5
8

DISSERTAÇÃO INAUGURAL

ESTUDO

SOBRE AS

CORDAS VIBRANTES

POR

Francisco Adolpho Manso-Preto

1873

COIMBRA
Imprensa da Universidade

5
12
5

DISSERTAÇÃO INAUGURAL

VIBRAÇÕES DE CORDAS

DISSERTAÇÃO INAUGURAL

PARA O ACTO

DE

CONCLUSÕES MAGNAS

NA

FACULDADE DE MATHEMATICA

DA

UNIVERSIDADE DE COIMBRA

POR

Francisco Adolpho Manso-Preto

COIMBRA
Imprensa da Universidade
1873

A

MEU PAE

«Même étant faite par moi, cet ouvrage est le tien.»

DUPATY.

THESE:

Das vibrações das cordas

La mécanique étudie les phenomènes naturels, en poussant les abstractions jusqu'aux derniers limites possibles: elle convertit en lignes et en nombres, et resout ses problèmes avec une netteté admirable.

MAYER.

Obrigados, pelo Decreto de 11 de Julho de 1871, a compôr e imprimir uma *Dissertação Inaugural*, para obter o gráu de Doutor, e devendo esta ter por objecto qualquer dos pontos sobre que versam as *mathematicas applicadas;* escolhemos para argumento d'ella o problema das *Cordas vibrantes;* assumpto notavel pela sua importancia na *Physica-Mathematica*, e por ser um dos que deu origem ao *Calculo ás differenças parciaes.*

Dividimos este estudo em duas partes distinctas; na primeira expomos alguns principios de *analyse mathematica*, necessarios para o desenvolvimento do problema que nos propomos resolver; na segunda apresentamos a resolução do problema como a sciencia hoje o considera.

Obrigados, pelo Decreto de 11 de Julho de 1871, a compor e imprimir uma *Dissertação Inaugural*, para obter o grão de Doutor, e devendo esta ter por objecto qualquer dos pontos sobre que versam as *mathematicas applicadas*; escolhemos para argumento d'ella o problema das *Cordas vibrantes*; assumpto notavel pela sua importancia na *Physica-Mathematica*, e por ser um dos que deu origem ao *Calculo ás differenças parciaes*.

Dividimos este estudo em duas partes distinctas; na primeira expomos alguns principios de analyse mathematica, necessarios para o desenvolvimento do problema que nos propomos resolver; na segunda apresentamos a resolução do problema como a sciencia hoje o considera.

PARTE PRIMEIRA

> L'analyse mathématique est la véritable base rationnelle du système entier de nos connaissances positives. Elle constitue la première et la plus parfaite de toutes les sciences fondamentales.
>
> A. Comte.

CAPITULO I

Integração das equações ás differenças parciaes em termos finitos

> Tous les problèmes de Géométrie ou l'on considère des surfaces, et tous ceux de Mécanique ou l'on considère des corps ou flexibles ou fluides, dépendent de la Théorie de ces équations. Les solutions qu'on peut trouver indépendament de cette Théorie sont nécessairement incomplètes ou hypothétiques ; et, si l'on est souvent obligé de se contenter de ses solutions limitées, c'est faute de pouvoir intégrer les équations aux différences partielles dans les quelles les solutions rigoureuses et générales sont renfermées.
>
> LAGRANGE.

Um dos ramos mais importantes do *Calculo Integral* é o que tem por objecto a *integração das equações ás differenças parciaes.*

Notavel pela sua difficuldade, torna-se muitissimo preciso, visto que os problemas de *Physica-mathematica,* os mais curiosos e os mais uteis, se resolvem, ordinariamente, por esta forma de equações. Taes são — o problema das cordas vibrantes, de que nos vamos occupar — os da propagação do som, do equilibrio e do movimento dos fluidos — o famoso problema das *Tautocronas* em um meio resistente, e tantos outros, cada qual mais vantajoso.

Fontaine, procurando a que condição deve satisfazer a differencial de uma funcção de duas variaveis para ser absolutamente integravel, foi conduzido a propôr, primeiro que ninguem, a notação adoptada para exprimir as differenciaes parciaes: mas onde, pela primeira vez, se encontra a investigação das relações que têem logar entre as differenciaes parciaes d'uma funcção de duas variaveis, é, numa memoria de *Nicolau Bernnoulli* sobre as trajectorias orthogonaes (*a*).

Em 1734, integrou *Euler* uma equação d'esta especie (*b*); porém este

(*a*) *Acta eruditorum,* anno 1720, ou *Oeuvres de J. Bernnoulli,* tomo 2.°, pag. 443.
(*b*) *Mem. de Petersbourg,* tomo 7.°

illustre mathematico desprezou completamente o seu novo calculo, até que *d'Alémbert* fez as primeiras applicações d'elle ás sciencias *physico-mathematicas.*

A gloria das applicações d'esta parte preciosa do calculo integral deve caber inteiramente a *d'Alémbert;* mas é incontestavel que a sua invenção pertence exclusivamente a *Euler*, o qual determinado, pelos trabalhos d'aquelle insigne geometra, a occupar-se novamente d'este ramo da *sciencia dos numeros*, que tinha totalmente esquecido; teve ainda a vantagem de apresentar os resultados de uma fórma muito mais simples, que tem sido depois adoptada por todos os mathematicos.

Assim *Euler* e *d'Alémbert* deram nascimento a um calculo inteiramente novo, e que é d'uma tal utilidade nas sciencias *physico-mathematicas*, que todos convêm que, até então, não se tinha entrevisto senão uma pequena parte da extensão de que, a maior parte das vezes, são susceptiveis as suas soluções.

1 Chamam-se *differenças parciaes* as que resultam da differenciação d'uma funcção de muitas variaveis, fazendo variar cada uma das variaveis á parte.

Sendo z uma funcção de x, y, u, ..., será

$$dz = pdx + qdy + rdu + \dots$$

a *differencial total* de z, pdx, qdy, rdu, ..., serão as differenças parciaes de z, de primeira ordem (a).

Costumam-se designar, consoante a notação proposta por *Fontaine*, os coefficientes p, q, r, ..., das differenças dx, dy, du, ..., respectivamente por

$$\frac{dz}{dx}, \quad \frac{dz}{dy}, \quad \frac{dz}{du}, \dots$$

de maneira que a expresão completa de dz será

$$\frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy + \frac{dz}{du}du + \dots$$

(a) Alguns auctores chamam *differenças parciaes* ás expressões $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$, $\frac{dz}{du}$, ...; porém esta denominação não é exacta, porque as formulas que se designam assim não exprimem a differença entre duas quantidades: a taes expressões deve-se dar o nome de *coefficientes parciaes.*

2 As equações em que, além das variaveis x, y, u, ..., e da funcção z, entram todos ou alguns dos coefficientes differenciaes de qualquer ordem, chamam-se *equações ás differenças parciaes* (*a*).

Devemos notar que uma funcção d'uma unica variavel só tem um coefficiente differencial de cada ordem, em quanto que uma funcção de duas variaveis tem dois coefficientes differenciaes de primeira ordem, trez de segunda e assim successivamente.

A ordem da equação é a do coefficiente da ordem mais elevada que nella entra.

3 Consideremos, em primeiro logar, que a equação ás differenças parciaes que pretendemos resolver não contem senão trez variaveis, z, x, y; das quaes a primeira é funcção das outras duas; isto é, consideremos, em primeiro logar, a equação

$$Pp + Qq = R,$$

em que P, Q e R são funcções dadas de x, y e z.

Multiplicando, membro a membro, esta equação pela de definição,

$$dz = pdx + qdy,$$

resulta

$$(Pp + Qq)\, dz = R\,(pdx + qdy),$$

ou

$$p\,(Pdz - Rdx) + q\,(Qdz - Rdy) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

que, dividida por q, só contem uma unica incognita $\frac{p}{q}$.

4 Supponhamos agora que é separadamente

$$\left.\begin{aligned} Pdz - Rdx &= 0 \\ Qdz - Rdy &= 0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

e que os *integraes completos* d'estas duas equações differenciaes de primeira ordem entre trez variaveis são

$$\alpha = M,\ \beta = N \ldots\ldots\ldots\ldots (3),$$

(*a*) Os philosophos do seculo passado substituiam, ordinariamente, a palavra *differencial* por *differença*, sub-entendendo a qualificação de infinitamente pequena. O uso prevaleceu, e ainda hoje ás *differenciaes parciaes* se dá a denominação de *differenças parciaes*, que é menos regular, porém mais euphonica.

sendo M, N funcções determinadas dos variaveis x, y, z, e α, β as duas *constantes arbitrarias* que os integraes completos devem conter.

Differenciando as equações (3), na hypothese de α e β serem variaveis, teremos

$$\left.\begin{aligned} d\alpha &= \frac{dM}{dz}dz + \frac{dM}{dx}dx + \frac{dM}{dy}dy \\ d\beta &= \frac{dN}{dz}dz + \frac{dN}{dx}dx + \frac{dN}{dy}dy \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (4).$$

Ora, como as equações (3) são os integraes completos de (2), quando suppunhamos α e β constantes arbitrarias, é claro que, suppondo em (4)

$$d\alpha = 0, d\beta = 0,$$

os resultados coincidirão com (2); isto é, substituindo em (4), depois de alli ter feito aquellas hypotheses, os valores de dx e dy tirados de (2)

$$dx = \frac{Pdz}{R}, \quad dy = \frac{Qdz}{R},$$

resultarão as equações identicas

$$\frac{dM}{dz} + \frac{dM}{dx}.\ \frac{P}{R} + \frac{dM}{dy}.\ \frac{Q}{R} = 0$$

$$\frac{dN}{dz} + \frac{dN}{dx}.\ \frac{P}{R} + \frac{dN}{dy}.\ \frac{Q}{R} = 0,$$

das quaes se deduzem

$$\frac{dM}{dz} = -\frac{dM}{dx}.\ \frac{P}{R} - \frac{dM}{dy}.\ \frac{Q}{R},$$

$$\frac{dN}{dz} = -\frac{dN}{dx}.\ \frac{P}{R} - \frac{dN}{dy}.\ \frac{Q}{R},$$

que, substituidas em (4), dão

$$d\alpha = \frac{1}{R}.\frac{dM}{dx}(Rdx - Pdz) + \frac{1}{R}.\frac{dM}{dy}(Rdy - Qdz)$$

$$d\beta = \frac{1}{R}.\frac{dN}{dx}(Rdx - Pdz) + \frac{1}{R}.\frac{dN}{dy}(Rdy - Qdz);$$

d'onde, finalmente,

$$\left.\begin{aligned} Pdz - Rdx &= \frac{R}{S}\left(\frac{dN}{dy}d\alpha - \frac{dM}{dy}d\beta\right) \\ Qdz - Rdy &= \frac{R}{S}\left(\frac{dM}{dx}d\beta - \frac{dN}{dx}d\alpha\right) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (5),$$

fazendo

$$\frac{dM}{dy}.\frac{dN}{dx} - \frac{dN}{dy}.\frac{dM}{dx} = S.$$

5 Substituindo em (1) os valores (5) de

$$Pdz - Rdx,\ Qdz - Rdy,$$

a equação que se pretende satisfazer tornar-se-á em

$$\left(p\frac{dN}{dy} - q\frac{dN}{dx}\right)d\alpha + \left(q\frac{dM}{dx} - p\frac{dM}{dy}\right)d\beta = 0,$$

ou em

$$d\alpha + \frac{q\dfrac{dM}{dx} - p\dfrac{dM}{dy}}{p\dfrac{dN}{dy} - q\dfrac{dN}{dx}}d\beta = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Como nesta equação só entram as differenças $d\alpha$, $d\beta$, para que ella subsista, é preciso que o coefficiente de $d\beta$ seja uma funcção de α e β;

quer dizer, é preciso que, quando substituirmos por x e y os seus valores tirados de (3), a quantidade z desappareça por si mesma.

Attendendo ao que acabamos de expôr, será sempre

$$\frac{q\dfrac{dM}{dx}-p\dfrac{dM}{dy}}{p\dfrac{dN}{dy}-q\dfrac{dN}{dx}}=f(\alpha,\beta),$$

sendo $f(\alpha,\beta)$ uma funcção qualquer; condição a que sempre se pode satisfazer, dispondo convenientemente da quantidade arbitraria $\frac{p}{q}$.

A equação (6) tornar-se-á por consequencia da forma

$$d\alpha+f(\alpha,\beta)\,d\beta=0,$$

a qual será sempre integravel, depois de multiplicada por um factor conveniente.

O seu integral será pois

$$F(\alpha,\beta)=0,$$

sendo $F(\alpha,\beta)$ uma funcção arbitraria, visto que $f(\alpha,\beta)$ tambem o é.

Attendendo ás equações (3) resultará, finalmente,

$$\varphi(M,N)=0;$$

equação que, sendo resolvida em ordem a z, dará o valor d'esta variavel em funcção das outras duas x e y, ficando arbitraria a funcção φ. (*a*).

(*a*) Póde acontecer que a composição de P, Q e R seja tal, que em $Pdz-Rdx$ só entrem as variaveis x e z, de que aquella expressão contém as differenciaes; e, do mesmo modo que em $Qdz-Rdy$ só entrem as variaveis y e z. Neste caso, chamando u e u' os factores que tornam, respectivamente, differenciaes exactas as expressões

$$Pdz-Rdx,\ Qdz-Rdy,$$

teremos

$$Pdz-Rdy=\frac{1}{u}\,dM,$$

$$Qdz-Rdy=\frac{1}{u'}\,dN;$$

6 O processo que temos seguido, mostra que, para resolver uma equação ás differenças parciaes lineares de primeira ordem da forma

$$Pp + Qq = R,$$

não temos mais que integrar as duas equações simultaneas a trez variaveis

$$Pdz - Rdx = 0,$$

$$Qdz - Rdy = 0;$$

reduzir os seus integraes completos á fórma

$$\alpha = M, \beta = N,$$

---

substituindo estes valores em (1), resulta

$$\frac{p}{q}.\frac{1}{u} dM + \frac{1}{u'} dN = 0,$$

cujo integral é

$$N = -\int \frac{p}{q}.\frac{u'}{u} dM.$$

Ora, para que o segundo membro seja integravel, é preciso que o coefficiente de dM seja funcção de M, isto é, que seja

$$-\frac{p}{q}.\frac{u'}{u} = \varphi'(M),$$

sendo φ' uma funcção arbitraria, condição a que sempre se póde satisfazer, attendendo á quantidade arbitraria $\frac{p}{q}$.

Teremos portanto,

$$N = \int \varphi'(M)\, dM = \varphi(M).$$

Logo, para integrarmos as equações ás differenças parciaes neste caso particular, não temos mais que integrar separadamente as equações

$$Pdz - Rdx = 0,\ Qdz - Rdy = 0,$$

e, designando por M o integral da primeira, e por N o da segunda, tomar

$$N = \varphi(M)$$

sendo φ uma funcção arbitraria.

em que M e N são funcções de x, y e z, e α e β as duas constantes arbitrarias introduzidas pelas integrações; e, finalmente, estabelecer uma relação qualquer entre M e N, isto é, tomar

$$\varphi(M, N) = 0,$$

designando pela caracteristica φ, uma funcção qualquer; esta equação será o integral completo da proposta.

7 Se a funcção dada contiver quatro variaveis, isto é, se fôr da forma

$$Pp + Qq + Rr = S,$$

em que P, Q, R e S são funcções dadas de u, x, y e z, raciocinaremos d'uma maneira similhante.

Integraremos pelos processos ordinarios as trez equações simultaneas a quatro variaveis

$$Pdz - Sdx = 0,$$
$$Qdz - Sdy = 0,$$
$$Rdz - Sdu = 0;$$

e reduziremos os seus trez integraes completos á forma

$$\alpha = M, \beta = N, \gamma = O,$$

em que M, N e O são funcções de u, x, y e z, e α, β e γ as trez constantes arbitrarias que os trez integraes completos devem conter.

Finalmente, estabeleceremos uma relação qualquer entre M, N e O, isto é, tomaremos

$$F(M, N, O) = 0,$$

em que F designa uma funcção arbitraria: esta equação, pelo que dissemos anteriormente, é o integral completo de proposta.

8 É facil applicar a theoria precedente ás equações ás differenças parciaes lineares de primeira ordem, contendo um numero qualquer de variaveis: d'onde se vê que a integração d'uma equação ás differenças parciaes lineares de primeira ordem, contendo $m+1$ variaveis, se reduz á integração de m equações ás differenças ordinarias de primeira ordem entre $m+1$ variaveis. Reduzir o calculo integral ás differenças parciaes ao das differenças totaes e ordinarias é tudo quanto se pode desejar a este respeito.

9 Designando, como do costume, $\frac{dz}{dx}$ e $\frac{dz}{dy}$ pelas caracteristicas p e q, a equação ás differenças parciaes de primeira ordem, não linear, a trez variaveis, será

$$F(x, y, z, p, q) = 0,$$

que, resolvida em ordem a q, dá

$$q = f(x, y, z, p)$$

Differenciando totalmente esta equação, teremos,

$$dq = Adp + Bdx + Cdy + Ddz,$$

ou, suppondo x, y e z independentes e p funcção d'ellas,

$$dq = \left(B + A\frac{dp}{dx}\right)dx + \left(C + A\frac{dp}{dy}\right)dy + \left(D + A\frac{dp}{dz}\right)dz.$$

Neste caso, a equação de definição

$$dz = pdx + qdy$$

não é identica; e, para que possa ser integravel, é preciso introduzir-lhe um certo factor (Francoeur, *Math. Puras*, tomo 4.°, n.° 253) e tem, além d'isso, de satisfazer á condição (Lacroix, n.° 714)

$$\frac{dq}{dx} - \frac{dp}{dy} + p\frac{dq}{dz} - q\frac{dp}{dz} = 0,$$

que, depois de feitas as substituições, se reduz a

$$A\frac{dp}{dx} - \frac{dp}{dy} + (pA - q)\frac{dp}{dz} + B + pD = 0 \,\ldots\ldots\ldots\, (7).$$

A equação não linear de primeira ordem fica assim reduzida a uma equação linear da mesma ordem, onde ha uma variavel a mais. Não é, porém, preciso resolver completamente esta equação; basta achar um valor de p que contenha uma constante arbitraria α, porque, substituindo este valor na equação

$$dz = pdx + qdy,$$

ella fica integravel.

Seja

$$V = \beta$$

o integral d'esta equação, sendo β uma constante arbitraria. Este integral completo será verdadeiro, ainda no caso em que supponhamos α variavel, comtanto que seja ao mesmo tempo

$$\beta = \varphi(\alpha), \frac{dV}{d\alpha} = \varphi'(\alpha) \ldots\ldots\ldots (8).$$

Para termos o integral da proposta, não temos, pois, mais do que eliminar α entre as duas equações (8). O integral será completo, visto que encerra a constante arbitraria β.

10 Teremos, da mesma maneira, o integral completo da equação proposta, sem recorrer á equação (7), todas as vezes que conhecermos um valor de z, que contenha duas constantes arbitrarias α e β.

