MA, MR, *tiradas por cada hum delles para* A *e* R, *formem ſempre hum angulo dado.*

Abaixe-ſe a perpendicular MP, e ſeja o raio $= 1$, AP $= u$, PM $= t$, AR $= b$, a tangente do angulo dado, ou *tang* AMR $= m$; teremos PR $= b - u$.

Os triangulos rectangulos APM, RPM daõ *tang* AMP $= \frac{u}{t}$, e *tang* PMR $= \frac{b-u}{t}$; porém (Trig. 41) *tang* $(A + B) = \frac{R^2 (tang\, A + tang\, B)}{R^2 - tang\, A\; tang\, B}$; logo teremos $m = \frac{\frac{u}{t} + \frac{b-u}{t}}{1 - \frac{u(b-u)}{t^2}}$, ou $mtt + muu - mbu - bt = 0$; equaçaõ à hum circulo, cujo raio e centro determinaremos da maneira ſeguinte.

Faça-ſe $t - \frac{b}{2m} = y$; virá $yy - \frac{bb}{4mm} - bu + uu = 0$. Seja $u - \frac{b}{2} = x$; teremos $yy = \frac{bb}{4} + \frac{bb}{4mm} - xx$; logo o raio $= \sqrt{\left(\frac{bb}{4} + \frac{bb}{4mm}\right)}$.

Levante-ſe pois do ponto A a perpendicular AB $= \frac{b}{2m}$, e tire-ſe BCQ parallela a AR; ſerá QM $= t - \frac{b}{2m} = y$. Tomando agora ſobre AR a parte AG $= \frac{b}{2}$, teremos GP $= u - \frac{b}{2} = x$.

Logo ſe tirarmos por G a linha GC parallela a PM, o ponto C ſerá o centro, e $AC = \sqrt{(AG^2 + GC^2)} = \sqrt{\left(\frac{bb}{4} + \frac{bb}{4mm}\right)}$ ſerá o raio.

Reduz-ſe pois a conſtrucçaõ a levantar do ponto G meio de AR a perpendicular $GC = \frac{b}{2m}$, e deſcrever hum circulo do centro C com o raio CA; todo o angulo AMR que tiver o vertice na circumferencia, e paſſar pelos pontos A e R, ſerá igual ao angulo dado.

Eſtá claro que para conſtruirmos $\frac{b}{2m}$, tiraremos huma recta AO, que faça com AB o angulo BAO igual ao angulo dado; entaõ o ponto do encontro C com a perpendicular GC ſerá o ponto procurado, porque (Trig. 164) no triangulo rectangulo ABC temos AB ou $GC = \frac{b}{2m}$.

Donde ſe ſegue, que em huma palavra ſe reduz tudo a tirar por A a linha AO que faça com AR hum angulo igual ao complemento do angulo dado; eſta cortará no ponto procurado C a perpendicular levantada do meio de AR.

395 Agora he facil de reſolver a queſtaõ ſeguinte: *Sendo dada a poſiçaõ de tres pontos* R, A, R′ (*Fig.* 66), *achar o ponto* M, *do qual ſe vejaõ as linhas* RA, AR′ *por angulos dados.*

Dividaõ-ſe as linhas RA, AR′ em duas partes iguais nos pontos G e G′, dos quais ſe levantem as perpendiculares GC e G′C′. Tirem-ſe por A as linhas AC, AC′, que façaõ com AR e

AR′ os angulos RAC, R′AC′ iguais cada hum ao complemento do angulo RMA, R′MA, por que se vê a linha correspondente; e descrevendo dous circulos dos centros C e C′ com os raios CA, C′A, o ponto M de intersecçaõ será o ponto procurado.

Este problema póde servir para representar nas Cartas Topograficas a posiçaõ de hum ponto, do qual se avistaõ tres objectos conhecidos.

Se os angulos observados RMA, R′MA fossem iguais aos angulos RR′A, R′RA, o problema seria indeterminado; porque confundindo-se entaõ os dous circulos, cada hum dos pontos da circumferencia satisfaria á questaõ.

396 Probl. III. *Sendo dado o angulo que fazem entre si duas linhas* AZ, AT (*Fig.* 67), *achar as curvas, nas quais a distancia de cada hum dos seus pontos* M *a hum fixo* F *de* AZ *tem sempre para a linha* MT, *tirada do mesmo ponto* M *para a recta* AT *parallelamente a* AZ, *a razaõ dada de* g : h.

Tiremos MP parallela a AT, e MS perpendicular a AZ. Seja AP $= u$, PM $= t$, AF $= c$, *sen* MPS $= p$, e *cos* MPS $= q$.

Isto posto, o triangulo rectangulo MPS dá MS $= pt$, e PS $= qt$; logo teremos FS $= qt - u + c$, e por consequencia MF $= \sqrt{(MS^2 + FS^2)} = \sqrt{(tt - 2qut + uu + 2qct - 2cu + cc)}$, advertindo que $p^2 + q^2 = 1$. Mas deve ser MF : MT :: $g : h$; logo teremos $h^2t^2 - 2qh^2ut + (h^2 - g^2)u^2 + 2ch^2qt - 2ch^2u + h^2c^2 = 0$. Esta equa-

equaçaõ, que comprehende todas as fecções conicas (380), pertencerá (392) á ellipfe ou á hyperbola, conforme for negativa ou pofitiva a quantidade $4b^2g^2 - 4p^2b^4$; e pertencerá á parabola, fe for $4b^2g^2 - 4p^2b^4 = 0$, ou $g = pb$; e finalmente a curva ferá hum circulo, quando for $h^2 = b^2 - g^2$, ifto he, quando $g = 0$, ou quando $h = \infty$, defignando por efte final o infinito.

Para conftruirmos a curva em cada hum deftes cafos, naõ temos mais do que imitar o que eftá feito (380 e feg.), como vamos a moftrar, applicando á hyperbola o que fe executou na ellipfe, ifto he, reduzindo a noffa equaçaõ á fórma $yy = \frac{bb}{aa}(xx - \frac{1}{4}aa)$.

Faça-fe pois $t + cq - qu = y$; teremos por primeira transformaçaõ $yy + ccpp - 2cppu + ppuu - \frac{gg}{hh}uu = 0$, ou $hhyy + cchhpp - 2chhppu + kkuu = 0$, pondo (por abbreviar) $pphh - gg = kk$.

Fazendo agora $u - \frac{ch^2p^2}{k^2} = \frac{ch^2p^2x}{k^2n}$, virá $y^2 = - \frac{c^2h^2p^4}{k^2n^2}\left(x^2 + \frac{n^2k^2}{p^2h^2} - n^2\right)$; mas como na hyperbola $4b^2(g^2 - p^2h^2)$ deve fer pofitivo, faremos $k^2$ negativo, lembrando-nos da hypothefe $k^2 = g^2 - p^2h^2$ a todo o tempo que fe fizer a fubftituiçaõ; affim teremos $y^2 = \frac{c^2h^2p^4}{k^2n^2}\left(x^2 - \frac{n^2k^2}{p^2h^2} - n^2\right)$. Efta equaçaõ fendo comparada com $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - \frac{1}{4}a^2)$, dá $\frac{b^2}{a^2} =$ $\frac{c^2h^2p^4}{k^2n^2}$, e $\frac{1}{4}a^2 = \frac{n^2k^2}{p^2h^2} + n^2$, donde se tiraráõ os valores dos diametros conjugados $a$ e $b$, os quais saõ os mesmos eixos da hyperbola como logo se verá.

Para determinar a direcçaõ dos diametros, construiremos primeiramente a equaçaõ $t + cq - qu = y$, continuando a imitar o que se fez (382). Conduziremos pois por A parallelamente a PM a linha AB $= cq$, e tirando BI parallela a AZ, tomaremos nella a parte BK; e conduzindo KL $= q$. BK parallela a PM, se tirarmos pelos pontos B e L huma linha BQ, será QM $= y$.

Póde porém abbreviar-se esta construcçaõ, conduzindo immediatamente do ponto F a linha FB perpendicular a TA; porque sendo o angulo FAB $=$ APM, no triangulo rectangulo ABF temos AB $= cq$; logo seraõ os $y$ perpendiculares á linha BQ, a qual por consequencia será a direcçaõ de hum dos eixos, e a do outro será parallela a QM.

Quanto á determinaçaõ do centro, a segunda equaçaõ $u + \frac{ch^2p^2}{k^2} = \frac{ch^2p^2x}{k^2n}$ na hypothese de $k^2$ ser negativo, mostra que tomando da parte contraria dos $u$ a quantidade AG $= \frac{ch^2p^2}{k^2}$, a linha GC parallela a PM, ou perpendicular a BQ, determinará a origem C dos $x$, e por consequencia o centro. Na ellipse seguiremos hum procedimento analogo.

Quan-

Quanto á parabola porém, como temos então $g = ph$, e conseguintemente $k^2 = 0$, a equação achada entre $y$ e $u$ se torna em $y^2 + c^2p^2 - 2cp^2u = 0$. Para a reduzirmos á fórma ordinaria, faça-se (386) $2cp^2u - c^2p^2 = nx$, e teremos $yy = nx$. Agora podemos descrever a curva, construindo, a primeira equação $t + cq - qu = y$, como no caso precedente; e a segunda $2cp^2u - c^2p^2 = nx$,

ou $u - \frac{1}{2}c = \dfrac{nx}{2cp^2}$ de hum modo analogo ao do

§. 386, tomando sobre AP (*Fig.* 68) a parte AG $= \frac{1}{2}c$: assim a linha GC parallela a PM será a linha dos $x$, os quaes serão CQ, de maneira que CQ será a direcção do diametro, cujo vertice será C, e $n$ o seu parametro. Este se determinará pela se-

segunda equação, que dá $n = \dfrac{2cp^2 . \mathrm{GP}}{\mathrm{CQ}} = \dfrac{2c^2p^2}{\mathrm{BF}}$;

expressão que he toda conhecida, e se póde simplificar, advertindo que no triangulo rectangulo FAB temos BF $= cp$, e conseguintemente $n =$ 2BF.

