M

Ex-libris

Dr. Luiz da Costa e Almeida

RESOLUÇÃO ANALYTICA

DOS

PROBLEMAS GEOMETRICOS,

E

INDAGAÇÃO DA VERDADEIRA ORIGEM DAS QUANTIDADES NEGATIVAS.

POR

JOSÉ JOAQUIM RIVARA,

SEXTO LENTE NA FACULDADE DE MATHEMATICA
DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA.

COIMBRA:
NA REAL IMPRENSA DA UNIVERSIDADE.

1815.

ADVERTENCIA.

Os problemas, de que damos ao Publico a *Resolução analytica*, são tirados do tomo VIII. dos *Opusc. Math.* de *d'Alembert*, da *Algebra* de *Bezout*, e da de *Simpson*. Por ella se verá, que os embaraços e paradoxos, que se encontrão na posição das linhas, que as raizes negativas das equações dos mencionados problemas representão, procedem daquelles Geometras se terem desviado da lei da *continuidade geometrica*, a qual nas nossas soluções observamos e rigorosamente seguimos; e por onde vimos no conhecimento da verdadeira origem das quantidades negativas, e que ellas nada tem de arbitrarias e hypotheticas. E porque a theorica luminosa das referidas quantidades he de um grande soccorro no progresso da Analyse, julgamos conveniente expôr e publicar as soluções seguintes.

Ubi de infinitesimis agemus, statuemus illud, ac demonstrabimus, lineas, superficies, solida, quae in se determinata sint, quae nimirum suos alicubi limites habeant, finita esse, et finitam inter se rationem habere. Hic autem ita eas voces adhibemus, ut infinitum dicamus id, cujus saltem aliquis limes nusquam jam sit. Non quaerimus an ipse a nobis assignari possit, an non.

BOSCOVICH. Dissert. de transformatione locorum geometricorum, n. 866.

RESOLUÇÃO ANALYTICA

DOS

PROBLEMAS GEOMETRICOS.

PROBLEMA I.

1 *COnduzindo-se uma recta, que corte a circumferencia de um circulo dado, por um ponto tomado dentro ou fóra della, de posição determinada, isto he, que forme com o diametro um angulo dado, achar as partes da mesma recta comprehendidas entre o ponto e a circumferencia.*

Seja (Fig. 1) o circulo EBFE, o ponto A, e a recta Bd. Abaixè-se a perpendicular BP. Denote-se EC por r, EA por a, EP por x, PB por y, AB por z, e por m a tangente do angulo EAB, medido no circulo proposto. He sabido, que a equação

$$y = \frac{m}{r}(a - x)$$

tem por lugar a recta AB, isto he, determina a sua posição; e que o seu valor he determinado pela equação

$$z^2 = (a - x)^2 + y^2.$$

Substituindo pois nesta o valor de y tirado da primeira, teremos

$$(a - x)^2 = \frac{r^2 z^2}{r^2 + m^2},$$

isto he,

$$x = a - \frac{rz}{\sqrt{r^2 + m^2}}, \text{ e } x' = a + \frac{rz}{\sqrt{r^2 + m^2}};$$

valores, que substituidos na equação

$$y = \frac{m}{r}(a - x),$$

darão

$$y^2 = \frac{m^2 z^2}{r^2 + m^2}.$$

Como porem ás intersecções da recta e do circulo correspondem as mesmas coordenadas; se na equação do circulo $y^2 = 2rx - x^2$, introduzirmos os valores achados de x e y, teremos a equação

$$z^2 + \frac{2r(r-a)}{\sqrt{r^2+m^2}} z = a(2r-a),$$

cujas raizes serão as expressões de AB. Assim a primeira

$$z = \frac{-r(r-a) + \sqrt{r^4 + m^2 a(2r-a)}}{\sqrt{r^2+m^2}}$$

essencialmente positiva será a de AB, e a segunda

$$z = \frac{-r(r-a) - \sqrt{r^4 + m^2 a(2r-a)}}{\sqrt{r^2+m^2}}$$

negativa a de Ad.

2 Para virmos no conhecimento das linhas pertencentes ás raizes, que correspondem a x', reflectiremos, que na passagem por 90° do angulo EAB, se faz negativa a expressão da secante $\sqrt{r^2 + m^2}$, e consequintemente a este caso pertencerá o valor x'. Pelo que, fazendo o angulo FAD = EAB, e substituindo os valores de x' e y na equação $y^2 = 2rx - x^2$, teremos

$$z^2 - \frac{2r(r-a)}{\sqrt{r^2+m^2}} z = a(2r-a),$$

donde se tirão as raizes

$$z = \frac{r(r-a) + \sqrt{r^4 + m^2 a(2r-a)}}{\sqrt{r^2+m^2}},$$

$$z = \frac{r(r-a) - \sqrt{r^4 + m^2 a(2r-a)}}{\sqrt{r^2+m^2}};$$

a primeira das quaes essencialmente positiva mostra o valor de AD, e a segunda negativa o de Ab. Finalmente depois do que fica declarado concluiremos as quatro raizes seguintes

$$z = \frac{-r(r-a) + \sqrt{r^4 + m^2 a(2r-a)}}{\sqrt{r^2+m^2}} = \mathrm{AB},$$

$$z' = \frac{r(r-a) + \sqrt{r^4 + m^2 a(2r-a)}}{\sqrt{r^2+m^2}} = \mathrm{AD},$$

$$z'' = \frac{-r(r-a) - \sqrt{r^4 + m^2 a(2r-a)}}{\sqrt{r^2+m^2}} = \mathrm{A}d,$$

$$z''' = \frac{r(r-a) - \sqrt{r^4 + m^2 a(2r-a)}}{\sqrt{r^2+m^2}} = \mathrm{A}b.$$

3 Agora somando as raizes z e z', e designando por $2c$ esta soma, temos

$$2\sqrt{\frac{r^4 + m^2 a(2r-a)}{r^2+m^2}} = 2c = \mathrm{AB} + \mathrm{AD},$$

e pondo b em vez de $2r-a$, teremos

$$m^2 = \frac{r^4 - r^2c^2}{c^2 - ab}$$

$$\sqrt{r^4 + m^2 a(2r-a)} = \frac{cr(r-a)}{\sqrt{c^2-ab}},$$

$$\sqrt{r^2+m^2} = \frac{r(r-a)}{\sqrt{c^2-ab}}.$$

Assim substituindo estes valores nas expressões das raizes, acharemos

$$z = c - \sqrt{c^2 - ab} = AB,\ z' = c + \sqrt{c^2 - ab} = AD,$$

$$z'' = -c - \sqrt{c^2 - ab} = Ad,\ z''' = -c + \sqrt{c^2 - ab} = Ab.$$

Donde no caso de ser $a = 0$, ou existir o ponto em E, isto he, na circumferencia, concluiremos

$$z = 0,\ z' = \frac{2r^2}{\sqrt{r^2 + m^2}} = 2c,\ z'' = \frac{-2r^2}{\sqrt{r^2 + m^2}} = -2c,\ z''' = 0;$$

a primeira $z = 0$ nos mostra, que a e z tem a mesma origem; e a segunda $z' = 2c$ a prop. 1. 4. Eucl.

4. Por quanto acabamos de ver, que $a = 0$, dá $z = 0$ e $z''' = 0$; he manifesto, que estas duas raizes mudarão de signal, se fôr a negativo. Assim teremos

$$-z = \frac{-r(r+a) + \sqrt{r^4 - m^2 a(2r+a)}}{\sqrt{r^2 + m^2}},$$

$$z' = \frac{r(r+a) + \sqrt{r^4 - m^2 a(2r+a)}}{\sqrt{r^2 + m^2}},$$

$$z'' = \frac{-r(r+a) - \sqrt{r^4 - m^2 a(2r+a)}}{\sqrt{r^2 + m^2}},$$

$$-z''' = \frac{r(r+a) - \sqrt{r^4 - m^2 a(2r+a)}}{\sqrt{r^2 + m^2}},$$

ou

$$z = \frac{r(r+a) - \sqrt{r^4 - m^2 a(2r+a)}}{\sqrt{r^2 + m^2}} = A'B',$$

$$z' = \frac{r(r+a) + \sqrt{r^4 - m^2 a(2r+a)}}{\sqrt{r^2 + m^2}} = A'D',$$

$$z'' = \frac{-r(r+a) - \sqrt{r^2 - m^2a(2r+a)}}{\sqrt{r^2+m^2}} = A'd',$$

$$z''' = \frac{-r(r+a) + \sqrt{r^2 - m^2a(2r+a)}}{\sqrt{r^2+m^2}} = A'b'.$$

Mas como neste caso $AB + AD$ se torna em $A'D' - A'B'$, será

$$2\sqrt{\frac{r^2 - m^2a(2r+a)}{r^2+m^2}} = 2c = A'D' - A'B'.$$

Pelo que, feitas as substituições do mesmo modo, que antecedentemente se praticou, e advertindo que $2r+a=b$, acharemos as raizes seguintes

$$z = -c + \sqrt{c^2+ab} = A'B', \quad z' = c + \sqrt{c^2+ab} = A'D',$$
$$z'' = -c - \sqrt{c^2+ab} = A'd', \quad z''' = c - \sqrt{c^2+ab} = A'b'.$$

5 As expressões das raizes, que vimos de achar para o caso de estar o ponto fóra do circulo, forão deduzidas da lei da *continuidade*, por onde se observa, que as expressões das quantidades lineares mudão de signal na passagem por o; ou ∞. Mas para então conhecermos as raizes independentemente desta consideração, notaremos, que a equação

$$y = \frac{m}{r}(a+x)$$

determina a posição da recta $A'B'$; e a sua grandeza lhe conhecida pela equação

$$z^2 = (a+x)^2 + y^2,$$

das quaes se tira

$$x = \frac{rz}{\sqrt{r^2+m^2}} - a, \text{ e } x' = -\frac{rz}{\sqrt{r^2+m^2}} - a;$$

valores, que substituidos, e o de $y^2 = \frac{m^2z^2}{r^2+m^2}$, na equação do circulo $y^2 = 2rx - x^2$ dão as equações

$$z^2 - \frac{2r(r+a)}{\sqrt{r^2+m^2}} z = -a(2r+a),$$

$$z^2 + \frac{2r(r+a)}{\sqrt{r^2+m^2}} z = -a(2r+a),$$

e por conseguinte as raizes

$$z = \frac{r(r+a) \pm \sqrt{r^4 - m^2 a(2r+a)}}{\sqrt{r^2+m^2}},$$

$$z = \frac{-r(r+a) \pm \sqrt{r^4 - m^2 a(2r+a)}}{\sqrt{r^2+m^2}},$$

como se achou.

6 Se reportarmos as coordenadas ao centro C, designando CA por α, CP por u, e substituindo nas raizes achadas $r - \alpha$ em lugar de a, teremos

$$z = \frac{-\alpha r + \sqrt{r^4 + m^2(r^2 - \alpha^2)}}{\sqrt{r^2+m^2}} = \mathrm{AB},$$

$$z = \frac{-\alpha r - \sqrt{r^4 + m^2(r^2 - \alpha^2)}}{\sqrt{r^2+m^2}} = \mathrm{A}d;$$

valores de Lacroix (*App. de l'Alg. à la Géom.* n. 88.). Mas não basta nestes suppôr $\alpha > r$ para termos os de A'B' e A'D', porque substituindo $\alpha - r$ em vez de a nas raizes, que (4) representão estas linhas, teremos

$$z = \frac{\alpha r - \sqrt{r^4 - m^2(\alpha^2 - r^2)}}{\sqrt{r^2+m^2}} = \mathrm{A'B'},$$

$$z' = \frac{\alpha r + \sqrt{r^4 - m^2(\alpha^2 - r^2)}}{\sqrt{r^2+m^2}} = \mathrm{A'D'};$$

differentes das que resultão da supposição de $a>r$ nas primeiras. Por outra parte, fazendo uso das equações

$$y=\frac{m}{r}(u-a),\ \text{e}\ u-a=\frac{rz}{\sqrt{r^2+m^2}},$$

de que Lacroix se serve, he evidente, que sendo $a>r$, ou existindo o ponto fóra do circulo, na passagem de A por E, onde temos

$$u-a=\frac{rz}{\sqrt{r^2+m^2}}=\frac{r.o}{\sqrt{r^2+m^2}},$$

tornando-se negativo $\frac{rz}{\sqrt{r^2+m^2}}$, e considerando-se o z negativo, se restitue positivo, então as sobreditas equações só nos podem dar as raizes negativas

$$z'''=\frac{-ar+\sqrt{r^4-m^2(a^2-r^2)}}{\sqrt{r^2+m^2}}=A'b',$$

$$z''=\frac{-ar-\sqrt{r^4-m^2(a^2-r^2)}}{\sqrt{r^2+m^2}}=A'd'.$$

7 Isto supposto, para construirmos as raizes achadas, pelo ponto A e o centro do circulo tire-se o diametro EF, inscreva-se a recta EK $=2c$, e conduza-se CH parallela a EK. Descreva-se tambem o circulo CRAr, tendo AC por diametro, e inscrevendo nelle as rectas CR e Cr iguaes cada uma a HK, conduzão-se finalmente pelo ponto A, e por R e r as rectas AR e Ar, que de uma e outra parte encontrem a circumferencia. Deste modo ficarão determinadas as posições das rectas Db e Bd iguaes cada uma a $2c$. Porque, tirando-se CD, o triangulo rectangulo CRD dá $RD^2=CD^2-CR^2$, mas he $CR^2=HK^2=\frac{1}{4}FK=r^2-c^2$, logo $RD^2=r^2-r^2+c^2$, isto he, $RD=\pm c$; e o triangulo

rectangulo ACR dá tambem $AR^2 = AC^2 - CR^2$, isto he, $AR^2 = (r-a)^2 + c^2 - r^2 = c^2 - ab$, ou $AR = \pm\sqrt{c^2 - ab}$: logo

$$AB = c - \sqrt{c^2 - ab}, \quad AD = c + \sqrt{c^2 - ab},$$
$$Ad = -c - \sqrt{c^2 - ab}, \quad Ab = -c + \sqrt{c^2 - ab}.$$

