cubo de qualquer numero composto de dezenas, e unidades. Tomemos por exemplo o numero 43.

$$\begin{array}{r} 64000 \\ 14400 \\ 1080 \\ 27 \\ \hline 79507 \end{array}$$

Primeiramente formaremos o cubo de 4, que he 64, e advertiremos que elle deve significar *milhares*, porque o 4 mostra dezenas, e o cubo de 10 he 1000; e assim acharemos que a primeira parte do cubo total he 64000.

Entaõ multiplicaremos o triplo do quadrado das 4 dezenas, que he 48, pelas tres unidades, e teremos o producto 144, que deve mostrar centenas, porque o quadrado das dezenas faz centenas, e assim será a segunda parte do cubo que buscamos 14400.

Depois multiplicaremos o triplo das 4 dezenas que he 12 pelo quadrado das 3 unidades que he 9, e resultará o producto 108, que devendo mostrar dezenas dará a terceira parte do mesmo cubo 1080.

Finalmente formaremos o cubo das 3 unidades, que será 27, e fará a ultima parte do cubo total.

Somando em fim estas quatro partes acharemos que o cubo de 43 he 79507; o qual sem duvida achariamos mais facilmente multiplicando primeiro 43 por si mesmo, e depois pelo produducto 1849 ; mas aqui naõ se trata tanto de formar o cubo , como de mostrar o meio , por onde se póde voltar reciprocamente do cubo para a sua raiz.

155 Isto pois supposto , eis-aqui o methodo que havemos de seguir na extracçaõ da raiz cubica.

Exemplo I.

BUsquemos pois a raiz cubica de 79507

Cubo	Raiz
79.507	43
155.07	
48	
79507	
00000	

Para distinguirmos a parte , em que se inclue o cubo das dezenas da raiz , deveremos separar com hum ponto as tres ultimas letras 507 do numero dado , nas quais temos visto que naõ se contém o dito cubo , por quanto representa milhares. Da parte 79 que fica á esquerda tiraremos pois a raiz cubica , que será 4 , e a escreveremos adiante da risca junto ao numero dado.

Desta letra , que achamos , e que mostra as dezenas da raiz , formaremos o cubo exacto 64 , e o tiraremos da dita parte 79 , assentando por báixo o resto 15 , para junto do qual abaixaremos as tres letras 507 que tinhamos separado , e será o resto total 15507, no qual estaráõ incluidas as tres partes restantes do cubo total , a saber ,

ber, tres productos do quadrado das dezenas pelas unidades, tres productos das dezenas pelo quadrado das unidades, e o cubo das unidades.

E como a primeira destas mostra centenas, apartaremos com hum ponto as duas ultimas letras 07 do dito resto, e nas que ficaõ 155 seráõ incluidos os tres productos do quadrado das dezenas pelas unidades. Para acharmos pois as unidades, dividiremos 155 pelo triplo do quadrado das 4 dezenas que temos achado, que he 48, o qual escreveremos debaixo: e achando que 48 se contém *tres* vezes em 155, assentaremos 3 na raiz, e esta será a letra das unidades.

Para verificar a letra que temos achado, e conhecer ao mesmo tempo o resto, se o houver, poderiamos formar as tres partes, que se devem achar no resto 15507; mas será igualmente commodo formar todo o cubo da raiz achada 43; e reproduzindo-se o numero dado ficaremos na certeza de que achamos a sua raiz exactamente.

Se o numero proposto tiver mais doque seis letras, discorreremos como no exemplo seguinte:

Exem-

Exemplo II.

SE nos pedirem a raiz cubica de 596947688

596.947.688	842
849.47	
192	
592704	
42436.88	
21168	
596947688	
000000000	

Primeiramente consideraremos a raiz, como composta de dezenas e unidades, e apartaremos com hum ponto as tres ultimas letras do numero dado. Depois, como a parte restante 596947, que contém o cubo das dezenas, tem tambem mais doque tres letras, deverá a sua raiz ter mais doque huma, e por conseguinte constará de unidades e dezenas de dezenas. Para acharmos tambem o cubo destas novas dezenas, deveremos pela mesma rasaõ apartar com hum ponto outras tres letras á direita, e ficará a parte 596, na qual se achará o cubo dellas.

Buscaremos pois a raiz cubica de 596, que he 8, e a escreveremos adiante da risca: e formando o seu cubo exacto 512 o diminuiremos de 596, e assentaremos por baixo o resto 84. Para junto deste abaixaremos a classe seguinte 947, e teremos o numero 84947, no qual apartaremos com hum ponto as duas ultimas letras á direita, e debaixo da parte 849 eſcreveremos o diviſor 192, que he o triplo do quadrado da raiz achada 8, e fazendo a diviſaõ acharemos o quociente 4, que aſſentaremos na raiz adiante da primeira letra 8.

Para verificarmos eſta raiz, e deſcobrirmos juntamente o reſto, formaremos á parte o ſeu cubo 592704, e o tiraremos da parte correſpondente do numero dado 596947, aſſentando por baixo o reſto 4243. Para o lado direito deſte reſto abaixaremos a claſſe ſeguinte 688, da qual apartaremos com hum ponto as duas ultimas letras, e dividiremos a parte reſtante 42436 pelo triplo quadrado da raiz achada 84, que he 21168, e acharemos o quociente 2, que aſſentaremos na raiz.

Para outra vez verificarmos a raiz achada 842, e ſabermos o reſto, ſe o houver, elevalla-hemos ao cubo, e dará 596947688, o qual tiraremos do numero dado; e porque naõ fica reſto, entenderemos que o numero 842 he exactamente a raiz que buſcamos.

Deve notar-ſe, que no decurſo deſta operaçaõ naõ ſe póde ja mais aſſentar na raiz letra maior do que 9; e quando coubeſſe maior, ſeria ſinal de ſe ter tomado a letra precedente menor, do que devia ſer. Tambem ſerá facil de conhecer, quando ſe tem tomado na diviſaõ hum quociente maior do que convinha, porque o cubo que reſultar naõ poderá diminuir-ſe da parte correſpondente do numero propoſto. Neſte caſo diminuirſe-há a raiz de huma, duas &c. unidades ſucceſſivamente, até que o ſeu cubo ſe poſſa diminuir.

Quan-

Quando o numero dado naõ he cubo perfeito, a raiz que se acha he approximada; e raras vezes bastará sabella até as unidades sómente. Para isto he muito ventajosa a *dizima*, por meio da qual se póde approximar cada vez mais para o verdadeiro valor da raiz, ainda que naõ he possivel que esta se represente ja mais por numero exactamente.

156 Para se approximar pois a raiz cubica, quanto for necessario, ajuntaremos ao numero dado tres vezes tantas cifras, quantas letras quizermos na *dizima*. E tirando a raiz como nos exemplo antecedentes, nella cortaremos com a virgula as letras correspondentes ás cifras que ajuntamos.

Exemplo III.

PEde-se a raiz cubica do numero 8755 até a casa das millesimas. Como as millesimas estaõ na terceira casa da dizima, deverá o cubo constar de nove decimais (n. 54); e por tanto ajuntaremos nove cifras ao numero proposto.

Pe-

Pelo que a questaõ se reduz a tirar a raiz cubica de 8755000000000.

```
8.755.000.000.000 | 20610
07.55             |
-------------------------
12
8000
-------
 7550.00
 1200
8741816
-------
  131840.00
  127308
8754552981
-----------
   44701190.00
  127743163
8754552981000
-------------
   4470190000
```

E distribuindo o dito numero em classes, buscaremos a raiz cubica da ultima classe 8 á esquerda, que he 2, e a escreveremos adiante da risca; e tirando o seu cubo 8 da mesma classe 8, assentaremos por baixo o resto 0, para junto do qual abaixaremos a classe seguinte 755. Separando nella as duas ultimas letras com hum ponto, debaixo da parte restante 7 escreveremos o divisor 12, que he tres vezes o quadrado da raiz achada 2. Dividindo 7 por 12, a letra que cabe ao quo-

quociente he o, a qual assentaremos na raiz, e formando o cubo da raiz ja achada 20, que he 8000, diminuillo-hemos da parte correspondente 8755, e escreveremos debaixo o resto 755, para junto do qual abaixaremos a classe seguinte 000, e continuaremos a operaçaõ do mesmo modo.

Acabada ella, acharemos que a raiz cubica de 8755000000000 exacta até a casa das unidades he 20610: e por conseguinte a raiz de 8755,000000000 será 20,610 exacta até a casa das millesimas, porquanto a raiz deve ter tres vezes menos casas na *dizima* do que ha no seu cubo (n. 54).

Querendo-se levar mais adiante esta approximaçaõ, ajuntar-se-haõ tres cifras ao ultimo resto, e se continuará a operaçaõ da mesma maneira que se praticou por cada classe, que se ajuntou a cada resto; e assim por diante.

55 Este methodo de extrahir a raiz cubica póde applicar-se ás raizes de mais alto gráo. Nellas observaremos em geral: 1º Que o numero dado se ha de distribuir em classes de tantas letras, quantos forem os gráos da potencia dada, exceptuando a ultima classe á esquerda que poderá constar de menos, e a raiz terá tantas letras quantas forem as classes. 2º Que da ultima classe á esquerda se buscará a raiz do gráo proposto, ou exacta, ou proximamente menor, a qual será a primeira letra da raiz que se busca. 3º Que a dita raiz achada se elevará á potencia dada, a qual se diminuirá da mesma ultima classe á esquerda, e ao resto se ajuntará a primeira letra da classe seguinte. 4º Que debaixo do res-

resto assim augmentado se assentará por divisor a potencia da mesma raiz achada do gráo immediatamente inferior ao gráo proposto, sendo essa multiplicada pelo numero, que mostra o gráo da potencia da questaõ. 5º Que fazendo-se a divisaõ o quociente se ajuntará á primeira letra da raiz, e toda a raiz achada se elevará outra vez á potencia da questaõ, a qual se tirará da parte correspondente do numero dado, ao resto se ajuntará do mesmo modo a primeira letra da classe seguinte, e se lhe applicará por divisor a potencia da raiz já achada do gráo proximamente menor que o proposto, multiplicada pelo exponente do mesmo gráo proposto &c.

Deste modo, para tirarmos a raiz 5ª de qualquer numero, dividillo-hemos em classes de 5 letras. Buscaremos a raiz 5ª da ultima classe á esquerda, que mostrará a primeira letra da raiz que procuramos. Formaremos a 5ª potencia exacta della, e a tiraremos da mesma classe, e ao resto ajuntaremos a primeira letra da classe seguinte. Debaixo deste resto assim augmentado assentaremos por divisor a potencia 4ª da raiz achada, multiplicada por 5; e pela divisaõ acharemos a segunda letra da raiz, a qual elevaremos novamente á 5ª potencia, e a diminuiremos da parte correspondente do numero dado; ao resto ajuntaremos a primeira letra da classe seguinte, e lhe aplicaremos por divisor o quintuplo da 4ª ptencia da raiz ja achada, e assim por diante.

Para se conhecer facilmente a raiz da ultima classe á esquerda será necessario ter presente huma taboa das potencias das numeros digitos, como aqui se mostraõ até á potencia nona. PO-

RAIZES	POTENCIAS							
	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª	9ª
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	4	8	16	32	64	128	256	512
3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683
4	16	64	256	1024	4096	16384	65536	262144
5	25	125	625	3125	15625	78125	390625	1953125
6	36	216	1296	7776	46656	279936	1679616	10077696
7	49	343	2401	16807	117649	823543	5764801	40353607
8	64	512	4096	32768	262144	2097152	16777216	134217728
9	81	729	6561	59049	531441	4782969	43046721	387420489

Tornando á raiz cubica, cujo uſo he mais frequente, naõ ſe póde negar que o methodo aſſima dado tem o incommodo de ſer neceſſario calcular os diviſores á parte, e formar o cubo da raiz todas as vezes que ſe acha huma letra de novo; calculo, que ſe faz cada vez mais trabalhoſo, á medida que ſe augmentaõ as letras na meſma raiz. Nos livros ordinarios ſe acha huma regra differente para a extracçaõ da raiz cubica, mas eſſa taõ complicada e trabalhoza, que certamente ſe deverá preferir o methodo que fica expoſto. Para facilitar pois eſta operaçaõ ſerá conveniente que ajuntemos aqui hnm methodo particular, o qual he da maneira ſeguinte.

