LIVRO 10.º

Geometria de tres coordenadas

887. Se em hum systema de duas coordenadas se tirão dos extremos das ordenadas quantas rectas parallelas se quizerem, mas em plano diverso do das primeiras coordenadas, a superficie que fôr lugar dos outros extremos d'estas parallelas, chamar-se-ha *superficie proposta;* e estas parallelas tambem se chamarão *ordenadas*, e se denotarão por z; e cada tres rectas contiguas x, y, z *coordenadas:* e a equação que as comprehende chama-se *equação da superficie proposta*.

888. A equação da superficie contendo tres variaveis, he claro, que duas d'ellas são absolutamente independentes, e que os valores arbitrarios, que se lhes forem assignando, he que determinarão os valores correspondentes da terceira por meio da equação da superficie.

889. Achar a equação do plano.

Sejão $AP\,(x)$, $PM'\,(y)$, $M'M\,(z)$ as tres coordenadas do plano MBC cuja intersecção com o plano dos xy seja BC. Fig. 281.

Por $M'M$ tire-se hum plano $MM'C$ parallelo a AP ou x, será $M'C$ parallela a BP, ou a x. Por P tire-se PD parallela a BC.

Como os angulos das coordenadas são escolhidos, ficão assim determinados os angulos dos triangulos, taes como $MM'C$, e dos parallelogrammos como $BPDC$, e dos triangulos $PM'D$, e BA ou a fica sempre o mesmo. Teremos pois

$$z = m.M'C = m(CD + M'D)$$

$$= m(a + x + n.M'P) = ma + mx + mny$$

por equação do plano proposto.

890. Porque a qualquer equação da primeira ordem a tres variaveis se póde dar a fórma antecedente, segue-se que huma tal equação pertence a hum plano.

891. Achar a equação da superficie curva da pyramide conica.

Fig. 282. Seja $AP = x$, e as ordenadas $PM(y)$, $MN(z)$ sejão perpendiculares entre si, e estejão em plano parallelo á base.

Será

$$\overline{PN}^2 = y^2 + z^2.$$

Tambem

$$AB : BC :: x : PN.$$

Logo

$$ux^2 = y^2 + z^2$$

he a equação pedida.

892. Supporemos as coordenadas orthogonaes, isto he, y perpendicular a x, e a z, e o plano dos yz perpendicular a x. N'este caso chamão-se eixos respectivamente dos x, dos y, dos z a tres rectas escolhidas perpendiculares entre si, e parallelas ás coordenadas: e planos das coordenadas a tres planos perpendiculares entre si, e respectivamente parallelos a duas das coordenadas.

Do volume dos solidos regulares

893. Sejão $AP(x)$, $PM'(y)$, $M'M(z)$ as tres coordenadas rectangulares da superficie do solido da qual M he hum qualquer dos pontos, e z he funcção de x, y.

Fig. 283. Sejão Ap, Bm, Cq as intersecções de planos perpendiculares ao plano APM' dos xy, e parallelos ao dos xz: e sejão Pn, pq similhantes intersecções sobre o mesmo

plano de outros planos parallelos ao dos yz. Sejão $Pp = i$, $M'n = i'$.

A parte do solido separada pelo plano APM', e pelos planos $MM'P$, MMB perpendiculares a este, e pelo que passa por AP he funcção das tres coordenadas x, y, z; mas eliminando z com a equação da superficie, fica sendo funcção sómente de x e y, isto he, chamando v a este segmento do solido, teremos $v = \varphi(x, y)$.

Os volumes correspondentes ás projecções $ACqp$, $ABmp$, $ACnP$ serão respectivamente $\varphi(x+i, y+i')$; $\varphi(x+i, y)$, $\varphi(x, y+i')$. De fórma que o segmento do volume correspondente á projecção $M'nqm$ será

$$\varphi(x+i, y+i') + \varphi(x, y) - \varphi(x+i, y)$$
$$-\varphi(x, y+i')$$
$$= \frac{ddv}{dxdy} ii' + ai^2 i' + bii'^2 + \text{etc.}$$

Sejão z, e $z + Dz$ a menor, e a maior das ordenadas correspondentes á base $M'nqm$. Será Dz da primeira ordem relativamente a i, ou i', ou a ambos, sendo estes infinitesimos. Tambem será o segmento sobre esta base medio em valor entre os dois parallelepipedos da mesma base $M'nqm$ (ii'), e que tem por alturas hum a $M'M(z)$, e o outro a $z + Dz$, isto he, entre $ii'z$, e $ii'(z + Dz)$. De sorte que teremos

$$\frac{ddv}{dxdy} ii' = zii', \text{ ou } \frac{ddv}{dxdy} = z.$$

Logo

$$\frac{dv}{dy} = \int z dx, \text{ e } v = \int dy \int z dx$$

he a expressão do segmento elementar do solido, ou $v = \int\int\int dx dy dz$.

Exemplo. Seja A origem das abscissas, e centro de huma esphera, cujo raio he r. Será

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

a equação da superficie, e teremos

$$\int z\,dx = \int dx\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$$

$$= \frac{1}{2}x\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$$

$$+ \frac{1}{2}(r^2 - y^2)\,\text{arc. sen} = \frac{x}{\sqrt{r^2 - y^2}}.$$

sem constante se o integral começar com x, e cujo valor total até ao valor de

$$x = \sqrt{r^2 - y^2},$$

será

$$\int z\,dx = \frac{1}{2}q(r^2 - y^2),$$

por ser $q = \frac{1}{2}\pi$ o arco cujo seno $= 1$.

Logo

$$v = \int dy \int z\,dx = \frac{1}{2}q\int dy\,(r^2 - y^2)$$

$$= \frac{1}{2}qr^2y - \frac{1}{6}qy^3,$$

integral, que tomado entre os limites $y = 0$, $y = r$ dá

$$v = \frac{2q}{6}r^3$$

igual á oitava parte da esphera.

Das superficies dos solidos regulares

894. Seja $M'nqm\,Mn'q'm'$ o ultimo solido elementar,
Fig. 284. e $Mn'q'm'$ a sua superficie curva, comprehendida entre as curvas Mn', $n'q'$, $q'm'$, Mm', que são as intersecções dos planos lateraes com a superficie do solido. Imagine-se tirado por M o plano $Mn''q'm''$ tangente a esta superficie, e terminado nas arestas verticaes.

O quadrilatero $Mn''q''m''$ he hum parallelogrammo, porque tem os lados oppostos em planos parallelos.

A sua projecção sobre o plano dos xy he ii'. A sua projecção sobre o plano dos yz he o parallelogrammo, que tem por lados oppostos a projecção da recta $q''m''$, e a recta Mn''; e cuja base he a recta que está entre a projecção do ponto m'', e M, a qual he $=\frac{dz}{dx}dx$, e cuja altura he i', ou dy. De fórma, que esta projecção he $\frac{dz}{dx}dx\,dy$. Da mesma maneira a projecção sobre o plano dos xz he $\frac{dz}{dy}dy\,dx$.

Temos pois

$$Mn''q''m''=dx\,dy\sqrt{\left(1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)}\dots(A)$$

Similhantemente se acha, que o quadrilatero quebrado composto dos dois triangulos $Mn'q'$, $Mm'q'$ he

$$dx\,dy\sqrt{\left(1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)}\dots(B)$$

A superficie curva elementar $Mn'q'm'$, pelos principios do § antecedente, e sendo s a superficie curva, he

$$\frac{dds}{dx\,dy}ii'+a'i^2i'+b'ii'^2+\text{etc.}$$

Temos pois tres superfices convexas com o mesmo limite, das quaes a maior he composta do parallelogrammo $Mn''q''m''$, e dos triangulos $Mn'n''$, $Mm'm''$ quantidades da terceira ordem a respeito de i, e i'; e dos trapesios $n'n''q'q''$, $m'm''q'q''$, tambem da terceira ordem.

A superficie convexa media he composta da superficie curva elementar, e dos tres segmentos mixtilineos Mn', $n'q$, $m'q'$, os quaes são tambem da terceira ordem.

A superficie convexa menor he a do quadrilatero quebrado.

Escrevendo pois dx, dy por i, i'; teremos

$$\frac{dds}{dx\,dy}=\sqrt{\left(1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)}.$$

Logo

$$s=\int\int dx\,dy\sqrt{\left(1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)}.$$

Exemplo. Querendo achar a superficie da esphera, temos

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{x}{z},\ \frac{dz}{dy}=-\frac{y}{z};$$

logo

$$\sqrt{\left(1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)}=\frac{r}{z};$$

logo

$$\int dx\sqrt{\left(1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)}$$

$$=\int\frac{r\,dx}{\sqrt{(r^2-x^2-y^2)}}=r\,\text{arc sen}=\frac{x}{\sqrt{r^2-y^2}},$$

integral, que sendo tomado desde $x=0$, até $x=\sqrt{r^2-y^2}$ he $=\frac{1}{2}\pi r$; logo

$$s=\int dy\int dx\sqrt{\left(1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)}$$

$$=\int\frac{1}{2}\pi r\,dy=\frac{1}{2}\pi r^2,$$

sendo tomado este integral ultimo entre os limites $y=0$, $y=r$; o que he a oitava parte da superficie da esphera.