8 He facil de ver pela construcção antecedente, que se o ponto K ajustasse em F, teriamos $CR = \sqrt{r^2 - c^2} = o$, e a tangente $m = \dfrac{r\sqrt{r^2 - c^2}}{\sqrt{c^2 - ab}} = o$, que nos daria $c = \pm r$. E porque reflectindo na expressão $\sqrt{r^2 - c^2}$, se conhece a impossibilidade de $c > r$, então seria $2c$ a maxima. Segue-se mais, que ajustando-se R em A, teriamos $AR = \sqrt{c^2 - ab} = o$, isto he, $c^2 = ab$, ou $a : c :: c : b$; e $m = \dfrac{r\sqrt{r^2 - c^2}}{\sqrt{c^2 - ab}} = \infty$. Por tanto no caso de ser c media proporcional entre a e b, seria perpendicular ao diametro no ponto A, donde se infere a prop. 13. 6. Eucl. Bem se vê, advertindo na expressão $\sqrt{c^2 - ab}$, que não he possivel $c < \sqrt{ab}$, e conseguintemente viria a ser $2c$ a minima.

9 Igualmente podemos conhecer este *maximo*, e *minimo* por meio do calculo differencial. Com effeito se da expressão geral $c = \sqrt{\dfrac{r^4 \pm m^2 ab}{r^2 + m^2}}$, significando ϕ o angulo EAB, deduzirmos a seguinte $c = \dfrac{\text{sen.}\,\phi}{r}\sqrt{\text{cot.}^2\phi \pm ab}$,

a propriedade sabida do maximo, ou minimo nos dará a equação

$$\cos.^3\phi - r^2\cos.\phi = 0,$$

donde resulta

$$\cos.\phi = r,\ \cos.\phi = -r,\ \text{e}\ \cos.\phi = 0,$$

isto he,

$$\phi = 0,\ \phi = 180°,\ \text{e}\ \phi = 90°.$$

Assim substituindo estes valores na expressão de c, teremos

$$1^{\circ}\ c = r,\ c = -r,\ \text{e}\ c = \sqrt{ab};\ 2^{\circ}\ c = r,\ c = -r,\ \text{e}\ c = \sqrt{-ab}.$$

Mas como o valor $c = \sqrt{-ab}$ pertence ao caso do ponto estar fóra do circulo, segue-se que ahi unicamente terá lugar o maximo.

10 Quando o ponto dado existe dentro do circulo, multiplicando as raizes

$$z = c - \sqrt{c^2 - ab},\ z' = c + \sqrt{c^2 - ab},$$

temos $zz' = ab$, isto he, BA.AD = EA.AF, e por conseguinte BA : EA :: AF : AD. Os rectangulos positivos BA.AD, e EA.AF nos mostrão, que a propriedade do circulo, que acabamos de achar, he em rigor a prop. 35. 3. Eucl., que se estabelece na prop. 5. 2., em que os referidos rectangulos são positivos. Assim querendo servir-nos della, como d'Alembert, (*Opusc. math.* tom. 8. pag. 274. n. 9.) pelas equações $zz' = ab$, e $z + z' = 2c$ nada mais se pode obter, do que as raizes positivas

$$z = c - \sqrt{c^2 - ab} = \text{AB},\ z' = c + \sqrt{c^2 - ab} = \text{AD}.$$

11 Em quanto ás linhas, que se exprimem pelas outras raizes igualmente positivas

$$z = c + \sqrt{c^2 - ab},\ z' = c - \sqrt{c^2 - ab},$$

que resultão das mesmas equações, advirta-se, que se tomarmos o *b primitivo* igual a a, isto he, (fig. 2) $\alpha F = a$, será

$$x = 2r - a - \frac{rz}{\sqrt{r^2 + m^2}} = EP',$$

e feita a substituição na equação do circulo $y^2 = 2rx - x^2$, teremos

$$z^2 - \frac{2r(r-a)}{\sqrt{r^2+m^2}}\, z = a(2r-a),$$

que, pondo b em vez de *a primitivo*, ou $2r - a$, nos dá

$$z = c + \sqrt{c^2 - ab} = \alpha\Delta = AD,\ z''' = -c + \sqrt{c^2 - ab} = \alpha 6 = Ab.$$

Semelhantemente achariamos

$$z' = c - \sqrt{c^2 - ab} = \alpha\beta = AB,\ z'' = -c - \sqrt{c^2 - ab} = \alpha\delta = Ad.$$

12 No caso de existir fóra do circulo o ponto dado, se multiplicarmos as raizes

$$z = -c + \sqrt{c^2 + ab},\ z' = c + \sqrt{c^2 + ab},$$

tambem resulta $zz' = ab$, ou $z(z + 2c) = ab$, pondo $z + 2c$ em lugar de z', donde se deriva

$$z = -c + \sqrt{c^2 + ab},\ z = -c - \sqrt{c^2 + ab}.$$

Com effeito da prop. 5. 2. Eucl. consta (fig. 3)

$$EA.AF + CA^2 = EC^2,\ \text{ou}\ EA.AF = EC^2 - CA^2.$$

Assim se fôr $CA = EC$, cahirá a em H, e será $EA.AF = 0$. E porque na passagem de a para A', o rectangulo positivo af se torna em o negativo $A'f$, então será

$$EA'.A'F = CA'^2 - EC^2.$$

Semelhantemente (fig. 2)

$$BA.\Delta\alpha + \alpha S^2 = \Delta S^2 = EC^2 - CA^2 + \alpha S^2,$$

isto he,

$$BA.\Delta\alpha = EC^2 - CA^2,$$

mas na passagem de A para A' he negativa BA; logo os rectangulos EA.AF, e BA.Δα passarão para negativos em A'. Por onde se vê, que em A' e α', as raizes

$$BA = c - \sqrt{c^2 - ab}, \quad \Delta\alpha = c + \sqrt{c^2 - ab},$$

se converterão em

$$B'A' = c - \sqrt{c^2 + ab}, \quad \Delta'\alpha' = c + \sqrt{c^2 + ab}.$$

Agora considerando positiva a linha B'A', isto he, $A'B' = -c + \sqrt{c^2 + ab}$, como dá o calculo, he visivel, que $\Delta'\alpha'$ se deverá converter em $\alpha'\delta' = -c - \sqrt{c^2 + ab}$, para se restituir negativo o rectangulo $BA \cdot \Delta\alpha$.

13 Se fôr $b = r$, teremos

$$c = \sqrt{\frac{r^4 - m^2 a(2r + a)}{r^2 + m^2}} = \sqrt{\frac{a^4 + m^2 a^2}{a^2 + m^2}} = \pm a,$$

e por conseguinte

$$A'R' = \pm\sqrt{c^2 + a(2r + a)} = o, \text{ e } CR' = \pm\sqrt{r^2 - c^2} = o.$$

Assim em os mais casos $\sqrt{c^2 + ab}$ exprimirá as linhas A'R', α'S', e $-\sqrt{c^2 + ab}$ as oppostas α's', A'r'. Semelhantemente $\sqrt{r^2 - c^2}$ dará as linhas CR', CS'; e $-\sqrt{r^2 - c^2}$ as oppostas Cs', Cr'. E daqui se vê tambem, que α'δ' representada pela raiz negativa z'' tem posição contraria de A'D' representada pela positiva z'; assim como A'd' a tem contraria de α'Δ'. Por isso era razão, que d'Alembert primeiro que advertisse na posição de A'D' a respeito de A'B', mostrasse o que enuncia (*Opusc. math.* tom. 8. pag. 272.) *la racine positive est donnée par A'B', et la négative par A'D'*; porque a raiz

$$z' = z + 2c = c + \sqrt{c^2 + ab} = A'D',$$

não he a negativa

$$z'' = -c - \sqrt{c^2 + ab} = \alpha'\delta'.$$

14. Bezout (*Alg.* 270) procurando descobrir a linha respectiva á raiz negativa z'', considera A' origem de A'E; outro paradoxo, que facilmente se deriva das soluções precedentes. Porque eliminando a da expressão

$$c = \frac{\sin.\phi}{r}\sqrt{\cot.^2\phi - a(2r + a)},$$

temos

$$a = \frac{r\sqrt{r^2 - c^2}}{\sin.\phi} - r = A'E, \quad a = \frac{-r\sqrt{r^2 - c^2}}{\sin.\phi} - r = a'E,$$

$$b = r + \frac{r\sqrt{r^2 - c^2}}{\sin.\phi} = A'F, \quad b = r - \frac{r\sqrt{r^2 - c^2}}{\sin.\phi} = a'F;$$

e como he

$$CS = \sqrt{r^2 - c^2} < \sin.\phi, \quad Co = \sqrt{r^2 - c^2} = \sin.\phi;$$

$CS' = \sqrt{r^2 - c^2} > \sin.\phi$, será a segunda expressão de b negativa. Mas como aos valores negativos de a e b corresponde $-\sqrt{r^2 - c^2}$, que representa Cs', he evidente, que fazendo-se negativos a e b na equação $z^2 + 2cz = ab$, nesse caso as raizes respectivas á questão serão as negativas

$$z''' = c - \sqrt{c^2 + ab} = a'6', \quad z'' = -c - \sqrt{c^2 + ab} = a'\delta'.$$

15 Pela disposição *symetrica* de z e z' nas equações $z + z' = 2c$, e $zz' = ab$, se vê, que unicamente podem conseguir-se as linhas pertencentes á circumferencia supposta positiva; porque mudando-se z em z', e reciprocamente, resultão as mesmas funções $z' + z$, $z'z$, e consequentemente tem $z + z'$ o só valor $2c$. Mas exprimindo $2c$ a differença entre z' e z, feita huma semelhante mudança, $z' - z$ recebe o valor $-2c$, e por conseguinte z e z' não serão as raizes de huma mesma equação. Sendo (fig. 4) primeiramente c positivo, teremos

$z' = c + \sqrt{c^2 + ab} = A'D'$, $z' = c - \sqrt{c^2 + ab} = a'\delta'$;
depois $c = o$,

$$z' = \sqrt{ab} = A''T, \quad z' = -\sqrt{ab} = a'T';$$

e em terceiro lugar c negativo,

$$z = -c + \sqrt{c^2 + ab} = A'B'; \quad z = -c - \sqrt{c^2 + ab} = a'\delta':$$

Note-se tambem, que no caso de $c = o$, sendo $m = \frac{r^2}{\sqrt{ab}}$; isto he,

$$\sqrt{ab} = \frac{r^2}{m} = \text{cot. } CA'T,$$

será

$$A''T = \text{cot. } CA'T = \sqrt{A'E \cdot A'F},$$

prop. 36. 3. Eucl.

16 Em fim temos visto (n. 3), que $a = o$ dá

$$x' = \frac{rz'}{\sqrt{r^2 + m^2}} = EP, \text{ e } z' = \frac{2r^2}{\sqrt{r^2 + m^2}} = 2c = EK;$$

então separando $\sqrt{r^2 + m^2}$, teremos $\frac{z'}{x'} = \frac{2r}{z'}$, isto he,

$$z = \sqrt{2rx'} = 2c = EK.$$

Igualmente (fig. 2) $aF = a = o$ dá (fig. 4)

$$x = 2r - \frac{rz}{\sqrt{r^2 + m^2}} = EP', \text{ e } z = \frac{2r^2}{\sqrt{r^2 + m^2}} = FK';$$

logo $\frac{z}{2r - x} = \frac{2r}{z}$, isto he, $z = \sqrt{2r(2r - x)}$, ou tomando $P'F = EP = 2r - x = x'$, $z = \sqrt{2rx'} = 2c = FK'$.
Pelo que respeita a Fk', semelhantemente temos

$$x = \frac{-rz''}{\sqrt{r^2 + m^2}} = FP', \text{ e } z'' = \frac{-2r^2}{\sqrt{r^2 + m^2}} = Fk';$$

donde se collige $\frac{-z''}{x} = \frac{2r}{-z''}$, isto he, $z'' = -\sqrt{2rx} = -2c = Fk'$.
Do mesmo modo se acharia $z'' = -\sqrt{2rx} = -2c = Ek$.
Eisaqui pois a solução da difficuldade proposta (*Opusc. math.* tom. 8. pag. 274. n. 10.)