397 Probl. IV. *Fazendo-se mover a recta dada* OH (*Fig.* 69) *dentro do angulo dado* OCH, *de maneira que as extremidades* O *e* H *se conservem sempre sobre os lados do angulo; achar a curva que neste movimento descreve hum ponto determinado* M *da mesma recta.*

Tiremos de hum ponto qualquer M da curva a linha MP parallela a CH; e seja CP $= u$, PM $= t$, OM $= g$, MH $= h$, *sen* MPO $= p$, *cos* MPO $= q$.

As parallelas CH, PM daõ OP $= \frac{gu}{h}$; mas no triangulo OPM temos (Trig. 180) $MO^2 = OP^2 + PM^2 + 2OP \cdot PM \cdot cos\ OPM$; logo será $t^2 + \frac{2gq}{h} ut + \frac{g^2}{h^2} u^2 = g^2$, equaçaõ que pertence á ellipse (381).

Seja pois $t + \frac{gqu}{h} = y$, e $u = \frac{x}{n}$; teremos $y^2 = \frac{g^2p^2}{h^2n^2} \left(\frac{h^2n^2}{p^2} - x^2\right)$, a qual sendo comparada com $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(\frac{1}{4}a^2 - x^2)$, dá $a = \frac{2hn}{p}$, e $b = 2g$.

Para determinar as direcções dos dous diametros conjugados, e o valor de $n$, tome-se arbitrariamente CK, e conduza-se KL $= \frac{gq \cdot CK}{h}$ parallelamente a PM; entaõ tirando CL, será QM $=$ PM $+$ PQ $= t + \frac{gqu}{h} = y$. Como pois os $x$ devem contar-se sobre CQ, e a equaçaõ $u = \frac{x}{n}$ mostra que os $u$ e $x$ começaõ ao mesmo tempo; o ponto C será o centro, e CQ, CH seraõ as direcções dos diametros. Mas he $n = \frac{x}{u} = \frac{CQ}{CP} = \frac{CL}{CK} = CL$, supponde CK $=$ ao raio; logo temos os valores dos diametros conjugados com o angulo OCH por elles comprehendido, e consequinguintemente naõ póde haver difficuldade na deſcriçaõ da ellipſe.

Se o angulo C for recto, teremos $y^2 = \frac{g^2}{h^2}$ $(h^2 - x^2)$; equaçaõ ás coordenadas da ellipſe, cujos ſemieixos ſaõ $g$ e $h$. Aſſim temos outro methodo de deſcrever a ellipſe por movimento continuo.

## *Applicaçaõ dos meſmos principios á reſoluçaõ de alguns problemas determinados.*

398 A Soluçaõ do ſegundo problema indeterminado (394) ſervio para reſolver outro determinado (395); e neſte ultimo tacitamente ſuppuzemos incluidos mais dous indeterminados, cada hum da meſma eſpecie do primeiro, os quais por conſequencia ſe reſolvéraõ do meſmo modo. A interſecçaõ de duas curvas, ou circulos, que eraõ neſſe caſo o *lugar* de cada hum dos dous problemas parciais, deu a ſoluçaõ do problema determinado. Tal he o procedimento que devemos ſeguir para reſolver as queſtões, quando a equaçaõ final que exprime todas as condições do problema, paſſar do ſegundo grão: Faremos uſo de duas incognitas ainda nos caſos em que huma baſta, iſto he, nos caſos em que os problemas ſaõ determinados, e formaremos duas equações, cada huma das quais ſendo conſtruida ſeparadamente com o meſmo vertice, a meſma linha de abſciſſas, e o meſmo angulo das coordenadas, dará huma curva, cujos pontos ſatisfaráõ todos á equaçaõ reſpe-

pectiva. Entaõ se a questaõ he possivel, as duas curvas se encontraráõ em hum ou muitos pontos, conforme ella admitir huma ou muitas soluções, ou incluir muitos casos dependentes dos mesmos dados, e raciocinios; e as coordenadas correspondentes aos pontos de intersecçaõ seraõ os valores das incognitas.

Está claro, que se as duas equações a duas indeterminadas naõ passarem do segundo gráo, a resoluçaõ do problema, naõ dependerá senaõ, quando muito, da intersecçaõ de duas secções conicas. Porém nestes mesmos casos, se usassemos de huma incognita sómente, ou se por meio das duas equações eliminassemos huma das duas incognitas, a equaçaõ subiria ao terceiro gráo, e ordinariamente ao quarto. Se huma das equações, ou ambas ellas passarem do segundo gráo, a resoluçaõ do problema dependerá de curvas mais elevadas que as secções conicas.

Passemos a dar exemplos, começando pela resoluçaõ de alguns problemas que naõ passaõ do quarto gráo.

399 Probl. I. *Achar duas meias proporcionais* t *e* u *entre duas linhas dadas* a *e* b.

Sendo pela condiçaõ $\div\!\div a : t : u : b$, teremos $au = t^2$, e $bt = u^2$. Para construir estas equações tirem-se duas linhas AX, AZ (*Fig.* 70), perpendiculares entre si para maior simplicidade, e sobre AZ como diametro e pelo vertice A descreva-se huma parabola (367), cujo parametro seja $= a$, e o angulo das coordenadas $=$ XAZ; esta curva será o lugar da equaçaõ $au = t^2$, de maneira que sendo AP $= u$, será PM $= t$. Semelhantemente descreva-se va-se pelo vertice A, sobre o diametro AX, com o parametro $b$, e o angulo de coordenadas XAZ, outra parabola; será esta o lugar da equaçaõ $bt = u^2$, de sorte que sendo $AP' = t$, teremos $P'M' = u$. Mas he necessario que as duas equações tenhaõ lugar ao mesmo tempo, isto he, que os valores tanto de $u$ como de $t$ sejaõ os mesmos em ambas ellas; e isto sómente acontece no ponto de intersecçaõ M, como se vê tirando MP e MP parallelas a AX e AZ: logo os valores de $u$ e $t$ que satisfazem ao problema saõ as coordenadas AP e PM, correspondentes ao ponto de encontro M. Ainda que as curvas tambem se encontraõ no ponto A, comtudo he evidente que tal ponto naõ satisfaz, porque nelle he $u = 0$, e $t = 0$.

400 Estas equações depois de preparadas conduzem muitas vezes a construcções bem simples. Ajuntando, por exemplo, as duas equações $au = t^2$, e $bt = u^2$, temos $au + bt = u^2 + t^2$; equaçaõ ao circulo, se as coordenadas $u$ e $t$ forem perpendiculares entre si. E como o circulo he mais facil de descrever que a parabola, construiremos, com preferencia ao que fizemos, huma das primeiras equações, por exemplo $au = t^2$, e a ultima $au + bt = u^2 + t^2$, a qual se reduz a $y^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2 - x^2$, pelas hypotheses de $t - \frac{1}{2}b = y$, e $u - \frac{1}{2}a = x$. Para este effeito, tomaremos $AB = \frac{1}{2}b$, e tirando BQ parallela a AP, será $QM = y$. Tomaremos tambem $AO = \frac{1}{2}a$, e conduzindo OC parallela a AX, teremos $CQ = x$. Se descrevermos pois do ponto C com o raio $\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b^2)} = AC$ hum circulo que corte a pa-

parabola em hum ponto M, feraõ MP e AP as duas meias proporcionais $u$ e $t$.

401 Podemos variar muito eftas conftrucções; podemos, por exemplo, ajuntar huma das duas equações com a outra multiplicada por huma quantidade arbitraria $\frac{l}{n}$, pofitiva, ou negativa, e teremos *au* $+\frac{l}{n}bt = t^2 + \frac{l}{n}u^2$; equaçaõ que pertencerá á ellipfe, ou á hyperbola, conforme o valor que fe der a $\frac{l}{n}$; e affim podemos fazer a conftrucçaõ com huma deftas curvas, como fe fez com o circulo. Podemos tambem conftruir com ambas as curvas juntamente, ou com huma fómente combinada com o circulo, para o que daremos a $\frac{l}{n}$ valores convenientes, os quais fe determinaõ fem difficuldade (392).

402 Probl. II. *Dividir hum angulo ou arco dado* EO (*Fig.* 71) *em tres partes iguais.*

Seja EM a terça parte do arco dado, cujo centro he A. Tirem-fe as perpendiculares MP, OR fobre o raio AE, e fupponha-fe AE $= r$, OR $=$ *fen* EO $= d$, AR $=$ *cof* EO $= c$, AP $= u$, PM $= t$.

O triangulo rectangulo APM dá $u^2 + t^2 = r^2$; e os dous femelhantes APM, ARS daõ RS $= \frac{ct}{u}$. Produza-fe MP até encontrar a circumferencia

cia em V, ſerá OMS = AMP = ASR = OSM, e por conſequencia OS = OM = MV = $2t$. Mas OR = OS + SR; logo teremos $d = 2t + \frac{ct}{u}$, ou $tu + \frac{1}{2}ct = \frac{1}{2}du$, que pertence (391) á hyperbola. Como a primeira equaçaõ $t^2 = r^2 - u^2$ he a meſma do circulo EMO, naõ reſta mais que conſtruir a ſegunda. Para a reduzirmos pois a fórma $xy = aa$, faça-ſe primeiramente $\frac{1}{2}d - t = y$, e depois $u + \frac{1}{2}c = x$; e teremos $xy = \frac{1}{4}cd$ por equaçaõ da hyperbola entre as aſymptotas.

