Primeiramente consideraremos a raiz, como composta de dezenas e unidádes, e apartaremos com hum ponto as tres ultimas letras do numero dado. Depois, como a parte restante 596947, que contém o cubo das dezenas, tem tambem mais do que tres letras, deverá a sua raiz ter mais do que huma, e por conseguinte constará de unidades e dezenas de dezenas. Para acharmos tambem o cubo destas novas dezenas, deveremos pela mesma rasaõ apartar com hum ponto outras tres letras á direita, e ficará a parte 596, na qual se achará o cubo dellas.

Buscaremos pois a raiz cubica de 596, que he 8, e a escreveremos adiante da risca; e formando o seu cubo exacto 512 o diminuiremos de 596, e assentaremos por baixo o resto 84. Para junto deste abaixaremos a classe seguinte 947, e teremos o numero 84947, no qual apartaremos com hum ponto as duas ultimas letras á direita, e debaixo da parte 849 escreveremos o divisor 192, que he o triplo do quadrado da raiz achada 8, e fazendo a divisaõ acharemos o quociente 4, que assentaremos na raiz adiante da primeira letra 8.

Para verificarmos esta raiz, e descobrirmos juntamente o resto, formaremos á parte o seu cubo 592704, e o tiraremos da parte correspondente do numero dado 596947, assentando por baixo o resto 4243. Para o lado direito deste resto abaixaremos a classe seguinte 688, da qual apartaremos com hum ponto as duas ultimas letras, e dividiremos a parte restante 42436 pelo triplo quadrado da raiz achada 84, que he 21168, e acharemos o quociente 2, que assentaremos na raiz.

Para outra vez verificarmos a raiz achada 842, e sabermos o resto, se o houver, elevalla hemos ao cubo, e dará 596947688, o qual tiraremos do numero dado; e porque naõ fica resto, entenderemos

mos que o numero 842 he exactamente a raiz que buscamos.

Deve notar-se, que no decurso desta operaçaõ naõ se póde jámais assentar na raiz letra maior do que 9; e quando coubesse maior, seria final de se ter tomado a letra precedente menor, do que devia ser. Tambem será facil de conhecer, quando se tem tomado na divisaõ hum quociente maior do que convinha, porque o cubo que resultar naõ poderá diminuir-se da parte correspondente do numero proposto. Neste caso diminuir-se-há a raiz de huma, duas &c. unidades successivamente, até que o seu cubo se possa diminuir.

Quando o numero dado naõ he cubo perfeito, a raiz que se acha he approximada; e raras vezes bastará sabella até as unidades sómente. Para isto he muito vantajosa a *dizima*, por meio da qual se póde approximar cada vez mais para o verdadeiro valor da raiz, ainda que naõ he possivel que esta se reprezente jamais por numero exactamente.

156 Para se approximar pois a raiz cubica, quanto for necessario, ajuntaremos ao numero dado tres vezes tantas cifras, quantas letras quizermos na *dizima*. E tirando a raiz como nos exemplos antecedentes, nella cortaremos com a virgula as letras correspondentes ás cifras que ajuntamos.

Exemplo III.

PEde-se a raiz cubica do numero 8755 até a casa das millesimas. Como as millesimas estaõ na terceira casa da dizima, deverá o cubo constar de nove decimais (n. 54.); e por tanto ajuntaremos nove cifras ao numero proposto.

Po-

Pelo que a queſtaõ ſe reduz a tirar a raiz cubica de 8755000000000.

```
8.755.000.000.000 | 20610
07.55
-----------------------------
12
8000
-------------
7550.00
1200
8741816
-------------
131840.00
127308
8754552981
-----------------------------
4470190.00
12743163
8754552981000
-----------------------------
447019000
```

E diſtribuindo o dito numero em claſſes, buſcaremos a raiz cubica da ultima claſſe 8 á eſquerda, que he 2, e a eſcreveremos adiante da riſca; e tirando o ſeu cubo 8 da meſma claſſe 8, aſſentaremos por baixo o reſto o, para junto do qual abaixaremos a claſſe ſeguinte 755. Separando nella as duas ultimas letras com hum ponto, debaixo da parte reſtante 7 eſcreveremos o diviſor 12, que he tres vezes o quadrado da raiz achada 2. Dividindo 7 por 12, a letra que cabe ao quociente he o, a qual aſſentaremos na raiz, e formando o cubo da raiz já achada 20, que he 8000, diminuilo-hemos da parte correſpondente 8755, e eſcreveremos debaixo o reſto 755, para junto do qual abaixaremos a claſſe ſeguinte 000, e continuaremos a operaçaõ do meſmo modo.

Aca-

Acabada ella, acharemos que a raiz cubica de 8755000000000 exacta até a casa das unidades he 20610; e por conseguinte a raiz de 8755,000000000 será 20, 610 exacta até a casa das millesimas, porquanto a raiz deve ter tres vezes menos casas na *dizima* do que ha no seu cubo (n. 54.).

Querendo-se levar mais adiante esta approximação, ajuntar-se-hão tres cifras ao ultimo resto, e se continuará a operação da mesma maneira que se praticou por cada classe, que se ajuntou a cada resto; e assim por diante.

55 Este methodo de extrahir a raiz cubica póde applicar-se ás raizes de mais alto gráo. Nellas observaremos em geral: 1.º Que o numero dado se ha de distribuir em classes de tantas letras, quantos forem os gráos da potencia dada, exceptuando a ultima classe á esquerda que poderá constar de menos, e a raiz terá tantas letras quantas forem as classes. 2.º Que da ultima classe á esquerda se buscará a raiz do gráo proposto, ou exacta, ou proximamente menor, a qual será a primeira letra da raiz que se busca. 3.º Que a dita raiz achada se elevará á potencia dada, a qual se diminuirá da mesma ultima classe á esquerda, e ao resto se ajuntará a primeira letra da classe seguinte. 4.º Que debaixo do resto assim aumentado se assentará por divisor a potencia da mesma raiz achada do gráo immediatamente inferior ao gráo proposto, sendo esta multiplicada pelo numero que mostra o gráo da potencia da questão. 5.º Que fazendo-se a divisão o quociente se ajuntará á primeira letra da raiz, e toda a raiz achada se elevará outra vez á potencia da questão, a qual se tirará da parte correspondente do numero dado, ao resto se ajuntará do mesmo modo a primeira letra da classe seguinte, e se lhe aplicará por divisor a potencia da raiz já achada do gráo proxi-

ximamente menor que o propoſto, multiplicada pelo expoente do meſmo gráo propoſto &c.

Deſte modo, para tirarmos a raiz 5ª de qualquer numero, dividilo-hemos em claſſes de 5 letras. Buſcaremos a raiz 5ª da ultima claſſe á eſquerda, que moſtrará a primeira letra da raiz que procuramos. Formaremos a 5ª potencia exacta della e a tiraremos da meſma claſſe, e ao reſto ajuntaremos a primeira letra da claſſe ſeguinte. Debaixo deſte reſto aſſim aumentado aſſentaremos por diviſor a potencia 4ª da raiz achada, multiplicada por 5; e pela diviſaõ acharemos a ſegunda letra da raiz, a qual elevaremos novamente á 5ª potencia, e a diminuiremos da parte correſpondente do numero dado; ao reſto ajuntaremos a primeira letra da claſſe ſeguinte, e lhe applicaremos por diviſor o quintuplo da 4ª potencia da raiz já achada, e aſſim por diante.

Para ſe conhecer facilmente a raiz da ultima claſſe á eſquerda ſerá neceſſario ter preſente huma taboa das potencias dos numeros digitos, como aqui ſe moſtraõ até á potencia nona.

RAIZES	POTENCIAS							
	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª	9ª
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	4	8	16	32	64	128	256	512
3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683
4	16	64	256	1024	4096	16384	65536	262144
5	25	125	625	3125	15625	78125	390625	1953125
6	36	216	1296	7776	46656	279936	1679616	10077696
7	49	343	2401	16807	117649	823543	5764801	40353607
8	64	512	4096	32768	262144	2097152	16777216	134217728
9	81	729	6561	59049	531441	4782969	43046721	387420489

Tor-

Tornando á raiz cubica, cujo uſo he mais frequente, naõ ſe póde negar que o methodo aſſima dado tem o incommodo de ſer neceſſario calcular os diviſores á parte, e formar o cubo da raiz todas as vezes que ſe acha huma letra de novo; calculo, que ſe faz cada vez mais trabalhoſo, á medida que ſe augmentaõ as letras na meſma raiz. Nos livros ordinarios ſe acha huma regra differente para a extracçaõ da raiz cubica, mas eſſa taõ complicada e trabalhoſa, que certamente ſe deverá preferir o methodo que fica expoſto. Para facilitar pois eſta operaçaõ ſerá conveniente que ajuntemos aqui hum methodo particular, o qual he da maneira ſeguinte.

Principiando a operaçaõ, como aſſima fica declarado, até ſe achar a ſegunda letra da raiz, eſta ſe aſſentará tambem abaixo da riſca, e atraz della para a eſquerda o triplo da primeira letra da meſma raiz. O numero que reſultar ſe multiplicará pela meſma letra achada, e o producto ſe aſſentará debaixo do diviſor, começando da ultima caſa das duas letras que foraõ ſeparadas do dividendo. Eſte producto ſe ſomará com o diviſor, e a ſoma ſe aſſentará por baixo, a qual ſe tornará a multiplicar pela meſma letra achada, e o producto ſe hirá logo diminuindo do dividendo; e ajuntando ao reſto a claſſe ſeguinte teremos o novo dividendo. O diviſor ſe achará facilmente, ſomando mentalmente o quadrado da letra ultimamente achada com os dous numeros antecedentes ao dividendo, e ſe aſſentará a ſoma debaixo do meſmo dividendo, chegando-a huma caſa mais para a direita. Feita a diviſaõ acharemos a terceira letra da raiz, a qual tambem eſcreveremos em baixo, e atraz della ſeguidamente o triplo das letras precedentes da meſma raiz; depois multiplicaremos eſte numero pela meſma letra que ultimamente achamos, e praticaremos tudo mais como na operaçaõ antecedente; e assim por diante. Quando o divisor sahir maior que o dividendo, pôr-se-ha cifra na raiz, ajuntar-se-ha outra classe ao dividendo, e o mesmo divisor se adiantará huma casa mais para a direita.

Exemplo.

PEde-se a raiz cubica de 916358751227902464.

916.358.751.227.902.464.	971304
187358	277
243	2911
1939	29133
26239	2913904
3685751	
28227	
2911	
2825611	
860140227	
2828523	
87399	
282939699	
11321130902464	
283027107	
11655616	
2830282725616	
00000000000000	

Tendo achado as duas letras 97 pelo methodo ordinario, assentaremos a segunda 7 debaixo da raiz, e atraz della o triplo da primeira 9, que he 27, e se formará o numero 277, o qual multitiplicaremos pelo meſmo 7, e aſſentaremos o producto 1939 debaixo do diviſor 243, principiando porém da ultima caſa do dividendo 187358; ſomando o dito producto com o diviſor, teremos a ſoma 26239, a qual multiplicaremos outra vez pela meſma letra 7, e ao meſmo tempo tiraremos o producto do dividendo 187358, aſſentando por baixo o reſto 3685, ao qual ajuntando a claſſe ſeguinte teremos o novo dividendo 3685751. E ſomando mentalmente o quadrado da meſma letra 7, que he 49, com os dous numeros 26239 e 1939, que precedem immediatamente ao dividendo, e eſcrevendo a ſoma huma caſa mais para a direita, teremos o novo diviſor 28227.

Pela diviſaõ acharemos o quociente 1, que aſſentaremos na raiz, e tambem abaixo della com o triplo das letras precedentes da raiz 97, donde reſultará o numero 2911, que multiplicaremos pela meſma letra achada 1, e ſomando o producto com o diviſor teremos a ſoma 2825611, a qual tornaremos a multiplicar pela meſma letra 1, e tiraremos o producto do dividendo, donde ficará o reſto 860140, ao qual ajuntaremos a claſſe ſeguinte, e ſerá o novo dividendo 860140227; e ſomando o quadrado da meſma letra achada 1 com os dous numeros antecedentes ao dividendo, e eſcrevendo a ſoma huma caſa mais para a direita, teremos o novo diviſor 2828523.

Dividindo outra vez acharemos o quociente 3, o qual aſſentaremos na raiz, e em baixo com o triplo das letras antecedentes formaremos o numero 29133, que multiplicaremos pelo meſmo 3, e ſomarémos o producto 87399 com o diviſor, donde reſultará a ſoma 282939699, a qual tornaremos a multiplicar pelo meſmo 3, e tirando o producto do dividendo ficará o reſto 11321130; ao qual ajuntaremos a claſſe ſeguinte para ter-

mos

mos o novo dividendo 11321130902. Como pela formaçaõ do divisor vemos, que a letra 2 do numero que precede ao dividendo, ha de cahir debaixo da primeira letra do dividendo 1, e que naõ póde conseguintemente fazer-se a divisaõ, poremos logo cifra na raiz, ajuntaremos ao dividendo a classe seguinte, somaremos o quadrado da letra precedente 3 com os dous numeros precedentes ao dividendo, e escrevendo a soma duas casas mais para a direita teremos o novo divisor 283027107.

E tornando a dividir finalmente acharemos o quociente 4, que assentaremos na raiz, e em baixo com o triplo das letras precedentes, que fará 2913904; multiplicando este numero pelo mesmo 4, e ajuntando o producto com o divisor teremos a soma 28302827256l6, a qual multiplicaremos outra vez pelo 4, e diminuiremos o producto do dividendo; e porque naõ sobra nada, será a raiz cubica do numero proposto exactamente 971304. §§

157 Como na multiplicaçaõ dos quebrados devemos multiplicar numerador por numerador, e denominador por denominador (n. 106.), he claro, que o cubo de hum quebrado se formará elevando ambos os seus termos ao cubo. E reciprocamente, para se tirar a raiz cubica de hum quebrado, será necessario tirar as raizes tanto do numerador como do denominador. Deste modo a raiz cubica de $\frac{27}{64}$ será $\frac{3}{4}$ porque a raiz cubica do numerador 27 he 3, e do denominador 64 he 4.

158 Se o denominador sómente for cubo perfeito, tirar-se ha a raiz approximada do numerador; e por denominador se porá a raiz exacta do denominador primitivo.

Assim

Aſſim v. gr. pedindo-ſe a raiz cubica $\frac{147}{343}$, acharemos que a raiz do numerador até á caſa das centeſimas he 5,22, e que a raiz exacta do denominador he 7: pelo que a raiz pedida ſerá proximamente $\frac{5,22}{7}$, ou 0,74 (n. 99.).

159 Porém, ſe o denominador naõ for cubo perfeito, ambos os termos do quebrado ſe multiplicaráõ pelo quadrado do meſmo denominador (n. 88.), e a operaçaõ ſe reduzirá ao caſo precedente.

Aſſim v. gr. querendo ſaber a raiz cubica de $\frac{3}{7}$, multiplicaremos ambos os ſeus termos por 49 quadrado do denominador 7, e ſe reduzirá á $\frac{147}{343}$ (n. 88.), cuja raiz cubica ſerá proximamente $\frac{5,27}{7}$ (n. 158.); ou 0,75 (n. 99.)

Quando os quebrados vem juntos com inteiros, os inteiros ſe reduzem aos quebrados (n. 86.), e a queſtaõ entrará nos caſos precedentes. Tambem podem reduzir-ſe os quebrados á dizima, antes de lhes tirarmos a raiz; mas eſta reducçaõ ſe continuará até achar tres vezes mais letras decimais do que ſe querem ter na raiz.

Deſte modo, para tirar a raiz cubica de 7 $\frac{3}{11}$ até a caſa das milleſimas, reduziremos eſte numero a 7,272727272, cuja raiz ſerá 1,937.

160 Quando ſe houver de tirar a raiz cubica de huma fracçaõ decimal, procurar-ſe-há que ella tenha tres vezes mais caſas de dizima, do que deve ter a raiz, ajuntando-lhe as cifras que para iſſo forem neceſſarias. Entaõ tirar-ſe-há a raiz ſem fazer caſo da virgula, e nella ſe apartaráõ depois com a virgula as caſas da dizima que lhe com-

competem, isto he, o terço das que puzemos no numero proposto; e se as letras della naõ chegarem a tanto, ajuntar-selhe-haõ á esquerda as cifras que forem necessarias.

V. g. Para tirarmos a raiz cubica de 6,54 até a casa das millesimas, ajuntar-lhe-hemos sete cifras, e buscaremos a raiz como se fosse do inteiro 6540000000, a qual acharemos ser 1870. E separando-lhe tres letras para a dizima, por haver nove no numero dado, será a raiz pedida 1,870, ou 1,87. Do mesmo modo acharemos, que a raiz cubica de 0,0006 he 0,08 até á casa das centesimas; e assim das mais.

161 O methodo abbreviado, que ensinámos para a Divisaõ (n. 69. e seg.), tambem se applica facilmente á extracçaõ da raiz cubica. Porque sendo bastante tiralla até a casa das unidades, dividir-se-ha o numero proposto em classes, e depois se lhe cortaráõ tantas letras á direita, menos duas, quanto for o dobro das mesmas classes. Das letras que ficarem á esquerda se extrahirá a raiz cubica, e em chegando ao ultimo resto desprezaremos a ultima letra no divisor que lhe competir, e assim por diante; mas naõ tomaremos o divisor da operaçaõ precedente, senaõ quando elle tiver tantas letras constantes á esquerda quantas forem as do resto actual.

Das rasoens, proporçoens, e progressoens; e das regras, que dellas dependem.

162 PElo nome de *Rasaõ* nada mais entendemos na Mathematica do que a grandeza relativa, que resulta da comparaçaõ de duas quantidades. Esta he de dous modos.

163 Porque se compararmos duas quantidades r,

poprocurando ſaber quanto huma dellas excede, ou he excedida da outra, o reſultado da comparaçaõ ſerá a differença das meſmas quantidades, e eſta ſe chama *Raſaõ Arithmetica.*

Aſſim v. gr. comparando 15 com 8 para ſaber a ſua differença 7, eſte numero 7 que reſulta da comparaçaõ he a raſaõ arithmetica do numero 15 ao numero 8.

Para denotarmos, que comparamos duas quantidades neſte ponto de viſta, coſtumamos ſeparallas com hum ponto Aſſim por eſta expreſſaõ 15.8 entenderemos a raſaõ arithmetica de 15 para 8.

164 Porém ſe compararmos duas quantidades, procurando conhecer quantas vezes huma contém, ou he contida na outra, o reſultado deſta comparaçaõ he a *Raſaõ, Geometrica.* E quando ſe diz *Raſaõ* ſimpleſmente, ſempre ſe entende a *Geometrica.*

Comparando v. gr. 12 com 3 para ſabermos quantas vezes o contém, o que reſulta deſta comparaçaõ, iſto he, o ſer 12 *quadruplo* de 3, he a raſaõ geometrica de 12 para 3.

Para moſtrarmos, que comparamos duas quantidades neſte ſentido, coſtumamos ſeparallas com dous pontos. Eſta expreſſaõ 12:3 ſignifica a raſaõ geometrica de 12 para 3.