895. A equação (A) do § antecedente, por ser $dx\,dy$ a projecção de $Mn''q''m''$ sobre o plano dos xy, mostra que he

$$\frac{1}{\sqrt{\left(1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)}}$$

o coseno do angulo formado pelo plano tangente com o plano dos xy.

896. *A normal N de huma superficie curva* he a perpendicular ao plano tangente no ponto do contacto, e terminada n'esse ponto, e no plano dos xy.

897. O angulo formado por N, e z he igual ao que he formado pelo plano tangente, e pelo plano dos xy, por serem estas duas rectas perpendiculares aos ditos planos.

Logo

$$N = z\sqrt{\left(1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)}.$$

898. Quando huma superficie espherica, e outra curva, se tocão de fórma, que pelo ponto de contacto se não possa tirar outra superficie espherica entre as duas, chama-se *raio de curvatura da superficie proposta* ao raio da superficie espherica.

899. Discorrendo como (§ 850) para achar este raio de curvatura r, teremos pondo

$$\frac{dz}{dx} = p,\ \frac{dz}{dy} = q,$$

$$dN = 0 = dz\sqrt{(1 + p^2 + q^2)} + z\,\frac{p\,dp + q\,dq}{\sqrt{(1 + p^2 + q^2)}};$$

logo

$$z = -\frac{dz(1 + p^2 + q^2)}{p\,dp + q\,dq},$$

e

$$r = \frac{-dz(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}}{p\,dp + q\,dq}$$

900. A equação polar das superficies curvas acha-se transformando as coordenadas em outras variaveis referidas a hum polo. Assim se de hum ponto N da superficie se tira Fig. 285.
para a origem A das coordenadas, chamada agora polo, a recta R, chamada raio vector, e se ao angulo NAP se chama θ, e ω a NPM, teremos

$$x = R\cos\theta;$$

$$PN = R \operatorname{sen} \theta;$$

$$y = R \operatorname{sen} \theta \cos \omega;$$

$$z = R \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \omega.$$

Prolongando R, e pondo $NO = dR$; e tirando NQ infinitesimo tambem e perpendicular a R e no plano APN, será $NQ = R\,d\theta$.

Tirando, no plano PMN, NS perpendicular a PN tambem infinitesima, será

$$NS = R \operatorname{sen} \theta\, d\omega.$$

Por serem perpendiculares entre si os planos APN, PMN, e NS estar em hum, e ser perpendicular á intersecção de ambos, he tambem perpendicular a NQ, e a NO. Logo o parallelipipedo determinado pelas tres arestas NO, NQ, NS he rectangulo, e o seu volume ou o elemento do solido (§ 893) he

$$R^2 \operatorname{sen} \theta\, dR\, d\theta\, d\omega.$$

Assim por hum integral triplo podemos achar o volume do solido regular, sendo dada a equação polar.

Exemplo. Querendo achar, por este meio, o volume da esphera, cujo raio he R, e o centro he o polo, então integrando

$$v = \int\int\int R^2 \operatorname{sen} \theta\, dR\, d\theta\, d\omega$$

relativamente a R, teremos primeiro

$$v = \frac{1}{3} R^3 \int\int \operatorname{sen} \theta\, d\theta\, d\omega,$$

sem constante, porque v he nullo quando R o he.

Integrando depois relativamente a ω, desde $\omega = 0$, até $\omega = 2\pi$, teremos

$$v = \frac{2}{3} \pi R^3 \int \operatorname{sen} \theta\, d\theta.$$

Finalmente, teremos

$$v = -\frac{2}{3}\pi R^3 \cos\theta + C;$$

integral, que sendo tomado entre os limites $\cos\theta = 1$, $\cos\theta = -1$ dá

$$v = \frac{4\pi}{3} R^3;$$

e estes limites abrangem toda a esphera.

901. *Curva de dupla curvatura* he aquella que não está em plano. A intersecção de duas superficies curvas he por tanto huma linha de dupla curvatura, quando ellas se não cortão pelos lados rectos.

902. A curva de dupla curvatura constroe-se por meio das duas equações das superficies curvas, das quaes he a intersecção, fazendo n'estas as coordenadas communs.

903. Para rectificar huma curva de dupla curvatura póde suppor-se, que o elemento ds da curva se confunde com a sua corda, e então teremos

$$ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}.$$

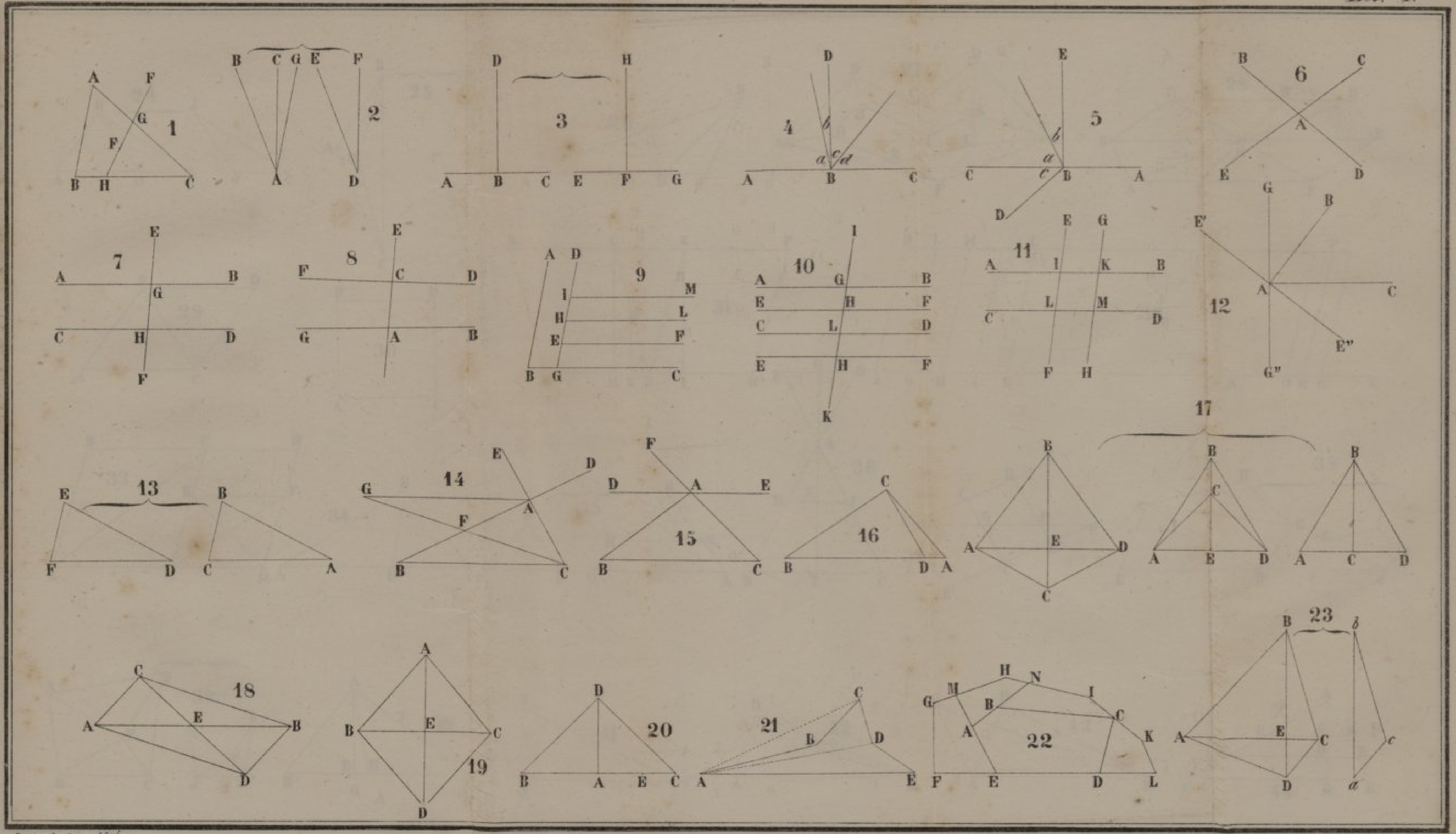
904. He o seu raio de curvatura

$$r = \frac{ds^2}{\sqrt{((ddx)^2 + (ddy)^2 + (ddz)^2)}}$$

sendo ds constante. Acha-se discorrendo como (§ 854) só com a differença de accrescentar (ddz^2) a $(ddy)^2$.