Conduza-ſe por A a linha AB $= \frac{1}{2}d$ parallelamente a PM, e tirando QBC parallela a AP, teremos QM $= \frac{1}{2}d - t = y$; logo CQ ſerá a direcçaõ de huma aſymptota. Produzindo depois AP para G de ſorte que ſeja AG $= \frac{1}{2}c$, e tirando GC parallela a PM, ſerá CQ $= u + \frac{1}{2}c = x$; logo C ſerá o centro, e CQ, CG ſeraõ as aſymptotas. A hyperbola deſcrita (354) entre ellas, a qual deve paſſar por A, como ſe deduz da equaçaõ $xy = \frac{1}{2}c \cdot \frac{1}{2}d$ = CB × AB, cortará o circulo no ponto procurado M.

Quando o arco EO paſſar de 90°, faremos $c$ negativo nas equações achadas; e quando o ſeu valor cahir entre 180° e 270°, como EOE′O′, mudaremos os ſinais de $c$ e $d$.

Se produzirmos GC e CB até que tenhamos CG′ = CG, e CB′ = CB; e tirando B′A′ e G′A′ parallelas reſpectivamente a CG′ e CB′, deſcrevermos entre as linhas CG′ e CB′ (produzidas) como aſymptotas huma hyperbola que paſſe por A′; eſta encontrará o circulo em dous pontos A′ e M′, do meſmo modo que a primeira o encontra em M

e

e M″. Destes quatro pontos o primeiro determina EM $= \frac{1}{3}$ EO; o segundo M′ determina E′M′ $=$ $\frac{1}{3}$ E′O $= \frac{1}{3}(180^\circ - \text{EO})$; o terceiro M″ determina E′M″ $= \frac{1}{3}$ E O E′O′ $= \frac{1}{3}(180^\circ + \text{EO}')$.

Com effeito, os arcos E′O e EO tem os mesmos seno e coseno com a differença unica de ser negativo o coseno de E′O, considerado como maior que 90°; logo acharemos a soluçaõ para o arco E′O, fazendo $c$ negativo na soluçaõ de EO. Porém esta mudança, que altera sómente a segunda equaçaõ, muda a sua reduzida em $xy = -\frac{1}{4}cd$, que pertence á hyperbola A′M′, e mostra por consequencia que a intersecçaõ M′ deste ramo da hyperbola com o circulo dá a soluçaõ do caso presente: logo P′M′ he o seno do arco procurado no segundo caso, e conseguintemente E′M′ he este mesmo arco, ou E′M′ $= \frac{1}{3}$ E′O.

Quanto á terceira soluçaõ, se ajuntarmos 180° a EO, isto he, se tomarmos E′O′ $=$ EO, os arcos EO, e E O E′O tem os mesmos seno e coseno, com a differença que os do ultimo saõ negativos; logo teremos a soluçaõ que convem a este caso, fazendo $c$ e $d$ negativos. Porém esta mudança naõ altera a equaçaõ $xy = \frac{1}{4}cd$; logo a primeira hyperbola deve dar a soluçaõ deste terceiro caso na intersecçaõ M″. He pois P″M″ o seno do arco procurado neste caso, e conseguintemente E′M″ he este mesmo arco, ou E′M″ $= \frac{1}{3}$ E O E′O′.

Assim a mesma construcçaõ determina $\frac{1}{3}$ A, $\frac{1}{3}(180^\circ - \text{A})$, e $\frac{1}{3}(180^\circ + \text{A})$, sendo A o arco dado.

O ponto de intersecçaõ A′, pelo qual a hyperbola se sujeita a passar, como he conhecido, naõ dá huma soluçaõ nova.

403 Se das duas equações a $u$ e $t$ eliminarmos $t$, virá a equaçaõ do terceiro gráo no caſo irreduzivel $u^3 - \frac{3}{4} r^2 u - \frac{1}{4} cr^2 = 0$, a qual deve comprehender os tres caſos que havemos examinado; logo a meſma equaçaõ deve ter tres raizes, a ſaber $u = AP = cos \frac{EO}{3}$, $u = AP' = cos \frac{180^o - EO}{3}$, e $u = AP'' = cos \frac{180^o + EO}{3}$.

404 Donde ſe ſegue, que podemos por meio das Taboas dos ſenos achar as tres raizes de huma equaçaõ do terceiro gráo no caſo irreduzivel com huma approximaçaõ ſufficiente e muito prompta. Porque, comparando a equaçaõ geral deſte caſo $u^3 - pu + q = 0$ com a do noſſo problema, temos $\frac{3}{4} r^2 = p$, e $-\frac{1}{4} cr^2 = q$, as quais daõ $r = \sqrt{\frac{4}{3} p}$, e $c = \frac{-3q}{p}$. Se procurarmos pois nas Taboas o numero de gráos correſpondente a $sen \frac{3q}{p\sqrt{\frac{4}{3}p}}$, ſuppondo o raio dellas igual á unidade, acharemos o complemento do arco EO; e ajuntando 90° ao meſmo numero de gráos, ou tirando eſte meſmo numero de 90°, conforme for $q$ poſitivo ou negativo na equaçaõ, teremos o arco EO, que chamaremos A. Buſcaremos logo nas Taboas os coſenos dos tres arcos $\frac{A}{3}$, $\frac{180^o - A}{3}$, e

180°

$\frac{180^\circ + A}{3}$, os quais ſendo multiplicados por $r$ ou $\sqrt{\frac{4}{3}p}$, para ſe reduzir cada hum ao coſeno do arco correſpondente no circulo cujo raio he $r$, daraõ AP ou $u = \sqrt{\frac{4}{3}p} \cdot cos \frac{A}{3}$, $u = \sqrt{\frac{4}{3}p} \cdot cos \frac{180^\circ - A}{3}$, e $u = \sqrt{\frac{4}{3}p} \cdot cos \frac{180^\circ + A}{3}$; bem entendido que ſe deve dar o ſinal — áquelles em que o arco paſſar de $90^\circ$. Eſtas operações podem facilitar-ſe por meio dos logarithmos.

405 Probl. III. *Sendo dada a poſiçaõ do ponto* D (*Fig.* 72) *a reſpeito de duas linhas* AR, AP, *que comprehendem hum angulo conhecido, tirar pelo dito ponto a recta* DP, *de maneira que a parte intercepta* RP *ſeja igual a huma linha dada* c.

Tiremos DS e RN perpendiculares a AP produzida, e DO parallela a AR. Seja $DO = r$, $DS = p$, $OS = q$, $AO = d$, $AP = u$, $AR = t$.

OS triangulos ſemelhantes DSO, RNA daõ $RN = \frac{pt}{r}$, $AN = \frac{qt}{r}$, e conſeguintemente $NP = \frac{qt}{r} + u$. Mas no triangulo rectangulo RNP temos $RN^2 + NP^2 = RP^2$; logo ſerá $\frac{q^2}{r^2}t^2 + \frac{2q}{r}ut + u^2 + \frac{p^2}{r^2}t^2 = c^2$, iſto he $t^2 + \frac{2q}{r}ut + u^2 = c^2$.

Alem

Alem diſſo, os triangulos ſemelhantes DOP, RAP daõ DO $(r)$ : RA $(t)$ :: OP $(d+u)$ : AP $(u)$, ou $ru = td + ut$. Temos pois duas equações, huma á ellipſe, e a outra á hyperbola, que ambas ſe devem conſtruir para reſolver o problema.

Quanto á primeira, faça-ſe como nos exemplos precedentes, $t + \frac{qu}{r} = y$, e $u = \frac{rx}{n}$; teremos $y^2 = \frac{p^2}{n^2} \left(\frac{c^2n^2}{p^2} - x^2\right)$, e por conſequencia os valores dos dous diametros conjugados $a$, e $b$ ſeraõ $a = \frac{2cn}{p}$, e $b = 2c$. Tome-ſe pois ſobre AP a linha arbitraria AK, e tire-ſe KL $= \frac{q \cdot \mathrm{AK}}{r}$ parallelamente a PM; teremos QM $= y$, e ſerá AQ a direcçaõ do diametro ſobre que devem contar-ſe os $x$; logo AQ $= x$. E como a equaçaõ $u = \frac{rx}{n}$ ſe torna em AP $= \frac{r \cdot \mathrm{AQ}}{n}$, teremos $n = \frac{r \cdot \mathrm{AQ}}{\mathrm{AP}} = \frac{r \cdot \mathrm{AL}}{\mathrm{AK}} = \mathrm{AL}$, ſuppondo AK $= r$. Aſſim conſtruindo huma ellipſe com os dous diametros conjugados $a = \frac{2cn}{p}$, e $b = 2c$, que comprehendaõ hum angulo igual a AQM, acharemos o lugar da primeira equaçaõ. Eſta ellipſe he a meſma que deſcreveria o meio de huma linha igual a 2RP, a qual ſe moveſſe ſem que as ſuas extremidades ſahiſſem dos lados AP, AR, como ſe póde ver, fazendo comparaçaõ com a ſoluçaõ da-

dada (397), e ſuppondo $g = h = c$. Quando o angulo RAP he recto, a ellipſe ſe torna em hum circulo deſcrito com o raio $c$.

Para conſtruir a ſegunda equaçaõ $ru - ut = dt$, faça-ſe $r - t = y'$, e $u + d = x'$; virá $x'y' = rd$. Tire-ſe por D a linha DTV parallela a AP; ſerá $VM = y'$. Conduza-ſe pelo meſmo ponto D a linha DO parallela a AT; ſerá $DV = x'$. Deſcrever-ſe-ha pois entre as linhas DO e DV como aſymptotas huma hyperbola que paſſe pelo ponto A, por ſer $x'y' = rd = AO \times AT$; ella encontrará a ellipſe em dous pontos M e M′; logo conduzindo por eſtes e por D as linhas MR, MR′ parallelas a AP, e tirando DRP e DP′R′, as partes PR e P′R′ interceptas nos angulos RAP, R′AP′ ſeraõ iguais á linha $c$.