Principiando a operaçaõ, como aſſima fica declarado, até ſe achar a ſegunda letra da raiz, eſta ſe aſſentará tambem abaixo da riſca, e atraz della para a eſquerda o triplo da primeira letra da meſma raiz. O numero que reſultar ſe multipliplicará pela mesma letra achada, e o producto se assentará debaixo do divisor, começando da ultima casa das duas letras, que foraõ separadas do dividendo. Este producto se somará com o divisor, e a soma se assentará por baixo, a qual se tornará a multiplicar pela mesma letra achada, e o producto se hirá logo diminuindo do dividendo; e ajuntando ao resto a classe seguinte teremos o novo dividendo. O divisor se achará facilmente, somando mentalmente o quadrado da letra ultimamente achada com os dous numeros antecedentes ao dividendo, e se assentará a soma debaixo do mesmo dividendo, chegando-a huma casa mais para a direita. Feita a divisaõ acharemos a terceira letra da raiz, a qual tambem escreveremos em baixo, e atraz della seguidamente o triplo das letras precedentes da mesma raiz; depois multiplicaremos este numero pela mesma letra, que ultimamente achamos, e praticaremos tudo o mais como na operaçaõ antecedente; e assim por diante. Quando o divisor sahir maior que o dividendo, pôr-se-há cifra na raiz, ajuntar-se-há outra classe ao dividendo, e o mesmo divisor se adiantará huma casa mais para a direita.

Exem-

Exemplo.

PEde-se a raiz cubica de 916358751227902464.

916.358.751.227.902.464.	971304
187358	277
243	2911
1939	29133
26239	2913904
3685751	
28227	
2911	
2825611	
860140227	
2828523	
87399	
282939699	
11321130902464	
283027107	
11655616	
283028723616	
0000000000000	

Tendo achado as duas letras 97 pelo methodo ordinario, assentaremos a segunda 7 debaixo da raiz, e atraz della o triplo da primeira 9, que he 27, e se formará o numero 277, o qual multiplicaremos pelo mesmo 7, e assentaremos

mos o producto 1939 debaixo do divisor 243, principiando porem da ultima casa do dividendo 187358; somando o dito producto com o divisor, teremos a soma 26239, a qual multiplicaremos outra vez pela mesma letra 7, e ao mesmo tempo tiraremos o producto do dividendo 187358, assentando por baixo o resto 3685, ao qual ajuntando a classe seguinte teremos o novo dividendo 3685751. E somando mentalmente o quadrado da mesma letra 7, que he 49, com os dous numeros 26239 e 1939, que precedem immediatamente ao dividendo, e escrevendo a soma huma casa mais para a direita, teremos o novo divisor 28227.

Pela divisaõ acharemos o quociente 1, que assentaremos na raiz, e tambem abaixo della com o triplo das letras precedentes da raiz 97, donde resultará o numero 2911, que multiplicaremos pela mesma letra achada 1, e somando o producto com o divisor teremos a soma 2825611, a qual tornaremos a multiplicar pela mesma letra 1, e tiraremos o producto do dividendo, donde ficará o resto 860140, ao qual ajuntaremos a classe seguinte, e será o novo dividendo 860140227; e somando o quadrado da mesma letra achada 1 com os dous numeros antecedentes ao dividendo, e escrevendo a soma huma casa mais para a direita, teremos o novo divisor 2828523.

Dividindo outra vez acharemos o quociente 3, o qual assentaremos na raiz, e em baixo com o triplo das letras antecedentes formaremos o numero 29133, que multiplicaremos pelo mesmo 3, e somaremos o producto 87399 com o divisor, donde resultará a soma 282939699, a qual tornaremos a multiplicar pelo mesmo 3, e tirando o producto do dividendo ficará o resto 11321130, ao qual ajuntaremos a classe seguinte para termos o novo dividendo 11321130902. Como pela formaçaõ do divisor vemos, que a letra 2 do numero que precede ao dividendo há de cahir debaixo da primeira letra do dividendo 1, e que naõ póde conseguintemente fazer-se a divisaõ, poremos logo cifra na raiz, ajuntaremos ao dividendo a classe seguinte, somaremos o quadrado da letra precedente 3 com os dous numeros precedentes ao dividendo, e escrevendo a soma duas casas mais para a direita teremos o novo divisor 283027107.

E tornando a dividir finalmente ácharemos o quociente 4, que assentaremos na raiz, e em baixo com o triplo das letras precedentes, que fará 2913904; multiplicando este numero pelo mesmo 4, e ajuntando o producto com o divisor teremos a soma 2830282725616, a qual multiplicaremos outra vez pelo 4, e diminuiremos o producto do dividendo; e porque naõ sobra nada, será a raiz cubica do numero proposto exactamente 971304. ∬

157 Como na multiplicaçaõ dos quebrados devemos multiplicar numerador por numerador, e denominador por denominador (n. 106), he claro, que o cubo de hum quebrado se formará elevando ambos os seus termos ao cubo. E reciprocamente, para se tirar a raiz cubica de hum quebrado, será necessario tirar as raizes tanto do nu-

numerador como do denominador. Deſte modo a raiz cubica de $\frac{27}{64}$ ſerá $\frac{3}{4}$ porque a raiz cubica do numerador 27 he 3, e do denominador 64 he 4.

158 Se o denominador ſómente for cubo perfeito, tirar-ſe-ha a raiz approximada do numerador, e por denominador ſe porá a raiz exacta do denominador primitivo.

Aſſim v. g. pedindo-ſe a raiz cubica de $\frac{143}{343}$, acharemos que a raiz do numerador até a caſa das centeſimas he 5,22, e que a raiz exacta do denominador he 7, peloque a raiz pedida ſerá proximamente $\frac{5,22}{7}$, ou 0,74 (n. 99).

159 Porem, ſe o denominador naõ for cubo perfeito, ambos os termos do quebrado ſe multiplicaráõ pelo quadrado do meſmo denominador (n. 88), e a operaçaõ ſe reduzirá ao caſo precedente.

Aſſim v. g. querendo ſaber a raiz cubica de $\frac{3}{7}$, multiplicaremos ambos os ſeus termos por 49 quadrado do denominador 7, e ſe reduzirá a $\frac{147}{343}$ (n. 88), cuja raiz cubica ſerá proximamente $\frac{5,27}{7}$ (n. 158), ou 0,75 (n. 99).

Quando os quebrados vem juntos com inteiros, os inteiros ſe reduzem aos quebrados (n. 86.), e a queſtaõ entrará nos caſos precedentes. Tambem podem reduzir-ſe os quebrados á dizima, antes de lhes tirarmos a raiz; mas eſta reducçaõ ſe continuará até achar tres vezes mais

M 2 le-

letras decimais do que ſe querem ter na raiz.

Deſte modo, para tirar a raiz cubica de 7 $\frac{3}{11}$ até a caſa das milleſimas, reduziremos eſte numero a 7,272727272, cuja raiz ſerá 1,937

160 Quando ſe houver de tirar a raiz cubica de huma fracçaõ decimal, procurar-ſe-ha que ella tenha tres vezes mais caſas de dizima, do que deve ter a raiz, ajuntando-lhe as cifras que para iſſo forem neceſſarias. Entaõ tirar-ſe-ha a raiz, ſem fazer caſo da virgula, e nella ſe apartaráõ depois com a virgula as caſas da dizima que lhe competem, iſto he, o terço das que puzermos no numero propoſto; e ſe as letras della naõ chegarem a tanto, ajuntar-ſe-lhe-haõ á eſquerda as cifras que forem neceſſarias.

V. gr. Para tirarmos a raiz cubica de 6,54 até a caſa das milleſimas, ajuntar-lhe-hemos ſete cifras, e buſcaremos a raiz como ſe foſſe do inteiro 6540000000, a qual acharemos ſer 1870. E ſeparando-lhe tres letras para a dizima, por haver nove no numero dado, ſerá a raiz pedida 1,870, ou 1, 87. Do meſmo modo acharemos, que a raiz cubica de 0,0006 he 0,08 até a caſa das centeſimas; e aſſim das mais.

161 O methodo abbreviado, que enſinamos para a Diviſaõ (n. 69. e ſeg.), tambem ſe applica facilmente á extracçaõ da raiz cubica. Porque ſendo baſtante tiralla até a caſa das unidades, dividir-ſe-ha o numero propoſto em claſſes, e depois ſelhe cortaráõ tantas letras á direita, menos duas, quanto for o dobro das meſmas claſſes. Das letras que ficarem á eſquerda

da se extrahirá a raiz cubica, e em chegando ao ultimo resto desprezaremos a ultima letra no divisor que lhe competir, e assim por diante; mas naõ tomaremos o divisor da operaçaõ precedente, senaõ quando elle tiver tantas letras constantes á esquerda quantas forem as do resto actual.

Das rasoens, proporçoens, e progressoens, e das regras, que dellas dependem.

162 PElo nome de *Rasaõ* nada mais entendemos na Mathematica do que a grandeza relativa, que resulta da comparaçaõ de duas quantidades. Esta he de dous modos.

163 Porque se compararmos duas quantidades, procurando sáber quanto huma dellas excede, ou he excedida da outra, o resultado da comparaçaõ será a differença das mesmas quantidades, e esta se chama *Rasaõ Arithmetica.*

Assim v. g. comparando 15 com 8 para saber a sua differença 7, este numero 7 que resulta da comparaçaõ he a rasaõ arithmetica do numero 15 ao numero 8.

Para denotarmos, que comparamos duas quantidades neste ponto de vista, costumamos separallas com hum ponto. Assim por esta expressaõ 15. 8 entenderemos a rasaõ arithmetica de 15 para 8.

164 Porem se compararmos duas quantidades, procurando conhecer quantas vezes huma contém, ou he contida na outra, o resultado desta comparaçaõ he a *Rasaõ Geometrica.* E quando se diz *Rasaõ* simplesmente, sempre se entende *Geometrica.*

Com-

Comparando v. gr. 12 com 3 para sabermos quantas vezes o contém, o que resulta desta comparaçaõ, isto he, o ser 12 *quadruplo* de 3, he a rasaõ geometrica de 12 para 3.

Para mostrarmos, que comparamos duas quantidades neste sentido, costumamos separallas com dous pontos. Esta expressaõ 12 : 3 significa a rasaõ geometrica de 12 para 3.

165 Das duas quantidades, que se comparaõ arithmetica ou geometricamente, a que se profere ou escreve em primeiro lugar chama-se *antecedente*, e a outra *consequente*. Assim na rasaõ 12 : 3 o numero 12 he antecedente, e o numero 3 consequente; e ambos elles em commum se chamaõ *termos* da rasaõ.

166 Para conhecer a rasaõ arithmetica de duas quantidades, naõ he necessario mais do que diminuir huma da outra, e o resto mostrará a rasaõ, ou quanto huma tem de mais que a outra.

167 Para avaliar porem a rasaõ geometrica de duas quantidades, deveremos dividillas huma pela outra, e o quociente mostrará a rasaõ dellas, isto he, quantas vezes huma contém a outra.

168 Daqui por diante avaliaremos sempre a rasaõ geometrica pela divisaõ do antecedente pelo consequente, aindaque aquelle seja mais pequeno. Assim a rasaõ de 12 para 3 será 4, e de 3 para 12 será $\frac{3}{12}$, ou $\frac{1}{4}$.

¶¶ Deve notar-se, que naõ póde haver rasaõ, senaõ entre quantidades *homogeneas*; porque as *heterogeneas* nem se excedem, nem se contém mutuamente. Assim 12 *toesas* para 3 *libras* naõ

tem

tem rafaõ alguma arithmetica, nem geometrica. Porque fem embargo de que o numero 12 tem fobre 3 o exceffo do 9, he vifivel que 12 *toefas* naõ tem fobre 3 *libras* exceffo algum affignavel nem de *libras*, nem de *toefas*. E do mefmo modo, aindaque 12 contem a 3 quatro vezes, 12 *toefas* naõ contém de modo algum a 3 *libras*, porque faõ quantidades de differente genero, entre as quais naõ póde haver comparaçaõ.

A differença dos termos na rafaõ arithemetica, e o quociente na geometrica, tambem tem o nome de *denominadores*, e *exponentes* da rafaõ.

A rafaõ geometrica divide-fe em *racional*, e *irracional*. He racional, quando o exponente fe póde exprimir por numero quer feja inteiro, quer quebrado; irracional, quando o exponente naõ póde exprimir-fe ja mais por numero algum exactamente, como he a rafaõ da unidade para a raiz quadrada de 2. Tambem fe divide em rafaõ de *igualdade*, e *defigualdade*, conforme confta de termos iguais, ou defiguais; chamafe rafaõ *de maior defigualdade*, quando o antecedente he maior que o confequente; e *de menor defigualdade* quando he menor.

Os Mathematicos antigos fazem finco differenças genericas da rafaõ de maior defigualdade, (que naõ deve ignorar quem quizer entender as fuas obras) a faber: *multiplex*, *fuperparticularis*, *fuperpartiens*, *multiplex-fuperparticularis*, *multiplex-fuperpartiens*; e da rafaõ de menor defigualdade faõ outras tantas differenças, que fe declaraõ com os mefmos nomes precedidos de hum *fub*, a faber: *fubmultiplex*, *fubfuperparticularis &c.*

Ra-

Rasaõ *multiplex* he, quando o antecedente contém o consequente algumas vezes exactamente; e *submultiplex*, quando nelle he contido do mesm modo. A primeira he em particular *dupla*, *tripla*, *quadrupla &c.* e a segunda *subdupla*, *subtripla*, *subquadrupla &c*, confóme os expoentes. A rasaõ 10:1 he *decuplá*, e 1:10 *subdecupla*.