Com effeito, neste caso teriamos

$$z = \psi(x, y, \alpha, \beta):$$

differenciando este valor, suppondo variaveis α e β, teremos

$$dz = pdx + qdy + Ad\alpha + Bd\beta,$$

sendo A e B os coefficientes differenciaes parciaes em ordem a α e β.

Ora, como este valor de dz deve satisfazer á equação proposta, tanto no caso de α e β serem constantes arbitrarias, como no caso em que se suppõem estas quantidades variaveis, é preciso que façamos

$$\beta = \varphi\alpha, \; A + B\varphi'\alpha = 0.$$

Para termos o integral completo com a constante arbitraria φ, basta eliminar as quantidades α e β, entre estas duas equações, e a funcção dada de x, y, z, α e β.

11 Applicando a theoria que expozemos nos numeros 3 a 8, á equação (1), vê-se que ella ficará resolvida quando forem conhecidos os integraes das trez equações simultaneas ás differenças ordinarias,

$$Adp + (B + pD)\,dx = 0,$$
$$dp - (B + pD)\,dy = 0,$$
$$(pA - q)\,dp + (B + pD)\,dz = 0.$$

Conclue-se d'aqui que a resolução das equações ás differenças parciaes, não lineares, de primeira ordem, se reduz á de trez equações ás differenças ordinarias a quatro variaveis. Além d'isso, não é preciso encontrar os trez integraes completos a que estas equações devem conduzir; basta ter um unico, segundo o que acima dissemos.

12 O processo de integração que acabamos de expôr, e que é devido a *Lagrange* (a), aliás muito engenhoso, não tem comtudo a generalidade que devia ter; visto que apenas se pode applicar ás equações a trez variaveis.

Deve-se a *M. Cauchy* (b) a descoberta de uma formula, da qual se deduz, á vontade, ou o integral geral d'uma equação ás derivadas parciaes de primeira ordem, ou um integral particular, contendo constantes arbitrarias, em numero igual ao das variaveis independentes.

Como porém o calculo de *M. Cauchy* é muito longo, e as equações de que temos de tractar neste trabalho não passam de primeira ordem, abstemo-'nos de o appresentar, enviando os leitores curiosos de estudar melhor uma materia tão importante, á obra de *M. Cauchy*, já citada, a paginas 261 e seguintes, ou ao *Traité de Calcul Infinitésimal de M. Cournot*, 2.° vol., onde este calculo se acha transcripto.

O processo de *M. Cauchy* tem ainda a vantagem de conduzir a resultados que são d'uma grande utilidade, tanto nas questões de *Mechanica*, como nas de *Physica-mathematica*; onde a funcção que se pretende encontrar deve não só satisfazer á equação differencial dada, mas ainda admittir um determinado valor inicial. D'esta maneira, é escusado assignar ás posições primitivas os valores das funcções arbitrarias; e o problema fica resolvido por uma só vez.

(a) *Memoires de l'Académie de Berlim*, ann. 1772 e 1774.

(b) *Exercices d'analyse et de physique-mathématique*, tomo 2.°

13 Chamando r, s e t os coefficientes differenciaes de segunda ordem de uma funcção de duas variaveis, isto é, fazendo

$$r=\frac{d^2z}{dx^2},\ s=\frac{d^2z}{dx\ dy},\ t=\frac{d^2z}{dz^2};$$

as equações de definição, para a integração das equações ás differenças parciaes de segunda ordem, serão

$$dz=pdx+qdy,$$

$$dp=rdx+sdy,\ dq=sdx+tdy,$$

$$d^2z=rdx^2+2sdx\,dy+tdy^2.$$

14 Consideremos, em primeiro logar, a equação linear geral de segunda ordem ás differenças parciaes

$$Ar+Bs+Ct=D\ldots\ldots\ldots(9)$$

em que A, B, C e D são funcções dadas de x, y, z, p e q. Substituindo èm (9) os valores de r e t, tirados das equações de definição,

$$r=\frac{dp-sdy}{dx},\ t=\frac{dq-sdx}{dy},$$

resulta

$$Adpdy+Cdqdx-Ddxdy=s\,(Ady^2-Bdxdy+Cdx^2)\ldots.(10),$$

equação em que fica a indeterminada s.

A difficuldade que se encontra em integrar esta equação provem de a não sabermos reduzir, com facilidade, á forma

$$dN=\varphi'(M)\,dM,$$

differencial exacta de todo o integral da forma

$$N=\varphi\,(M):$$

porém *Monge* em uma memoria apresentada á *Academia das Sciencias de Paris* em 1773, propoz, em analogia com o methodo seguido na integração das equações de primeira ordem, o processo seguinte, que depois foi adoptado, sem restricção, por todos os analystas.

15 Integremos, simultaneamente, as duas equações

$$\left.\begin{aligned} Ady^2 - Bdxdy + Cdx^2 = 0 \\ Adpdy + Cdqdx - Ddxdy = 0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (11).$$

Como na primeira d'estas equações apparecem as differenciaes elevadas ao segundo gráo, temos de a resolver em ordem a dy: chamando λ', λ'' as raizes da equação

$$A\lambda^2 - B\lambda + C = 0,$$

serão

$$dy = \lambda' dx$$
$$dy = \lambda'' dx,$$

as raizes da primeira das equações (11).

Substituindo, separadamente, estes valores na segunda d'aquellas equações, resultam os dois systemas d'equações

$$\left.\begin{aligned} dy - \lambda' dx = 0 \\ A\lambda' dp + Cdq - D\lambda' dx = 0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

e

$$\left.\begin{aligned} dy - \lambda'' dx = 0 \\ A\lambda'' dp + Cdq - D\lambda'' dx = 0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (13);$$

a que devemos juntar a equação de definição

$$dz = pdx + qdy.$$

Sejam

$$\alpha = M,\ \beta = N \ldots\ldots\ldots (14)$$

os integraes completos de qualquer d'estes systemas de equações; o integral primitivo da proposta será

$$N = \varphi(M) \ldots\ldots\ldots (15)$$

designando pela caracteristica φ uma funcção arbitraria.

16 Para demonstrarmos este theorema, differenciemos totalmente as equações (14); teremos, attendendo a que M e N são funcções de x, y, z, p e q,

$$\frac{dM}{dx}dx+\frac{dM}{dy}dy+\frac{dM}{dz}dz+\frac{dM}{dp}dp+\frac{dM}{dq}dq=0,$$

$$\frac{dN}{dx}dx+\frac{dN}{dy}dy+\frac{dN}{dz}dz+\frac{dN}{dp}dp+\frac{dN}{dq}dq=0,$$

Substituindo nestas equações, por dz, o seu valor,

$$dz=pdx+qdy,$$

e por dy e dq, os seus valores tirados das equações (12), resultarão as equações identicas

$$\left(\frac{dM}{dx}+\lambda'\frac{dM}{dy}+(p+q\lambda')\frac{dM}{dz}+\frac{D\lambda'}{C}.\frac{dM}{dq}\right)dx+\left(\frac{dM}{dp}-\frac{A\lambda'}{C}.\frac{dM}{dq}\right)dp=0,$$

$$\left(\frac{dN}{dx}+\lambda'\frac{dN}{dy}+(p+q\lambda')\frac{dN}{dz}+\frac{D\lambda'}{C}.\frac{dN}{dq}\right)dx+\left(\frac{dN}{dp}-\frac{A\lambda'}{C}.\frac{dN}{dq}\right)dp=0;$$

que se podem dividir nas quatro

$$\frac{dM}{dx}+\lambda'\frac{dM}{dy}+(p+q\lambda')\frac{dM}{dz}+\frac{D\lambda'}{C}.\frac{dM}{dq}=0,$$

$$\frac{dM}{dp}-\frac{A\lambda'}{C}.\frac{dM}{dq}=0$$

$$\frac{dN}{dx}+\lambda'\frac{dN}{dy}+(p+q\lambda')\frac{dN}{dz}+\frac{D\lambda'}{C}.\frac{dN}{dq}=0,$$

$$\frac{dN}{dp}-\frac{A\lambda'}{C}.\frac{dN}{dq}=0$$

em virtude da sua identidade.

Por outra parte, differenciando totalmente a equação

$$N = \varphi(M),$$

achamos

$$\frac{dN}{dx}dx + \frac{dN}{dy}dy + \frac{dN}{dz}dz + \frac{dN}{dp}dp + \frac{dN}{dq}dq =$$

$$= \varphi'(M)\left\{\frac{dM}{dx}dx + \frac{dM}{dy}dy + \frac{dM}{dz}dz + \frac{dM}{dp}dp + \frac{dM}{dq}dq\right\};$$

e, substituindo nesta equação, por $\frac{dM}{dx}, \frac{dM}{dp}, \frac{dN}{dx}, \frac{dN}{dp}$, os valores tirados das quatro equações antecedentes, e, por dz, o seu valor $pdx + qdy$, teremos

$$\left(\frac{dN}{dy} + q\frac{dN}{dz}\right)(dy - \lambda' dx) + \frac{1}{C}(A\lambda' dp + Cdq - D\lambda' dx)\frac{dN}{dq} =$$

$$= \varphi'(M)\left\{\left(\frac{dM}{dy} + q\frac{dM}{dz}\right)(dy - \lambda' dx) + \frac{1}{C}(A\lambda' dp + Cdq - D\lambda' dx)\frac{dM}{dq}\right\}$$

ou

$$A\lambda' dp + Cdq - D\lambda' dx = L(dy - \lambda' dx),$$

fazendo

$$\frac{\frac{dN}{dy} + q\frac{dN}{dz} - \varphi'(M)\left(\frac{dM}{dy} + q\frac{dM}{dz}\right)}{\frac{1}{C}\left(\frac{dN}{dq} - \varphi'(M)\frac{dM}{dq}\right)} = L.$$

Repondo, por dp e dq, os seus valores

$$dp = rdx + sdy$$

$$dq = sdx + tdy,$$

e, egualando a zero os coefficientes de dx e dy, visto que estas variaveis são independentes, teremos

$$A\lambda' r + Cs - D\lambda' = - L\lambda'$$

$$A\lambda' s + Ct = L,$$

ou, eliminando L entre estas duas equações,

$$A\lambda' r + A\lambda'^2 s + Cs + C\lambda' t - D\lambda' = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (16).$$

Finalmente, a equação

$$A\lambda'^2 - B\lambda' + C = 0$$

dá

$$A\lambda'^2 = B\lambda' - C,$$

valor que reduz (16) a

$$\lambda' (Ar + Bs + Ct - D) = 0,$$

que é a equação primitiva. Logo, como tinhamos annunciado, é

$$N = \varphi\,(M)$$

ou

o integral primitivo da proposta.

17 Ainda que este processo não tenha a generalidade que apresenta o que expozemos para a integração das equações de primeira ordem, é comtudo muito precioso pelo partido que d'elle se pode tirar, e pelas analogias que apresenta em todas as ordens.

A falta de generalidade d'este processo provêm de que a equação a trez variaveis, que se encontra depois de ter eliminado duas das cinco variaveis x, y, z, p e q entre qualquer dos systemas de equações (12) ou (13); e a equação

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

póde não satisfazer ás condições de integrabilidade (Lacroix — n.º 714): não devemos, comtudo, concluir d'aqui que, por essas condições não serem satisfeitas, a proposta não possa provir d'uma unica equação primitiva.

Assim, por exemplo, a equação

$$r - t - \frac{2p}{x} = 0,$$

sendo tractada pelo processo que acabamos de expôr, conduz ás duas

$$dy \mp dx = 0$$

$$dp \mp dq - \frac{2p\,dx}{x} = 0;$$

porém, quer se tomem os signaes superiores, quer os inferiores, as equações que resultam não satisfazem ás condições de integrabilidade; e comtudo aquella equação tem por integral em termos finitos

$$z = \varphi(y + x) + \psi(y - x) - x\,\{\varphi'(y + x) - \psi'(y - x)\},$$

como nos poderemos assegurar *à posteriori*: o integral tem toda a generalidade, visto conter as duas funcções arbitrarias φ e ψ.

18 O processo que expozemos, para a integração das equações ás differenças parciaes de segunda ordem, tem logar para a integração das equações ás differenças parciaes de todas as ordens: contentar-nos-hemos em o applicar ás equações de terceira ordem a tres variaveis.

Chamando α, β, γ e δ os coefficientes parciaes de terceira ordem, isto é, fazendo

$$\alpha = \frac{d^3z}{dx^3},\ \beta = \frac{d^3z}{dx^2dy},\ \gamma = \frac{d^3z}{dxdy^2},\ \delta = \frac{d^3z}{dy^3},$$

teremos para equações de definição, além das mencionadas no n.° **13**, mais as seguintes

$$dr = \alpha\,dx + \beta\,dy,\ ds = \beta\,dx + \gamma\,dy,\ dt = \gamma\,dx + \delta\,dy$$

e

$$d^3z = \alpha\,dx^3 + \beta\,dx^2dy + \gamma\,dx\,dy^2 + \delta\,dy^3.$$

19 Seja dada para integrar a equação

$$A\alpha + B\beta + C\gamma + D\delta = E,$$

em que A, B, C, D e E são funcções de x, y, z, p, q, r, s, t. Eliminando, entre esta equação e as de definição, tres das quatro quantidades α, β, γ e δ, as tres ultimas, por exemplo, resultará

$$D\,dt\,dy^2+(C\,dy^2-D\,dx\,dz)\,ds+(B\,dy^2-C\,dx\,dy+D\,dx^2)dr-E\,dy^3=$$

$$=-\alpha\,(A\,dy^3-B\,dy^2\,dx+C\,dy\,dx^2-D\,dx^3):$$

e, como esta equação é independente de α, que fica indeterminada, teremos ainda para integrar simultaneamente as duas equações

$$\left.\begin{array}{r} D\,dx^3-C\,dy\,dx^2+B\,dy^2dx-A\,dy^3=0 \\ D\,dt\,dy^2+(C\,dy^2-D\,dx\,dy)\,ds+(B\,dy^2-C\,dx\,dy+D\,dx^2)dr-E\,dy^3=0 \end{array}\right\}\ldots(\alpha).$$

Fazendo

$$dx=\lambda\,dy,$$

será λ raiz da equação

$$D\lambda^3-C\lambda^2+B\lambda-A=0:$$

e as equações (α) serão substituidas pelo seguinte systema de equações

$$dx-\lambda\,dy=0$$

$$D\,dt+(C-D\lambda)\,ds+(B-C\lambda+D\lambda^2)\,dr-E\,dy=0.$$

Sendo

$$M=a,\ N=b,$$

os integraes d'estas duas equações, será

$$N=\varphi(M)$$

o integral finito da equação proposta; theorema que se demonstra, seguindo exactamente a mesma marcha que seguimos para demonstrar o theorema analogo nas equações de segunda ordem.

20 Á medida que se vai tornando mais elevada a ordem das equações ás differenças parciaes, vai tambem augmentando a difficuldade de as integrar, principalmente, quando os coefficientes differenciaes que nellas entram passam do primeiro gráo. Poucos casos ha, no estado presente de analyse, em que se possa esperar um resultado satisfactorio, quando os coefficientes differenciaes passam do primeiro gráo já nas equações de segunda ordem, e muito menos nas ordens mais elevadas que esta.

Legendre, nas memorias da *Academia das Sciencias de Paris* para 1787, apresentou, para integrar as equações em que não entram senão os coefficientes differenciaes de segunda ordem, isto é, as equações da fórma

$$r = F(s, t) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17),$$

um processo, pelo qual as transformava em outras do primeiro gráo, sem coefficientes differenciaes de primeira ordem.

21 O processo de *Legendre* é o seguinte.

Integrando por partes as equações

$$dp = r dx + s dy,\; dq = s dx + t\, dy,$$

achamos

$$\left.\begin{aligned} p &= rx + sy - \int (x dr + y\, ds) \\ q &= sx + ty - \int (x ds + y\, dt) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18),$$

onde $x\,dr + y\,ds$ e $x\,ds + y\,dt$ devem ser differenciaes exactas.

Suppondo agora x e y funcções de s e t, e fazendo

$$x\,ds + y\,dt = dv,$$

teremos

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{dv}{ds} \\ y &= \frac{dv}{dt} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19).$$

Differenciando totalmente a equação dada (17), resulta

$$dr = S\, ds + T\, dt,$$

chamando S e T os coefficientes differenciaes, quando se faz variar separadamente s e t; o que reduz

$$x\,dr + y\,ds$$

a

$$(Sx + y)\,ds + Tx\,dt,$$

que deve satisfazer á condição

$$\frac{d(Sx+y)}{dt} = \frac{d(Tx)}{ds}$$

(Francoeur — n.º 252), visto ser uma differencial exacta.

Fazendo as operações indicadas, attendendo a que é

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dT}{ds},$$

e substituindo por $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dx}{ds}$ e $\frac{dy}{dt}$ os seus valores, teremos

$$\frac{d^2v}{dt^2} + S\frac{d^2v}{ds\,dt} - T\frac{d^2v}{ds^2} = 0,$$

equação do primeiro grão em ordem a v; visto que S e T só contêm s e t.

Determinado v d'esta maneira, as equações (19) dão-nos x e y expressos em t e s; e, finalmente, as equações (18) dão-nos

$$q = sx + ty - v,$$

$$p = rx + sy - \int(x\,dr + y\,dt);$$

que conjunctamente com

$$z = px + qy - \int(x\,dp + y\,dq)$$

resolvem o problema.

Devemos notar que as integrações indicadas ou se podem effectuar na realidade, ou, pelo menos, se reduzem á das funcções d'uma unica variavel.

22 No segundo tomo da *Correspondencia da Eschola Polytechnica de Paris,* encontra-se um processo devido a *Poisson,* para obter os integraes particulares das equações da fórma

$$P=(rt-s^2)\,\alpha\,Q,$$

em que P é funcção de p, q, r, s, e t, homogenea em relação ás tres ultimas; α um numero qualquer positivo, e Q uma funcção tal de x, y, z e dos coefficientes differenciaes de todas as ordens, que a hypothese

$$rt-s^2=0,$$

não a torna infinita.

Para a integrar, supponhamos, que é

$$rt-s^2=0;$$

neste caso será tambem

$$P=0.$$

O integral d'aquella equação é, applicando o methodo do n.° precedente

$$q=\varphi\,(p);$$

combinando este integral com as equações de definição, resulta muito facilmente

$$s=r\,\varphi'\,(p)$$

$$t=r\,\{\varphi'\,(p)\}^2,$$

valores que, substituidos em

$$P=0,$$

a transformam em uma equação entre p, $\varphi\,(p)$ e $\varphi'\,(p)$; isto é, entre p, q e $\frac{dq}{dp}$, que nos dá a relação entre estes dois coefficientes parciaes, da qual se deduz uma equação primitiva, contendo uma funcção arbitraria, e que é um integral particular da proposta.

[illegible], ou, pelo menos, se reduzem á das funcções d'uma unica variavel.

