movimento de cada um dos corpos do systema planetario, considerando-os como pontos materiaes, e attendendo ás acções que exercem uns sobre os outros, segundo o principio da attracção universal. Na integração porém d'estas equações, da qual fica por esta fórma dependente a investigação das particularidades do movimento d'estes corpos, se encontra toda a difficuldade do problema.

A integração geral só poderá effectuar-se quando os astros considerados forem unicamente dois.

Mas, não se realisando este caso, para deduzir das equações differenciaes do movimento de todos os corpos do systema planetario as diversas consequencias que ellas encerram, é mister recorrer aos methodos d'integração por approximações successivas.

Felizmente as circumstancias da natureza prestam-se maravilhosamente ao emprego d'este modo d'integrar.

Cada um dos moveis acha-se sujeito á acção predominante d'um astro principal, que produz só por si as circumstancias mais salientes do movimento; sendo este apenas modificado, dentro d'estreitos limites, pela acção de todos os outros corpos do systema.

Representa o papel de astro principal para os planetas o sol, e para os satellites o seu planeta respectivo.

É pois natural considerar primeiramente o movimento dos planetas e dos satellites tal como resultaria só da acção do astro principal correspondente; e depois, partindo d'aqui, chegar por meio d'approximações successivas a uma solução satisfactoria das equações differenciaes.

As approximações que assim se effectuam, umas após outras, introduzem successivamente, nas expressões das coordenadas de cada um dos moveis, elementos novos, que se acham em forma de series de quantidades periodicas. Dá-se por terminada a operação quando se reconhece que as approximações seguintes não produzem termo algum com valor apreciavel.

Os differentes termos periodicos que vêm assim a apparecer nas expressões das coordenadas d'um planeta ou d'um satellite representam aquillo a que se chama *desegualdades*.

Claramente se vê que o numero d'approximações, necessarias para reconhecer todas as desegualdades sensiveis d'um corpo do systema solar, deve variar d'um para outro d'estes corpos.

Alguns haverá em taes circumstancias que os termos assim obtidos vão decrescendo rapidamente, de fórma que seja bastante attender, por exemplo, ás desegualdades que a primeira approximação introduz nas formulas do movimento elliptico.

Para outros, pelo contrario, serão muito menos convergentes as approximações, e será necessario empregar maior numero d'ellas, para que não venha a omittir-se alguma das desegualdades sensiveis que affectam suas coordenadas.

D'aqui resulta grande differença de difficuldades entre as theorias do movimento d'estes diversos corpos.

Superal-as, pouco a pouco, chegando a ponto de se acharem hoje quasi todas completamente resolvidas, tal é o grande progresso realisado nos ultimos dois seculos pelos geometras que se têm occupado da theoria do systema do mundo.

Neste prodigioso trabalho cabe grande parte de gloria ao illustre auctor da *Mechanica celeste*.

D'entre as theorias dos differentes corpos do systema solar, a da lua é sem duvida a mais espinhosa de todas. A grandeza da força perturbadora que emana do sol torna as approximações muito menos convergentes do que nas theorias dos planetas, e as desegualdades, que resultam da acção d'esta força, são tambem muito mais numerosas.

Por outra parte o conhecimento das leis do movimento do nosso satellite é de maxima importancia para a determinação das longitudes terrestres; e d'aqui vem que os geometras, desde o tempo de Newton, têm dirigido os seus esforços com perseverança para a theoria da lua.

Modernamente sobre tudo tem-se aperfeiçoado muito esta parte da mechanica celeste; e é este talvez o problema astronomico que nestes ultimos cincoenta annos mais se tem adiantado, tanto na parte theorica como nos meios empregados para augmentar o numero d'observações conducentes a elevar a theoria ao maximo gráu de perfeição.

Com este intuito se tem feito grande numero d'observações rigorosissimas, avantajando-se a todas as do observatorio de Greenwich, onde desde 1847 se usa d'um instrumento especialmente adaptado para este fim.

Não são porém de menos valor os progressos realisados pela theoria.

Newton nos *Principios mathematicos de Philosophia natural* indica apenas como a lei da attracção póde explicar algumas das desegualdades lunares que a observação por esse tempo já tinha revelado.

Pelo meado do seculo XVIII Clairaut, D'Alembert e Euler emprehenderam, quasi ao mesmo tempo, o estudo do movimento da lua; e acharam não só as desegualdades que já eram conhecidas, mas ainda outras inteiramente ignoradas.

Tobias Mayer, tomando por base os trabalhos d'Euler, levou a determinação theorica das desegualdades lunares a um gráu de perfeição, a que ainda se não tinha chegado; e depois, adoptando sómente a fórma das variações que a theoria lhe revelára, determinou-lhes os coefficientes de modo que satisfizessem, quanto possivel, ás observações.

Chegou assim a coordenar as primeiras taboas que serviram para a determinação das longitudes; e de tal importancia julgou este serviço o governo inglez, que concedeu á viuva d'aquelle astronomo parte do premio de 20:000 libras, que em 1714 havia destinado ao descobridor d'um methodo proprio para determinar as longitudes no mar com differença de meio grau.

Laplace depois aperfeiçoou consideravelmente a theoria da lua, não só levando as approximações mais longe que os seus predecessores, mas principalmente pelas suas importantes descobertas. Avulta entre estas a determinação da causa que produz a acceleração secular do medio movimento da lua [1].

---

[1] Perhaps a still more remarkable result, due to the same geometer, was the explanation of the secular inequality in the mean motion of the moon.

Grant — *History of Physical Astronomy*, Foi Halley, segundo parece, o primeiro que reconheceu a existencia d'esta desegualdade.

Uma obra do astronomo arabe Albatenio, em que vêm mencionados quatro eclipses observados em Arracta e Antiochia pelos fins do seculo IX, despertou a attenção do geometra inglez; e como a epocha d'aquellas observações coincidia proximamente com o meio do tempo decorrido desde Ptolomeu, o qual tambem dá noticia de phenomenos da mesma natureza, eram ellas muito proprias para revelar a permanencia ou inconstancia do valor do medio movimento da lua durante aquelle periodo.

Halley pela discussão dos eclipses referidos por Ptolomeu e Albatenio, e d'aquelles que tinham sido observados no seu tempo, reconheceu que este medio movimento se tem accelerado, sem que podesse determinar a grandeza d'esta variação. Pelo menos assim o affirma Newton muito expressamente na 2.ª edição dos *Principios de Philosophia natural* [1].

Entretanto nas publicações de Halley não se encontra claramente registada esta descoberta: o unico vestigio que d'ella apparece acha-se no fim d'uma memoria sobre a cidade de Palmyra [2], impressa nas *Philosophical Transa-*

---

[1] Et collatis quidem observationibus eclipsium Babylonicis, cum iis Albategnii et cum hodiernis, Halleius noster motum medium lunæ paulatim accelerari primus omnium quod sciam deprehendit.

Newton — *Principia Phil. Nat.*

[2] *Some account of the ancient state of the city of Palmyra.*

ctions de 1685, e na qual o illustre astronomo se exprime da maneira seguinte: «And if any curious traveller or merchant residing there, would please to observe, with due care, the phases of the moon's eclipses at Bagdat, Aleppo and Alexandria, thereby to determine their magnitudes, they could not do the science of astronomy a greater service: for in and near these places were made all the observations wereby the midle motions of the sun and moon are limited. And I could then pronounce in what proportion the moon's motion does accelerate; wich that it does, I think I can demonstrate, and shall (god willing) one day make it appear to the public.»

A descoberta de Halley foi confirmada depois por Dunthorne, Mayer e outros; e desde então começaram as investigações dos geometras sobre a causa que produz a equação secular da lua.

Lembrou primeiro explical-a pela influencia d'um meio resistente; e Bossut, em uma memoria premiada pela academia das sciencias de Paris em 1762, mostrou que esta influencia se manifestaria principalmente pela acceleração dos medios movimentos; sendo este effeito muito mais sensivel no movimento da lua do que no dos planetas.

Antes porém de recorrer a uma hypothese, que nenhum facto astronomico havia ainda indicado, era conveniente examinar se o phenomeno poderia ser explicado unicamente pelo principio da attracção universal.

Lagrange tentou resolver este problema; mas, tendo em vão procurado a causa da equação secular da lua, conclue affirmando que não é possivel explicar o phenomeno só por meio da lei de Newton [1].

Era pois desconhecida ainda a causa da equação secular da lua, e tinha-se já pensado que seria necessario modificar neste ponto a lei da attracção universal, ou mesmo que não existiria aquella desegualdade [2], quando Laplace reconheceu que a variação secular da excentricidade da orbita de Jupiter produz equações seculares nos medios movimentos de seus satellites.

Applicando immediatamente este resultado á lua, achou que a variação secular da excentricidade da orbita terrestre produz no medio movimento d'aquelle astro uma equação secular; e calculando seu valor até os termos de primeira ordem, achou que coincidia muito proximamente com o que se tinha deduzido das observações.

Assim se desvaneceram as apprehensões que o phenomeno descoberto por Halley tinha suscitado no animo dos astronomos, a respeito da absoluta verdade da theoria da

---

[1] Puis donc que l'équation séculaire de la Lune, telle que les Tables de Mayer la donnent, ne peut être l'effet de la non-sphéricité de la Terre, ni de celle de la Lune, ni de l'action des autres planètes sur la Lune, et par conséquent *ne saurait être expliquée par le secours de la gravitation seule*, etc.

Lagrange — *Recueil des Savants étrangers, tom. VII.*

[2] Quelques-uns avaient pris le parti de rejeter son équation séculaire.

Laplace — *Syst. du Monde, liv. IV, chap. V.*

gravitação. Caso identico tinha succedido pouco antes com a determinação do movimento do perigêo da orbita lunar.

A descoberta de Laplace, communicada á academia das sciencias de Paris em 19 de novembro de 1787, causou profunda sensação no mundo scientifico.

Apezar de todos estes progressos, a theoria da lua estava ainda longe da perfeição desejada[1]; entretanto que as taboas lunares, formadas segundo o methodo de Mayer, se haviam successivamente aperfeiçoado, a ponto que as de Burckhardt, publicadas em 1812, davam já exactidão sufficiente para as exigencias da astronomia naquelle tempo.

Era pois necessario empregar novos esforços para elevar a theoria ao mesmo gráu de precisão a que haviam chegado as taboas.

Foi com este fim que a academia das sciencias de Paris, por proposta de Laplace, escolheu para objecto dos trabalhos dos concorrentes ao premio que havia de conferir em 1820, a formação, por meio da theoria sómente, de taboas lunares tão exactas como as que haviam sido coordenadas por meio da theoria e das observações conjunctamente.

O premio foi conferido a duas memorias, uma de Damoiseau, outra de Plana e Carlini.

A primeira foi impressa em o tomo III do *Recueil des Sa-*

[1] L'erreur des Tables formées d'après la théorie que je présente dans ce livre ne s'élèverait à cent secondes que dans des cas fort rares.

Laplace — *Mech. Cel. liv. VII.*

vants étrangers: a segunda não veiu a lume, mas pouco tempo depois Plana publicou uma obra consideravel, sobre a theoria do movimento da lua, que nada mais é do que o desenvolvimento da memoria que havia escripto em collaboração com Carlini.