Superparticularis he, quando o antecedente contém huma vez ao consequente, e alem disso huma parte aliquota delle, como 3:2; e *subsuperparticularis*, quando o antecedente he contido do mesmo modo no consequente, como 2:3. As especies da primeira distinguem-se com os nomes das partes aliquotas precedidos de hum *sesqui*; e as especies da segunda com os mesmos vocabulos precedidos de hum *sub*. Deste modo as rasoens 3:2, 4:3, 5:4, 6:5 &c pela mesma ordem tem os nomes de *sesquialtera*, *sesquitertia*, *sesquiquarta*, *sesquiquinta &c*; e as rasoens 2:3, 3:4, 4:5, 5:6 &c de *subsesquialtera*, *subsesquitertia*, *subsesquiquarta*, *subsesquiquinta. &c.*

Superpartiens he, quando o antecedente contém huma vez o consequente e mais algumas partes aliquotas delle, como 5:3; e *Subsuperpartiens*, quando o antecedente se contém no consequente do mesmo modo, como 3:5. As especies deste genero se denotaõ ajuntando a denominaçaõ das partes aliquotas, e metendo depois do *super* as vozes *bi*, *tri*, *quadri &c*, pelas quais se mostra quantas dessas partes aliquotas se exprimem. Assim 5:3 he rasaõ *superbipartiens tertias*, 8:5 *supertripartiens quintas &c.* E reci-

procamente, 3:5 he rasaõ *ſubſuper bipartiens tertias*, 5:8 *ſubſupertripartiens quintas &c.*

Multiplex-ſuperparticularis he, quando o antecedente contém algumas vezes o conſequente, e alem diſſo huma parte aliquota delle; e *ſubmultiplex-ſuperparticularis*, quando o antecedente ſe contém no conſequente do meſmo modo. As eſpecies da primeira ſaõ *dupla-ſesquialtera* 5:2, *dupla-ſesquitertia* 7:3 &c, *tripla-ſesquialtera* 7:2, *tripla-ſesquitertia* 10:3 &c &c; e da ſegunda *ſubdupla-ſesquialtera* 2:5, *ſubdupla-ſesquitertia* 3:7 &c, *ſubtripla-ſesquialtera* 2:7, *ſubtripla-ſesquitertia* 3:10 &c. &c.

Finalmente *multiplex-ſuperpartiens* he, quando o antecedente contém algumas vezes o conſequente e mais algumas partes aliquotas delle; e *ſubmultiplex-ſuperpartiens*, quando o antecedente ſe contém no conſequente do meſmo modo. As eſpecies de ambas facilmente ſe denominaõ pelo que aſſima fica declarado. A rasaõ 8:3 he *dupla-ſuperbipartiens tertias*, 74:7 *decupla-ſuperquadripartiens ſeptimas &c*; e reciprocamente, a rasaõ 3:8 he *ſubdupla-ſuperbipartiens tertias*, 7:74 *ſubdecupla-ſuperquadripartiens ſeptimas &c.*]]

169 A rasaõ arithmetica fica ſendo a meſma, todas as vezes que ambos os termos ſe augmentaõ ou diminuem de huma meſma quantidade; porque aſſim naõ ſe altéra nada a differença, na qual conſiſte a rasaõ. Aſſim 3.8 he o meſmo que 4.9, que 5.10 &c.

170 A rasaõ geometrica tambem ſerá a meſma, todas as vezes que ambos os termos ſe multiplicarem ou dividirem por huma meſma quan-

antidade. Porque consistindo a rasaõ no quociente do antecedente dividido pelo consequente (n. 168), he huma quantidade fraccionaria (n. 97), a qual naõ muda de valor, quando ambos os termos se multiplicaõ ou dividem por huma mesma quantidade (n. 88, 89). Assim a rasaõ 3:12 vale o mesmo que 6:24, multiplicando ambos os termos por 2; e o mesmo que 1:4, dividindo ambos os termos por 3.

171 Esta propriedade serve de muito para reduzir huma rasaõ aos termos mais simples. Tendo v. g. de examinar a rasaõ de $6\frac{3}{4}$ a $10\frac{2}{3}$; reduzindo tudo a quebrado, acharemos que he a mesma rasaõ que de $\frac{27}{4}$ a $\frac{32}{3}$; depois reduzindo ao mesmo denominador, a mesma que de $\frac{81}{12}$ a $\frac{128}{12}$; e supprimindo o denominador commum 12 (que he o mesmo que multiplicar ambos os termos por 12) a rasaõ proposta será a mesma que a de 81 para 128.

¶¶ A mesma mudança, que se faz em huma rasaõ arithmetica, ajuntando ou tirando huma quantidade ao antecedente, tambem se fará tirando ou ajuntando a mesma quantidade ao consequente; porque de ambos os modos resultaõ duas rasoens, das quais huma contém os termos da outra augmentados ou diminuidos da mesma quantidade. Na rasaõ 5.9 tanto faz tirar 2 ao antecedente para ficar 3.9 como ajuntar 2 ao consequente para ficar 5.11; e reciprocamente tanto faz ajuntar 2 ao antecedente para ficar 7.9, co-

mo

mo tirar 2 ao consequente para ficar 5.7.

E a mesma mudança, que se faz em huma rasaõ geometrica, multiplicando ou dividindo o antecedente por huma quantidade, se fará tambem dividindo ou multiplicando o consequente pela mesma quantidade; porque por ambas as operaçoens resultaõ duas rasoens, das quais huma he formada dos termos da outra multiplicados ou divididos por huma mesma quantidade. Na rasaõ 4:9 vale o mesmo dividir o antecedente por 2, que multiplicar o consequente pelo mesmo 2, pois sahiráõ as rasoens iguais 2:9 e 4:18; do mesmo modo multiplicando o antecedente por 3, ou dividindo o consequente pelo mesmo 3, resultaráõ as rasoens iguais 12:9, e 4:3 ʃʃ

172 Se quatro quantidades forem tais, que as duas primeiras tenhaõ a mesma rasaõ que as duas ultimas, formaráõ todas huma *proporçaõ*; e esta será arithmetica, ou geometrica, conforme forem as rasoens arithmeticas, ou geometricas.

Estas quatro quantidades 7, 9, 12, 14 formaõ huma proporçaõ arithmetca, porque entre as duas primeiras e as duas ultimas ha a mesma rasaõ de differença 2. Para denotar esta proporçaõ assentaõ-se os quatro termos deste modo 7.9:12.14, ou tambem assim $7-9=12-14$; expressoens, pelas quais entendemos que 7 *he para* 9 *como he* (arithmeticamente) 12 *para* 14.

Estas quatro quantidades 3, 15, 4, 20 formaõ huma proporçaõ geometrica, porque 3 se contém em 15 tantas vezes, como 4 em 20. Para assim o darmos a entender, assentaremos os termos

mos deste modo 3:15::4:20, ou 3:15 = 4:20; expressoens, que querem dizer, que 3 *he para* 15 *como* 4 *he para* 20.

§§ Daqui se entenderá facilmente, que o producto de qualquer multiplicaçaõ he o quarto termo em proporçaõ geometrica a respeito da unidade e dos factores, isto he, *que a unidade he para hum dos factores, como o outro para o producto;* porque o producto contem tantas vezes hum dos factores, quantas o outro contém a unidade.

Do mesmo modo na divisaõ, *a unidade he para o quociente, como o divisor para o dividendo;* porque o dividendo he igual ao producto do divisor multiplicado pelo quociente.

Deve notar-se que todas as rasoens geometricas saõ homogeneas, pois consistem no quociente do antecedente dividido pelo consequente, o qual quociente he sempre numero abstracto. Por isso, aindaque naõ póde haver rasaõ entre termos heterogeneos, póde com tudo haver proporçaõ, com tanto que cada hum dos antecedentes seja homogeneo com o seu consequente. Assim 12 *toesas* saõ para 3 *toesas*, como 8 *libras* para 2 *libras*; porque sem embargo de naõ ter comparaçaõ a *toesa* com a *libra*, póde com tudo comparar-se a rasaõ de *toesas* a *toesas* com a rasaõ de *libras* a *libras*; pois quantas vezes se contém 3 *toesas* em 12 *toesas*, tantas se contém 2 *libras* em 8 *libras*, isto he, *quatro vezes*. §§

173 O primeiro termo, e o quarto de huma proporçaõ, chamaõ-se *extremos*; o segundo e terceiro, *meios*.

Como na proporçaõ ha duas raseens, e por

con-

conſeguinte dous antecedentes e dous conſequentes, aos termos da primeira chamamos *primeiro antecedente, e primeiro conſequente,* e aos da ſegunda *ſegundo antecedente, e ſegundo conſequente.*

174 Quando ſaõ iguais os meios de huma proporçaõ, eſta ſe chama *continua.*

Aſſim 3.7:7.11 he huma proporçaõ arithmetica continua, e o termo 7 he o *meio arithemetico* entre 3 e 11. Eſta proporçaõ ſe eſcreve por abbreviatura deſta maneira ÷ 3.7.11, denotando o ſinal ÷ que o meio 7 faz juntamente as vezes de primeiro conſequente, e ſegundo antecedente.

Do meſmo modo 5:20::20:80 he huma proporçaõ geometrica continua, e o termo 20 he o *meio geometrico proporcional* entre 5 e 80. Eſta proporçaõ ſe eſcreve deſta maneira ∺ 5:20:80, denotando tambem o ſinal ∺ que o termo 20 ſe ha de tomar duas vezes.

175 Do que até agora temos dito ſobre a proporçaõ tanto arithmetica, como geometrica, ſe ſegue:

1º Que ſe na proporçaõ arithmetica ſe ajuntar ou tirar aos antecedentes a differença que reina na proporçaõ, conforme elles forem menores ou maiores que os conſequentes, cada hum ficará ſendo igual ao ſeu conſequente; pois he evidente, que deſte modo ſe ajunta ao termo menor de cada raſaõ o que lhe falta para igualar o maior, ou ſe tira do maior o exceſſo que tem ſobre o menor. Aſſim na proporçaõ 3.7 : 8.12, ſe ao primeiro e terceiro termo ſe ajuntar a differença 4, termos 7.7 : 12. 12.

2º Que ſe na proporçaõ geometrica ſe multipliplicarem os consequentes pelo exponente da rasaõ, ficaráõ ambos iguais aos seus antecedentes; porque multiplicar o consequente pelo exponente he tomallo tantas vezes, quantas se contém no antecedente. Assim na proporçaõ 12: 3 :: 20: 5, multiplicando e 5 pelo exponente 4, teremos 12: 12 :: 20 : 20; e na proporçaõ 15 : 9 :: 45 : 27, multiplicando 9 e 27 pelo expoente $\frac{15}{9}$ ou $\frac{5}{3}$, teremos 15 : 15 :: 45 : 45.

Propriedades das proporçoens arithmeticas.

176 A propriedade fundamental das proporçóes arithmeticas he, que *a soma dos extremos sempre he igual á soma dos meios.* Assim v. g. nesta proporçaõ 3.7 : 8.12 tanto os extremos 3 e 12 como os meios 7 e 8, fazem igualmente a soma de 15.

E com effeito se o primeiro termo for igual ao segundo, e o terceiro ao quarto, como na proporçaõ 7.7 : 12. 12, he claro, que os extremos fazem huma soma igual á dos meios. Porém toda a proporçaõ arithmetica póde reduzirse a esta fórma, ajuntando ou tirando aos antecedentes a differença que reina na proporçaõ (n. 175 1º). Logo, como esta addiçaõ ou subtracçaõ igualmente augmenta ou diminue a soma dos meios e dos extremos, e conseguintemente naõ altéra a sua igualdade ou desigualdade, he evidente, que sahindo as somas iguais pela dita reducçaõ, já eraõ iguais antes della.

177

177 Como na proporçaõ continua o meio se toma duas vezes, a soma dos extremos será dupla do mesmo meio. Assim na proporçaõ ÷ 7. 11. 15 a soma dos extremos 7 e 15 faz 22, que he o dobro de 11.

§§ Reciprocamente: se quatro quantidades forem tais, que a soma das medias seja igual á das extremas, formaráõ huma proporçaõ arithmetica.

Porque para serem iguais as ditas somas, he necessario que quanto huma das medias excede a huma das extremas, tanto pela outra destas seja excedida a outra daquellas; e consequentemente entre a primeira e segunda haverá a mesma differença que entre a terceira e quarta, como se requer para haver proporçaõ arithmetica.

Donde se segue, que tres quantidades estaraõ em proporçaõ continua todas as vezes que a media for igual á ametade da soma das extremas.

Sendo pois dados tres termos, acharemos o quarto arithmetico, somando o segundo com o terceiro, e diminuindo da soma o primeiro; dados dous termos, acharemos o terceiro em proporçaõ arithmetica continua, tirando o primeiro do dobro do segundo; e dados dous termos, acharemos o meio arithmetico, tomando ametade da soma delles.