PROBLEMA II.

17 *Achar as curvas, nas quaes a distancia (fig. 5 e 6) MF de um qualquer M dos seus pontos ao ponto fixo F, tomado na recta HF, tenha uma razão constante para a distancia MQ do mesmo ponto M á recta HZ, que forma com a primeira o angulo recto ZHF.*

Abaixe-se a perpendicular MP. Seja $HF=d$, $MQ=z$, $AP=x$, $PM=y$, $FM=r$, o angulo $AFM=u$, e $\frac{MF}{MQ}=\frac{r}{z}=e$. No triangulo rectangulo FMP, temos

$$r^2=(d-z)^2+y^2;$$

e introduzindo a outra condição do problema, isto he, substituindo e^2z^2 em lugar de r^2, resulta a equação das curvas procuradas

$$y^2=(e^2-1)z^2+2dz-d^2.$$

Donde, sendo $y=0$, se tira

$$z=\frac{d}{1+e}=HA\text{, e } z=\frac{d}{1-e}=Ha.$$

18 Em primeiro lugar supponha-se $r<z$, ou $e<1$, ambos os valores de HA e Ha (fig. 5) serão positivos, e teremos

$$\frac{d}{1-e}-\frac{d}{1+e}=\frac{2de}{1-e^2}=Aa.$$

Pelo que fazendo $\frac{2de}{1-e^2}=2a$, será $d=\frac{a(1-e^2)}{e}$;

Como pois he $z=\frac{d}{1+e}+x$, substituindo este valor, e o de d na equação do numero precedente, virá a equação

$$y^2=(1-e^2)(2ax-x^2)$$

pertencente á ellipse. E porque he $1-e^2$ a razão do quadrado do semieixo menor ao do maior, segue-se que a excentricidade será para o semieixo maior, como $e:1$, ou MF : MQ. Bem se vê, que sendo $e=0$, ou $d=\infty$, a curva he o circulo do raio a. Agora seja $r=z$, ou $e=1$, deverá tambem ser $a=\infty$, para que represente d a quantidade finita $\frac{a(1-e^2)}{e}=\infty.0=\frac{0}{0}$; inassignavel por esta expressão. Mas designando c a distancia AF do vertice ao foco, como temos $a=\frac{c}{1-e}$, será $d=c+\frac{c}{e}=2c$. Na mesma supposição a equação $y^2=(e^2-1)z^2+2d-d^2$ se muda em $y^2=2dz-d^2$, e pondo $\frac{d}{2}+x$ em lugar de z, em

$$y^2=2dx, \text{ ou } y^2=4cx,$$

equação da parabola. Em fim, sendo $r>z$, ou $e>1$, será negativo $\frac{d}{1-e}$, ou Ha, como tambem $\frac{2de}{1-e^2}$, ou $2a$, ou Aa (fig. 6), e a curva terá por equação

$$y^2=(e^2-1)(2ax+x^2),$$

que pertence á hyperbola, na qual a excentricidade tem para o semieixo maior a razão de $e:1$, ou MF : MQ. Neste ultimo caso, passando a directriz HZ pelo foco F, ou fazendo $d=0$ na equação $y^2=(e^2-1)z^2+2dz-d^2$, teremos a equação

$$y=z\sqrt{e^2-1}, \text{ ou } y=x\sqrt{e^2-1}$$

da recta Fμ, porque no triangulo rectangulo Fμq, temos $y^2+x^2=r^2=e^2x^2$, isto he, $y=x\sqrt{e^2-1}$. Alem disso, reparando na expressão $d=\frac{a(e^2-1)}{e}$, está claro, que, sendo $e>1$, $a=0$ dá $d=0$, e nesse caso a equação $y^2=(e^2-1)(2ax+x^2)$ se converte em $y=x\sqrt{e^2-1}$.

19 Isto supposto, significando b o semieixo conju-

gado, e p o parametro, na ellipse, teremos

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{2ac - c^2}{a^2} = \frac{p}{2a} = 1 - e^2;$$

relações, que se aniquilarão, se fôr $a = \infty$ e $e = 1$, deste modo satisfazendo na parabola. E porque na hyperbola a se torna em $-a$, e b em $b\sqrt{-1}$, as sobreditas relações se mudarão em

$$\frac{-b^2}{a^2} = \frac{-2ac - c^2}{a^2} = -\frac{p}{2a} = 1 - e^2,$$

isto he, $$\frac{b^2}{a^2} = \frac{2ac + c^2}{a^2} = \frac{p}{2a} = e^2 - 1.$$

20 He tambem facil de vêr, que as *secções conicas* se comprehendem entre os limites de $e = 0$ até $e = \infty$, e de $d = \infty$ até $d = c$. Com effeito na ellipse $d = \frac{a(1 - e^2)}{e}$, que no caso do circulo, isto he, de $e = 0$, vem $d = \infty$. Depois, he evidente, que á medida que vai e crescendo, diminue d até $e = 1$, onde sendo $a = \infty$, em tal caso na parabola será $d = 2c$. E na hyperbola passando a ser $e > 1$, e a do infinito para negativo, temos $d = \frac{a(e^2 - 1)}{e}$, continua pois d a diminuir até $e = \infty$, onde sendo $a = 0$, então sahe indeterminada a expressão

$$d = \frac{a(e^2 - 1)}{e} = 0 \cdot \infty = \frac{0}{0}.$$

Mas pondo $\frac{c}{e - 1}$ em lugar de a, virá

$$d = \frac{c(e^2 - 1)}{e(e - 1)} = c + \frac{c}{e},$$

que na hypothese de que se trata dá $d = c$, e a hyperbola se converte (fig. 6) na perpendicular AK, que passa pelo vertice.

21 Agora se quizermos as expressões do raio vector r, por meio do numero e, do angulo u, e do semieixo

maior a. No triangulo rectangulo (fig. 5) FPM, temos

$$y=(c-x)\,\text{tg.}\,u,\quad \text{e}\ r^2=(c-x)^2+y^2,$$

logo $(c-x)^2=r^2\cos.^2 u$, isto he,

$$c-x=r\cos.u,\quad c-x=-r\cos.u,$$

ou

$$x=c-r\cos.u,\quad x=c+r\cos.u.$$

Como pois na ellipse achámos

$$y^2=(1-e^2)(2ax-x^2),$$

substituindo o primeiro valor de x, e pondo $a(1-e)$ em lugar de c, resultará a equação

$$r^2+\frac{2ae(1-e^2)\cos.u}{1-e^2\cos.^2u}r=\frac{a^2(1-e^2)^2}{1-e^2\cos.^2u},$$

cujas raizes serão

$$r=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos.u}=\text{FM},\quad r''=\frac{-a(1-e^2)}{1-e\cos.u}=\text{F}m.$$

Substituindo tambem o segundo valor de x na mencionada equação da ellipse, sahirá

$$r^2-\frac{2ae(1-e^2)\cos.u}{1-e^2\cos.^2u}r=\frac{a^2(1-e^2)^2}{1-e^2\cos.^2u},$$

da qual se tirão as raizes

$$r'=\frac{a(1-e^2)}{1-e\cos.u}=\text{FM}',\quad r'''=\frac{-a(1-e^2)}{1+e\cos.u}=\text{F}m'.$$

Assim dividindo a corda M'm' em duas partes iguaes no ponto R, como temos $r+r'=\dfrac{2a(1-e^2)}{1-e^2\cos.^2u}$, será

$$\text{RM}'=\frac{a(1-e^2)}{1-e^2\cos.^2u},\quad \text{e FR}=\frac{ae(1-e^2)\cos.u}{1-e^2\cos.^2u}.$$

Semelhantemente no outro fóco f da ellipse, substituindo $2a-c-r\cos.u$ em lugar de x na equação

$$y^2=(1-e^2)(2ax-x^2),$$

teremos

$$r^2-\frac{2ae(1-e^2)\cos.u}{1-e^2\cos.^2u}r=\frac{a^2(1-e^2)^2}{1-e^2\cos.^2u},$$

que nos dá as raizes

$$r'=\frac{a(1-e^2)}{1-e\cos.u}=f\text{N}',\ \text{e}\ r'''=\frac{-a(1-e^2)}{1+e\cos.u}=fn'.$$

22 Na parabola em que acontece ser $a = \infty$ e $e = 1$, as expressões do raio vector antecedentemente achadas apparecem em forma indeterminada. Mas pondo $\frac{c}{1-e}$ em lugar de a, teremos

$$r = \frac{c(1+e)}{1 + e \cos. u},$$

que na referida hypothese se muda em

$$r = \frac{2c}{1 + \cos. u} = \frac{c}{\cos.^2 \frac{1}{2} u}.$$

Assim concluiremos

$$r = \frac{c}{\cos.^2 \frac{1}{2} u}, r' = \frac{c}{\text{sen.}^2 \frac{1}{2} u}, r'' = \frac{-c}{\text{sen.}^2 \frac{1}{2} u}, r''' = \frac{-c}{\cos.^2 \frac{1}{2} u}, \text{e} \frac{r+r'}{2} = \frac{2c}{\text{sen.}^2 u}.$$

23 Reflectindo nas formulas do raio vector da ellipse, se vê claramente, que para descobrir-se por meio de $r' = \frac{a(1-e^2)}{1 - e \cos. u} = \text{FM}'$ a expressão de $\text{F}m'$, não basta (*Opusc. math.* tom. 8. pag. 271. n. 2) introduzir sómente $-\cos. u$ em lugar de $\cos. u$, porque sem embargo de ser

$$\cos.(u + 180°) = -\cos. u,$$

he tambem

$$\cos.(180° - u) = -\cos. u,$$

e por isso com esta mudança não se determina necessariamente a posição do raio vector respectivo a $u + 180°$.

22 Examinando particularmente as sobreditas formulas, he evidente, 1° que se for $u = 0$, isto he, $\cos. u = 1$, teremos

$$r = a(1-e) = \text{FA}, \quad r' = a(1+e) = f\text{A},$$
$$r'' = -a(1+e) = \text{F}a, \quad r''' = -a(1-e) = fa,$$

2° $u = 90°$, isto he, $\cos. u = 0$,

$$r = a(1-e^2) = \tfrac{1}{2}p = \text{FD}, r' = a(1-e^2) = \tfrac{1}{2}p = \text{FD},$$
$$r'' = -a(1-e^2) = -\tfrac{1}{2}p = \text{F}d, \quad r''' = -a(1-e^2) = -\tfrac{1}{2}p = \text{F}d;$$

e finalmente que o eixo maior será a maxima das linhas que passão pelo fóco, e terminão na ellipse, e o parametro a minima, porque sendo $u = 0$, será

$$r + r' = \frac{2a(1-e^2)}{1-e^2\cos.^2 u} = 2a = Aa;$$

e $u = 90°$,

$$r + r' = 2a(1-e^2) = \rho = Dd.$$

25 Para acharmos na hyperbola as expressões de r, observando que o semieixo maior a he negativo, e e excede a unidade, não ha mais que mudar a em $-a$, e $1-e^2$ em $-(e^2-1)$, nas expressões do raio vector da ellipse. Pelo que feita a referida mudança, teremos (fig. 6)

$$r = \frac{a(e^2-1)}{1+e\cos.u} = FM, \quad r' = \frac{a(e^2-1)}{1-e\cos.u} = FM',$$

$$r'' = \frac{-a(e^2-1)}{1-e\cos.u} = Fm, \quad r''' = \frac{-a(e^2-1)}{1+e\cos.u} = Fm'.$$

Onde se vê, que o valor de FM sempre he positivo. Mas se o angulo AFM passar de 90°, a expressão de $r' = \frac{a(e^2-1)}{1-e\cos.u}$, que vem positiva em quanto fôr $1 > e\cos.u$, infinita sendo $1 = e\cos.u$, e negativa quando $1 < e\cos.u$, representará no 1° caso o raio FM', no 2° FO parallelo á asymptota CS, e no 3° o negativo FP. Porque, designando α o angulo ACL, que forma a asymptota com o semieixo maior, a propriedade sabida da hyperbola dá $CL = ae$; e pelo triangulo rectangulo CAL temos $1 : \cos.\alpha :: CL : CA :: ae : a$, isto he, $1 = e\cos.\alpha$. Assim se fôr $u = \alpha$, ou o raio FM' tomar a posição FO parallela á asymptota, será $1 = e\cos.u$, e se o angulo M'FR se fizer menor que α, será $1 < e\cos.u$, então o raio encontrará o outro ramo da hyperbola, tomando a posição contraria FP.