Em ambos estes trabalhos vão mui longe as approximações, e são determinadas as desegualdades lunares com o rigor exigido pelo programma da academia.

Entretanto algumas pequenas discordancias havia entre os resultados de Damoiseau e os de Plana; e tanto bastava para que se julgasse necessario verificar seus calculos, e examinar se teriam attendido a todas as quantidades que deviam tomar em consideração.

Por isso a publicação dos notaveis trabalhos d'estes dois geometras foi como que o signal da lucta; e as investigações sobre a theoria da lua activaram-se com força nova.

Lubbock, seguindo caminho diverso, tracta de verificar a exactidão das formulas de Plana; e publíca os resultados a que chegou em uma serie de opusculos impressos em 1832.

Poisson, em 1833, propõe que se applique á theoria da lua o celebre methodo da variação dos parametros; e serve-se d'elle para elucidar alguns pontos especiaes d'aquella theoria.

Hansen faz inteiramente de novo a theoria da lua, seguindo um methodo particular, que dá a conhecer na obra impressa em Gotha em 1838, com o titulo *Fundamenta nova investigationis orbitæ veræ quam luna perlustrat*.

Em 1846 publíca Mr. de Pontécoulant o quarto volume da *Théorie analytique du Système du Monde*, no qual tracta da mesma materia. Pontécoulant adopta o methodo de Lubbock, e serve-se das mesmas formulas de que havia usado na theoria dos planetas[1].

Em todos estes trabalhos se procurou determinar o valor theorico da equação secular da lua; e posto que não houvesse perfeito accôrdo entre as differentes determinações d'esta quantidade, parecia entretanto que pequena incerteza poderia haver sobre a sua verdadeira expressão.

Achavam-se as cousas neste estado quando em 1853 Mr. Adams publicou nas *Philosophical Transactions* uma memoria na qual accusava um grave erro no methodo de que Damoiseau e Plana se haviam servido para calcular a equação secular da lua.

Depois de dizer como aquelles dois geometras, a exemplo de Laplace, estabelecem o principio do seu methodo analytico, accrescenta: «But it will be observed, that this reasoning supposes that the area described by the moon in a given time is not permanently altered, or, in other words, that the tangential disturbing force produces no

---

[1] Mais ce qu'on devait avant tout désirer, il me semble, dans la théorie de la lune, c'était une méthode qui rattachât la détermination de toutes les inégalités, quelle que fût leur origine, à la même analyse. . . . . Nous nous sommes attaché à n'employer ici que les formules dont nous avions fait usage dans la théorie des planètes ; en sorte qu'il suffira de développer les formules renfermées dans le second livre, pour embrasser à la fois les mouvemens de translation et de rotation de tous les corps célestes.

Pontécoulant — *Th. Anal. du Syst. du Monde, t. IV.*

permanent effect. On examination, however, it will be found that this is not strictly true, and I will endeavour briefly to point out the manner in wich the inequalities of the moon's motion are modified by a gradual change of the central disturbing forces, so as to give rise to such an alteration of the areal velocity.»

E mais adiante continúa: «It is evident that the amount of the acceleration of the moon's mean motion will be directly affected by this alteration of areal velocity [1].

Modificando os calculos de Damoiseau e Plana no sentido indicado por estas palavras, Mr. Adams determina o valor da equação secular da lua; achando-o proximamente egual á metade d'aquelle que até ahi se lhe havia attribuido.

Em 1859 Mr. Delaunay apresentou á academia das sciencias de Paris os resultados de seus proprios trabalhos sobre este assumpto, os quaes, posto que obtidos por considerações muito differentes, concordavam admiravelmente com os de Mr. Adams.

Plana, Pontécoulant, Hansen, Delaunay e Adams publicaram successivamente diversos escriptos sobre esta materia, defendendo cada qual a sua opinião.

Começa aqui a discussão de que hei-de occupar-me.

Para terminar este rapido esboço historico resta-me só fallar no ultimo progresso realisado na theoria da lua. Re-

---

[1] Adams — *On the Sec. var. of the moon's mean motion* — Phil. Trans. 1853.

firo-me á publicação da valiosa obra de Mr. Delaunay, cujo primeiro tomo veiu a lume em 1860.

As principaes differenças entre o methodo seguido neste trabalho e os que foram adoptados naquelles que precedentemente se haviam publicado sobre o mesmo assumpto, são:

1.ª A longitude, raio vector, etc. dados immediatamente em termos dependentes do tempo, como haviam feito Lubbock, Poisson e Hansen, e ao contrario do systema adoptado por Damoiseau e Plana.

2.ª Os coefficientes de todas as desegualdades lunares conservando a fórma litteral ou algebrica, sendo funcções complexas das pequenas quantidades de que dependem, as quaes funcções não podem considerar-se senão debaixo da fórma de desenvolvimento em series. Neste ponto se affasta Mr. Delaunay da opinião de Hansen, que nos *Fundamenta nova* insiste na necessidade de exprimir aquelles coefficientes numericamente.

3.ª Simplificação dos processos de desenvolvimento analytico, substituindo operações longas e complicadas por outras em muito maior numero, mas mais curtas e muito mais faceis do que aquellas. Este methodo é inteiramente novo, e original de Delaunay [1].

As considerações que o determinaram a empregar o desenvolvimento em fórma algebrica dos coefficientes das

[1] Mais je me suis écarté de tous mes devanciers par la manière dont j'ai effectué les intégrations.

Delaunay — *Théor. du mouv. de la Lune.*

desegualdades lunares, acham-se largamente expendidas no volume XLVI dos *Comptes Rendus*.— Entre outras ha uma que me parece de grande pêso.

Qualquer que seja o methodo empregado para obter aquellas desegualdades, deverá haver perfeito accôrdo entre as diversas determinações dos factores numericos que entram em cada termo da desegualdade determinada em fórma analytica; de maneira que, se houver alguma discordancia entre os valores obtidos por diversos methodos para o coefficiente de uma desegualdade, deverá a differença provir de erro commettido em algum ou alguns d'aquelles termos.

Será pois muito mais facil reconhecer onde está o erro, que tenha de corrigir-se, quando tiverem de confrontar-se dois desenvolvimentos em fórma analytica, do que quando haja de fazer-se a comparação entre os valores numericos e approximados de todo o coefficiente. Por outras palavras, os resultados serão assim muito mais facilmente comparaveis.

Encontra-se um exemplo notavel do que fica dicto no que succedeu na confrontação das formulas obtidas por Mr. Adams e por Mr. Delaunay para exprimir a equação secular da lua.

Se ambos estes geometras não tivessem adoptado o desenvolvimento em fórma algebrica, não teria Mr. Adams reconhecido com tanta facilidade [1] que a discordancia entre os resultados provinha de haver escripto, por inadvertencia, um algarismo trocado no calculo do coefficiente de m^7.

[1] It has also been mentioned how a singular error made by Mr. Adams was detected and corrected.

Mr. Main — *On the Pres. St. of Contr.*—Monthly Notices 1859.

Já acima fica indicado que o presente escripto tem por objecto a apreciação dos methodos empregados para determinar aquella variação.

Tem sido assumpto de longa controversia esta parte melindrosa da theoria da lua; e é por certo mui difficil o papel de julgador num pleito em que contendem por uma parte Plana, Hansen e Pontécoulant, e pela outra Adams e Delaunay.

Estes geometras são, na verdade, os unicos talvez, no conceito do presidente da *Royal Astronomical Society,* em circumstancias de bem apreciar o valor de cada um dos methodos de que se tem usado para determinar a quantidade de que se tracta[1].

Não se lance todavia á conta de vaidade a escolha do assumpto.

Hesitei por muito tempo; e só me decidiu a leitura do relatorio apresentado á Sociedade astronomica de Londres por seu illustre presidente em 10 de junho de 1859, e que vem impresso nas *Monthly Notices.* Nelle vi que a opi-

---

[1] That wich renders the present controversy still more interesting is the fact that the astronomers named above are, with very few exceptions, the only *savans* in the world at the present time who have such complete mastery of the complicated and difficult analysis necessary for the solution of the problem as to enable them to judge of the merits or defects of the various processes employed, wich, from the discordant results, cannot all be correct.

Mr. Main — *Ibid.*

nião que havia formado sobre a materia não é desajudada d'auctoridade [1].

[1] At present we may say that, as far as we can judge from what is before us of the theoretical investigations of all concerned, Adams and Delaunay seem to have right on their side.

Mr. Main — *Ibid.*

CAPITULO PRIMEIRO

> ..... Elle nous a fait connaitre vingt-cinq autres éclipses observées par les arabes, et qui confirment l'accélération du moyen mouvement de la lune. Il suffit d'ailleurs, pour l'établir, de comparer les observations modernes à celles des Grecs et des Chaldéens.
>
> Laplace — *Syst. du Monde*, liv. IV, chap. V.

I

Os elementos do movimento elliptico d'um corpo do systema solar são, mais ou menos, perturbados pela acção dos outros corpos do systema.

Estas perturbações podem ser de *longo* ou de *curto periodo*.

Ás primeiras dá-se geralmente o nome de *seculares*. Esta designação porem não significa que ellas se accumulem indefinidamente e progridam sempre no mesmo sentido. São periodicas, como as segundas, mas sua evolução só se completa no fim de muitos seculos. As series ordenadas segundo as potencias do tempo, que de ordinario as representam, devem ser consideradas como simples desenvolvimento dos signaes periodicos.

Está neste caso a equação secular do medio movimento da lua.

Calculando por meio das longitudes e latitudes, deduzidas das ascensões rectas e declinações observadas, os arcos percorridos pela lua em tempos eguaes, reconhece-se que o movimento d'este astro na sua orbita não é uniforme.

Imagine-se um movel animado de velocidade constante, que, partindo do perigêo da orbita lunar ao mesmo tempo que o nosso satellite, volta ao mesmo ponto no fim do tempo periodico respectivo: o espaço percorrido por este astro ficticio, durante a unidade de tempo, representa o medio movimento da lua no mesmo intervallo.

Os antigos astronomos não possuiam instrumentos com que fizessem as observações necessarias para determinar esta quantidade; nem sabiam, ainda que os tivessem, fazer as correcções convenientes aos logares observados. Serviram-se por isso dos eclipses, suppondo que a opposição tem logar precisamente no instante medio do phenomeno.

Para ver como d'esta maneira se póde determinar a quantidade de que se tracta, observe-se que, passado um eclipse, a lua e o sol só poderão achar-se novamente em opposição por virtude do excesso do movimento do primeiro d'estes astros sobre o do segundo [1].

[1] Suppondo, por simplicidade, que o sol se move em volta da terra, e não esta em torno d'aquelle.

Seja *n* o numero de revoluções lunares effectuadas no intervallo dos dois eclipses; o nosso satellite descreverá neste tempo um arco egual a $n \times 360°$ mais o movimento do sol no mesmo tempo: quantidade perfeitamente conhecida. Dividindo a somma pelo numero de dias contidos naquelle intervallo, o quociente será o *medio movimento diurno* da lua.