22. No segundo tomo da *Correspondencia da Eschola Polytechnica de Paris*, encontra-se um processo devido a *Poisson*, para obter os integraes particulares das equações da fórma

$$P = (rt - s^2)^n Q,$$

em que P é funcção de p, q, r, s, t, homogenea em relação ás tres ultimas; n um numero qualquer positivo, e Q uma funcção tal de x, y, z e dos coefficientes differenciaes de todas as ordens, que a hypothese

$$rt - s^2 = 0$$

não a torne infinita.

Para a integrar, supponhamos que

$$rt - s^2 = 0;$$

neste caso será tambem

$$P = 0.$$

O integral d'aquella equação é, applicando o methodo do n.º precedente

$$q = \varphi(p);$$

combinando este integral com as equações de definição, resulta muito facilmente

$$s = r\varphi'(p)$$

$$t = r[\varphi'(p)]^2,$$

valores que, substituidos em

$$P = 0,$$

a transformam em uma equação entre p, $\varphi(p)$ e $\varphi'(p)$; isto é, entre p, q e $\frac{dq}{dp}$, que nos dá a relação entre estes dois coefficientes parciaes, da qual se deduz uma equação primitiva, contendo uma funcção arbitraria, e que é um integral particular da proposta.

CAPITULO II

Da integração das equações ás differenças parciaes, por meio de series; e das funcções arbitrarias

> **S'il n'y a pas de méthode générale pour trouver l'intégrale complète des équations aux derivées partielles, exprimé par un nombre limité de termes, il n'en est plus de même de leur intégration au moyen des séries infinites. La marche suivie pour démontrer l'existence de cette intégrale, indique suffisamment ce qu'il faut faire pour trouver dans tous les cas cette série.**
>
> TIMMERMANS.

Desde que se principiou a fazer a applicação da integração das equações ás differenças parciaes á resolução dos problemas de *Physica-Mathematica*, se notou o pouco auxilio que, para fazer estas integrações, podiam prestar os processos conhecidos, expostos no Capitulo precedente: visto que, só em casos raros, era possivel obter os integraes primitivos em termos finitos.

Por outro lado, ainda mesmo que fosse possivel achar o integral debaixo de fórma finita, em todos os casos; o problema não ficaria resolvido, senão quando se tivessem determinado as funcções arbitrarias que entram na sua composição, segundo as condições particulares de cada questão; determinação bastante difficil, quando nessa funcção só entram quantidades reaes, e quasi impossivel, quando vêem complicadas com quantidades imaginarias.

Proveiu d'aqui a necessidade de recorrer a novos methodos, para achar os integraes das equações ás differenças parciaes propostas. Foi *Euler* o primeiro que se lembrou de lançar mão do desenvolvimento em serie, processo ordinario da analyse, para obter os integraes primitivos.

Porém, servindo-nos d'este meio para fazer a integração, devemos attender, em cada um dos casos particulares, ás condições a que a serie escolhida deve satisfazer: assim temos de examinar se ella tem toda a extensão que a equação ás differenças parciaes dada pode comportar, e observar se contém um numero sufficiente de funcções arbitrarias, para exprimir um integral completo. Não ha porém methodo geral a este respeito; o numero de funcções arbitrarias pode ser menor que a ordem da equação e algumas vezes até serem ellas substituidas por um numero infinito de constantes arbitrarias, sem que a serie deixe de ser o integral completo da proposta; o que torna este processo bem mais difficultoso do que parece á primeira vista.

Como não podemos examinar todos estes casos com a reflexão que a sua importancia demanda, visto que o plano d'este obra o não permitte, faremos apenas breves reflexões, tendentes a fazer comprehender bem o objecto d'este trabalho.

23 Primeiro que tudo vamos demonstrar que: *Uma equação differencial parcial da ordem* m *a* n *variaveis, admitte sempre um integral em serie finita ou infinita, completada em geral, com um numero* m *de funcções arbitrarias, comprehendendo cada uma* n—2 *variaveis.*

Para demonstrar este theorema fundamental, supponhamos que é dada a equação

$$F\left(x, y, z, \ldots, \frac{dz}{dx}, \ldots, \frac{d^2z}{dx^2}, \ldots, \frac{d^mz}{dx^m}\right)=0.$$

Chamando

$$(z)_\circ, \left(\frac{dz}{dx}\right)_\circ, \left(\frac{d^2z}{d^2x}\right)_\circ, \ldots, \left(\frac{d^mz}{dx^m}\right)_\circ,$$

aquillo em que se tornam

$$z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}, \ldots, \frac{d^mz}{dx^m},$$

quando se faz

$$x=0,$$

teremos, em geral, pelo theorema de *Maclaurin*

$$z=(z)_\circ+\frac{x}{1}.\left(\frac{dz}{dx}\right)_\circ+\frac{x^2}{1.2}.\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)_\circ+\frac{x^3}{1.2.3}.\left(\frac{d^3z}{dx^3}\right)_\circ+\ldots\ldots$$

Ora a equação proposta não póde determinar nem $(z)_0$ nem nenhum dos coefficientes differenciaes

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)_0, \left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right)_0, \ldots, \left(\frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}}\right)_0;$$

porém, quando estes coefficientes forem conhecidos, poderemos deduzir d'elles

$$\left(\frac{d^m z}{dx^m}\right)_0, \left(\frac{d^{m+1} z}{dx^{m+1}}\right)_0, \ldots$$

24 Com effeito, resolvendo a equação differencial dada em ordem a $\frac{d^m z}{dx^m}$, teremos

$$\frac{d^m z}{dx^m} = M,$$

e, fazendo neste valor

$$x = 0,$$

deduziremos $\left(\frac{d^m z}{dx^m}\right)_0$ em funcção de

$$(z)_0, \left(\frac{dz}{dx}\right)_0, \left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right)_0, \ldots, \left(\frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}}\right)_0,$$

e dos coefficientes differenciaes de z em ordem ás outras variaveis independentes.

Supponhamos, em geral, que é

$$\frac{d^{m+k} z}{dx^{m+k}} = N \ldots\ldots (1),$$

sendo N funcção de todos os coefficientes differenciaes de z em ordem a x, inferiores á ordem m.

Fazendo nesta equação

$$x = 0$$

resulta $\left(\frac{d^{m+k}z}{dx^{m+k}}\right)_0$ em funcção de

$$(z)_0, \left(\frac{dz}{dx}\right)_0, \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)_0, \ldots, \left(\frac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}}\right)_0,$$

e dos coefficientes differenciaes de z em ordem ás outras variaveis independentes, differentes de x.

Differenciando (1) em ordem a x, teremos

$$\frac{d^{m+k+1}z}{dx^{m+k+1}}=\frac{dN}{dx};$$

por meio d'esta differenciação, entrarão em $\frac{dN}{dx}$ alguns termos em que z se acha differenciado m vezes em ordem a x; porém estes termos podem-se fazer desapparecer, eliminando-os entre este valor, a equação (1) e as suas differenciaes em ordem ás outras variaveis independentes. (a)

Fazendo agora neste valor

$$x=0,$$

teremos $\left(\frac{d^{m+k+1}z}{dx^{m+k+1}}\right)_0$ em funcção de

$$(z)_0, \left(\frac{dz}{dx}\right)_0, \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)_0, \ldots, \left(\frac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}}\right)_0,$$

(a) Se por acaso $\frac{d^{m+k}z}{dx^{m+k}}$ se tornar infinito para

$$x=0,$$

fariamos

$$x=x'+h,$$

designando por x' uma nova variavel, e por h uma constante indeterminada; desenvolveriamos depois em ordem a x', e determinariamos, finalmente, a quantidade h, de modo que $\frac{d^{m+k}z}{dx^{m+k}}$ se não tornasse infinito para

$$x'=0.$$

e dos coefficientes differenciaes em ordem ás outras variaveis independentes.

Continuando a raciocinar do mesmo modo, chegaremos a concluir que a equação differencial proposta não determina as m quantidades

$$(z)_0,\ \left(\frac{dz}{dx}\right)_0,\ \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)_0,\ \ldots,\ \left(\frac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}}\right)_0;$$

mas indica tão sómente a maneira como os outros coefficientes differenciaes se podem deduzir d'estes.

Devemos, por consequencia, considerar estas quantidades como outras tantas funcções arbitrarias das $n-2$ variaveis independentes, differentes de x.

25 Tendo demonstrado, d'esta maneira, que toda a equação differencial parcial tem o seu integral expresso por meio de um desenvolvimento em serie; podemos lançar mão, consoante os casos que se nos apresentarem, do methodo mais commodo para obter estas series.

Um dos meios, que se têm applicado mais geralmente para obter o desenvolvimento em serie, consiste no emprego do *Methodo dos coefficientes indeterminados.*

Foi *Lagrange* o primeiro que na sua obra prima, *Mécanique Analytique*, usou d'este processo para encontrar a serie, que é o integral geral da equação de segunda ordem a quatro variaveis.

$$\frac{d^2z}{d^2x}+\frac{d^2z}{dy^2}+\frac{d^2z}{dt^2}=0$$

26 Seja, em geral,

$$L=0,$$

uma equação ás differenças parciaes da ordem m entre a funcção z e as variaveis independentes $t,\ x,\ y....$

Sendo θ uma funcção qualquer de $t,\ x,\ y,....$, podemos sempre suppor z desenvolvida segundo as potencias d'aquella quantidade; isto é, suppor

$$z=A\theta^a+B\theta^b+C\theta^c+\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

em que $A,\ B,\ C,....,\ a,\ b,\ c,...$, são coefficientes e expoentes indeterminados.

Substituindo este valor de z em

$$L=0,$$

desenvolvendo depois L segundo as potencias de θ, e egualando a zero os coefficientes de todos os termos d'este desenvolvimento; chegaremos a obter os valores geraes de $A, B, C, \ldots, a, b, c, \ldots$, que satisfazem a todas estas equações, e ficará assim determinada a serie que satisfaz a

$$L=0.$$

Tomando, separadamente, por θ cada uma das variaveis independentes e funcções differentes d'ellas, teremos para z outros tantos desenvolvimentos differentes, devendo comtudo notar que estes differentes desenvolvimentos se não podem aproveitar, quando produzirem series divergentes.

27 Póde, comtudo, acontecer que, quando se suppõe θ funcção de tal ou tal variavel, os coefficientes $A, B, C, \ldots$ contenham numeros differentes de funcções arbitrarias; e até, quando os differentes termos da serie se determinarem independentemente uns dos outros, e satisfizerem separadamente á equação linear ás differenças parciaes dada, as funcções arbitrarias podem desapparecer de todo, sem que, apesar d'isso, a serie deixe de ser o integral completo da proposta: neste ultimo caso, as funcções arbitrarias ficarão substituidas por constantes arbitrarias em numero infinito, e o valor geral de z será a somma d'um numero infinito de soluções particulares d'esta funcção.

É exemplo da reducção das funcções arbitrarias a equação

$$\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{dz}{dy},$$

que, sendo desenvolvida em ordem ás potencias de x, apresenta duas funcções arbitrarias, em quanto que, sendo desenvolvida em ordem ás potencias de y contém uma unica funcção arbitraria.

Esta equação não póde ser resolvida pelo processo do n.º **14**; e foi *M. Paoli* o primeiro que, integrando-a, demonstrou que no seu integral devem apparecer funcções arbitrarias.

28 Os processos que acabamos de indicar, para se obterem os desenvolvimentos em serie dos integraes das equações ás differenças parciaes, faceis e elegantes quando as equações propostas são lineares, conduzem todavia a calculos muito laboriosos, quando ellas o não são.

Recorre-se neste caso ao desenvolvimento por meio das quantidades exponenciaes.

Façamos $$\theta = e^x,$$

sendo e a base dos logarithmos neperianos: a serie (2) tornar-se-ha, neste caso, em

$$z = Ae^{ax} + Be^{bx} + Ce^{cx} + \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Para dar um exemplo d'esta theoria, vamos applicar esta serie á equação

$$\frac{dz}{dt} = \alpha \frac{d^2z}{dx^2},$$

suppondo, para maior facilidade, que os coefficientes $A, B, C, \ldots$ são funcções de uma unica variavel t, e $a, b, c, \ldots$ quantidades constantes.

D'aquella serie deduz-se, derivando, separadamente, em ordem a t e a x,

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dA}{dt} e^{ax} + \frac{dB}{dt} e^{bx} + \frac{dC}{dt} e^{cx} + \ldots$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = a^2Ae^{ax} + b^2Be^{bx} + c^2Ce^{cx} + \ldots$$

Substituindo estes valores na equação dada, e applicando-lhe o methodo dos coefficientes indeterminados, acharemos

$$\frac{dA}{dt} = \alpha\, a^2 A,$$

$$\frac{dB}{dt} = \alpha\, b^2 B,$$

$$\frac{dC}{dt} = \alpha\, c^2 C,$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

ficando por consequencia os expoentes $a, b, c, \ldots$ arbitrarios.

Integrando estas equações, depois de ter separado as variaveis, termos

$$A = A'e^{\alpha a^2 t}$$

$$B = B'e^{\alpha b^2 t}$$

$$C = C'e^{\alpha c^2 t},$$

$$\dots\dots\dots\dots,$$

designando por A', B', C', ... as constantes arbitrarias introduzidas pela integração.

Finalmente, substituindo na serie (3) por A, B, C, ... os valores que acabamos de obter, resultará

$$z = A'e^{\alpha a^2 t}e^{ax} + B'e^{\alpha b^2 t}e^{bx} + C'e^{\alpha c^2 t}e^{cx} + \dots$$

para integral completo da equação proposta ordenado segundo as potencias de e^x.

Serve este exemplo, ao mesmo tempo, para mostrar o que dissemos logo no principio d'este Capitulo; isto é, que muitas vezes os integraes não continham funcções arbitrarias, que eram substituidas por um numero infinito de constantes arbitrarias: na realidade é o que acontece neste exemplo, em que não apparecem funcções arbitrarias explicitas, mas sim duas series infinitas de constantes arbitrarias A', B', C',..., a, b, c,....

29 Um outro processo, tambem muito usado pelos analystas, e que se deduz muito facilmente do antecedente, é o desenvolvimento em serie de senos e cosenos.

Com effeito, as constantes A, B, C,..., a, b, c,... tanto se podem suppor quantidades reaes como expressões imaginarias; e, neste ultimo caso, passa-se sem difficuldade, pelas fórmulas conhecidas, das exponenciaes imaginarias para os senos e cosenos.

30 Observaremos ainda, que é sempre possivel passar da serie (3) para os integraes definidos; o que nos dá um ultimo modo de integração differente dos indicados em os numeros anteriores.

Para maior desenvolvimento d'esta materia, que não fizemos senão indicar, póde-se ver no *Cahier 17 du Journal de l'École Polytechnique* uma excellente memoria de *Poisson*.

31 Uma das grandes difficuldades que o *Calculo ás differenças parciaes* apresenta é a interpretação das funcções arbitrarias que completam os integraes d'esta especie.

Na integração das equações ás differenças ordinarias junta-se uma constante arbitraria ao integral, que se determina depois pelas condições particulares do problema: algumas vezes estas condições annullam completamente a constante arbitraria, e, em geral, designam-lhe um valor qualquer.

No calculo ás differenças parciaes acontece uma cousa analoga. Já vimos em o n.º 23 que um integral geral das equações ás differenças parciaes deve conter, em geral, tantas funcções arbitrarias, quantas são as unidades da ordem da equação. Quando este calculo se applica á resolução dos problemas de *Mechanica* ou de *Physica-mathematica*, as funcções arbitrarias determinam-se do mesmo modo que as constantes arbitrarias, pelas condições especiaes da questão. Nos problemas de *Physica-mathematica* é, ordinariamente, pela condição de tomarem um certo valor, quando uma das variaveis se annulla ou toma um valor determinado.

A determinação das funcções arbitrarias, segundo as condições do problema, occupou, por muito tempo, a attenção dos geometras, que, finalmente, observaram que ella se reduzia á integração d'uma equação ás differenças ordinarias; de modo que da perfeição do calculo ás differenças ordinarias é que depende a do calculo ás differenças parciaes (*a*).

32 Uma das questões mais importantes a que deu origem a resolução do problema das cordas vibrantes, e que por isso mesmo o torna mais curioso, é sem duvida a da continuidade ou descontinuidade das funcções arbitrarias.

Depois de *D'Alembert* ter apresentado (nas *Memorias da Academia das Sciencias de Berlim,* para 1747) a resolução d'este problema, em que suppunha as funcções arbitrarias que nelle entram sujeitas á lei de continuidade; appareceu (no tomo seguinte das mesmas Memorias) a resolução do mesmo problema, tractado por um methodo analogo, devido a *Euler*, e que é, com certeza, muito mais geral que o de *d'Alémbert;* visto que não é preciso sujeitar as funcções arbitrarias que o resolvem á lei de continuidade.

Euler affirmava com toda a razão, segundo nos parece, que para a exa-

---

(*a*) Esta conclusão deduz-se das differentes memorias de *Condorcet* publicadas nos volumes da *Acad. das Sciencias de Paris*, de 1770, 1771 e 1772, e dos trabalhos sobre tal objecto de *Laplace, Monge*, etc.

ctidão da construcção da equação achada, e que era a mesma, com pequenas differenças, pelos dois methodos, não é necessario, de maneira alguma, attender á lei de continuidade das funcções arbitrarias, que dependem da posição inicial da curva.

Continuou por bastante tempo a discussão entre os dois illustres geometras, sem que nenhum d'elles adduzisse novas provas para mostrar a veracidade da sua opinião; até que *Lagrange* publicou na *Miscellanea Taurinensis Societatis*, fundada por elle, uma memoria sobre tal objecto, em que seguiu a opinião *d'Euler*. As suas razões convenceram os geometras, e hoje todos admittem que as funcções arbitrarias não estão sujeitas á lei de continuidade; o que torna bem mais extensas as soluções da maior parte dos problemas de *Physica-mathematica*.

33 *Monge* acabou de levar o convencimento ao espirito da todos com uma memoria publicada no tomo 3.º da obra acima citada. Demonstrou ali, e nos volumes 7 e 8 das *Memorias da Academia das Sciencias de Paris*, que os integraes das equações ás differenças parciaes têm por logar geometrico uma superficie curva, construida de tal maneira, que passa por tantas outras curvas quaesquer, quantas são as funcções arbitrarias que o seu integral completo contém; e concluiu d'aquellas construcções que nada obriga as funcções arbitrarias a serem quantidades algebricas e continuas.

Segundo a opinião de *M. Charles* esta discussão é esteril, visto que na realidade não existem funcções descontinuas. Por um raciocinio, que nos parece verdadeiro, prova que a curva mais irregular, e na apparencia mais descontinua, não o é senão porque a lei que presidiu á sua formação nos é desconhecida por ser muito complicada.

Como a discussão da continuidade ou descontinuidade das funcções arbitrarias anda intimamente ligada com a resolução do problema das cordas vibrantes, visto ter nascido d'elle; teremos occasião de a profundar mais, quando narrarmos a historia d'aquelle problema.