26 Igualmente se vê na expressão

$$r'' = \frac{-a(e^2-1)}{1-e\cos.u} = \frac{a(e^2-1)}{e\cos.u-1},$$

negativa em quanto fôr $1 > e\cos.u$, infinita sendo $1 = e\cos.u$, e positiva no caso de $1 < e \cos. u$, que exprimirá no 1° caso o raio negativo Fm, no 2° o infinito Fo, e nò 3° o positivo Fp. Em fim mudando na sobredita expressão o sinal de $\cos. u$, temos

$$\frac{-a\,(e^2 - 1)}{1 + e \cos. u};$$

valor de Fm', e com a mesma posição do raio negativo Fm, porque a mudança no signal de $\cos. u$ não determina a do raio correspondente a $u + 180°$.

PROBLEMA III.

27 *Dividir um arco de circulo dado em tres partes iguaes.*

Seja (fig. 7) EBF o arco, tire-se a corda EF, e do centro do circulo A abaixe-se a perpendicular AB, que seja directriz de uma hyperbola descripta com foco E, e a razão de $e : 1$ a de $2 : 1$. Pela intersecção della P com o arco conduza-se PO parallela a EF, os pontos P e O determinarão a terça parte do arco proposto. Com effeito a corda $EP = 2PD = PO$, e por conseguinte o arco $PO = PE = OF$. Designando pois A o arco EBF, será

$$PO = \text{cord.}\left(\frac{A}{3}\right).$$

28 Agora corte-se AC em duas partes iguaes pela corda pP', tire-se Op, e conduza-se a parallela Po. Como pois he facil mostrar, que a corda pP' he o lado do triangulo equilatero inscripto no circulo, significando π a circumferencia, será o arco $PP' = P'p = pP = \frac{\pi}{3}$, e por-

que o arco $po = PO$, teremos

$$Po = \text{cord.}\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{A}{3}\right).$$

Emfim conduza-se por p a corda pO' parallela a EF, que determinará

$$PO' = \text{cord.}\left(\pi + \frac{\pi}{3} + \frac{A}{3}\right).$$

29 Por quanto a corda nulla subtende os arcos zero, 2π, 4π, os ramos da hyperbola encontrarão o circulo nos pontos P, p, P' determinando a terça parte de cada um; e porque a corda de qualquer arco he o dobro do seno da sua metade, teremos

$$Po = \text{cord.}\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{A}{3}\right) = 2\sin.\left(\frac{\pi}{3} + \frac{A}{6}\right),$$

e

$$PO' = \text{cord.}\left(\pi + \frac{\pi}{3} + \frac{A}{3}\right) = 2\sin.\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} + \frac{A}{6}\right) = -2\sin.\left(\frac{\pi}{6} + \frac{A}{6}\right) = -\text{cord.}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{A}{3}\right).$$

Daqui se vê, que sem embargo de cord. $\left(\pi + \frac{\pi}{3} + \frac{A}{3}\right)$ coincidir com cord. $\left(\frac{\pi}{3} + \frac{A}{3}\right)$, a primeira he negativa. Com effeito supposta em B e P a origem do seno DO, e da corda PO, sendo DO e PO positivas, serão DP e OP negativas, assim na passagem de cord. (PO) por 360°, convertendo-se em negativa, se ha-de entender no sentido de OP; logo

$$\text{cord.}\left(\pi + \frac{\pi}{3} + \frac{A}{3}\right) = -\text{cord.}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{A}{3}\right) = O'P.$$

Eisaqui pois resolvido o embaraço, que se encontra (*Opusc. math.* tom. 8. pag. 290. n. 16.).

30 Alem disso proposto o arco BF para se dividir em tres partes iguaes, he sabido, que chamando b o sen. BF, ou sen. $\frac{1}{2}$A, t o sen. $\frac{1}{3.2}$A, e r o raio do circulo, as raizes da equação

$$4t^3 - 3r^2t + br^2 = 0$$

darão os senos das terças partes dos arcos, que resolvem a questão. Sendo pois t, t', t'' as mencionadas raizes, e attendendo aos arcos $\frac{A}{2}$, $\pi+\frac{A}{2}$, $2\pi+\frac{A}{2}$, que tem o mesmo seno, teremos

$$t=\text{sen.}\frac{A}{6},\ t'=\text{sen.}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{A}{6}\right),\ t''=\text{sen.}\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{A}{6}\right)=-\text{sen.}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{A}{6}\right).$$

31 Agora seja cord. $(A)=a$, e cord. $\left(\frac{A}{3}\right)=z$, será

$$\text{cord.}\,(A)=2\,\text{sen.}\,\frac{A}{2}=2b=a\text{, isto he, } b=\frac{a}{2},$$

e

$$\text{cord.}\left(\frac{A}{3}\right)=2\,\text{sen.}\,\frac{A}{6}=2t=z\text{, isto he, } t=\frac{z}{2};$$

e a equação dos senos se muda em

$$z^3-3r^2z+ar^2=0,$$

cujas raizes serão

$$z=2t=2\,\text{sen.}\,\frac{A}{6}=\text{cord.}\left(\frac{A}{3}\right),$$

$$z'=2t'=2\,\text{sen.}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{A}{6}\right)=\text{cord.}\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{A}{3}\right),$$

$$z''=2t''=-2\,\text{sen.}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{A}{6}\right)=-\text{cord.}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{A}{3}\right).$$

Por onde desapparecem os embaraços expostos (*Opusc. math.* tom. 8. pag. 275. n. 12); e se vê, que na equação dos senos corresponde metade do arco da equação das cordas, assim ao arco da primeira $\frac{\pi}{2n}$ he respectivo na segunda o arco $\frac{\pi}{n}$. Como porém d'Alembert considera o mesmo arco nas duas sobreditas equações, empregando na dos senos o arco $\frac{\pi}{n}$, suppõe na das cordas a raiz

$$2\,\text{sen.}\left(\frac{\pi}{2n}\right)=\text{cord.}\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

conclue-se não terem lugar as difficuldades propostas (*Opusc. math.* tom. 8. pag. 290. n. 15.).

32 Em fim supponhamos, que se pedia o valor da corda do arco de 20°. Neste caso sendo $A = \frac{\pi}{6}$, isto he, $a = r$, teriamos $z^3 - 3r^2z + r^3 = 0$, ou tomando $r = 1$, $z^3 - 3z + 1 = 0$, e nos daria as raizes

$$z = 0{,}3472 = \text{cord.}\,(20°),$$
$$z' = 1{,}5320 = \text{cord.}\,(260°),$$
$$z'' = -1{,}8793 = -\text{cord.}\,(140°).$$

No caso de $A = \frac{\pi}{2}$, isto he, de $a = 2$, teriamos a equação $z^3 - 3z + 2 = 0$, e as raizes

$$z = 1 = \text{cord.}\,(60°),$$
$$z' = 1 = \text{cord.}\,(300°),$$
$$z'' = -2 = -\text{cord.}\,(180°).$$

Se fôra $A = \pi$, isto he, $a = 0$ e $b = 0$, calculando pela equação das cordas $z^3 - 3z = 0$, virião as raizes

$$z = \sqrt{3} = \text{cord.}\,(120°),$$
$$z' = 0 = \text{cord.}\,(360°),$$
$$z'' = -\sqrt{3} = -\text{cord.}\,(240°);$$

e pelas dos senos $4t^3 - 3t = 0$, as raizes

$$t = \tfrac{1}{2}\sqrt{3} = \text{sen.}\,(60°),$$
$$t' = 0 = \text{sen.}\,(180°),$$
$$t'' = -\tfrac{1}{2}\sqrt{3} = -\text{sen.}\,(120°).$$

E finalmente no caso de $A = \pi + \frac{\pi}{2}$, isto he, de $a = -2$, da equação $z^3 - 3z - 2 = 0$ resultarião as raizes

$$z = 2 = \text{cord.}\,(180°),$$
$$z' = -1 = \text{cord.}\,(420°) = -\text{cord.}\,(60°),$$
$$z'' = -1 = -\text{cord.}\,(300°).$$

PROBLEMA IV.

33 *Do vertice (fig. 8) do angulo D no quadrado dado DEAI tirar a recta DB, de maneira que a parte CB comprehendida no angulo recto EAB tenha uma grandeza determinada* c.

Seja o lado do quadrado IA $= a$, AB $= u$, e AC $= t$. Os triangulos semelhantes IDB e ACB dão

IB : ID :: AB : AC, isto he, $a + u : a :: u : t$,
donde se tira a equação da posição da recta, de que se trata, $at + ut = au$.
Alem disto para determinar a grandeza della, temos o triangulo rectangulo ACB, que dá $AB^2 + AC^2 = CB^2$, isto he, $u^2 + t^2 = c^2$. Pelo que eliminando t da primeira equação, e substituindo na segunda, teremos a equação

$$u^4 + 2au^3 + (2a^2 - c^2)u^2 - 2ac^2u - a^2c^2 = 0,$$

que nos mostra, que póde haver até quatro valores de AB.

34 Para conseguirmos as raizes da equação precedente, supponha-se $u = y + x$, e $t = y - x$, as equações

$$at + ut = au, \text{ e } u^2 + t^2 = c^2$$

se mudarão em

$$y^2 = 2ax + x^2, \text{ e } y^2 = \frac{c^2}{2} - x^2;$$

a primeira das quaes tem por lugar uma hyperbola equilatera, que tem $2a$ por eixo; e a segunda um circulo, cujo raio he $\frac{1}{2}c\sqrt{2}$. Descreva-se pois com este raio o circulo MM$'mm'$; e semelhantemente se construa, tomando A por origem, e 2AI para eixo, a hyperbola equilatera $MAM'mam'$. Os pontos de intersecção das duas curvas M, M', m, m' determinarão PM, PM', pm, pm', e AP, ap; valores de y e x, que resolverão o problema. Bem se vê por esta construcção, que se fôra $CB = 2AI\sqrt{2}$, ou $CB < 2AI\sqrt{2}$, o vertice a existiria em O, ou ramo opposto mam' não encontraria o circulo.

35 Por quanto fizemos $u = y + x$, $t = y - x$, he manifesto, que no ponto M, sendo x e y ambos positivos, será

$$AB = AP + PM, \text{ e } AC = PM - AP;$$

no ponto M', sendo x positivo, e y negativo, isto he, $-u = y - x$, $-t = y + x$, será

$$AB' = PM' - AP, \text{ e } AC' = PM' + AP;$$

no ponto m, sendo x negativo, e y positivo, isto he, $-u = x - y$, $t = y + x$, será

$$AB'' = Ap - pm, \text{ e } AC'' = Ap + pm;$$

no ponto m', sendo x e y ambos negativos, isto he, $-u = y + x$, $t = x - y$, será

$$AB''' = Ap + pm', \text{ e } AC''' = Ap - pm'.$$

36 A solução do problema, de que tratamos, póde facilitar-se por meio das intersecções da recta e do circulo, porque eliminando y das equações

$$y^2 = 2ax + x^2, \quad y^2 = \frac{c^2}{2} - x^2,$$

teremos

$$x^2 + ax = \frac{c^2}{4},$$

e por conseguinte

$$x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + c^2}}{2}, \quad y = \pm \frac{\sqrt{c^2 - 2a^2 \pm 2a\sqrt{a^2 + c^2}}}{2}.$$

Por tanto teremos

$$u = \frac{-a \pm \sqrt{a^2+c^2} \pm \sqrt{c^2-2a^2 \pm 2a\sqrt{a^2+c^2}}}{2},$$

$$t = \frac{a \mp \sqrt{a^2+c^2} \pm \sqrt{c^2-2a^2 \pm 2a\sqrt{a^2+c^2}}}{2},$$

donde se tira

$$a+u-t=\pm\sqrt{a^2+c^2},\ u+t=\pm\sqrt{c^2-2a^2\pm 2a\sqrt{a^2+c^2}}.$$

E aqui cumpre notar, que tirando BG perpendicular a BD, que encontre DE produzida, e abaixando a perpendicular BK, temos

$$KG = EC = a - t,$$

e por conseguinte

$$EG = a + u - t = \sqrt{a^2+c^2}.$$

37 Isto supposto, he evidente, que se u e t ambos forem positivos, teremos

$$a+u-t=\sqrt{a^2+c^2}=EG,\ u+t=\sqrt{c^2-2a^2+2a\sqrt{a^2+c^2}};$$

se ambos negativos

$$a+t-u=\sqrt{a^2+c^2}=IG',\ -u-t=-\sqrt{c^2-2a^2+2a\sqrt{a^2+c^2}}.$$

E advertindo neste segundo caso, que $u=a$ dá

$$t=\sqrt{c^2+a^2},\ -t=a-\sqrt{c^2-2a^2+2a\sqrt{c^2+a^2}};$$

valores, que só poderião ter lugar ao mesmo tempo, quando fóra $c=\infty$, isto he, $-t=-\infty$, segue-se, que $u>a$ e negativo, fará no sobredito caso t positivo. Assim teremos

$$a-u-t=-\sqrt{a^2+c^2}=IG'',\ et-u=\sqrt{c^2-2a^2-2a\sqrt{a^2+c^2}},$$

donde observando-se, que $u=t$ dá

$$c^2-2a^2-2a\sqrt{a^2+c^2}=0,\ \text{isto he,}\ c=2a\sqrt{2};$$

finalmente no caso de $u>t$, concluiremos

$$a-u-t=-\sqrt{a^2+c^2}=\text{EG}''', \text{ e } t-u=-\sqrt{c^2-2a^2-2a\sqrt{a^2+c^2}}.$$