Se o tempo que medeou entre os dois eclipses fôr muito consideravel, dividindo a mesma somma por o numero de seculos que decorreram, obtem-se o *medio movimento secular.*

Deve notar-se que, para este valor ser rigorosamente exacto, é necessario annullar o effeito da equação do centro; o que se conseguirá escolhendo dois eclipses apogêos, ou perigêos, ou um apogêo e outro perigêo.

Por este meio achou Ptolomeu o valor do medio movimento da lua em um dia egual a $13° 10' 34'' 58'''$. Não póde todavia reconhecer variação alguma nesta quantidade, que foi por todos considerada como constante, até á descoberta de Halley.

A equação secular da lua progride tão vagarosamente, que só póde revelar-se no medio movimento secular. Assim o medio movimento diurno calculado por Delambre[1] é egual a $13° 10' 35''$, proximamente o mesmo numero que achára Ptolomeu.

É pois necessario, para reconhecer a existencia d'esta

[1] Delambre — *Astr. Théor. et Prat.* chap. XXV.

desegualdade, recorrer a observações separadas por muitos seculos; e portanto forçoso será empregar as observações d'eclipses, visto que outras nos não legaram os astronomos da antiguidade. Pela comparação d'estas observações entre si e com as modernas se chega ao conhecimento d'aquella variação.

Entretanto no tempo de Halley as desegualdades lunares eram ainda muito pouco conhecidas, e havia pequeno numero d'observações que merecessem confiança; de sorte que o illustre astronomo só veiu no conhecimento do phenomeno por meio da discussão dos eclipses de Ptolomeu e dos de Albatenio. Estes ultimos têm sido abandonados por todos aquelles que posteriormente se tem occupado d'estas investigações, por não se conhecer com certeza a longitude do logar onde foram observados.

O methodo empregado nesta discussão consiste em considerar as antigas observações d'eclipses como outras tantas longitudes observadas. Conhecendo pelo exame das phases o instante em que a lua e o sol se acharam em opposição ou em conjuncção, calcula-se pelas taboas do sol a longitude d'este astro nesse instante. Deduz-se d'aqui muito facilmente a longitude verdadeira da lua na mesma epocha, e desembaraçando-a das desegualdades periodicas, que podem calcular-se exactamente por meio das taboas, obtem-se a sua longitude media.

Comparando depois as longitudes medias determinadas para differentes epochas por este processo, com aquellas que se deduzem das taboas para os mesmos instantes, vê-se que os resultados não são concordes; e reconhece-se que, para os harmonisar uns com outros, é necessario admittir que o medio movimento da lua se tem accelerado de seculo para seculo. Por este modo se chega tambem a determinar o valor numerico d'esta acceleração.

Modernamente tem-se procurado em outros phenomenos da mesma natureza um meio de verificar o valor assim determinado. Estes phenomenos são eclipses totaes do sol, mencionados mais ou menos vagamente pelos historiadores, e a que se dá o nome de *eclipses chronologicos*.

Sabe-se que a lua, no instante em que passa entre o sol e a terra, projecta para o lado opposto ao sol um cone de sombra, que umas vezes termina antes de ter chegado á superficie da terra, e outras, pelo contrario, tem o vertice ainda para alem d'esta superficie.

Neste ultimo caso ha eclipse total do sol para todos os logares situados dentro d'aquelle cone.

A sombra que a lua projecta sobre o globo, desloca-se pouco a pouco, e cobre successivamente os diversos pontos de uma zona muito limitada.

Assim pois, se a historia fizer menção bem positiva de um eclipse total do sol, observado em epocha e logar determinados, embora se não saiba a que horas teve logar a observação, calculando este eclipse por meio das taboas deverá achar-se, quando ellas forem exactas, que o phenomeno era visivel no sitio em que realmente foi visto.

Pelo contrario ainda que seja muito pequena a inexactidão das taboas, se ellas fixarem a conjuncção do sol e da lua um pouco antes ou um pouco depois do instante em que teve logar, o mesmo calculo levará a concluir que a sombra projectada pela lua sobre a terra passou a um ou outro lado do ponto indicado pela historia, e a uma distancia consideravel, por causa do arco descripto por este ponto em virtude da rotação da terra, no intervallo de tempo que separa o momento da conjuncção real d'aquelle que dão as taboas.

D'aqui resulta o conhecimento da correcção que deve fazer-se ao logar da lua dado por ellas, e ao mesmo tempo fica determinada a hora exacta da observação.

São quatro os eclipses chronologicos a que se tem podido applicar estas considerações: o eclipse de Thales, o de Agathocles, o de Larissa e o de Sticklastad.

Resumindo o que fica dicto, vê-se que o valor da equação secular da lua tem sido determinado, practicamente, por meio das antigas observações dos eclipses do sol e da lua; e para verificar o valor assim obtido, tem servido a discussão dos eclipses totaes do sol, de que faz menção a historia.

II

Dunthorne foi o primeiro que procurou determinar o valor numerico da acceleração do medio movimento da lua: para isso empregou as taboas que havia coordenado servindo-se das observações de Flamsteed, e as quaes nunca chegaram a ser publicadas.

Examinou primeiro as observações d'eclipses feitas por Tycho-Brahe, Walther, Regiomontano e Albatenio, das quaes nada pôde concluir [1]. As ultimas tinham o defeito que já se disse; as primeiras eram de data muito proxima á das observações de Flamsteed; as outras eram muito discordes entre si.

Recorreu então a dois eclipses do sol, observados no Cairo por Jbn Junis a 13 de dezembro de 977 e a 8 de junho de 978; e alem d'isso a outra observação similhante, feita por Theon em Alexandria a 16 de junho de 364.

Estes phenomenos devem dar indicações muito importantes sobre o valor do medio movimento da lua, porque vêm descriptos com muita minuciosidade, e alem d'isso porque se conhece com exactidão a longitude dos logares onde foram observados.

Depois de haver determinado os erros de suas taboas para as epochas d'estes tres eclipses, applicou as mesmas considerações a alguns dos antigos eclipses referidos por Ptolomeu, escolhendo, entre todos aquelles que vêm mencionados no Almagesto, tres que lhe pareceram em condições mais vantajosas.

Dunthorne reconheceu por esta fórma, com inteira evidencia, que o medio movimento secular da lua se tem accelerado desde os tempos mais remotos; e que os erros das taboas quasi se annullariam attribuindo a esta acceleração o valor de 10″ por seculo, a partir do anno de 1700.

[1] *Philosophical Transactions*, 1749.

Quasi pelo mesmo tempo tractou Mayer de completar, introduzindo-lhe a equação secular da lua, as taboas que havia formado, e que excediam muito em exactidão todas as que atè então tinham apparecido.

Servindo-se dos eclipses de Ptolomeu, de Ibn Junis e d'outros mais ou menos antigos, assim como dos muitos que haviam sido observados com todo o cuidado nos sessenta annos que precederam estes trabalhos, determinou conjunctamente o medio movimento da lua e a sua equação secular.

As taboas de Mayer comparadas com os eclipses d'aquelles sessenta annos não dão erro algum superior a 1′ em longitude; concordam com os eclipses de Ibn Junis com differença de um a dois minutos de tempo; e representam as observações mencionadas no Almagesto com approximação de meia hora pouco mais ou menos.

Este ultimo resultado não causará surpreza, quando se reflectir que os astronomos da antiguidade não attendiam a differenças de meia hora ao registarem os tempos d'estes phenomenos[1].

Nas taboas de Mayer a acceleração secular do medio movimento da lua entra com o valor de 6″,7 por seculo, a partir de 1700.

Em uma segunda edição d'estas taboas, publicada depois da morte de seu auctor, e feita pelo manuscripto dei-

---

[1] ..... neque istud alienum cuiquam videbitur, qui perpenderit veteres in adnotandis temporibus ejusmodi phænomenorum horæ unius trientem aud dimidium non admodum curavisse.

Mayer — *Tab.*

xado por este astronomo, eleva-se o valor d'aquella quantidade a 9″.

Ignora-se quaes foram as considerações que determinaram este augmento de 2″,3 no valor primeiramente adoptado.

Lalande occupou-se tambem d'estas investigações, e publicou os seus trabalhos em uma memoria que appareceu no volume das *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris* de 1757.

Serviu-se dos dois eclipses do sol observados por Ibn Junis, que considera como os mais decisivos, por serem as unicas observações antigas, das quaes se sabe com certeza a que horas foram feitas: o que levara tambem Mayer a empregal-as [1].

Lalande, depois de haver determinado o erro das taboas de Clairaut para a epocha de cada um d'aquelles dois phenomenos, considera o eclipse mais antigo de quantos menciona o Almagesto, e compara-o com as mesmas taboas.

Foi-lhe dictada esta escolha [2] pela consideração de que Ptolomeu, pouco escrupuloso em conservar intactas na sua

---

[1] Inter has duas reperi eclipses solares, quæ propter singulares circunstancias, altitudines nimirum solis in initio et fine observatas, unicæ sunt et antiquissimæ de quarum tempore tutos nos esse liceat; quæque igitur in astronomia lunari auro argentoque omni pretiosiores, meo quidem judicio, sunt habendæ.

Mayer — *Tab.*

[2] Choisissons la plus ancienne éclipse, qui a dû lui paraître la plus respectable, puisqu'elle était déjà la plus ancienne pour lui.

Lalande — *Mém. de l'Acad. des Sc.* — 1757.

obra as observações de que teve noticia, respeitaria provavelmente esta mais do que outra qualquer.

Em resultado d'aquellas duas comparações Lalande fixou a acceleração do medio movimento da lua em 9″,886 por seculo, começando em 1700.

Este valor é quasi identico ao que obtivera Dunthorne.

Lalande no fim da sua memoria falla tambem no eclipse do sol observado por Theon em Alexandria.

Confessa que a comparação d'este phenomeno com as taboas leva a crer que o valor da equação secular da lua deve ser muito mais pequeno; mas acrescenta que esta observação não póde competir com as duas observações arabes de que se havia servido, e que por tanto o valor d'aquella quantidade deve ser fixado em 10″ por seculo.

III

Resta fallar no outro meio que acima se apontou de determinar o valor da equação secular da lua, ou pelo menos de verificar os valores obtidos pelos meios já expostos.

Já se disse em que consiste o methodo; falta ver como tem sido applicado.

O primeiro eclipse chronologico de que ha noticia é aquelle que havia sido predicto por Thales de Mileto [1], segundo af-

[1] . . . . . succedeu que no meio do combate o dia se mudou re-

firma Herodoto, e que é mencionado muito vagamente por este historiador e por Plinio na sua *Historia natural*.

Este phenomeno foi comparado primeiro por Baily com as taboas de Bürg, e depois por Airy com as taboas de Damoiseau, um pouco modificadas.

D'este eclipse sabe-se apenas que foi visto na Asia Menor; ignora-se o logar preciso e a data, que os diversos historiadores fazem variar desde 583 até 626 antes de J. C.

Baily entendeu [1] que o unico eclipse, indicado pelas taboas, que póde identificar-se com o de Thales, é o de 30 de setembro de 610 antes de J. C. Oltmanns depois seguiu a mesma opinião [2].