165 Das duas quantidades, que ſe comparaõ arithmetica ou geometricamente, a que ſe profere ou eſcreve em primeiro lugar chama-ſe *antecedente*, e a outra *conſequente.* Aſſim na raſaõ 12:3 o numero 12 he antecedente, e o numero 3 conſequente; e ambos elles em commum ſe chamaõ *termos* da raſaõ.

166 Para conhecer a raſaõ arithmetica de duas quantidades, naõ he neceſſario mais do que diminuir huma da outra, e o reſto moſtrará a raſaõ, ou quanto huma tem de mais que a outra.

167

167 Para avaliar porém a rasaõ geometrica de duas quantidades, deveremos dividillas huma pela outra, e o quociente mostrará a rasaõ dellas, isto he, quantas vezes huma contém a outra.

168 Daqui por diante avaliaremos sempre a rasaõ geometrica pela divisaõ do antecedente pelo consequente, aindaque aquelle seja mais pequeno. Assim a rasaõ de 12 para 3 será 4, e de 3 para 12 será $\frac{3}{12}$, ou $\frac{1}{4}$.

¶ Deve notar-se, que naõ póde haver rasaõ senaõ entre quantidades *homogeneas*; porque as *heterogeneas* nem se excedem, nem se contém mutuamente. Assim 12 *toesas* para 3 *libras* naõ tem rasaõ alguma arithmetica, nem geometrica. Porque sem embargo de que o numero 12 tem sobre 3 o excesso de 9, he vizivel que 12 *toesas* naõ tem sobre 3 *libras* excesso algum assinavel nem de *libras*, nem de *toesas*. E do mesmo modo, aindaque 12 contem a 3 quatro vezes, 12 *toesas* naõ contem de modo algum a 3 *libras*, porque saõ quantidades de differente genero, entre as quais naõ póde haver comparaçaõ.

A differença dos termos na rasaõ arithmetica, e o quociente na geometrica, tambem tem o nome de *denominadores*, e *expoentes* da rasaõ.

A rasaõ geometrica divide-se em *racional*, e *irracional*. He racional, quando o expoente se póde exprimir por numero quer seja inteiro, quer quebrado; irracional, quando o expoente naõ póde exprimir-se jámais por numero algum exactamente, como he a rasaõ da unidade para a raiz quadrada de 2. Tambem se divide em rasaõ de *igualdade*, e *desigualdade*, conforme consta de termos iguais, ou desiguais; chama-se rasaõ *de maior desigualdade*, quando o antecedente he maior que o consequente; e *de menor desigualdade*, quando he menor.

Os

Os Mathematicos antigos fazem finco differenças genericas da rasaõ de maior desigualdade, (que naõ deve ignorar quem quizer entender as suas obras), a saber: *Multiplex*, *superparticularis*, *superpartiens*, *multiplex-superparticularis*, *multiplex-superpartiens*; e da rasaõ de menor desigualdade saõ outras tantas differenças, que se declaraõ com os mesmos nomes precedidos de hum *sub*, a saber: *submultiplex*, *subsuperparticularis* &c.

Rasaõ multiplex he, quando o antecedente contém o consequente algumas vezes exactamente; e *submultiplex*, quando nelle he contido do mesmo modo. A Primeira he em particular *dupla*, *tripla*, *quadrupla* &c., e a segunda *subdupla*, *subtripla*, *subquadrupla* &c, confórme os expoentes. A rasaõ 10:1 he *decupla*, e 1:10 *subdecupla*.

Superparticularis he, quando o antecedente contém huma vez ao consequente, e além disso huma parte aliquota delle, como 3:2; e *subsuperparticularis*, quando o antecedente he contido do mesmo modo no consequente, como 2 : 3. As especies da primeira distinguem-se com os nomes das partes aliquotas precedidos de hum *sesqui*; e as especies da segunda com os mesmos vocabulos precedidos de hum *sub*. Deste modo as rasoens 3:2, 4:3, 5:4, 6:5 &c. pela mesma ordem tem os nomes de *sesquialtera*, *sesquitertia*, *sesquiquarta*, *sesquiquinta* &c.; e as rasoens 2:3, 3:4, 4:5, 5:6 &c. de *subsesquialtera*, *subsesquitertia*, *subsesquiquarta*, *subsesquiquinta*. &c.

Superpartiens he, quando o antecedente contém huma vez o consequente e mais algumas partes aliquotas delle, como 5:3; e *Subsuperpartiens*, quando o antecedente se contém no consequente do mesmo modo, como 3:5. As especies deste genero se denotaõ ajuntando a denominaçaõ das partes aliquotas, e metendo depois do *super* as vo-

zes

zes *bi*, *tri*, *quadri* &c, pelas quais se mostra quantas dessas partes aliquotas se exprimem. Assim 5 : 3 he rasaõ *superbi partiens tertias*, 8:5 *supertripartiens quintas* &c. E reciprocamente, 3:5 he rasaõ *subsuperbipartiens tertias*, 5:8 *subsupertripartiens quintas* &c,

Multiplex-superparticularis he, quando o antecedente contém algumas vezes o consequente, e alem disso huma parte aliquota delle; e *submultiplex-superparticularis*, quando o antecedente se contém no consequente do mesmo modo. As especies da primeira saõ *dupla-sesquialtera* 5:2, *dupla-sesquitertia* 7:3 &c, *tripla-sesquialtera* 7:2, *tripla-sesquitertia* 10:3 &c. &c; e da segunda *subdupla sesquialtera* 2:5, *subdupla sesquitertia* 3:7 &c. *subtripla-sesquialtera* 2:7, *subtripla-sesquitertia* 3:10 &c. &c.

Finalmente *multiplex-superpartiens* he, quando o antecedente contém algumas vezes o consequente e mais algumas partes aliquotas delle; e *submultiplex superpartiens*, quando o antecedente se contém no consequente do mesmo modo. As especies de ambas facilmente se denominaõ pelo que assima fica declarado. A rasaõ 8:3 he *dupla-superbipartiens tertias*, 74:7 *decupla-superquadripartiens septimas &c.* e reciprocamente, a rasaõ 3:8 he *subdupla-superbipartiens tertias*, 7:74 *subdecupla-superquadripartiens septimas &c.* §§

169 A rasaõ arithmetica fica sendo a mesma, todas as vezes que ambos os termos se aumentaõ ou diminuem de huma mesma quantidade; porque assim naõ se altéra nada a differença, na qual consiste a rasaõ. Assim 3.8 he o mesmo que 4.9, que 5. 10 &c.

170 A rasaõ geometrica tambem será a mesma, todas as vezes que ambos os termos se multiplicarem, ou dividirem por huma mesma qanti-

dade. Porque conſiſtindo a raſaõ no quociente do antecedente dividido pelo conſequente (n. 168.), he huma quantidade fraccionaria (n. 97.), a qual naõ muda de valor, quando ambos os termos ſe multiplicaõ ou dividem por huma meſma quantidade (n.88. 89). Aſſim a raſaõ 3:12 vale o meſmo que 6:24, multiplicando ambos os termos por 2; e o meſmo que 1:4, dividindo ambos os termos por 3.

171 Eſta propriedade ſerve de muito para reduzir huma raſaõ aos termos mais ſimples. Tendo v. gr. de examinar a raſaõ de $6\frac{3}{4}$ a $10\frac{2}{3}$; reduzindo tudo a quebrado, acharemos que he a meſma raſaõ que de $\frac{27}{4}$ a $\frac{32}{3}$; depois reduzindo ao meſmo denominador, a meſma que de $\frac{81}{12}$ a $\frac{128}{12}$; e ſupprimindo o denominador commum 12 (que he o meſmo que multiplicar ambos os termos por 12) a raſaõ propoſta ſerá a meſma que a de 81 para 128.

ʃʃ A meſma mudança, que ſe faz em huma raſaõ arithmetica, ajuntando ou tirando huma quantidade ao antecedente, tambem ſe fará tirando ou ajuntando a meſma quantidade ao conſequente; porque de ambos os modos reſultaõ duas raſoens, das quais huma contem os termos da outra aumentados ou diminuidos da meſma quantidade. Na raſaõ 5.9 tanto faz tirar 2 ao antecedente para ficar 3.9, como ajuntar 2 ao conſequente para ficar 5.11; e reciprocamente tanto faz ajuntar 2 ao antecedente para ficar 7.9, como tirar 2 ao conſequente para ficar 5.7.

E a meſma mudança, que ſe faz em huma raſaõ geometrica, multiplicando ou dividindo o antecedente por huma quantidade, ſe fará tam-

bem

bem dividindo ou multiplicando o consequente pela mesma quantidade; porque por ambas as operaçoens resultaõ duas rasoens, das quais huma he formada dos termos da outra multiplicados ou divididos por huma mesma quantidade. Na rasaõ 4:9 vale o mesmo dividir o antecedente por 2, que multiplicar o consequente pelo mesmo 2, pois sahiráõ as rasoens iguais 2:9 e 4:18; do mesmo modo multiplicando o antecedente por 3, ou dividindo o consequente pelo mesmo 3, resultaráõ as rasoens iguais 12:9, e 4:3. §§

172 Se quatro quantidades forem tais, que as duas primeiras tenhaõ a mesma rasaõ que as duas ultimas, formaráõ todas huma *proporçaõ*; e esta será arithmetica, ou geometrica, conforme forem as rasoens arithmeticas, ou geometricas.

Estas quatro quantidades 7, 9, 12, 14 formaõ huma proporçaõ arithmetica, porque entre as duas primeiras e as duas ultimas ha a mesma rasaõ de differença 2. Para denotar esta proporçaõ, assentaõ-se os quatro termos deste modo 7.9:12.14, ou tambem assim $7 - 9 = 12 - 14$; expressoens, pelas quais entendemos que 7 *he para* 9 *como he* (arithmeticamente) 12 *para* 14.

Estas quatro quantidades 3, 15, 4, 20 formaõ huma proporçaõ geometrica, porque 3 se contem em 15 tantas vezes, como 4 em 20. Para assim o darmos a entender, assentaremos os termos deste modo 3:15::4:20, ou $3:15 = 4:20$; expressoens, que querem dizer, que 3 *he para* 15 *como* 4 *he para* 20.

§§ Daqui se entenderá facilmente, que o producto de qualquer multiplicaçaõ he o quarto termo em proporçaõ geometrica a respeito da unidade e dos factores, isto he, *que a unidade he para hum dos factores, como o outro para o producto*; porque o producto contém tantas vezes hum dos

 fa-

factores, quantas o outro contém a unidade.

Do meſmo modo na diviſaõ, *a unidade he para o quociente, como o diviſor para o dividendo*; porque o dividendo he igual ao producto do diviſor multiplicado pelo quociente.

Deve notar-ſe que todas as raſoens geometricas ſaõ homogeneas, pois conſiſtem no quociente do antecedente dividido pelo conſequente, o qual quociente he ſempre numero abſtracto. Por iſſo, aindaque naõ póde haver raſaõ entre termos heterogeneos, póde com tudo haver proporçaõ, com tanto que cada hum dos antecedentes ſeja homogeneo com o ſeu conſequente. Aſſim 12 *toeſas* ſaõ para 3 *toeſas*, como 8 *libras* para 2 *libras*; porque ſem embargo de naõ ter comparaçaõ a *toeſa* com a *libra*, póde com tudo comparar-ſe a raſaõ de *toeſas* a *toeſas* com a raſaõ de *libras* a *libras*; pois quantas vezes ſe contém 3 *toeſas* em 12 *toeſas*, tantas ſe contém 2 *libras* em 8 *libras*, iſto he, *quatro vezes*.

173 O primeiro termo, e o quarto de huma proporçaõ, chamaõ-ſe *extremos*; o ſegundo e terceiro, *meios*.

Como na proporçaõ ha duas raſoens, e por conſeguinte dous antecedentes e dous conſequentes, aos termos da primeira chamamos *primeiro antecedente*, e *primeiro conſequente*, e aos da ſegunda *ſegundo antecedente*, e *ſegundo conſequente*.

174 Quando ſaõ iguais os meios de huma proporçaõ, eſta ſe chama *continua*.

Aſſim 3.7:7.11 he huma proporçaõ arithmetica continua, e o termo 7 he o *meio arithmetico* entre 3 e 11. Eſta proporçaõ ſe eſcreve por abbreviatura deſta maneira ÷ 3.7.11, denotando o final ÷ que o meio 7 faz juntamente as vezes de primeiro conſequente, e ſegundo antecedente.

Do meſmo modo 5:20::20:80 he huma proporçaõ

çaõ geometrica continua, e o termo 20 he o *meio geometrico proporcional* entre 5 e 80. Esta proporçaõ se escreve desta maneira ÷: 5:20:80, denotando tambem o sinal ÷: que o termo 20 se ha de tomar duas vezes.

175 Do que até agora temos dito sobre a proporçaõ tanto arithmetica, como geometrica, se segue:

1° Que se na proporçaõ arithmetica se ajuntar ou tirar aos antecedentes a differença que reina na proporçaõ, conforme elles forem menores ou maiores que os consequentes, cadahum ficará sendo igual ao seu consequente; pois he evidente, que deste modo se ajunta ao termo menor de cada rasaõ o que lhe falta para igualar o maior, ou se tira do maior o excesso que tem sobre o menor. Assim na proporçaõ 3.7:8.12, se ao primeiro e terceiro termo se ajuntar a differença 4, teremos 7.7:12.12.

2° Que se na proporçaõ geometrica se multiplicarem os consequentes pelo expoente da rasaõ, ficaráõ ambos iguaes aos seus antecedentes; porque multiplicar o consequente pelo expoente he tomallo tantas vezes, quantas se contém no antecedente. Assim na proporçaõ 12:3::20:5, multiplicando 3 e 5 pelo expoente 4, teremos 12:12::20:20; e na proporçaõ 15:9::45:27, multiplicando 9 e 27 pelo expoente $\frac{15}{9}$ ou $\frac{5}{3}$, teremos 15:15::45:45.

Propriedades das proporçoens arithmeticas.

176 A propriedade fundamental das proporçoens arithmeticas he, que *a soma dos extremos sempre he igual á soma dos meios.* Assim v. g. nesta

neſta proporçaõ 3.7:8.12 tanto os extremos 3 e 12 como os meios 7 e 8, fazem igualmente a ſoma de 15.

E com effeito ſe o primeiro termo for igual ao ſegundo, e o terceiro ao quarto, como na proporçaõ 7.7:12.12, he claro, que os extremos fazém huma ſoma igual á dos meios. Porém toda a proporçaõ arithmetica póde reduzir-ſe a eſta fórma, ajuntando ou tirando aos antecedentes a differença que reina na proporçaõ (n. 175. 1°.). Logo, como eſta addiçaõ ou ſubtracçaõ igualmente aumenta ou diminue a ſoma dos meios e dos extremos, e conſeguintemente naõ altéra a ſua igualdade ou deſigualdade, he evidente que ſahindo as ſomas iguais pela dita reducçaõ, já eraõ iguais antes della.

177 Como na proporçaõ continua o meio ſe toma duas vezes, a ſoma dos extremos ſerá dupla do meſmo meio. Aſſim na proporçaõ ÷ 7.11.15 a ſoma dos extremos 7 e 15 faz 22, que he o dobro de 11.

ʃʃ Reciprocamente: ſe quatro quantidades forem tais, que a ſoma das medias ſeja igual á das extremas, formaráõ huma proporçaõ arithmetica.

Porque para ſerem iguais as ditas ſomas, he neceſſario que quanto huma das medias excede a huma das extremas, tanto pela outra deſtas ſeja excedida a outra daquellas; e conſequentemente entre a primeira e ſegunda haverá a meſma differença que entre a terceira e quarta, como ſe requer para haver proporçaõ arithmetica.

Donde ſe ſegue, que tres quantidades eſtaráõ em proporçaõ continua todas as vezes que a media for igual á ametade da ſoma das extremas.

Sendo pois dados tres termos, acharemos o quar-

quarto arithmetico, ſomando o ſegundo com o terceiro, e diminuindo da ſoma o primeiro; dados dous termos, acharemos o terceiro em proporçaõ arithmetica continua, tirando o primeiro do dobro do ſegundo; e dados dous termos, acharemos o meio arithmetico, tomando ametade da ſoma delles.

Segue-ſe tambem, que em qualquer proporçaõ arithmetica podem os meios paſſar para extremos, e os extremos para meios; e que tanto os extremos, como os meios, podem trocar entre ſi o lugar, ficando ſempre em proporçaõ. Deſte modo a proporçaõ 3.7:8.12 pela permutaçaõ dos termos produz as proporçoens ſeguintes:

3. 7: 8.12
3. 8: 7.12
7. 3:12. 8
7.12: 3. 8
8. 3:12. 7
8.12: 3. 7
12. 7: 8. 3
12. 8: 7. 3

Do meſmo principio ſe entende facilmente que a proporçaõ arithmetica ſe conſervará, ajuntando ou tirando qualquer quantidade ao primeiro termo e juntamente ao terceiro, ou ao ſegundo e juntamente ao quarto. Aſſim na proporçaõ 3.7:8.12, ajuntando a ambos os antecedentes qualquer numero v. g. 6, e a ambos os conſequentes qualquer outro v. g. 9, conſervar-ſe-ha a proporçaõ 9.16:14.21.

Do meſmo modo, ſe os termos correſpondentes de duas ou mais proporçoens arithmeticas ſe ſomarem, ou diminuirem, as ſomas ou as differenças ficaráõ em proporçaõ. Aſſim ſomando as duas proporçoens 3.7:8.12 e 2.5:6.9 reſulta a pro-

por-

porçaõ 5.12::14.21 ; e diminuindo a ſegunda da primeira, a proporçaõ 1.2::2.3. ʃʃ

Propriedades das proporçoens geometricas.

178 A Propriedade fundamental das proporçoens geometricas he, que *o producto dos meios ſempre he igual ao producto dos extremos*; aſſim como na proporçaõ 3:15::7:35, tanto os extremos 3 e 35, como os meios 7 e 15, daõ igualmente o producto 105.

Porque he evidente, que o producto dos meios e dos extremos deve ſer o meſmo todas as vezes que cada hum dos antecedentes for igual ao ſeu conſequente. Porém toda a proporçaõ geometrica póde reduzir-ſe a eſta fórma, multiplicando ambos os conſequentes pelo expoente da raſaõ (n. 175. 2°.). Logo, como por eſta operaçaõ ambos os productos ſe multiplicaõ igualmente pelo expoente, he claro, que ſahindo iguais tambem eraõ iguais antes da dita multiplicaçaõ.

Logo na proporçaõ continua *he o producto dos extremos igual ao quadrado do meio*. Porque ſendo os dous meios iguais, o ſeu producto he o quadrado de qualquer delles.

Sendo pois dados dous numeros, acharemos o meio proporcional multiplicando hum pelo outro, e tirando a raiz quadrada do producto. Querendo v. g. achar o meio geometrico entre 4 e 9, multiplicaremos eſtes numeros, e do producto 36 tiraremos a raiz quadrada 6, e teremos ⸬ 4:6:9.

179 Dados os tres primeiros termos de huma proporçaõ geometrica, achar-ſe-ha o quarto, multiplicando o ſegundo pelo terceiro, e dividindo o producto pelo primeiro. Porque he manifeſto, que

que teriamos o quarto termo divdindo o producto dos extremos pelo primeiro (n. 74.); porém o producto dos extremos he igual ao dos meios (n. 178.): logo teremos igualmente o quarto termo, dividindo o producto dos meios pelo primeiro.