38 Agora para obtermos os unicos valores de u e t, ajuntem-se as primeiras das equações do numero precedente ás segundas, e subtrahão-se aquellas destas, e teremos

$$a+2u=a+2\text{AB}=\sqrt{a^2+c^2}+\sqrt{c^2-2a^2+2a\sqrt{a^2+c^2}},$$

$$a-2u=a+2\text{AB}'=\sqrt{a^2+c^2}-\sqrt{c^2-2a^2+2a\sqrt{a^2+c^2}},$$

$$a-2u=a+2\text{AB}''=-\sqrt{a^2+c^2}+\sqrt{c^2-2a^2-2a\sqrt{a^2+c^2}},$$

$$a-2u=a+2\text{AB}'''=-\sqrt{a^2+c^2}-\sqrt{c^2-2a^2-2a\sqrt{a^2+c^2}},$$

$$-a+2t=-a+2\text{AC}=-\sqrt{a^2+c^2}+\sqrt{c^2-2a^2+2a\sqrt{a^2+c^2}},$$

$$-a-2t=-a+2\text{AC}'=-\sqrt{a^2+c^2}-\sqrt{c^2-2a^2+2a\sqrt{a^2+c^2}},$$

$$-a+2t=-a+2\text{AC}''=\sqrt{a^2+c^2}+\sqrt{c^2+2a^2-2a\sqrt{a^2+c^2}},$$

$$-a+2t=-a+2\text{AC}'''=\sqrt{a^2+c^2}-\sqrt{c^2-2a^2-2a\sqrt{a^2+c^2}},$$

isto he,

$$\text{AB}=\frac{-a+\sqrt{a^2+c^2}+\sqrt{c^2-2a^2+2a\sqrt{a^2+c^2}}}{2},$$

$$\text{AB}'=\frac{-a+\sqrt{a^2+c^2}-\sqrt{c^2-2a^2+2a\sqrt{a^2+c^2}}}{2},$$

$$\text{AB}''=\frac{-a-\sqrt{a^2+c^2}+\sqrt{c^2-2a^2-2a\sqrt{a^2+c^2}}}{2},$$

$$\text{AB}'''=\frac{-a-\sqrt{a^2+c^2}-\sqrt{c^2-2a^2-2a\sqrt{a^2+c^2}}}{2},$$

$$AC = \frac{a - \sqrt{a^2+c^2} + \sqrt{c^2 - 2a^2 + 2a\sqrt{a^2+c^2}}}{2},$$

$$AC' = \frac{a - \sqrt{a^2+c^2} - \sqrt{c^2 - 2a^2 + 2a\sqrt{a^2+c^2}}}{2},$$

$$AC'' = \frac{a + \sqrt{a^2+c^2} + \sqrt{c^2 - 2a^2 - 2a\sqrt{a^2+c^2}}}{2},$$

$$AC''' = \frac{a + \sqrt{a^2+c^2} - \sqrt{c^2 - 2a^2 - 2a\sqrt{a^2+c^2}}}{2}.$$

Donde se collige, que no caso de $c = 2a\sqrt{2}$, será

$$AB = \frac{1+\sqrt{3}}{2}a, \ AB' = \frac{1-\sqrt{3}}{2}a, \ AB'' = AB''' = -2a,$$

$$AC = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}a, AC' = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}a, \ AC'' = AC''' = \ 2a;$$

e que no de $c < 2a\sqrt{2}$, não será possivel tirar no angulo IAE a terceira linha B''C'', nem a quarta B'''C''', o que tambem fica declarado pela construcção geometrica.

39 Igualmente pode servir-nos de incognita a linha DB, que chamaremos α. Sendo AC : AB :: DC : DB, isto he, $\frac{u}{t} = \frac{\alpha}{\alpha - c}$, e como temos $\frac{u}{t} = \frac{a+u}{a}$, será

$$a + u = \frac{a\alpha}{\alpha - c}.$$

Pelo que substituindo este valor de $a + u$ na equação $a^2 + (a+u)^2 = \alpha^2$, que vem do triangulo rectangulo DIB, teremos

$$\alpha^4 - 2c\alpha^3 + (c^2 - 2a^2)\alpha^2 + 2a^2c\alpha - a^2c^2 = 0.$$

Agora fazendo $\alpha = x + \frac{c}{2}$, ou denotando-se DH por x, sendo o ponto H o meio da linha CB, e pondo $x + \frac{c}{2}$ em vez de α na equação achada, teremos

$$x^4 - \left(\frac{c^2}{2} + 2a^2\right)x^2 = \frac{a^2c^2}{2} - \frac{c^4}{16},$$

donde resultão as raizes seguintes

$$x = \frac{\sqrt{c^2 + 4a^2 + 4a\sqrt{a^2 + c^2}}}{2} = \text{DH},$$

$$x''' = \frac{-\sqrt{c^2 + 4a^2 - 4a\sqrt{c^2 + a^2}}}{2} = \text{DH}''',$$

$$x'' = \frac{\sqrt{c^2 + 4a^2 - 4a\sqrt{c^2 + a^2}}}{2} = \text{DH}'',$$

$$x' = \frac{-\sqrt{c^2 + 2a^2 + 4a\sqrt{a^2 + c^2}}}{2} = \text{DH}',$$

e conseguintemente os valores de DB serão

$$\alpha = \frac{c + \sqrt{c^2 + 4a^2 + 4a\sqrt{a^2 + c^2}}}{2} = \text{DB},$$

$$\alpha''' = \frac{c - \sqrt{c^2 + 4a^2 - 4a\sqrt{c^2 + a^2}}}{2} = \text{DC}''',$$

$$\alpha'' = \frac{c + \sqrt{c^2 + 4a^2 - 4a\sqrt{c^2 + a^2}}}{2} = \text{DC}'',$$

$$\alpha' = \frac{c - \sqrt{c^2 + 4a^2 + 4a\sqrt{a^2 + c^2}}}{2} = \text{DB}'.$$

Semelhantemente se elegeramos para incognita a linha DC, que denotaremos por 6, teriamos

$$6 = \frac{-c + \sqrt{c^2 + 4a^2 + 4a\sqrt{a^2 + c^2}}}{2} = \text{DC};$$

$$6''' = \frac{-c - \sqrt{c^2 + 4a^2 - 4a\sqrt{c^2 + a^2}}}{2} = \text{DB}''',$$

$$6'' = \frac{-c + \sqrt{c^2 + 4a^2 - 4a\sqrt{c^2 + a^2}}}{2} = \text{DB}'',$$

$$6' = \frac{-c - \sqrt{c^2 + 4a^2 + 4a\sqrt{a^2 + c^2}}}{2} = \text{DC}'.$$

40 He facil de vêr, reparando nas expressões das raizes α, α''', α'', α', que as tres primeiras são positivas, e a ultima negativa; e nas das raizes 6, $6'''$, $6''$, $6'$, que a primeira he positiva, e as outras tres negativas. Com effeito para descobrirmos as linhas, que as mencionadas raizes representão, reflectiremos, que se fóra DB parallela a AB, seria $c = \infty$, e consequentemente

$$\frac{c + \sqrt{c^2 + 4a^2 + 4a\sqrt{c^2 + a^2}}}{2} = \text{DB}$$

se converteria em

$$\frac{c + \sqrt{c^2 + 4ac + 4a^2}}{2} = c = \infty;$$

e

$$\frac{-c + \sqrt{c^2 + 4a^2 + 4a\sqrt{c^2 + a^2}}}{2} = \text{DC}$$

em

$$\frac{-c + \sqrt{c^2 + 4ac + 4a^2}}{2} = \frac{-c + c + 2a}{2} = a;$$

Sendo então tambem

$$\text{EG} = \sqrt{c^2 + a^2} = c = \infty,$$

e

$$DH = \frac{\sqrt{c^2+4a^2+4a\sqrt{c^2+a^2}}}{2} = \frac{\sqrt{c^2+4ac+4a^2}}{2} = \frac{c}{2} = \frac{\infty}{2}.$$

41 Donde se segue, que na passagem da referida posição $\frac{c}{2} = HB$

se muda em

$$-\frac{c}{2} = H'''B''';$$

$$-\frac{c}{2} = HC$$

em $\frac{c}{2} = H'''C'''$;

$$\sqrt{c^2+a^2} = EG$$

em

$$-\sqrt{c^2+a^2} = EG''';$$

e

$$\frac{\sqrt{c^2+4a^2+4a\sqrt{c^2+a^2}}}{2} = DH$$

em

$$\frac{-\sqrt{c^2+4a^2-4a\sqrt{c^2+a^2}}}{2} = DH'''.$$

Assim tomando DB a posição contraria DB''', e permanecendo DC na mesma DC''', teremos

$$DB''' = DH''' + H'''B''' = \frac{-c-\sqrt{c^2+4a^2-4a\sqrt{c^2+a^2}}}{2} = 6''',$$

e

$$DC''' = H'''C''' - DH''' = \frac{c-\sqrt{c^2+4a^2-4\sqrt{c^2+a^2}}}{2} = a'''.$$

Mas como neste caso, sendo $c = 2a\sqrt{2}$, a expressão

$$\frac{-\sqrt{c^2+4a^2-4a\sqrt{c^2+a^2}}}{2}$$

se aniquila, por isso na passagem de DH‴ por este valor de c se tornará na positiva

$$\frac{\sqrt{c^2+4a^2-4a\sqrt{c^2+a^2}}}{2}=\text{DH}'',$$

e teremos

$$\text{DB}''=\text{H}''\text{B}''-\text{DH}''=\frac{-c+\sqrt{c^2+4a^2-4a\sqrt{c^2+a^2}}}{2}=b'',$$

e

$$\text{DC}''=\text{DH}''+\text{H}''\text{C}''=\frac{c+\sqrt{c^2+4a^2-4a\sqrt{c^2+a^2}}}{2}=a''.$$

Em fim quando DB″ tomar a posição parallela a AC″, as expressões

$$-\sqrt{c^2+a^2}=\text{IG}'',\ \text{e}\ \frac{\sqrt{c^2+4a^2-4a\sqrt{c^2+a^2}}}{2}=\text{DH}''$$

na passagem do infinito se mudarão em

$$\sqrt{a^2+c^2}=\text{IG}',\ \text{e}\ \frac{-\sqrt{c^2+4a^2+4a\sqrt{a^2+c^2}}}{2}=\text{DH}',$$

e semelhantemente se converterão

$-\frac{c}{2}=\text{H}''\text{B}''$ em $\frac{c}{2}=\text{H}'\text{B}'$, e $\frac{c}{2}=\text{H}''\text{C}''$ em $-\frac{c}{2}=\text{H}'\text{C}'$.

Assim guardando DB″ na passagem por

$$\frac{-c+\sqrt{c^2-4ac+4a^2}}{2}=\frac{-c+c-2a}{2}=-a,$$

a mesma posição DB′, e recebendo DC″ na passagem por

$$\frac{c+c-2a}{2}=c=\infty,$$

a contraria DC′, teremos

$$\text{DB}'=\text{DH}'-\text{HB}''=\frac{c-\sqrt{c^2+4a^2+4a^2\sqrt{a^2+c^2}}}{2}=a',$$

e

$$\text{DC}'=\text{DH}'+\text{H}'\text{C}'=\frac{-c-\sqrt{c^2+4a^2+4a^2\sqrt{a^2+c^2}}}{2}=b';$$

42 Newton (*Arith. univ. resolutio quaestionum geometricarum* probl. 24) entre as differentes soluções da questão, que nos occupa, elege a precedente para mostrar, quanto uma feliz escolha de incognitas facilita a resolução do problema, attendendo meramente á elegancia della para se obter o valor de DB. Mas não he aquella solução, onde mais facilmente se descobre a lei da *continuidade*, para o conhecimento da posição das linhas, que exprimem as raizes da equação, de sorte que Bezout (*Alg.* 274) servindo-se da solução Newtoniana na determinação das raizes x', x'', x''' procede paralogisticamente. Porque a introducção de $-a$ em lugar de a na equação do problema, isto he, do quadrado de lado negativo DE'A'I' muda a raiz

$$x = \frac{\sqrt{c^2 + 4a^2 + 4a\sqrt{a^2+c^2}}}{2} = \text{DH}$$

em

$$x''' = \frac{-\sqrt{c^2 + 4a^2 - 4a\sqrt{c^2+a^2}}}{2} = \text{DH}''';$$

e semelhantemente a raiz

$$x' = \frac{-\sqrt{c^2 + 4a^2 + 4a\sqrt{a^2+c^2}}}{2} = \text{DH}'$$

em

$$x'' = \frac{\sqrt{c^2 + 4a^2 - 4a\sqrt{c^2+a^2}}}{2} = \text{DH}''.$$

Assim as duas raizes x, x' correspondem ao quadrado de lado positivo DEAI, e as duas x''', x'' ao de lado negativo DE'A'I'.