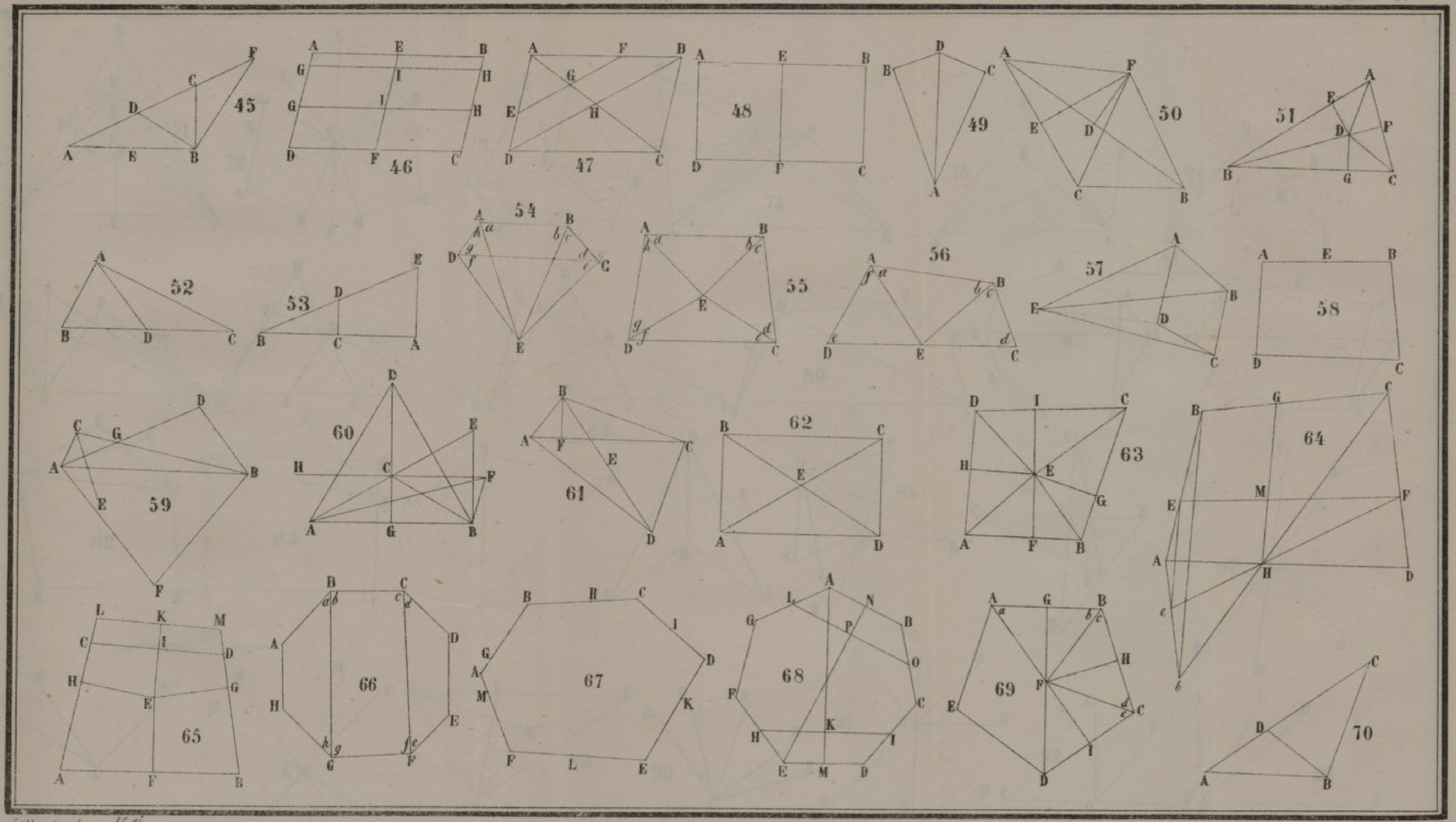
FIM DO 2.º E ULTIMO TOMO.