Se a hyperbola oppoſta M″A′M‴ (*Fig.* 73), deſcrita entre as aſymptotas produzidas, encontrar a ellipſe, determinará mais dous pontos M″, M‴, os quais daraõ R″, R‴ tais, que ſe por elles e por D tirarmos duas rectas, as partes comprehendidas dentro do angulo TAS ſeraõ iguais a $c$. Tal he em geral o methodo geometrico de reſolver os problemas determinados, que naõ paſſarem do quarto gráo.

406 O meſmo methodo póde ſervir ainda quando naõ ſe faça uſo de duas incognitas, com tanto porém que depois ſe introduza huma de novo. Por exemplo, ſe nos propuzeſſem eſte problema: *Achar hum cubo que tenha para outro conhecido* $a^3$ *a razaõ dada de* m : n; ſuppondo o lado do cubo procurado

dô $= u$, teriamos $u^3 : a^3 :: m : n$, e por consequencia $nu^3 = ma^3$.

Para construirmos esta equaçaõ, supporiamos $u^2 = at$, e teriamos $ntu = ma^2$, ou $tu = \frac{ma^2}{n}$. Descreveriamos pois a parabola que tem a equaçaõ $u^2 = at$, e a hyperbola a que pertence a equaçaõ $tu = \frac{ma^2}{n}$; a intersecçaõ das duas curvas daria os valores de $u$ e $t$.

Multiplique-se porém a transformada por $u$, e substitua-se em lugar de $u^2$ o seu valor $at$; virá $t^2 = \frac{ma}{n}u$, equaçaõ á parabola, a qual se póde construir juntamente com a outra $u^2 = at$. Advirta-se que estas equações saõ as mesmas que teriamos, se procurassemos duas meias proporcionais entre $a$ e $\frac{ma}{n}$; assim podem construir-se precisamente como se ensinou (399).

407 Pela equaçaõ $nu^3 = ma^3$, a qual dá $u = \sqrt[3]{\frac{ma^3}{n}}$, se vê que os radicais cubos podem construir-se por meio das secções conicas. O mesmo se deve entender a respeito dos radicais do quarto gráo em que se contiverem radicais cubos, como por exemplo $\sqrt[4]{\left(a^3\sqrt[3]{ab^2}\right)}$; porque se entrassem sómente radicais quadrados, como em $\sqrt[4]{\left(a^3\sqrt{ab}\right)}$, ou quantidades racionais, a construcçaõ se reduziria sempre ao circulo. Com effeito no nosso exem-

plo, tomando huma meia proporcional $m$ entre $a$ e $b$, teriamos $\sqrt[4]{a^3 m}$; e tomando outra meia proporcional $n$ entre $a$ e $m$, teriamos $\sqrt[4]{a^2 n^2}$, isto he $\sqrt{an}$, expressaõ de huma meia proporcional entre $a$ e $n$.

408 Se a equaçaõ determinada constar de maior numero de termos, naõ deixará porisso de poder construir-se de hum modo analogo. Assim se tivermos $u^4 + au^3 + aqu^2 + a^2ru + sa^3 = 0$, sendo $a$, $q$, $r$, e $s$ quantidades conhecidas, supporemos $u^2 = at$, e acharemos $at^2 + aut + qu^2 + aru + sa^2 = 0$, equaçaõ que pertence a huma secçaõ conica. Se a construirmos pois, e tambem a outra $u^2 = at$, as intersecções das duas curvas determinaráõ os differentes valores de $u$.

409 Póde acontecer que hum problema tenha muitas soluções, e sem embargo as curvas naõ cheguem a encontrar-se, quando se introduz do modo exposto huma nova equaçaõ. Para evitar este embaraço, daremos hum methodo que tem lugar em todos os casos.

Seja, por exemplo, $u^3 - au^2 + pau - qa^2 = 0$ a equaçaõ procedida de hum problema. Supporemos $u^3 - au^2 + pau - qa^2 = a^2 t$, sendo $t$ huma indeterminada, e $a$, $p$, $q$ numeros ou linhas conhecidas. Esta equaçaõ, em que $t$ naõ passa do primeiro gráo, póde construir-se com facilidade, dando a $u$ successivamente muitos valores AP, AP, &c. (*Fig.* 74) e calculando os correspondentes de $t$, que tiraremos perpendiculares a AP para maior facilidade, como PM, PM &c. e com attençaõ aos sinais. Se procurarmos pois os pontos em que a curva encontra o eixo, teremos $u^3 - au^2 +$

pau

$pau - qa^2 = 0$, iſto he, a equaçaõ propoſta; logo as diſtancias AO, AO′, AO″, em que a curva encontra o eixo, ſeraõ os differentes valores de $u$. Querendo aqui uſar de conſtrucçaõ em lugar de calculo, daremos á equaçaõ a fórma $t = \frac{u^3}{a^2} - \frac{u^2}{a} + \frac{pu}{a} - q$, e conſtruiremos (246) cada hum dos termos do ſegundo membro para cada hum dos valores de $u$.

410 Quando no problema entrar mais que huma incognita, podemos fazer uſo da conſtrucçaõ precedente, reduzindo todas as incognitas a huma unica pelo methodo dado (162 e ſeg.).

411 Se o problema for indeterminado, e huma das duas incognitas naõ paſſar do ſegundo gráo, poderemos ſempre conſtruir a equaçaõ dando á outra incognita, ſeja qual for o ſeu gráo, valores arbitrarios, e calculando os correſpondentes da primeira incognita, na hypotheſe de que eſta repreſente as ordenadas de huma curva, e aquella as ſuas abſciſſas. Se porém as duas incognitas paſſarem ambas do ſegundo gráo, ſerá neceſſario para cada valor que ſe der a huma, achar os valores da outra pelo methodo que acabamos de enſinar. Naõ nos demoraremos mais nas conſtrucções deſta ultima eſpecie, porque raras vezes ſe encontraõ.

412 Antes de concluirmos eſta Secçaõ, moſtraremos alguns uſos mais da applicaçaõ das equações ás linhas curvas. Por quanto toda a equaçaõ a huma ſecçaõ conica he ſempre do ſegundo gráo, e a equaçaõ mais geral deſte gráo póde reduzir-ſe á fórma

ma

ma $dt^2 + cut + eu^2 + ft + gu + h = 0$; ſegue-ſe que podemos ſempre fazer paſſar huma ſecçaõ conica por cinco pontos dados; com tanto que eſtes tres a tres naõ eſtejaõ em linha recta, porque huma ſecçaõ conica naõ póde encontrar huma recta em mais de dous pontos.

Com effeito ſejaõ A, B, C, D, E (*Fig.* 75) os cinco pontos dados. Se os referirmos á recta AD que paſſa por dous delles, entaõ conduzindo BF, CH, EG perpendiculares a AD para maior facilidade, as diſtancias AF, BF, AG, GE, AH, HC, AD poderáõ conſiderar-ſe como abſciſſas e ordenadas de huma curva, cuja equaçaõ he $dt^2 + cut + eu^2 + ft + gu + h = 0$. Porque ſeja $AF = m$, $BF = n$, $AG = m'$, $GE = n'$, $AH = m''$, $CH = n''$, $AD = m'''$, eſtá claro 1° que no ponto A temos $u = 0$, e $t = 0$, e conſeguintemente $h = 0$.
2° No ponto B temos $u = m$, $t = n$, e a equaçaõ ſe muda em

$$dm^2 + cmn + en^2 + fm + gn = 0.$$

3° No ponto E temos do meſmo modo

$$dm'^2 + cm'n' + en'^2 + fm' + gn' = 0$$

4° No ponto C temos

$$dm''^2 + cm''n'' + en''^2 + fm'' + gn'' = 0$$

5° Ultimamente, no ponto D onde $t = 0$, temos

$$em''' + g = 0.$$

E como neſtas quatro equações entraõ todas as quantidades $c$, $e$, $f$, $g$ em primeiro gráo, com facilidade ſe acharáõ os ſeus valores, os quais ſendo ſubſtituidos na equaçaõ $dt^2 + cut + eu^2 + ft +$

gu

$gu = 0$, a tornaráõ em outra, que ſerá diviſivel por $d$, e em que por conſequencia todos os termos teráõ coefficientes conhecidos; ſerá pois muito facil de conſtruir a ſecçaõ conica a que pertencer a meſma equaçaõ. No caſo de naõ ſerem dados mais que quatro pontos, hum dos coefficientes ſerá arbitrario; logo poderemos impôr huma condiçaõ como quizermos, duas ſe forem dados tres pontos ſómente, e aſſim por diante.

As linhas diſtinguem-ſe pelo grão da ſua equaçaõ; aſſim a linha recta he linha da primeira ordem; as ſecções conicas ſaõ linhas da ſegunda ordem.

Por hum modo analogo ſe póde determinar a equaçaõ de huma linha da terceira ordem, que ſe ſujeite a paſſar por tantos pontos menos hum, quantos ſaõ os differentes termos que póde ter a equaçaõ geral deſta ordem a duas indeterminadas; e aſſim nas ordens ſuperiores.

413 O meſmo methodo póde ſervir para achar approximadamente a lei que obſervaõ entre ſi muitas quantidades conhecidas, e dependentes humas das outras por certas relações; e neſta applicaçaõ tem o nome de *Methodo das interpolações*. Supponhamos, por exemplo, que tres quantidades conhecidas CB, ED, GF (*Fig.* 76) dependem de outras tres AB, AD, AF; pertende-ſe achar a lei geral que une eſtas quantidades, de maneira que ſe poſſa determinar huma quantidade HI, intermedia ou vezinha das primeiras, a qual derive de AH, do meſmo modo que CB, DE &c. derivaõ de AB, AD &c.