Pedindo-se v. g. o quarto termo da proporçaõ geometrica, cujos tres primeiros saõ 3:8::12, multiplicaremos 8 por 12, e partiremos por 3 o producto 96. O quociente 32 será o quarto proporcional, de sorte que teremos 3:8::12:32; e com effeito a primeira rasaõ he $\frac{3}{8}$, e a segunda $\frac{12}{32}$, que, dividindo-se ambos os termos por 4 (n. 89.), se reduz tambem a $\frac{3}{8}$.

Pelo mesmo raciocinio se vê claramente, que em geral se póde achar qualquer dos termos, dando-se os outros tres. *Buscando-se algum dos extremos, o producto dos meios se dividirá pelo extremo dado; e buscando-se algum dos meios, o producto dos extremos se dividirá pelo meio conhecido.*

180 Esta propriedade da igualdade dos productos dos meios, e dos extremos, naõ póde competir senaõ a quatro quantidades em proporçaõ geometrica. Porque naõ estando em proporçaõ, he evidente que multiplicando ambos os consequentes pela rasaõ dos dous primeiros termos, somente o primeiro antecedente ficará igual ao seu consequente, e por essa rasaõ naõ poderá ser o producto dos meios igual ao dos extremos.

Logo, *se quatro quantidades forem tais, que o producto das medias seja igual ao das extremas, estaraõ em proporçaõ geometrica.*

181 Donde se segue, *que a proporçaõ se conservará entre quatro quantidades, passando as medias para extremas, e as extremas para medias.*

182 O mesmo succederá, *se trocarmos o lugar das medias, ou tambem das extremas.* Porque de ambos os modos se conservará a igualdade sobredita dos productos.

Assim da proporçaõ 3:8::12:32 resultaõ pela unica permutaçaõ dos termos as proporçoens seguintes.

3: 8 :: 12:32
3:12 :: 8:32
8: 3 :: 32:12
8:32 :: 3:12
12: 3 :: 32: 8
12:32 :: 3: 8
32:12 :: 8: 3
32: 8 :: 12: 3

A segunda destas se diz resultar da primeira *alternando*, a terceira *invertendo*, a quarta *invertendo e alternando*, a quinta *alternando, e invertendo*, a sexta *transpondo*, a setima *transpondo e invertendo*, a oitava finalmente *transpondo invertendo e alternando.*

183 Como o terceiro termo de huma proporçaõ póde passar para o lugar do segundo, e reciprocamente; segue-se, *que a proporçaõ se ha de conservar, todas as vezes que ambos os antecedentes, ou ambos os consequentes se multiplicarem, ou dividirem juntamente por huma mesma quantidade.*

Porque mudados os termos, os que eraõ antecedentes formaõ a primeira rasaõ, e os consequentes a segunda. Peloque multiplicar, ou dividir ambos os antecedentes, ou ambos os consequentes por huma quantidade, vem a ser o mesmo que multiplicar, ou dividir os dous termos de huma rasaõ pela mesma quantidade; operaçaõ que lhe naõ altéra o valor (n. 170.).

Dada v. g. a proporçaõ 3:7 :: 12:28, dividindo ambos os antecedentes por 3 podemos inferir que

1:7::

1:7::4:28; porque da primeira proporçaõ teremos *alternando* 3:12::7:28 (n. 182.), e dividindo os termos da primeira rasaõ por 3 (n. 170.) teremos 1:4::7:28; e *alternando* outra vez 1:7::4:28 (n. 182)

184 *Se em qualquer proporçaõ geometrica a soma do antecedente e consequente, ou a sua differença, se comparar com o antecedente, ou com o consequente em ambas as rasoens do mesmo modo, o resultado formará huma proporçaõ.*

Porque se a soma, ou a differença referida, se comparar com o consequente, he vizivel, que ajuntando ou tirando o consequente ao antecedente, este o deverá conter mais ou menos huma vez do que antes o continha; e como esta mudança se faz igualmente na segunda rasaõ, que pela natureza da proporçaõ he igual á primeira, seráõ necessariamente iguais as novas rasoens que assim resultaõ. O mesmo raciocinio terá lugar, quando se comparar a dita soma ou differença com o antecedente, considerando primeiro os antecedentes mudados para o lugar dos consequentes, e reciprocamente (n. 181.).

Dando-se v. g. a proporçaõ 12:3::32:8, della poderemos inferir outras quatro proporçoens, como aqui se mostraõ, nas quais o sinal + quer dizer *mais*, e o sinal — *menos*.

$$12 : 3 :: 32 : 8$$

$$\begin{array}{l} 12+3:3::32+8:8 \\ 12+3:12::32+8:32 \\ 12-3:3::32-8:8 \\ 12-3:12::32-8:32 \end{array}$$

A primeira destas se diz resultar da proporçaõ primitiva *compondo*, ou por *composiçaõ de rasaõ*, a segunda *por composiçaõ inversa de rasaõ*,

a

a terceira *dividindo* ou *por divisaõ de rasaõ*, e a quarta *por divisaõ inversa*, ou *por conversaõ de rasaõ.*

185 Donde se collige, *que em toda a proporçaõ geometrica a soma ou differença dos antecedentes he para a soma ou differença dos consequentes, como qualquer antecedente para o seu consequente.*

Assim da proporçaõ 12:3::32:8 resultaõ as duas proporçoens seguintes:

$$12+32:3+8::12:3$$
$$32-12:8-3::12:3$$

Porque *alternando* teremos 12:32 :: 3:8 (n. 182), e desta pela *composiçaõ* e *divisaõ inversa de rasaõ* resultaráõ as duas proporçoens 12+32:12::3+8:3, e 32−12:12::8−3:3 (n. 184.), as quais alternando outra vez se convertem em 12+32:3+8::12:3, e 32−12:8−3::12:3 (n. 182.).

186 Logo, *Sendo dado qualquer numero de rasoens iguais, será a soma de todos os antecedentes para a soma de todos os consequentes, como qualquer antecedente para o seu consequente.* Por exemplo, sendo iguais as rasoens 4:12 :: 7:21 :: 2:6 teremos tambem 4+7+2:12+21+6 :: 4:12:: 7:21 &c.

Porque tomando as duas primeiras 4:12::7:21, teremos 4+7:12+21::4:12 (n. 185.), ou (pela rasaõ de ser 4:12::2:6) 4+7:12+21::2:6; esta proporçaõ dará outra vez 4+7+2:12+21+6::2:6 (n. 185.), e assim por diante.

187 *Rasaõ composta* he a que se forma de duas ou mais rasoens, multiplicando entre si os antecedentes, e da mesma sorte os consequentes. Dando-se v. g. as rasoens 12:4 e 25:5, o producto dos antecedentes será 300, e dos consequentes 20; e assim 300:20 será a rasaõ composta das duas rasoens 12:4 e 25:5.

188 Como qualquer rasaõ se avalia pelo quociente do antecedente dividido pelo consequente,

e

è conſeguintemente por huma fracçaõ que tenha o antecedente por numerador, e o conſequente por denominador (n. 168.,) he claro, que a raſaõ compoſta ſe fórma pela multiplicaçaõ das fracçoens, que expoem o valor das raſoens componentes (n. 106.). Aſſim exprimindo-ſe a raſaõ 12:4 por $\frac{12}{4}$ ou por 3, e a raſaõ 25:5 por $\frac{25}{5}$ ou por 5; a raſaõ compoſta dellas 300:20 ſe exprime por $\frac{300}{20}$, ou por 15, que he o producto dos exponentes das raſoens 12:4 e 25:5.

189 A raſaõ compoſta de duas iguais chama-ſe *raſaõ duplicada* de qualquer dellas; ſendo compoſta de tres, *triplicada*; de quatro *quadruplicada &c*; e qualquer das raſoens iguais componentes ſerá no primeiro caſo *ſubduplicada* da raſaõ compoſta, no ſegundo *ſubtriplicada &c.* Dadas v. g. as raſoens iguais 2:3 e 4:6, a que dellas ſe compoem 8:18 ſerá raſaõ duplicada de 2:3 ou de 4:6; e qualquer deſtas raſaõ ſubduplicada de 8:18.

190 *Se duas proporçoens ſe multiplicarem ordenadamente, iſto he, ſe o primeiro termo de huma ſe multiplicar pelo primeiro da outra, o ſegundo pelo ſegundo &c, os quatro productos que reſultarem eſtaráõ em proporçaõ.*

Porque multiplicar as duas proporçoens deſta maneira, he multiplicar duas raſoens iguais por outras duas iguais (n. 172.); logo as duas raſoens compoſtas que reſultaõ ſaõ iguais; logo os quatro productos formaõ huma proporçaõ (n. 172.).

191 Donde ſe ſegue, *que os quadrados, cubos, e em geral as potencias ſemelhantes de quatro quantidades proporcionais, ſaõ tambem entre ſi proporcionais*; porque para formar as ditas potencias, naõ he neceſſario mais do que multiplicar a pro-

por-

porçaõ dada por ſi meſma huma, duas &c vezes conſecutivamente.

192 Do meſmo modo, *as raizes quadradas, cubicas*, e geralmente *as raizes ſemelhantes de quatro quantidades proporcionais, tambem ſaõ proporcionais.* Porque deſte modo naõ ſe faz outra couſa, ſenaõ tirar raizes ſemelhantes de raſoens iguais (n. 142. 157. 168.); logo as novas raſoens que reſultaõ ſeráõ iguais; e por conſeguinte as ditas raizes proporcionais (n. 172.).

Uſo das propoſiçoens antecedentes.

193 AS propoſiçoens que acabamos de moſtrar, e que ſe chamaõ *Regras das proporçoens*, tem hum uſo continuo em todas as partes da Mathematica. Porém aqui ſomente tocaremos o que pertence á Arithmetica, principiando pelo uſo da propoſiçaõ aſſima demonſtrada (n. 179.), que ſerve de fundamento a tudo o mais.

Da Regra de tres directa, e ſimples.

194 A Regra de *tres*, que pelo ſeu grande uſo ſe chama tambem *Regra aurea*, divide-ſe em muitas eſpecies, as quais todas tem por objecto achar hum termo de huma proporçaõ por meio dos outros tres.

A que ſe chama *regra de tres directa e ſimples*, tem o nome de *ſimples*, e na linguagem dos noſſos autores antigos de *cham*, porque a propoſta das queſtoens a que ſe applica naõ involve mais do que quatro quantidades, das quais ſe daõ tres, e ſe pergunta a quarta,

Chama-ſe tambem *directa*, porque das quatro quantidades que nella ſe conſideraõ ha duas principais homogeneas entre ſi, cadahuma das quais de-

determina huma das outras de tal modo, que como a primeira daquellas contem ou he contida na ſegunda, aſſim a que depende da primeira contenha, ou ſeja contida na que depende da ſegunda. Iſto ſe verificarà todas as vezes que huma das quantidades principais com a que della depende occuparem juntamente o lugar de antecedentes, ou de conſequentes; o que naõ póde ter lugar na *regra de tres inverſa*, como depois moſtraremos.

O methodo de achar o quarto termo de huma proporçaõ, e de practicar conſeguintemente a *regra de tres directa e ſimples*, ja fica ſufficientemente declarado (n. 179.); falta moſtrar o uſo deſta regra por meio de alguns exemplos.

Exemplo I.

SE 40 obreiros em hum tempo certo tem feito 268 *toeſas* de obra, quantas *toeſas* faraõ 60 obreiros no meſmo tempo?

Pelo meſmo teor da queſtaõ ſe vê, que os dous numeros de obreiros 40 e 60 ſaõ os termos principais, e que a obra de 268T he relativa ao primeiro, e a que ſe buſca relativa ao ſegundo. Tambem he manifeſto, que a obra ha de creſcer na raſaõ dos obreiros, de ſorte que o duplo, triplo, quadruplo &c numero delles, deve produzir huma obra, dupla, tripla, quadrupla &c. dentro do meſmo tempo; e conſeguintemente, que o numero pedido de *toeſas* deve conter o numero dado de 268 *toeſas*, como o numero dos obreiros que as haõ de fazer contém o numero dos obreiros relativo ás 268 *toeſas*. Pelo que deveráõ os termos heterogeneos reſpectivos occupar juntamente o lugar de antecedentes, ou de conſequentes, o que moſtra ſer a proporçaõ dire-

cta

cta. Buscar-se-ha pois o quarto proporcional aos tres termos seguintes --------------------

$$40:60::268^{T}:$$

ou, dividindo os termos da primeira rasaõ por 20 (n. 170.), aos tres seguintes -----------

$$2:3::268^{T}:$$

Por tanto (n. 179.) multiplicaremos 268^{T} por 3, e partiremos o producto 804^{T} por 2; o quociente 402^{T} será o quarto termo, isto he, a obra que faraõ 60 obreiros trabalhando tanto tempo e com tanta diligencia como os outros 40 que fizeraõ 268^{T}.

Exemplo II.

HUma náo com vento uniforme caminhou 275 leguas em 3 dias. Pergunta-se, em quantos dias caminhará 2000 legoas, continuando o vento e todas as mais circunstancias do mesmo modo?

He claro, que nesta questaõ se requer tanto mais tempo, quanto mais forem as leguas que se haõ de andar; e conseguintemente, que o tempo que se busca deve conter tantas vezes 3 dias quantas o numero das leguas que lhe saõ respectivas contém as leguas respectivas aos 3 dias. Buscar-se-ha pois o quarto proporcional aos tres termos seguintes -------------------

$$275:2000::3^{d}.$$

Pelo que multiplicaremos 3d por 2000; e dividindo o producto 6000^{d} por 275, teremos o quociente $21^{d}\ \frac{9}{11}$, que he o tempo que se requer para navegar 2000 leguas segundo as condiçoens da questaõ.

Exemplo III.

PAgando-se $168^{lb}\ 9^{s}\ 4^{d}$ por $52^{T}\ 4^{P}\ 5^{P}$ de obra; pergunta-se quanto se deve pagar por $77^{T}\ 1^{P}\ 8^{P}$?

Pe-

Pela mesma questaõ se vê, que o preço relativo a $77^T\ 1^P\ 8^P$ deve conter tantas vezes o preço relativo a $52^T\ 4^P\ 5^P$, quantas o numero $77^T\ 1^P\ 8^P$ contém o numero $52^T\ 4^P\ 5^P$. Buscar-se-há pois o quarto proporcional aos tres termos seguintes -

$$52^T\ 4^P\ 5^P : 77^T\ 1^P\ 8^P :: 168^{lb}\ 9^{s}\ 4^{d}:$$

Isto se poderá fazer, multiplicando $168^{lb}\ 9^{s}\ 4^{d}$ por $77^T\ 1^P\ 8^P$, e dividindo o producto por $52^T\ 4^P\ 5^P$, conforme as regras dadas para o calculo destes numeros (n. 122. 128.).

Porém será mais facil o reduzir os dous termos da primeira rasaõ á sua infima especie de *pollegadas*; e a questaõ se reduzirá a buscar o quarto termo da proporçaõ seguinte - - - - - - - -

$$3797 : 5564 :: 168^{lb}\ 9^{s}\ 4^{d}:$$

Entaõ multiplicando $168^{lb}\ 9^{s}\ 4^{d}$ por 5564 teremos o producto $93734 8^{lb}\ 10^{s}\ 8^{d}$; e dividindo este por 3797, o quociente $246^{lb}\ 17^{s}\ 3^{d}\ \frac{2789}{3797}$ será o que deve pagar-se por $77^T\ 1^P\ 8^P$.

Havendo além disso fracçoens nos mesmos termos, depois de reduzidos á infima especie como neste exemplo, a sua rasaõ se simplificará do modo que assima mostramos (n. 171.).

Da Regra de tres inversa e simples.

195 A Regra de tres simples e inversa, ou reciproca he, quando o termo pedido deve ter para o seu homogeneo dado a mesma rasaõ que tem o relativo deste para o relativo daquelle; e nisto consiste a ordem inversa, porque na regra directa o termo pedido deve ter para o seu homogeneo a mesma rasaõ que tem o relativo daquelle para o deste. Pelo que na regra inversa sendo os termos dispostos como convem, huma

ma das quantidades principais com a sua relativa teráõ o lugar dos meios, e a outra com a sua o lugar dos extremos.

Ordenados porém os termos na fórma conveniente á natureza da questaõ, a operaçaõ se pratica como a precedente, buscando o quarto proporcional aos tres termos dados.

Exemplo I.

SE 30 obreiros fazem certa obra em 25 dias, quantos obreiros saõ necessarios para fazerem a mesma obra em 10 dias?

Reflectindo na questaõ logo vemos que devem ser tanto mais os obreiros quanto forem menos os dias. Pelo que o numero pedido dos obreiros deverá conter o seu homogeneo (30 obreiros), como o relativo deste (25 dias) contém o relativo daquelle (10 dias). Buscar-se-há pois o quarto proporcional aos tres termos seguintes -

$$10^{d} : 25^{d} :: 30^{obr}:$$

E multiplicando o segundo pelo terceiro, e dividindo o producto pelo primeiro acharemos 75, que he o numero dos obreiros da questaõ.

Exemplo II.

TEndo a equipagem de huma náo mantimento para 15 dias, e restando-lhe huma viagem de 20 dias, pergunta-se como se devem reduzir as raçoens por dia?

Tomando a raçaõ costumada por unidade, he claro, que a raçaõ que buscamos deve ser tanto menor que a unidade, quanto he maior o numero de 20 dias que o de 15 dias; e por conseguinte buscaremos o quarto proporcional aos tres termos se-

ſeguintes -

$$20^d : 15^d :: 1 :$$

O qual acharemos ſer $\frac{15}{20}$, ou $\frac{3}{4}$; e aſſim diremos que cada peſſoa ſe deve reduzir a tres quartos da raçaõ que houvera de ter, ſe reſtaſſem ſómente 15 dias de viagem.

Da Regra de tres compoſta.

196 NA Regra de tres compoſta a raſaõ da quantidade que ſe buſca para a ſua homogenea naõ ſe determina por meio da raſaõ ſimples de outras duas quantidades, como nas regras antecedentes, mas por meio de muitas raſoens ſimples, as quais ſe devem compôr (n. 187) conforme pedir o eſtado da queſtaõ. Sendo eſtas compoſtas, a queſtaõ ſe reduz á regra de tres ſimples, como ſe moſtra nos exemplos ſeguintes.

Exemplo I.

SE 30 jornaleiros fazem 132 *toeſas* de obra em 18 dias, 54 jornaleiros quantas *toeſas* faráõ em 28 dias?

He manifeſto, que a obra da queſtaõ depende naõ ſómente do numero dos jornaleiros, mas tambem dos dias. Para ſe attender a hum e outro, he neceſſario reflectir que 30 jornaleiros em 18 dias fazem o meſmo que 18 vezes 30, ou 540 jornaleiros em hum dia; e do meſmo modo, que 54 jornaleiros em 28 dias fazem tanto como 1512 jornaleiros em hum dia. Pelo que a queſtaõ ſe reduz a eſta: Se 540 jornaleiros fazem 132 toeſas de obra, quantas toeſas faraõ 1512 jornaleiros? e por conſeguinte buſcaremos o quarto termo deſta proporçaõ -

 540;

$540 : 1512 :: 132^T :$.