43 Finalmente advertindo na solução da questão mais geral de Bezout (*Alg.* 405), que he o problema lemmatico de Newton (*Arith. univ. aequationum constructio linearis*), tambem se conclue o que acabamos de mostrar.

Porque, fazendo $a+u=z$, e $a-t=y$, as duas equações

$$at+ut=au, \text{ e } u^2+t^2=c^2$$

se mudão em

$$zy=a^2, \text{ e } z^2+y^2-2az-2ay+2a^2=c^2,$$

das quaes resulta a equação

$$z^4-2az^3+(2a^2-c^2)z^2-2a^3z+a^4=0.$$

Agora para acharmos as raizes desta equação, que serão os valores de IB, junte-se em ambos os membros a^2z^2, e teremos

$$z^4-2az^3+3a^2z^2-2a^3z+a^4=(a^2+c^2)z^2,$$

isto he,

$$z^2-az+a^2=\pm z\sqrt{a^2+c^2},$$

donde se derivão as duas equações seguintes

$$z^2-\left(a+\sqrt{a^2+c^2}\right)z=-a^2, \text{ e } z^2-\left(a^2-\sqrt{a^2+c^2}\right)z=-a^2,$$

que dão

$$z=\frac{a+\sqrt{a^2+c^2}+\sqrt{c^2-2a^2+2a\sqrt{a^2+c^2}}}{2}=\text{IB},$$

$$z'=\frac{a+\sqrt{a^2+c^2}-\sqrt{c^2-2a^2+2a\sqrt{a^2+c^2}}}{2}=\text{IB}',$$

$$z''=\frac{a-\sqrt{c^2+a^2}+\sqrt{c^2-2a^2-2a\sqrt{c^2+a^2}}}{2}=\text{IB}'',$$

$$z'''=\frac{a-\sqrt{c^2+a^2}-\sqrt{c^2-2a^2-2a\sqrt{c^2+a^2}}}{2}=\text{IB}''';$$

as duas primeiras positivas, e as duas ultimas negativas. Bem se vê, que ás raizes negativas z'', z''', que correspondem ao quadrado de lado negativo DE'A'I', pertencem as linhas DH'' e DH'''.

PROBLEMA V.

44 *Conhecida (fig. 9) a posição do ponto A no angulo dado HDI, achar no lado DI um ponto G, tal que conduzindo-se por elle a recta GAE, se forme o triangulo EDG de uma superficie determinada.*

Tire-se a perpendicular AC; e imagine-se tirada a perpendicular EF, e a parallela AK. Seja $AC = b$, $DC = d$, e tomando o raio igual á unidade, tg. $HDI = m$, e tg. $CAG = z$. O triangulo rectangulo AEK dá $EK = \frac{AK}{z}$, e por conseguinte será $EF = b + \frac{AK}{z} = b + \frac{d - DF}{z}$, mas no triangulo EDF temos $EF = m DF$, logo $m DF = b + \frac{d - DF}{z}$, donde se tira $DF = \frac{d + bz}{1 + mz}$, e por conseguinte a altura $EF = m \cdot \frac{d + bz}{1 + mz}$. Como pois temos a base $DG = d + bz$, denotando c^2 a superficie que deve ter o triangulo EDG, será

$$m \frac{(d + bz)^2}{2(1 + mz)} = c^2,$$

donde se concluem os valores de z seguintes

$$z = \frac{c^2 - bd \pm c\sqrt{c^2 - 2bd + \frac{2b^2}{m}}}{b^2}.$$

45 Agora conduza-se AB parallela a DH, designando-se DB por a, e a base DG por x, será a recta AB o lugar da equação $d = a + \frac{b}{m}$, e teremos

$$z = \frac{c^2 - ab - \frac{b^2}{m} \pm c\sqrt{c^2 - 2ab}}{b^2}.$$

Pelo que substituindo estes valores de z na expressão da base $x=a+\frac{b}{m}+bz$, acharemos

$$x=\frac{c^2\pm c\sqrt{c^2-2ab}}{b};$$

valores que igualmente dependem de b, d e m. Bem se vê, que o problema não será possivel, quando fôr $c^2<2ab$; e que são positivos os dois valores de x.

46 Se o ponto A existir no eixo DI, ou fôr $b=0$, chamando x e x' os valores de x, teremos

$$x=\frac{2c^2}{0}=\infty,\ \text{e}\ x'=\frac{0}{0}.$$

Para nesse caso assignarmos x', differenceie-se, suppondo b variavel, o numerador e denominador da expressão $\frac{c^2-c\sqrt{c^2-2ab}}{b}$, e teremos

$$\frac{ac}{\sqrt{c^2-2ab}},$$

que sendo $b=0$, dá $x'=a$. Agora o ponto A passe para A', isto he, seja negativo b, teremos

$$x=\frac{-c^2-c\sqrt{c^2+2ab}}{b}=\text{DG}';$$

expressão negativa, como deve ser, porque vem do infinito. Semelhantemente, mudando o signal de b, teremos

$$x'=\frac{-c^2+c\sqrt{c^2+2ab}}{b}=a-\tfrac{1}{2}\frac{a^2b}{c^2}+\frac{ab}{c^2}\cdot\tfrac{1}{2}\frac{a^2b}{c^2}-\text{etc.}=\text{D}g';$$

positiva, e menor que a.

47 Se o referido ponto A' estiver em a sobre o lado DH', sendo $a=0$, teremos

$$x=-\frac{2c^2}{b},\ \text{e}\ x'=0.$$

Então tomando D$\gamma=-\frac{2c^2}{b}$, sómente o triangulo aDγ

resolve o problema. Mas existindo em A″, em tal caso sendo a negativo, teremos

$$x = \frac{-c^2 - c\sqrt{c^2 - 2ab}}{b} = DG'', \text{ e } x' = \frac{-c^2 + c\sqrt{c^2 - 2ab}}{b} = Dg''.$$

Onde convem notar, que permanece negativa a expressão de x; e que na passagem por nada se converteo em negativa a de x', que era positiva.

48 Se existir o ponto A″ na directriz DI′, então sendo $b = 0$, teremos

$$x = -\frac{2c^2}{0} = -\infty, \text{ e } x' = \frac{0}{0} = -a.$$

Mas se passar a A‴, como muda b de signal, teremos

$$x = \frac{c^2 - c\sqrt{c^2 + 2ab}}{b} = DG''';$$

e

$$x' = \frac{c^2 - c\sqrt{c^2 + 2ab}}{b} = -a + \tfrac{1}{2}\frac{a^2b}{c^2} - \frac{ab}{c^2}\cdot\tfrac{1}{2}\frac{a^2b}{c^2} + \text{etc.} = Dg'''.$$

Onde se vê, que na passagem do infinito negativo se converteo em positiva a expressão de x; e que permanece negativa a de x'.

49 Finalmente, reparando nas expressões das linhas DG, DG′, DG″, DG‴, e nas posições dellas, he visivel, que DG na passagem do infinito tomou a direcção contraria DG′, e que DG″ recebeo na passagem outra vez do infinito a primeira direcção DG‴. Geralmente concluiremos, que as expressões das raizes das equações, que resolvem os problemas geometricos, tornando-se negativas nas passagens por nada, ou pelo infinito um numero *impar* de vezes, então as grandezas que ellas representão tomão direcções contrarias. E daqui tambem se collige, que uma vez estabelecida a *região* das positivas, as quantidades negativas não se originão de alguma supposição arbitraria

e hypothetica; e que observada a lei da *continuidade*, não póde achar-se embaraço na direcção dellas, como vimos na solução das questões de que havemos tratado.

PROBLEMA VI.

50 SEndo *dado o perimetro, e hypothenusa de um triangulo rectangulo, achar os outros dois lados.*

Seja a hypothenusa (fig. 10) $AC=a$, os lados $AB=x$, $BC=z$, e tomando o raio igual á unidade, tg. $ACB=\alpha$, no triangulo rectangulo ABC teremos

$$x^2+z^2=a^2,\ \text{e}\ x=\alpha z,$$

donde se derivão os valores seguintes

$$x=\pm\frac{a\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}},\ \text{e}\ z=\pm\frac{a}{\sqrt{1+\alpha^2}}.$$

Assim, denotando b a differença entre o perimetro e a hypothenusa, será

$$x+z=\frac{a(\alpha+1)}{\sqrt{1+\alpha^2}}=b,\ \text{isto he},\ \alpha^2+\frac{2a}{a^2-b^2}\alpha=-1,$$

que dá

$$\alpha=\frac{a^2\pm b\sqrt{2a^2-b^2}}{b^2-a^2}=\frac{\left(b\pm\sqrt{2a^2-b^2}\right)^2}{2(b^2-a^2)},$$

e

$$\sqrt{1+\alpha^2}=\frac{a\left(b\pm\sqrt{2a^2-b^2}\right)}{b^2-a^2}.$$

Substituindo pois estes valores nos de x e z, teremos

$$x=\pm\frac{\left(b\pm\sqrt{2a^2-b^2}\right)^2}{2\left(b\pm\sqrt{2a^2-b^2}\right)}=\pm\frac{\left(b\pm\sqrt{2a^2-b^2}\right)}{2},$$

$$z=\pm\left(\frac{b^2-a^2}{b\pm\sqrt{2a^2-b^2}}\right)=\pm\frac{\left(b\mp\sqrt{2a^2-b^2}\right)}{2},$$

isto he,

$$x = \frac{b + \sqrt{2a^2 - b^2}}{2}, \quad z = \frac{b - \sqrt{2a^2 - b^2}}{2},$$

$$x = \frac{b - \sqrt{2a^2 - b^2}}{2}, \quad z = \frac{b + \sqrt{2a^2 - b^2}}{2},$$

$$x = \frac{-b - \sqrt{2a^2 - b^2}}{2}, \quad z = \frac{-b + \sqrt{2a^2 - b^2}}{2},$$

$$x = \frac{-b + \sqrt{2a^2 - b^2}}{2}, \quad z = \frac{-b - \sqrt{2a^2 - b^2}}{2}.$$

51 Para o reconhecimento da situação, que devemos dar ás linhas nos valores de x e z, advertindo na primeira formula

$$\alpha = \frac{a^2 + b\sqrt{2a^2 - b^2}}{b^2 - a^2},$$

se collige, que sendo

$$b = a,\quad b > a \text{ e } < a\sqrt{2},\quad b = a\sqrt{2},$$

teremos

$$\alpha = \infty,\qquad \alpha > 1,\qquad \alpha = 1;$$

e os respectivos valores de x e z serão

$$x = a,\quad x = \frac{b + \sqrt{2a^2 - b^2}}{2} = \mathrm{AB},\quad x = \frac{a\sqrt{2}}{2} = \mathrm{A}\beta,$$

e

$$z = 0,\quad z = \frac{b - \sqrt{2a^2 - b^2}}{2} = \mathrm{BC},\quad z = \frac{a\sqrt{2}}{2} = \beta\mathrm{C}.$$

Bem se vê no caso de $b = a\sqrt{2}$, que he b um *maximo*, pois que differenciada a expressão

$$\frac{a(\alpha + 1)}{\sqrt{1 + \alpha^2}},$$

e pondo-se igual a nada, vem $\alpha = 1$. Assim concordando justamente com a impossibilidade de $b > a\sqrt{2}$, deduzida do radical $\sqrt{2a^2 - b^2}$. Igualmente na passagem de pará $b < a\sqrt{2}$ e $> a$

$$b = a\sqrt{2},$$

a segunda formula

$$\alpha = \frac{a^2 - b\sqrt{2a^2 - b^2}}{b^2 - a^2}$$

nos indica $\alpha < 1$, e será

$$x = \frac{b - \sqrt{2a^2 - b^2}}{2} = AB', \quad z = \frac{b + \sqrt{2a^2 - b^2}}{2} = B'C.$$

Em fim, quando fòr $b = a$, será

$$x = 0, \text{ e } z = a.$$

E porque neste ultimo caso a tangente α sahe em forma indeterminada $\frac{0}{0}$, busque-se o seu valor, supprondo b variavel, pela differenciação do numerador e denominador da fracção, que a exprime, e acharemos

$$\frac{b^2 - a^2}{b\sqrt{2a^2 - b^2}},$$

que sendo $b = a$, nos descobre $\alpha = 0$, como deve ser.