Est.a 1.a



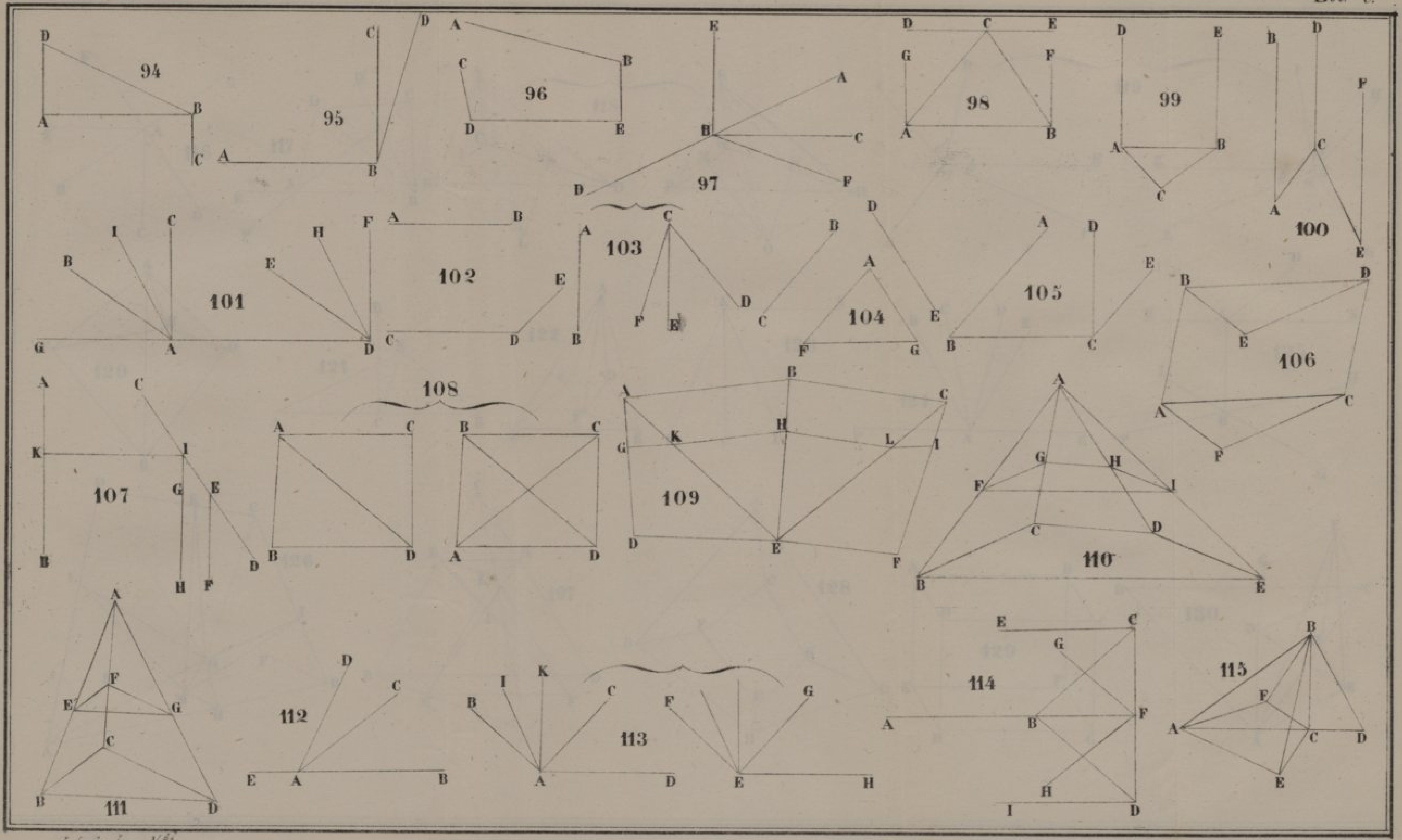
Lith. da Imp. Nal

Est.ª 3.ª

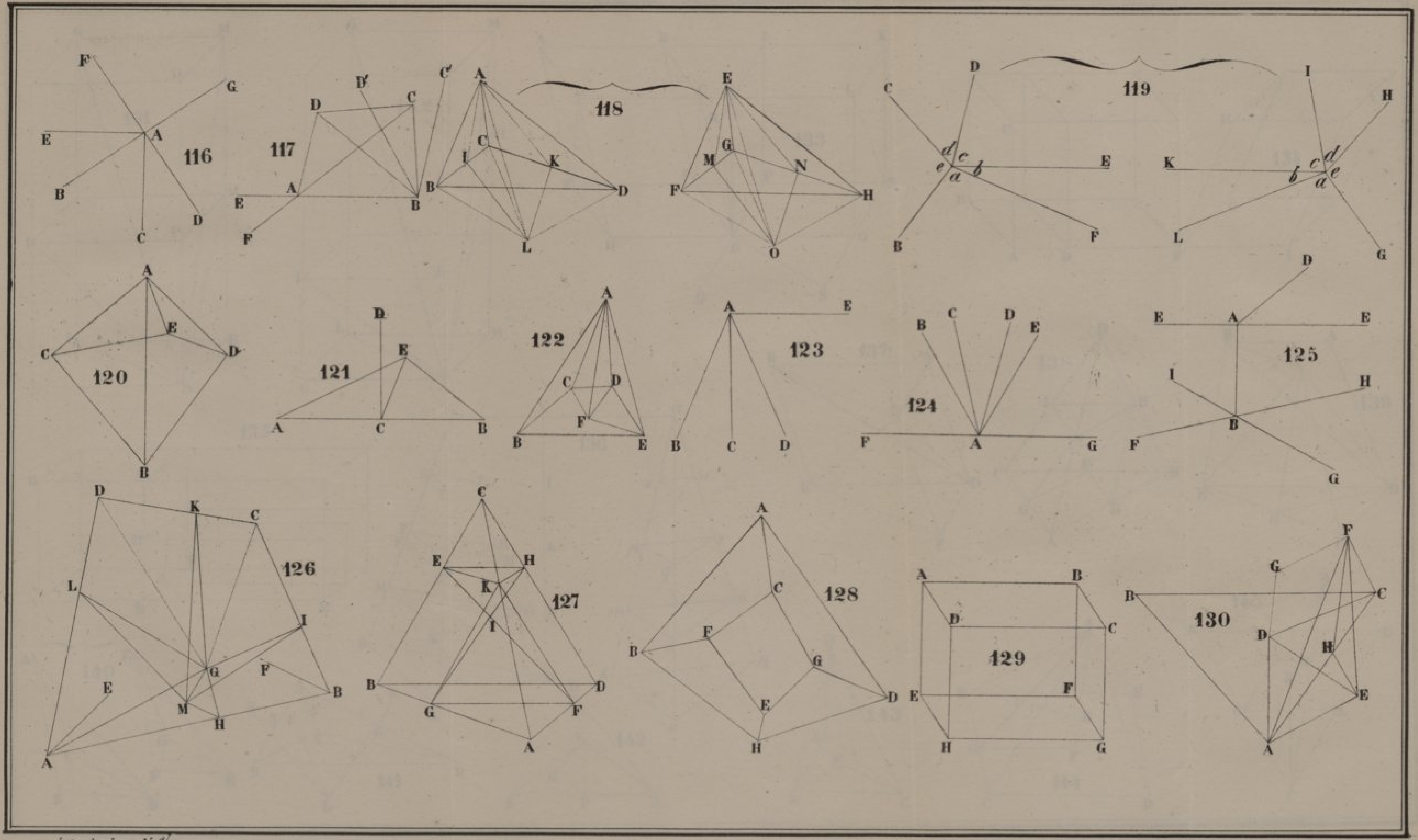


Lith. da Imp. N.al

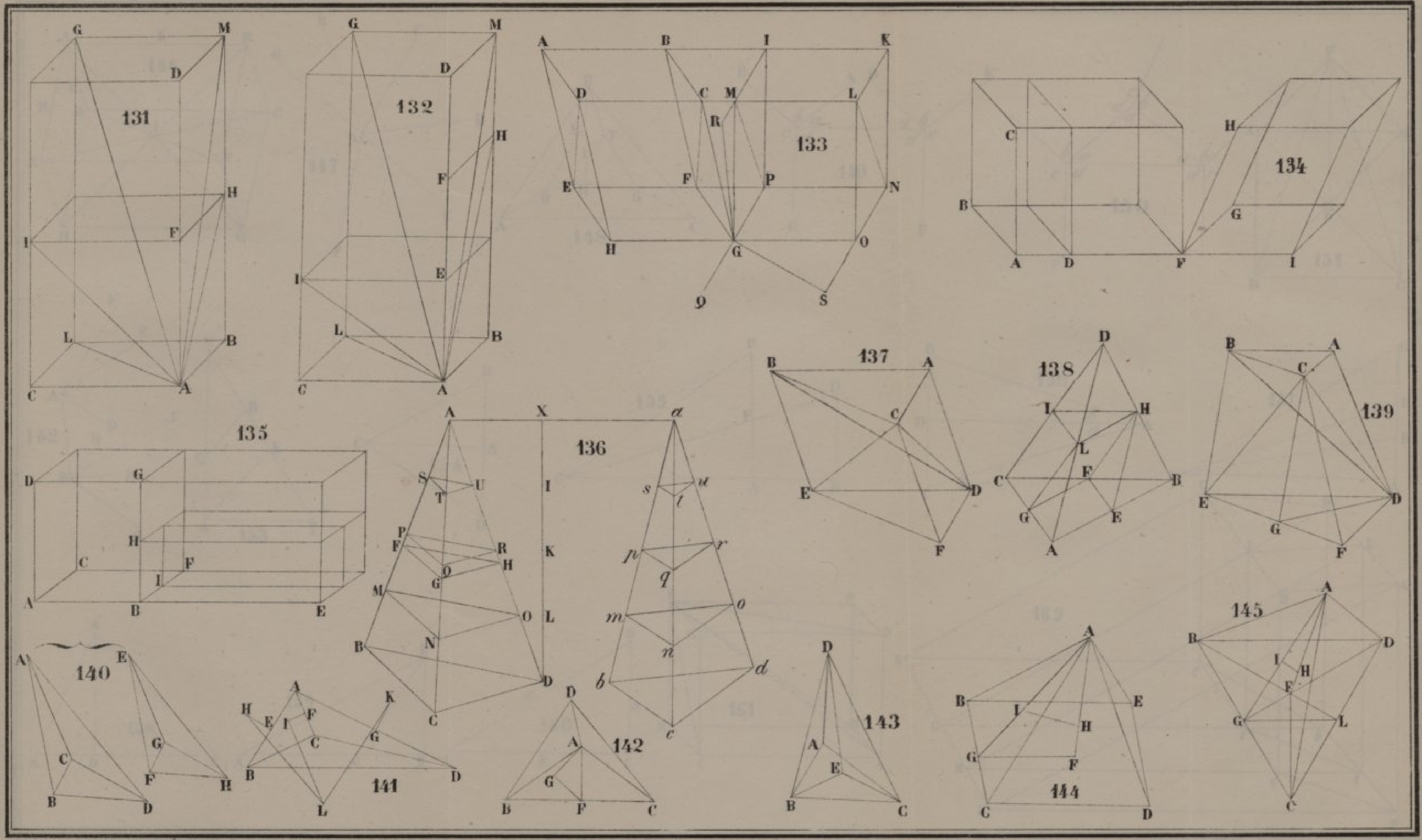