Segue-se tambem, que em qualquer proporçaõ arithmetica podem os meios passar para extremos, e os extremos para meios; e que tanto os extremos como os meios podem trocar entre si o lugar, ficando sempre em proporçaõ. Deste modo a proporçaõ 3.7 : 8.12 pela permutaçaõ dos

dos termosproduz as proporçoens ſeguintes :

3. 7 : 8. 12
3. 8 : 7. 12
7. 3 : 12. 8
7. 12 : 3. 8
8. 3 : 12. 7
8. 12 : 3. 7
12. 7 : 8. 3
12. 8 ; 7. 3

Do meſmo principio ſe entende facilmente que a proporçaõ arithmetica ſe conſervará, ajuntando ou tirando qualquer quantidade ao primeiro termo e juntamente ao terceiro, ou ao ſegundo e juntamente ao quarto. Aſſim na proporçaõ 3. 7 : 8. 12, ajuntando a ambos os antecedentes qualquer numero v. g. 6, e a ambos os conſequentes quàlquer outro v. g. 9, conſervar-ſe-ha a proporçaõ 9. 16 : 14. 21.

Do meſmo modo, ſe os termos correſpondentes de duas ou mais proporçoens arithmeticas ſe ſomarem, ou diminuirem, as ſomas ou as differenças ficaráõ em proporçaõ. Aſſim ſomando as duas proporçoens 3. 7 : 8. 12 e 2. 5 : 6. 9 reſulta a proporçaõ 5. 12 : 14. 21 ; e diminuindo a ſegunda da primeira, a proporçaõ 1. 2 : 2. 3. ſſ

Propriedades das proporçoens geometricas.

178 A Propriedade fundamental das proporçoens geometricas he, que *o producto dos meios ſempre he igual ao producto dos extremos*;

aſſim

assim como na proporçaõ 3:15 :: 7:35, tanto os extremos 3 e 35, como os meios 7 e 15, daõ igualmente o producto 105.

Porque he evidente, que o producto dos meios e dos extremos deve ser o mesmo todas as vezes que cada hum dos antecedentes for igual ao seu consequente. Porem toda a proporçaõ geometrica póde reduzir-se a esta forma, multiplicando ambos os consequentes pelo expoente da rasaõ (n. 175. 2º). Logo, como por esta operaçaõ ambos os productos se multiplicaõ igualmeute pelo expoente; he claro, que sahindo iguais tambem eraõ iguais antes da dita multiplicaçaõ.

Logo na proporçaõ continua *he o producto dos extremos igual ao quadrado do meio.* Porque sendo os dous meios iguais; o seu producto he o quadrado de qualquer delles.

Sendo pois dados dous numeros, acharemos o meio proporcional multiplicando hum pelo outro, e tirando a raiz quadrada do producto. Querendo v. g. achar o meio geometrico entre 4 e 9, multiplicaremos estes numeros, e do producto 36 tiraremos a raiz quadrada 6, e teremos ⸫ 4:6:9.

179 Dados os tres primeiros termos de huma proporçaõ geometrica, achar-se-ha o quarto, multiplicando o segundo pelo terceiro, e dividindo o producto pelo primeiro. Porque he manifesto, que teriamos o quarto termo dividindo o producto dos extremos pelo primeiro (n. 74); porem o producto dos extremos he igual ao dos meios (n. 178.): logo teremos igualmente o quarto termo, dividindo o producto dos meios pelo primeiro.

Pedindo-ſe v. g. o quarto termo da proporçaõ geometrica, cujos tres primeiros ſaõ 3:8 :: 12, multiplicaremos 8 por 12, e partiremos por 3 o producto 96. O quociente 32 ſera o quarto proporcional, de ſorte que teremos 3:8 :: 12:32; e com effeito a primeira raſaõ he $\frac{3}{8}$, e a ſegunda $\frac{12}{32}$, que, dividindo-ſe ambos os termos por 4 (n. 89.), ſe reduz tambem a $\frac{3}{8}$.

Pelo meſmo raciocinio ſe vê claramente, que em geral ſe póde achar qualquer dos termos, dando-ſe os outros tres. *Buſcando-ſe algum dos extremos, o producto dos meios ſe dividirá pelo extremo dado; e buſcando-ſe algum dos meios, o producto dos extremos ſe dividirá pelo meio conhecido.*

180 Eſta propriedade da igualdade dos productos dos meios, e dos extremos, naõ póde competir ſenaõ a quatro quantidades em proporçaõ geometrica. Porque naõ eſtando em proporçaõ, he evidente que multiplicando ambos os conſequentes pela raſaõ dos dous primeiros termos, ſomente o primeiro antecedente ficará igual ao ſeu conſequente, e por eſſa raſaõ naõ poderá ſer o producto dos meios igual ao dos extremos.

Logo, *ſe quatro quantidades forem tais, que o producto das medias ſeja igual ao das extremas, eſtaraõ em proporçaõ geometrica.*

181 Donde ſe ſegue, *que a proporçaõ ſe conſervará entre quatro quantidades, paſſando as medias para extremas, e as extremas para medias.*

182 O meſmo ſuccederá, *ſe trocarmos o lugar*

gar das medias, ou tambem das extremas. Porque de ambos os modos se conservará a igualdade sobredita dos productos.

Assim da proporçaõ 3:8 :: 12: 32 resultaõ pela unica permutaçaõ dos termos as proporçoens seguintes.

$$3:8 :: 12:32$$
$$3:12 :: 8:32$$
$$8:3 :: 32:12$$
$$8:32 :: 3:12$$
$$12.3 :: 32:8$$
$$12:32 :: 3:8$$
$$32:12 :: 8:3$$
$$32:8 :: 12:3$$

A segunda destas se diz resultar da primeira *alternando*, a terceira *invertendo*, a quarta *invertendo e alternando*, a quinta *alternando e invertendo*, a sexta *transpondo*, a setima *transpondo e invertendo*, a oitava finalmente *transpondo invertendo e alternando*.

183 Como o terceiro termo de huma proporçaõ póde passar para o lugar do segundo; e reciprocamente; segue-se, *que a proporçaõ se ha de conservar, todas as vezes que ambos as antecedentes, ou ambos os consequentes se multiplicarem, ou dividirem juntamente por huma mesma quantidade.*

Porque mudados os termos, os que eraõ antecedentes formaõ a primeira rasaõ; e os consequentes a segunda. Peloque multiplicar; ou dividir ambos os antecedentes; ou ambos os consequentes por huma quantidade, vem a ser o mesmo que multiplicar, ou dividir os dous termos de huma raſaõ pela meſma quantidade; operaçaõ que lhe naõ altéra o valor (n. 170.).

Dada v. g. a proporçaõ 3:7 :: 12:28 , dividindo ambos os antecedentes por 3 podemos inferir que 1:7 :: 4:28 ; porque da primeira proporçaõ teremos *alternando* 3:12 :: 7:28 (n. 182.) , e dividindo os termos da primeira raſaõ por 3 (n. 170.) , teremos 1:4 :: 7:28 ; e *alternando* outra vez 1:7::4:28. (n. 182.).

184 *Se em qualquer proporçaõ grometrica a ſoma do antecedente e conſequente, ou a ſua differença , ſe comparar com o antecedente , ou com o conſequente em ambas as raſoens do meſmo modo , o reſultado formará huma proporçaõ.*

Porque ſe a ſoma , ou a differença referida , ſe comparar com o conſequente , he vizivel , que ajuntando ou tirando o conſequente ao antecedente , eſte o deverá conter mais ou menos huma vez do que antes o continha , e como eſta mudança ſe faz igualmente na ſegunda raſaõ , que pela natureza da proporçaõ he igual á primeira , ſeraõ neceſſariamente iguais as novas raſoens que aſſim reſultaõ. O meſmo raciocinio terá lugar , quando ſe comparar a dita ſoma ou differença com o antecedente , conſiderando primeiro os antecedentes mudados para o lugar dos conſequentes , e reciprocamente (n. 181).

Dando-ſe v. gr. a proporçaõ 12:3 :: 32:8 , della poderemos inferir outras quatro proporçoens , como aqui ſe moſtraõ , nas quais o ſinal + quer dizer *mais* , e o ſinal − *menos*.

$$\frac{12 : 3 :: 32 : 8}{\begin{array}{l} 12+3 : 3 :: 32 + 8:8 \\ 12+3 :12 :: 32 + 8:32 \\ 12-3 : 3 :: 32 - 8: 8 \\ 12-3 :12 :: 32 - 8:32 \end{array}}$$

A primeira destas se diz resultar da proporçaõ primitiva *compondo*, ou por *composiçaõ de rasaõ*, a segunda *por composiçaõ inversa de rasaõ*, a terceira *dividindo* ou *por divisaõ de rasaõ*, e a quarta *por divisaõ inversa*, ou *por conversaõ de rasaõ*.

185 Donde se collige, *que em toda a proporçaõ geometrica a soma ou differença dos antecedentes he para a soma ou differença dos consequentes, como qualquer antecedente para o seu consequente.*

Assim da proporçaõ $12:3 :: 32:8$ resultaõ as duas proporçoens seguintes:

$$12 + 32:3 + 8 :: 12:3$$
$$32 - 12:8 - 3 :: 12:3$$

Porque *alternando* teremos $12:32 :: 3:8$ (n.182), e desta pela *composiçaõ* e *divisaõ inversa de rasaõ* resultaráõ as duas proporçoens $12+32:12::3+8:3$, e $32-12:12::8-3:3$ (n.184), as quais alternando outra vez se convertem em $12+32:3+8::12:3$, e $32-12:8-3::12:3$ (n. 182).

186 Logo, *Sendo dado qualquer numero de rasoens iguais, será a soma de todos os antecedentes para a soma de todos os consequentes, como qualquer antecedente para o seu consequente.* Por exemplo, sendo iguais as rasoens $4:12 :: 7:21 :: 2:6$, teremos tambem $4+7+2:12+21+6 :: 4:12::7:21$ &c.

Por-

Porque tomando as duas primeiras 4:12::7:21; teremos 4+7:12+21::4:12 (n. 185), ou (pela rasaõ de ser 4:12::2:6) ++7:12+21::2:6; esta proporçaõ dará outra vez 4+7+2:12+21+6::2:6 (n. 185.), e assim por diante.

187 *Rasaõ composta* he a que se forma de duas ou mais rasoens, multiplicando entre si os antecedentes, e da mesma sorte os consequentes. Dando-se v. gr. as rasoens 12:4 e 25:5, o producto dos antecedentes será 300, e dos consequentes 20; e assim 300:20 será a rasaõ composta das duas rasoens 12:4 e 25:5.

188 Como qualquer rasaõ se avalia pelo quociente do antecedente dividido pelo consequente, e conseguintemente por huma fracçaõ, que tenha o antecedente por numerador, e o consequente por denominador (n. 168), he claro, que a rasaõ composta se forma pela multiplicaçaõ das fracçoens, que expoem o valor das rasoens componentes (n. 106). Assim exprimindo-se a rasaõ 12:4 por $\frac{12}{4}$ ou por 3, e a rasaõ 25:5 por $\frac{25}{5}$ ou por 5; a rasaõ composta dellas 300:20 se exprime por $\frac{300}{20}$, ou por 15, que he o producto dos exponentes das rasoens 12:4 e 25:5

189 A rasaõ composta de duas iguais chama-se *rasaõ duplicada* de qualquer dellas; sendo composta de tres, *triplicada*; de quatro, *quadruplicada &c*; e qualquer das rasoens iguais componentes será no primeiro caso *subduplicada* da rasaõ composta, no segundo *subtriplicada &c.* Dadas v. g. as rasoens iguais 2:3 e 4:6, a que dellas

las se compõe 8:18 será rasaõ duplicada de 2:3 ou de 4:6 ; e qualquer destas rasaõ subduplicada de 8:18.

190 *Se duas proporçoens se multiplicarem ordenadamente , isto he , se o primeiro termo de huma se multiplicar pelo primeiro da outra , o segundo pelo segundo &c , os quatro productos que resultarem estaraõ em proporçaõ.*

Porque multiplicar as duas proporçoens desta maneira , he multiplicar duas rasoens iguais por outras duas iguais (n. 172) ; logo as duas rasoens compostas que resultaõ saõ iguais ; logo os quatro productos formaõ huma proporçaõ (n. 172).

191 Donde se segue , *que os quadrados , cubos* , e em geral *as potencias semelhantes de quatro quantidades proporcionais , saõ tambem entre si proporcionais ;* porque , para formar as ditas potencias , naõ he necessario mais do que multiplicar a proporçaõ dada por si mesma huma , duas &c vezes consecutivamente

192 Do mesmo modo , *as raizes quadradas , cubicas* , e geralmente *as raizes semelhantes de quatro quantidades proporcionais , tambem saõ proporcionais*. Porque deste modo naõ se faz outra cousa , senaõ tirar raizes semelhantes de rasoens iguais (n. 142. 157. 168.) ; logo as novas rasoens que resultaõ seraõ iguais ; e por conseguinte as ditas raizes proporcionais (n. 172).

Uso

Uſo das propoſiçoens antecedentes.