De muitos modos ſe póde ſatisfazer a eſte problema, tomando huma equaçaõ a duas indeterminanadas $u$ e $t$, a qual tenha pelo menos tantos termos differentes, quantas saõ as quantidades dadas, tais como CB, ED, GF. Mas entre todos elles o que mais facilita o uso que póde ter o dito methodo, he o considerar IH como ordenada, e AH como abscissa de huma curva, que passe pelos pontos dados C, E, G, &c., e na qual $t$ seja huma funçaõ indeterminada da abscissa correspondente, da fórma $a + bu + cu^2 +$ &c., tomando tantos termos, quantos saõ os pontos C, E, G. Logo se suppuzermos (412) 1° $u = AB$, $t = CB$; 2° $u = AD$, $t = DE$; 3° $u = AF$, $t = FG$, e assim por diante, teremos tantas equações para determinar $a$, $b$, $c$, quantos saõ os pontos dados; e substituindo os valores em $t = a + bu + cu^2 +$ &c., acharemos a equaçaõ approximada da curva, que passa pelos pontos C, E, G, &c. Pondo entaõ por $u$ a distancia AH, teremos o valor correspondente de $t$ ou HI; e reciprocamente.

Seguindo o mesmo procedimento, podemos imitar o contorno ABCDEF (*Fig.* 77) de qualquer curva traçada ao acaso (282). Para isso abaixaremos dos differentes pontos A, B, C, D, &c. perpendiculares sobre a linha determinada XZ, que se toma por linha das abscissas, e acharemos, como acabamos de ensinar, a equaçaõ de huma curva que passe pelos mesmos pontos; por meio della pois se calcularáõ as perpendiculares intermedias com tanto maior approximaçaõ, quanto maior for o numero dos pontos A, B, C, D, &c. que houvermos tomado.

nadas $u$ e $t$, a qual tenha pelo menos tantos termos differentes, quantas saõ as quantidades dadas, tal como CB, ED, GF. Mas entre todos elles o que mais facilita o uso que póde ter o dito methodo, he o considerar IH como ordenada, e AH como abscissa de huma curva, que passe pelos pontos dados C, E, G, &c., e na qual $t$ seja huma funcção indeterminada da abscissa correspondente, da forma $a + bu + cu^2 +$ &c., tomando tantos termos quantos saõ os pontos C, E, G. Logo se suppozermos (412) 1º $u =$ AB, $t =$ CB; 2º $u =$ AD, $t =$ DE; 3º $u =$ AF, $t =$ FG, e assim por diante, teremos tantas equações para determinar $a$, $b$, quantos saõ os pontos dados; e substituindo os valores em $t = a + bu + cu^2 +$ &c., acharemos equaçaõ approximada da curva, que passe pelos pontos C, E, G, &c. Pondo entaõ por $u$ a distancia AH, teremos o valor correspondente de $t$ ou IH e reciprocamente.

Seguindo o mesmo procedimento, podemos traçar o contorno ABCDEF (*Fig.* 77) de qualquer curva traçada ao acaso (282). Para isso abaixaremos dos differentes pontos A, B, C, D, &c. perpendiculares sobre a linha determinada XZ, que se toma por linha das abscissas; e acharemos, como acabamos de ensinar, a equaçaõ de huma curva que passe pelos mesmos pontos, por meio della pois se calcularáõ as perpendiculares intermedias com tanto maior approximaçaõ, quanto maior for o numero dos pontos A, B, C, D, &c. que houvermos tomado.

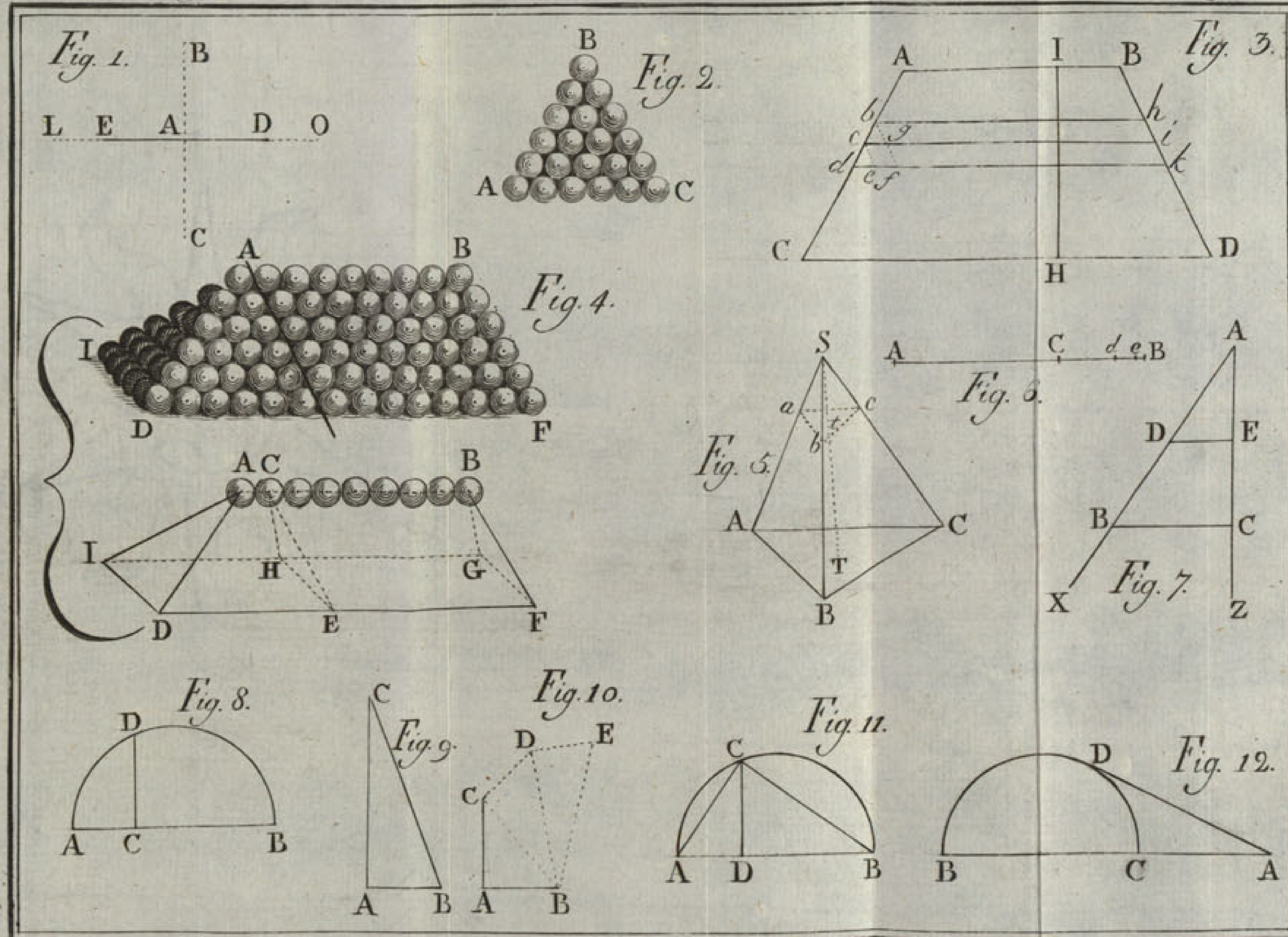


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.


*Fig. 12.*

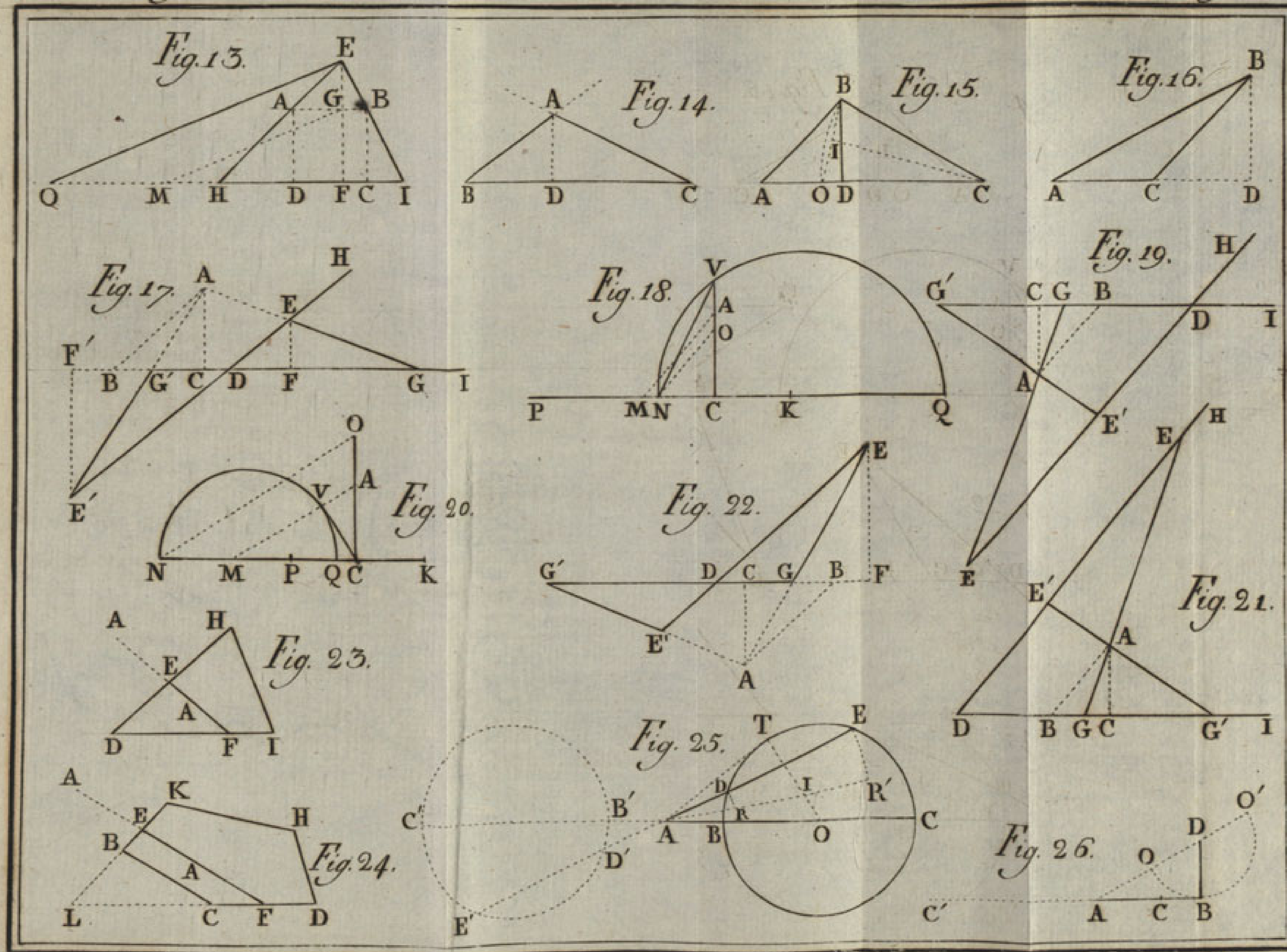


Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 26.