Est.ª 5



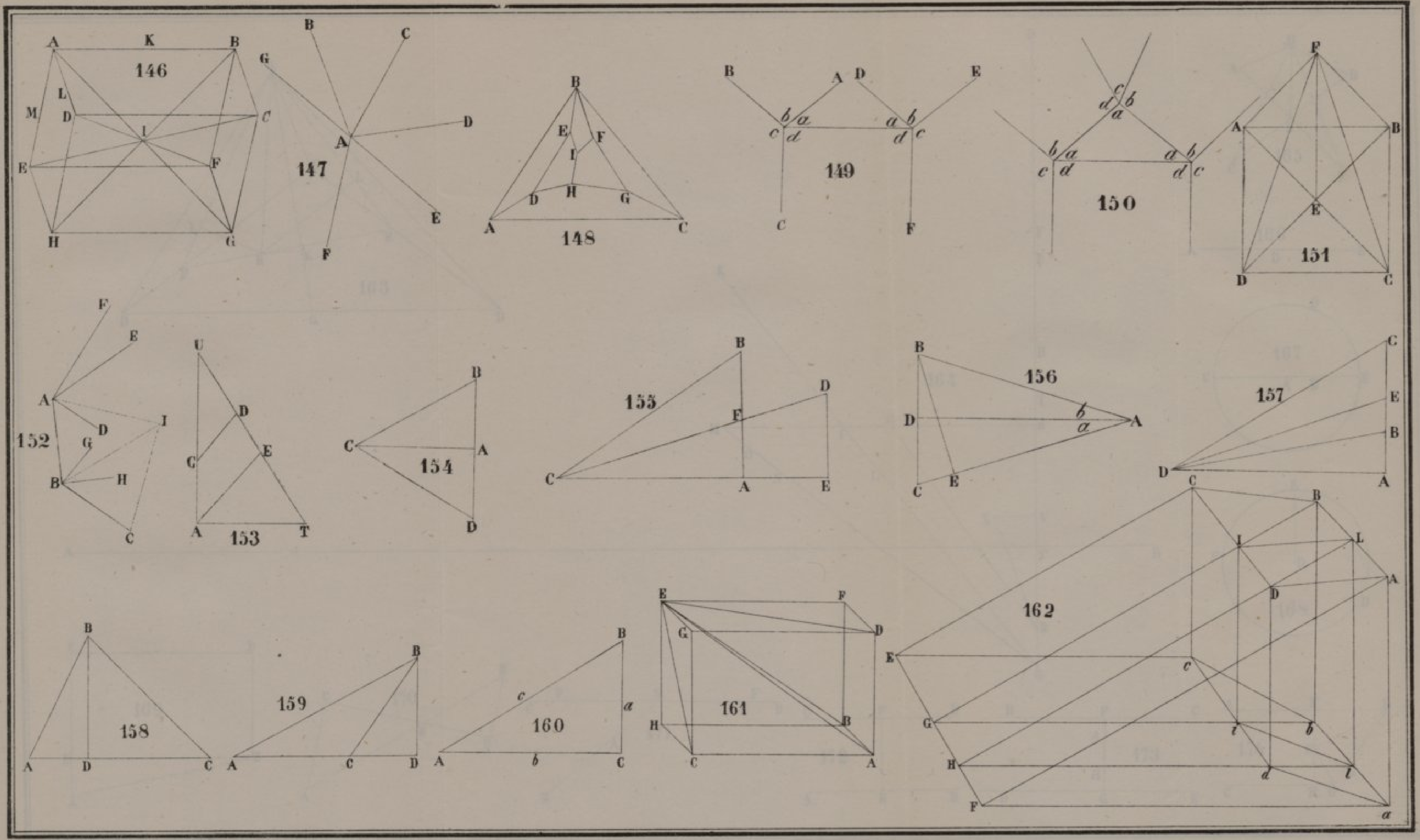
Lit. da Imp. N.al



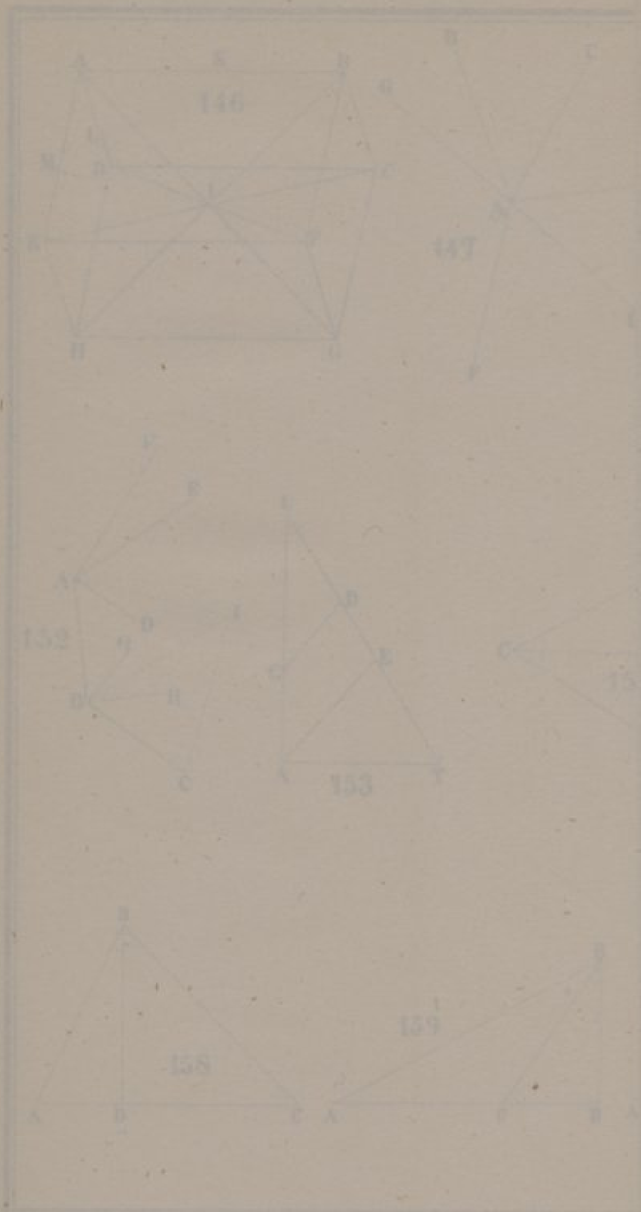
Lit. da Imp. N.al



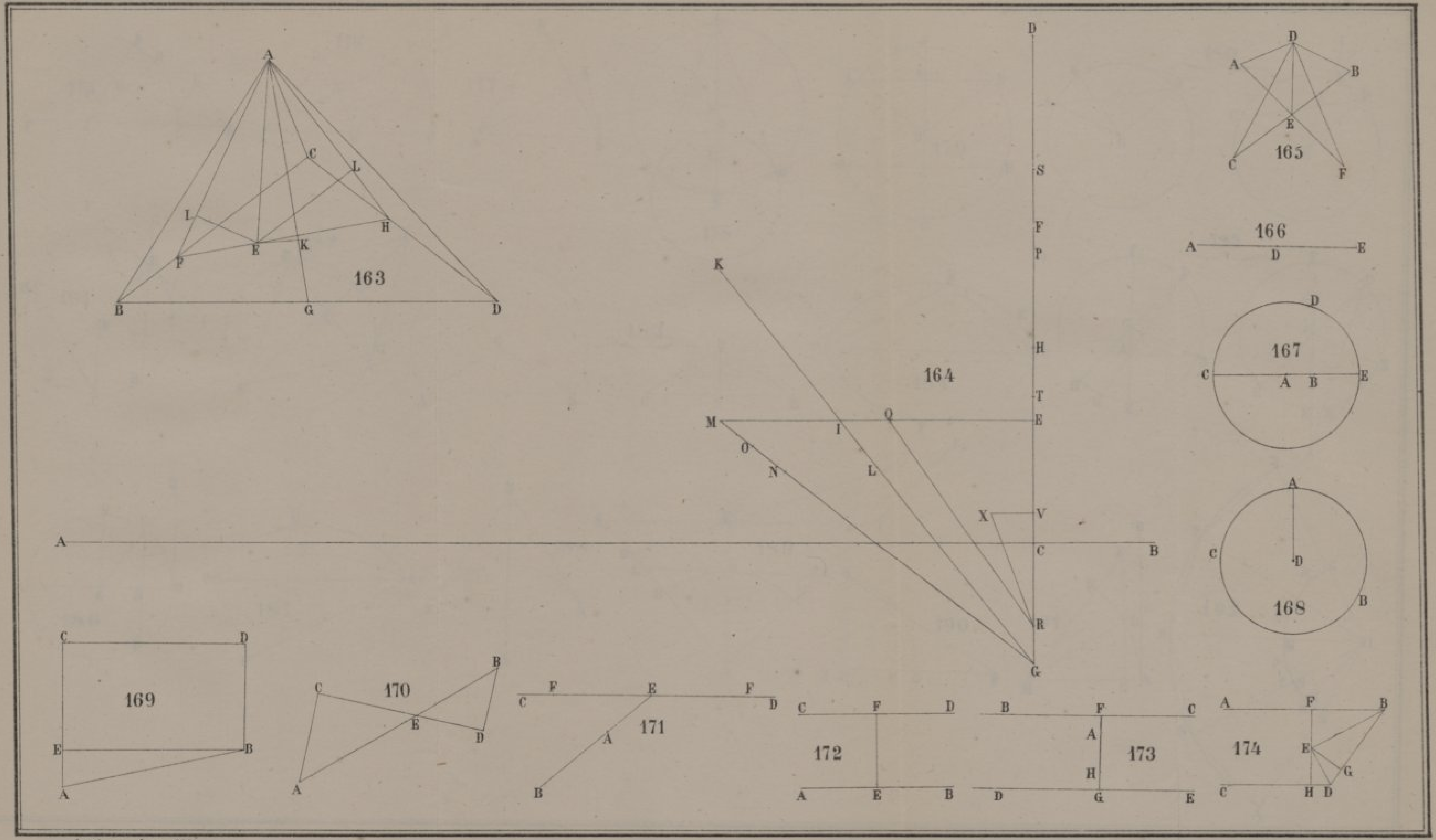
Lith. da Imp. N.al