Airy chegou a um resultado differente; achou[3] que o eclipse de Thales deve ser aquelle que as taboas indicam que devia ter-se realisado em 28 de maio de 585 antes de J. C.

Esta data está em harmonia com aquella que dá Plinio. Quanto ao eclipse que Baily e Oltmanns haviam tomado pelo de Thales, o Astronomo real d'Inglaterra achou pelos seus calculos que não podia ser visivel na Asia menor, devendo a sombra projectada pela lua passar ao norte do mar de Azof.

---

pentinamente em noute: Thales de Mileto havia predicto este phenomeno. . . . . .

Herodoto — Liv. 1.º, § 74.

[1] *Philosophical Transactions* — 1811.

[2] *Mém. de Berlin* — 1812 a 1813.

[3] *Philosophical Transactions* — 1853.

O eclipse chronologico que se segue immediatamente ao precedente é aquelle que foi visto por Agathocles, indo de Syracusa para a costa d'Africa.

Não ha duvida que o phenomeno observado foi um eclipse total. Diodoro de Sicilia, que o menciona, diz mesmo que a escuridão foi tal que se viam as estrellas perfeitamente.

De todo se ignora a posição em que se achava Agathocles, a derrota que seguiu, e a distancia a que estava do ponto de partida. Parecé que só póde contar-se com a data, que geralmente se suppõe ser a de 15 de agosto de 310 antes J. C.

Pouco seguros devem ser portanto os resultados da discussão d'este phenomeno.

O eclipse de Larissa, mencionado por Xenophonte tão obscuramente, que póde mesmo duvidar-se que o phenomeno observado fosse um eclipse total, parece, segundo os trabalhos de Airy [1], que se identifica com aquelle que as taboas indicam para 19 de maio de 557 antes de J. C.

Finalmente o eclipse de Sticklastad, referido por um historiador de Noruega em termos muito vagos, foi cuidadosamente estudado por Hansteen [2], que determinou com certeza a posição do campo de batalha onde foi visto.

Procurando fixar-lhe a data por meio das taboas da lua de Burckardt e das taboas do sol de Carlini, concluiu que o phenomeno devia ter sido visto em 31 de agosto de 1030.

---

[1] *Memoirs of the Royal Astr. Soc.*—vol. XXVI.

[2] *Astr. Nachr.*—1849.

O valor da acceleração secular da lua, adoptado nas taboas que servem para as investigações sobre estes eclipses, influe consideravelmente nos resultados.

Mr. Airy na sua memoria [1] observa que basta mudar $1''$ no valor d'esta quantidade para que se note uma differença de 10° no logar da terra onde passa a sombra da lua na epocha do eclipse de Thales.

Vê-se pois que havendo grande incerteza na identificação dos eclipses chronologicos com algum d'aquelles que as taboas indicam, em quanto os elementos em que ellas se fundam não estão completamente determinados, é impossivel, ou pelo menos muito difficil, obter só pela consideração d'estes phenomenos o valor da equação secular da lua.

Por isso em todas as investigações relativas aos eclipses chronologicos se adoptou para esta quantidade o valor que lhe suppõem as taboas de que se usa; limitando-se todo o trabalho a examinar se é ou não possivel, com este valor, identificar cada um dos eclipses historicos, de que se tracta, com algum d'aquelles cuja existencia as taboas indicam.

Se algumas vezes se tem chegado a procurar qual a correcção que deveria fazer-se áquella acceleração, a fim de chegar a uma identificação mais completa, é porque se admittia implicitamente que o valor empregado era já sufficientemente approximado, para que não podesse haver incerteza sobre quaes os eclipses theoricos que deviam considerar-se identicos com os observados.

[1] *Philosophical Transactions* — 1853.

Nas taboas de Damoiseau suppõe-se o valor da acceleração secular do medio movimento da lua egual a 10″,72.

Nas taboas de Hansen é a mesma quantidade elevada a 12″,18.

Mr. Baily, nas suas investigações sobre o eclipse de Thales, adoptou o valor de 10″.

Mr. Airy na memoria publicada em 1853 diz que empregou as taboas de Damoiseau com a mesma acceleração que este adoptara.

Na memoria publicada em 1857 sobre os eclipses de Agathocles, de Larissa e de Thales [1] reconheceu o mesmo astronomo que as taboas de Hansen representam perfeitamente estes tres phenomenos: e que, se fosse necessario modificar a acceleração que ellas suppõem, deveria esta quantidade ser augmentada e não diminuida.

Finalmente em um appendice a esta memoria, no qual considera especialmente os eclipses de Sticklastad e de Larissa, Mr. Airy achou que, para os tornar centraes nos logares precisamente onde foram observados, seria necessario elevar o valor da equação secular da lua a 12″,989 ou proximamente a 13″.

[1] *Memoirs of the Royal Astr. Soc.* — vol. XXVI.

CAPITULO SEGUNDO

L'équation séculaire de la lune est due à l'action du soleil sur ce satellite, combinée avec la variation séculaire de l'excentricité de l'orbe terrestre.

Laplace — *Syst. du Monde*, liv. iv, chap. v.

Viu-se no capitulo precedente que a discussão das observações dos eclipses antigos e modernos mostra incontestavelmente que o medio movimento da lua se accelera.

Estabelecida assim a existencia d'esta desegualdade, importava conhecer a causa que a produz, e determinar a sua expressão analytica.

Era porém tão arduo o problema que varios geometras tentaram em vão resolvel-o, e até o genio eminente de Lagrange teve de recuar perante a difficuldade.

Foi Laplace o primeiro, como já se disse na introducção, que logrou explicar o phenomeno. No *Système du Monde* expoz em linguagem ordinaria a causa que o produz e como ella actua; em uma memoria publicada em 1788 na

Histoire de l'Académie desenvolveu minuciosamente os calculos relativos a este problema, e depois reproduziu-os no livro VII da segunda parte da *Mechanica celeste.*

Considerando a primeira das equações differenciaes de que se serve no estudo do movimento da lua, achou a expressão de dt, em funcção da longitude v, egual á somma de termos periodicos, e de um termo não periodico. Este ultimo é dado por uma serie, cujo primeiro termo é a unidade, e que é multiplicada por

$$\frac{1}{n}\left(dv + \frac{3}{2}m^2e'^2dv + \ldots\right).$$

Aproveitando só o primeiro termo d'aquella serie e os dois primeiros do factor que a multiplica, e integrando, Laplace obteve a expressão

$$nt + \varepsilon = v + \frac{3}{2}m^2\int(e'^2 - E'^2)\,dv + S,$$

representando por S uma somma de termos periodicos.

Assim pois será necessario, para obter a parte não periodica do valor da longitude verdadeira da lua, junctar á longitude media $nt + \varepsilon$ a quantidade

$$-\frac{3}{2}m^2\int(e'^2 - E'^2)\,ndt:$$

sendo m o quociente da divisão do medio movimento do sol pelo da lua, e' a excentricidade variavel da orbita da terra, e E' o valor d'esta excentricidade na origem do tempo t.

Reduzindo aquella expressão a numeros, Laplace achou primeiro 11'',135 por seculo; depois, corrigindo alguns elementos do calculo, obteve mais tarde 10'',18.

A concordancia d'este numero com o valor que ultimamente se havia deduzido das observações determinou talvez o auctor da *Mechanica celeste* a não levar mais longe as approximações, considerando o problema completamente resolvido.

Plana depois calculou até ás quantidades de setima ordem a serie que multiplica $\int(e'^2 - E'^2)\,ndt$, da qual Laplace só havia aproveitado o primeiro termo $-\frac{3}{2}m^2$. Reduzindo a numeros os 28 termos d'esta serie achou para a equação secular da lua o valor 10'',58.

Damoiseau, calculando directamente esta desegualdade em fórma numerica, achou 10'',72.

Mais tarde Hansen, empregando um methodo que não deu a conhecer, obteve primeiro o valor 11'',93, que depois reduziu a 11'',47, para mais tarde o elevar nas suas taboas a 12'',18.

Estas diversas determinações não são bem comparaveis porque se fundam em differentes valores do integral

$$\int.(e'^2 - E'^2)\,ndt.$$

Assim Hansen adoptou, segundo parece, o valor — $1212'',5t^2$, sendo t expresso em seculos. Plana primeiro suppoz aquella expressão egual a — $1264'',1\,t^2$, e mais tarde, em uma memoria de 1856, attribuiu-lhe o valor — $1297'',7\,t^2$. Admittindo que o integral de que se tracta é egual a — $1270''t^2$, como parece mais provavel, acha-se que a equação secular da lua se torna

segundo a obra grande de Plana, em . . $10'',60$

segundo a sua memoria de 1856, em . $11'',24$

segundo a theoria de Hansen, em . . . . $12'',76$.

Portanto a primeira approximação, com que Laplace se tinha contentado, dava para esta acceleração um pouco mais de $10''$; e todos os trabalhos ulteriores, que ficam mencionados, concordavam em mostrar que as approximações seguintes augmentam alguma coisa este resultado. Só parecia incerto, mas dentro d'estreitos limites, o valor d'este augmento.

Estava a questão neste estado quando Mr. Adams em uma memoria publicada em 1853 affirmou que os trabalhos de Plana e Damoiseau carecem de uma correcção importante, cujo effeito é uma diminuição consideravel no valor theorico da equação secular da lua.

É mister entrar aqui em alguns desenvolvimentos, que sempre se tem procurado evitar, para ver em que consiste a correcção proposta pelo astronomo inglez.

Suppondo que a lua se move no plano da ecliptica e despresando os termos dependentes da parallaxe do sol, Mr. Adams estabelece as duas equações differenciaes do movimento da lua, que se acham no principio do n.° 6 da sua memoria [1].

Estas equações são exactamente as duas primeiras das equações (L) de Laplace [2], fazendo nellas $s=0$, e pondo por Q o seu valor [3], do qual se aproveita unicamente a parte que póde dar desegualdades independentes da parallaxe do sol.

Observa depois que, na solução ordinaria d'aquellas equações, u é expresso por meio de uma parte constante e de uma serie de termos dependentes dos cosenos dos multiplos de $2v - 2mv, cv - \varpi$, e $c'mv - \varpi'$; da mesma maneira t é expresso por uma parte proporcional a v, e por uma serie de termos dependentes dos senos dos mesmos angulos. As notações são as mesmas de que usa Laplace.

Seria esta a verdadeira fórma da solução, diz Mr. Adams, se a quantidade e' fosse constante. Mas sendo e' variavel é impossivel satisfazer ás equações differenciaes sem junctar á expressão de u uma serie de pequenos termos dependentes dos senos dos angulos, cujos cosenos já entram nella, e á de t termos similhantes dependentes dos cosenos dos mesmos angulos. Os coefficientes d'estes novos termos têm $\frac{de'}{dt}$ por factor.

---

[1] *Philosophical Transactions*, vol. 143, pag. 399.

[2] *Mécanique Céleste, liv. VII*, § 1.

[3] *Ibid.* § 2.