As breves noções que apresentámos nestes dois Capitulos são bastantes, segundo nos parece, para se poder fazer uma ideia clara, ainda que simples d'este importante ramo de *Calculo-Integral*, que tantos serviços presta á *Mechanica*, tanto dos solidos como dos fluidos, e muito principalmente á *Physica-mathematica*.

CAPITULO III

Formula de Lagrange

> Les applications de l'analyse aux phénomènes physiques ont conduit à la recherche d'une fonction quelconque en séries, dont les différents termes étaient proportionnels aux sinus ou cosinus des multiples de la variable. C'est le problème des cordes vibrantes, qui a donné lieu à la première question de ce genre.
>
> DUHAMEL.

Vamos, para terminar esta primeira parte, apresentar a formula de *Lagrange* sem o auxilio da qual nos veriamos por varias vezes obrigados a interromper a resolução do problema com objectos estranhos á questão principal.

34 Porém, antes de demonstrar aquella formula, vamos achar uma outra que nos auxilia na sua demonstração.

Demonstração da formula

$$\sum_m^1 \cos m\theta = \frac{\operatorname{sen}(m+\frac{1}{2})\theta}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}\theta} - \frac{1}{2} \dots\dots\dots (1).$$

Lagrange foi o primeiro que empregou esta formula no tomo **1.°** da *Miscellanea Academiae Taurinensis;* e o seu emprego deu logar a uma viva discussão da parte de *D'Alembert,* a qual se póde vêr nos vol. **1.°** e **4.°** dos seus *Opusculos.*

Sabemos da *Trigonometria Rectilinea* que é

$$\cos b = \frac{\operatorname{sen}(b+\frac{1}{2}\theta) - \operatorname{sen}(b-\frac{1}{2}\theta)}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}\theta}.$$

Fazendo nesta formula successivamente

$$b = \theta,\ 2\theta,\ 3\theta,\ \ldots,\ m\theta,$$

sommando, membro a membro, as equações assim achadas, e junctando ao resultado, tambem membro a membro, a equação identica

$$\tfrac{1}{2} = \frac{sen\,\frac{1}{2}\theta}{2\ sen\,\frac{1}{2}\theta},$$

resulta finalmente

$$\tfrac{1}{2} + cos\,\theta + cos\,2\theta + cos\,3\theta + \ldots + cos\,m\,\theta = \frac{sen\,(m + \frac{1}{2})\theta}{2\,sen\,\frac{1}{2}\theta},$$

que é a formula que nos propunhamos demonstrar.

35 Do emprego d'esta formula parece deduzir-se que os senos e cosenos dos arcos infinitos são nullos ou pelo menos indeterminados. Esta irregularidade e muitas outras que se acham expostas nos Cadernos 18 e 19 do *Journal de l'École Polytechnique*, assim como a não convergencia da serie (1), levaram, como já dissemos, *D'Alembert* a impugnar as conclusões que *Lagrange* d'ella pertendia tirar: porém este na sua obra intitulada *Calcul des Fonctions* deu a verdadeira resposta áquellas objecções, deduzida dos principios que alli expõe.

No Caderno 18 da obra acima citada serve-se *Poisson*, em logar d'aquella formula da seguinte:

$$\tfrac{1}{2} + e^{-k} cos\,\theta + e^{-2k} cos\,2\theta + e^{-3k} cos\,3\theta + \ldots + e^{-mk} cos\,m\,\theta = \tfrac{1}{2} + \sum_{m}^{1} e^{-mk} cos\,m\,\theta \ldots\ldots (2),$$

que só differe de (1) em conter no termo geral a exponencial e^{-mk}. A serie (2) deduz-se da serie (1), tornando esta convergente pelo processo geral, para tornar uma serie divergente em convergente — *Encyclopédie de Montpensier*, — tomo 3.º

36 Quando se applicam os principios de *Analyse* ás questões de *Physica* e de *Mechanica*, é preciso, muitas vezes, exprimir as funcções por meio de series de senos ou cosenos d'arcos proporcionaes aos multiplos da variavel.

D. Bernnoulli representou o estado inicial das cordas em vibração por uma serie trigonometrica, cujos coefficientes não determinou. *Euler* apresentou a expressão dos coefficientes por meio de integraes definidos: é porém a *Lagrange* e a *Fourier* que se deve o ter-se fixado o sentido d'esta formula, que tem uma verdadeira importancia em *Physica-mathematica.*

Muitas demonstrações se têm dado d'esta formula; entre ellas escolhemos, para aqui expor, a dada por *M. Duhamel* nos seus *Elementos de Calculo Infinitésimal,* que nos parece livre dos defeitos que a maior d'ellas apresentam.

33 Antes porém de apresentarmos a demonstração de *M. Duhamel,* vamos indicar, em breves traços, a marcha que *Euler* seguiu para obtel-a, e que é fundada no methodo dos coefficientes indeterminados.

Seja $\varphi\, x$ uma funcção qualquer de x, e façamos

$$\varphi x = B + (A_1 sen\, x + B_1 cos\, x) + (A_2 sen\, 2x + B_2 cos\, 2x) + \ldots + (A_m\, sen\, mx + B_m\, cos\, mx),$$

em que ficam indeterminados os coefficientes $A_1,\ A_2,\ \ldots\ A_m,\ B,\ B_1,\ B_2,\ \ldots\ B_m$. Para determinarmos estes coefficientes, multipliquemos os dois membros da equação respectivamente por $sen.\ mx.\, dx$, e integremos o resultado entre os limites 0 e 2π: attendendo a que é

$$\int_0^{2\pi} sen\, mx\, cos\, mx.\, dx = 0,\quad \int_0^{2\pi} sen\, mx\, sen\, nx.\, dx = 0,$$

todos os coefficientes $A_1, A_2, \ldots, A_{m-1}, B_1, B_2, \ldots, B_{m-1}$, desapparecerão: e ficará sómente, applicando o methodo dos coefficientes indeterminados,

$$A_m = \frac{\int_0^{2\pi} \varphi x\, sen\, mx.\, dx}{\int_0^{2\pi} sen^2\, mx.\, dx},\quad B_m = \frac{\int_0^{2\pi} \varphi x\, cos\, mx.\, dx}{\int_0^{2\pi} cos^2\, mx.\, dx}.$$

E como é

$$\int_0^{2\pi} sen^2\, mx.\, dx = \pi,\quad \int_0^{2\pi} cos^2\, mx.\, dx = \pi,$$

teremos

$$A_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi x\, sen\, mx.\, dx,\quad B_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi x\, cos\, mx.\, dx.$$

E como, por outro lado, é

$$\int_0^{2\pi} dx = 2\pi,$$

teremos tambem

$$B = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi x\, dx.$$

Ficam assim determinados os coefficientes, quando este desenvolvimento podér ter logar : é preciso, porém, achar os casos em que elle é possivel e os limites entre os quaes a funcção é representada por aquella serie, essencialmente periodica.

Substituindo na serie dada os valores de B, A_m, B_m, que acabamos de encontrar, temos

$$\varphi x = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi x\, dx + \frac{1}{\pi}\Sigma\left(\left\{\int_0^{2\pi} \varphi x\, sen\, mx.\, dx\right\} sen\, mx + \right.$$

$$\left. + \left\{\int_0^{2\pi} \varphi x \cos mx\, dx\right\} \cos mx\right),$$

ou, designando por α a variavel dentro dos integraes definidos,

$$\varphi x = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi\alpha\, d\alpha + \frac{1}{\pi}\Sigma\left(\int_0^{2\pi} \varphi\alpha \cos m\,(x-\alpha)\, d\alpha\right).$$

38 Depois de termos indicado qual a marcha seguida por *Euler* para determinar os coefficientes da formula de *Bernnoulli*, por meio dos integraes definidos, vamos agora dar a demonstração rigorosa d'aquella formula, seguindo para isso, como já dissemos, a demonstração dada por *M. Duhamel*.

Como vimos (n.º 34) é

$$\tfrac{1}{2} + \cos\theta + \cos 2\theta + \ldots + \cos m\theta = \frac{sen\,(m+\frac{1}{2})\,\theta}{2\, sen\, \frac{1}{2}\theta}.$$

Multiplicando os dois membros d'esta equação por $\varphi\alpha\; d\alpha$, sendo $\varphi\alpha$

uma funcção qualquer de α, mudando θ em $x-\alpha$, e integrando em ordem a α, entre os limites a e b, resulta

$$\tfrac{1}{2}\int_a^b \varphi\alpha\, d\alpha + \int_a^b \varphi\alpha \cos(x-\alpha)\, d\alpha + \ldots + \int_a^b \varphi\alpha \cos m(x-\alpha)\, d\alpha =$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_a^b \frac{\varphi\alpha \operatorname{sen}(m+\frac{1}{2})(x-\alpha)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(x-\alpha)}\, d\alpha = \tfrac{1}{2}\int_a^b d\alpha\, \frac{\operatorname{sen}(m+\frac{1}{2})(\alpha-x)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha-x)}\, d\alpha \ldots\ldots \quad (3):$$

e, como os dois membros d'esta equação se não alteram quando se muda x em $x \pm 2k\pi$, conclue-se já que elles representam uma funcção periodica, cujo periodo é 2π, seja qual fôr o inteiro m.

Ora, fazendo crescer indefinidamente m, o segundo membro de (3) tende para um limite que é facil de determinar; e o primeiro representa então o desenvolvimento em serie da funcção que esse limite exprime.

39 Para se achar o limite para que tende o integral

$$\tfrac{1}{2}\int_a^b \varphi\alpha\, \frac{\operatorname{sen}(m+\frac{1}{2})(\alpha-x)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha-x)}\, d\alpha,$$

quando m cresce indefinidamente, observaremos, em primeiro logar, que basta attender aos valores de α proximos áquelles que tornam

$$\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(\alpha-x) = 0,$$

visto que, quando $\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha-x)$ tem um valor finito, o integral tende para zero, á medida que m tende para o infinito. Com effeito, quando m é uma quantidade extremamente grande, fazendo variar α da quantidade infinitamente pequena $\dfrac{2\pi}{m+\frac{1}{2}}$,

$$(m+\tfrac{1}{2})(\alpha-x)$$

varia de quantidade finita 2π; e, como é

$$\int \operatorname{sen}\{(m+\tfrac{1}{2})(\alpha-x)+2\pi\}\, d\alpha = \int \operatorname{sen}(m+\tfrac{1}{2})(\alpha-x)\, d\alpha,$$

segue-se que o integral de que pretendemos achar o limite é nullo, sendo tomado entre os limites α e $\alpha + \frac{2\pi}{m+\frac{1}{2}}$, quando $sen\,\frac{1}{2}(\alpha - x)$ tem um valor finito.

Devemos pois, na investigação do limite para que tende o integral

$$\frac{1}{2}\int_a^b \varphi\alpha \frac{sen\,(m+\frac{1}{2})(\alpha - x)}{sen\,\frac{1}{2}(\alpha - x)} d\alpha,$$

quando m cresce indefinidamente, considerar sómente os valores de α, proximos d'aquelles que tornam

$$sen\,\tfrac{1}{2}(\alpha - x) = 0;$$

isto é, proximos dos valores

$$x, x \pm 2\pi, x \pm 4\pi, \ldots, x \pm 2k\pi.$$

D'esta maneira suppre *Duhamel* a introducção da exponencial feita por *Poisson*, na serie (1), para a tornar convergente.

40 Supponhamos agora que $b - a$ é, quando muito, egual a 2π, e seja x um valor qualquer comprehendido entre estes limites. Segundo vimos em o n.º anterior, devemos apenas considerar os valores de $\alpha - x$, que são infinitamente pequenos: neste caso podemos substituir $sen\,\frac{1}{2}(\alpha - x)$ por $\frac{1}{2}(\alpha - x)$, e devemos, além d'isto, considerar x como constante para as pequenas variações de α. O segundo membro de (3) tornar-se-ha, pois, attentas estas considerações e chamando ε uma quantidade infinitesima, em

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \varphi\alpha \frac{sen\,(m+\frac{1}{2})(\alpha - x)}{\alpha - x} d(\alpha - x),$$

ou, fazendo

$$\alpha - x = \omega,$$

em

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \varphi(x+\omega) \frac{sen\,(m+\frac{1}{2})\omega}{\omega} d\omega \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4).$$

Desenvolvendo pela formula de *Taylor* $\varphi(x+\omega)$, temos

$$\varphi(x+\omega) = \varphi x + \omega\varphi' x,$$

despresando as potencias de ω, superiores á primeira, por esta quantidade ser extremamente pequena. Substituindo em (4) este valor de $\varphi(x+\omega)$ resulta

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \varphi x \frac{sen\,(m+\frac{1}{2})\,\omega}{\omega} d\,\omega + \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \omega \varphi' x \frac{sen\,(m+\frac{1}{2})\,\omega}{\omega} d\,\omega:$$

porém este segundo termo é nullo, visto que o integral só tem valor quando ω é extremamente pequena; isto é, quando ω ou $\alpha - x$ está no denominador a substituir $sen\,\frac{1}{2}\,(\alpha - x)$.

O segundo membro de (3) fica portanto reduzido (*a*) a

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \varphi x \frac{sen\,(m+\frac{1}{2})\,\omega}{\omega} d\,\omega.$$

Como este integral só tem valor quando ω, a que se referem os limites $-\varepsilon$ e $+\varepsilon$, fôr extremamente pequena; podemos, sem cometter erro algum, estender os limites do integral entre $-\infty$ e $+\infty$. Neste caso o limite para que o integral tende é $\pi\varphi x$, e a serie (3) torna-se em

$$\varphi x = \frac{1}{2\pi}\int_a^b \varphi\alpha\, d\,\alpha + \frac{1}{\pi}\sum_1^{\infty}\int_a^b \varphi\alpha \cos m\,(x-\alpha)\, d\,\alpha \ldots\ldots \quad (5),$$

que é a formula que pretendiamos obter.

41 Segundo o processo que acabamos de expor, para desenvolver uma

---

(*a*) Se φx não fôr continua, isto é, se passar rapidamente do valor $x+\omega$, ao valor $x-\omega$, não podemos fazer o desenvolvimento de $\varphi(x+\omega)$ pela formula de *Taylor*. Neste caso faremos

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \varphi(x+\omega)\frac{sen(m+\frac{1}{2})\omega}{\omega}d\omega = \int_0^{+\varepsilon}\varphi(x+\omega)\frac{sen(m+\frac{1}{2})\omega}{\omega}d\omega + \int_{-\varepsilon}^{0}\varphi(x-\omega)\frac{sen(m+\frac{1}{2})\omega}{\omega}d\omega.$$

Chamando

$$\varphi(x+\omega) = n,\ \varphi(x-\omega) = m,$$

temos $\frac{\pi}{2}n, \frac{\pi}{2}m$ para valor de cada um d'aquelles integraes, e para valor do integral entre $-\varepsilon$ e $+\varepsilon$, $\frac{1}{2}\pi(m+n)$.

funcção em serie de senos e cosenos d'arcos proporcionaes á variavel, vê-se logo que ella tem logar todos as vezes que $b - a$ fôr, quando muito, egual a 2π, em quanto que, usando de qualquer dos processos empregados por *Poisson, Cournot, Timmermans,* etc., se não vê isto claramente.

Quando os valores de x, a que se refere a equação (5), estiverem comprehendidas na expressão

$$x = \pm 2k\pi,$$

a equação (5) representa uma curva

$$y = \varphi x,$$

entre $x = a$ e $x = b$, que se reproduz indefinidamente, porque o segundo membro de (5) é uma funcção periodica, cujo periodo é 2π.

Póde tambem acontecer que haja algum valor de x que não esteja comprehendido na expressão $x \pm 2k\pi$; neste caso o primeiro membro de (5) é nullo; isto é, a ordenada é nulla; temos assim pontos do eixo dos x; pontos que unicamente podem estar comprehendidos entre as curvas successivas.

Quando

$$b - a = 2\pi,$$

as curvas successivas encontram-se duas a duas, e estes pontos não existem.

Quando x é egual a um dos limites do integral, por exemplo, a a, tendo sempre

$$b - a = 2\pi,$$

devemos tomar o integral

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \varphi\alpha \frac{sen\left(m + \frac{1}{2}\right)(\alpha - x)}{(\alpha - x)} d(\alpha - x)$$

entre os limites $-\varepsilon$ e 0, o que dá apenas

$$\tfrac{1}{2}\varphi x = \tfrac{1}{2}\varphi a.$$

Quando, pelo contrario, fôr

$$x = b,$$

devemos integrar aquella expressão sómente entre 0 e $+\varepsilon$; o que dá

$$\tfrac{1}{2}\varphi x = \tfrac{1}{2}\varphi b.$$

Muitas outras considerações poderiamos fazer sobre esta formula; porém as que deixamos feitas bastam para o nosso intento, que é reunir nesta primeira parte todos os dados de que temos de lançar mão para resolver o problema das cordas vibrantes.

42 Esta formula assim obtida por *Duhamel* é mais geral que a dada por *Poisson*. Com effeito, a formula (5) póde decompor-se da maneira seguinte:

$$\varphi x = \frac{1}{2\pi}\int_a^b \varphi\alpha d\alpha + \frac{1}{\pi}\Sigma\left(\int_a^b \varphi\alpha \cos m\alpha d\alpha\right)\cos mx + \frac{1}{\pi}\Sigma\left(\int_a^b \varphi\alpha \operatorname{sen} m\alpha d\alpha\right)\operatorname{sen} m x.$$

Os dois termos primeiros do segundo membro d'esta equação dizem respeito ao desenvolvimento da funcção em serie de cosenos d'arcos proporcionaes á variavel; o terceiro termo dá-nos o desenvolvimento em serie de senos tambem proporcionaes á variavel.

Poisson apenas deduziu a segunda parte d'esta formula e *Cournot* obteve separadamente cada uma d'aquellas partes, e, sommando-as depois, achou a que em cima apresentámos.

PARTE SEGUNDA

«J'invite les mathématiciens à étendre les recherches sur les cordes vibrantes, parce que ce travail me parait digne de les occuper, tant par lui-même, que par l'utilité dont il peut être pour d'autres objets.»

D'ALEMBERT — *Opuscules.*

CAPITULO I

Historia do Problema

> L'histoire est le fond de toute science humaine.
>
> M. PONCELET.

1 *Leibnitz* e os *Bernnoulli* devem considerar-se como os fundadores da *Physica-mathematica*, visto que foram elles os primeiros que resolveram problemas que pertencem rigorosamente a esta sciencia; tal é o problema da *catenaria*, que consiste em determinar qual a curva que deve formar uma cadeia pezada, preza pelas suas extremidades. Este problema foi o primeiro em que os Geometras consideraram o equilibrio d'uma corda flexivel.

É verdade que já antes d'elles tinha *Galileu* dado uma solução d'este mesmo problema; porém, como este grande philosopho, apezar da sua admiravel intelligencia, se enganou na solução d'elle, podemos affirmar que aquelles Geometras foram os primeiros que acharam as soluções de problemas comprehendidos em uma sciencia da qual se deduzem conclusões d'uma utilidade pratica, immediatamente applicaveis aos usos da vida.