193 AS propoſiçoens, que acabamos de moſtrar, e que ſe chamaõ *Regras das proporçoens*, tem hum uſo continuo em todas as partes da Mathematica. Porem aqui ſomente tocaremos o que pertence á Arithmetica, principiando pelo uſo da propoſiçaõ aſſima demonſtrada (n. 179.), que ſerve de fundamento a tudo o mais.

Da Regra de tres directa e ſimples.

194 A Regra de *tres*, que pelo ſeu grande uſo ſe chama tambem *Regra aurea*, divide-ſe em muitas eſpecies, as quais todas tem por objecto achar hum termo de huma proporçaõ por meio dos outros tres.

A que ſe chama *regra de tres directa e ſimples*, tem o nome de *ſimples*, e na linguagem dos noſſos autores antigos de *cham*, porque a propoſta das queſtoens a que ſe applica naõ involve mais do que quatro quantidades, das quais ſe daõ tres, e ſe pergunta a quarta.

Chama-ſe tambem *directa*, porque das quatro quantidades, que nella ſe conſideraõ ha duas principais homogeneas entre ſi, cada huma das quais determina huma das outras de tal modo, que como a primeira daquellas contem ou he contida na ſegunda, aſſim a que depende da primeira contenha, ou ſeja contida na que depende da ſegunda. Iſto ſe verificará todas as vezes que

hu-

huma das quantidades principais com a que della depende occuparem juntamente o lugar de antecedentes, ou de consequentes, o que naõ póde ter lugar na *regra de tres inversa*, como depois mostraremos.

O methodo de achar o quarto termo de huma proporçaõ, e de practicar conseguintemente a *regra de tres directa e simples*, ja fica sufficientemente declarado (n. 179); falta mostrar o uso desta regra por meio de alguns exemplos.

Exemplo I.

SE 40 obreiros em hum tempo certo tem feito 268 *toesas* de obra, quantas *toesas* faraõ 60 obreiros no mesmo tempo?

Pelo mesmo teor da questaõ se vê, que os dous numeros de obreiros 40 e 60 saõ os termos principais, e que a obra de 268^T he relativa ao primeiro, e a que se busca relativa ao segundo. Tambem he manifesto, que a obra ha de crescer na rasaõ dos obreiros, de sorte que o duplo, triplo, quadruplo &c numero delles, deve produzir huma obra dupla, tripla, quadrupla &c dentro do mesmo tempo; e conseguintemente, que o numero pedido de *toesas* deve conter o numero dado de 268 *toesas*, como o numero dos obreiros que as haõ de fazer contém o numero dos obreiros relativo ás 268 *toesas*. Pelo que deveráõ os termos heterogeneos respectivos óccupar juntamente o lugar de antecedentes, ou de consequentes, o que mostra ser a proporçaõ directa. Buscar-se-ha pois o quarto proporcional

aos

aos tres termos ſeguintes - - - - - - - - - - - - - -

$$40 : 60 :: 268^{T} :$$

ou, dividindo os termos da primeira raſaõ por 20 (n. 170), aos tres ſequintes - - - - - - - - - - -

$$2 : 3 :: 268^{T} :$$

Por tanto (n. 179) multiplicaremos 268^{T} por 3, e partiremos o producto 804^{T} por 2; o quociente 402^{T} ſerá o quarto termo, iſto he, a obra que faráõ 60 obreiros trabalhando tanto tempo e com tanta diligencia como os outros 40, que fizeraõ 268^{T}.

Exemplo II.

HUma náo com vento uniforme caminhou 275 leguas em 3 dias. Pergunta-ſe, em quantos dias caminhará 2000 leguas, continuando o vento e todas as mais circunſtancias do meſmo modo?

He claro que neſta queſtaõ ſe requer tanto mais tempo, quanto mais forem as leguas que ſe haõ de andar; e conſeguintemente, que o tempo, que ſe buſca deve conter tantas vezes 3 dias, quantas o numero das leguas que lhe ſaõ reſpectivas contém as leguas reſpectivas aos 3 dias. Buſcar-ſe-há pois o quarto proporcional aos tres termos ſeguintes - - - - - - - - - - - - - -

$$275 : 2000 :: 3^{d}.$$

Pelo que multiplicaremos 3^{d} por 2000; e dividindo o producto 6000^{d} por 275, teremos o quociente $21^{d}\ \frac{9}{11}$, que he o tempo que ſe requer para navegar 2000 leguas ſegundo as condiçoens da queſtaõ.

Exemplo III.

PAgando-ſe $168^{lb}\ 9^{ſ}\ 4^{d}$ por $52^{T}\ 4^{P}\ 5^{p}$ de obra pergunta-ſe quanto ſe deve pagar por $77^{T}\ 1^{P}\ 8^{p}$?

Pela meſma queſtaõ ſe vê, que o preço relativo a $77^{T}\ 1^{P}\ 8^{p}$ deve conter tantas vezes o preço relativo a $52^{T}\ 4^{P}\ 5^{p}$, quantas o numero $77^{T}\ 1^{P}\ 8^{p}$ contém o numero $52^{T}\ 4^{P}\ 5^{p}$. Buſcar-ſe-há pois o quarto proporcional aos tres termos ſeguintes - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$52^{T}\ 4^{P}\ 5^{p} : 77^{T}\ 1^{P}\ 8^{p} :: 168^{lb}\ 9^{ſ}\ 4^{d} :$$

Iſto ſe poderá fazer multiplicando $168^{lb}\ 9^{ſ}\ 4^{d}$ por $77^{T}\ 1^{P}\ 8^{p}$, e dividindo o producto por $52^{T}\ 4^{P}\ 5^{p}$, conforme as regras dadas para o calculo deſtes numeros (n. 122. 128.).

Porém ſerá mais facil o reduzir os dous termos da primeira raſaõ á ſua infima eſpecie de *pollegadas*; e a queſtaõ ſe reduzirá a buſcar o quarto termo da proporçaõ ſeguinte - - - - -

$$3797 : 5564 :: 168^{lb}\ 9^{ſ}\ 4^{d} :$$

Entaõ multiplicando $168^{lb}\ 9^{ſ}\ 4^{d}$ por 5564 teremos o producto $937348^{lb}\ 10^{ſ}\ 8^{d}$; e dividindo eſte por 3797, o quociente $246^{lb}\ 17^{ſ}\ 3^{d}\ \frac{2780}{3797}$ ſerá o que deve pagar-ſe por $77^{T}\ 1^{P}\ 8^{p}$.

Havendo alem diſſo fracções nos meſmos termos, depois de reduzidos á infima eſpecie como neſte exemplo, a ſua raſaõ ſe ſimplificará do modo que aſſima moſtrámos (n. 171).

Da

Da Regra de tres inverſa e ſimples.

195 A Regra de tres ſimples e inverſa, ou reciproca he, quando o termo pedido deve ter para o ſeu homogeneo dado a meſma raſaõ que tem o relativo deſte para o relativo daquelle; e niſto conſiſte a ordem inverſa, porque na regra directa o termo pedido deve ter para o ſeu homogeneo a meſma raſaõ que tem o relativo daquelle para o deſte. Pelo que na regra inverſa, ſendo os termos diſpoſtos como convem, huma das quantidades principais com a ſua relativa teraõ o lugar dos meios, e a outra com a ſua o lugar dos extremos.

Ordenados porém os termos na forma conveniente á natureza da queſtaõ, a operaçaõ ſe pratica como a precedente, buſcando o quarto proporcional aos tres termos dados.

Exemplo I.

SE 30 obreiros fazem certa obra em 25 dias, quantos obreiros ſaõ neceſſarios para fazerem a meſma obra em 10 dias?

Reflectindo na queſtaõ logo vemos, que devem ſer tanto mais os obreiros quanto forem menos os dias. Pelo que o numero pedido dos obreiros deverá conter o ſeu homogeneo (30 obreiros), como o relativo deſte (25 dias) contém o relativo daquelle (10 dias). Buſcar-ſe-há pois o quarto proporcional aos tres termos ſeguintes -

$$10^{d} : 25^{d} :: 30^{obr} :$$

E

E multiplicando o ſegundo pelo terceiro, e dividindo o producto pelo primeiro, acharemos 75, que he o numero dos obreiros da queſtaõ.

Exemplo. II.

TEndo a equipagem de huma náo mantimento por 15 dias, e reſtando-lhe huma viagem de 20 dias, pergunta-ſe como ſe devem reduzir as rações por dia?

Tomando a raçaõ coſtumada por unidade, he claro, que a raçaõ que buſcamos deve ſer tanto menor que a unidade, quanto he maior o numero de 20 dias que o de 15 dias; e por conſeguinte buſcaremos o quarto proporcional aos tres termos ſeguintes - - - - - - - - - - -

$$20^d : 15^d :: 1 :$$

O qual acharemos ſer $\frac{15}{20}$, ou $\frac{3}{4}$; e aſſim diremos que cada peſſoa ſe deve reduzir a tres quartos da raçaõ que houvera de ter, ſe reſtaſſem ſómente 15 dias de viagem.

Da Regra de tres compoſta.

196 NA Regra de tres compoſta a raſaõ da quantidade que ſe buſca para a ſua homogenea naõ ſe determina por meio da raſaõ ſimples de outras duas quantidades, como nas regras antecedentes, mas por meio de muitas raſões ſimples, as quaes ſe devem compôr (n. 187.) conforme pedir o eſtado da queſtaõ. Sendo eſtas compoſtas, a queſtaõ ſe reduz á regra

gra de tres ſimples, como ſe moſtra nos exemplos ſeguintes.

Exemplo I.

SE 30 jornaleiros fazem 132 *toeſas* de obra em 18 dias, 54 jornaleiros quantas *toeſas* faraõ em 28 dias?

He manifeſto, que a obra da queſtaõ depende naõ ſómente do numero dos jornaleiros, mas tambem dos dias. Para ſe attender a hum e outro, he neceſſario reflectir que 30 jornaleiros em 18 dias fazem o meſmo que 18 vezes 30, ou 540 jornaleiros em hum dia; e do meſmo modo, que 54 jornaleiros em 28 dias fazem tanto como 1512 jornaleiros em hum dia. Pelo que a queſtaõ ſe reduz a eſta: Se 540 jornaleiros fazem 132 toeſas de obra, quantas toeſas faraõ 1512 jornaleiros? e por conſeguinte buſcaremos o quarto termo deſta proporçaõ -

$$540 : 1512 :: 132^T :$$

E multiplicando o ſegundo termo pelo terceiro, e dividindo o producto pelo primeiro, ſerá o numero pedido $369^T\ 3^P\ 7^p\ 2^d\ \frac{2}{5}$.

Exemplo II.

HUm caminheiro andando 7 horas por dia fez huma jornada de 230 leguas em 30 dias. Pergunta-ſe, em quantos dias andará 600 leguas, caminhando 10 horas por dia com a meſma velocidade?

Se

Se o numero das horas fosse o mesmo em ambos os casos, he visivel, que o tempo pedido deveria ser tanto maior, quanto he maior a distancia relativa que se propoem; mas caminhando mais horas por dia no segundo caso, por esta rasaõ deverá ser o tempo menor; e por conseguinte a questaõ depende da regra de tres directa e inversa simultaneamente. Reduzir-se-há porém a huma regra simples, se reflectirmos que andar 30 dias a 7 horas por dia he fazer 210 horas effectivas de jornada. Assim a questaõ se reduzirá a estes termos: se em 210 horas andou hum caminheiro 230 leguas, em quantas horas andará 600 leguas? O numero das horas, que satisfizer a esta questaõ, se partirá por 10, visto andar o caminheiro 10 horas por dia, e o quociente será o numero dos dias que se pergunta. Assim buscaremos o quarto termo proporcional aos tres seguintes - - - - - - - - - -

$$230^{l} : 600^{l} :: 210^{h} :$$

O qual acharemos ser $547^{h}\,\frac{19}{23}$, e dividindo-o por 10, será o numero dos dias $54\,\frac{18}{23}$.

Da Regra de Companhia.

197 ESta Regra tomou o nome das Companhias de negocio, nas quais tem grande uso, quando se trata de repartir pelos companheiros o ganho ou a perda, conforme as entradas de cada hum. Porém o seu objecto em geral he dividir hum numero dado em partes, que

que tenhaõ entre ſi huma raſaõ dada. O methodo, que para iſto ſe dá, funda-ſe no principio que aſſima fica demonſtrado (n. 186.), como ſe verá no exemplo ſeguinte.

Exemplo I.

DA-ſe o numero 120 para ſer diſtribuido em tres partes tais, que ſejaõ entre ſi como os numeros dados 4, 3, 2.

Pelo teor da queſtaõ ſe offerecem immediatamente eſtas duas proporçóes. Que 4 he para 3 como a 1ª parte que ſe buſca he para a 2ª, e que 4 he para 2 como a 1ª parte he para a terceira; iſto he (n. 182.), Que 4 he para a 1ª parte como 3 para a 2ª, e 4 para a 1ª como 2 para a 3ª; pelo que temos tres raſóes iguais, a ſaber: 4 para a 1ª parte como 3 para a 2ª, e como 2 para a 3ª.