52 Donde se vê, que propondo-se $b < a$, serão negativos α e x, e positivo z. Assim $b = 0$ dá $\alpha = -1$; e será

$$x = \frac{-a\sqrt{2}}{2} = A\beta', \quad z = \frac{a\sqrt{2}}{2} = C\beta'.$$

Depois na passagem de b para negativo, e menor que $-a$, a expressão

$$\frac{a^2 - b\sqrt{2a^2 - b^2}}{b^2 - a^2}$$

trocando-se em

$$\frac{a^2 + b\sqrt{2a^2 - b^2}}{b^2 - a^2},$$

nos mostra $\alpha > -1$, e será

$$x = \frac{-b - \sqrt{2a^2 - b^2}}{2} = AB'', \quad z = \frac{-b + \sqrt{2a^2 - b^2}}{2} = CB''.$$

E passando dahi a ser $-b=-a$, temos $\alpha=-\infty$, e será

$$x=-a,\ z=0.$$

Assim $-b>-a$, e $<-a\sqrt{2}$ nos dá $\alpha>1$, e será

$$x=\frac{-b-\sqrt{2a^2-b^2}}{2}=A'B,\ z=\frac{-b+\sqrt{2a^2-b^2}}{2}=BC'.$$

E em ultimo lugar de $-b=-a\sqrt{2}$ concluimos $\alpha=1$, e será

$$x=\frac{-a\sqrt{2}}{2}=A'\beta'',\quad z=\frac{-a\sqrt{2}}{2}=\beta''C'.$$

53 Semelhantemente vimos, que de $b=a$ resultara tambem $\alpha=\infty$, e $x=a$, $z=0$; e conseguintemente sendo $b<a$, serão negativos α e z, e positivo x. Por isso, sendo b negativo, e menor que $-a$, então pela expressão

$$\alpha=\frac{a^2-b\sqrt{2a^2-b^2}}{b^2-a^2},$$

temos $\alpha<-1$, e será

$$x=\frac{-b+\sqrt{2a^2-b^2}}{2}=B'''A,\quad z=\frac{-b-\sqrt{2a^2-b^2}}{2}=B'''C.$$

E finalmente por um andamento semelhante ao precedente se vê, que sendo $-b=-a$, será

$$\alpha=0,\ \text{e}\ x=0,\ z=-a;$$

sendo $-b>-a$, e $<-a\sqrt{2}$, será

$$\alpha<1,\ \text{e}\ x=\frac{-b+\sqrt{2a^2-b^2}}{2}=A''B',\ z=\frac{-b-\sqrt{2a^2-b^2}}{2}=B'C'';$$

sendo $-b=-a\sqrt{2}$, será

$$\alpha=1,\ \text{e}\ x=\frac{-a\sqrt{2}}{2}=A''\beta''',\ z=\frac{-a\sqrt{2}}{2}=\beta'''C''.$$

Por onde se conclue, que a possibilidade do problema he comprehendida de $b=a\sqrt{2}$ até $b=-a\sqrt{2}$.

54 A solução, que acabamos de expôr do presente problema, que he o II. da Algebra de Simpson (*A treatise of Alg. the appl. to geom. probl.*), pode accommodar-se ao XIX. da mencionada. *Sendo dada a hypothenusa de um triangulo rectangulo, e o lado do quadrado inscripto, determinar as outros dois lados.* Como pois (n. 37) temos

$$\frac{c(a+1)}{\sqrt{1+a^2}}=a+\sqrt{c^2+a^2},$$

será

$$a^2-\frac{c^2}{a\left(a+\sqrt{c^2+a^2}\right)}\,a=-1,$$

isto he,

$$a=\frac{c^2\pm\sqrt{c^4-4a^2\left(a+\sqrt{c^2+a^2}\right)^2}}{2a\left(a+\sqrt{c^2+a^2}\right)},$$

ou

$$\frac{c^2\pm\left(a+\sqrt{c^2+a^2}\right)\sqrt{c^2-2a\left(a+\sqrt{c^2+a^2}\right)}}{2a\left(a+\sqrt{c^2+a^2}\right)},$$

ou

$$\frac{\left(a+\sqrt{c^2+a^2}\pm\sqrt{c^2-2a^2-2a\sqrt{a^2+c^2}}\right)^2}{4a\left(a+\sqrt{c^2+a^2}\right)},$$

ou

$$\frac{-a+\sqrt{c^2+a^2}\pm\sqrt{c^2-2a^2-2a\sqrt{c^2+a^2}}}{2a};$$

e por conseguinte

$$1+a^2=\frac{c^2\left(c^2\pm\left(a+\sqrt{c^2+a^2}\right)\sqrt{c^2-2a^2-2a\sqrt{c^2+a^2}}\right)}{2a^2\left(a+\sqrt{c^2+a^2}\right)^2},$$

ou

$$\frac{c^2\left(a+\sqrt{c^2+a^2}\pm\sqrt{c^2-2a^2-2a\sqrt{c^2+a^2}}\right)^2}{4a^2\left(a+\sqrt{c^2+a^2}\right)^2},$$

isto he, $\sqrt{1+a^2} = \frac{c\left(a+\sqrt{c^2+a^2} \pm \sqrt{c^2-2a^2-2a\sqrt{c^2+a^2}}\right)}{2a\left(a+\sqrt{c^2+a^2}\right)}$.

Por tanto feita a substituição destes valores nos de x e z, teremos

$$x = \pm \frac{ca}{\sqrt{1+a^2}} = \pm \frac{\left(a+\sqrt{c^2+a^2} \pm \sqrt{c^2-2a^2-2a\sqrt{c^2+a^2}}\right)}{2},$$

$$z = \pm \frac{c}{\sqrt{1+a^2}} = \pm \frac{\left(a+\sqrt{c^2+a^2} \mp \sqrt{c^2-2a^2-2a\sqrt{c^2+a^2}}\right)}{2},$$

isto he,

$$x = \frac{a+\sqrt{c^2+a^2}+\sqrt{c^2-2a^2-2a\sqrt{c^2+a^2}}}{2},$$

$$x = \frac{a+\sqrt{c^2+a^2}-\sqrt{c^2-2a^2-2a\sqrt{c^2+a^2}}}{2},$$

$$x = \frac{-a-\sqrt{c^2+a^2}-\sqrt{c^2-2a^2-2a\sqrt{c^2+a^2}}}{2},$$

$$x = \frac{-a-\sqrt{c^2+a^2}+\sqrt{c^2-2a^2-2a\sqrt{c^2+a^2}}}{2},$$

$$z = \frac{a+\sqrt{c^2+a^2}-\sqrt{c^2-2a^2-2a\sqrt{c^2+a^2}}}{2},$$

$$z = \frac{a+\sqrt{c^2+a^2}+\sqrt{c^2-2a^2-2a\sqrt{c^2+a^2}}}{2},$$

$$z = \frac{-a-\sqrt{c^2+a^2}+\sqrt{c^2-2a^2-2a\sqrt{c^2+a^2}}}{2},$$

$$z = \frac{-a - \sqrt{c^2 + a^2} - \sqrt{c^2 - 2a^2 - 2a\sqrt{c^2 + a^2}}}{2}$$

Bem se vê, que o problema tem lugar de $c = 2a\sqrt{2}$ até $c = -2a\sqrt{2}$.

55 Agora applicando a mesma analyse ao problema seguinte: *sendo dada a soma BA + AC, que chamaremos* b, *da hypothenusa e um dos lados do triangulo rectangulo CBA, e o outro lado CB, achar o primeiro BA.* Designando CB por c, AC por y, e conservando as outras denominações, teremos

$$c^2 + x^2 = y^2, \text{ e } x = \alpha c,$$

donde se tira

$$y = c\sqrt{1 + \alpha^2};$$

e por conseguinte

$$x + y = \alpha c + c\sqrt{1 + \alpha^2} = b,$$

isto he,

$$\alpha = \frac{b^2 - c^2}{2bc}.$$

Substituindo pois este valor de α nos de x e y, acharemos

$$x = \frac{b^2 - c^2}{2b}, \text{ e } y = \frac{b^2 + c^2}{2b}.$$

56 He evidente, que propondo-se os valores

$$b = \infty,$$
$$b = \left(1 + \sqrt{2}\right)c,$$
$$b = c,$$

lhes serão respectivos os de α, x e y seguintes

$$\alpha = \infty, \quad x = \infty, \quad y = \infty,$$
$$\alpha = 1, \quad x = c = \mathrm{B}a, \quad y = c\sqrt{2} = a\mathrm{C},$$
$$\alpha = 0, \quad x = 0, \quad y = c = \mathrm{CB}.$$

Daqui pois se collige, que sendo $b < c$, serão negativos α e x, e positivo y. Assim

$$b = \left(-1 + \sqrt{2}\right)c,$$
$$b = 0,$$

dá

$$\alpha = -1, \quad x = -c = \mathrm{B}\alpha', \quad y = c\sqrt{2} = \mathrm{C}\alpha',$$
$$\alpha = -\infty, \quad x = -\infty, \quad y = \infty.$$

Bem se vê, que no caso de $b = c$ he y um *minimo*, como tambem mostra a expressão $\frac{b^2 + c^2}{2b}$ differenciada, supondo b variavel, e pondo-se igual a nada. E porque, se for b negativo, pela natureza do triangulo rectangulo não podendo ter-se $x > y$, deverá y tambem ser negativo. Assim aos valores negativos

$$b = \left(1 - \sqrt{2}\right)c,$$
$$b = -c,$$
$$b = \left(-1 - \sqrt{2}\right)c,$$
$$b = -\infty,$$

corresponderão

$$\alpha = 1, \quad x = c = \mathrm{B}\alpha, \quad y = -c\sqrt{2} = \mathrm{C}'\alpha,$$
$$\alpha = 0, \quad x = 0, \quad y = -c = \mathrm{C}'\mathrm{B},$$
$$\alpha = -1, \quad x = -c = \mathrm{B}\alpha', \quad y = -c\sqrt{2} = \alpha'\mathrm{C}',$$
$$\alpha = -\infty, \quad x = -\infty, \quad y = -\infty.$$

Por onde se vê, que he possivel o problema de $b = \infty$ até $b = -\infty$. E finalmente por esta solução, e a do n. 50, se entenderão bem, e resolverão facilmente as duvidas de Simpson (*A Treatise of Alg. Schol. of multip.*), a respeito da intelligencia dos limites da possibilidade dos problemas.

FIM.

INDEX.

$n(x-a)^{m-1} f\,dx + (m-1)(x-a)^{m-2}(y-b) f'\,dx +$

$-a)^{m-1} f'\,dy + \cancel{tr} + m(y-b)^{m-1} f\,dy = 0$

$(x-a)^{m-1} f\,ddx + m(m-1)(x-a)^{m-2} f\,dx^2 +$

$(m-1)(x-a)^{m-2}(y-b) f'\,ddx + (m-1)(m-2)(x-a)^{m-3}($

$-b) f'\,dx^3 + (m-1)(x-a)^{m-2} f'\,ddx\,dy +$

$-a)^{m-1} f'\,ddy + (m-1)(x-a)^{m-2} f'\,dx\,dy + tr$

$(y-b)^{m-1} f\,ddx + m(m-1)(y-b)^{m-2} f\,dx^2 = 0$

$n(x-a)^{m-1} f(m)\,dx + m(m-1) \cdot\backslash\cdot (m-m)$

ml

Castro

a 20 de [illegible]

Est. 1.

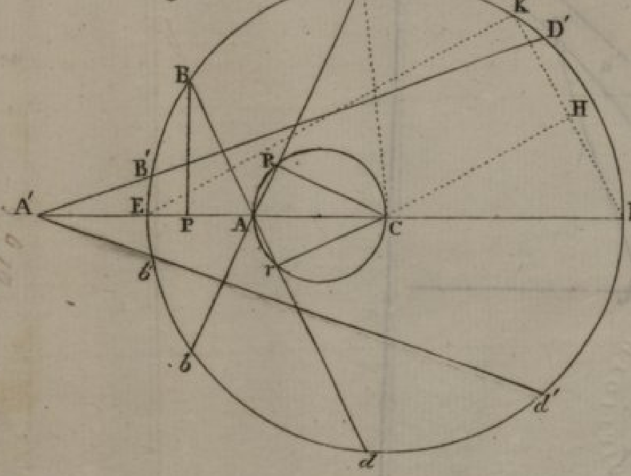


Fig. 1.