N'aquelle problema, em que se suppunha a *catenaria* perfeitamente flexivel, sómente se tinha considerado uma força de intensidade desconhecida, actuando nas extremidades de cada elemento da curva; força a que se deu o nome de *tensão da catenaria*.

Porém, 'num outro problema, o da *lamina elastica*, resolvido no principio do seculo passado por *Jacques Bernnoulli* (*a*) attendeu-se, pela primeira vez, á tendencia d'uma curva, formada de materia elastica, a retomar a sua figura natural.

2 Os *lemmas* postos por *Jacques Bernnoulli*, para achar a solução

---

(*a*) *Histoire de l'Académie des Sciences*, pour 1705, e *Oeuvres de J. Bernnoulli* — 2.° vol., pag. 976.

d'este problema, são: *1.º as dilatações ou contracções são proporcionaes ao comprimento da lamina; 2.º as dilatações ou contracções são proporcionaes aos esforços que as produzem, quando estes forem muito pequenos;* pois que, d'outra maneira, se houvesse sempre proporcionalidade, quando uma força produzisse, por exemplo, uma contracção egual á metade do comprimento do corpo, uma força dupla aniquilaria o comprimento do mesmo corpo; o que não é verdade.

J. Bernnoulli exprimia estas diversas circumstancias, dizendo que as dilatações e as contracções augmentavam em *razão menos forte* que a das forças que as produziam.

Para deduzir estes *lemmas* suppunha este grande Geometra, como todos os mathematicos que têm resolvido o mesmo problema, a lamina dobrada decomposta em filetes longitudinaes; as dilatações d'uns e as contracções d'outros produzem forças longitudinaes que lhes são proporcionaes. A resultante d'estas forças é nulla todas as vezes que o filete medio não soffrer nem dilatação nem contracção; porém o seu momento total não é nunca egual a zero. Admittindo como resultado da experiencia que uma recta perpendicular ás faces da lamina, no seu estado natural, fica ainda normal ás superficies cylindricas que a terminam, depois de dobrada; acha-se que este momento, chamado *momento de elasticidade,* é proporcional, em cada ponto, á curvatura da lamina, ou ao angulo de contingencia do seu filete medio (*a*).

3 O estado de atrazo em que então se achava a analyse não permittia aos Geometras senão a resolução dos problemas em que tão sómente se considerava o equilibrio dos corpos. Sabem todos que já a *Statica* contava seculos de existencia, quando *Galileu* lançou os fundamentos da *Dynamica*, e que, n'aquella ocasião, ainda esta sciencia estava na sua infancia. Comtudo caminhava a passos agigantados pela estrada espaçosa do progresso; e bem depressa os philosophos se abalançaram a estudar as questões relativas ao movimento das cordas e das laminas elasticas, e particularmente o que diz respeito ás suas pequenas vibrações.

Taylor, geometra inglez, foi o primeiro que em **1716** tentou resolver este problema, na sua obra intitulada *Methodus incrementorum directa et inversa*. A solução que deu era fundada em duas hypotheses — suppunha, em primeiro logar, *que a corda não podia tomar uma figura inicial differente da d'uma certa especie* DE CYCLOIDES ALLONGADAS, *a que chamava*

(*a*) *Poisson, Traité de Mécanique* — 2.[me] édition, n.º 307.

COMPANHEIRAS DA CYCLOIDE; e a outra hypothese consistia em suppor *que a força acceleratriz em cada particula ou incremento da curva era proporcional á curvatura neste ponto.*

Suppondo que a corda vibrante está em linha recta no principio do seu movimento, achava *Taylor* para equação da corda

$$y = Y\, sen\, (x\sqrt{f})\, sen\, (t\sqrt{g}),$$

sendo y a ordenada que denota a distancia d'um ponto da corda ao eixo em um tempo qualquer t, x a abscina correspondente, f uma constante dependente de fórma da corda, e Y a maior ordenada da curva.

Porém a solução de *Taylor* era insufficiente, porque, ainda admittida a hypothese de que a curva havia de necessariamente tomar a figura que elle lhe suppunha, o que equivalia a dizer que todos os seus pontos haviam de chegar ao mesmo tempo a estar em linha recta; era preciso suppor tambem que as forças acceleratrizes e as velocidades, no momento considerado, eram ao mesmo tempo e no mesmo instante proporcionaes ás distancias ao eixo; hypothese puramente gratuita, e de que o auctor não dava explicação alguma.

4 A demonstração de *Taylor* era, por consequencia, uma solução particular; comtudo por muito tempo se pensou que, para obter a resolução de tal problema, era preciso attender ás duas condições expressas em cima; isto é, que todos os pontos da curva chegassem ao mesmo tempo a estar em linha recta, e que a curva inicial fosse a ***companheira da cycloide.***

Em 1747, porém, *D'Alembert* examinou aquella theoria (*a*) e, fazendo pela primeira vez applicação do Calculo ás differenças parciaes, encontrou que a equação geral da curva que forma uma corda preza pelas suas extremidades é

$$y = \Psi\,(t + s) + \Gamma\,(t - s),$$

em que t representa o tempo a contar do instante em que a corda principiou a vibrar, s a abscissa d'um ponto qualquer da curva no fim do tempo t, e y a ordenada correspondente.

Para obter esta equação suppunha *D'Alembert* — 1.º *que as vibrações*

(*a*) *Memoires de l'Académie Royal des Sciences de Berlim* — pour 1747.

da corda eram muito pequenas, de maneira que os arcos da curva que ella forma podessem ser substituidos, sem erro sensivel, pelas abscissas correspondentes: 2.° *que a curva era uniformemente espessa em todo o seu comprimento,* e 3.° finalmente *que a tensão estava para o pezo da corda em razão constante.*

Segundo a maneira como *D'Alembert* resolvia o problema, as funcções Ψ e Γ são completamente arbitrarias, ficando comtudo sujeitas á lei de continuidade; donde se conclue que ha uma infinidade d'outras curvas, differentes da *companheira da cycloide,* que satisfazem á questão. *D'Alembert* ensinou a maneira de construir todas estas curvas, e tirou d'aquella equação muitas propriedades d'ellas que apresentou nas memorias já citadas.

5 Por uma analyse similhante, e admittindo as mesmas hypotheses que *D'Alembert,* encontrou *Euler* (*a*), para a equação da curva das cordas vibrantes,

$$y = f(x + t\sqrt{b}) + \varphi(x - t\sqrt{b}),$$

sendo t o tempo, x a abscissa no fim d'esse tempo t, y a ordenada correspondente, e b uma constante dependente da fórma da corda.

Esta solução de *Euler* é porém muito mais geral que a de *D'Alembert,* visto que não é preciso sujeitar as funcções arbitrarias que entram na equação da curva, á condição de satisfazer á lei de continuidade. Segundo *Euler* não é necessario até que a curva seja geometrica, algebrica ou transcendente; basta que esteja comprehendida entre as duas extremidades dadas, e não faça nestes pontos angulos rectos com o eixo, para que a solução seja rigorosa.

Nasceu d'aqui entre *Euler* e *d'Alembert* a questão sobre a continuidade ou descontinuidade das funcções arbitrarias, de que já tivemos occasião de fallar, e que vamos desenvolver mais; não só porque é uma das que bastante celebridade deram ao *Calculo ás differenças parciaes,* mas porque da resolução d'ella se conclue a maior ou menor generalidade do problema, que pretendemos resolver.

6 *D'Alembert, nas Memorias de Berlim,* para 1750, criticou as conclusões que *Euler* tinha tirado da sua solução, dizendo que, para suppor que a equação inicial da curva é

$$y = \Sigma,$$

(*a*) *Memoires de l'Académie Royal das Sciences de Berlim* — pour 1748.

é preciso que Σ seja uma funcção impar, o que não póde acontecer senão quando a curva fôr mechanica, e por isso mesmo continua; e que, em qualquer outro caso, o problema não se póde resolver, visto que a analyse não póde chegar tão longe.

Com effeito, dizia elle, a mameira mais geral de exprimir y analyticamente é suppol-o funcção de t e s; mas neste caso, para obter a solução, é necessario que as differentes fórmas da corda vibrante possam ser contidas em uma só e mesma equação. Em todos os outros casos é impossivel dar a y uma fórma geral.

Porém a isto respondeu *Euler* que a figura da curva depende da forma inicial da corda, o que *D'Alembert* admittia; que nenhuma cousa nos prohibe de dar ás cordas, no principio do movimento, a figura que quizermos; e que por consequencia a sua solução tinha toda a generalidade.

7 Emquanto estes insignes mathematicos discutiam sobre a continuidade ou descontinuidade das funcções arbitrarias, sem comtudo adduzirem novas provas em favor da sua opinião; *Bernnoulli* sustentava contra ambos que as suas soluções eram fundadas em uma analyse muito abstracta, que não podia conduzil-os á solução do problema; e que a curva que apresenta a corda vibrante era, como pretendia *Taylor*, ou uma trochoide allongada, ou uma combinação de trochoides d'esta especie.

Porém a isto respondeu *Euler*, na mesma memoria em que respondeu a *D'Alémbert*, que da sua analyse, que *Bernnoulli* não criticava, contentando-se com lhe chamar abstracta, se deduzia que não eram só as trochoides taylorianas que satisfaziam á questão: visto que as curvas que formava a corda vibrante até podiam ser descontinuas.

8 Comtudo a discussão não tinha mostrado de que lado estava a verdade, quando *Lagrange*, no primeiro tomo da *Miscellanea Academiae Taurinensis*, jornal fundado por elle e alguns philosophos italianos, em 1759, publicou uma solução d'este problema, onde analysou as soluções que *Euler* e *D'Alémbert* tinham apresentado do mesmo.

Depois de observar que a construcção de *Euler* é muito mais geral que a de *D'Alémbert* visto não sujeitar as funcções arbitrarias á lei de continuidade; diz a tal respeito: «É certo que os principios do Calculo Differencial e Integral dependem da consideração das funcções variaveis algebricas; não parece portanto, que se possa dar mais extensão ás conclusões tiradas d'estes principios do que supporta a propria natureza das funcções.»

«Ora ninguem póde duvidar que, nas funcções algebricas, todos os seus differentes valores estão ligados conjunctamente pela lei de continuidade; donde nos parece indubitavel que as consequencias que se deduzem, pelas regras do Calculo Differencial e Integral, serão sempre illegitimas em todos os casos em que se suppozer que esta lei não tem logar.»

«Segue-se d'aqui, que deduzindo-se a construcção de *M. Euler* immediatamente da integração das equações differenciaes dadas, esta construcção não é applicavel pela sua propria natureza senão ás curvas continuas, que podem ser expressas por uma funcção qualquer das variaveis t e x. Concluo, pois, que todos as provas que se podem adduzir para decidir esta questão, suppondo que a ordenada y da curva seja uma funcção de t e x, como têm feito até aqui *M. D'Alémbert* e *M. Euler*, são absolutamente insufficientes; e que só por um calculo, como o que tenho em vista, em que se consideram os movimentos dos pontos da corda, cada um em particular poderemos chegar a uma conclusão que esteja ao abrigo de toda a critica».

9 Esta discussão sobre a continuidade ou descontinuidade das funcções arbitrarias não foi mais longe. *Lagrange*, na memoria que citámos, adoptou as idéas de *Euler*, e, quando mais tarde *Monge*, lançando mão de construcções geometricas, demonstrou que nada obriga as funcções arbitrarias a serem quantidades algebricas e continuas, todos os geometras, ainda os mais difficeis de convencer, reconheceram que ellas podiam ser descontinuas; o que torna muito mais geraes as soluções dos problemas de *Physica-mathematica*.

Em 1790, numa memoria apresentada á *Academia Imperial de Petersbourg*, que foi premiada, provou *Arbogast* até á evidencia tanto pela analyse das razões expostas de uma e outra parte, como por muitas que lhe são proprias, que nada limita a forma d'estas funcções.

Finalmente, como já tivemos occasião de dizer noutra parte, ainda mais tarde *M. Charles*, no 10.° volume das Memorias apresentadas á Academia das Sciencias de París, tractou de demonstrar que esta discussão não tinha razão de ser, visto que realmente não existem as formas descontinuas; e as suas razões parecem-nos muito convincentes. Não faremos comtudo a analyse d'ellas, porque nos falta espaço e tempo; acceitando como facto assente na sciencia, como todos fazem, que as funcções arbitrarias que completam os integraes das equações ás differenças parciaes podem ser descontinuas.

10 Na occasião em que *Lagrange* expendia uma opinião tão sensata, como a que ha pouco transcrevemos, continuava *Bernnoulli* a sustentar que os calculos de *D'Alémbert* e *Euler* não apresentavam novidade, porque todas as conclusões que se tiravam d'aquella analyse se podiam tambem deduzir dos calculos de *Taylor*, e acrescentava que a analyse extremamente simples de *Taylor* espalhava sobre a theoria das cordas vibrantes muito mais luz que a analyse abstracta e espinhosa d'aquelles geometras; d'onde concluia que a solução de *Taylor* era a unica capaz de satisfazer a todos os casos provaveis do problema, estabelecendo como principio geral que, qualquer que possa ser o movimento d'uma corda presa pelas suas extremidades, ella tomará a fórma das trochoides allongadas.

Euler respondeu a isto do modo que já indicámos, e atacou, a seu turno, a solução de *Bernnoulli*, objectando-lhe que a equação de *Taylor*, que aquelle philosopho sustentava ser a das curvas formadas pelas cordas vibrantes, ainda mesmo que fosse continuada ao infinito, não podia exprimir todos os movimentos possiveis da corda, porque, para isso, era preciso que aquella equação encerrasse todas as figuras que a corda pode tomar no principio do movimento; o que não tem logar em virtude de certas propriedades que distinguem as curvas comprehendidas naquella equação.

Eram estas propriedades as mesmas que *D'Alémbert* exigia nas suas curvas geratrizes (*a*); d'onde se conclue que, apezar de *D'Alémbert* achar a theoria de *Taylor* muito insufficiente, para d'ella se deduzir uma solução geral, estava comtudo de accôrdo com *Bernnoulli* sobre o principal objecto; isto é, que unicamente, nos casos da curva ser ou a trochoide allongada ou uma combinação de muitas trochoides, o problema era susceptivel de solução.

11 *Lagrange* resolveu o problema d'uma maneira inteiramente nova: suppoz, em primeiro logar, a corda, pouco differente da linha recta, carregada de pezos collocados a distancias finitas e eguaes: imaginou, depois, que estes pezos se approximavam e augmentavam em numero infinito, que é o caso da corda vibrante ordinaria.

Na solução do problema substituiu *Lagrange* as funcções arbitrarias que o seu integral encerra por series de quantidades periodicas, que representam os valores do integral, para todo o comprimento da corda, ainda que a funcção se torne descontinua neste intervallo; vindo d'este modo as incognitas que se pretendem determinar expressas em sommas de quantidades, cada uma das quaes satisfaz a todas as condições do problema; e é uma solução particular d'elle (*b*).

(*a*) Nem *D'Alémbert* nem *Bernnoulli* demonstraram que todas as curvas que gozavam d'aquellas propriedades podiam estar comprehendidas em uma mesma equação. Foi *Lagrange* quem deu a demonstração d'este theorema.

(*b*) Este methodo de resolver os problemas de mechanica, por meio da sobre-

D'aqui concluia *Lagrange*, como já dissemos, que a opinião de *Euler* sobre a descontinuidade das funcções arbitrarias era verdadeira.

D'Alémbert, nos seus opusculos, continuou a criticar as soluções de *Euler* e *Lagrange*; porém as suas objecções eram de tal forma metaphysicas, que se podia sobre ellas discutir muito tempo sem chegar a resultado algum.

12 Em 1779 publicou *Laplace* uma memoria (*a*) sobre as differenciaes parciaes em que reduziu, a uma equação ás differenças ordinarias da segunda ordem, a equação das cordas vibrantes em um meio resistente como a velocidade.

Integrando esta equação, acha-se a solução completa do problema neste caso particular: foi o que fez *M. Parseval*, lançando mão dos integraes definidos. Assim a integração da equação das cordas vibrantes, em um meio resistente como a velocidade, reduz-se ao methodo dos quadraturas, por meio dos integraes definidos.

13 Tal era o estado do problema, quando *Poisson* pensou, com toda a razão, que a sua resolução devia estar comprehendida na theoria geral de elasticidade dos corpos solidos. E, se, antes de se estabelecer esta theoria geral, era conveniente estudar as leis que regem os movimentos dos fios delgados e das membranas pouco espessas, o que prestou grandes serviços á sciencia, pois que habituou os mathematicos a resolverem os problemas geraes da analyse, tão necessarios hoje em todas as questões de *Physica-mathematica*, agora este modo de encarar a questão, que naquelle tempo parecia tão natural, visto que principiava pelo mais facil para ir depois estudar o mais difficil, qual é os movimentos dos solidos, não tem razão de ser desde que existe uma theoria geral, donde se deduzem, como casos particulares, as leis que regulam os seus movimentos.

Numa memoria lida ao *Instituto de França* em 1814 estabeleceu *Poisson* hypotheses taes, que o conduziam a uma equação de equilibrio das forças elasticas, a qual tomava a mesma fórma que a equação da lamina elastica, curva em um unico sentido, quando se applicava a este caso particular.

As hypotheses postas por *Poisson*, das quaes elle deduzia aquella conclusão, consistiam em suppôr que os differentes pontos d'uma placa elastica, curvada d'uma maneira qualquer, se repelliam mutuamente segundo

---

posição de soluções particulares, não é outra cousa mais que o principio da *coexistencia das pequenas oscillações*, enunciado por *Daniel Bernnoulli*.

(*a*) *Memoires de l'Académie des Sciences de Paris*.

uma funcção da distancia, funcção que diminuia muito rapidamente, e se tornava insensivel quando a variavel adquiria uma grandeza sensivel.

14 Porém o proprio *Poisson* foi o primeiro a confessar que estas hypotheses unicamente têm logar nos casos em que a lamina que se considera não tem espessura alguma, e em que os pontos materiaes collocados sobre ella são contiguos ou, pelo menos, estão muito proximos uns dos outros.

Quando, pelo contrario, a lamina tem uma espessura apreciavel, devem-se considerar duas especies de particulas; as que estão do lado da concavidade repellem-se em virtude das contracções que soffrem; as que estão do lado da convexidade contrahem-se por causa das dilatações que experimentam.

15 Para se resolver o problema completamente, é pois preciso estabelecer: *primo* as equações geraes do equilibrio de elasticidade dos corpos solidos; *secundo* deduzir d'ahi, como caso particular, as equações que nos hão de dar tudo o que diz respeito ás vibrações das cordas.

Debaixo d'este ponto de vista, estudou *Poisson* de novo a questão, e publicou o seu trabalho no vol. 8.° das *Memorias da Academia das Sciencias de París.* Ficou d'este modo completamente resolvido o problema das cordas vibrantes.

A memoria que acabamos de citar, e a excellente obra de *M. Lamé*, intitulada *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides*, foram as principaes fontes d'onde extrahimos o que em seguida dizemos sobre este objecto.

uma funcção da distancia, funcção que diminuia muito rapidamente, e se tornava insensivel quando a variavel adquiria uma grandeza sensivel.