Algebra Tab. III

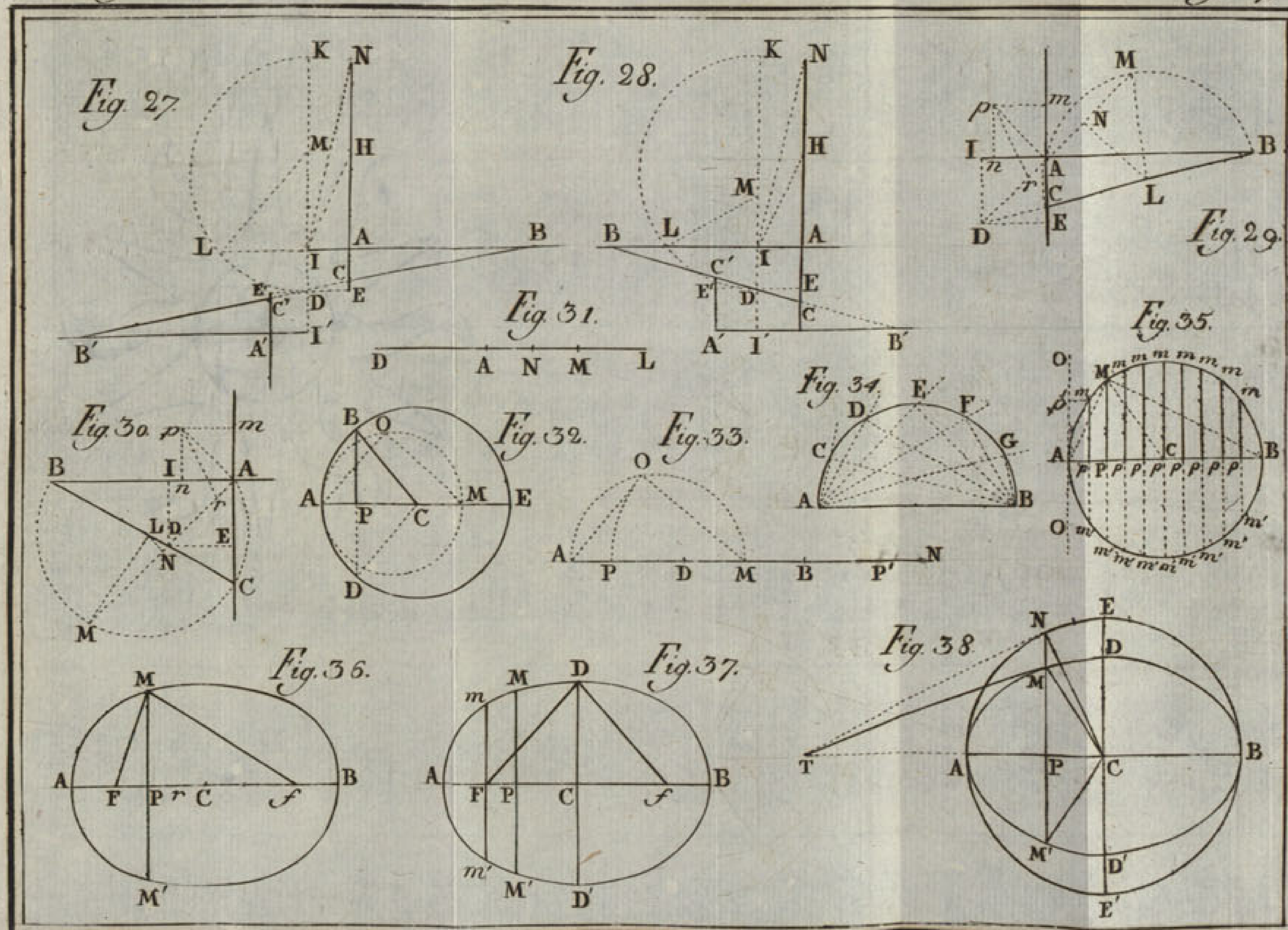


Fig. 27.
Fig. 28.
Fig. 29.
Fig. 30.
Fig. 31.
Fig. 32.
Fig. 33.
Fig. 34.
Fig. 35.
Fig. 36.
Fig. 37.
Fig. 38.


Algebra

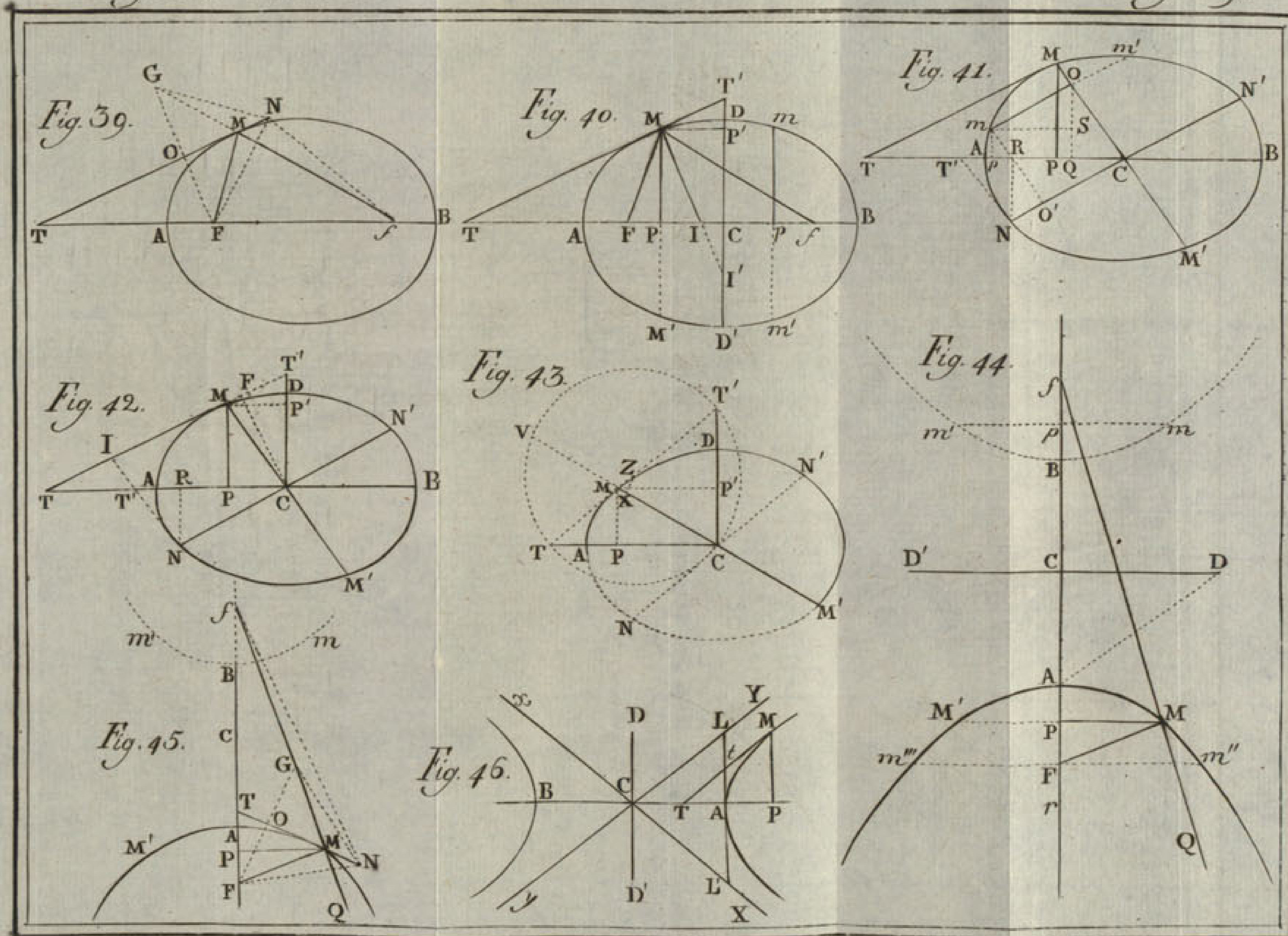


Fig. 39.
Fig. 40.
Fig. 41.
Fig. 42.
Fig. 43.
Fig. 44.
Fig. 45.
Fig. 46.

Algebra Tab. V.