Com effeito as coordenadas do sol. que entram nas equações differenciaes de que se tracta, são dadas em funcção do tempo pelas formulas do movimento elliptico, nas quaes a excentricidade e' deve ser considerada como variavel. Representando por E' o valor de e' na origem do tempo, póde considerar-se, para um grande numero de seculos, a expressão d'esta ultima quantidade como sendo da fórma

$$E' + \frac{de'}{dt}\, t,$$

sendo E' e $\frac{de'}{dt}$ constantes, e a ultima d'estas quantidades tão pequena que póde desprezar-se o seu quadrado.

Ora a integração das equações differenciaes effectua-se por approximações successivas, ordenadas segundo as potencias crescentes da massa perturbadora. Em cada approximação substitue-se o tempo t pelo seu valor dado pela approximação precedente.

A parte dependente da massa perturbadora na primeira das equações differenciaes a que me estou referindo, póde ser posta debaixo da fórma de uma serie de termos, cuja expressão geral é

$$\left(A + B\frac{de'}{dt}\, v\right) . \cos(kv + k'),$$

sendo A, B, k e k' constantes. Para achar a quantidade que cada um d'estes termos introduz em v, basta integrar a equação

$$\frac{d^2u}{dv^2}+u+\left(A+B\frac{de'}{dt}v\right)\cos(kv+k')=0$$

o que dá

$$u=\begin{cases}\dfrac{1}{k^2-1}\left(A+B\dfrac{de'}{dt}v\right)\cos(kv+k')-\\[2ex] -\dfrac{2kB}{(k^2-1)^2}\dfrac{de'}{dt}\,sen\,(kv+k').\end{cases}$$

Da mesma fórma a segunda das equações differenciaes de que se serve Mr. Adams contem uma serie de termos taes como

$$\left(A+B\frac{de'}{dt}v\right)\cos(kv+k'),$$

cada um dos quaes introduz no valor de t a quantidade

$$\int\left(A+B\frac{de'}{dt}v\right)\cos(kv+k')\,dv=$$

$$=\frac{1}{k}\left(A+B\frac{de'}{dt}v\right)sen(kv+k')+\frac{B}{k^2}\frac{de'}{dt}\cos(kv+k').$$

Vê-se pois que se e' for constante, isto é $\frac{de'}{dt}=0$, haverá só termos em $sen(kv+k')$ no valor de u, e termos em $cos(kv+k')$ no valor de t; emquanto a variabilidade de e' introduz na primeira d'estas expressões termos em $sen(kv+k')$ e na segunda termos em $cos(kv+k')$, os quaes têm todos $\frac{de'}{dt}$ por factor.

Em seguida Mr. Adams accrescenta que a expressão do integral que entra nas equações differenciaes consiste, segundo a theoria de Damoiseau, em uma serie de termos periodicos, involvendo os cosenos dos angulos mencionados; e que, attendendo á existencia dos novos termos que deixou apontados, se lhe deve junctar uma serie de pequenos termos dependentes dos senos dos mesmos angulos, e ao mesmo tempo uma parte não periodica da fórma $\frac{1}{2}He'^2$, a qual ha de necessariamente alterar o valor da parte não periodica de $\frac{dt}{dv}$ em funcção de e'^2, do qual depende a acceleração secular.

Em resumo Mr. Adams diz claramente que nas investigações sobre a theoria da lua se fez a integração das equações differenciaes considerando e' como constante, e que assim deixou de se attender nos valores de u e de t a termos periodicos que têm $\frac{de'}{dt}$ por factor; alem d'isso que estes termos periodicos, desprezados sem motivo, introduzem no valor do integral que entra nas equações differenciaes um termo não periodico, que influe no valor da acceleração secular da lua.

Depois de ter assim mostrado em que eram defeituosos os calculos precedentemente feitos, Mr. Adams obteve os novos termos que têm de accrescentar-se á expressão ordinaria de u; e, despresando a excentricidade da orbita da lua, chega ás equações do numero 7 e do numero 8.

Para effectuar a operação indicada pelo integral que entra na primeira d'estas equações, para o que recorre ao methodo d'integração por partes, carece da derivada de e' em ordem a v, que tomou para variavel independente. Para obter esta derivada serve-se no n.° 9 dos principios relativos á mudança de variaveis, considerando e' como funcção do tempo t, e esta quantidade como funcção de v, dada pela segunda das equações fundamentaes de que se havia servido. Foi assim que estabeleceu a primeira das expressões d'este numero, fazendo

$$\frac{de'}{dv} = \frac{de'}{ndt}\frac{ndt}{dv}.$$

Nos numeros 11 e 12 Mr. Adams determina a relação entre as quantidades a e $a_{,}$, á qual chega no fim d'este ultimo paragrapho, levando sempre as approximações até ás quantidades da quarta ordem.

Finalmente nos numeros seguintes applica as mesmas considerações ao valor de t, e chega no numero 17 á expressão

$$0 = \frac{\delta n}{n}(1-m^2) + \left(\frac{3}{2}m^2 - \frac{3867}{64}m^4\right)\delta(e'^2)$$

d'onde

$$\frac{\delta n}{n} = -\left(\frac{3}{2}m^2 - \frac{3771}{64}m^4\right)\delta(e'^2).$$

E portanto designando por N o valor inicial de n e por E' o valor correspondente de e', a expressão precedente dá

$$n = N - \left(\frac{3}{2}m^2 - \frac{3771}{64}m^4\right)n(e'^2 - E'^2),$$

e

$$\int ndt = Nt + \varepsilon - \left(\frac{3}{2}m^2 - \frac{3771}{64}m^4\right)\int(e'^2 - E'^2)ndt.$$

Assim a expressão da longitude verdadeira em funcção da longitude media, contem a equação secular

$$-\left(\frac{3}{2}m^2 - \frac{3771}{64}m^4\right)\int(e'^2 - E'^2)ndt.$$

Plana tinha achado para os termos correspondentes na expressão da equação secular

$$-\left(\frac{3}{2}m^2 - \frac{2187}{128}m^4\right)\int(e'^2 - E'^2)ndt.$$

É sobre o coefficiente d'este termo em m^4 que recahe toda a discussão. Os termos seguintes, até onde têm chegado as approximações, são tambem um pouco differentes conforme se attende ou não, para os obter, aos termos supplementares que Adams sustenta que devem introduzir-se nas formulas de Plana. São porem de tão pouca influencia as correcções d'estes termos, que nesta discussão pouco haverá que dizer a respeito d'elles.

Expuz com mais alguma minuciosidade a memoria de Mr. Adams, não só pela clareza com que ella está escripta, mas sobre tudo por ser o primeiro trabalho em que apparece a ideia da inexactidão do valor theorico da equação secular da lua, tal como o acharam Laplace, Damoiseau e Plana.

No fim da sua memoria Mr. Adams explica como veiu a tractar d'este objecto, querendo supprir uma falta na theoria da lua de Mr. de Pontécoulant.

Este astronomo seguindo, em geral, o methodo de Lubbock, obtem directamente em funcção do tempo as expressões das coordenadas da lua, que na theoria de Plana se obtem, com esta fórma, por meio da reversão das series. Todavia com respeito á equação secular da lua Mr. de Pontécoulant adopta sem mais exame os resultados de Plana.

Fazendo os calculos necessarios para completar esta parte da theoria é que o astronomo inglez chegou á sua descoberta [1].

---

[1] On performing calculation requisite to complete this part of theory, I was surprised to find that the second terme of the expression of the secular acceleration thus obtained, not only differed totally in magnitude from the corresponding term given by Plana, but was even of a contrary sign. My previous researches, however,

Mr. Plana logo depois da publicação d'esta memoria tractou de examinar novamente a questão.

Em uma memoria impressa em 1856 reconheceu a inexactidão da sua theoria, e achou exactamente o mesmo coefficiente que Mr. Adams obtivera para o termo em m^4. Mas reconsiderando pouco depois, supprimiu uma porção dos novos termos que tinha obtido, e achou para o termo em m^4 um valor differente d'aquelle que lhe havia attribuido na sua obra, e do que achára Mr. Adams.

Depois d'isto, em 17 de janeiro de 1859, Mr. Delaunay communicou á academia das sciencias de Paris que havia calculado a equação secular da lua até o termo em m^4, e que obtivera para este termo exactamente o valor

$$+\frac{3771}{64}m^4.$$

Mr. Delaunay procedeu nesta determinação do seguinte modo:

Nas paginas 33 e seguintes do primeiro volume da sua obra intitulada *Théorie du mouvement de la Lune* acha-se

---

immediately led me to suspect what was the origin of this discordance, and when both processes were corrected by taking into account the new termes whose existence I had already recognized, I had the satisfaction of finding a perfect agreement between the results.

Adams—*On the Sec. var.*—Phil. Trans. 1853.

o desenvolvimento da funcção perturbadora R, o qual se obteve tomando por as coordenadas do sol seus valores dados pelas formulas do movimento elliptico.

Suppondo a excentricidade e' variavel com o tempo, representando a sua variação por $\delta e'$, e substituindo em R $e'+\delta e'$ em logar de e', a funcção perturbadora torna-se em

$$R+K\delta e',$$

sendo K uma funcção facil de determinar.

Mr. Delaunay applica á funcção completa $R+K\delta e'$ as diversas operações indicadas no capitulo V da sua obra, e que têm por fim fazer desapparecer um a um os diversos termos periodicos d'aquella funcção, e observa que para obter a variação secular da longitude da lua basta determinar a parte não periodica de $K\delta e'$.

Assim, obtendo a expressão de K, verifica que a 1.ª operação[1] assim como as operações 11 a 25 não produzem termos não periodicos; e que as operações 29 e seguintes tambem não dão termo algum d'esta especie, dentro dos limites da approximação exigida.

Sommando os factores numericos que nos diversos termos não periodicos, dados pelas restantes operações, multiplicam a quantidade $m'\dfrac{a^2}{a'^3}e'\dfrac{n'^2}{n^2}$, acha-se $-\dfrac{735}{64}$.

Fica assim determinada a parte não periodica de $R+K\delta e'$.

---

[1] *Théorie du Mouvement de la Lune*, vol. 1.º, pag. 263.

Substituindo esta expressão nas suas formulas da pagina 13, Mr. Delaunay acha para a longitude media da lua a expressão

$$\frac{d(g+h+l)}{dt}=n\left(1-\frac{n'^2}{n^2}\right)-\left(\frac{3}{2}\frac{n'^2}{n^2}-\frac{3675}{64}\frac{n'^4}{n^4}\right)n\delta(e'^2);$$

d'onde, fazendo

$$n\left(1-\frac{n'^2}{n^2}\right)=n_{\prime} \quad , \quad \frac{n'}{n_{\prime}}=m,$$

e aproveitando só os termos de quarta ordem, se deduz

$$\frac{d(g+h+l)}{dt}=n_{\prime}-\left(\frac{3}{2}m^2-\frac{3771}{64}m^4\right)n_{\prime}\delta(e'^2),$$

resultado absolutamente identico com o de Mr. Adams.