Lith. da Imp. N.al

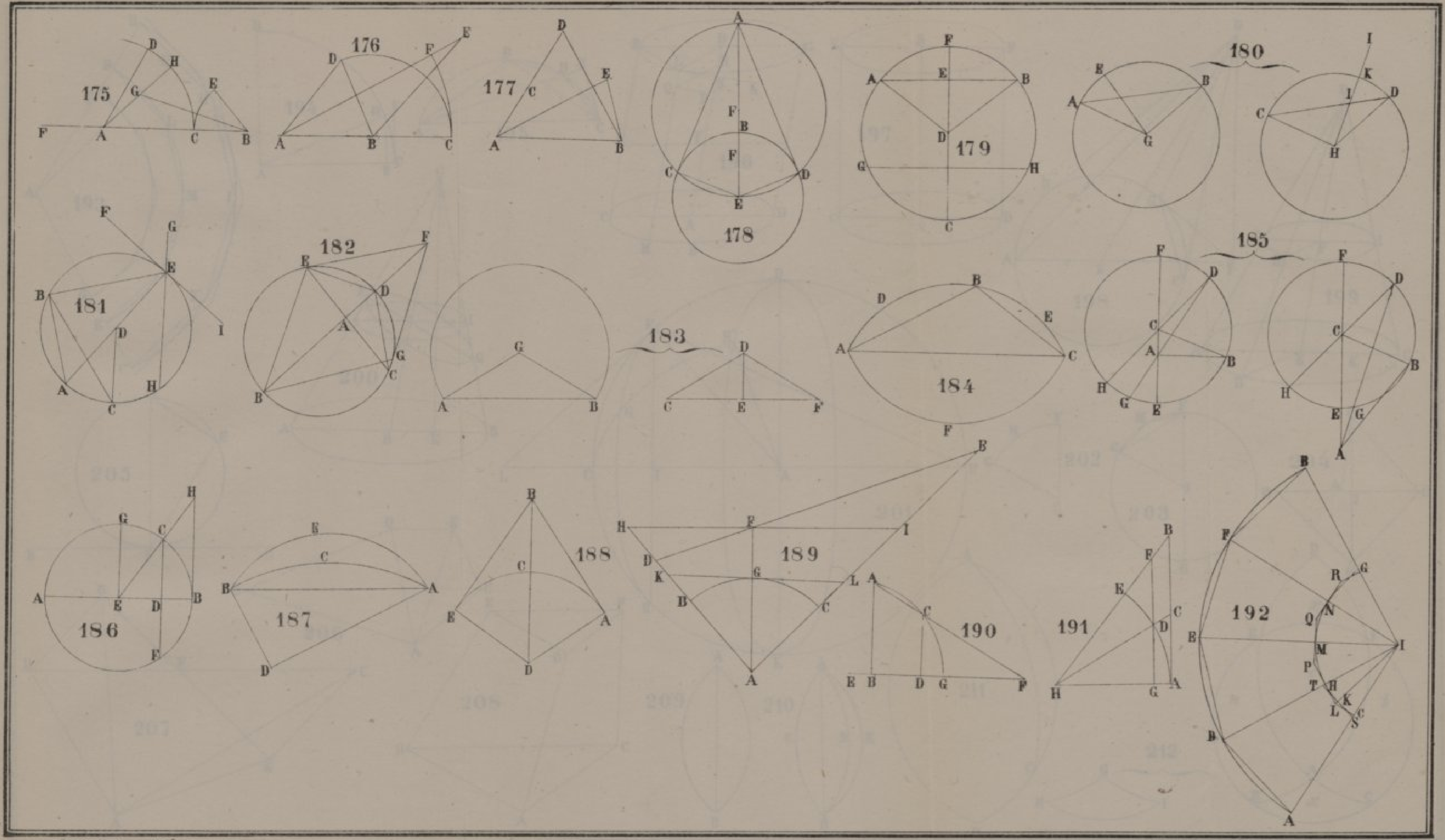

146
147
152
153
158
159

Est.a 9.a

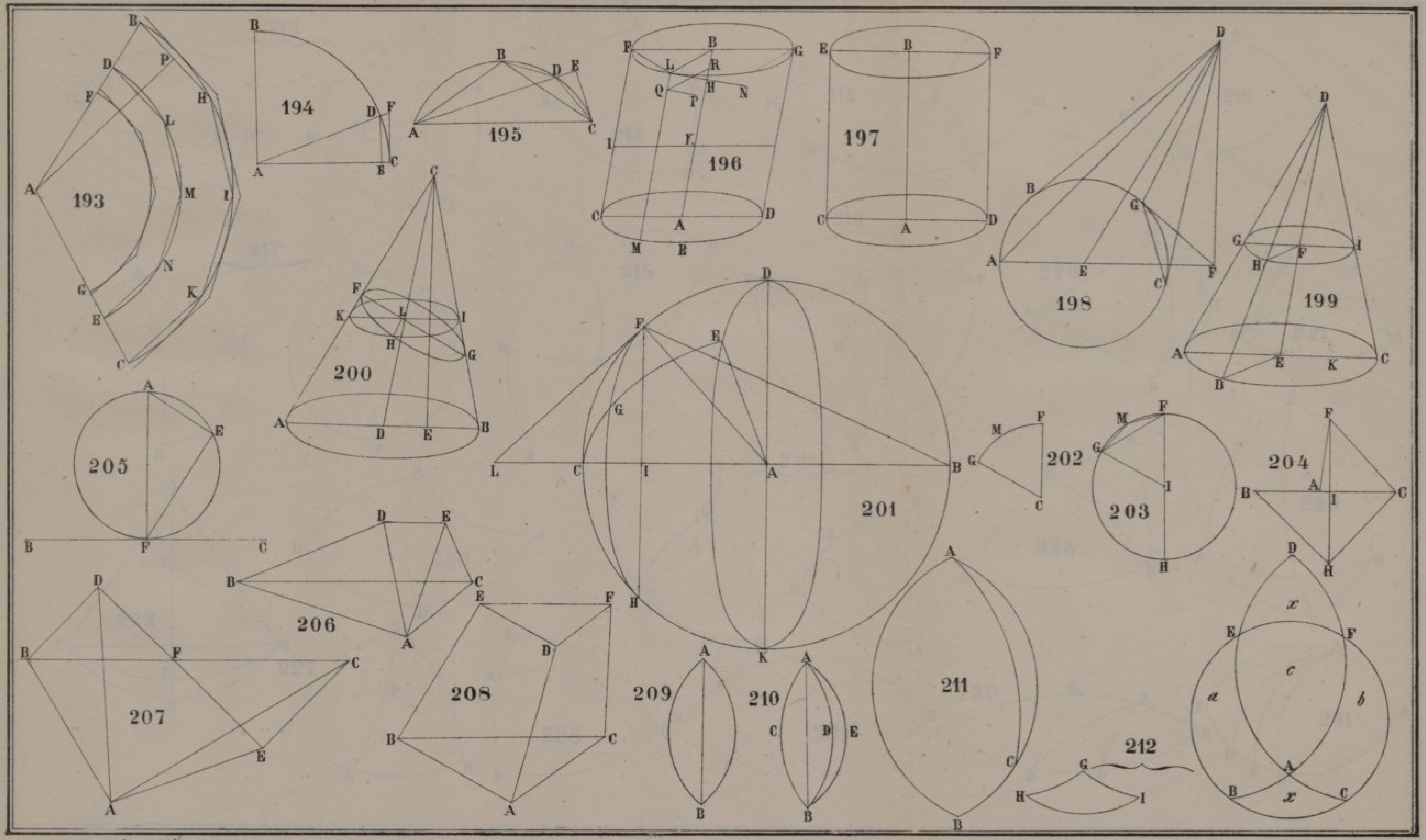


Lith. da Imp. N.al

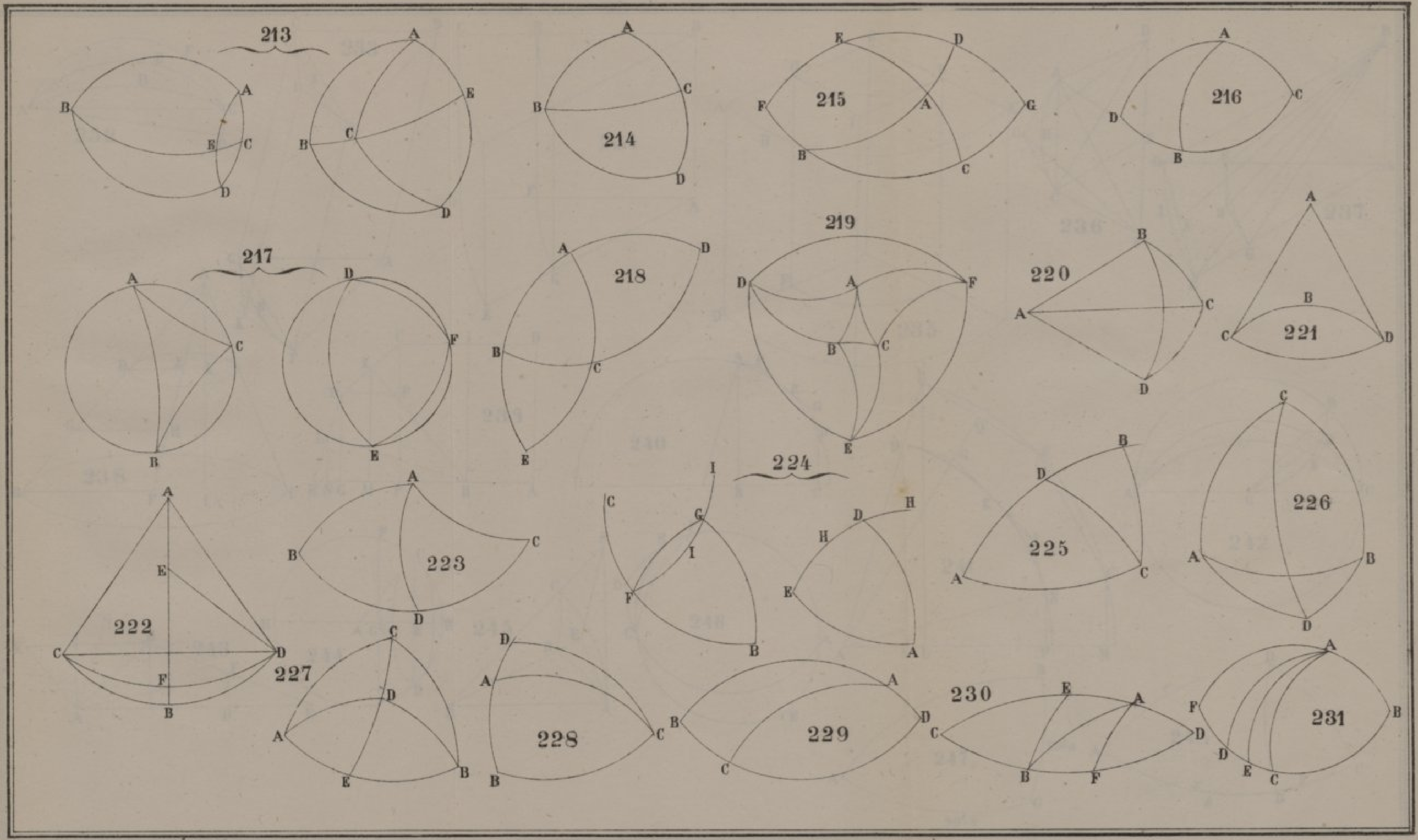