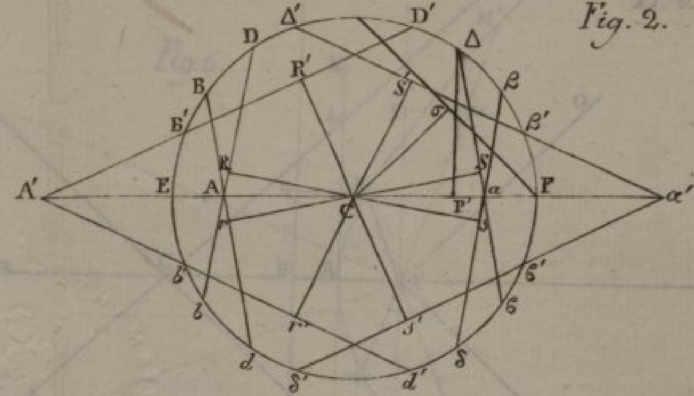


Fig. 2.

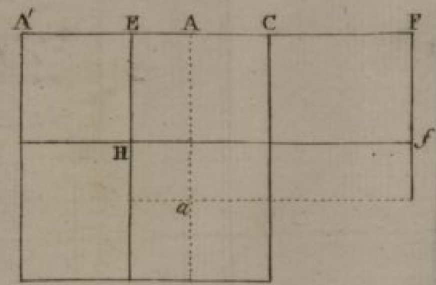


Fig. 3.

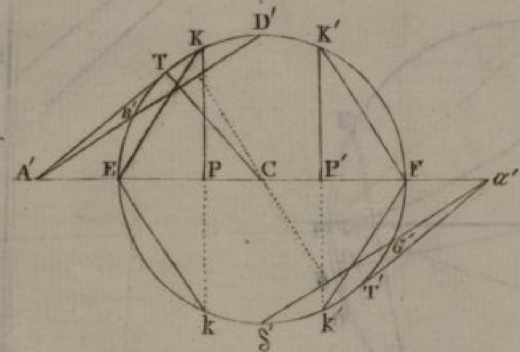


Fig. 4.

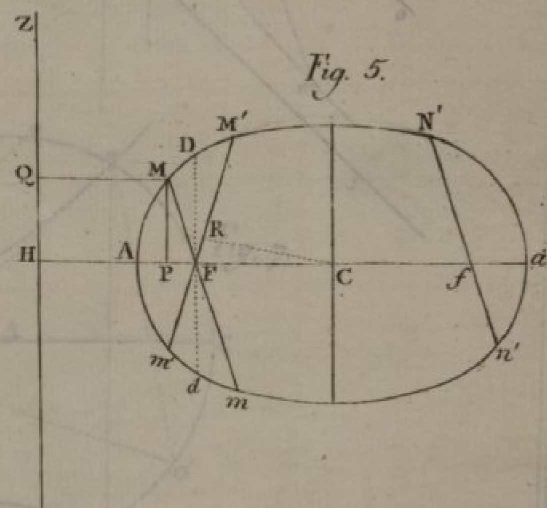


Fig. 5.

[illegible]

Trouxe e [illegible] spargindo ~~os~~ frias [illegible]

A [illegible] do cemiterio gerais morr[illegible]

C' meias morte — tudo jaz no somno

A viola e extinguiu de sobre a terra

Parece tudo morto, e eu só velando

Vivo — porem velando entregue á imag[illegible]

[illegible] Sueto [illegible] [illegible]

O [illegible] com M.

O [illegible]

O [illegible]

O orgão

Os [illegible]

A [illegible]

Almeida.

F.^{os} J. de Castro.

A. de C.

J. R.

M. M.

J. B.

L. M.

J. C.

M. A.

Appareceo no dia 24/1 1832 Ou q. fico [illegible]

Harimaya.

J. de C. J. A.

F. J. P. do N. V.

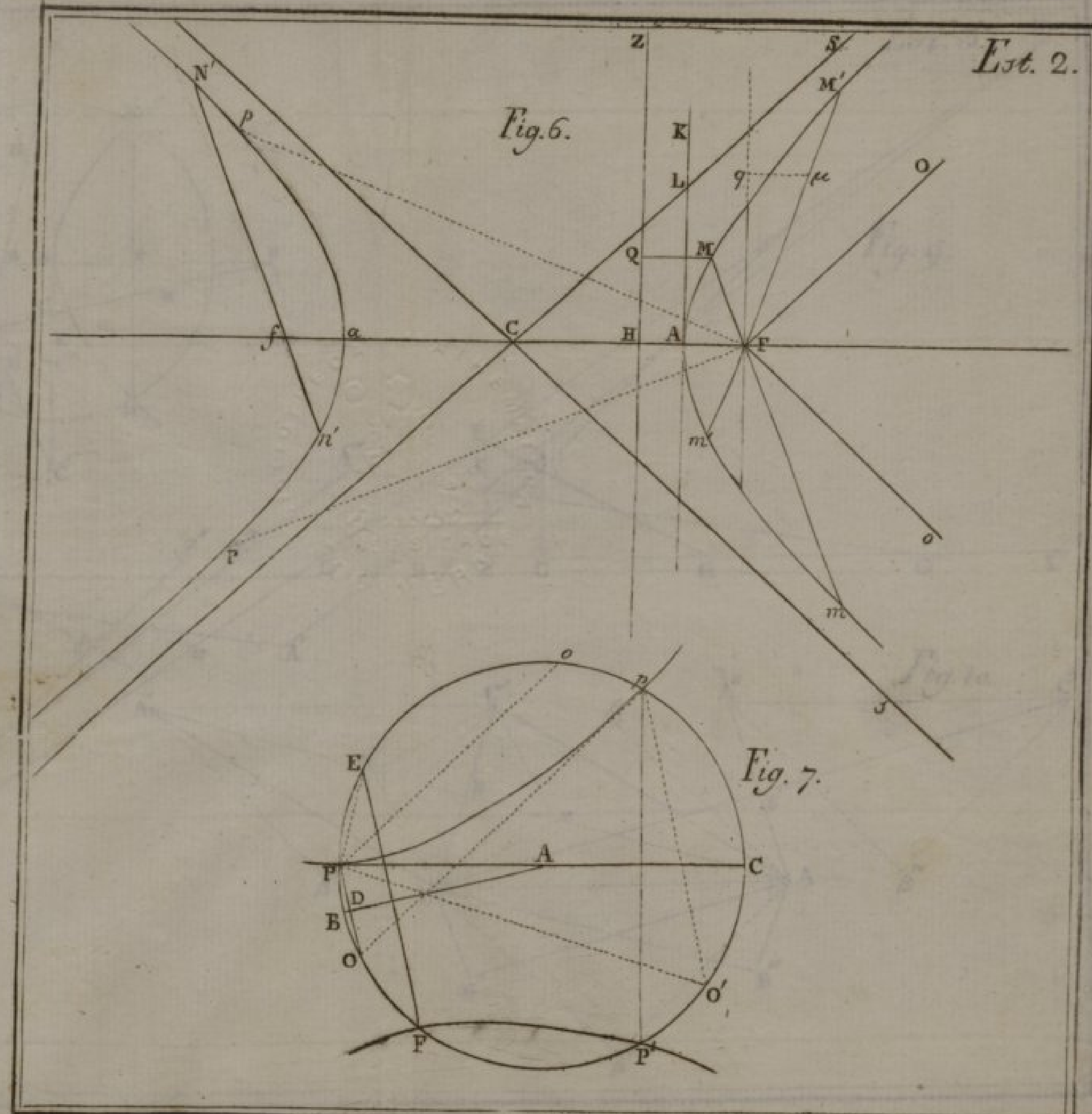
F. C.

J. M.

L. R.

M. do C.

= El Empecinado =

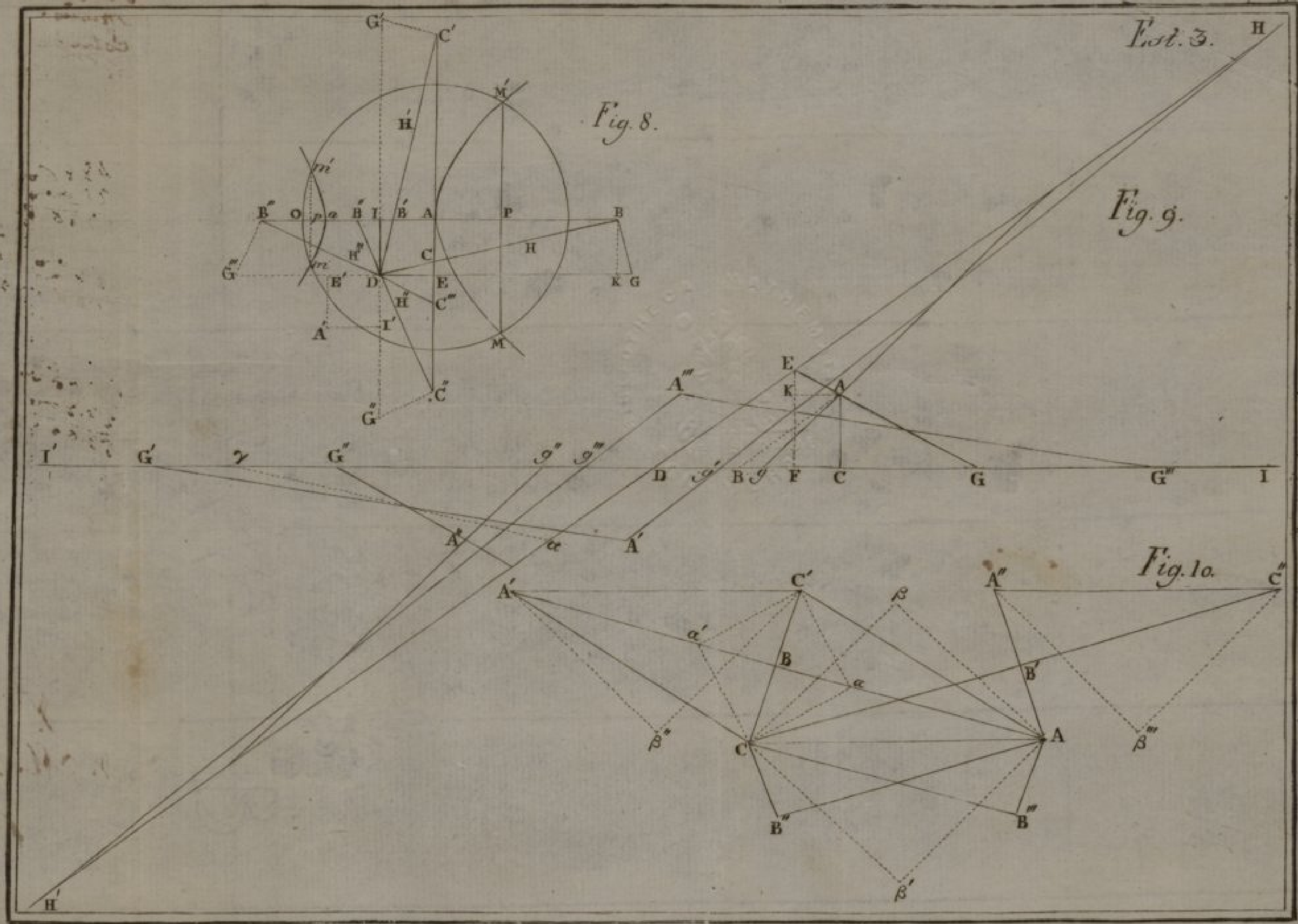


Est. 2.

Desce dos altos Céos verdade augusta

" O gallo da aldea cantou; é meia noite; vamo minha filha, tua mai nos chama, vamos ao cemiterio = Por entre o escuro da noite guiaõ seus passos á habitação dos mortos; ramos altos de cyprestes ~~[illegible]~~ iaõ dar aos sepulchros; com as trevas mal se distinguiaõ estas arvores funebres, os olhos naõ lhe percebiaõ limites; á imaginação da joven infeliz representavaõ-se-lhe ser as sombras dos mortos, que se vagueavaõ no horror da noite . . . será alguma dellas sua mai? =

Eil-a, diz ella, eis, meu Pai, a luz [illegible] cimiterio quasi a apagar-se; já mal se distinguem as campas; corramos; eu vou reanimal-a . . . possa o espirito de minha mai regozijar-se com o cuidado da sua filha.


Est. 3.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.

Nada a ta
mais.
Estude
F.co Castro

Viva a Cavalaria Andante
— D. Pedre 4.º ~~Tyrano~~
— D. Miguel 1.º ~~Tirano~~
— Carlota R. constante
— D. João 6 ambulante.

Francisco de Castro

F. C. F.

4886o
21 ooo
27:86o

3088o
18ooo
48:88o

Reis-Effendi

1440o
6 6oo
21:80o

Joaq.m F. Freire

59665
28:830
2880o
1:050

Reis-Effendi

2:850
1:030
30:880
28:800
59:660

Reis-Effendi.

Alvinzi

Alvinzi

Pizarro

C. Pedro Vivo

V. D. Pedro 4.º Emilia

V. M. V.º R. Natureza = Virtude = Emi

D. Martinha Emilia

F. Castro Freire

OPUSCULOS

MATHEMATICOS