14. Porem o proprio *Poisson* foi o primeiro a confessar que estas hypotheses unicamente tem lugar nos casos em que a lamina que se considera não tem espessura alguma, e em que os pontos materiaes collocados sobre ella são contiguos ou, pelo menos, estão muito proximos uns dos outros.

Quando, pelo contrario, a lamina tem uma espessura apreciavel, devem-se considerar duas especies de particulas: as que estão do lado da concavidade repellem-se em virtude das contracções que soffrem; as que estão do lado da convexidade contrahem-se por causa das dilatações que experimentam.

15. Para se resolver o problema completamente, é pois preciso estabelecer primeiro as equações geraes do equilibrio da elasticidade dos corpos solidos, e segundo deduzir d'ahi, como caso particular, as equações que nos hão de dar tudo o que diz respeito ás vibrações das cordas.

Debaixo d'este ponto de vista, estudou *Poisson* de novo a questão, e publicou o seu trabalho no vol. 8.º das *Memorias da Academia das Sciencias de Paris*. Ficou d'este modo completamente resolvido o problema das cordas vibrantes.

A memoria que acabamos de citar, e a excellente obra de *M. Lamé*, intitulada *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides*, foram as principaes fontes d'onde extrahimos o que em seguida dizemos sobre este objecto.

CAPITULO II

Deducção das equações geraes do equilibrio de elasticidade dos corpos solidos

«Les changements de forme d'un corps solide, c'est-à-dire les variations des distances respectives des points matériels qui le composent, sont toujours accompagnées du développement de forces attractives ou répulsives.

LAMÉ.

16 Para deduzir as equações geraes do equilibrio de elasticidade dos corpos solidos, supporemos, com todos os auctores que têm tractado da mesma materia, que as moleculas, que em numero infinito, constituem um corpo solido, não estão intimamente ligadas entre si de maneira a formar um todo continuo, porém que existe entre duas quaesquer d'ellas, por mais proximas que sejam, uma distancia infinitamente pequena, que é a mesma para todas ellas, quando o corpo é homogeneo.

Supporemos ainda que, quando sobre o corpo não actua força alguma externa, as moleculas não exercem nenhuma acção umas sobre as outras; porém que, quando uma força qualquer, por mais pequena que seja, actua sobre o corpo e faz por consequencia approximar ou desviar as moleculas umas das outras, se desenvolve entre ellas uma certa força interior, repulsiva no primeiro caso, attractiva no segundo, que é funcção da distancia primitiva entre as duas moleculas e do desvio que ellas soffrem, e que se torna nulla desde que aquella distancia adquire uma grandeza sensivel.

17 Tomando no interior de um corpo solido qualquer uma molecula para centro de uma esphera, cujo raio seja a maior distancia á qual esta força se exerce; suppondo esta esphera dividida em duas partes eguaes por um plano e considerando num dos hemispherios assim formados, o prisma recto, que tem por base um elemento superficial infinitamente pequeno, tirado pelo ponto material, que se considera sobre o plano que divide a esphera em duas partes eguaes, chama-se *força elastica* a resultante de todas as acções que o outro hemispherio exerce sobre as moleculas do primeiro. De maneira que chamando E a força de elasticidade referida á unidade de superficie será ωE a força elastica relativa ao elemento plano ω. E designando por X, Y e Z as componentes de E parallelamente aos eixos de coordenadas rectangulares, as componentes da força elastica referida ao elemento plano ω serão respectivamente ωX, ωY e ωZ.

18 Posto isto, consideremos no interior do corpo solido um parallelipipedo, cujas dimensões sejam respectivamente parallelas aos trez eixos de coordenadas e infinitamente pequenas, isto é, seja

$$\omega = dx\, dy\, dz$$

o volume d'esse parallelipipedo; chamando A, B e C as tres faces que formam o angulo triedro mais proximo da origem, teremos respectivamente, designando por ϖ_1, ϖ_2 e ϖ_3 as suas areas,

$$\varpi_1 = dy\, dz,\ \varpi_2 = dx\, dz,\ \varpi_3 = dx\, dy.$$

Para o equilibrio d'este parallelipipédo é preciso formar, como se sabe, seis equações: as trez primeiras exprimem que as sommas das componentes de todas as forças que actuam sobre elle, parallelamente a cada um dos eixos, são nullas; as outras trez exprimem que as sommas dos momentos, tambem em relação a cada um dos eixos, são da mesma maneira nullas.

Vamos, em primeiro logar, achar as componentes das forças externas e da força elastica, parallelas a cada um dos eixos.

Chamando ρ a densidade do elemento solido ω, que consideramos, e X_0, Y_0 e Z_0 as componentes segundo os trez eixos dos x, y e z das forças externas que actuam sobre elle referidas á unidade de volume; serão respectivamente

$$\rho\,\omega X_0,\ \rho\,\omega Y_0,\ \rho\,\omega Z_0, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

as componentes d'essas forças, parallelamente a cada um dos eixos, referidas ao parallelipípedo, cujo volume é ω.

Designando por X_1, Y_1 e Z_1, as trez componentes da força elastica referidas á unidade de superficie, que é perpendicular ao eixo do x; serão

$$-\varpi_1 X_1, -\varpi_1 Y_1, -\varpi_1 Z_1, \ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

as componentes da força elastica referida ao elemento plano ϖ, respectivamente parallelas aos eixos dos x, y e z.

Da mesma maneira acharemos que as componentes da força elastica, parallelas aos tres eixos das coordenadas, e referidas aos elementos planos ϖ_2 e ϖ_3, são respectivamente

$$\left.\begin{array}{l} -\varpi_2 X_2, -\varpi_2 Y_2, -\varpi_2 Z_2 \\ -\varpi_3 X_3, -\varpi_3 Y_3, -\varpi_3 Z_3 \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (c).$$

Finalmente, considerando as tres faces A_1, B_1 e C_1, que são parallelas ás faces A, B e C, cada uma a cada uma, temos que as componentes da força elastica, parallelamente a cada um dos tres eixos, e relativas aos elementos planos A_1, B_1 e C_1, são respectivamente

$$\left.\begin{array}{l} +\varpi_1\left(X_1+\frac{dX_1}{dx}dx\right), +\varpi_1\left(Y_1+\frac{dY_1}{dx}dx\right), +\varpi_1\left(Z_1+\frac{dZ_1}{dx}dx\right) \\ +\varpi_2\left(X_2+\frac{dX_2}{dy}dy\right), +\varpi_2\left(Y_2+\frac{dY_2}{dy}dy\right), +\varpi_2\left(Z_2+\frac{dZ_2}{dy}dy\right) \\ +\varpi_3\left(X_3+\frac{dX_3}{dz}dz\right), +\varpi_3\left(Y_3+\frac{dY_3}{dz}dz\right), +\varpi_3\left(Z_3+\frac{dZ_3}{dz}dz.\right) \end{array}\right\} \ldots\ldots (d)$$

Attendendo ás expressões (a), (b), (c) e (d), acharemos para as trez primeiras equações de equilibrio do elemento parallelipipédico ω,

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dX_1}{dx}+\frac{dX_2}{dy}+\frac{dX_3}{dz}+\rho X_0=0 \\ \frac{dY_1}{dx}+\frac{dY_2}{dy}+\frac{dY_3}{dz}+\rho Y_0=0 \\ \frac{dZ_1}{dx}+\frac{dZ_2}{dy}+\frac{dZ_3}{dz}+\rho Z_0=0 \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

depois de as ter dividido respectivamente por ω.

19 Resta-nos agora encontrar as equações que exprimem que as sommas dos momentos em relação a cada um dos eixos são nullas; isto é, que exprimem que o solido não póde girar em volta de trez linhas, respectivamente parallelas aos trez eixos das coordenadas.

Supponhamos, em primeiro logar que este eixo é parallelo ao dos x, e façamol-o passar pelo centro do parallelipipedo que consideramos. Neste caso, os momentos das forças

$$\rho\omega Y_0, \rho\omega X_0, \rho\omega Z_0,$$

são nullos, porque podemos suppor estas forças applicadas ao centro do parallelipipedo.

Quanto aos momentos das forças elasticas que actuam sobre as faces oppostas, A e A_1 tambem são nullos; visto que encontram o eixo dos momentos nos seus pontos de applicação, que são respectivamente os centros d'aquellas faces.

Resta-nos portanto considerar as forças elasticas exercidas sobre as faces B e B_1, C e C_1.

As forças

$$-\varpi_2 X_2, +\varpi_2 (X_2 + \frac{dX_2}{dy} dy),$$

que actuam sobre as faces B e B_1, parallelamente ao eixo dos x, são tambem parallelas ao eixo dos momentos que consideramos, e não produzem movimento: o mesmo acontece ás forças

$$-\varpi_3 X_3, +\varpi_3 (X_3 + \frac{dX_3}{dz} dz),$$

exercidas sobre as faces C e C_1 tambem parallelamente ao eixo dos x.

As forças

$$-\varpi_2 Y_2, +\varpi_2 (Y_2 + \frac{dY_2}{dy} dy),$$

exercidas parallelamente ao eixo dos y sobre as faces B e B_1 que lhes são perpendiculares, actuam perpendicularmente a estas faces; e, por isso, não poderão produzir movimento de rotação em volta do eixo que consideramos; pois que, quando muito, a sua acção se reduzirá a uma pressão ou tracção: o mesmo succede ás forças

$$-\varpi_3 Z_3, +\varpi_3 \left(Z_3+\frac{dZ_3}{dz}dz\right),$$

que actuam, parallelamente ao eixo dos z, sobre as faces C e C_1, que lhes são prependiculares. Conclue-se, das considerações que acabamos de fazer, que nenhuma d'estas forças dará termos para as equações que pretendemos formar.

Finalmente, as forças

$$-\varpi_2 Z_2, +\varpi_2 \left(Z_2+\frac{dZ_2}{dz}dz\right),$$

que actuam, parallelamente ao eixo dos z, sobre as faces B e B_1, que são perpendiculares ao plano dos y, exercem-se num plano perpendicular ao eixo dos momentos; isto é, obram tangencialmente ás faces B e B_1, e portanto constituem um *conjugado*

$$\frac{\omega Z_2}{2},$$

desprezando os infinitamente pequenos de terceira ordem em presença dos de segunda, e attendendo a que é dy a distancia do ponto de applicação d'estas forças ao eixo dos momentos.

Identicamente, as forças

$$-\varpi_3 Y_3, +\varpi_3 \left(Y_3+\frac{dY_3}{dz}dz\right),$$

exercidas, parallelamente ao eixo dos y, sobre as faces C e C_1, que são perpendiculares ao eixo dos z, actuam tangencialmente a estas faces, em um plano perpendicular ao eixo dos momentos; e, por isso, reduzem-se ao conjugado

$$\frac{\omega Y_3}{2},$$

despresando, como antecedentemente, as quantidades infinitamente pequenas de terceira ordem em presença das da segunda, e attendendo a que é dz a distancia do ponto de applicação d'estas forças ao eixo dos momentos.

Egualando entre si estes conjugados, visto que elles são de signal contrario, e procurando obter, para os eixos parallelos aos eixos dos y e dos z, equações identicas; teremos

$$Z_2 = Y_3,\ Z_1 = X_3,\ X_2 = Y_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Todas estas forças X_2, X_3, Y_1, Y_3, Z_1, Z_2 exercem-se tangencialmente ás faces do parallelipipedo elementar que consideramos; e, como acabamos de vêr, não são todas distinctas, visto que são eguaes duas a duas, em quanto que as forças X_1, Y_2, Z_3, que se exercem perpendicularmente ás faces do parallelipipedo são todas distinctas.

Designando as seis primeiras pelas iniciaes T_1, T_2, T_3; isto é, fazendo, para simplificar,

$$Z_2 = Y_3 = T_1,\ Z_1 = X_3 = T_2,\ X_2 = Y_1 = T_3,$$

e designando as trez ultimas respectivamente por N_1, N_2, N_3; isto é, fazendo, tambem para simplificar,

$$X_1 = N_1,\ Y_2 = N_2,\ Z_3 = N_3,$$

as equações (1) tornam-se, attendendo a estas notações e a (2), em

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{dN_1}{dx} + \dfrac{dT_3}{dy} + \dfrac{dT_2}{dz} + \rho\, X_0 = 0 \\[2ex]
\dfrac{dT_3}{dx} + \dfrac{dN_2}{dy} + \dfrac{dT_1}{dz} + \rho\, Y_0 = 0 \\[2ex]
\dfrac{dT_2}{dx} + \dfrac{dT_1}{dy} + \dfrac{dN_3}{dz} + \rho\, Z_0 = 0
\end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3).$$

20 Taes são as equações que exprimem o equilibrio de elasticidade d'um corpo solido, que póde ser decomposto em parallelipipedos como aquelle que considerámos, isto é, cuja superficie só contenha faces parallelas aos tres planos de coordenadas.

Quando porém as superficies que terminam o solido, do qual pretendemos obter as equações do equilibrio de elasticidade, não forem todas parallelas aos planos das coordenadas, e houver algumas que lhes sejam obliquas, precisamos para encontrar aquellas equações de recorrer a considerações de outra ordem.

Tal é a origem da introducção, na theoria mathematica de elasticidade dos corpos solidos, do tetraedo elementar, introducção devida a *M. Chauchy* e que é de summa importancia pelas vantagens que apresenta para obter aquellas equações.

21 Quando o solido que se considera não é decomponivel em parallélipipedos, cujas faces sejam respectivamente parallelas aos planos das coordenadas, faz-se a decomposição do solido por meio de tetraedos elementares ao equilibrio dos quaes é preciso attender para obter as equações do seu equilibrio de elasticidade.

Consideremos um d'estes tetraedros elementares; tomemos para vertice o ponto mais proximo da origem, para base a face triangular opposta, e colloquemos o tetraedro de tal maneira, que as arestas que partem do vertice sejam respectivamente parallelas aos tres eixos das coordenadas.

Chamando ϖ a base do tetraedro, λ, μ, ν os cosenos dos angulos que a normal á base faz com os trez eixos, e a, b, c as tres faces lateraes d'aquelle teremos, em virtude de um theorema bem conhecido d'analyse,

$$a = \lambda\varpi, b = \mu\varpi, c = \nu\varpi.$$

Para que este tetraedro esteja em equilibrio de elasticidade, é preciso que as sommas das componentes das forças, tanto externas como desenvolvidas pela acção mutua das moleculas umas sobre outras, parallelamente a cada um dos eixos, sejam nullas.

Ora, em virtude do que dissemos em o numero antecedente, as componentes das forças de elasticidade que actuam sobre a face a, são,

parallelamente ao eixo dos x, $-N_1\lambda\varpi$

» » » » y, $-T_3\lambda\varpi$

» » » » z; $-T_2\lambda\varpi$.

As componentes das forças de elasticidade exercidas sobre a face b, são,

parallelamente ao eixo dos x, $-T_3\mu\varpi$

» » » » y, $-N_2\mu\varpi$

» » » » z, $-T_1\mu\varpi$.

Finalmente as componentes da mesma força que actuam sobre a ultima face c, são,

$$\begin{array}{lr} \text{parallelamente ao eixo dos } x, & -T_2\,\nu\,\varpi \\ \quad\text{»}\quad\text{»}\quad\text{»}\quad\text{»}\ y, & -T_1\,\nu\,\varpi \\ \quad\text{»}\quad\text{»}\quad\text{»}\quad\text{»}\ z, & -N_3\,\nu\,\varpi. \end{array}$$

Designando, como antecedentemente, por ρ a densidade do corpo solido, as componentes das forças externas que actuam sobre o tetraedro, serão

$$\rho\, X_0\,\omega,\ \rho\, Y_0\,\omega,\ \rho\, Z_0\,\omega,$$

chamando ω o volume d'elle. Como porém estes termos são de terceira ordem, podemos desprezal-os em presença dos outros que são de segunda.

Resta-nos considerar as componentes da força de elasticidade relativas á face inclinada ϖ. Designando estas componentes por X, Y e Z, quando referidas á unidade de superficie, serão para o plano ϖ, ϖX, ϖY e ϖZ.

Formando agora as sommas das componentes, segundo cada um dos eixos, teremos

$$\left.\begin{array}{l} X=\lambda N_1+\mu T_3+\nu T_2 \\ \\ Y=\lambda T_3+\mu N_2+\nu T_1 \\ \\ Z=\lambda T_2+\mu T_1+\nu N_3 \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4),$$

depois de as ter dividido por ϖ.

As equações (4) conjunctamente com as equações (3) exprimem o equilibrio da elasticidade d'uma porção qualquer d'um meio solido.

CAPITULO III

Applicação das equações geraes, achadas no capitulo antecedente, ao problema da corda vibrante

«Après avoir établi les équations de l'élasticité des corps solides...., il convient de les appliquer d'abord aux deux cas extrêmes d'une corde mince...., en équilibre ou en vibration.»

LAMÉ.

22 Consideremos uma corda elastica, perfeitamente flexivel, homogenea, de secção constante, estendida em linha recta por uma força equivalente a um pezo dado, P, que augmente o seu comprimento l da quantidade ε, tendo as suas extremidades fixas: affastemol-a um pouco da posição primitiva, e deixemol-a depois entregue a si mesmo, de maneira que ella entre em vibração: o problema que pretendemos resolver consiste em descobrir as leis d'este movimento vibratorio; isto é, em determinar em cada instante a sua posição e as velocidades dos seus differentes pontos.

Vamos, em primeiro logar, estabelecer as equações de equilibrio de uma corda nestas condições, servindo-nos, para isso, das equações geraes do equilibrio de elasticidade dos corpos solidos que encontrámos no capitulo anterior; e, lançando mão do principio de *D'Alembert*, acharemos depois as equações que nos hão de dar as leis do seu movimento.

Seja ϖ a secção do fio que consideramos, perpendicular ao eixo, e imaginemos que esta secção é tão pequena, que, em toda a sua extensão, as forças de elasticidade conservam a mesma intensidade e a mesma direcção; e supponhamos ainda que as forças que actuam nas extremidades do fio e sobre as differentes partes da sua massa são sufficientes, para que haja equilibrio de elasticidade, sem que sobre a face lateral actue força alguma elastica.

É claro que o equilibrio não será alterado, se attendermos tão sómente aos pontos do eixo; isto é, aos pontos que formam o filete medio, e desprezarmos todo o resto do meio; e, como isto torna o problema mais facil, consideral-o-hemos assim: é o modo como se consideram os fios em *Mechanica Racional.*

Tomando, para variavel independente, o arco s do eixo contado desde uma das extremidades do fio até ao ponto M, em que a secção ϖ encontra o eixo, que, em geral, será curvo, em virtude das deformações que as forças da elasticidade lhe fazem soffrer; as formulas (4) que encontrámos no n.º 21 da segunda parte tornar-se-hão em

$$\left.\begin{aligned} X &= N_1\frac{dx}{ds} + T_3\frac{dy}{ds} + T_2\frac{dz}{ds} \\ Y &= T_3\frac{dx}{ds} + N_2\frac{dy}{ds} + T_1\frac{dz}{ds} \\ Z &= T_2\frac{dx}{ds} + T_1\frac{dy}{ds} + N_3\frac{dz}{ds} \end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1);$$

visto que os cosenos dos angulos que ali tinhamos representado por λ, μ e ν são agora respectivamente $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$ e $\frac{dz}{ds}$.