E multiplicando o ſegundo termo pelo terceiro; e dividindo o producto pelo primeiro, ſerá o numero pedido $369^T\ 3^p\ 7^p\ 2^d\ \frac{2}{5}$.

Exemplo II.

HUm caminheiro andando 7 horas por dia fez huma jornada de 230 legoas em 30 dias. Pergunta-ſe, em quantos dias andará 600 legoas, caminhando 10 horas por dia com a meſma velocidade?

Se o numero das horas foſſe o meſmo em ambos os caſos, he viſivel, que o tempo pedido deveria ſer tanto maior, quanto he maior a diſtancia relativa que ſe propoem; mas caminhando mais horas por dia no ſegundo caſo, por eſta raſaõ deverá ſer o tempo menor; e por conſeguinte a queſtaõ depende da regra de tres directa e inverſa ſimultaneamente. Reduzir-ſe-ha porém a huma regra ſimples, ſe reflectirmos que andar 30 dias a 7 horas por dia he fazer 210 horas effectivas de jornada. Aſſim a queſtaõ ſe reduzirá a eſtes termos: Se em 210 horas andou hum caminheiro 230 leguas, em quantas horas andará 600 leguas? O numero das horas, que ſatisfizer a eſta queſtaõ ſe partirá por 10, viſto andar o caminheiro 10 horas por dia, e o quociente ſerá o numero dos dias que ſe pergunta. Aſſim buſcaremos o quarto termo proporcional aos tres ſeguintes -

$$230^l : 600^l :: 210^h$$

O qual acharemos ſer $547^h\ \frac{19}{23}$, e dividindo-o por 10, ſerá o numero dos dias $54\ \frac{18}{23}$.

Da Regra de Companhia.

197 ESta Regra tomou o nome das Companhias de negocio, nas quais tem grande uso, quando se trata de repartir pelos companheiros o ganho ou a perda, conforme as entradas de cada hum. Porém o seu objecto em geral he dividir hum numero dado em partes, que tenhaõ entre si huma rasaõ dada. O methodo, que para isto se dá, funda-se no principio que assima fica demonstrado (n. 186.), como se verá no exemplo seguinte.

Exemplo I.

DA-se o numero 120 para ser distribuido em tres partes tais, que sejaõ entre si como os numeros dados 4, 3, 2.

Pelo teor da questaõ se offerecem immediatamente estas duas proporçoens. Que 4 he para 3 como a 1ª parte que se busca he para a 2ª, e que 4 he para 2 como a 1ª parte he para a terceira; isto he (n. 182.), Que 4 he para a 1ª parte como 3 para a 2ª, e 4 para a 1ª como 2 para a 3ª; pelo que temos tres rasoens iguais, a saber: 4 para a 1ª parte como 3 para a 2ª, e como 2 para a 3ª.

Porém temos mostrado (n. 186.), que em qualquer numero de rasoens iguais á soma dos antecedentes he para a dos consequentes, como qualquer dos antecedentes para o seu consequente; logo no exemplo figurado será a soma 9 das partes dadas para a soma 120 das partes que se pedem, como qualquer das partes dadas para a sua relativa que se busca.

Pelo que a Regra de Companhia em geral se reduz a praticar a regra de tres tantas vezes, quantas saõ as partes que se buscaõ, tomando sempre por primeiro termo a soma das partes dadas, por se-

gun-

gundo o numero que ſe quer diſtribuir, e por terceiro a parte dada que he relativa á que actualmente ſe buſca. Aſſim na queſtaõ propoſta deveráõ completar ſe as proporçoens ſeguintes - - - - - - - - - - -

9 : 120 : : 4 :
9 : 120 : : 3 :
9 : 120 : : 2 :

E na primeira acharemos que o quarto termo he $53\frac{1}{3}$, na ſegunda 40, e na terceira $26\frac{2}{3}$ (num. 179), os quais juntos fazem a ſoma de 120, e ſaõ entre ſi como as partes dadas 4, 3, 2.

§§ Eſta Regra ſe executará com mais brevidade, *partindo o numero propoſto pela ſoma das partes dadas, e multiplicando depois o quociente por cada huma das meſmas partes.* Porque em qualquer regra de tres tanto ſe acha o quarto termo, multiplicando o ſegundo pelo terceiro e dividindo o producto pelo primeiro, como dividindo o ſegundo pelo primeiro e multiplicando o quociente pelo terceiro. E como na Regra de Companhia o primeiro e ſegundo termo ſaõ ſempre os meſmos, huma ſó diviſaõ baſta para reſolver todas as regras de tres, que nella forem neceſſarias.

Aſſim no meſmo Exemplo, partindo 120 por 9 teremos o quociente $13\frac{1}{3}$, e multiplicando eſte ſucceſſivamente por 4, 3, 2, acharemos as partes relativas que lhes correſpondem $53\frac{1}{3}$, 40, e $26\frac{2}{3}$. §§

De qualquer modo que ſe pratique, naõ he neceſſario buſcar a ultima parte. Baſta tirar do numero propoſto a ſoma das outras, porque o reſto ſerá conſeguintemente a ultima que falta.

Ex-

Exemplo II.

A Preza de hum navio avaliada em 800000 *libras* deve ſer diſtribuida por tres companheiros, dos quais o primeiro entrou com 120000, o ſegundo com 60000, e o terceiro com 20000 *libras*. Pergunta-ſe a parte de cadahum.

Temos pois o numero 800000^{lb} para ſer partido em tres partes, que guardem entre ſi a raſaõ dos numeros 120000, 60000, 20000, ou (n. 170.) dos numeros 12, 6, 2, porque a parte de cadahum deve ſer proporcional á ſua entrada. Aſſim com a ſoma 20 dos numeros 12, 6, 2, armaremos as tres proporçoens ſeguintes.

$$20 : 800000^{lb} :: 12 :$$
$$20 : 800000^{lb} :: 6 :$$
$$20 : 800000^{lb} :: 2 :$$

E acharemos, que a parte do primeiro he 480000^{lb}, do ſegundo 240000^{lb}, e do terceiro 80000^{lb}.

Exemplo III.

HUma Companhia de tres nogoçiantes ganhou 12050 *libras*, tendo entrado nella o primeiro com 3000^{lb} por 6 mezes, o ſegundo com 4000^{lb} por 5 mezes, e o terceiro com 8000^{lb} por 9 mezes; Quanto deve ter cada hum?

Eſte caſo contém huma Regra de Sociedade compoſta, e eſta ſe reduz facilmente á ſimples. Porque a entrada do primeiro 3000^{lb} por 6 mezes vale o meſmo que 6 vezes 3000^{lb}, ou 18000^{lb} por hum mez; e do meſmo modo as entradas do ſegundo, e terceiro, valem o meſmo que 20000^{lb}, e 72000^{lb} pelo meſmo tempo de hum mez. Feita eſta reducçaõ, naõ ha mais do que partir o numero 12050^{lb} em tres partes proporcionais ás entradas reduzidas 18000^{lb}, 20000^{lb}, 72000^{lb}; e praticando como no

ex-

exemplo precedente acharemos, que deve ter o primeiro 1971^{lb} 16^{s} 4^{d} $\frac{4}{11}$, o segundo 2190^{lb} 18^{s} 2^{d} $\frac{2}{11}$, e o terceiro 7887^{lb} 5^{s} 5^{d} $\frac{5}{11}$.

198 A' mesma Regra de Companhia se reduzem muitas outras questoens, precedendo a preparaçaõ necessaria, como nos exemplos seguintes.

Dando se o numero 650 para ser distribuido em tres partes tais, que a primeira seja para a segunda como 5 para 4, e para a terceira como 7 para 3, naõ poderemos immediatamente praticar a Regra, por naõ terem as duas rasoens dadas 5:4 e 7:3 o primeiro termo commum. Mas a essa fórma se reduziráõ, sem perderem o valor, multiplicando ambos os termos de cadahuma pelo primeiro da outra (n. 170.). Assim resultaráõ as rasoens equivalentes 35 : 28 e 35 : 15, e a questaõ será reduzida a partir o numero 650 em tres partes proporcionais aos numeros 35, 28, 15, segundo a Regra assima dada.

Se o numero houvesse de partir-se em quatro partes, de sorte que a primeira fosse para a segunda como 5 para 4, para a terceira como 9 para 5, e para a quarta como 7 para 3, estas rasoens se reduziriaõ a ter o primeiro termo commum, multiplicando ambos os termos de cadahuma pelo producto dos primeiros termos de todas as outras. Donde teriamos as rasoens equivalentes 315 : 252, 315:175, 315: 135, e a questaõ seria reduzida a partir o numero proposto em quatro partes proporcionais aos numeros 315, 252, 175, e 135.

Da Regra de Falsa Posiçaõ.

199 USa-se desta Regra, quando em lugar do numero, que buscamos, substituimos outro qualquer, e procedendo com elle conforme o teór

da

da questaõ, comparamos o resultado com o que devia sahir, para dahi virmos no conhecimento do verdadeiro numero, que satisfaz à mesma questaõ. Chama-se simples, quando basta fazer huma só hypothese; composta, quando saõ necessarias duas.

A simples pratica-se por huma regra de tres, na qual *serve de primeiro termo o numero que resultou da hypothese conforme as condiçoens da questaõ, de segundo o numero que devia resultar, e de terceiro a mesma hypothese.* E por isso só póde usar-se esta regra nas questoens, em que o numero que se busca he para o numero dado que delle resulta, como qualquer outro para o que delle ha de resultar da mesma maneira; circunstancias, que devem conhecer-se pela natureza da questaõ: e quando naõ, póde tentar-se a Regra, e depois fazendo experiencia do numero achado se conhecerá, se com effeito satisfaz á questaõ.

Exemplo.

PErgunta-se o numero, cujo terço, quinto, e tres septimos façaõ juntamente 808.

Para evitarmos quebrados, podemos escolher para hypothese hum numero que tenha as partes aliquotas 3,5,7, o qual acharemos multiplicando entre si estes tres numeros, que daõ o producto 105. Tomando pois o numero 105 por hypothese, buscaremos o seu terço 35, o seu quinto 21, e tres septimos 45. Se a soma destes fizesse 808, o mesmo numero da hypothese seria o que buscamos; porém como a soma faz 101, buscaremos o quarto proporcional aos tres termos seguintes -

101 : 808 : : 105 :

E acharemos o numero 840, que satisfaz á questaõ.

A Regra de duas posiçoens he mais geral, pois naõ sómente por ella se resolvem todas as ques-

to-

toens da Regra ſimples, mas tambem muitas outros que eſtaõ fóra do alcance daquella. Pratica-ſe deſta maneira.

Em lugar do numero que ſe buſca toma-ſe arbitrariamente qualquer por hypotheſe, e conforme a queſtaõ ſe examina o que delle reſulta; depois toma-ſe outro qualquer, e ſe nota tambem o que delle reſulta. Entaõ ſe faz eſta proporçaõ: *Como a differença dos reſultados das duas hypotheſes, para a differença entre o reſultado da primeira hypotheſe e o verdadeiro reſultado que devia ſahir, aſſim a differença das hypotheſes para hum quarto.* Eſte ſe ajuntará ou tirará á primeira hypotheſe, conforme ella produzio menos, ou mais do que devia ſer, e iſto no caſo de que creſcendo a hypotheſe creſça tambem o reſultado; ſendo ao contrario, o numero achado ſe ajuntará ou diminuirá conforme a meſma hypotheſe tiver produzido mais ou menos do que convinha. Como qualquer das hypotheſes ſe póde tomar como primeira, he claro que de dous modos differentes ſe póde achar o que ſe buſca.

Exemplo.

TRes negociantes ganharaõ 6954^{lb}. O ſegundo teve mais que o primeiro 54^{lb}, e o terceiro mais que os outros dous 78^{lb}. Pergunta-ſe o lucro de cadahum.

Supponhamos para mais facilidade que o lucro do primeiro foi 1^{lb}. Logo conforme a queſtaõ ſeria o lucro do ſegundo $1^{lb} + 54^{lb}$, ou 55^{lb}, e do terceiro $1^{lb} + 55^{lb} + 78^{lb}$, ou 134^{lb}, os quais ſomados daõ 190^{lb}.

Supponhamos outra vez que o lucro do primeiro foi 2^{lb}, e teremos para o ſegundo 56^{lb}, e para o terceiro 136^{lb}, cuja ſoma dá 194^{lb}.

Aſſim das duas hypotheſes 1^{lb} e 2^{lb} temos os reſulſultados 190^{lb} e 194^{lb}, devendo ſahir 6954^{lb}. A differença entre os reſultados das duas hypotheſes he 4^{lb} entre o reſultado da primeira hypotheſe ao que devia reſultar he 6764^{lb}, e entre as duas hypotheſes he 1^{lb}. Pelo que buſcaremos o quarto proporcional aos tres termos ſeguintes - - - - - -

$$4 : 6764 :: 1^{lb} :$$

que acharemos ſer 1691^{lb}, e ajuntando-o á primeira hypotheſe 1^{lb} teremos o ganho do primeiro 1692^{lb}, e por conſeguinte o do ſegundo 1746^{lb}, e o do terceiro 3516^{lb} que fazem com effeito a ſoma de 6954^{lb}, e ſatisfazem ás mais condiçoens da queſtaõ.

He claro, que eſta Règra naõ póde ter lugar ſenaõ nas queſtoens, em que a differença das hypotheſes he conſtantemente proporcional á differença dos reſultados que ellas produzem, ſegundo o teor das meſmas queſtoens. Quando porém as hypotheſes ſe tomaõ proximas ao numero que ſe buſca, em todas as queſtoens tem lugar proximamente a dita proporcionalidade; e por iſſo eſta Regra tem grande uſo na reſoluçaõ das equaçoens de grão ſuperior, e de muitas outras queſtoens em toda a Mathematica.

Se foſſem duas as quantidades que ſe perguntaõ, ſeriaõ neceſſarias tres hypotheſes. Porque em primeiro lugar ſe deveriaõ ſuppôr duas quaiſquer quantidades em lugar dellas, depois conſervando a primeira ſe aumentaria ou diminuiria arbitrariamente a ſegunda, e finalmente conſervando a ſegunda ſe faria mudança na primeira. Do meſmo modo ſe moſtra, que ſeriaõ neceſſarias quatro poſiçoens, ſe foſſem tres as quantidades, e aſſim por diante. Para eſtes caſos ſeria couza muito embaraçada o preſcrever regras arithmeticas, quando por outra parte ſe póde com muita facilidade e ſegurança dirigir o calculo por meio da Algebra.

Da

Da Regra de Liga.

200 ESta regra tem por objecto a mistura das cousas de differente valor; e he de dous modos: Directa, quando se daõ as quantidades que se haõ de misturar, com o valor de cadahuma, e se pergunta o valor do misto que resulta; Inversa, quando se dá o valor das cousas que se haõ de misturar, e se pergunta a porçaõ que de cada huma se deve tomar, para que o misto seja de hum preço dado.

A primeira executa-se deste modo: *Cada huma das quantidades se multiplica pelo seu valor, a soma dos productos se divide pelo numero das quantidades, e o quociente he o valor que se busca.*

Exemplo.

QUerendo ligar 5 marcos de ouro de 24 quilates com 8 de 21, e 6 de 17; pergunta-se o quilate a que se reduz o composto.

Multipliquem-se os 5 marcos pelos seus respectivos quilates 24, e daraõ o producto 120; do mesmo modo multipliquem se os 8 marcos por 21, e os 6 por 17, e daraõ os productos 168, e 102. A soma de todos tres faz 390, a qual sendo dividida pela soma total dos marcos 19 dá no quociente $20\frac{10}{19}$; e estes saõ os quilates do composto.

Na Regra inversa, quando sómente duas cousas se haõ de ligar a hum preço dado entre os preços dellas, praticar-se-haõ estas duas proporçoens. *Como a differença entre os preços dos simplices para a differença entre os preços do composto e do simples de menor valor, assim a quantidade do composto para a parte que deve ter do simples de maior valor.* Depois: *Como a differença entre os preços dos*

dos ſimplices para a differença entre os preços do compoſto e do ſimples de maior valor, aſſim a quantidade do compoſto para a parte que deve levar do ſimples de menor valor.

Exemplo.

Hum Ourives quer fazer huma obra que tenha de pezo 8 marcos, e ſeja de 20 quilates e $\frac{1}{2}$ conforme a Lei; e para iſſo quer ligar duas eſpecies de ouro, hum de 22 quilates, outro de 17. Pergunta-ſe quanto deve tomar de cada hum.

Tome-ſe a differença entre os quilates das eſpecies dadas 22 e 17, que he 5, e as differenças entre o quilate propoſto 20 $\frac{1}{2}$ e cada hum dos outros, que ſaõ 3 $\frac{1}{2}$, e 1 $\frac{1}{2}$; e buſque-ſe o quarto termo nas duas proporçoens ſeguintes - - -

$$5 : 3\tfrac{1}{2} :: 8 : \qquad\qquad 10 : 7 :: 8 :$$
$$5 : 1\tfrac{1}{2} :: 8 : \text{ ou (n. 171.) } 10 : 3 :: 8 :$$

A primeira das quais dará 5 $\frac{3}{5}$, iſto he 5 marc. 4 onç. 6 oitav. 1 ſcrup. 4 gr. e $\frac{4}{5}$, que he a parte do ouro de 22 quilates, e a ſegunda dará 2 $\frac{2}{5}$, ou 2 marc. 3 onç. 1 oitav. 1 eſcrup. 19 gr. e $\frac{1}{5}$, que he a parte que ſe deve tomar do ouro de 17 quilates.

Quando ſe haõ de ligar mais do que duas eſpecies de diverſo valor, primeiramente ſe ligaráõ pela Regra directa todas as que forem de maior valor que o compoſto que ſe pertende fazer, tomando de cada huma dellas arbitrariamente a porçaõ que

que melhor parecer, e ſe buſcará o preço deſte compoſto. O meſmo ſe praticará com todas as eſpecies de menor valor que o intermedio dado. E deſte modo ficaráõ as eſpecies reduzidas a duas, huma de valor maior, e outra de menor que o propoſto, as quais ſe ligaráõ como no caſo precedente, e achando-ſe a porçaõ que de cadahuma ſe deve tomar, tambem conſtaráõ as partes dos ſimplices, de que arbitrariamente as compuzémos.

Exemplo.

DAõ-ſe quatro qualidades de vinho, o primeiro dos quais vale a 120 reis a medida, o ſegundo a 90, o terceiro a 60, e o quarto a 50, e delle ſe quer fazer huma miſtura que valha a 70 reis a medida.