Est.ª 10.ª



Lith. da Imp. N.al

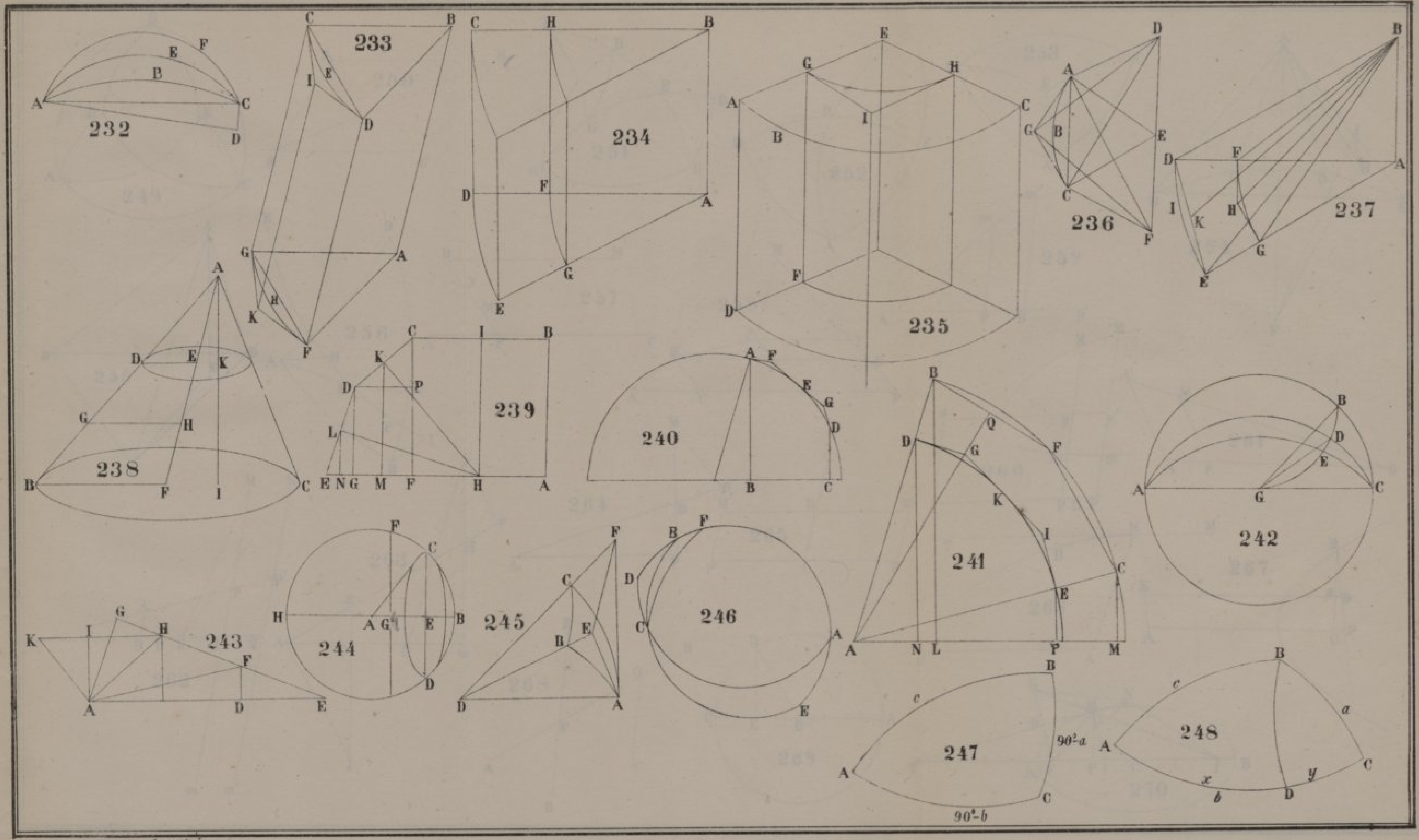


Lith. de Imp. N.al

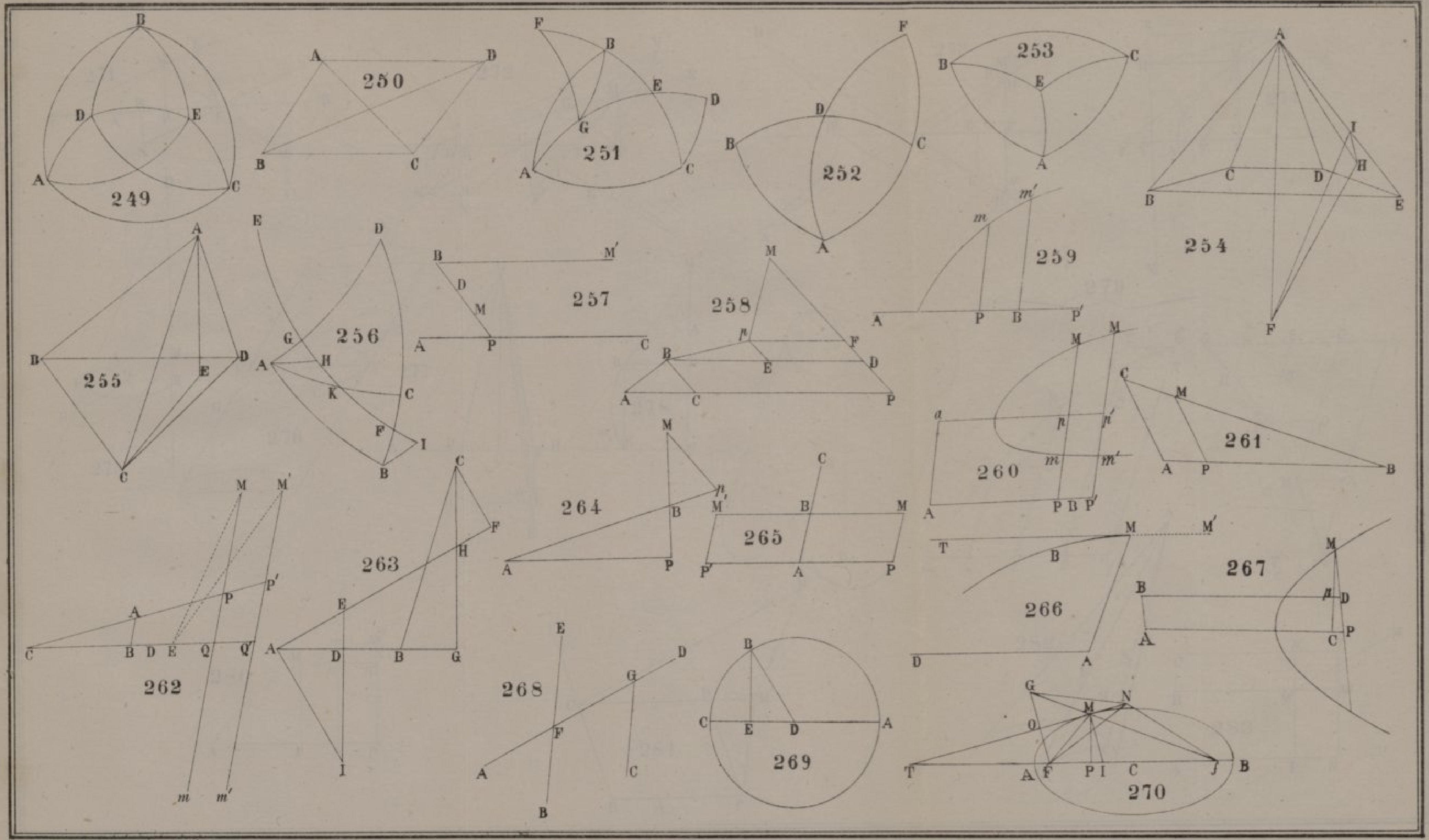


Lith. da Imp. N.al