Porém temos moſtrado (n. 186.), que em qualquer numero de raſóes iguais a ſoma dos antecedentes he para a dos conſequentes, como qualquer dos antecedentes para o ſeu conſequente; logo no exemplo figurado ſerá a ſoma 9 das partes dadas para a ſoma 120 das partes que ſe pedem, como qualquer das partes dadas para a ſua relativa que ſe buſca.

Peloque a Regra de Companhia em geral ſe reduz a praticar a regra de tres tantas vezes, quantas ſaõ as partes que ſe buſcaõ, tomando ſempre por primeiro termo a ſoma das partes dadas, por ſegundo o numero que ſe quer diſtribuir, e por terceiro a parte dada que he re-

la-

lativa á que actualmente se busca. Assim na questaõ proposta deveráõ completar-se as proporçóes seguintes - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$9 : 120 :: 4 :$$
$$9 : 120 :: 3 :$$
$$9 : 120 :: 2 :$$

E na primeira acharemos que o quarto termo he $53\frac{1}{3}$; na segunda 40, e na terceira $26\frac{2}{3}$ (num. 179), os quais juntos fazem a soma de 120, e saõ entre si como as partes dadas 4, 3, 2.

§§ Esta regra se executará com mais brevidade, *partindo o numero proposto pela soma das partes dadas, e multiplicando depois o quociente por cada huma das mesmas partes.* Porque em qualquer regra de tres tanto se acha o quarto termo, multiplicando o segundo pelo terceiro e dividindo o producto pelo primeiro; como dividindo o segundo pelo primeiro e multiplicando o quociente pelo terceiro. E como na Regra de Companhia o primeiro e segundo termo saõ sempre os mesmos, huma só divisaõ basta para resolver todas as regras de tres, que nella forem necessarias.

Assim no mesmo Exemplo, partindo 120 por 9 teremos o quociente $13\frac{1}{3}$, e multiplicando este successivamente por 4, 3, 2, acharemos as partes relativas que lhes correspondem $53\frac{1}{3}$, 40, e $26\frac{2}{3}$. §§

De qualquer modo que se pratique, naõ

O he

he neceſſario buſcar a ultima parte. Baſta tirar do numero propoſto a ſoma das outras, porque o reſto ſerá conſeguintemente a ultima que falta.

Exemplo II.

A Preza de hum navio avaliada em 800000 *libras* deve ſer diſtribuida por tres companheiros, dos quais o primeiro entrou com 120000, o ſegundo com 60000, e o terceiro com 20000 *libras*. Pergunta-ſe a parte de cada hum.

Temos pois o numero 800000^{lb} para ſer partido em tres partes, que guardem entre ſi a raſaõ dos numeros 120000, 60000, 20000, ou (n. 170) dos numeros 12, 6, 2, porque a parte de cada hum deve ſer proporcional á ſua entrada. Aſſim com a ſoma 20 dos numeros 12, 6, 2, armaremos as tres proporções ſeguintes

$$20 : 800000^{lb} :: 12 :$$
$$20 : 800000^{lb} :: 6 :$$
$$20 : 800000^{lb} :: 2 :$$

E acharemos, que a parte do primeiro he 480000^{lb}, do ſegundo 240000^{lb}, e do terceiro 80000^{lb}.

Exemplo III.

HUma Companhia de tres negociantes ganhou 12050 *libras*, tendo entrado nella o primeiro com 3000^{lb} por 6 mezes, o ſegundo com 4000^{lb} por 5 mezes, e o terceiro com 8000^{lb} por 9 mezes; Quanto deve ter cada hum?

Eſte caſo contém huma Regra de Sociedade com-

composta, e esta se reduz facilmenie á simples. Porque a entrada do primeiro 3000^{lb} por 6 mezes vale o mesmo que 6 vezes 3000^{lb}, ou 18000^{lb} por hum mez; e do mesmo modo as entradas do segundo, e terceiro, valem o mesmo que 20000^{lb}, e 72000^{lb} pelo mesmo tempo de hum mez. Feita esta reducçaõ, naõ ha mais do que partir o numero 12050^{lb} em tres partes proporcionais ás entradas reduzidas 18000^{lb}, 20000^{lb}, 72000^{lb}; e praticando como no exemplo precedente acharemos, que deve ter o primeiro 1971^{lb} $16/$ 4^{d} $\frac{4}{11}$, o segundo 2190^{lb} $18/$ 2^{d} $\frac{2}{11}$, e o terceiro 7887^{lb} $5/$ 5^{d} $\frac{5}{11}$.

198 A' mesma Regra de Companhia se reduzem muitas outras questões, precedendo a preparaçaõ necessaria, como nos exemplos seguintes.

Dando-se o numero 650 para ser distribuido em tres partes tais, que a primeira seja para a segunda como 5 para 4, e para a terceira como 7 para 3, naõ poderemos immediatamente praticar a Regra, por naõ terem as duas rasões dadas 5:4 e 7:3 o primeiro termo commum. Mas a essa forma se reduziráõ, sem perderem o valor, multiplicando ambos os termos de cada huma pelo primeiro da outra (n. 170). Assim resultaráõ as rasões equivalentes 35 : 28 e 35 : 15, e a questaõ será reduzida a partir o numero 650 em tres partes proporcionais aos numeros 35, 28, 15, segundo a Regra assima dada.

Se o numero houvesse de partir-se em quatro partes, de ſorte que a primeira foſſe para a ſegunda como 5 para 4, para a terceira como 9 para 5, e para a quarta como 7 para 3, eſtas raſões ſe reduziriaõ a ter o primeiro termo commum, multiplicando ambos os termos de cadahuma pelo producto dos primeiros termos de todas as outras. Donde teriamos as raſões equivalentes 315 : 252, 315 : 175, 315 : 135; e a queſtaõ ſeria reduzida a partir o numero propoſto em quatro partes proporcionais aos numeros 315, 252, 175, e 135.

Da Regra de Falſa Poſiçaõ.

199 USa-ſe deſta Regra, quando em lugar do numero, que buſcamos, ſubſtituimos outro qualquer, e procedendo com elle conforme o teor da queſtaõ, comparamos o reſultado com o que devia ſahir, para dahi virmos no conhecimento do verdadeiro numero, que ſatisfaz á meſma queſtaõ. Chama-ſe ſimples, quando baſta fazer huma ſó hypotheſe; composta, quando ſaõ neceſſarias duas.

A ſimples pratica-ſe por huma regra de tres, na qual *ſerve de primeiro termo o numero que reſultou da hypotheſe conforme as condições da queſtaõ, de ſegundo o numero que devia reſultar, e de terceiro a meſma hypotheſe.* E por iſſo ſó póde uſar-ſe eſta regra nas queſtões, em que o numero que ſe buſca he para o numero dado que delle reſulta, como qualquer outro para o que delle ha de reſultar da meſma maneira; circunſtancia, que deve conhecer-ſe pela natureza da queſ-

questaõ : e quando naõ , póde tentar-se a Regra , e depois fazendo experiencia do numero achado se conhecerá , se com effeito satisfaz á questaõ.

Exemplo.

PErgunta-se o numero , cujo terço , quinto , e tres septimos façaõ juntamente 808.

Para evitarmos quebrados , podemos escolher para hypothese hum numero que tenha as partes aliquotas 3, 5, 7, o qual acharemos multiplicando entre si estes tres numeros , que daõ o producto 105. Tomando pois o numero 105 por hypothese , buscaremos o seu terço 35 , o seu quinto 21 , e tres septimos 45. Se a soma destes fizesse 808 , o mesmo numero da hypothese seria o que buscamos ; porém como a soma faz 101 , buscaremos o quarto proporcional aos tres termos seguintes - - - - - - - - -

101 : 808 :: 105 :

E acharemos o numero 840 , que satisfaz á questaõ.

A Regra de duas posições he mais geral , pois naõ sómente por ella se resolvem todas as questões da Regra simples , mas tambem muitas outras , que estaõ fóra do alcance daquella. Pratica-se desta maneira :

Em lugar do numero que se busca toma-se arbitrariamente qualquer por hypothese , e conforme a questaõ se examina o que delle resulta ; depois toma-se outro qualquer , e se nota tambem o que delle resulta. Entaõ se faz esta proporçaõ: *Como a differença dos resultados das du-*

duas hypotheſes, para a differença entre o reſultado da primeira hypotheſe e o verdadeiro reſultado que devia ſahir, aſſim a differença das hypotheſes para hum quarto. Eſte ſe ajuntará á primeira hypotheſe, conforme ella produzio menos, ou mais do que devia ſer, e iſto no caſo de que creſcendo a hypotheſe creſça tambem o reſultado; ſendo ao contrario, o numero achado ſe ajuntará ou diminuirá conforme a meſma hypotheſe tiver produzido mais ou menos do que convinha. Como qualquer das hypotheſes ſe póde tomar como primeira, he claro que de dous modos differentes ſe póde achar o que ſe buſca.

Exemplo.

TRes negociantes ganháraõ 6954^{lb}. O ſegundo teve mais que o primeiro 54^{lb}, e o terceiro mais que os outros dous 78^{lb}. Pergunta-ſe o lucro de cada hum.

Supponhamos para mais facilidade que o lucro do primeiro foi 1^{lb}. Logo conforme a queſtaõ ſeria o lucro do ſegundo $1^{lb} + 54^{lb}$, ou 55^{lb}, e do terceiro $1^{lb} + 55^{lb} + 78^{lb}$, ou 134^{lb} os quais ſomados daõ 190^{lb}.

Supponhamos outra vez que o lucro do primeiro foi 2^{lb}, e teremos para o ſegundo 56^{lb}, e para o terceiro 136^{lb}, cuja ſoma dá 194^{lb}.

Aſſim das duas hypotheſes 1^{lb} e 2^{lb} temos os reſultados 190^{lb} e 194^{lb}, devendo ſahir 6954^{lb}. A differença entre os reſultados das duas hypotheſes he 4^{lb}, entre o reſultado da primeira hypotheſe ao que devia reſultar he 6764^{lb}, e entre as duas hypotheses he 1^{lb}. Pelo que buscaremos o quarto proporcional aos tres termos seguintes -

$$4 : 6764 :: 1^{lb} :$$

que acharemos ser 1691^{lb}, e ajuntando-o á primeira hypothese 1^{lb} teremos o ganho do primeiro 1692^{lb}, e por conseguinte o do segundo 1746^{lb}, e do terceiro 3516^{lb}, que fazem com effeito a soma de 6954^{lb}, e satisfazem ás mais condiçóes da questaõ.

He claro, que esta Regra naõ póde ter lugar senaõ nas questóes, em que a differença das hypotheses he constantemente proporcional á differença dos resultados que ellas produzem, segundo o teor das mesmas questóes. Quando porém as hypotheses se tomaõ proximas ao numero que se busca, em todas as questóes tem lugar proximamente a dita proporcionalidade; e por isso esta Regra tem grande uso na resoluçaõ das equaçóes de gráo superior, e de muitas outras questóes em toda a Mathematica.

Se fossem duas as quantidades que se perguntaõ, seriaõ necessarias tres hypotheses. Porque em primeiro lugar se deveriaõ suppor duas quaisquer quantidades em lugar dellas, depois conservando a primeira se augmentaria ou diminuiria arbitrariamente a segunda, e finalmente conservando a segunda se faria mudança na primeira. Do mesmo modo se mostra, que seriaõ necessarias quatro posiçoens, se fossem tres as quantidades, e assim por diante. Para estes casos seria cousa muito embaraçada o prescrever regras arithmeticas, quando por outra parte se pó-

de

de com muita facilidade e ſegurança dirigir o calculo por meio da Algebra.

Da Regra de Liga.

200 ESta Regra tem por objecto a miſtura das couſas de differente valor, e he de dous modos: Directa, quando ſe daõ as quantidades que ſe haõ de miſturar, com o valor de cada huma, e ſe pergunta o valor do miſto que reſulta; Inverſa, quando ſe dá a valor das couſas que ſe haõ de miſturar, e ſe pergunta a porçaõ que de cada huma ſe deve tómar, para que o miſto ſeja de hum preço dado.

A primeira executa-ſe deſte modo: *Cada huma das quantidades ſe multiplica pelo ſeu valor, a ſoma dos productos ſe divide pelo numero das quantidades, e o quociente he o valor que ſe buſca.*

Exemplo.

QUerendo ligar 5 marcos de ouro de 24 quilates com 8 de 21, e 6 de 17; pergunta-ſe o quilate a que ſe reduz o compoſto.

Multipliquem-ſe os 5 marcos pelos ſeus reſpectivos quilates 24, e daráõ o producto 120; do meſmo modo multipliquem-ſe os 8 marcos por 21, e os 6 por 17, e daráõ os productos 168, e 102. A ſoma de todos tres faz 390, a qual ſendo dividida pela ſoma total dos marcos 19 dá no quociente 20 $\frac{10}{19}$; e eſtes ſaõ os quilates do compoſto.