Primeiramente miſturaremos os dous de maior valor que o propoſto, tomando de cadahum as partes que melhor nos parecer, v. gr. duas medidas do que vale a 120, e tres do que vale a 90, e acharemos que o todo aſſim compoſto valerá a raſaõ de 102 a medida Depois ſupporemos tambem miſturados os outros dous, tomando igualmente de cadahum as partes que nos parecer, v. gr duas partes do que vale a 60 e tres do que vale a 50, e acharemos que o preço do miſto ſerá a 54. Aſſim teremos duas qualidades de vinho, hum que vale a 102, e outro que vale a 54, para ſerem miſturados de ſorte que o compoſto valha a 70. E praticando como no exemplo precedente acharemos, que do primeiro deveremos tomar huma porçaõ como $\frac{1}{3}$, e do ſegundo como $\frac{2}{3}$, ou do primeiro como 1; e do ſegundo como 2. Porém ambos elles ſaõ compoſtos de outros dous, cujas partes fizemos entrar na raſaõ de 2 e 3; logo as partes dos quatro vinhos ſeferão como 2, 3, 4, 6; isto he por cada duas medidas do primeiro tomaremos 3 do segundo, 4 do terceiro, e 6 do quarto.

Esta questaõ se póde resolver de muitas maneiras, conforme as partes que arbitrariamente se tomarem para formar os dous compostos parciais, que finalmente se haõ de ligar.

Outras Regras Relativas ás Proporçoens.

201 MUitas outras Regras se encontraõ nos livros de Arithmetica, as quais se reduzem á pratica da Regra de tres, e sendo bem entendida a natureza das questoens naõ podem embaraçar a quem souber o que até agora temos dito.

202 Deste genero he a *Regra dos juros*, na qual se busca o interesse de qualquer quantia por qualquer tempo, supposta a rasaõ do que vence 100 cada anno.

Pergunta se v. gr. o juro que vence a quantia de 449200 reis em 7 annos e 3 mezes a rasaõ de 5 por 100 em cada anno. Como 100 vencem de juro 5 em hum anno, em 7 annos e $\frac{1}{4}$ venceráõ 36 $\frac{1}{4}$, e por conseguinte teremos a proporçaõ: Como 100 para 36 $\frac{1}{4}$, assim o capital 449200 para o seu juro, que se achará ser 162835.

Dando-se a quantia 612035 soma do capital e juros vencidos em 7 annos e 3 mezes, a 5 por 100, se quizermos saber o capital, reflectiremos, que vencendo 100 no dito tempo 36 $\frac{1}{4}$, deveremos ter a proporçaõ: Como 136 $\frac{1}{4}$ para 100, assim a quantia dada 612035 para o capital que se pede, 449200.

Perguntando-se o capital, que em 7 annos e 3 me-

mezes produza 162835 a rasaõ de 5 por 100, teremos: Como $36\frac{1}{4}$ para 100, assim o juro dado 162835 para o capital que se pergunta, 449200.

Perguntando-se o tempo, em que o capital 449200 ha de produzir o juro 162835, a 5 por 100, teremos: Como 449200 para 162835, assim 100 para hum quarto, que será $36\frac{1}{4}$. Este he o juro de 100 dentro do tempo pedido, e como o juro annual de 100 he 5, dividindo $36\frac{1}{4}$ por 5, o quociente $7\frac{1}{4}$ mostrará o dito tempo, isto he, 7 annos e 3 mezes.

Perguntando se em fim a que rasaõ por 100 se deve pôr o capital 449200 para dar 162835 em 7 annos e tres mezes, teremos: Como 449200 para 162835, assim 100 para $36\frac{1}{4}$; e dividindo este numero pelo tempo $7\frac{1}{4}$, o quociente 5 dará o juro annual de 100, que se pergunta.

Pelo que respeita ao *juro dos juros*, e outras questoens mais complicadas sobre interesses e usuras, na Algebra se resolveráõ com mais facilidade.

203 Nos *descontos*, e *abatimentos* se discorre do mesmo modo que nos juros, como se mostra nos exemplos seguintes.

Comprou certa pessoa hum campo por 4536 *libras* fiado por 10 annos: mas resolvendo-se logo a pagar de contado, offerece o pagamento ao vendedor abatendo-lhe na *rasaõ* de $4\frac{1}{2}$ por 100. Pergunta-se, quanto deve pagar?

He manifesto, que neste caso naõ se busca outra cousa senaõ o capital que com o seu juro de $4\frac{1}{2}$ por 100 em dés annos faça 4536^{lb}. Ora como 100 produzem $4\frac{1}{2}$ por anno, em dés annos produzirão 45; e assim teremos: Como 145 para 100, assim 4536^{lb} para a quantia que se pede, a qual he $3128^{lb}\ 5^{s}\ 6^{d}\ \frac{6}{29}$.

Tendo huma pessoa passado a hum mercador hum credito de 2854^{lb} para pagar no termo de hum anno, e querendo remillo passados 7 mezes, com a condiçaõ de lhe fazer o credor hum abatimento na rasaõ de 6 por 100; pergunta-se quanto deve pagar?

Como 100 pela convençaõ vencem 6 em hum anno, em 7 mezes deveráõ vencer $3\frac{1}{2}$. Assim o que o devedor havia de pagar do principio como 100, no fim do anno o devia pagar como 106, e passados 7 mezes sómente, o haverá de pagar como $103\frac{1}{2}$. Por conseguinte teremos: Como 106 para $103\frac{1}{2}$, assim 2854^{lb} para a quantia que se pergunta, a qual acharemos ser $2786^{lb}\ 13^{s}\ 9^{d}\ \frac{15}{53}$.

Deste modo usando da regra de tres, se resolvem outras muitas questoens pertencentes aos contratos mercantîs, nas quais, para quem tem entendido os exemplos precedentes, naõ he necessario entrar com mais individuaçaõ.

Das Progressoens Arithmeticas.

204 A *Progressaõ Arithmetica* he huma serie de termos, que de tal forma se vaõ seguindo huns aos outros, que cada hum excede ao precedente, ou he excedido delle, em huma quantidade constante. Por exemplo esta serie

$$\div\ 1 . 4 . 7 . 10 . 13 . 16 . 19 . 22 . 25\ \&c.$$

he huma Progressaõ Arithmetica, porque cada termo tem de excesso sobre o que lhe fica atraz a mesma quantidade 3. Esta Progressaõ se denota com o mesmo sinal $\div$, que se usa na Proporçaõ Arithmetica continua (n. 174.), porque na realidade naõ he mais do que a mesma Proporçaõ continuada além do terceiro termo.

A Progressaõ he *crescente*, *ascendente*, ou *divergente*, quando os termos saõ cadavez maiores; *decrescente*, *descendente*, ou *convergente*, quando saõ cadavez menores. Como ambas tem as mesmas propriedades, sómente com a differença de que o *somar* em huma deve ser *diminuir* na outra, naõ trataremos senaõ da ascendente: e o que della dissermos se applicará sem difficuldade á descendente.

205 He claro pois pela mesma noçaõ da Progressaõ, que com o primeiro termo e com a differença commua, a qual tambem se chama *razaõ* da Progressaõ, se podem formar todos os mais, pela addiçaõ successiva da mesma *razaõ*. Porque o segundo se forma do primeiro somado com a razaõ; o terceiro he a soma do segundo e da mesma razaõ, ou do primeiro e do duplo da razaõ; o quarto contém o terceiro e mais a razaõ, ou o primeiro e mais o triplo da mesma razaõ; e assim por diante.

206 Donde se segue, em geral, *Que qualquer termo de huma Progressaõ Arithmetica he igual á soma do primeiro, e da razaõ tomada tantas vezes, quantos saõ os termos precedentes.*

207 Por conseguinte, quando o primeiro termo for 0, qualquer dos outros será igual á razaõ multiplicada pelo numero dos termos, que ficarem antes delle.

208 Por meio deste principio podemos achar immediatamente qualquer termo de huma Progressaõ Arithmetica, sem que nos seja para isso necessario calcular os precedentes.

Pergunta-se v. g. qual ha de ser o centesimo termo nesta Progressaõ $\div$ 4. 9. 14. 19 &c. Como o ter-

termo que se pede he o centesimo., será precedido de 99 termos. Constará pois do primeiro 4, e da razaõ 5 multiplicada por 99; e será por conseguinte 499.

209 Do mesmo principio se entenderá o methodo de meter entre dous numeros dados qualquer numero de meios arithmeticos, isto he, de assignar huma Progressaõ Arithmetica, dados os extremos, e o numero dos termos. Isto se executa, *diminuindo o extremo menor do maior, e dividindo o resto pelo numero de todos os termos menos hum, ou pelo numero dos meios e mais hum.* O quociente será a razaõ da Progressaõ, a qual por conseguinte se formará como assima dissemos (n. 205.).

Se quizermos, por exemplo, meter oito meios arithmeticos entre 4 e 11, diminuiremos 4 de 11, e dividiremos o resto 7 pelo numero dos meios e mais hum. O quociente $\frac{7}{9}$ será a razaõ da Progressaõ, a qual será por conseguinte $\div 4 . 4\frac{7}{9} . 5\frac{5}{9} . 6\frac{3}{9} . 7\frac{1}{9} . 7\frac{8}{9} . 8\frac{6}{9} . 9 . \frac{4}{9} . 10\frac{2}{9} . 11.$

Do mesmo modo, se entre 0 e 1 quizermos meter nove meios arithmeticos, dividiremos a differença 1 dos extremos dados por 9 + 1, ou por 10, e teremos a razaõ $\frac{1}{10}$, ou 0, 1, e por conseguinte a Progressaõ que buscamos será $\div$ 0 . 0, 1 . 0,2 . 0,3 . 0,4 . 0, 5 . 0,6 . 0,7 . 0,8 . 0,9 . 1.

210 Donde se vê, que por menor e menor que seja a differença de dous numeros, sempre entre elles se pódem meter quantos meios arithmeticos quizermos.

O que temos dito das Progressoens Arithmeticas he o que basta para a intelligencia dos Logarithmos, de que abaixo havemos de tratar. Pelo que respeita ás mais propriedades das mesmas Progressoens, em outro lugar as mostraremos com mais commodidade.

Das Progressoens Geometricas.

211 A *Progressaõ Geometrica* he huma serie de termos, cadahum dos quais contém o seu antecedente, ou nelle he contido, igual numero de vezes. Esta serie v. g.

$\div\!\!\div$ 3 : 6 : 12 : 24 : 48 : 96 : 192 : 384 &c.

he huma Progressaõ Geometrica, porque cada termo contém o seu antecedente o mesmo numero de vezes, isto he, 2. Este numero de vezes, que cada termo contém, ou he contido no antecedente, chama-se *denominador*, ou *rasaõ* da Progressaõ. E esta se denota com o sinal $\div\!\!\div$, como a Proporçaõ Geometrica continua, porque he a mesma Proporçaõ continuada a maior numero de termos.

A Progressaõ Geometrica he *crescente*, *ascendente* ou *divergente*, quando os termos vaõ sendo cadavez maiores; *decrescente*, *descendente*, ou *convergente*, quando saõ cadavez menores. Naõ he preciso tratar de ambas separadamente, porque tem as mesmas propriedades, mudando-se sómente a multiplicaçaõ em divisaõ, e reciprocamente, além de que mudada a ordem dos termos huma se converte na outra.

212 Da mesma noçaõ da Progressaõ Geometrica se segue, que com a razaõ e o primeiro termo se podem formar todos os outros. Porque o segundo resulta do primeiro multiplicado pela razaõ; o terceiro do segundo multiplicado tambem pela razaõ, ou do primeiro multiplicado pelo quadrado da razaõ; o quarto do terceiro multiplicado igualmente pela razaõ, ou do primeiro multiplicado pelo cubo da razaõ &c.

Deste modo na Progressaõ assima figurada o segundo termo 6 resulta do primeiro 3 multiplicado pela razaõ 2; o terceiro 12 do primeiro 3 multiplicado pelo quadrado da razaõ 4; o quarto 24 do primeiro 3 multiplicado pelo cubo da razaõ 8 &c.

213 Donde se segue, em geral, *Que qualquer termo de huma Progressaõ Geometrica se forma do primeiro multiplicado pela rasaõ elevada a huma potencia, que tem por expoente o numero dos termos precedentes.*

Peloque se o primeiro termo for 1, qualquer outro termo será igual á potencia da rasaõ que corresponder ao numero dos termos antecedentes: porque a multiplicaçaõ pela unidade naõ aumenta o producto.

214 Daqui se deduz o methodo de achar qualquer termo de huma Progressaõ Geometrica, sem calcular os precedentes, o que he muitas vezes de grande utilidade.

Pede-se v. g. o termo duodecimo desta Progressaõ ∺ 3 : 6 : 12 : 24 &c. Como antes do duodecimo ha onze termos, será o que buscamos igual ao producto do primeiro 3 multiplicado pela undecima potencia da rasaõ 2. Esta potencia se achará pela multiplicaçaõ continua do numero 2, até elle ser onze vezes factor no producto. Mas para abbreviar a operaçaõ, podémos elevar 2 ao cubo 8, e este ao seu cubo 512 que será a potencia nona de 2; e multiplicando 512 pelo quadrado 4, teremos 2048 potencia undecima do mesmo 2. Finalmente multiplicando a potencia achada pelo primeiro termo 3, será o termo duodecimo que buscamos 6144.

215 Do mesmo principio se reduz o methodo de meter qualquer numero de meios proporcionais entre dous numeros dados. Isto se faz, *dividindo o maior dos numeros dados pelo menor, e extrahindo do quociente a raiz do grào correspondente ao numero dos meios aumentado de huma unidade.* Esta raiz será a rasaõ, com a qual se formaráõ os termos pedidos (n. 212.).

Porque o maior dos numeros dados, que se póde tomar como ultimo termo da Progressaõ, será igual ao producto do menor, que he o primeiro termo, multiplicado pela rasaõ elevada á potencia correspondente ao numero dos termos menos o ultimo, ou ao numero dos meios e mais hum (n. 213,). Logo dividindo o maior dos numeros dados pelo menor, o quociente será a razaõ elevada ao gráo correspondente ao numero dos meios aumentado de huma unidade (n.74.); assim extrahindo do dito quociente a raiz do mesmo gráo, teremos a razaõ da Progressaõ.

Pede-se v. g. que entre 2 e 2048 metamos nove meios geometricos. Primeiramente dividiremos 2048 por 2, e teremos o quociente 1024. Depois buscaremos a raiz decima de 1024 (pag. 150.), que acharemos ser 2; e esta será a razaõ da Progressaõ, com a qual acharemos os termos pedidos, e teremos ∺ 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256 : 512 : 1024 : 2048.

Se quizermos meter quatro meios geometricos entre 6 e 48, dividindo o ultimo termo 48 pelo primeiro 6 teriamos o quociente 8, do qual haveriamos de extrahir a raiz quinta. Como porém o numero 8 naõ tem raiz quinta exacta, he sinal de que entre 6 e 48 naõ se podem assignar por numeros exactamente quatro meios geometricos; mas poderáõ assignar-se mais e mais proximos á exactidaõ, extrahindo a dita raiz por approximaçaõ até onde quizermos. Assim acharemos, que a raiz quinta de 8 he 1, 5157167 proximamente (pag. 151.), e bastando calcular os meios pedidos até quatro letras decimais, teremos ∺ 6 : 9,0943 : 13,7844 : 20,8932 : 31,6682 : 48.

Donde podemos concluir, que entre dous numeros se podem sempre determinar tantos meios geometricos quantos quizermos, ou exactos, ou ao menos approximados até onde for necessario. E isto he o que neste lugar basta saber das Progressoens.

Dos Logarithmos.

216 CHamaõ se *Logarithmos* os numeros de huma Progressaõ Arithmetica, em quanto se

compáraõ termo por termo a outros tantos numeros de huma Progressaõ Geometrica. Postas v. g. estas duas Progressoens

÷ 3 . 5 . 7 . 9 . 11 . 13 . 15 . 17 &c.
∺ 2 . 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256 &c.

cada termo da primeira he Logarithmo do numero correspondente, que na segunda occupa o mesmo lugar; assim 3 he Logarithmo de 2; 5 de 4; 7 de 8 &c.

217 Donde se segue, que o mesmo numero póde ter infinitos Logarithmos. Porque á mesma Progressaõ Geometrica, em que elle se acha, podemos fazer corresponder infinitas Progressoens Arithmeticas diversas.

Como porém attendemos presentemente ao uso actual dos Logarithmos, naõ nos demoraremos em contemplar as differentes Progressoens Arithmeticas e Geometricas, que se podiaõ combinar entre si, mas passaremos logo ás que se escolhêraõ para formar as Taboas Logarithmicas de que usamos.

218 Escolheu-se pois a Progressaõ Arithmetica dos numeros naturais, e a Geometrica que procede na rasaõ decupla, as quais parecêraõ mais convenientes á lei da numeraçaõ actual. Assim temos por fundamento dos Logarithmos ordinarios as duas Progressoens seguintes

÷ 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 &c.
∺ 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 : 1000000 &c.

219 Peloque neste systema de Logarithmos será sempre muito facil saber o Logarithmo de todos os numeros, que se exprimirem pela unidade seguida de qualquer numero de cifras, pois sempre o Logarithmo constará de tantas unidades, quantas forem as cifras.

Em quanto aos numeros, que mediaõ entre os termos da Progressaõ decupla, pelos principios até agora dados naõ podemos explicar o methodo, pelo qual foraõ calculados os seus Logarithmos. Mas apontaremos o methodo que se podia seguir, ſe naõ houveſſe outros meios, ſenaõ os que a Arithmetica nos offerece.

220 Para acharmos pois o Logarithmo de qualquer numero v. gr. 3, he claro pela meſma noçaõ dos Logarithmos, que elle deve achar-ſe na Progreſſaõ fundamental ∺ 1; 10; 100 &c. Ora metendo entre 1 e 10 hum grande numero de meios geometricos (n. 215.) ſuccederá neceſſariamente de duas couſas huma, ou que algum delles coincidirá juſtamente com o numero 3, ou ao menos que hum ſerá proximamente menor e o conſecutivo proximamente maior que 3, ſendo a differença tanto menor, quanto o numero dos meios for maior; de ſorte que aumentando quanto for neceſſario o numero dos meios, hum delles ſe poderá finalmente tomar pelo meſmo numero 3.

Entaõ metendo entre 0 e 1 tantos meios arithmeticos, quantos geometricos ſe calcularaõ entre 1 e 10, o termo deſta Progreſſaõ que correſponder ao lugar do numero 3 na outra Progreſſaõ, ou do numero ſummamente proximo a 3, ſerá o Logarithmo delle; e aſſim dos mais.

221 Aſſim deveremos imaginar; Que tendo-ſe metido 10000000 meios arithmeticos entre 0 e 1, entre 1 e 2, entre 2 e 3 &c., ſe meteraõ outros tantos geometricos entre 1 e 10, entre 10 e 100, entre 100 e 1000 &c; Que ordenando termo por termo eſtas Progreſſoens, ſe buſcáraõ na Geometrica os numeros 1, 2, 3, 4, 5 &c, ou os termos proximamente iguais a elles, e na Arithmetica ſe notáraõ os termos, que lhes correſpondiaõ no meſmo lugar, e eraõ por conſeguinte os ſeus Logarithmos; E que finalmente tranſportando a huma columna vertical, como na Taboa ſeguinte, os numeros 1, 2, 3, 4, 5 &c, ao lado direito ſe aſſentaraõ os ſeus Logarithmos. A iſto ſe reduz a formaçaõ das Taboas Logarithmicas.

TABOA
DOS LOGARITHMOS
Dos Numeros naturais de 1 até 200.