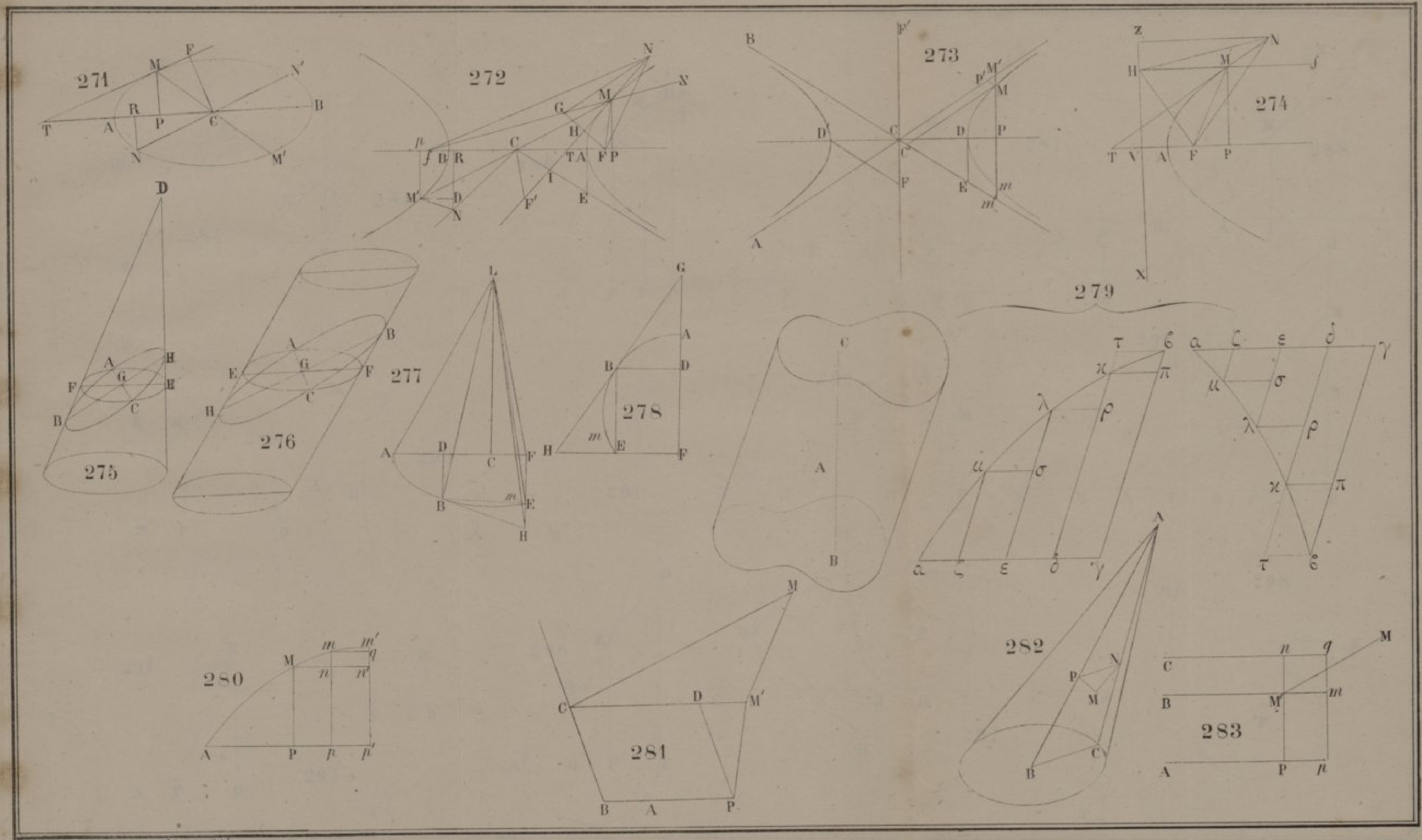
Est.ª 13.ª



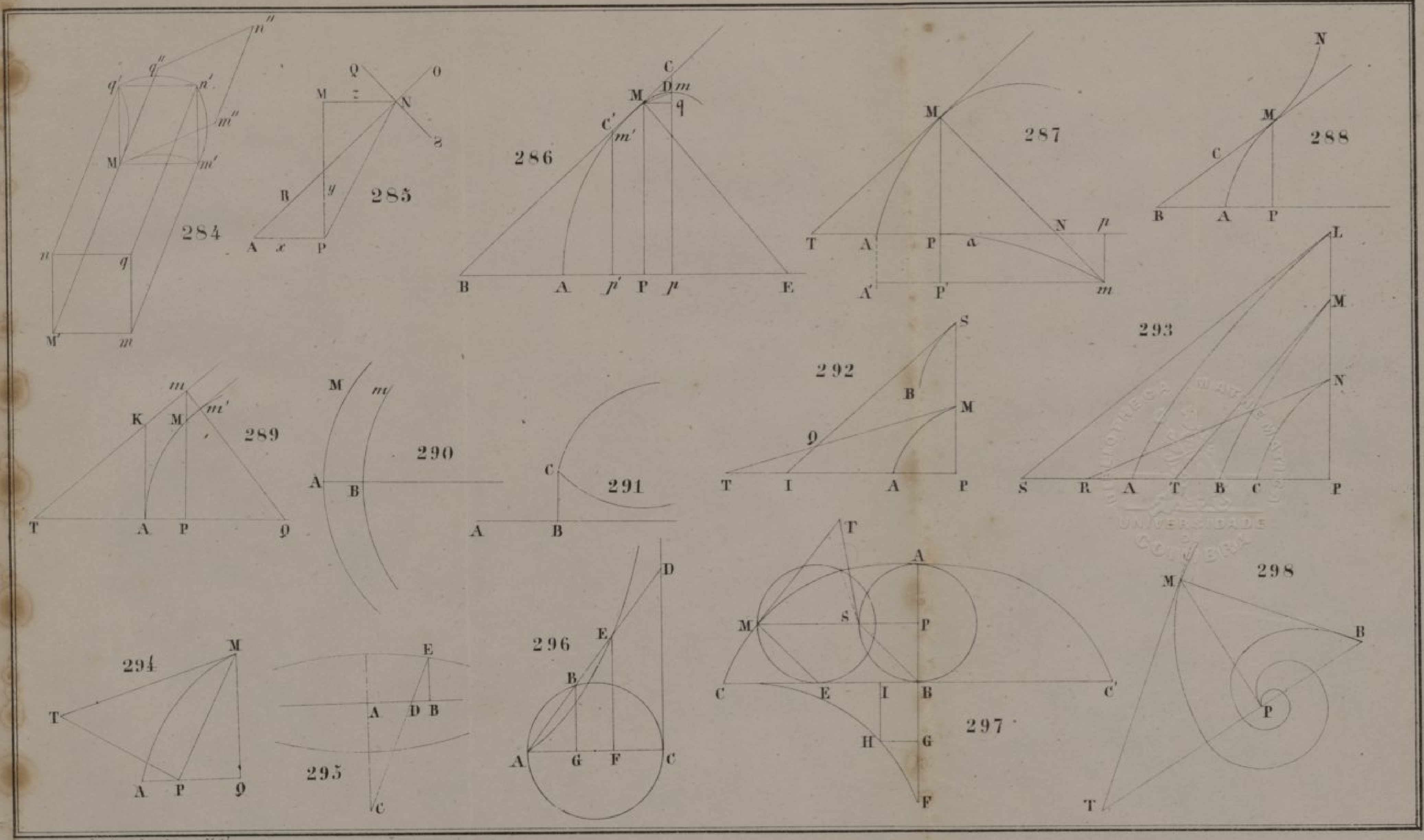
Lith. da Imp. N.al



Lith. da Imp. N.al



Lith. da Imp. N.al



Lith. da Imp. N.al

MARGIOCHI

GEOMETRIA