23 Tomemos agora um ponto M' sobre o perimetro de ϖ; e designemos por a, b e c os cosenos dos angulos que a normal a ϖ, tirada pelo ponto M', faz com os eixos dos x, y e z; por um principio bem conhecido de analyse, e attendendo a que esta normal pode ser considerada como perpendicular á tangente ao eixo no ponto considerado, teremos immediatamente

$$\left.\begin{aligned} a^2+b^2+c^2 &= 1 \\ a\frac{dx}{ds}+b\frac{dy}{ds}+c\frac{dz}{ds} &= 0 \end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Por outra parte, como nós suppozemos que a secção ϖ era sufficiente-mente pequena para que as forças elasticas fossem em toda a sua extensão as mesmas, tanto em intensidade como em direcção, e que a força elastica exercida lateralmente era nulla; resulta

$$\left.\begin{aligned} N_1 a + T_3 b + T_2 c = 0 \\ T_3 a + N\ b + T_1 c = 0 \\ T_2 a + T_1 b + N_3 c = 0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (3),$$

sejam quaes forem os valores de a, b e c, contanto que satisfaçam ás equações (2); isto é, seja qual fôr a posição de M' sobre o perimetro de ϖ.

Resulta d'aqui que cada uma das equações (3) deve ser identica com a segunda das equações (2); o que exige, que se tenha

$$\left.\begin{aligned} N_1 = T\left(\frac{dx}{ds}\right)^2,\ N_2 = T\left(\frac{dy}{ds}\right)^2,\ N_3 = T\left(\frac{dz}{ds}\right)^2 \\ T_1 = T\,\frac{dy}{ds}.\,\frac{dz}{ds},\ T_2 = T\,\frac{dz}{ds}.\,\frac{dx}{ds},\ T_3 = T\,\frac{dx}{ds}.\,\frac{dy}{ds} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (4);$$

sendo T uma funcção ou força elastica que logo determinaremos.

Substituindo os valores (4) nas equações (1), e attendendo a que

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1;$$

resulta

$$X = T\,\frac{dx}{ds},\ Y = T\,\frac{dy}{ds},\ Z = T\,\frac{dz}{ds} \ldots\ldots\ldots\ldots (5);$$

o que mostra que T é a força elastica exercida sobre a secção ϖ, e que esta força actua parallelamente á tangente ao eixo; isto é, normalmente.

Costuma-se designar esta força elastica T por tensão do fio no ponto M.

24 Designando por X_0, Y_0 e Z_0, as componentes das forças externas parallelamente a cada um dos eixos das coordenadas, relativos á unidade da massa; serão

$$\rho X_\circ \varpi \, ds, \ \rho Y_\circ \varpi \, ds, \ \rho Z_\circ \varpi \, ds,$$

as componentes das forças externas que actuam sobre a massa $\rho \varpi ds$, chamando ρ a densidade no ponto M, e considerando o elemento ϖds, comprehendido entre as duas secções normaes infinitamente proximas, ϖ e ϖ'.

Considerando as componentes das forças elasticas que actuam sobre as faces ϖ e ϖ' (n.° 18 — 2.ª Parte) e attendendo ás componentes das forças externas que acabamos de encontrar; as equações do equilibrio do elemento $\rho \varpi ds$ serão

$$\frac{d. X\varpi}{ds} + \rho X_\circ \varpi = 0, \ \frac{d. Y\varpi}{ds} + \rho Y_\circ \varpi = 0,$$

$$\frac{d. Z\varpi}{ds} + \rho Z_\circ \varpi = 0,$$

ou, substituindo por X, Y e Z os seus valores dados pelas equações (5),

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d. \varpi T \dfrac{dx}{ds}}{ds} + \rho \varpi X_\circ = 0, \ \dfrac{d. \varpi T \dfrac{dy}{ds}}{ds} + \rho \varpi Y_\circ = 0 \\ \qquad\qquad \dfrac{d. \varpi T \dfrac{dz}{ds}}{ds} + \rho \varpi Z_\circ = 0. \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6).$$

D'estas equações deduz-se tudo o que diz respeito ao equilibrio d'um fio flexivel; porém, como o nosso proposito consiste apenas em estudar os seus pequenos movimentos, sómente recordaremos aqui, pois que teremos logo de lançar mão d'elle, o seguinte theorema.

Designando por δ a dilatação linear no ponto M, por E o coefficiente de elasticidade, e por T a tensão no mesmo ponto; teremos

$$\delta = ET;$$

isto é, a dilatação 'num ponto qualquer é egual á tensão no mesmo ponto, multiplicada pelo coefficiente de elasticidade.

Este theorema, ainda que mui vulgar, deduz-se immediatamente do de *Clapeyron*, conhecido ordinariamente debaixo do nome *de principio de trabalho das forças elasticas.*

25 Como suppozemos que o fio estava estendido sobre o eixo dos x, as coordenadas de um ponto qualquer do fio serão, na sua posição primitiva $(x, 0, 0)$; porém, se o desviarmos da sua posição natural, ainda que pouco, e o deixarmos depois entregue a si mesmo, elle entrará em vibração, e as coordenadas do ponto que considerámos, tornar-se-hão, no fim do tempo t, em $(x + u_0 + u, y, z)$, designando por u, y e z os augmentos que soffrem as coordenadas, devidos ao movimento vibratorio, e u_0 o augmento que experimenta x em virtude da tracção exercida pelo pezo P; sendo portanto, u, y e z funcções de t e x, e u_0 simplesmente funcção de x.

A dilatação linear δ, de que fallámos em o numero antecedente, consta, por conseguinte, de duas partes: uma $\frac{du_0}{dx}$, devida unicamente á acção do pezo P, e que é, portanto, constante em toda a extensão do fio, e egual a $\frac{\varepsilon}{l}$; a outra parte, $\frac{du}{dx}$, é devida ao movimento vibratorio que anima todos os pontos da corda.

Em virtude do theorema que atraz enunciámos, teremos

$$TE = \frac{du_0}{dx} + \frac{du}{dx} = \frac{\varepsilon}{l} + \frac{du}{dx};$$

derivando em ordem a x, resulta

$$\frac{dT}{dx} = \frac{1}{E} \cdot \frac{d^2u}{dx^2}.$$

Como o pezo P é qualquer podemos sempre tomal-o assás grande para que se possa desprezar: 1.º a dilatação proveniente do movimento vibratorio em presença da produzida por aquelle pezo; 2.º o pezo das differentes partes da corda em presença d'aquelle pezo.

Assim teremos

$$T=\frac{1}{E}\cdot\frac{\varepsilon}{l}=\frac{P}{\varpi},\ \frac{1}{E}=\frac{l}{\varepsilon}\cdot\frac{P}{\varpi},$$

attendendo a que T é a tensão exercida sobre a secção ϖ, e desenvolvida pela acção do pezo P.

Como suppozemos que affastavamos a corda muito pouco da sua posição natural, a expressão

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}=dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2},$$

que é a differencial do arco da curva, que elle forma, tornar-se-ha em

$$ds=dx$$

desprezando os quadrados de $\frac{dy}{ds}$ e $\frac{dz}{ds}$.

26 Designámos (n.º 24 — 2.ª Parte) por

$$\rho X_0 \varpi\, ds,\ \rho Y_0 \varpi\, ds,\ \rho Z_0 \varpi\, ds,$$

as componentes das forças externas que actuam sobre a massa $\rho\,\varpi\, ds$, parallelamente a cada um dos eixos; as componentes, segundo estes mesmos eixos, da força perdida durante o instante dt serão (*Mechanica* do ex.mo sr. dr. Castro — n.º 188).

$$\rho\,\varpi\, ds\left(X_0-\frac{d^2u}{dt^2}\right),\ \rho\,\varpi\, ds\left(Y_0-\frac{d^2y}{dt^2}\right),\ \rho\,\varpi\, ds\left(Z_0-\frac{d^2z}{dt^2}\right),$$

por isso que $x+u_0$ é constante em relação ao tempo.

E como as equações de equilibrio d'estas forças são as do movimento de corda *(Principio de D'Alembert)*, não temos mais, para obter as equações do movimento da corda, do que substituir nas equações (6), por X_0, Y_0 e Z_0 as expressões

$$\left(X_0-\frac{d^2u}{dt^2}\right),\ \left(Y_0-\frac{d^2y}{dt^2}\right),\ \left(Z_0-\frac{d^2z}{dt^2}\right),$$

ou simplesmente,

$$-\frac{d^2u}{dt^2},\ -\frac{dy^2}{dt^2},\ -\frac{d^2z}{dt^2};$$

attendendo ás hypotheses que fizemos em o numero anterior.

Chamando p o pezo total da corda; isto é, fazendo

$$p=g\rho\varpi l,$$

resulta

$$\rho\varpi=\frac{p}{gl}.$$

Attendendo a este valor, a que ϖ é constante, e finalmente a que

$$ds=dx,$$

as equações (6) tornar-se-hão em

$$\frac{d^2u}{dt^2}=\alpha^2\frac{d^2u}{dx^2},\ \frac{d^2y}{dt^2}=a^2\frac{d^2y}{dx^2},\ \frac{d^2z}{dt^2}=a^2\frac{d^2z}{dx^2}\ldots\ldots\ldots\ (7),$$

fazendo, para abreviar,

$$\frac{gP}{\varepsilon p}l^2=\alpha^2,\ \frac{gP}{p}l=a^2\ldots\ldots\ldots\ldots\ (8).$$

27 As equações (7) resolvem completamente o problema das cordas vibrantes; a primeira dá-nos as *vibrações longitudinaes* da corda; as outras duas as *vibrações transversaes.*

Attendendo á forma d'aquellas equações, vê-se que as vibrações transversaes são as mesmas, quer se façam no sentido do eixo dos y, quer no sentido do eixo dos z; e que as vibrações longitudinaes seguem as mesmas leis que as transversaes differindo sómente nas grandezas differentes dos coefficientes a^2 e α^2. Como, além d'isto, as variaveis se acham separadas naquellas equações, as vibrações no sentido d'um dos eixos são independentes das vibrações no sentido dos outros dois.

A consideração, que ha pouco fizemos, de que as vibrações transversaes são as mesmas no sentido dos eixos dos y e dos z, e que as longitudinaes só variam d'aquellas na relação de α para a, simplifica immenso a discussão do problema; visto que basta estudar as leis que regem umas d'aquellas vibrações, e concluir d'ahi, por uma simples mudança de letras, as leis que regem as outras vibrações.

CAPITULO IV

Solução geral do problema em termos finitos

«Cette méthode est sûrement une des plus ingénieuses, qu'on est tiré jusqu'ici de l'analyse.»

LAGRANGE.

28 Como já dissemos, quando fizemos a historia d'este problema, por dois methodos differentes se póde fazer a integração das equações (7) do n.º 25 ; ou, integrando-as debaixo de forma finita, ou por meio de series trigonometricas de coefficientes indeterminados.

Usaram do primeiro modo de integracção *D'Alembert* e *Euler*, e d'elle deduziram tudo quanto diz respeito ás suas pequenas vibrações, attendendo ás condições dadas que resultam do estado inicial da corda e da fixidez das suas extremidades, para determinarem as duas funcções arbitrarias que entram no seu integral primitivo.

Lançando mão das mesmas condições para obter os coefficientes indeterminados, achou *Lagrange*, primeiro que ninguem, a solução do problema, usando do segundo methodo de integracção.

Depois d'isto determinaram *Euler* e *D. Bernnoulli* as vibrações das laminas elasticas para todos os casos em que as extremidades da corda vibrante se possam encontrar. As suas soluções são fundadas, como a de *Lagrange* na sobreposição d'um numero qualquer de soluções particulares; faltou-lhes porém demonstrar que aquellas soluções podem sempre representar o estado inicial da corda : se porém, theoricamente, esta falta é grande e deixa a solução incompleta, com tudo na pratica é de pequena ou nenhuma importancia, visto que as leis que elles encontraram são, em todos os pontos, concordes com as que se têm deduzido da experiencia.

29 Vimos (n.º 27) que, para obter as leis que seguem os movimentos vibratorios d'uma corda elastica, basta considerar as vibrações no sentido de qualquer dos eixos, porque d'ellas facilmente se deduzem as que têm logar no sentido dos outros dois.

Vamos portanto considerar as vibrações transversaes no sentido dos y, que são exactamente as mesmas que as consideradas no sentido do eixo dos z; e depois indicaremos as leis que dizem respeito ás vibrações longitudinaes.

A equação differencial parcial de segunda ordem, que nos dá as vibrações no sentido do eixo dos y, é (n.º 26 — 2.ª das eq. (7))

$$\frac{d^2y}{dt^2}=a^2\frac{d^2y}{dx^2}.$$

Para integrar esta equação debaixo da forma finita, empregaremos o processo exposto no n.º 15 da 1.ª parte.

As equações (11) d'aquelle numero, attendendo a que as variaveis t, x e y d'aqui são lá respectivamente x, y e z, em o nosso caso tornam-se

$$\left.\begin{aligned} dx^2-a^2\,dt^2=0 \\ dpdx-a^2\,dqdt=0 \end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots(1);$$

sendo agora

$$p=\frac{dy}{dt},\ q=\frac{dy}{dx}.$$

A primeira das equações (1) dá

$$dx=\pm\, adt,$$

e portanto

$$\lambda'=a,\ \lambda''=-a.$$

As equações (12) do mesmo numero, dar-nos-hão por consequencia

$$dx-adt=0$$

$$dp-adq=0,$$

ou, integrando-os

$$x - at = \alpha,$$

$$p - aq = \beta,$$

que conduzem ao primeiro integral de primeira ordem da equação dada

$$p - aq = F'(x - at) \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

As equações (13), sendo tractadas do mesmo modo, dão o outro integral de primeira ordem

$$p + aq = f'(x + at) \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Attendendo ás equações (2) e (3), deduz-se

$$p = \frac{1}{2}\left\{ F'(x - at) + f'(x + at) \right\}$$

$$q = \frac{1}{2a}\left\{ - F'(x - at) + f'(x + at) \right\};$$

substituindo estes valores na equação identica,

$$dy = pdt + qdx,$$

resulta

$$dy = \frac{1}{2}\, dt\, F'(x - at) - \frac{1}{2a}\, dx\, F'(x - at) + \frac{1}{2}\, dt\, f'(x + at) + \frac{1}{2a}\, dx\, f'(x + at),$$

que tem por integral

$$y = -\frac{1}{2a} F(x - at) + \frac{1}{2a} f(x + at),$$

ou

$$y = f(x + at) + F(x - at), \ldots\ldots\ (4).$$

fazendo passar para debaixo das funcções arbitrarias F e f as quantidades constantes $-\frac{1}{2a}$ e $\frac{1}{2a}$; o que em nada altera a generalidade da integração.

A equação (4) é o integral completo, visto conter duas funcções arbitrarias, da equação proposta.

30 *D'Alembert*, que foi o primeiro que integrou esta equação e obteve a expressão precedente, não se serviu do processo geral de que acabamos de fazer uzo.

O calculo ás differenças parciaes ainda então não existia, e as integrações das equações differenciaes d'esta especie faziam-se, usando de methodos particulares para cada uma das equações que se apresentavam.

Comtudo, como foi *D'Alembert* que lançou os fundamentos d'aquelle calculo, e o primeiro que resolveu completamente este problema, vamos indicar muito succintamente o processo de que elle se serviu para obter o integral primitivo da equação ás differenças parciaes da segunda ordem, que tinha encontrado tambem por um methodo particular; em quanto nós o deduzimos da theoria geral da elasticidade dos corpos solidos.

A equação de *D'Alembert* era

$$\frac{d^2z}{dy^2} = a^2 \frac{d^2z}{dx^2},$$

que punha debaixo da fórma

$$\frac{dq}{dy} = a^2 \frac{dp}{dx}.$$

Para obter o integral d'esta equação, partia *D'Alembert* das duas equações (1.ª Parte — n.º 13)

$$dp = rdx + sdy,$$

$$dq = sdx + tdy = sdx + a^2rdy;$$

multiplicando por a a primeira d'estas equações, sommando-as depois primeiro e subtraindo-as em seguida, resultavam-lhe as duas equações seguintes,

$$adp + dq = (ar + s)\ (dx + ady)$$

$$adp - dq = (ar - s)\ (dx - ady);$$

das quaes concluia: 1.° que $ar + s$ deve ser funcção de $x + ay$; 2.° que $ar - s$ deve ser funcção de $x - ay$, visto que os primeiros membros são differenciaes exactas; de maneira que devia ser,

$$ap + q = f\ (x + ay)$$

$$ap - q = F\ (x - ay).$$

Tendo encontrado d'esta maneira os dois integraes da primeira ordem, lançava mão do meio de que nos servimos para obter o integral primitivo da equação proposta. É este o processo de que se serviu quando pela primeira vez integrou a equação das cordas vibrantes (*Acad. das Scienc. de Berlim* — p.ᵉ 1847); nos seus opusculos intégra a mesma equação d'um modo um pouco differente (*a*).

(*a*) Para integrar a mesma equação, *Euler* introduziu, em logar das variaveis x e y, duas novas variaveis α e β, obrigadas a satisfazer ás condições

$$\alpha = x + by,\ \beta = x + cy,$$

designando por b e c duas indeterminadas; de maneira que z se torna em uma funcção de α e β, as quaes são ao mesmo tempo funcções de x e y. Teremos, por tanto,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dx} + \frac{dz}{d\beta} \cdot \frac{d\beta}{dx},$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{dz}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dy} + \frac{dz}{d\beta} \cdot \frac{d\beta}{dy},$$

ou, attendendo aos valores de $\frac{d\alpha}{dx}, \frac{d\alpha}{dy}, \frac{d\beta}{dx}$ e $\frac{d\beta}{dy}$,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{d\alpha} + \frac{dz}{d\beta},$$

$$\frac{dz}{dy} = b\frac{dz}{d\alpha} + c\frac{dz}{d\beta};$$

31 Como vimos (n.º 29), a equação finita que nos dá as vibrações transversaes da corda elastica no sentido do eixo dos y é

$$y = f(x + at) + F(x - at) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4);$$

á qual devemos juntar as condições relativas á fixidez das suas extremidades e ao estado inicial da corda, que são sufficientes para determinar a natureza das funcções arbitrarias f e F.