Em abril de 1859 este geometra publicou os valores que obtivera para os termos em m^5, m^6 e m^7; e fez ver que de todas as investigações que fizera a este respeito resultava para a acceleração da lua o valor de $5''{,}7$ por seculo [1].

Pouco tempo depois Mr. Delaunay apresentou á acade-

---

[1] *Monthly notices*, april 1859.

mia das sciencias a expressão completa que tinha achado para o coefficiente de $\int(e'^2-E'^2)ndt$, levando a approximação até os termos da oitava ordem: expressão que encerra 42 termos distinctos, entre os quaes se acham reproduzidos com os mesmos valores todos os que Mr. Adams havia determinado. De todos estes 42 termos resulta para a acceleração da lua o valor de $6'',11$ por seculo.

Mr. de Pontécoulant combateu energicamente estes numeros, dizendo que os seus proprios calculos haviam confirmado plenamente a exactidão dos termos em m^4 e m^5, que Mr. Plana obtivera. Mr. de Pontécoulant procurou a causa da discordancia que se manifesta entre as expressões achadas por este geometra e por Mr. Adams, e attribuiu-a á introducção dos novos termos nas equações differenciaes, na qual vê uma verdadeira petição de principio.

Deixando porém os escriptos de Mr. de Pontécoulant, que não é este o logar proprio para examinar, direi sómente que em abril de 1860 o auctor da *Théorie analytique* apresentou á academia das sciencias o resultado dos calculos que acabara de fazer para determinar o valor da equação secular da lua, partindo das equações differenciaes do movimento nas quaes se toma o tempo para variavel independente.

A formula a que chegou [1] differe da de Mr. Plana logo no segundo termo, isto é no termo em m^4, sobre o qual

[1] *Comptes Rendus*, t. 4, p. 737.

versa principalmente a questão. Em logar do valor

$$+\frac{2187}{128},$$

que o geometra de Turim havia attribuido a este coefficiente, e cuja exactidão Mr. de Pontécoulant em 1859 annunciára ter confirmado plenamente por seus proprios calculos, acha agora

$$+\frac{5337}{128}.$$

Reduzindo depois a sua formula a numeros, chega a uma acceleração de 7″,9886 por seculo, que considera tão approximada da verdade quanto podem permittil-o os aperfeiçoamentos da analyse.

Diversos geometras se entregaram então a novas investigações.

Mr. Plana em diversas cartas dirigidas a Mr. Lubbock, e que foram publicadas em 1860, começa combatendo os resultados de Mr. Adams, mas por fim declara que deve *considerar-se como uma verdade mathematica* que

$$-\frac{3}{2}m^2+\frac{3771}{64}m^4$$

são realmente os dois primeiros termos do coefficiente da equação secular do medio movimento da lua.

Mr. Lubbock, applicando a esta questão as formulas de que já se havia servido para o calculo de um grande numero de desegualdades lunares, chega a um resultado identico ao de Mr. Adams [1].

Mr. Cayley, seguindo um methodo differente de todos os que haviam sido empregados, calculou a equação secular da lua até os termos em m^4, e achou ainda o mesmo resultado numerico [2].

Finalmente Mr. Delaunay, empregando o methodo proposto por Poisson em 1833, e levando o calculo do coefficiente da equação secular até o termo em m^4, obteve uma nova confirmação do valor que Mr. Adams havia achado para este termo [3].

Designando por μ a somma das massas da terra e da lua, multiplicada pela potencia attractiva á unidade de distancia, por a o semi-eixo maior da orbita lunar, por e a sua excentricidade, por γ a inclinação, por α a longitude do nodo descendente, por ω a distancia angular do nodo ascendente ao perigêo, por $\xi + c$ a anomalia media, e por c esta anomalia na origem do tempo; e finalmente fazendo $n = \frac{\sqrt{\mu}}{a\sqrt{a}}$, as equações differenciaes propostas por Poisson [4] para deter-

[1] *Memoirs of the Royal Astr. Soc.*, vol. XXX.

[2] *Monthly notices*, vol. XXII, n.° 5 *bis*.

[3] *Connaissance des Temps*, 1862.

[4] *Mém. de l'Acad.* t. XIII.

minar as desegualdades lunares são as mesmas que vêm no principio da memoria de Mr. Delaunay. Este geometra juncta ainda a estas equações a seguinte

$$\frac{d\xi}{dt}=n.$$

A quantidade R que nellas entra representa a funcção perturbadora, que se suppõe referida unicamente á acção do sol.

Effectuando o desenvolvimento d'esta funcção em uma serie de cosenos dos multiplos dos angulos α, ω, $\xi+c$ e dos analogos α', ω', $\xi'+c'$ relativos ao sol, aproveitando unicamente entre os termos assim obtidos aquelles que podem influir no valor da acceleração secular, acha uma expressão que, por simplicidade, póde escrever-se assim:

$$R=-m'\frac{a^2}{a^3}\left(A+S+S'\right),$$

representando por S a somma de 3 termos da fórma

$$-A_1\cos\left[2\alpha+2\omega+2(\xi+c)+B_1\right]$$

e por S' a somma de 9 termos da fórma

$$-A'_1.e'\cos\left[\xi+c+i(\alpha+\omega+\xi+c)+B'_1\right].$$

As quantidades $A, A_1, A_2, A_3, A'_1, A'_2, \ldots\ldots A'_9$ são funcções de e', taes como

$$A=\frac{1}{2}+\frac{3}{8}e'^2,\ A_1=-\left(\frac{3}{4}-\frac{15}{8}e'^2\right), \text{ etc.},$$

e $B_1, B_2, B_3, B'_1, B'_2, \ldots. B'_9$ funcções de $\alpha', \omega', \xi'+c'$, constantes, e taes como, por exemplo,

$$B_1=-2(\alpha'+\omega'+\xi'+c'),$$

sendo $B'_1=0$.

As letras a' e e' representam para o sol quantidades analogas áquellas que a e e representam para a lua; m' é a massa do sol multiplicada pela potencia attractiva da materia á unidade de distancia.

A longitude media da lua é $\alpha+\omega+\xi+c$. Segundo as equações differenciaes de que se serve, Delaunay acha que ella deverá ser determinada por meio da equação

$$\frac{d(\alpha+\omega+\xi+c)}{dt}=n+\frac{2}{an}\frac{dR}{da}-\frac{e}{2a^2n}\frac{dR}{de}-\frac{\gamma}{2a^2n}\frac{dR}{d\gamma},$$

não aproveitando senão a primeira potencia da excentricidade e e da inclinação γ.

Substituindo no segundo membro d'esta equação em logar de R o seu desenvolvimento, e em logar dos elementos variaveis a, c, e, etc. seus valores em funcção do tempo ha de obter-se uma expressão formada d'uma parte não periodica e d'uma serie de termos periodicos. A primeira representa o medio movimento da lua, e encerra um termo variavel em virtude da variação secular de e'. Este termo variavel dá a acceleração secular do medio movimento da lua, que se tracta de determinar.

Em R ha termos de duas especies, alem do primeiro. Se R se reduzisse a um dos termos da primeira especie, achar-se-hia facilmente que os termos não periodicos da segunda ordem a respeito de A_1, que fazem parte do segundo membro da equação que dá a longitude media, se reduzem a

$$-\frac{55}{2}\frac{n'^4}{n^3}\frac{dA_1^2}{de'^2}\,\delta.(e'^2).$$

Egualmente se veria que os termos não periodicos da segunda ordem a respeito de A'_1, que resultariam dos termos da segunda especie, se reduzem a

$$-5\frac{n'^4}{n^3}\frac{1}{i+1}\frac{dA_1'^2}{de'^2}\,\delta(e'^2).$$

Pondo agora na primeira d'estas expressões, e naquellas que se obtêm mudando nella A_1 em A_2 e em A_3, em logar d'estas letras as quantidades que ellas representam; e da mesma maneira pondo na segunda, e nas que apparecem mudando nella successivamente A'_1 em A'_2, A'_3,...... A'_9, em logar d'estas letras as quantidades que ellas representam, vêm os diversos valores da segunda columna do quadro da pagina 67 do appendice ao citado volume do *Connaissance des Temps* de 1862.

Sommando todas estas quantidades acha-se o termo

$$+\frac{3675}{64}\frac{n'^4}{n^3}\delta(e'^2);$$

e junctando-o ao que dá directamente a parte não periodica do valor de R, vem

$$\frac{d(\alpha+\omega+\xi+c)}{dt}=n-\frac{n'^2}{n}-\left(\frac{3}{2}\frac{n'^2}{n}-\frac{3675}{64}\frac{n'^4}{n^3}\right)\delta(e'^2).$$

Finalmente fazendo

$$n-\frac{n'^2}{n}=n_{\prime}\,,\ \frac{n'}{n_{\prime}}=m,$$

acha-se

$$\frac{d(\alpha+\omega+\xi+c)}{dt}=n_{\prime}-\left(\frac{3}{2}m^2-\frac{3771}{64}m^4\right)n_{\prime}\delta(e'^2).$$

Vê-se portanto que determinando a equação secular da lua pelo methodo proposto por Poisson para o calculo das desegualdades lunares, se chega a um resultado identico áquelle que obtivera Mr. Adams, o qual portanto tem sido confirmado por cinco maneiras diversas.

CAPITULO TERCEIRO

> Le talent de celui qui s'occupe des questions de ce genre consiste précisément à démêler, parmi les termes excessivement nombreux dont chaque équation se composerait si l'on voulait l'écrire complètement, ceux qui doivent être conservés comme ayant de l'influence sur le résultat partiel qu'il se propose d'obtenir.
>
> DELAUNAY — *Mém. sur. l'éq. séc. de la Lune.*

I

Acaba de vêr-se nos dois capitulos precedentes que se tem attribuido á equação secular da lua valores muito differentes.

Pela discussão das observações antigas e modernas acham uns aquella quantidade egual a 10″; outros obtêm 6″,7; 9″; 10″,72; 11″,93; 11″,47; e até 12″,98 ou 13″ por seculo.

Pela reducção a numeros da quantidade que nas formulas da mechanica celeste representa a acceleração de que se tracta, acha-se, conforme o methodo adoptado no estudo d'esta questão, 10″,60; 11″,24; 12″,76; 5″,7 e 6″ por seculo.

Não admira a incerteza no valor deduzido das observações. Póde porem causar surpreza que a theoria não conduza a resultados mais certos, e que os seus methodos não se achem ao abrigo da discussão.

Considerando na extrema complicação das questões de que se occupa a mechanica celeste, comprehende-se que as cousas não se apresentem ao espirito com a clareza absoluta d'uma questão d'algebra elementar. Assim para resolver um problema, é mister procurar successivamente diversas partes da solução, de maneira que se chegue á solução completa pela reunião d'estas partes, que foram determinadas cada uma de per si.

É por isto que a maior parte das equações empregadas na mechanica celeste são incompletas. Emprega-se, de cada uma, só os termos que podem influir no resultado parcial que se procura, supprimindo todos os outros, muitos dos quaes podem talvez exercer na solução total maior influencia do que aquelles que foram considerados.