Na Regra inverſa, quando ſómente duas couſas ſe haõ de ligar a hum preço dado entre os preços dellas, praticar-ſe-haõ eſtas duas proporçoens. *Como a differença entre os preços dos ſimplices para a differença entre os preços do composto e do ſimples de menor valor, aſſim a quantidade do compoſto para a parte que deve ter do ſimples de maior valor.* Depois: *Como a differença entre os preços dos ſimplices para a differença entre os preços do compoſto e do ſimples de maior valor, aſſim a quantidade do compoſto para a parte que deve levar do ſimples de menor valor.*

Exemplo.

HUm Ourives quer fazer huma obra que tenha de pezo 8 marcos, e ſeja de 20 quilates e $\frac{1}{2}$ conforme a Lei; e para iſſo quer ligar duas eſpecies de ouro, hum de 22 quilates, outro de 17. Pergunta-ſe quanto deve tomar de cada hum.

Tome-ſe a differença entre os quilates das eſpecies dadas 22 e 17, que he 5, e as differenças entre o quilate propoſto 20 $\frac{1}{2}$ e cada hum dos outros, que ſaõ 3 $\frac{1}{2}$, e 1 $\frac{1}{2}$; e buſque-ſe o quarto termo nas duas proporçoens ſeguintes --

$$\begin{matrix} 5 : 3\frac{1}{2} :: 8 : \\ 5 : 1\frac{1}{2} :: 8 : \end{matrix} \quad \text{ou (n. 171)} \quad \begin{matrix} 10 : 7 :: 8 : \\ 10 : 3 :: 8 : \end{matrix}$$

A primeira das quais dará 5 $\frac{3}{5}$, iſto he 5 mar-

cos,

cos, 4 oitavas, 57 grãos e $\frac{3}{5}$, que hè a parte do ouro de 22 quilates, e a ſegunda dará $2\frac{2}{5}$, ou 2 marcos, 3 oitavas, 14 grãos e $\frac{2}{5}$, que he a parte que ſe deve tomar do ouro de 17 quilates.

Quando ſe haõ de ligar mais do que duas eſpecies de diverſo valor, primeiramente ſe ligaráõ pela Regra directa todas as que forem de maior valor que o compoſto que ſe pertende fazer, tomando de cada huma dellas arbitrariamente a porçaõ que melhor parecer, e ſe buſcará o preço deſte compoſto. O meſmo ſe praticará com todas as eſpecies de menor valor que o intermedio dado. E deſte modo ficaráõ as eſpecies reduzidas a duas, huma de valor maior, e outra de menor que o propoſto, as quais ſe ligaráõ como no caſo precedente, e achando-ſe a porçaõ que de cada huma ſe deve tomar, tambem conſtaráõ as partes dos ſimplices, de que arbitrariamente as compuzémos.

Exemplo.

DAõ-ſe quatro qualidades de vinho, o primeiro dos quais vale a 120 reis a medida, o ſegundo a 90, o terceiro a 60, e o quarto a 50, e delles ſe quer fazer huma miſtura que valha a 70 reis a medida.

Primeiramente miſturaremos os dous de maior valor que o propoſto tomando de cada hum as partes que melhor nos parecer, v. gr. duas medidas do que vale a 120, e tres do que vale a 90, e acharemos que o todo aſſim compoſto valerá a a raſaõ de 102 a medida. Depois ſupporemos tambem miſturados os outros dous, tomando igualmente de cadá hum as partes que nos parecer, vg. duas partes do que vale a 60, e tres do que vale a 50, e acharemos que o preço do miſto ſerá a 54. Aſſim teremos duas qualidades de vinho, hum que vale a 102, e outro que vale a 54, para ſerem miſturados de ſorte que o compoſto valha a 70. E praticando como no exemplo precedente acharemos, que do primeiro deveremos tomar huma porçaõ como $\frac{1}{3}$, e do ſegundo como $\frac{2}{3}$, ou do primeiro como 1, e do ſegundo como 2. Porem ambos elles ſaõ compoſtos de outros dous, cujas partes fizemos entrar na raſaõ de 2 e 3; logo as partes dos quatro vinhos ſeraõ como 2, 3, 4, 6; iſto he, por cada duas medidas do primeiro tomaremos 3 do ſegundo, 4 do terceiro, e 6 do quarto.

Eſta queſtaõ ſe póde reſolver de muitas maneiras, conforme as partes que arbitrariamente ſe tomarem para formar os dous compoſtos parciais, que finalmente ſe haõ de ligar.

Outras Regras Relativas ás Proporçoens.

201 MUitas outras Regras ſe encontraõ nos livros de Arithmetica, as quais ſe reduzem á pratica da Regra de tres, e ſendo bem entendida a natureza das queſtoens naõ podem embaraçar a quem ſouber o que ate agora temos dito.

202 Deſte genero he a *Regra dos juros*, na qual ſe buſca o intereſſe de qualquer quantia por qualquer tempo, ſuppoſta a raſaó do que vence 100 cada anno.

Pergunta-ſe v. gr. o juro que vence a quantia de 449200 reis em 7 annos e 3 mezes a raſaó de 5 por 100 em cada anno. Como 100 vencem de juro 5 em hum anno, em 7 annos e $\frac{1}{4}$ venceráó 36 $\frac{1}{4}$, e por conſeguinte teremos a proporçaó: Como 100 para 36 $\frac{1}{4}$, aſſim o capital 449200 para o ſeu juro, que ſe achará ſer 162835.

Dando-ſe a quantia 61 2035 ſoma do capital e juros vencidos em 7 annos e 3 mezes, a 5 por 100, ſe quizermos ſaber o capital, reflectiremos, que vencendo 100 no dito tempo 36 $\frac{1}{4}$, deveremos ter a proporçaó: Como 136 $\frac{1}{4}$ para 100, aſſim a quantia dada 612035 para o capital que ſe pede, 449200.

Perguntando-ſe o capital, que em 7 annos e 3 mezes produza 162835 a raſao de 5 por 100, teremos: Como 36 $\frac{1}{4}$ para 100, aſſim o juro dado 162835 para o capital que ſe pergunta, 449200.

Perguntando ſe o tempo, em que o capital 449200 ha de produzir o juro 162835, a 5 por 100, teremos: Como 449200 para 162835, aſſim 100 para hum quarto, que ſerá 36 $\frac{1}{4}$. Eſte he o ju-

ro

ro de 100 dentro do tempo pedido, e como o juro annual de 100 he 5, dividindo $36\frac{1}{4}$ por 5, o quociente $7\frac{1}{4}$ mostrará o dito tempo, isto he, 7 annos e 3 mezes.

Perguntando-se em fim a que rasaõ por 100 se deve pôr o capital 449200 para dar 162835 em 7 annos e tres mezes, teremos: Como 449200 para 162835, assim 100 para $36\frac{1}{4}$; e dividindo este numero pelo tempo $7\frac{1}{4}$, o quociente 5 dará o juro annual de 100, que se pergunta.

Pelo que respeita ao *juro dos juros*, e outras questoens mais complicadas sobre interesses e usuras, na Algebra se resolveraõ com mais facilidade.

203 Nos *descontos*, e *abatimentos* se discorre do mesmo modo que nos juros, como se mostra nos exemplos seguintes.

Comprou certa pessoa hum campo por 4536 *libras* fiado por 10 annos; mas resolvendo-se logo a pagar de contado, offerece o pagamento ao vendedor abatendo-lhe na rasaõ de $4\frac{1}{2}$ por 100. Pergunta-se quanto deve pagar?

He manifesto, que neste caso naõ se busca outra cousa senaõ o capital que com o seu juro de $4\frac{1}{2}$ por 100 em dés annos faça 4536^{lb}. Ora como 100 produzem $4\frac{1}{2}$ por anno, em dés annos produziraõ 45; e assim teremos: Como 145 para 100, assim 4536^{lb} para a quantia que se pede de, a qual he 3128^{lb} 5^{s} 6^{d} $\frac{6}{29}$.

Tendo huma pessoa passado a hum mercador hum credito de 2844^{lb} para pagar no termo de hum anno, e querendo remillo passados 7 mezes, com a condiçaõ de lhe fazer o credor hum abatimento na rasaõ de 6 por 100; pergunta-se, quanto deve pagar?

Como 100 pela convençaõ vencem 6 em hum anno, em 7 mezes deveraõ vencer $3\frac{1}{2}$. Assim o que o devedor havia de pagar no principio como 100, no fim do anno o devia pagar como 106, e passados 7 mezes sómente, o haverá de pagar como $103\frac{1}{2}$. Por conseguinte teremos: Como 106 para $103\frac{1}{2}$, assim 2854^{lb} para a quantia que se pergunta, a qual acharemos ser 2786^{lb} 13^{s} 9^{d} $\frac{15}{53}$.

Deste modo usando da regra de tres, se resolvem outras muitas questoens pertencentes aos contractos mercantís, nas quais, para quem tem entendido os exemplos precedentes, naõ he necessario entrar com mais individuaçaõ.

Das Progressoens Arithmeticas.

204 A *Progressaõ Arithmetica* he huma serie de termos, que de tal forma se vaõ seguindo huns aos outros, que cada hum exede ao precedente, ou he excedido delle, em huma quanti-

da-

dade conſtante. Por exemplo eſta ſerie

$\div$ 1 . 4 . 7 . 10 . 13 . 16 . 19 . 22 . 25 &c.

he huma Progreſſaõ Arithmetica , porque cada termo tem de exceſſo ſobre o que lhe fica atraz a meſma quantidade 3. Eſta Progreſſaõ ſe denota com o meſmo ſinal $\div$, que ſe uſa na Proporçaõ Arithmetica continua (n. 174), porque na realidade naõ he mais do que a meſma Proporçaõ continuada alem do terceiro termo.

A Progreſſaõ he *creſcente* , *aſcendente* , ou *divergente* , quando os termos ſaõ cada vez maiores ; *decreſcente* , *deſcendente* , ou *convergente* , quando ſaõ cada vez menores. Como ambas tem as meſmas propriedades , ſómente com a differença de que o *ſomar* em huma deve ſer *diminuir* na outra , naõ trataremos ſenaõ da aſcendente ; e o que della diſſermos ſe applicará ſem difficuldade á deſcendente.

205 He claro pois pela meſma noçaõ da Progreſſaõ , que com o primeiro termo e com a differença commua , a qual tambem ſe chama *raſaõ* da Progreſſaõ , ſe podem formar todos os mais , pela addiçaõ ſucceſſiva da meſma *raſaõ*. Porque o ſegundo ſe forma do primeiro ſomado com a raſaõ ; o terceiro he a ſoma do ſegundo e da meſma raſaõ , ou do primeiro e do duplo da raſaõ ; o quarto contém o terceiro e mais a raſaõ, ou o primeiro e mais o triplo da meſma raſaõ ; e aſſim por diante.

206 Donde ſe ſegue , em geral , *Que qualquer termo de huma Progreſſaõ Arithmetica he igual á ſoma do primeiro , e da raſaõ tomada tantas vezes , quantos ſaõ os termos precedentes.*

207 Por conſeguinte, quando o primeiro termo for o, qualquer dos outros ſerá igual á raſaõ multiplicada pelo numero dos termos, que ficarem antes delle.

208 Por meio deſte principio podemos achar immediatamente qualquer termo de huma Progreſſaõ Arithmetica, ſem que nos ſeja para iſſo neceſſario calcular os precedentes.

Pergunta-ſe v. g. qual ha de ſer o centeſimo termo neſta Progreſſaõ $\div$ 4 . 9 . 14 . 19 &c. Como o termo que ſe pede he o centeſimo, ſerá precedido de 99 termos. Conſtará pois do primeiro 4, e da raſaõ 5 multiplicada por 99; e ſerá por conſeguinte 499.

209 Do meſmo principio ſe entenderá o methodo de meter entre dous numeros dados qualquer numero de meios arithmeticos, iſto he, de aſſignar huma Progreſſaõ Arithmetica, dados os extremos, e o numero dos termos. Iſto ſe executa, *diminuindo o extremo menor do maior, e dividindo o reſto pelo numero de todos os termos menos hum, ou pelo numero dos meios e mais hum.* O quociente ſerá a raſaõ da Progreſſaõ, a qual por conſeguinte ſe formará como aſſima diſſemos (n. 205).

Se quizermos, por exemplo, meter oito meios arithmeticos entre 4 e 11, diminuiremos 4 de 11, e dividiremos o reſto 7 pelo numero dos meios e mais hum. O quociente $\frac{7}{9}$ ſerá a raſaõ da Progreſſaõ, a qual ſerá por conſeguinte $\div$ 4 . $4\frac{7}{9}$. $5\frac{5}{9}$. $6\frac{3}{9}$. $7\frac{1}{9}$. $7\frac{8}{9}$. $8\frac{6}{9}$. $9\frac{4}{9}$. $10\frac{2}{9}$. 11.

Do

Do mesmo modo, se entre 0 e 1 quizermos meter nove meios arithmeticos, dividiremos a differença 1 dos extremos dados por 9 + 1, ou por 10, e teremos a rasaõ $\frac{1}{10}$, ou 0,1, e por conseguinte a Progressaõ que buscamos será ÷ 0 . 0, 1 . 0,2 . 0,3 . 0,4 . 0,5 . 0,6 . 0,7 . 0,8 . 0,9 . 1.