Num	Logarith.	Num.	Logarith.	Num.	Logarith.
0	Int.negat.	33	1,518514	66	1,819544
1	0,000000	34	1,531479	67	1,826075
2	0,301030	35	1,544068	68	1,832509
3	0,477121	30	1,550303	69	1,838849
4	0,602060	37	1,568202	70	1,845098
5	0,698970	38	1,579784	71	1,851258
6	0,778151	39	1,591065	72	1,857332
7	0,845098	40	1,602060	73	1,863323
8	0,903090	41	1,612784	74	1,869232
9	0,954243	42	1,623249	75	1,875061
10	1,000000	43	1,633468	76	1,880014
11	1,041393	44	1,643453	77	1,886491
12	1,079181	45	1,653213	78	1,892095
13	1,113943	46	1,662758	79	1,897627
14	1,146128	47	1,672008	80	1,903090
15	1,176091	48	1,681241	81	1,908485
16	1,204120	49	1,690196	82	1,913814
17	1,230449	50	1,698970	83	1,919078
18	1,255273	51	1,707570	84	1,924279
19	1,278754	52	1,716003	85	1,929419
20	1,301030	53	1,724276	86	1,934408
21	1,322219	54	1,732394	87	1,939519
22	1,342423	55	1,740363	88	1,944483
23	1,361728	56	1,748188	89	1,040390
24	1,380211	57	1,755875	90	1,954243
25	1,397940	58	1,763428	91	1,959041
26	1,414973	59	1,770852	92	1,962788
27	1,431364	60	1,778151	93	1,968483
28	1,447158	61	1,785330	94	1,973128
29	1,462398	62	1,792392	95	1,977724
30	1,477121	63	1,799341	96	1,982271
31	1,491362	64	1,806180	97	1,986772
32	1,505150	65	1,812913	98	1,991226

Num.	Logarith.	Num.	Logarith.	Num.	Logarith.
99	1,995635	133	2,123852	167	2,222716
100	2,000000	134	2,127105	168	2,225309
101	2,004321	135	2,130334	169	2,227887
102	2,008600	136	2,133539	170	2,230449
103	2,012837	137	2,136721	171	2,232996
104	2,017033	138	2,139879	172	2,235528
105	2,021189	139	2,143015	173	2,238046
106	2,025306	140	2,146128	174	2,240549
107	2,029384	141	2,149219	175	2,243038
108	2,033424	142	2,152288	176	2,245513
109	2,037426	143	2,155336	177	2,247973
110	2,041393	144	2,158362	178	2,250420
111	2,045323	145	2,161368	179	2,252853
112	2,049218	146	2,164353	180	2,255273
113	2,053078	147	2,167317	181	2,257679
114	2,056905	148	2,170262	182	2,260071
115	2,060698	149	2,173186	183	2,262451
116	2,064458	150	2,176091	184	2,264818
117	2,068186	151	2,178977	185	2,267172
118	2,071882	152	2,181844	186	2,269513
119	2,075547	153	2,184691	187	2,271842
120	2,079181	154	2,187521	188	2,274158
121	2,082785	155	2,190332	189	2,276462
122	2,086360	156	2,193125	190	2,278754
123	2,089905	157	2,195900	191	2,281033
124	2,093422	158	2,198657	192	2,283301
125	2,096910	159	2,201397	193	2,285557
126	2,100371	160	2,204120	194	2,287802
127	2,103804	161	2,206826	195	2,290035
128	2,107210	162	2,209515	196	2,292256
129	2,110590	163	2,212188	197	2,294466
130	2,113943	164	2,214844	198	2,296665
131	2,117271	165	2,217484	199	2,298853
132	2,120574	166	2,220108	200	2,301030

222 A primeira letra de cada Logarithmo á esquerda chama-se *Characteristica*, porque por ella se conhece a que década pertence o numero correspondente ao mesmo Logarithmo. Se hum Logarithmo tiver v. g. a characteristica 3, he final que o seu numero he de *milhares*; porque sendo 3 Logarithmo de 1000, e 4 Logarithmo de 10000, todos os numeros comprehendidos entre 1000 e 10000 teráõ por Logarithmo 3 com huma fracçaõ; e por conseguinte será 3 a characteristica, e as letras seguintes representaráõ a fracçaõ em partes decimais. Em huma palavra: *O numero terá tantas letras e mais huma, quantas forem as unidades na characteristica do seu Logarithmo.*

Os Logarithmos da pequena Taboa, que assima ajuntámos para exemplo, tem depois da characteristica seis letras de dizima, e nas Taboas ordinarias tem sete. Mas esta differença naõ prejudica aos usos, que delles havemos de fazer em alguns dos exemplos, que abaixo mostraremos.

Propriedades dos Logarithmos.

223 COmo naõ tratamos aqui senaõ dos Logarithmos ordinarios, as propriedades, que delles havemos de mostrar, devem principalmente deduzir-se das Progressoens Geometricas, que principiaõ por 1; e das Arithmeticas, que principiaõ por 0.

Tomem-se pois quaisquer duas Progressoens com estas circunstancias, por exemplo, as duas seguintes.

$\div$ 0 . 4 . 8 . 12 . 16 . 20 . 24 . 28 . 32 &c.
$\div\!\!\div$ 1 : 3 : 9 : 27 : 81 : 243 : 729 : 2187 : 6561 &c.

Pela natureza e correspondencia destas Progressoens he manifesto, que qualquer termo da primeira consta da razaõ tomada tantas vezes, quantas a ra-

raſaõ da ſegunda entra por factor no termo correſpondente. Porque a raſaõ da progreſſaõ Arithmetica entra tantas vezes, e a da Geometrica he tantas vezes factor em qualquer termo, quantos ſaõ os termos precedentes (n. 207. 212.); porém os termos correſpondentes de ambas as Progreſſoens ſaõ, procedidos de igual numero de termos: logo &c.

Aſſim v. g. no termo 28 da primeira a raſaõ 4 ſe contém ſete vezes, e outras tantas a raſaõ 3 da ſegunda he factor no termo correſpondente 2187; e aſſim nos mais.

224 Logo, *Somando dous quaiſquer termos da Progreſſaõ Arithmetica, e multiplicando os ſeus correſpondentes na Geometrica, o producto deſtes e a ſoma daquelles ſeráõ termos correſpondentes nas meſmas Progreſſoens.*

Porque a ſoma conterá a raſaõ da Progreſſaõ Arithmetica tantas vezes, quantas a contém juntamente os termos ſomados; e o producto terá a raſaõ da Progreſſaõ Geometrica tantas vezes por factor, quantas ella o he nos termos multiplicados ambos juntos. Porém cada termo da Progreſſaõ Arithmetica contém a raſaõ tantas vezes, quantas a raſaõ da Geometrica he factor no termo correſpondente. Logo a ſoma conterá tantas vezes a raſaõ Arithmetica, quantas o producto terá por factor a raſaõ Geometrica; e conſeguintemente ſeráõ termos correſpondentes nas ditas Progreſſoens.

225 Somando pois dous termos quaiſquer da Progreſſaõ Arithmetica, conheceremos o producto dos termos que lhes correſpondem na Geometrica, ſe para iſſo forem continuadas as meſmas Progreſſoens, quanto he neceſſario.

Somando v. g. os termos 8 e 24, que correſpondem a 9 e 729, teremos a ſoma 32, a qual correſponde na Progreſſaõ Geometrica ao numero 6561; e eſte ſerà o producto de 729 por 9.

226 Por conseguinte, sendo os numeros naturais 1, 2, 3 &c na Taboa Logarithmica tirados de huma Progressaõ Geometrica que principia por 1, e os seus Logarithmos sendo os termos que lhes correspondem em huma Progressaõ Arithmetica que começa por 0, he manifesto, *que somando os Logarithmos de quaisquer numeros teremos o Logarithmo do seu producto.* Deste principio resultaõ os usos dos Logarithmos, que agora mostraremos.

Uso dos Logarithmos.

227 PAra multiplicar por Logarithmos he pois necessario *somar os Logarithmos dos factores, e buscando a soma entre os Logarithmos das Taboas, o numero que lhe competir será o producto.*

Querendo v. g. multiplicar 13 por 14, buscaremos na Taboa os Logarithmos destes numeros, a saber.

Log. de 13 - - - - 1,113943
Log. de 14 - - - - 1,146128

E a soma - - - - 2,260071 será o Log. do producto, que acharemos ser 182, numero que na Taboa compete ao dito Logarithmo.

228 Logo para quadrar hum numero, naõ he preciso mais que duplicar o seu Logarithmo. Porque para quadrar, deve o numero multiplicar-se por si mesmo; e por conseguinte deve tomar-se duas vezes, ou duplicar-se o seu Logarithmo. Pela mesma rasaõ triplicando o Log. de hum numero, teremos o Log. do seu cubo.

229 Em geral: *Para elevar hum numero a qualquer potencia, tomar-se-há o seu Log. tantas vezes, quantas o numero entra por factor nessa potencia, ou multiplicar-se-há o Log. pelo expoente della.*

Querendo v. g. formar a potencia 7^a de 2, busca-caremos o ſeu Logarithmo 0,301030, e multiplicando-o por 7 teremos 2,107210; Logarithmo, que na Taboa correſponde a 128, e eſta he a potencia 7ª de 2.

230 Logo reciprocamente: *Para extrabir a raiz quadrada, cubica, quarta, quinta &c de qualquer numero, dividiremos o ſeu Log. por 2, 3, 4, 5 &c.* ou geralmente, *pelo expoente da raiz; e o quociente ſerá o Logaritbmo della.*

Procurando v. g. a raiz quadrada de 144, tomaremos na Taboa o ſeu Log. 2,158362, e dividindo-o por 2, teremos 1,079181 que na meſma Taboa achamos ſer Log. de 12; e por conſeguinte 12 ſerá a raiz quadrada de 144.

Se buſcarmos a Raiz 7ª de 128, a Taboa nos dará o Log. deſte numero, que he 2,107210, e dividindo-o por 7, teremos 0,301030; Logarithmo que na Taboa compete ao numero 2; e por iſſo ſerá 2 a raiz 7ª de 128; e aſſim das mais.

231 A Regra da Diviſaõ por Logarithmos ſe pratica, *diminuindo o Log. do diviſor do Log. do dividendo; e o reſto ſerá o Log. do quociente.*

Querendo v. g. dividir 187 por 17, buſcaremos os ſeus Logarithmos, e teremos

Log. do divid. 187 - - - - 2,271842
Log. do diviſ. 17 - - - - 1,230449

E o reſto - - - - - - - - - - - 1,041393 ſerá o Log. do quociente, que conſultando a Taboa acharemos ſer 11.

Quando o Log. do quociente ſe naõ acha exactamente na Taboa, mas cahe entre dous Log. della, he ſinal, que a diviſaõ naõ ſe póde fazer ſem reſto; mais abaixo diremos, o que ſe deve fazer neſſe caſo.

A raſaõ deſta Regra he, porque ſendo o dividendo igual ao producto do diviſor pelo quoci-
ente

ente (n. 74.) deve o Log. do dividendo formarſe da ſoma dos Log. do diviſor e do quociente (n. 227.); e conſeguintemente tirando o Log. do diviſor do Log. do dividendo, o reſto ſerá o Log. do quociente (n. 39.)-

232 Pelo que temos viſto ſe vê, que a Regra de tres ſe ha de praticar por Logarithmos, *ſomando os Log. do 2º e 3º termo, diminuindo o Log. do 1º; e o reſto ſerá o Log. do 4º*; o qual por conſeguinte ſe achará por meio das Taboas.

Buſcando-ſe v. g. o quarto proporcional aos termos 7 : 12 :: 105 :, ſerá a operaçaõ deſta maneira:

Log. do 3º. 105 - - - - 2,021189
Log. do 2º. 12 - - . - 1,079181

Soma - - - - - - - - - - 3,100370
Log. do 1º. 7 - - - - - - 0,845098

Reſto - - - - - - - - - - 2,255272, ou Log. do num. 180, que he o quarto pedido.

233 Deve notar-ſe, que ſe o Logarithmo que reſulta de alguma operaçaõ coincidir com algum Log. da Taboa em todas as letras, exceptuando a ultima á direita, naõ ſe deverá fazer caſo deſta differença. Porque ſendo os Log. dos numeros intermedios da Progreſſaõ decupla approximados ſómente até a metade de huma unidade da ultima caſa da dizima, póde ſucceder, que pela addiçaõ de muitos Log. ajuntando-ſe os pequenos defeitos da ultima letra de cadahum, influaõ na ultima letra do reſultado o defeito ou exceſſo de huma ou duas unidades; e ainda de mais, conforme o numero dos Log. de que elle reſultar. Na operaçaõ precedente temos hum exemplo deſta advertencia.

Dos

Dos Numeros, cujos Logarithmos se naõ achaõ nas Taboas.

234 COmo as Taboas ordinarias dos Logarithmos foraõ ordenadas segundo a serie natural dos numeros inteiros, he claro, que nellas immediatamente se naõ achaõ os Logarithmos dos numeros fraccionarios. O mesmo se entenderá das raizes dos numeros, que naõ saõ potencias perfeitas &c.

Querendo-se pois o Log. de hum numero inteiro accompanhado de fracçaõ, reduzir-se-há tudo a quebrado (n. 86.); e deminuindo éntaõ o Log. do denominador do Log. do numerador, o resto será o Log. que se procura.

Se buscarmos v. g. o Log. de $8\frac{3}{11}$, reduziremos primeiro este numero a $\frac{91}{11}$, e depois tiraremos 1,041393 (Log. do denominador 11) de 1,959041 (Log. do numerador 91). O resto 0,917648 será o Log. do numero proposto $8\frac{3}{11}$; porque $8\frac{3}{11}$, ou $\frac{91}{11}$, he o mesmo que 91 dividido por 11 (n. 96.).

235 Pela mesma rasaõ se mostra, que para haver o Log. de huma fracçaõ propria se deve diminuir o Log. do denominador do Log. do numerador. Porém, como esta diminuiçaõ naõ póde ter lugar, por ser o Log. do denominador maior que o do numerador, tiraremos o Log. deste do Log. daquelle. E o resto será o Log. que buscamos, sendo porém precedido do final $-$, para se mostrar que a diminuiçaõ se fez de hum modo opposto ao que devia ser. Assim acharemos que o Log. de $\frac{11}{91}$ he $-0,917648$ &c.

236 O referido final, assim como denota que a subtracçaõ se fez de hum modo opposto ao que convinha, tambem serve para trazer á lembrança, que a fim de compensar isso mesmo se devem no calculo applicar os ditos Logarithmos por huma Regra opposta á que temos estabelecido para os outros; isto he: *Que havendo de multiplicar por huma fracçaõ o Log. desta se deve diminuir; e que havendo de dividir, se deve somar* (*).

§§ Em geral: *Se os Log. dos factores forem todos positivos, ou todos negativos, a soma delles com o mesmo final; se huns positivos, outros negativos, a differença entre as duas somas de huns e dos outros com o final da maior, dará o Log. do producto.* E em quanto á divisaõ: *Muda-se o final do divisor, e pratica-se a mesma regra da multiplicaçaõ.*

Alguns exprimem os Log. das fracçoens de outra maneira, fazendo sómente a characteristica negativa, e conservando a dizima sempre positiva. Esta fórma de Logarithmos resulta, subtrahindo effectivamente o Log. do denominador do Log. do numerador da direita para a esquerda, e em chegando ás characteristicas, toma-se por characteristica negativa o que seria necessario ajuntar á characteristica do Log. do numerador para que a do Log. do denominador se pudesse della subtrahir sem resto.

Por exemplo, para acharmos o Log. de $\frac{2}{151}$, de 0,301030 (Log do numerador 2) deveremos tirar 2,178977 (Log. do denominador 151). Para isto será necessario ajuntar 2 á characteristica do Log. do numerador, que ficará 2,301030, e será o resto

O o,

(*) Os numeros, que saõ precedidos do final –, chamaõ-se *negativos*. Na Algebra, daremos huma idéa mais clara delles. Entretanto devemos prevenir, que naõ se haõ de conceber, como numeros menores que o; porque abaixo do *nada* naõ pode haver cousa alguma.

0,122053; entaõ, pondo de menos 2 na sua characteristica, por termos posto outro tanto de mais no Log. do numerador, será o Log. que buscamos $-$ 2,122053, entendendo-se porém que o sinal negativo sómente affecta a characteristica. Mas para naõ haver equivocaçaõ com os outros Log. totalmente negativos, costumaõ notar-se os de que agora fallamos deste modo $\overline{2},122053$, ou tambem assim $\dashv$ 2,122053.

A rasaõ disto he, porque tomando o Log. 2,301030 em lugar de 0,301030, o numero 2 que a este compete se multiplica realmente por 100. Logo tirando 2,178977 de 2,301030, o resto 0,122053 será o Log. de $\frac{200}{151}$. Para este quebrado se reduzir a $\frac{2}{151}$ he preciso dividillo por 100, e por conseguinte tirar 2 á characteristica do seu Logarithmo. Logo o Logarithmo de $\frac{2}{151}$ será $-2+0,122053$, ou $\overline{2}$, 122053.

Quando entrarem no calculo estes Logarithmos, observar-se-haõ as Regras assima dadas, em quanto a ambas as partes delles. Na multiplicaçaõ sempre se somaõ as letras decimais, porque saõ todas positivas; e se desta soma passarem algumas unidades para a casa das characteristicas ajuntaõ-se com as positivas, e a differença entre as somas das negativas, e positivas com o sinal da maior será a characteristica. Na divisaõ, sempre se diminue o Log. do divisor do Log. do dividendo em quanto á dizima; em quanto ás characteristicas muda-se o sinal do divisor, e pratica-se a regra da multiplicaçaõ. Quando no diminuir da dizima for necessario pedir huma unidade á casa da characteristica, e esta for 0, ou negativa, deverá esta ficar com huma unidade de menos, v. g. sendo o ficará $\overline{1}$, sendo $\overline{1}$, ficará $\overline{2}$ &c.

Do

Do meſmo modo: Quando ſe houver de multiplicar hum Log. deſtes, como na formaçaõ das potencias, multiplicaremos primeiro as letras decimais, e ſe dellas houverem de paſſar algumas unidades para a caſa da caracteriſtica, guardallas-hemos para ſerem diminuidas do producto della. E quando ſe houver de dividir, como na extracçaõ das raizes, ſe a characteriſtica contiver exactamente o diviſor, a operaçaõ ſe fará do modo ordinario; e ſe naõ, ajuntar-ſe-haõ á characteriſtica tantas unidades negativas, quantas baſtarem para conter exactamente o diviſor; e para compenſar iſto, ſe ajuntaráõ outras tantas poſitivas em lugar de dezenas á primeira letra da dizima. Aſſim o Log. $\overline{2},873245$ ſendo multiplicado por 5 dá o producto $\overline{6},366225$; ſendo dividido por 7, o quociente $\overline{1},839035$ &c.

Eſtes Log. reduzem-ſe aos totalmente negativos, tirando 1 á characteriſtica, e tomando em lugar das outras letras o ſeu complemento para 9, exceptuando a derradeira da qual ſe tomará o complemento para 10. E reciprocamente, hum Log. inteiramente negativo ſe converterá na outra fórma, ajuntando 1 á ſua characteriſtica, e tomando o complemento das outras letras do modo que temos dito. Aſſim o Log. $\overline{2},374972$ ſe transforma em $-1,625028$, o Log. $\overline{1},587430$ em $-0,412570$, e reciprocamente.