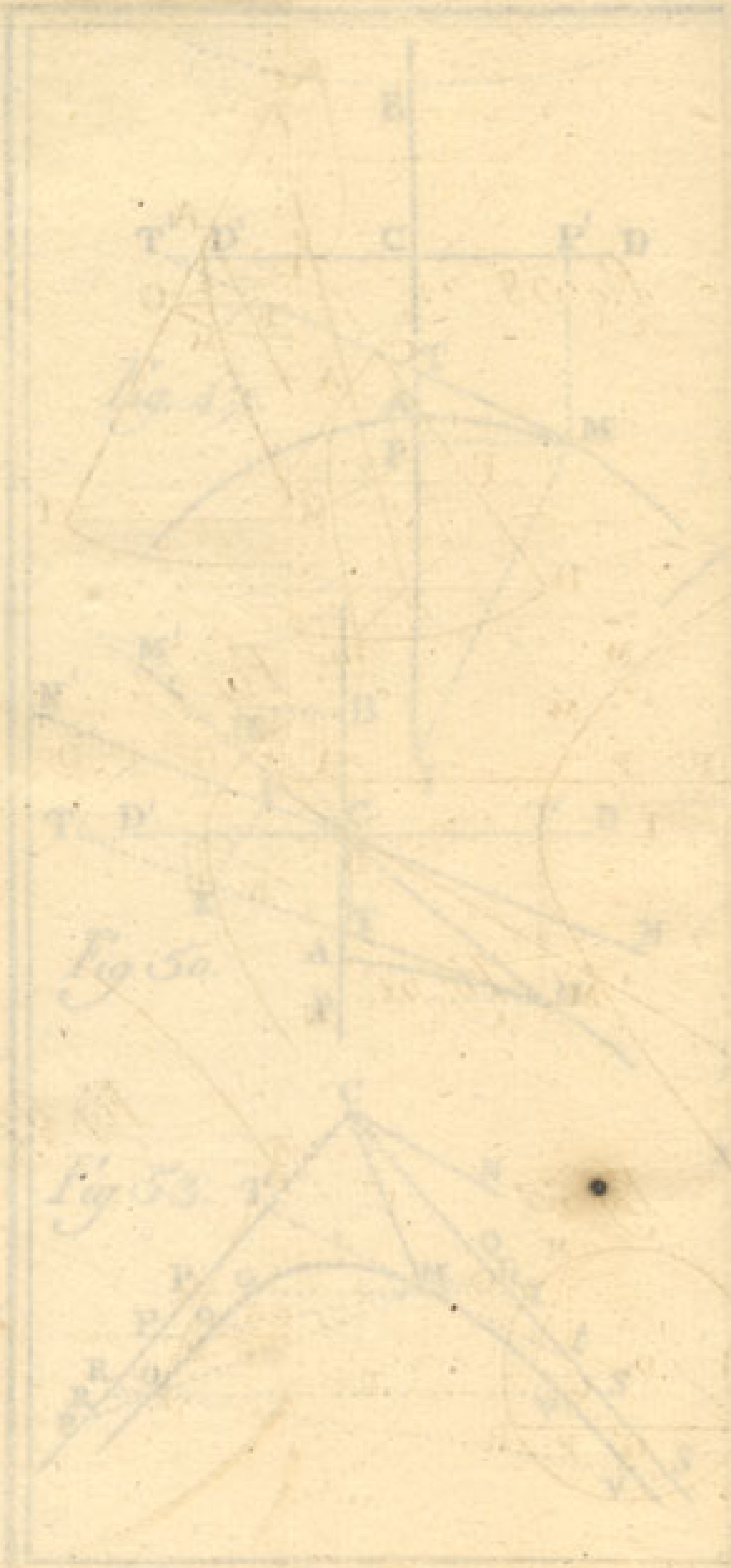


*Fig. 47.*

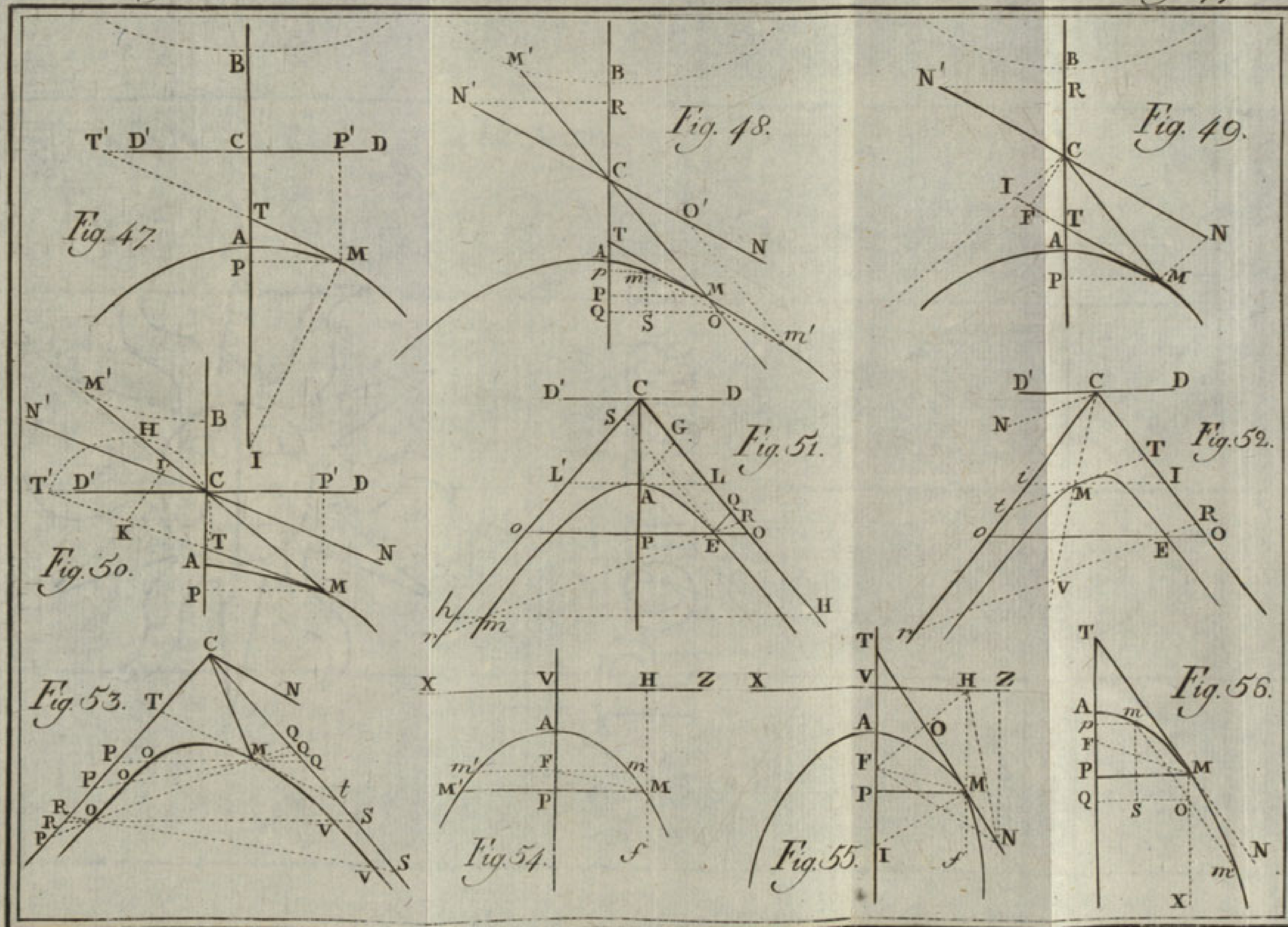
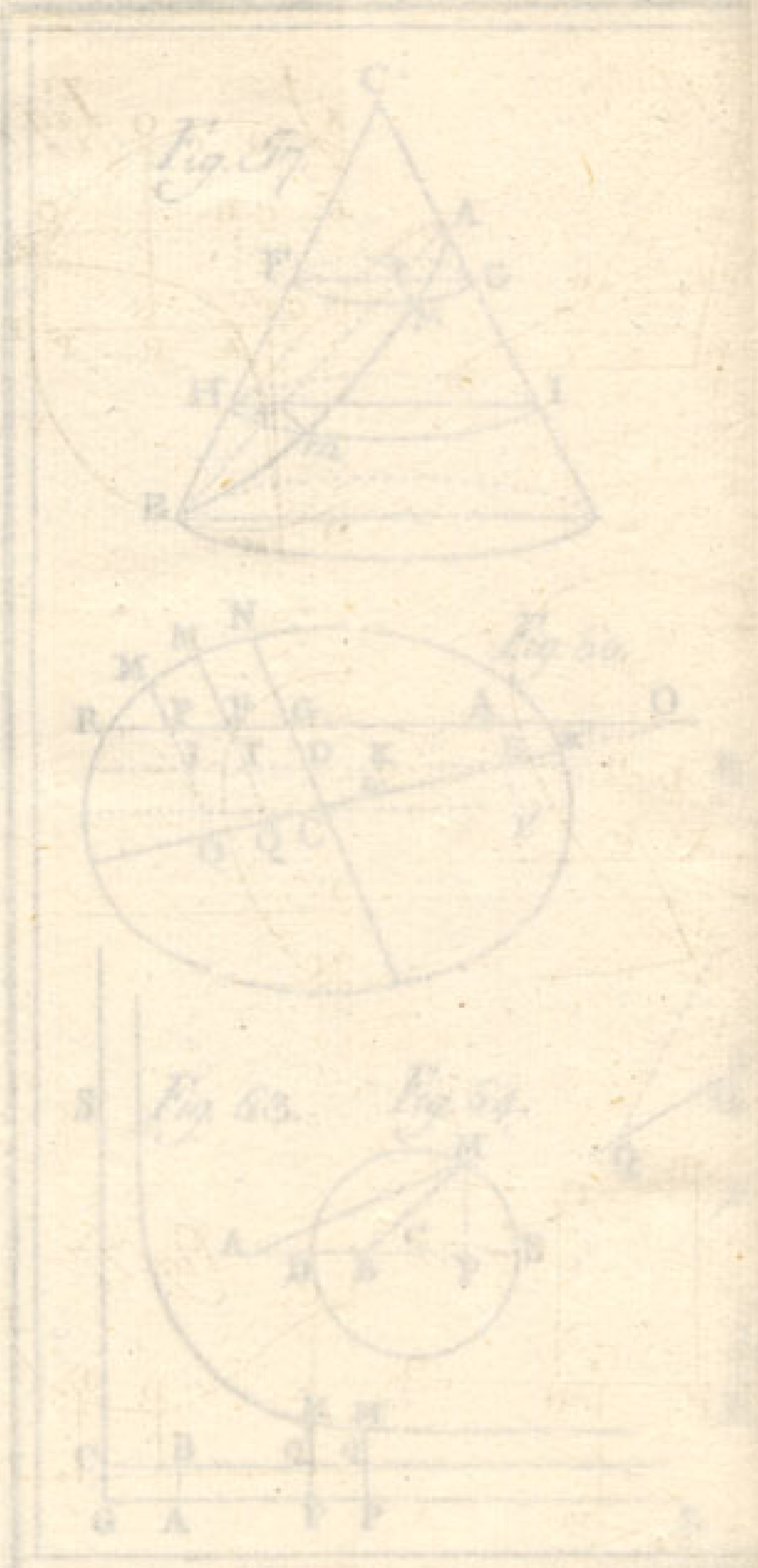