É muito difficil descriminar d'entre os termos d'uma equação completa todos aquelles que influem no resultado parcial a que se quer chegar. Póde pois haver discussão sobre a conservação ou rejeição de certos termos na investigação d'uma ou outra parte da solução geral, e os resultados serão necessariamente differentes nos dois casos.

É d'esta natureza a questão suscitada pela publicação da memoria de Mr. Adams sobre a equação secular da lua.

No capitulo precedente viu-se, que esta quantidade é expressa analyticamente por um integral multiplicado por uma serie ordenada segundo as potencias crescentes de *m*, sendo esta quantidade o quociente da divisão do medio movimento do sol pelo medio movimento da lua.

Tambem alli se disse, em geral, em que consistem os methodos que se têm empregado para obter aquella serie; que esta é differente para cada um d'elles; e que as differenças começam a apparecer no coefficiente do segundo termo, sendo nos seguintes muito pouco sensiveis.

É portanto sobre o valor d'este coefficiente que versa unicamente a questão.

O principal contradictor das ideias de Mr. Adams é Mr. de Pontécoulant. O auctor da *Théorie analytique* enviou, como já se disse, em maio de 1859 uma carta á academia das sciencias de Paris, na qual affirma — que havia reconhecido pelos seus calculos a exactidão dos termos em m^4 e m^5 das formulas de Mr. Plana,— que Mr. Adams introduziu nas suas formulas os novos termos, de que se fallou no capitulo precedente, por um verdadeiro vicio logico,— e finalmente que reduzindo-se, pelos calculos d'este astronomo, á metade proximamente o valor dado pelas formulas ordinarias ,este resultado, a ser verdadeiro, viria pôr em duvida aquillo que já se considerava como resolvido, e tenderia a obscurecer o merecimento d'uma das mais bellas descobertas de Laplace [1].

[1] Si ces résultats, dis-je, pouvaient être admis, ils remettraient en question ce que l'on était habitué à regarder comme résolu et

Poder-se-ha estranhar que em questões de tal natureza se recorresse a este ultimo argumento, que até vae reproduzido textualmente na nota para que não possa duvidar-se que foi adduzido nesta controversia. Nenhum dos resultados que antevê Mr. de Pontécoulant se realiza; mas, ainda que assim fosse, ninguem anteporia taes motivos ao reconhecimento da verdade.

Quanto ao calculo dos coefficientes dos termos em m^4 e m^5 nas formulas de Mr. Plana, este astronomo na sua memoria de 1856 já os tinha achado errados, posto que ainda então não concordasse completamente com os resultados de Mr. Adams, como fez mais tarde.

Alem d'isso Mr. de Pontécoulant mesmo se encarregou de refutar a sua asserção. Viu-se já, com effeito, que em um trabalho posterior este astronomo achou numeros muito differentes d'aquelles que primeiramente havia indicado.

Affirmando em 1860 que o medio movimento da lua é affectado d'uma acceleração secular de $7'',9886$, Mr. de Pontécoulant reconheceu implicitamente que se havia enganado quando affirmara a exactidão dos termos em m^4 e m^5 das formulas de Mr. Plana, e esqueceu que ia, conforme as suas proprias expressões, *remettre en question ce que l'on était habitué à regarder comme résolu*, e *jeter du doute sur le mérite de l'une des plus belles découvertes de l'illustre auteur de la Mécanique céleste.*

---

tendraient à jeter du doute sur le mérite de l'une des plus belles découvertes de l'illustre auteur de la *Mécanique céleste.*

Pontécoulant — *Comptes Rendus*, 1859.

Finalmente o vicio logico, que Mr. de Pontécoulant accusa na memoria de Mr. Adams, consiste no modo de considerar a variabilidade da excentricidade e'. Na carta a que me estou referindo diz o auctor da *Théorie analytique* que á introducção de novos termos na expressão do coefficiente da equação secular da lua se oppõem todos os principios adoptados na mechanica celeste; e promette desenvolver mais tarde as suas ideias a este respeito em uma memoria especial.

Pouco depois mandou á sociedade astronomica de Londres esta memoria, que foi publicada nas *Monthly notices* de 1859.

A ideia fundamental do auctor consiste em sustentar que se deve integrar as equações differenciaes do movimento da lua, considerando a excentricidade da orbita terrestre como constante; e imprimir nesta quantidade o seu caracter de variabilidade só depois de effectuadas as integrações.

Para o provar, mostra que a consideração da variabilidade da excentricidade e'

a) altera muito pouco a parte constante dos angulos das desegualdades lunares multiplicadas por esta quantidade,

b) não muda a fórma das series que determinam as coordenadas do movimento perturbado,

c) e não introduz termo algum constante a mais no desenvolvimento da equação differencial entre a longitude verdadeira e o tempo.

D'onde conclue que aquella consideração não altera o coefficiente da equação secular que se obteria considerando a excentricidade da orbita terrestre como constante: quer a variavel independente seja a longitude verdadeira, quer seja o tempo [1].

Mas Mr. de Pontécoulant chega a todas estas consequencias considerando sómente os termos de primeira ordem, emquanto os novos termos que Mr. Adams introduz nas suas formulas são da segunda.

Julgando ter assim demonstrado que estes novos termos não existem, Mr. de Pontécoulant continúa a sua memoria procurando mostrar que Mr. Adams os achou pelo emprego d'um methodo erroneo [2], o qual consiste no seguinte.

Mr. Adams, querendo mostrar directamente em que os calculos de Plana eram incompletos, tomou para variavel independente, como fizera este geometra, a longitude verdadeira da lua. As coordenadas do sol, que entram nas equações differenciaes do movimento da lua, são dadas em funcção do tempo t pelas formulas do movimento elliptico; podendo numa primeira approximação considerar-se, como já se disse, a excentricidade e' como composta de uma parte constante E' e de uma parte proporcional ao tempo.

Viu-se tambem que Mr. Adams, precisando da derivada de e' em ordem a v, considera o tempo t como funcção de v, e faz

$$\frac{de'}{dv} = \frac{ndt}{dv} \cdot \frac{de'}{ndt}:$$

---

[1] *Monthly notices*, vol. XIX.

[2] Mais le procédé qu'il emploie pour les faire naître pourrait

nisto vae o erro, segundo diz Mr. de Pontécoulant, que quer que se escreva

$$\frac{de'}{dv}=\frac{de'}{ndt},$$

isto é que a excentricidade e', quando se toma v para variavel independente, seja representada por uma funcção de v da mesma fórma que tem a funcção de t que representa aquella quantidade quando se toma o tempo para variavel independente.

Segundo Mr. Adams na expressão de $\frac{de'}{dv}$ a quantidade $\frac{de'}{ndt}$ vem multiplicada por um coefficiente em que entram diversos termos periodicos. É á consideração d'estes termos que Mr. de Pontécoulant chama *supercherie analytique*.

Depois d'isto o auctor da *Théorie analytique*, para fazer *toucher au doigt*, segundo as suas proprias expressões, o erro de Mr. Adams, suppõe a excentricidade e', passado um certo tempo t, representada pela formula:

$$E+q'nt+q''n^2t^2+\dots$$

e acha que, substituindo este valor na expressão de $\frac{de'}{dv}$ dada

---

s'appeler une véritable *supercherie analytique*, et il suffira de le rappeller ici pour en faire concevoir le vice.

Pontécoulant — *Monthly notices*, vol XIX.

pelo astronomo inglez e integrando, apparece [1]

$$e'=E'+q'\left[v-\frac{11}{8}m^2sen(2v-2mv)-\text{etc.}\right]$$

Depois de chegar a esta equação Mr. de Pontécoulant accrescenta: «C'est à dire, que l'excentricité de l'orbite terrestre, outre sa variation séculaire, serait soumise à toutes les inégalités du mouvement lunaire; c'est à dire, à des variations dont la période serait d'un mois, d'une année, etc., ce qui est contraire, quelque petitesse qu'on suppose au coefficient q' à tous les principes de la théorie.»

Parece incontestavel que, tendo a excentricidade e' a fórma, que até aqui se lhe tem supposto, $e'=E'+q'nt$, quando se quizer tomar v para variavel independente se deve substituir t pelo seu valor completo em v, e não pela sua parte não periodica $\frac{v}{n}$ sómente.

A expressão que resulta d'esta consideração, diz Mr. de Pontécoulant, é inadmissivel; porque, se o não fosse, seguir-se-hia que a excentricidade da orbita terrestre se acha sujeita a todas as desegualdades periodicas do movimento lunar.

E porque não hão de os termos periodicos, que naquella expressão apparecem dentro do parenthesis adiante do ter-

[1] *Monthly notices*, vol XIX, pag. 316.

mo v, destruir precisamente as partes periodicas d'esta quantidade v, de sorte que não fique senão a parte que varia proporcionalmente ao tempo?

É certo que a variação secular da excentricidade e', no gráu d'approximação exigido nestes calculos, é uniforme; esta excentricidade em tempos eguaes experimenta variações eguaes. Ora Mr. de Pontécoulant, fazendo simplesmente $e'=E'+q_1v$, isto é querendo que a variação secular de e' seja representada por um termo proporcional á longitude verdadeira v da lua, tira a esta variação o seu caracter d'uniformidade.

Portanto seria nas formulas d'este geometra, e não nas de Mr. Adams, que aquella variação se acharia sujeita a tantas desegualdades periodicas quantas são as do movimento da lua.

Depois d'esta memoria Mr. de Pontécoulant publicou ainda outras sobre o mesmo assumpto, ás quaes Mr. Adams respondeu. Não é possivel examinar aqui detalhadamente todos estes trabalhos. Fica apontado o principal.

Mr. Hansen entrou tambem nesta questão, e Mr. le Verrier na sessão de 5 de março de 1860 apresentou á academia das sciencias uma nota d'aquelle astronomo. Mas, como todos os seus calculos na theoria da lua se dirigem a obter directamente os valores numericos das desegualdades, não é possivel comparar os resultados a que chegou com aquelles que foram obtidos em fórma analytica, senão depois d'estes ultimos serem reduzidos a numeros. Esta operação tem o inconveniente de confundir os valores dos differentes termos que entram na expressão da mesma desegualdade; de sorte que mesmo quando Mr. Hansen tivesse publicado com minuciosidade todo o seu calculo da equação secular, não seria possivel, ainda assim, verificar o termo em m^4, sobre que versa a questão. Mas nem ao menos existe tal publicação, que seria muito para desejar que se fizesse.

II

Debaixo d'outro ponto de vista tem sido ainda combatido o valor que Mr. Adams obteve na sua memoria para a acceleração do medio movimento da lua, dizendo-se que está em contradicção com o resultado das observações.

Ora se assim é, não póde concluir-se d'aqui senão que a causa indicada por Laplace é insufficiente para explicar a totalidade do phenomeno. Convem todavia examinar se é ou não absolutamente exacta aquella asserção.

Viu-se no capitulo primeiro que são de duas especies bem distinctas os phenomenos, antigamente observados, que podem dar algumas indicações sobre o valor de que se tracta: são os eclipses do sol ou da lua dos quaes se conhece com certeza a data, e a hora d'uma phase bem determinada, e os eclipses totaes do sol que a historia menciona sem referir a hora e a data em que foram observados.