237 Quando o numero paſſar os limites das Taboas (as quais pela maior parte chegaõ até 20000. ou ao menos até 10000) ſempre dellas podemos haver o Logarithmo, com tanto que o numero naõ ſeja de mais letras do que as decimais dos meſmos Logarithmos.

238 Para iſſo devemos trazer á lembrança, que ſe ajuntarmos 1, 2, 3 &c. unidades á characteriſtica

de hum Log. o ſeu numero ſe entenderá multiplicado por 10, 100, 1000 &c. e ao contrario dividido, ſe tirarmos 1, 2, 3 &c. unidades á meſma characteriſtica; porque niſſo naõ fazemos outra couſa, ſenaõ ajuntar, ou tirar ao dito Log. o Log. de 10, ou de 100, ou de 1000 &c.

139 Iſto ſuppoſto, ſe v. g. buſcarmos o Log. de 357859, delle cortaremos á direita tantas letras, quantas forem baſtantes, para que as que ficarem á eſquerda naõ excedaõ os limites das Taboas, iſto he, duas neſte caſo, e teremos o numero 3578,59 que he 100 vezes menor que o propoſto (n. 28.). Depois buſcaremos o Log. de 3578 que he 3,5536403, e a differença entre eſte e o Log. proximamente ſeguinte de 3579, que he 1214. Entaõ diremos: Se 1, differença entre os numeros 3578 e 3579, dá a differença dos Log. 1214, a differença 0,59 entre os numeros 3578, e 3578,59, que differença dará nos ſeus Log.? Como temos a unidade por primeiro termo, baſta multiplicar o ſegundo pelo terceiro, e o producto 716,26, ou 716, deixando as partes decimais, he a diferença que devemos ajuntar a 3,5536403 Logarithmo de 3578 para termos 3,5537119 Log. de 3578,59. E finalmente, como 3578,59 ſe deve multiplicar por 100 para fazer 357859, reſta ajuntarmos 2 á characteriſtica de ſeu Log. para termos 5,5537119 Log. do numero propoſto 357859.

Se as letras que ſe haõ de cortar forem todas cifras, he claro, que buſcando nas Taboas o Log. do numero que ficar á eſquerda, naõ ſerá preciſo mais do que ajuntar-lhe á characteriſtica tantas unidades, quantas foraõ as cifras q̃ ſe cortáraõ.

240 Quando o numero he ſeguido de dizima, buſca-ſe o Log. como ſe foſſe inteiro, ou immediatamente nas Taboas, ou pelo methodo precedente, quando exceda os limites, e da characteriſti-

ca

ca se tiraõ tantas unidades, quantas saõ as letras decimais. Querendo v. g. o Log. de 3,27 buscaremos na Taboa o de 327 que he 2,5145477, e tirando 2 á characteristica ficará 0,5145477 Log. de 3,27. Querendo o Log. de 35,7859 buscaremos o de 357859 (n. 239.), que he 5 5537119, e tirando 4 á characteristica teremos 1,5537119 Log. de 35,7859.

241 Em fim, se o numero constar sómente de notas decimais, buscaremos sim o Log. delle como se fosse inteiro, mas diminuillo-hemos de tantas unidades, quantas forem as casas da dizima, e o resto com o sinal – será o Log. dezejado. Querendo v. g. o Log. do numero 0,03, buscaremos na Taboa o Log. de 3, que he 0,477121, e diminuindo-o de 2, teremos – 1,522879 Log. de 0,03.

§§ Se quizermos porém o Log. com a characteristica sómente negativa, buscaremos tambem o Log. das letras decimais, como se fossem numero inteiro, e da characteristica tiraremos tantas unidades, quantas forem as casas da mesma dizima. Assim acharemos, que $\bar{2},477121$ he o Log. de 0,03; $\bar{3},514548$ Log. de 0,00327 &c. §§

Dos Logarithmos, cujos numeros se naõ achaõ nas Taboas.

242 COmo para fazermos as operaçoens com mais facilidade substituimos em lugar dos numeros naturais os artificiais, que saõ os seus Logarithmos, assim tendo acabado o calculo he necessario voltar dos Logarithmos para os numeros. Raras vezes succederá, que o Log. resultante das operaçoens corresponda a hum numero inteiro, que naõ exceda os limites das Taboas, como he necessario, para que o mesmo Log. se ache nellas. Assim he preciso, que tenhamos hum me-

tho-

thodo para achar por meio das mesmas Taboas o numero correspondente a qualquer Log. proposto. O qual he desta maneira.

243 Tirem-se da characteristica tantas unidades, quantas forem bastantes, para que o Log. naõ exceda os limites das Taboas. Entaõ,

Se o Log. se achar nas Taboas, o numero que lhe corresponder, sendo aumentado de tantas cifras á direita, quantas unidades se ouverem tirado da characteristica, será o numero que buscamos. Tirando v. g, 3 unidades á characteristica do Log. 7,2273467, acharemos que nas Taboas corresponde a 16879; e assim 16879000 será o numero representado pelo Log. 7,2273467 (n. 238.)

Reduzida porém a characteristica aos limites das Taboas, se o Log. proposto cahir entre dous Log. consecutivos dellas, praticar-se-ha deste modo: Supponhamos, que se pede o numero correspondente ao Log. 5,2432768. Tirando 2 unidades á characteristica, o Log. 3,2432768 cahirá entre os Log. de 1750 e 1751, e por conseguinte o seu numero será 1750 com huma fracçaõ. Para acharmos esta, tomaremos a differença entre os Log. de 1750 e 1751, que he 2481, e a differença entre o Log. proposto e o Log. de 1750, que he 2388. Entaõ diremos: Se a differença dos Log. 2481 dá a differença dos numeros 1, a differença dos Log. 2388 que differença dará nos mesmos numeros? Como o segundo termo he sempre 1, dividiremos o terceiro pelo primeiro, e o quociente será o quarto, que neste exemplo acharemos 0,9625. Assim o Log. 3,2432768 corresponde ao numero 1750,9625, e conseguintemente o Log. 5,2432768 ao numero 175096,25 (n. 28. 238.)

244 Quando a characteristica naõ excede os limites das Taboas, he claro, que naõ se lhe deve tirar unidade alguma; e por isso tendo acha-

do o numero correspondente, naõ se lhe ajuntaráõ cifras algumas, nem se mudará o lugar da virgula.

245 He porém muito de advertir, que a proporçaõ assima praticada suppoem, que as differenças dos Log. saõ proporcionais ás differenças dos numeros correspondentes, como saõ com effeito proximamente, sendo os numeros grandes, mas de nenhuma sorte, sendo pequenos. Por isso, quando o numero for menor que 1800 nas Taboas que chegaõ até 18000, ou menor que 1000 nas Taboas que naõ passaõ de 10000, ajuntaremos á characteristica as unidades que forem precisas, para buscarmos o numero na classe suprema das mesmas Taboas, no qual deveremos separar para a dizima tantas letras, quantas foram as unidades que ajuntámos á characteristica; e se quizermos mais exactidaõ, praticaremos a proporçaõ assima indicada (n. 243.).

Por exemplo, buscando-se o numero correspondente ao Log. 0,5432725, pela inspecçaõ da Taboa logo veremos, que cahe entre 3 e 4. Se ahi tomassemos as partes proporcionais, teriamos 3,529 &c. que se aparta muito da verdade. Porém ajuntando 3 unidades á characteristica, acharemos que o Log. 3,5482725 mostra hum numero entre 3493 e 3494; pelo que bastandonos a terceira casa da dizima, diremos que o numero correspondente ao Log. 0,5432725 he 3,493. Se quizermos porém mais letras decimais, pelo methodo assima dado, acharemos que o Log. 3,5432725 corresponde ao numero 3493,594 (n. 243.), e por conseguinte o Log. 0,5432725 ao numero 3,493594 (n. 238.).

Porém esta aproximaçaõ dos numeros tem seus limites. Porque sendo, como assima dissemos, exactos sómente os Log. até huma meia unidade da ultima casa decimal, he manifesto, que as suas differenças participaõ deste defeito. Por isso em chegando a ultima letra da differença dividida a influir sobre o quociente, dahi por diante todas as letras delle seráõ faltas de exactidaõ, e por isso he escusado continuar a divisaõ. As Taboas ordinarias naõ alcançaõ seguramente senaõ até os numeros de sete letras; e isto he o que basta quasi sempre. Sendo preciso mais, recorrer-se-ha a Taboas de mais letras, ou naõ se usará de Logarithmos.

246 Quando o Log. for negativo, tirar-se-ha de 4, 5, 6 &c. unidades, desorte que o resto se ache na suprema classe das Taboas, e do numero correspondente se tomaráõ tantas casas para a dizima, quantas foraõ as unidades, das quais se diminuio o Logarithmo.

Por exemplo, buscando-se a fracçaõ correspondente ao Log. $-1,532732$ diminuiremos este de 5 e o resto $3,467268$ mostrará na Taboa hum numero entre 2932 e 2933; pelo que a fracçaõ pedida será 0,02932. E com effeito tirar o Log. $-1,532732$ de 5 he o mesmo que multiplicar por 100000 a fracçaõ que lhe corresponde (n. 219. 236.). Logo o numero correspondente ao resto deverá dividir-se por 100000, tomando 5 casas decimais (n. 28.).

§§ Sendo os Log. sómente negativos em quanto á characteristica, ainda he mais facil de achar a fracçaõ correspondente. Buscar-se-ha o numero que corresponde ao Log. com a characteristica que melhor parecer, e a primeira letra delle se assentará tantas casas adiante da virgula, quantas saõ as unidades negativas da characteristica.

Assim v. g. querendo até a quarta letra decimal a fracçaõ correspondente ao Log. $\bar{2},235724$, buscaremos o numero que proximamente compete ao Log. 2,235724, que he 172, e a fracçaõ será 0,0172. Querendo a fracçaõ correspondente ao Logarithmo $\bar{1},732589$ até a sexta nota decimal, procuraremos o numero que proximamente compete ao Log. 5,732589, que acharemos ser 540242, e por conſeguinte a fracçaõ dezejada 0,540242. §§

247 Do que até aqui temos dito faremos varias applicaçoens na Trignometria, e em outras partes da Mathematica. Aqui sómente daremos, por meio de exemplos tirados da meſma Arithmetica, alguma idéa da ventagem que reſulta dos Logarithmos, em quanto á prontidaõ e facilidade dos calculos.

Exemplo I.

PErgunta-ſe o quociente de 17954 dividido por 12836, aproximado até as decimas-milleſimas. Uſando dos Log. obraremos deſta maneira:

Log. de 17954 - - - 4,254161
Log. de 12836 - - - 4,108430

Reſto - - - - - 0,145731, o qual ſendo procurado nas Taboas com a characteriſtica 4 correſponde a 13987; e conſeguintemente ſerá o quociente pedido 1,3987 (n. 238.).

Exemplo II.

PEde-ſe a raiz cubica de 53 aproximada até a caſa das decimas-milleſimas.

Buſque-ſe o Log. de 53, que he 1,724276, e divida-ſe por 3. (n. 230.). O quociente 0,574759 ſerá o Log. da raiz. Eſte com a characteriſtica 5 correſponde nas Taboas proximamente ao numero 375628; Logo a raiz ſerá 3,75628 (n. 238.).

Exemplo III.

QUerendo ſaber a raiz quinta do cubo de 5736 exacta até a terceira letra decimal, buſcaremos o Log. de 5736, que he 3,758609, e multiplicando-o por 3 teremos 11,275827 Log. do cubo do meſmo numero. Dividindo eſte por 5, teremos 2,255165, por Log. da raiz procurada; e entrando com elle nas Taboas com huma characteriſtica aumentada de 3 unidades, acharemos que proximamente compete ao numero 1799555;

e assim será a raiz que buscamos 179,955.

Exemplo IV.

QUerendo meter quatro meios geometricos entre $2\frac{2}{3}$ e $5\frac{3}{4}$, como seria necessario dividir $5\frac{3}{4}$ por $2\frac{2}{3}$, e extrahir do quociente a raiz quinta (n. 215.), para conhecer a rasaõ da Progressaõ; por Logarithmos se obrará deste modo:

Tirar-se-ha 0,425969 Log. de $2\frac{2}{3}$ de 0,759668 Log. de $5\frac{3}{4}$ (n 231.), e o resto 0,333699 se dividirá por 5 (n. 230.). O quociente 0,066740 será o Log. da rasaõ; e entrando com elle nas Taboas com a characteristica 4 acharemos o numero 11661, donde concluiremos que a rasaõ he 1,1661 exacta até as decimas-millesimas. Assim naõ resta mais do que multiplicar o primeiro termo $2\frac{2}{3}$ pela rasaõ 1,1661, o producto outra vez pela rasaõ &c. (n. 211.).

Porêm estas mesmas operaçoens se faráõ mais expeditamente, ajuntando ao Log. do primeiro termo 0,425969 o Log da rasaõ 0,066740, depois o duplo, triplo, e quadruplo deste; e teremos 0,492709; 0,559449; 0,626189; 0,692929 por Logarithmos dos quatro meios proporcionais; que seráõ proximamente 3,109; 3,626; 4,228; 4,931.

Do Complemento Arithmetico dos Logarithmos, e do seu uso.

248 QUando se praticaõ as operaçoens por Logarithmos, e alguns destes se devem diminuir, póde simplificar-se o calculo, substituindo em lugar delles os seus complementos.

249 Para disto se formar huma idéa clara, he necessario reflectir, que tendo para diminuir qualquer numero de outro que conste da unidade

ſeguida de tantas cifras, quantas ſaõ as letras do primeiro, a operaçaõ ſe reduz a eſcrever da eſquerda para a direita a differença entre 9 e cadahuma das letras do numero propoſto, exceptuando a ultima, em lugar da qual ſe tomará o que lhe faltar para 10. Aſſim v. g. querendo diminuir 526927 de 1000000, tiraremos ſucceſſivamente as letras 5,2,6,9,2, de 9; e a ultima 7 de 10, e ſerá o reſto 473073. Querendo diminuir 4873 de 1000000, o numero propoſto ſe conſiderará como 004873 e praticando a meſma regra, teremos o reſto 995127.

250 O reſto formádo deſta maneira he o que ſe chama *Complemento Arithmetico* do numero propoſto.

251 Como he taõ facil a ſubſtituiçaõ do complemento em lugar de qualquer numero, que apenas ſe póde contar por operaçaõ he manifeſto, que havendo de formar-ſe hum reſultado da addiçaõ e ſubtracçaõ de varios numeros, tudo ſe póde reduzir a huma unica operaçaõ de ſomar. Por exemplo, ſe houvermos de ſomar os numeros 672736 e 426452, e da ſoma tirar os numeros 432752 e 18675, por huma ſó operaçaõ acharemos o reſultado da maneira ſeguinte :

	672736
	426452
Compl. de 432752 - - -	567248
Compl de 18675 - - -	981325
Soma - - - - - - - -	2)647761

Iſto he, ſomar-ſe-haõ os dous primeiros numeros com os complementos dos outros dous; e ſeparando a primeira letra da ſoma 2, as ſeguintes 647761 daráõ o reſultado que ſe buſca.

A raſaõ deſta operaçaõ he, porque em lugar de diminuir 432752 ſomando o ſeu complemento, ou 1000000—432752, naõ ſómente diminuimos com effeito o numero 432752, mas ajuntamos ao meſmo tempo 1000000. Logo por cada complemento deveremos tirar huma unidade na primeira Letra da ſoma.

252 A applicação diſto aos Logarithmos he evidente. Em lugar dos que ſe haõ de ſubtrahir, ſubſtituiremos os ſeus complementos, que ſe deſignaõ com as letras CL, e na ſoma deixaremos de eſcrever tantas dezenas na characteriſtica quantos forem os complementos.

Exemplo. I.

SUpponhamos que ſe procura o quarto proporcional aos termos 1677 : 1599 : : 129 :

Como deveriamos ſomar os Log. de 1599 e 129, e da ſoma tirar o Log. de 1677 (n 232.), por huma ſoma unica praticaremos deſte modo :

CL. de 1677 - - - - 6,775467
Log. de 1599 - - - - 3,203848
Log. de 129 - - - - 2,110590

E a ſoma - - - - - - - - - - - 2,089905, deixando a dezena da characteriſtica ſerá o Log. do quarto termo, que nas Taboas acharemos 123.

Exemplo II.

QUeremos multiplicar $\frac{675}{527}$ por $\frac{952}{377}$, e dividir o producto por $\frac{631}{753}$

Já ſabemos, que neſte caſo deveriamos multiplicar os numeros 675, 952, 753, e depois os numeros 527, 377, 631, e dividir o primeiro producto pelo ſegundo (n. 106. 109.) Por Logarithmos praticaremos pois do modo ſeguinte :

Log. de 675 - - - - 2,829304
Log. de 952 - - - - 2,978637
Log. de 753 - - - - 2,876795
CL. de 527 - - - - 7,278189
CL. de 377 - - - - 7,423659
CL. de 631 - - - - 7,199971

E a Soma - - - - - - - - - - 0,586555, lançando fóra as 3 dezenas da characteristica, por entrarem nella 3 complementos, mostrarà nas Taboas o numero que buscamos 3,8597 proximamente.

253 Além disto, servem tambem os complementos com grande ventagem do calculo, para fazer positivos os Logarithmos das fracçoens. Para acharmos v. g. o Logarithmo de $\frac{3}{4}$, que representa o numero 3 dividido por 4 (n.96), ao Log. de 3 que he 0,477121 ajuntaremos o Compl. do Log. de 4 que he 9,397940, e a soma 9,875061 serà o Log. de $\frac{3}{4}$. Bem entendido, que nelle se involve hum complemento, e conseguintemente se deveria lançar fóra huma dezena da characteristica, se houvesse. Mas esta se subentende sempre, e se lança fóra no fim das operaçoens, em que entra o dito Logarithmo, se póde ser.

§§ Os Logarithmos desta fórma realmente naõ differem dos que se exprimem por huma characteristica negativa. Porque o Log. 9,875061, no qual se subentende huma dezena subtractiva da characteristica; tem com effeito por characteristica $9-10$, e conseguintemente vem a ser o mesmo que $\bar{1}$,875061. Se o mesmo Log. involvesse dous complementos, teria realmente a characteristica $9-20$, e valeria o mesmo que $\overline{11}$,875061.

Deve reparar-se, que os Logarithmos se servem mutuamente de complementos. Assim como 9,875061 he complemento do Log. 0,124939, do mesmo modo 0,124939 he complemento do Log. 9,875061. Estes Logarithmos, que saõ mutuamente complementos, correspondem a numeros entre si *reciprocos*, os quais saõ todos aquelles, que sendo multiplicados hum pelo outro daõ a unidade por producto, como 3 e $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{4}$ e $\frac{4}{3}$ &c. E por isso, como he o mesmo dividir por 3 que multiplicar por $\frac{1}{3}$, em lugar de fubtrahir o Log. de 3 podemos ajuntar o Log. de $\frac{1}{3}$, que he o complemento do Log. de 3; e affim nos outros cafos.