Fig. 47.
Fig. 48.
Fig. 49.
Fig. 50.
Fig. 51.
Fig. 52.
Fig. 53.
Fig. 54.
Fig. 55.
Fig. 56.

*Fig. 56.*

Algebra Tab. VI.



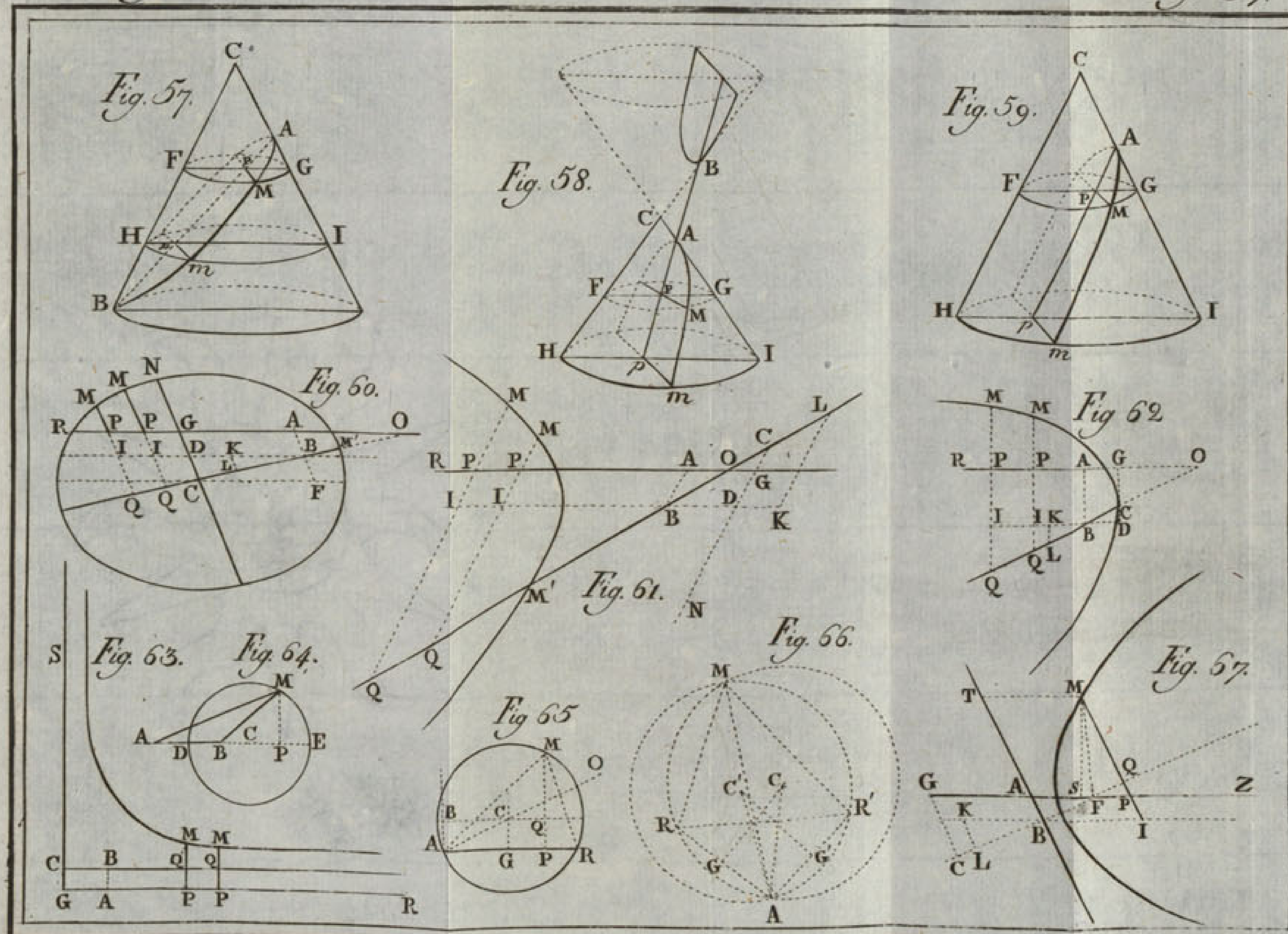


Fig. 57.
Fig. 58.
Fig. 59.
Fig. 60.
Fig. 61.
Fig. 62
Fig. 63.
Fig. 64.
Fig 65
Fig. 66.
Fig. 67.

*Fig. 67.*

Algebra Tab. VIII.

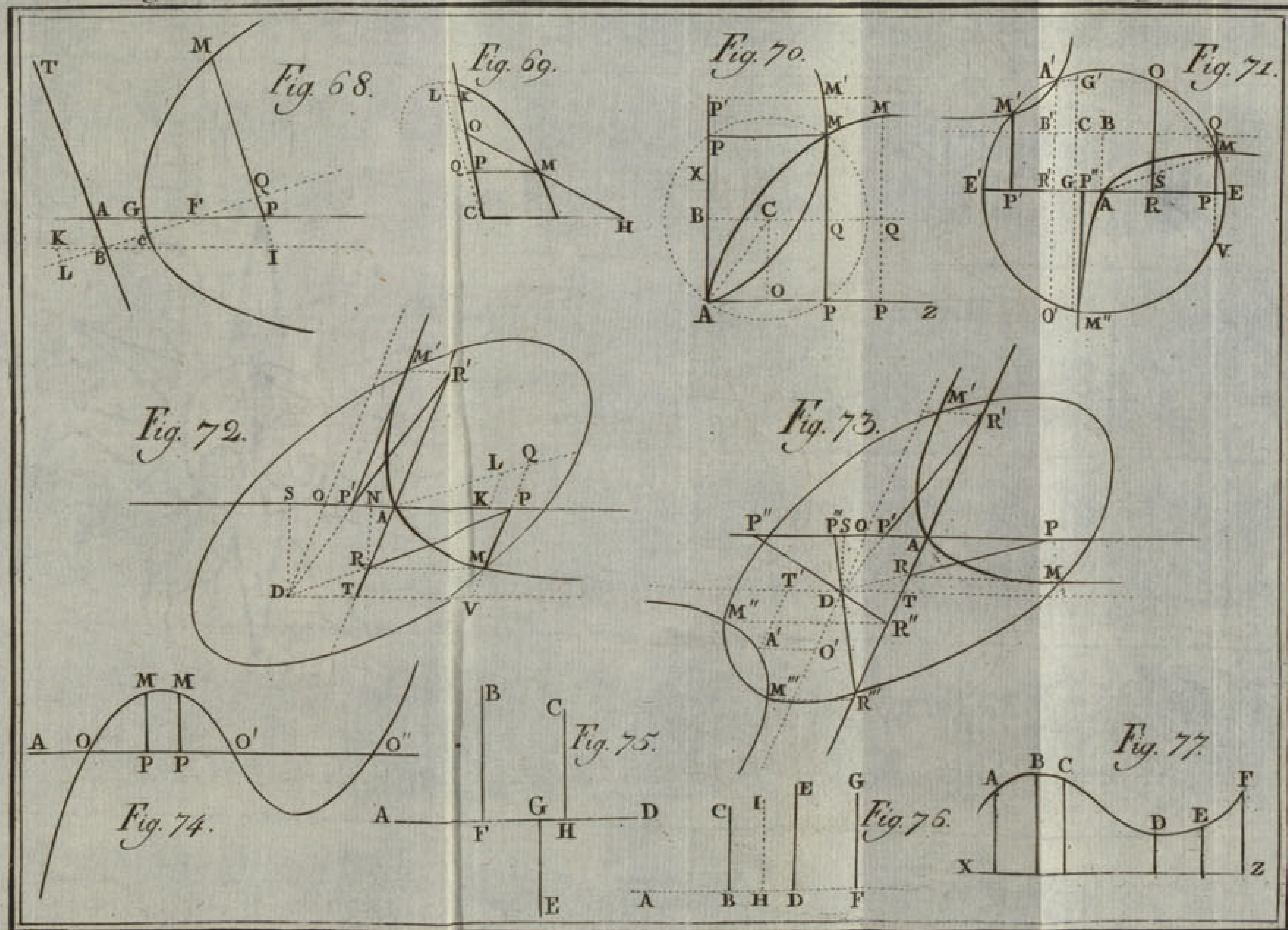


Fig. 68.
Fig. 69.
Fig. 70.
Fig. 71.
Fig. 72.
Fig. 73.
Fig. 74.
Fig. 75.
Fig. 76.
Fig. 77.

Fig. 77.

Algebra

BEZOUT
ANALYS

1