Os diversos eclipses de que ha noticia são tão pouco accordes entre si, que conforme se usa de todos, como fez

Mayer, ou só d'alguns, como fizeram Dunthorne e Lalande, chega-se a resultados inteiramente differentes. A ponto que Lagrange, tendo procurado em vão determinar a causa da equação secular da lua, chega atė a duvidar da existencia do phenomeno [1].

Nem admira que occorresse esta ideia ao elevado espirito do auctor da *Mechanica analytica.* Alem da discordancia dos resultados, as observações, que servem de base a estas discussões, merecem em geral pouca confiança. A maior parte d'ellas são referidas por Ptolomeu, cujas asserções a tal respeito são muito suspeitas.

Bem o reconheceu Mayer [2], assim como Lalande [3], que

---

[1] Je dis *si cette équation est réelle,* car il me parait que les preuves que l'on en a jusqu'à présent ne sont pas bien décisives, puisqu'elles sont fondées uniquement sur quelques observations faites dans des siècles fort éloignés et sur l'exactitude desquelles on ne peut guère compter.

Lagrange — *Réc. des Sav. étr.* t. VII.

[2] Præterea suspicio est, eaque non levis, Ptolomæum, a quo eclipses istas accepimus quarundam tempora nimis audacter immutasse, atque ad hypothesium suarum numeros adcommodasse. Cujus rei indicia profert Ism. Bullialdus in *Astr. philol.*, l. III, c. VII.

Mayer — *Tab.*

[3] Mais malheureusement c'est là le seul point que nous ayons avec quelque certitude dans toute l'antiquité, les observations qui ont passé par les mains de Ptolomé étant suspectes, comme nous l'avons remarqué d'après son propre aveu, et s'accordant d'ailleurs fort mal entre elles.

Lalande — *Mém. de l'Acad. des Sc.* 1757.

por esse motivo escolheu de todos os eclipses do Almagesto o mais antigo, suppondo, como se disse no capitulo primeiro, que este mereceria mais confiança pela razão que tambem alli se reproduziu, e que, na verdade, é pouco para convencer.

Voltando porem aos methodos por que practicamente tem sido determinada a equação secular da lua, vê-se que a discussão das observações da primeira especie, antes da descoberta de Laplace, havia dado para esta quantidade valores que oscillam entre $6'',7$ e $10''$. Alem d'isso o primeiro d'estes limites resulta da discussão que parece mais completa, e cujo auctor é dos mais habeis nestas investigações.

Depois d'isto achou Laplace o valor $11'',135$, deduzindo-o theoricamente da variação secular da excentricidade da orbita terrestre; e portanto era natural suppor que o valor de $10''$, achado por Dunthorne e Lalande, era aquelle que mais se approximava da verdade.

Mas que aconteceria se Laplace, em vez de se contentar com o primeiro termo da serie que dá o valor theorico da equação secular da lua, tivesse levado mais longe a approximação e obtido o valor $6'',11$ a que chegaram Adams e Delaunay?

Evidentemente não se julgaria mais longe da verdade, attendendo ao accordo quasi completo d'este numero com o de Mayer, do que quando obteve o valor $11'',135$, que excede em mais d'um segundo o maior de todos os que haviam sido deduzidos das observações.

Demais póde facilmente apreciar-se o accordo que cada um dos dois resultados theoricos estabelece com as antigas observações.

Viu-se que as taboas de Mayer, com a acceleração de 6″,7, representam os eclipses d'Ibn Junis com differença d'um a dois minutos de tempo, e os de Ptolomeu com differença de meia hora. Por outra parte a comparação, feita por Bouvard, das taboas em que a equação secular é de 11″,135 com as antigas observações dá para as epochas d'alguns dos eclipses de Ptolomeu differenças de mais d'uma hora, como póde ver-se pelo quadro em que se acham consignados os resultados que obteve Bouvard [1]. Os eclipses d'Ibn Junis são tambem muito melhor representados pelas taboas de Mayer.

Portanto a vantagem é toda evidentemente para o valor obtido por Mayer, ou, o que tanto vale, para o valor theorico 6″,11, que muito pouco differe d'elle.

Resta ver o que se póde concluir da consideração dos eclipses chronologicos.

Como já se disse, as indicações dadas a este respeito pela historia são muito vagas: nem sempre é bem averiguada a natureza do phenomeno, e a posição do logar onde foi observado é mais ou menos duvidosa.

Mas, pondo de parte estas causas d'incerteza, observe-se que, para achar as datas desconhecidas dos quatro eclipses de que se tracta, se procurou identificar cada um d'estes phenomenos com um d'aquelles que, segundo as taboas

---

[1] *Connaissance des Temps* — an VIII.

empregadas, deviam ter-se produzido, adoptando um determinado valor para a equação secular da lua. Viu-se com effeito que, para o eclipse de Thales, Baily e Oltmanns tomaram para valor d'esta quantidade $10''$; que Airy depois nas suas investigações sobre os eclipses de Thales e de Agatocles empregou o valor de $10'',72$ e mais tarde o de $12'',18$ nos seus trabalhos sobre os quatro eclipses chronologicos.

Mas pelo facto de haver chegado, por meio das taboas, a determinar eclipses que se identificam com aquelles de que a historia faz menção, não deve concluir-se que fica inteiramente confirmado o valor que se adoptou para a equação secular da lua.

Não se deve esquecer que este valor influe muito na determinação da data de cada um dos eclipses de que aqui se tracta. A minima alteração naquella quantidade póde dar em resultado uma differença de muitos annos na data do phenomeno, e fazer até que este possa identificar-se com outro eclipse differente daquelle com que primeiro fora comparado.

D'isto se encontrou um exemplo no que aconteceu com a discussão do eclipse de Thales, cuja data foi fixada por Baily e Oltmanns em 30 de setembro de 610 antes J. C., e mais tarde por Airy em 28 de maio de 585 antes J. C.

Portanto a identificação feita por Airy dos quatro eclipses chronologicos com phenomenos da mesma natureza indicados pelas taboas de Hansen não prova que o valor da equação secular da lua adoptado nestas taboas seja verdadeiro.

Para se poder affirmar que os quatro eclipses, de que se tracta, mostram que o valor de $12'',18$ empregado nas taboas de Hansen é mais exacto do que o valor de $6'',11$, proposto por Adams e Delaunay, seria necessario que se provasse que com este ultimo não é possivel conseguir uma identificação tão completa como aquella que se obtem com o primeiro. É o que ainda se não fez.

Deve acrescentar-se que a concordancia das taboas lunares de Hansen com as observações modernas tambem não justifica o valor da acceleração secular adoptado nellas; porquanto este elemento não tem influencia sensivel senão na comparação das taboas com as antigas observações.

taboas de Hansen é mais exacto do que o valor de 0",11, proposto por Adams e Delaunay, seria necessario que se provasse que com este ultimo não é possivel conseguir uma identificação tão completa como aquella que se obtem com o primeiro. É o que ainda se não fez.

Deve acrescentar-se que a concordancia das taboas lunares de Hansen com as observações modernas tambem não justifica o valor da acceleração secular adoptado nellas; porquanto este elemento não tem influencia sensivel senão na comparação das taboas com as antigas observações.

CONCLUSÃO

.... Adams and Delaunay seem to have right on their side.

Main — *On the pres. st. of contr.*

Acaba de vêr-se, pelos capitulos precedentes, como depois da descoberta de Halley tem sido estudada a equação secular do medio movimento da lua.

No primeiro disse-se quaes as diversas consequencias a que se tem chegado, relativamente a esta quantidade, por meio da consideração das antigas observações.

Dunthorne, servindo-se dos dois eclipses d'Ibn Junis, do de Theon e de tres extrahidos do Almagesto, achou o valor de 10″.

Mayer, considerando todos os eclipses de Ptolomeu, de Albatenio, d'Ibn Junis e os modernos de que tinha conhecimento, achou 6″,7.

Lalande, empregando sómente os eclipses d'Ibn Junis e o mais antigo dos que vêm no Almagesto, achou 9″,88. Substituindo os eclipses d'Ibn Junis pelo de Theon obteve um valor muito menor.

Finalmente Mayer, na segunda edição das suas taboas, augmentou o valor que primeiro adoptára, elevando-o a 9″.

No capitulo segundo disse-se como Laplace veiu a descobrir a causa da acceleração secular da lua, e o valor que lhe attribuiu. Este valor era muito proximo d'um d'aquelles que se havia deduzido directamente dos antigos eclipses, e por isso entendeu-se que a causa que Laplace acabava de descobrir explicava completamente os factos observados.

Viu-se tambem que Damoiseau e Plana repetiram depois os calculos, e modificaram, augmentando-o, o valor theorico da equação secular da lua. E finalmente que Adams, rectificando um erro de Damoiseau e Plana, reduziu este valor theorico a 5″,7; e que mais tarde, levando mais adiante as approximações, o elevou a 6″,11. Estes ultimos resultados foram confirmados de differentes maneiras, por Mr. Plana, por Mr. Lubbock, por Mr. Cayley e duas vezes por Mr. Delaunay, sendo uma d'estas pelo methodo adoptado na sua obra grande, e outra pelo methodo proposto por Poisson em 1833.

No capitulo terceiro acompanhou-se a discussão suscitada por estas differentes determinações, e procurou-se apreciar devidamente os argumentos apresentados contra o valor theorico que resulta dos calculos de Mr. Adams.

Resumindo, póde-se concluir do que fica dicto

a) que a acceleração do medio movimento da lua produzida pela causa descoberta por Laplace, é de 6″,11 por seculo, *b*) que as antigas observações d'eclipses não provam que o medio movimento da lua é affectado d'uma variação secular maior do que aquella que acaba d'indicar-se,

c) e finalmente que, quando mesmo assim não fosse, não se poderia d'aqui concluir senão que a causa descoberta por Laplace é insufficiente para explicar a totalidade do phenomeno.

Varias tentativas se tem feito para descobrir a causa, dado que ella exista, que concorre com a variação secular da excentricidade da orbita terrestre para produzir a acceleração do medio movimento da lua. Não entra no plano d'este trabalho dizer quaes sejam e examinal-as; nem por ora ha facto algum que auctorise a admittir a existencia d'uma tal causa, ou a suppor incompleta a descoberta do illustre auctor da *Mechanica celeste*.

FIM.

INDICE

Pag.

INTRODUCÇÃO 3

CAPITULO PRIMEIRO — EQUAÇÃO SECULAR DA LUA.

I Medio movimento da lua e sua acceleração secular. Como se determinam pelas observações 19

II Valores obtidos por differentes astronomos pela consideração dos eclipses antigos e modernos 24

III Verificação d'estes valores por meio dos eclipses chronologicos 28

CAPITULO SEGUNDO — DETERMINAÇÕES THEORICAS DO VALOR DA EQUAÇÃO SECULAR DA LUA............ 33

CAPITULO TERCEIRO — APRECIAÇÃO DAS RAZÕES ADDUZIDAS CONTRA AS FORMULAS DE MR. ADAMS.

I Argumentos tirados da theoria 55

II Argumentos fundados nos resultados das observações.......................... 64

CONCLUSÃO 71