254 O mefmo fe entenderá dos Log. das fracçoens decimais. Se quizermos v. g o Log. de 0,575 que reprefenta o mefmo que $\frac{575}{1000}$, ao Log. de 575 ajuntaremos o complemento do Log. de 1000, e a foma 9,759668 ferá o Log. que bufcamos. De outra forte :- Bufque-fe o Log. da fracçaõ decimal, como fe foffe numero inteiro, e em lugar da characteriftica fe ponha huma que tenha tantas unidades menos que 10, 20 &c., quantas faõ as cafas defde o lugar das unidades atè a primeira letra da fracçaõ. Affim 0,05621 terá o Log. 8,749812; 0,0000000005621 o Log. 0,749812; e finalmente 0,00000000005621 o Log. 9,749812; fubentendendo-fe no primeiro e fegundo hum fó complemento, e no terceiro dous.

255 Quando dos Logarithmos fe houver de tornar aos numeros, fe no refultado de quaifquer operaçoens naõ fe puderem lançar fóra da characteriftica tantas dezenas, quantos forem os complementos que nellas entráraõ, he manifefto, que elle deve moftrar huma fracçaõ. Para determinarmos efta, lançaremos da characteriftica todas as dezenas que tiver, e confiderando o refto como Log. de hum numero inteiro, bufcaremos efte nas Taboas (n. 242 e feg.), e nelle notaremos tantas dezenas de cafas decimais da direita para a efquerda, quantos forem os complementos que no dito Log. reftáraõ.

Refultando v. g. o Log. 8,732235 de varias operaçoens em que tiveffe entrado hum complemento, conheceremos que elle pertence a huma fracçaõ, por naõ podermos lançar fóra da characteristica huma dezena que nella ha de mais. Assim buscando o numero inteiro que corresponde ao Log. 8,732235, acharemos 539802500; e fazendo nelle 10 casas de dizima, será a fracçaõ 0,0539802500.

Como porém raras vezes he necessario levar as fracçoens a taõ alto ponto de approximaçaõ, tomar-se-ha a characteristica a arbitrio, e tendo achado o numero competente com as letras que bastarem, delle formaremos a fracçaõ, pondo a sua primeira letra tantas casas adiante da virgula, quantas forem as unidades que a characteristica do Log. proposto tiver de menos que 10, 20 &c. conforme o Log. contiver hum, dous &c. complementos.

Deste modo o Log. 8,73225 procurado nas Taboas com a characteristica 3, corresponde ao numero 5398 proximamente; e porque a characteristica 8 tem 2 menos que 10, a primeira letra 5 deverá estar na segunda casa depois da virgula, e será a fracçaõ 0,05398. Se o Log. involvesse dous complementos, seria a fracçaõ correspondente 0,000000000005398.

256 Deve notar-se, que quando se multiplicaõ estes Logarithmos, como succede na formaçaõ das potencias das fracçoens, juntamente se multiplicaõ os complementos que nelles se contém. Por isso, lançando fora as dezenas que tiver a characteristica do producto, se terá conta dos complementos que nella ficaõ, para se determinar o valor da fracçaõ.

Por exemplo, dando-se o Log. 7,924753 que sabemos involver hum complemento, e querendo-se elevar á quinta potencia a fracçaõ correspondente, multiplicaremos o Log. por 5, e o producto 39,623765 terá 5 complementos. Omittindo as 3 dezenas, ficará o Log. 9,623765 com dous complementos; e conseguintemente corresponderá á fracçaõ 0,00000000004205.

257 Pelo contrario, quando os mesmos Logarithmos se houverem de dividir, como succede na extracçaõ das raizes, deve procurar-se que ajuntando as dezenas necessarias á characteristica se ponhaõ no Log. tantos complementos, quantas forem as unidades no expoente da raiz, ou o dobro, triplo &c. dellas; e praticando a divisaõ, o quociente conservará hum, dous, tres &c complementos.

Por exemplo, se o Log. 9,702922 tiver hum complemento, e da fracçaõ correspondente quizermos extrahir a raiz cubica, ajuntar-lhe-hemos 2 dezenas á characteristica, e ficará 29,702922 com tres complementos; entaõ dividindo por 3, o quociente 9,900974 terá hum só complemento, e mostrará a raiz que buscamos 0,7961. Se da fracçaõ correspondente ao Log. 1,987542, no qual ha dous complementos, quizermos extrahir a raiz quadrada, dividillo-hemos por 2 (porque naõ he necessario ajuntar dezena alguma á characteristica neste caso) e o quociente 0,993771 involverá hum complemento, e mostrará por conseguinte a fracçaõ 0,0000000857. Se da fracçaõ correspondente ao Log. 9,887745, no qual se contiverem 5 complementos, quizermos extrahir a raiz quarta, ajuntaremos 3 dezenas á characteristica e teremos 39,887745 com 8 complementos; entaõ dividindo por 4, o quociente 9,971936 conservará dous complementos, e mostrará por conseguinte a fracçaõ 0,00000000009374; e assim dos mais.

O uso dos Complementos serve de abbreviar ventajosamente as opperaçoens Trignometricas; e por isso he de grande utilidade na Astronomia, e em todas as Partes da Mathematica, onde se houver de praticar a resoluçaõ dos triangulos por meio dos Logarithmos.

FIM DA ARITHMETICA.

INDICE

Dos Principios que se contém nestes Elementos.

nando quantas vezes entra o divisor na primeira letra do dividendo, ou nas primeiras duas, quando a primeira for menor que o divisor, e assim se procederá de casa em casa até á ultima; advertindo, que naõ cabendo o divisor hum numero exacto de vezes na parte que se divide, o resto se ajuntará em lugar de dezenas á letra seguinte, e naõ chegando a caber huma vez, se assentará cifra no quociente. n. 60.

Sendo tambem composto o divisor, a operaçaõ he do mesmo modo: Toma-se no dividendo huma parte naõ menor que o divisor, e confrontando as primeiras letras de hum e outro; se acha a letra do quociente, a qual se multiplica pelo divisor, e o producto se diminue da parte do dividendo, e ao resto se ajunta a letra seguinte do mesmo dividendo, para formar huma nova parte que se toma a dividir do mesmo modo, e assim por diante. n. 62.

Quando o producto da letra do quociente pelo divisor sahe maior que a parte actual do dividendo, he sinal que a dita letra se julgou maior do que devia ser; e quando, diminuido o dito producto da parte correspondente do dividendo, ficar o resto naõ menor que o divisor, he sinal que a letra do quociente se assentou menor do que convinha. n. 63.

Quando o dividendo, e o divisor acabaõ ambos em cifras, antes de fazer a divisaõ podem cortar-se em ambos tantas, quantas forem as da quelle que menos tiver. n. 67.

A Divisaõ da dizima se reduz á dos numeros inteiros, procurando-se que no dividendo, e no divisor haja o mesmo numero de casas decimais. n. 68.

Se ao resto final de huma divisaõ se ajuntar huma cifra, e se continuar a operaçaõ, achar-se-ha a letra competente á casa das decimas, e assim por diante. n. 68

A Divisaõ, e Multiplicaçaõ provaõ-se reciprocamente huma pela outra; porque dividindo o producto por hum dos factores deve sahir o outro no quociente; e multiplicando o divisor pelo quociente, deve sahir o producto igual ao dividendo. n. 74.

Fracçaõ, ou *Quebrado*, he o numero que representa as partes da unidade, a qual se suppoem dividida em hum numero determinado de partes iguais. n. 78.

Para exprimir hum quebrado saõ necessarios dous numeros, hum que mostre em quantas partes se suppoem dividida a unidade, o qual se chama *denominador*; e o outro, que mostre de quantas dessas partes consta a quantidade que queremos significar, o qual se chama *numerador*. n, 80. 81.

Tanto o numerador, como o denominador de hum quebrado, chamaõ-se *termos* delle. n. 83.

O quebrado, que tiver o numerador maior que o denominador, vale mais que a unidade. n. 84.

Para extrahir os inteiros envolvidos em huma expressaõ fraccionaria, divide-se o numerador pelo denominador. n. 85.

Para reduzir hum inteiro á fórma de quebrado, multiplica-se pelo donominador que lhe queremos dar, e no producto virá o numerador. n. 86.

Hum quebrado naõ muda de valor, quando se multiplicaõ, ou dividem ambos os seus termos por hum mesmo numero. n. 88. 89.

Para reduzir dous quebrados ao mesmo denominador, multiplicaõ-se os dous termos de cada hum pelo denominador do outro. Sendo mais que dous quebrados, multiplicaõ-se os dous termos de cada hum pelo producto dos denominadores de todos os outros. n. 90. 91.

zindo as especies inferiores a huã fracçaõ da principal, antes de fazer as ditas operaçoens. n. 119.

Parte *aliquota* de hum numero he o numero, que nelle se contém algumas vezes exactamente. n. 120.

Para multiplicar os numeros complexos, resolvem-se as especies inferiores em partes aliquotas da especie principal, e humas das outras; e quando esta resoluçaõ naõ suggere productos faceis de calcular, suppre-se com productos subsidiarios. n. 121. 122. 123.

Para dividir hum complexo por incomplexo, no caso de ser o quociente da mesma natureza que o dividendo, parte-se pelo divisor a especie maior do dividendo, o resto se converte em unidades da especie seguinte, e se ajunta com as que houver no dividendo, e a soma se torna a partir pelo mesmo divisor; e assim por diante. n. 124.

Sendo porém o quociente de diversa natureza, reduzir-se-ha tanto o dividendo, como o divisor, ás unidades da infima especie do dividendo; e depois se praticará como no primeiro caso, tratando as unidades do dividendo assim reduzido, como se fossem da mesma especie das que devem sahir no quociente. n. 127.

Se tambem for complexo o divisor reduz-se ás unidades da sua infima especie, e multiplica-se o dividendo pelo numero que dessas unidades he necessario para fazer a unidade principal; e pratica-se a divisaõ, como no caso do divisor incomplexo. n. 128.

Quadrado de hum numero he o producto delle multiplicado por si mesmo. n. 129.

Raiz quadrada de hum numero he o numero, que o produz sendo multiplicado por si mesmo. n. 130.

A raiz de hum numero, que naõ he quadrado perfeito, chama-se *surda*, *irracional*, ou *incommensuravel*. n. 132.

O quadrado de qualquer numero, composto de dezenas, e unidades, contém *o quadrado das dezenas*, o *dobro do producto das dezenas pelas unidades*, e *o quadrado das unidades*. n. 134.

Para extrahir a raiz quadrada de qualquer numero, divide-se este em classes de duas letras, começando da direita para a esquerda; da ultima classe á esquerda (que póde ser de huma só letra) busca-se a raiz, que será a primeira letra da raiz procurada; o quadrado desta letra se diminue da mesma classe, e ao resto, se o houver, se ajunta a classe seguinte, e se formará hum dividendo parcial, cujo divisor será o dobro da raiz achada, o qual se escreverá da segunda letra do dividendo para a esquerda; o quociente será a segunda letra da raiz, a qual se assentará tambem á direita do divisor, e se multiplicará por elle assim augmentado; o producto se diminuirá do dividendo, e ao resto se ajuntará á classe seguinte, e se formará outro dividendo, que se partirá pelo dobro da raiz achada; e assim por diante. n. 137. 139.

A raiz appoximada de hum numero, que a naõ tem exacta, tira-se ajuntando ao dito numero tantas classes de duas cifras, quantas saõ as letras decimais, que se querem na raiz, e pratica-se a regra precedente. n. 140.

Para extrahir a raiz quadrada de num quebrado, tira-se a raiz tanto do numerador, como do denominador, se os termos saõ quadrados perfeitos; quando naõ, reduz-se o quebrado á dizima, de sorte que tenha numero

Se a proporçaõ arithmetica for continua, a soma dos extremos he dupla do meio; e reciprocamente. n. 177.

Em toda a proporçaõ geometrica, o producto dos meios he igual ao dos extremos; e reciprocamente. n. 178. 180.

Se a proporçaõ for continua, o producto dos extremos será igual ao quadrado do meio, e reciprocamente. n. 178.

Dados tres termos de huma proporçaõ geometrica conhecer-se-ha o quarto. Porque se este for hum dos extremos, o producto dos meios se dividirá pelo outro; e se for hum dos meios, o producto dos extremos se dividirá pelo outro meio. n. 179.

A proporçaõ de quatro termos naõ se perde, mudando os extremos para meios, e os meios para extremos; nem tambem, trocando entre si de lugar os meios, ou os extremos. n. 181 182.

A proporçaõ naõ se póde alterar, multiplicando, ou dividindo ambos os antecedentes, ou ambos os consequentes por hum mesmo numero. n. 185.

Se em qualquer proporçaõ geometrica, a soma, ou differença do antecedente e consequente, se comparar com o antecedente ou consequente, em ambas as rasoens do mesmo modo, o resultado estará em proporçaõ. n. 183.

Em toda a proporçaõ geometrica, a soma, ou differença dos antecedentes he para a soma, ou differença dos consequentes, como qualquer dos antecedentes para o seu consequente. n. 185.

Em qualquer numero de rasoens iguais, a soma de todos os antecedentes he para a soma de todos os consequentes, como qualquer antecedente para o seu consequente. n. 186.

Rasaõ composta he a que resulta de duas, ou mais rasoens, multiplicando entre si os antecedentes, e da mesma sorte os consequentes. n. 187.

Rasaõ *duplicada*, *triplicada*, *quadruplicada* &c, he a que se compoem de duas, tres, quatro &c rasoens iguais. n. 189.

Os productos de duas ou mais proporçoens, multiplicadas por ordem, ou termo por termo, tambem estaõ em proporçaõ. n. 190

As potencias semelhantes de quatro termos proporcionais, tambem saõ proporcionais. n. 191.

As raizes semelhantes de quatro termos proporcionais, tambem saõ proporcionais. n. 192.

A *Regra de tres* tem por objecto achar hum dos termos de huma proporçaõ por meio dos outros. Esta he *simples*, quando a questaõ naõ involve mais do que quatro termos; e *composta*, quando involve mais de quatro. n. 194. 196.

A regra de tres *directa* he quando hum dos termos principais deve conter o outro do mesmo modo que o relativo do primeiro contém o relativo do segundo; e *inversa*, ou *reciproca*, quando hum dos termos principais deve conter o outro, como o relativo deste contém o daquelle. n. 194. 195.

Na Regra directa cada termo principal com o seu relativo devem occupar juntamente o lugar de antecedentes, ou de consequentes; e na inversa, devem ter juntamente ou o lugar de meios, ou o de extremos. n. 194. 195.

A *Regra de Companhia* tem por objecto dividir hum numero em partes proporcionais a quaisquer numeros dados. n. 197.

Para achar qualquer dellas, faremos: Como a soma dos numeros dados para o numero proposto, assim qualquer dos numeros dados para a parte que lhe he proporcional. n. 197.

A *Regra de falsa posiçaõ* he simples

dos inteiros, antes da dizima do mesmo Logarithmo. n. 222.

O numero correspondente a qualquer Logarithmo tem sempre tantas letras, quantas saõ as unidades da characteristica, e mais huma. n. 222.

A soma dos Logarithmos de dous numeros he igual ao Logarithmo do seu producto. n. 226.

O Logarithmo de qualquer potencia de hum numero he igual ao Logarithmo delle, multiplicado pelo expoente da mesma potencia. n. 229.

O Logarithmo de qualquer raiz de hum numero he igual ao Logarithmo delle, dividido pelo expoente da mesma raiz. n. 23ç.

O Logarithmo do quociente de huma divisaõ he igual ao Logarithmo do dividendo menos o Logarithmo do divisor. n. 231.

Pratica-se a regra de tres por Logarithmos, somando os Logarithmos do segundo e terceiro termo, e tirando da soma o Logarithmo do primeiro; o resto he o Logarithmo do quarto. n. 232.

O Logarithmo de hum numero acompanhado de fracçaõ, acharse-ha reduzindo tudo a fracçaõ, e tirando o Logarithmo do denominador do Logarithmo do numerador. n. 234.

O Logarithmo de huma fracçaõ propria he igual á differença dos Logarithmos do numerador e denominador, precedida do sinal —, o qual mostra que esta differença he subtractiva; e por isso os Logarithmos das fracçoens proprias se devem tratar de hum modo contrario ao que se pratica com os Logarithmos dos numeros inteiros. n. 235.

Se á characteristica de hum Logarithmo se ajuntar huma, duas, tres unidades &c., corresponderá a hum numero dés, cem, mil vezes &c maior; e ao contrario. n. 238.

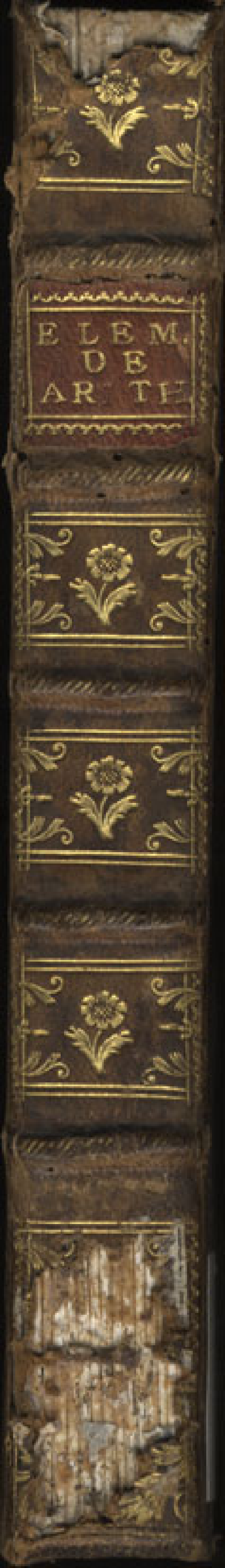
Para achar o Logarithmo de hum numero maior do que os das Taboas, busca-se nellas o Logarithmo que corresponde ás primeiras quatro, ou sinco letras delle, conforme o alcance das Taboas, e juntamente a differença deste Logarithmo ao immediatamente maior nas mesmas Taboas; esta differença se multiplicará pelo resto das letras do numero proposto, e do producto se cortaráõ outras tantas para a direita; as que ficarem se ajuntaráõ ao dito Logarithmo menor, e a soma com a characteristica competente será o Logarithmo procurado. n. 239.

O Logarithmo de hum numero seguido de dizima busca-se como se fosse inteiro, e da characteristica se tiraõ tantas unidades, quantas saõ as casas decimais. n. 240.

O Logarithmo de huma fracçaõ decimal propria buscase tambem, como se fosse numero inteiro, mas esse Logarithmo se tira de tantas unidades, quantas saõ as casas decimais, e ao resto se poem o sinal —.

Para achar o numero correspondente a hum Logarithmo, que se naõ acha nas Taboas, mas cahe entre dous Logarithmos da suprema classe dellas, tomar-se-ha a differença dos Logarithmos entre os quais elle cahe, e a differença entre o menor delles, e o Logarithmo proposto; e dividindo esta por aquella, o quociente nos dará as letras decimais, que devemos ajuntar ao numero correspondente ao Logarithmo proximamente menor. n. 243.

Se o Logarithmo tiver menor, ou maior characteristica, do que a classe suprema das Taboas, reduzir-se-ha a ella, ajuntandolhe, ou tirando-lhe as unidades necessarias; e no numero achado se adiantará a virgula


ELEM.
DE
ARITH.