Supponhamos que na origem do movimento, isto é, quando

$$t = 0,$$

temos

$$y = \varphi(x), \quad \frac{dy}{dt} = \psi'(x).$$

---

donde se deduz

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{d^2 z}{d\alpha^2} + 2\frac{d^2 z}{d\alpha\, d\beta} + \frac{d^2 z}{d\beta^2}$$

$$\frac{d^2 z}{dy^2} = b^2 \frac{d^2 z}{d\alpha^2} + 2bc\frac{d^2 z}{d\alpha\, d\beta} + c^2 \frac{d^2 z}{d\beta^2},$$

que substituidas na equação

$$\frac{d^2 z}{dy^2} = a^2 \frac{d^2 z}{dx^2},$$

a reduzem a

$$(b^2 - a^2)\frac{d^2 z}{d\alpha^2} + 2(bc - a^2)\frac{d^2 z}{d\alpha\, d\beta} + (c^2 - a^2)\frac{d^2 z}{d\beta^2} = 0.$$

Depois de ter obtido esta equação, *Euler* fazia

$$b = a, \; c = -a,$$

o que reduz a equação precedente a

$$\frac{d^2 z}{d\alpha\, d\beta} = 0,$$

cujo integral é, como facilmente se verá,

$$z = f(x + ay) + F(x - ay).$$

a equação (4) dá nesta hypothese,

$$f(x)+F(x)=\varphi(x)$$

$$f'(x)-F'(x)=\frac{1}{a}\psi'(x);$$

donde se deduz

$$\left.\begin{aligned} f(x)&=\frac{1}{2}\varphi(x)+\frac{1}{2}\psi(x) \\ F(x)&=\frac{1}{2}\varphi(x)-\frac{1}{2}\psi(x) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (5),$$

fazendo para abreviar,

$$\frac{1}{a}\int\psi'(x)\,dx=\psi(x).$$

Como a corda está comprehendida entre os pontos cujas abscissas são

$$x=0 \text{ e } x=l;$$

as funcções φ e ψ são dadas sómente para os valores de x comprehendidos entre 0 e l; e, por consequencia, as funcções arbitrarias f e F, que dependem d'elles, são tambem sómente conhecidas entre aquelles limites.

32 Porém, para que o valor (4) de y tenha uma significação analytica, seja qual fôr o tempo t; é preciso conhecer as funcções f e F para valores da variavel que não estejam comprehendidos entre os limites 0 e l: como já dissemos, as condições da fixidez das extremidades da corda vão-nos servir para determinar estas duas funcções para os valores da variavel x comprehendidos entre $-\infty$ e $+\infty$.

Como as extremidades da corda estão fixas, é preciso que se tenha

$$y=0,$$

quando fôr

$$x=0 \text{ e } x=l.$$

Estas condições combinadas com a equação (4) conduzem-nos ás duas seguintes:

$$\left.\begin{array}{r} f(z)+F(-z)=0 \\ f(l+z)+F(l-z)0 \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6),$$

designando por z a quantidade at, que pode ter qualquer valor.

As funcções f e F, que, como vimos, se deduzem das funcções φ e ψ, só são determinadas para os valores da variavel comprehendidos entre 0 e l; porém as equações (6) dão-nos o modo de as determinar completamente.

A primeira d'estas duas equações faz com que as funcções f e F, que são determinados sómente para valores positivos da variavel, sejam tambem conhecidas para os valores negativos d'essa variavel. Com effeito, d'ella deduz-se

$$F(-z)=-f(z),$$

que determina a funcção F para os valores negativos da variavel. E, mudando n'ella z em $-z$, conclue-se tambem,

$$f(-z)=-F(z),$$

que nos faz conhecer a funcção f para os valores negativos da variavel.

Mudando na segunda das equações (6) z em $z+l$, resulta

$$f(2l+z)+F(-z)=0,$$

que, attendendo á primeira das mesmas equações, se reduz a

$$f(2l+z)=f(z);$$

donde se conclue desde já que a funcção f é periodica, e que o seu periodo corresponde á extensão $2l$ da variavel.

Mudando agora na mesma equação z em $z-l$, resulta

$$f(z)+F(2l-z)=0,$$

que, combinada com a primeira d'aquellas equações, dá

$$F(2l-z)=F(-z).$$

Como esta equação tem logar, seja qual fôr a grandeza e o signal de z, ou at; conclue-se, do mesmo modo que em cima, que a funcção F é periodica, e que a extensão do seu periodo é tambem $2l$.

D'esta maneira se vê que as funcções f e F ficam determinadas para todos os valores da variavel desde $-\infty$ até $+\infty$.

33 Tendo encontrado, como fica dito, os limites em que ficam comprehendidos os valores da variavel, para os quaes as funcções arbitrarias que resolvem o problema são determinadas; vamos agora mostrar como se podem construir geometricamente as curvas produzidas pelas vibrações da corda elastica; isto é, vamos mostrar como se podem construir geometricamente as posições dos seus differentes pontos, em um tempo qualquer.

Muitos processos differentes se têm empregado para fazer estas construcções, sendo, na verdade, o mais elegante d'elles o apresentado por *Poisson* (a); porém, como estas construcções se podem vêr hoje em qualquer livro elementar, vamos, em logar de expôr qualquer d'aquelles processos, indicar o caminho que *Euler* e *D'Alémbert* seguiram para as obter, e que se não acha indicado em nenhum dos livros conhecidos, que ordinariamente se consultam.

34 Ninguem ignora que toda e qualquer funcção póde ser representada por uma linha curva, cuja ordenada exprime uma certa funcção da abscissa.

Ora, se nós construirmos as curvas representadas pelas equações

$$y=f(x),\ Y=F(x),$$

conclue-se desde logo que ellas serão symetricas uma da outra em relação á origem das coordenadas, attendendo á primeira das equações (6): e tambem que, tomando as abscisas negativas, as ordenadas se tormam ao mesmo tempo negativas, conservando todavia o mesmo valor. Assim as duas curvas se reduzem a uma unica tal, que ás abscisas negativas corresponde um ramo similhante ao que diz respeito ás abscisas positivas, collocado porém, do outro lado do eixo.

(a) *Traité de Mech.*— tomo 2.°

E, como já mostrámos que as funcções f e F são periodicas, sendo $2l$ a extensão do seu periodo, conclue-se ainda que não é só em volta da origem das coordenadas que a curva tem ramos alternadamente similhantes, mas que isto mesmo acontece em volta do ponto onde termina a abscissa egual a $2l$. D'onde se segue que ella deve ter um numero infinito de pontos taes, affastados entre si do mesmo intervallo $2l$, em volta dos quaes os ramos da curva são alternadamente eguaes.

Foi seguindo esta marcha que *Euler* e *D'Alembert* construiram a curva representada pela equação das cordas vibrantes; differindo os seus processos, apenas, em que *Euler* affirmava que a curva inicial podia ser qualquer, continua ou descontinua, em quanto *D'Alembert* sustentava que, em todos os casos, aquella curva devia estar sugeita á lei de continuidade.

35 Como vimos é

$$f(2l+z)=f(z),$$

ou, repondo por z o seu valor at,

$$f(2l+at)=f(at);$$

d'onde se conclue que a corda tornará ao mesmo estado no fim de cada intervallo de tempo egual a$\frac{2l}{a}$: logo a corda executará uma serie indefinida de oscillações *isochrones* e similhantes sendo $\frac{2l}{a}$ a duração de cada oscillação inteira.

Designando, pois, por n o numero de oscillações que têm logar na unidade de tempo, e por T o tempo de cada oscillação; resultará

$$T=\frac{2l}{a},\ n=\frac{a}{2l}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{gP}{pl}} \ldots\ldots\ldots\ldots (7).$$

Se a corda oscillasse no vasio e as suas extremidades se conservassem rigorosamente fixas aconteceria o que dissemos em cima — a corda executaria uma serie indefinida de oscillações isochrones e similhantes, cuja duração seria de $\frac{2l}{a}$ para cada oscillação completa; mas, como este movimento se faz ao ar livre e sempre se communica alguma parte d'elle ás extremidades; a amplitude das oscillações, sem estas deixarem de ser sensivelmente isochrones, vai comtudo diminuindo constantemente até que se torna nulla.

Como a elevação do *som* d'uma corda sonora depende do numero de oscillações que ella faz na unidade de tempo, e n nos dá este numero de oscillações; segue-se que o *som* é determinado por este numero, que, como se vê, é independente da amplitude das oscillações.

36 Como dissemos no n.° 27, para ter as leis que regem as vibrações longitudinaes, basta mudar, nas formulas que dizem respeito ás vibrações transversaes a em α, e concluir essas leis sem fazer o calculo de novo.

D'aqui resulta que, se designarmos por T' e n' a duração d'uma vibração longitudinal completa, e o numero de oscillações d'esta especie que a corda faz na unidade de tempo; teremos

$$T'=\frac{2l}{\alpha},\ n'=\frac{\alpha}{2l}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{gP}{\varepsilon p}}.$$

A experiencia indica que o *som* longitudinal d'uma corda sonora augmenta um pouco com a tensão; o que é conforme com a formula que acabamos de obter; pois, como vimos em o n.° anterior, o *tom* é medida pelo numero n', que se acha expresso em P.

Este facto explica-se muito facilmente do modo seguinte: augmentando o pêso que estende a corda, allonga-se esta; porém, como tem as suas extremidades fixas, conserva o mesmo comprimento: mas a sua espessura e a sua densidade diminuem um pouco, o que faz augmentar o numero das vibrações, e por tanto elevar o *som*.

37 Dividindo, uma pela outra, as expressões que nos dão os numeros de vibrações longitudinaes e transversaes; achamos

$$\frac{n'}{n}=\sqrt{\frac{l}{\varepsilon}}.$$

A experiencia tem confirmado esta formula: assim *M. Cagniard-Latour,* servindo-se d'uma corda do comprimento de 14^m8, achou apenas de differença entre o allongamento medido directamente e o deduzido d'esta formula $\frac{1}{25}$, erro muito pequeno, principalmente attendendo aos erros inevitaveis da observação.

38 As leis, que acabamos de deduzir são as que dizem respeito a uma corda de grandeza limitada, preza pelas suas extremidades: porém as equações d'onde aquellas leis se deduzem podem dar-nos tambem as que regem o movimento d'uma corda indefinida, que tem dois pontos fixos, e que se confunde entre estes pontos com a corda finita.

CAPITULO V

Solução geral do problema por meio de series trigonometricas

> Dans toutes les questions de Physique-mathématique, c'est le même problème d'analyse qui se presente, avec quelques différences dans la forme ou dans l'énoncé. Les géomètres modernes ont complètement resolu ce problème dans un grand nombre de cas, et c'est là une de leurs découvertes les plus utiles.
>
> LAMÉ.

Vamos, para terminar este novo estudo sobre as vibrações das cordas, indicar a maneira como se póde resolver o problema por meio de series trigonometricas, processo primeiro usado por *Lagrange,* como já tivemos occasião de dizer em outro logar.

Antes, porém, vamos, em breves traços, achar a solução particular dada por *Taylor*.

39 Como vimos (segunda parte — n.° 26), a equação que nos dá as vibrações transversaes da corda no sentido do eixo dos y é

$$\frac{d^2y}{dt^2}=a^2\frac{d^2y}{dx^2}.$$

Tomando

$$y=(A\ sen\ mx+B\ cos\ mx)\ cos\ ht$$

e, substituindo este valor na equação precedente, acha-se

$$h=\pm am,$$

o que torna o valor de y em

$$y=(A\ sen\ mx+B\ cos\ mx)\ cos\ mat.$$

Se as duas extremidades da corda estiverem fixas, isto é, se y fôr nullo quando

$$x=0,\ e\ x=l$$

esta equação reduz-se a

$$y=A\,sen\frac{i\pi x}{l}\cos\frac{i\pi at}{l},$$

sendo i um inteiro qualquer differente de zero, pois que se fôsse nullo não estaria a corda em vibração.

Chamando, como fizemos em o n.º 35, n o numero de oscillações em cada unidade de tempo e T o tempo d'uma oscillação completa, teremos

$$T=\frac{2l}{ai},\ n=\frac{ai}{2l}.$$

n é a altura do *som*. Fazendo

$$i=1,$$

acha-se o *som fundamental*

$$n_1=\frac{a}{2l}=\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{gP}{pl}},$$

como encontrámos atraz.

Tomando este *som* para base, todos os estados vibratorios que aquella formula representa formarão a serie natural dos numeros 1, 2, 3,...

40 No capitulo 3.º da primeira parte, vimos que era sempre possivel, por meio da formula de *Lagrange*, desenvolver uma funcção arbitraria qualquer em serie de senos ou cosenos de arcos proporcionaes á variavel.

Sejam, pois, quaes forem as funcções $\varphi(x)$ e $\psi'(x)$ do n.º 31 d'esta segunda parte, comtanto que sejam nullas quando fôr

$$x=0,\ x=l,$$

teremos (*a*)

(*a*) Estes desenvolvimentos deduzem-se muito facilmente tomando a segunda parte do valor de $\varphi(x)$ que se acha no n.º 42 da primeira parte, e fazendo nella uma mudança conveniente de variaveis.

$$\left.\begin{aligned}\varphi x&=\frac{2}{l}\Sigma\left(\int_0^l \varphi x' sen\frac{i\pi x'}{l}dx'\right)sen\frac{i\pi x}{l},\\ \psi' x&=\frac{2}{l}\Sigma\left(\int_0^l \psi' x' sen\frac{i\pi x'}{l}dx'\right)sen\frac{i\pi x}{l}\end{aligned}\right\}\ldots\ldots (1)$$

Posto isto, é claro que a equação

$$\frac{d^2y}{dt^2}=a^2\frac{d^2y}{dx^2}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

que nos dá o movimento da corda, parallelamente ao eixo dos y, ficará satisfeita, todas as vezes que tomarmos

$$\left.\begin{aligned}y=&\frac{2}{l}\Sigma\left(\int_0^l \varphi x' sen\frac{i\pi x'}{l}dx'\right)sen\frac{i\pi x}{l}\,cos\frac{i\pi at}{l}+\\ &+\frac{2}{\pi a}\Sigma\left(\int_0^l \psi' x' sen\frac{i\pi x'}{l}dx'\right)sen\frac{i\pi x}{l}\,sen\frac{i\pi at}{l}\end{aligned}\right\}\ldots\ldots (3).$$

Com effeito, cada um dos termos d'este valor satisfaz em separado á equação (2), como se póde verificar *á posteriori:* se fizermos

$$x=0$$

ou

$$x=l$$

resulta

$$y=0,$$

como deve ser em virtude de fixidez das extremidades, seja qual fôr t. Finalmente, derivando o valor (3) de y, em ordem a t e fazendo no resultado e em (3)

$$t=0,$$

resultam para $\frac{dy}{dt}$ e y os valores de $\psi' x$ e φx attendendo ás equações (1).

41 Vê-se d'aqui que a solução apresentada por *Taylor* era, como já temos dito por varias vezes, uma solução particular. Na realidade se, como vimos em cima, cada um dos termos do valor (3) satisfaz em separado á equação (2) e é portanto uma solução d'elle, a sua somma é que nos dá a solução geral do problema.

Se considerassemos apenas o primeiro termo do segundo membro da equação (3), o valor de y, que assim obteriamos, representaria tão sómente o movimento vibratorio que se obteria desviando a corda de posição em linha recta sem lhe imprimir velocidade alguma inicial.

Com effeito, derivando em ordem a t a formula (3) no caso que consideramos, e fazendo no resultado

$$t=0,$$

resultaria

$$\frac{dy}{dt}=0.$$

42 Da equação (3) pódem deduzir-se todas as leis do movimento vibratorio das cordas que já estudámos em outro logar e que por isso não repetiremos aqui.

Se as funcções $\varphi x'$ e $\psi' x'$ forem taes, que tenhamos

$$\int_0^l \varphi x' sen\frac{i\pi x'}{l}=0, \int_0^l \psi' x' sen\frac{i\pi x'}{l}=0,$$

para todos os valores de i que não forem multiplos d'um numero dado m, a equação (3) e a sua derivada em ordem a t só conterão senos e cosenos d'arcos multiplos de $\frac{m\pi at}{l}$.

Segue-se d'aqui que todas as vezes que t augmentar de quantidade $\frac{2l}{ma}$ a corda voltará á posição e ao estado primitivo: teremos neste caso

$$n=\frac{m}{2}\sqrt{\frac{gP}{pl}},$$

isto é, o *som* elevar-se-ha na relação de m para a unidade, resultado este que já notamos atraz.

43 Para darmos um exemplo do modo de vibração d'uma corda supponhamos que na origem do movimento ella recebeu o desvio

$$y=\varphi x,$$

sem velocidade alguma: neste caso o movimento vibratorio é dado, como já vimos, pela formula

$$y=\frac{2}{l}\Sigma\left(\int_0^l \varphi\, x\, sen\frac{i\pi x}{l}dx\right)sen\frac{i\pi x}{l}cos\frac{ia\pi t}{l}.$$

A funcção φx representa uma curva entre os limites

$$x=0 \text{ e } x=l;$$

construamos, entre os mesmos limites, a trochoide

$$y=sen\,\frac{i\pi x}{l},$$

e multipliquemos as ordenadas d'esta curva pelas ordenadas respectivas da dada por φx; teremos assim as ordenadas d'uma terceira curva, dada pela equação

$$y=\varphi x\; sen\,\frac{i\pi x}{l},$$

cuja area, entre os limites 0 e l, nos dá o valor do integral.

Se, por exemplo, affastarmos a corda pelo seu meio de maneira que ella forme um triangulo isosceles, cuja baze seja l e a altura h, acharemos seguindo o precesso que expozemos

$$y=\frac{8h}{\pi^2}\left(sen\,\frac{\pi x}{l}\,cos\,\frac{\pi at}{l}-\frac{1}{3^2}\,sen\,\frac{3\pi x}{l}\,cos\,\frac{3\pi at}{l}+\frac{1}{5^2}\,sen\,\frac{5\pi x}{l}\,cos\,\frac{5\pi at}{l}-\ldots\right)$$

Esta serie é muito convergente e ouviremos sobre todos os outros o *som fundamental* dado pelo primeiro termo.

Quando se faz vibrar uma corda ouve-se, em geral, o som resultante; mas o ouvido parece decompôr este som e recebe as harmonias dadas pelo primeiro termo, pelo segundo e assim succesivamente.

D. Bernnoulli pretendeu explicar este facto pela coexistencia das pequenas oscillações, mas a sua explicação não se funda em principio algum da *mechanica* e devemos attribuir esta percepção dos sons a um effeito physiologico produzido no ouvido.

FIM.

INDICE

Parte primeira

	Pag.
Cap. 1.º—Integração das equações ás differenças parciaes em termos finitos..	5
Cap. 2.º—Da Integração das equações ás differenças parciaes por meio de series; e das funcções arbitrarias...........................	27
Cap. 3.º—Formula de *Lagrange*..............................	37

Parte segunda

Cap. 1.º—Historia do Problema..................................	49
Cap. 2.º—Deducção das equações geraes do equilibrio de elasticidade dos corpos solidos..	59
Cap. 3.º—Applicações das equações achadas em o capitulo anterior ao problema das cordas vibrantes..................................	67
Cap. 4.º—Solução geral do problema em termos finitos..................	75
Cap, 5.º—Solução geral do problema por meio de series trigonometricas....	87