210 Donde se vê, que por menor e menor que seja a differença de dous numeros, sempre entre elles se pódem meter quantos meios arithmeticos quizermos.

O que temos dito das Progressoens Arithmeticas he o que basta para a intelligencia dos Logarithmos, de que abaixo havemos da tratar. Pelo que respeita ás mais propriedades das mesmas Progressoens, em outro lugar mostraremos com mais commodidade.

Das Progressoens Geometricas.

211 A *Progressaõ Geometrica* he huma serie de termos, cada hum dos quais contém o seu antecedente, ou nelle he contido, igual numero de vezes. Esta serie v. g.

∺ 3 : 6 : 12 : 24 : 48 : 96 : 192 : 384 &c.

he huma Progressaõ Geometrica, porque cada termo contém o seu antecedente o mesmo numero de vezes, isto he, 2. Este numero de vezes, que cada termo contém, ou he contido no antecedente, chama-se *denominador*, ou *rasaõ* da Progressaõ. E esta se denota com o final ∺, como a Proporçaõ Geometrica continua, porque he a mesma Proporçaõ continuada a maior numero de termos.

A Progreſſaõ Geometrica he *creſcente*, *aſcendente* ou *divergente*, quando os termos vaõ ſendo cada vez maiores; *decreſcente*, *deſcendente*, ou *convergente*, quando ſaõ cada vez menores. Naõ he preciſo tratar de ambas ſeparadamente, porque tem as meſmas propriedades, mudando-ſe ſómente a multiplicaçaõ em diviſaõ, e reciprocamente, alem de que mudada a ordem dos termos huma ſe converte na outra.

212 Da meſma noçaõ da Progreſſaõ Geometrica ſe ſegue, que com a raſaõ e o primeiro termo ſe podem formar todos os outros. Porque o ſegundo reſulta do primeiro multiplicado pela raſaõ; o terceiro do ſegundo multiplicado tambem pela raſaõ, ou do primeiro multiplicado pelo quadrado da raſaõ; o quarto do terceiro multiplicado igualmente pela raſaõ, ou do primeiro multiplicado pelo cubo da raſaõ &c.

Deſte modo na Progreſſaõ aſſima figurada o ſegundo termo 6 reſulta do primeiro 3 multiplicado pela raſaõ 2; o terceiro 12 do primeiro 3 multiplicado pelo quadrado da raſaõ 4; o quarto 24 do primeiro 3 multiplicado pelo cubo da raſaõ 8 &c.

213 Donde ſe ſegue em geral, *Que qualquer termo de huma Progreſſaõ Geometrica ſe forma do primeiro multiplicado pela raſaõ elevada a huma potencia, que tem por exponente o numero dos termos precedentes.*

Peloque ſe o primeiro termo for 1, qualquer outro termo ſerá igual á potencia da raſaõ que correſponder ao numero dos termos antecedentes: porque a multiplicaçaõ pela unidade naõ augmenta o producto.

214 Daqui ſe deduz o methodo de achar qualquer termo de huma Progreſſaõ Geometrica, ſem calcular os precedentes, o que he muitas vezes de grande utilidade.

Pede-ſe v. g. o termo duodecimo deſta Progreſſaõ ∺ 3 : 6 : 12 : 24 &c. Como antes do duodecimo ha onze termos, ſerá o que buſcamos igual ao producto do primeiro 3 multiplicado pela undecima potencia da raſaõ 2. Eſta potencia ſe achará pela multiplicaçaõ continua do numero 2, até elle ſer onze vezes factor no producto. Mas para abbreviar a operaçaõ, podemos elevar 2 ao cubo 8, e eſte ao ſeu cubo 512, que ſerá a potencia nona de 2; e multiplicando 512 pelo quadrado 4, teremos 2048 potencia undecima do meſmo 2. Finalmente multiplicando a potencia achada pelo primeiro termo 3, ſerá o termo duodecimo que buſcamos 6144.

215 Do meſmo principio ſe deduz o methodo de meter qualquer numero de meios proporcionais entre dous numeros dados. Iſto ſe faz, *dividindo o maior dos numeros dados pelo menor, e extrahindo do quociente a raiz do grão carreſpondente ao numero dos meios aumentado de huma unidade* Eſta raiz ſerá a raſaõ, com a qual ſe formaráõ os termos pedidos (n. 212.).

Porque o maior dos numeros dados, que ſe póde tomar como ultimo termo da Progreſſaõ, ſerá igual ao producto do menor, que he o primeiro termo, multiplicado pela raſaõ elevada á potencia correſpondente ao numero dos termos menos o ultimo, ou ao numero dos meios e mais hum (n. 213.). Logo dividindo o maior dos numeros dados pelo menor, o quociente ſerá a raſaõ elevada ao gráo correſpondente ao numero dos meios augmentado de huma unidade (n. 74); aſſim extrahindo do dito quociente a raiz do meſmo gráo, teremos a raſaõ da Progreſſaõ.

Pede-ſe v. g. que entre 2 e 2048 metamos nove meios geometricos. Primeiramente dividiremos 2048 por 2, teremos o quociente 1024. Depois buſcaremos a raiz decima de 1024 (pag. 150.), que acharemos ſer 2; e eſta ſerá a raſaõ da Progreſſaõ, com a qual acharemos os termos pedidos, e teremos ∺ 2 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256 : 512 : 1024 : 2048.

Se quizeſſemos meter quatro meios geometricos entre 6 e 48, dividindo o ultimo termo 48 pelo primeito 6 teriamos o quociente 8, do qual haveriamos de extrahir a raiz quinta. Como porém o numero 8 naõ tem raiz quinta exacta, he ſinal de que entre 6 e 48 naõ ſe podem aſſignar por numeros exactamente quatro meios geometricos; mas poderáõ aſſignar-ſe mais e mais proximos á exactidaõ, extrahindo a dita raiz por approximaçaõ até onde quizermos. Aſſim acharemos, que a raiz quinta de 8 he 1,5157167 proximamente (pag. 151), e baſtando calcular os meios pedidos até quatro letras decimais teremos ∺ 6 : 9,0943 : 13,7844 : 20,8932 : 31,6682 : 48.

Donde podemos concluir, que entre dous numeros ſe podem ſempre determinar tantos meios geometricos quantos quizermos, ou exactos, ou ao menos approximados até onde for neceſſario. E iſto he o que neſte lugar baſta ſaber das Progreſſoens.

Dos

Dos Logarithmos.

216 CHamaõ-ſe *Logarithmos* os numeros de huma Progreſſaõ Arithmetica, em quanto ſe compáraõ termo por termo a outros tantos numeros de huma Progreſſaõ Geometrica. Poſtas v. g. eſtas duas Progreſſoens

÷ 3 . 5 . 7 . 9 . 11 . 13 . 15 . 17 &c.
∺ 2 . 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256 &c.

cada termo da primeira he Logarithmo do numero correſpondente, que na ſegunda occupa o meſmo lugar, aſſim 3 he Logarithmo de 2; 5 de 4; 7 de 8 &c.

217 Donde ſe ſegue, que o meſmo numero póde ter infinitos Logarithmos. Porque á meſma Progreſſaõ Geometrica, em que elle ſe acha, podemos fazer correſponder infinitas Progreſſoens Arithmeticas diverſas.

Como porém attendemos preſentemente ao uſo actual dos Logarithmos, naõ nos demoraremos em contemplar as differentes Progreſſoens Arithmeticas e Geometricas, que ſe podiaõ combinar entre ſi, mas paſſaremos logo ás que ſe eſcolhêraõ para formar as Taboas Logarithmicas de que uſamos.

218 Eſcolheu-ſe pois a Progreſſaõ Arithmetica dos numeros naturais, e a Geometrica que procede na raſaõ decupla, as quais parecêraõ mais convenientes á lei da numeraçaõ actual. Aſſim temos por fundamento dos Logarithmos ordinarios as duas Progreſſoens ſeguintes

÷ 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 &c.
∺ 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 : 1000000 &c.

219 Peloque neſte ſyſtema de Logarithmos ſerá ſempre muito facil ſaber o Logarithmo de todos os numeros, que ſe exprimirem pela unidade ſeguida de qualquer numero de cifras, pois ſempre o Logarithmo conſtará de tantas unidades, quantas forem as cifras.

Em quanto aos numeros, que mediaõ entre os termos da Progreſſaõ decupla, pelos principios até agora dados naõ podemos explicar o methodo, pelo qual foraõ calculados os ſeus Logarithmos. Mas apontaremos o methodo que ſe podia ſeguir, ſe naõ houveſſe outros meios, ſenaõ os que a Arithmetica nos offerece.

220 Para acharmos pois o Logarithmo de qualquer numero v. gr. 3, he claro pela meſma noçaõ dos Logarithmos, que elle deve achar-ſe na Progreſſaõ fundamental ∺ 1 : 10 : 100 &c. Ora metendo entre 1 e 10 hum grande numero de meios geometricos (n 215.), ſuccederá neceſſariamente de duas couſas huma, ou que algum delles coincidirá juſtamente com o numero 3, ou ao menos que hum ſerá proximamente menor, e o conſecutivo proximamente maior que 3, ſendo a differença tanto menor, quanto o numero dos meios for maior; de ſorte que augmentando quanto for neceſſario o numero dos meios, hum delles ſe poderá finalmente tomar pelo meſmo numero 3.

Entaõ metendo entre 0 e 1 tantos meios arithmeticos, quantos geometricos ſe calculáraõ entre 1 e 10, o termo deſta Progreſſaõ que correſponder ao lugar do numero 3 na outra Progreſſaõ, ou do numero ſummamente proximo a 3,

ſe-

ſerá o Logarithmo delle ; e aſſim dos mais.

221 Aſſim deveremos imaginar ; Que tendo-ſe metido 10000000 meios arithmeticos entre o e 1, entre 1 e 2, entre 2 e 3 &c., ſe meterâo outros tantos geometricos entre 1 e 10 entre 10 e 100, entre 100 e 1000 &c ; Que ordenando termo por termo eſtas Progreſſoens, ſe buſcaraõ na Geometrica os numeros 1, 2, 3, 4, 5 &c., ou os termos proximamente iguais a elles, e na Arithmetica ſe notaraõ os termos, que lhes correſpondiaõ no meſmo lugar, e eraõ por conſeguinte os ſeus Logarithmos ; E que finalmente transportando a huma colunna vertical, como na Taboa ſeguinte, os numeros 1, 2, 3, 4, 5 &c., ao lado direito ſe aſſentaraõ os ſeus Logarithmos. A iſto ſe reduz a formaçaõ das Taboas Logarithmicas.

TA-

TABOA DOS LOGARITHMOS

Dos Numeros naturaes de 1 até 200.

Num.	Logarith	Num.	Logarith.	Num.	Logarith.
0	Inf.negat.	33	1,518514	66	1,819544
1	0,000000	34	1,531479	67	1,826075
2	0,301030	35	1,544068	68	1,832509
3	0,477121	36	1,556303	69	1,838849
4	0,602060	37	1,568202	70	1,845098
5	0,698970	38	1,579784	71	1,851258
6	0,778151	39	1,591065	72	1,857332
7	0,845098	40	1,602060	73	1,863323
8	0,903090	41	1,612784	74	1,869232
9	0,954243	42	1,623249	75	1,875061
10	1,000000	43	1,633468	76	1,880814
11	1,041393	44	1,643453	77	1,886491
12	1,079181	45	1,653213	78	1,892095
13	1,113943	46	1,662758	79	1,897627
14	1,146128	47	1,672098	80	1,903090
15	1,176091	48	1,681241	81	1,908485
16	1,204120	49	1,690196	82	1,913814
17	1,230449	50	1,698970	83	1,919078
18	1,255273	51	1,707570	84	1,924279
19	1,278754	52	1,716003	85	1,929419
20	1,301030	53	1,724276	86	1,934498
21	1,322219	54	1,732394	87	1,939519
22	1,342423	55	1,740363	88	1,944483
23	1,361728	56	1,748188	89	1,949390
24	1,380211	57	1,755875	90	1,954243
25	1,397940	58	1,763428	91	1,959041
26	1,414973	59	1,770852	92	1,963788
27	1,431364	60	1,778151	93	1,968483
28	1,447158	61	1,785330	94	1,973128
29	1,462398	62	1,792392	95	1,977724
30	1,477121	63	1,799341	96	1,982271
31	1,491362	64	1,806180	97	1,986772
32	1,505150	65	1,812913	98	1,991226

Num.	Logarith.	Num.	Logarith.	Num.	Logarith.
99	1,995635	133	2,123852	167	2,222716
100	2,000000	134	2,127105	168	2,225309
101	2,004321	135	2,130334	169	2,227887
102	2,008600	136	2,133539	170	2,230449
103	2,012837	137	2,136721	171	2,232996
104	2,017033	138	2,130879	172	2,235528
105	2,021189	139	2,143015	173	2,238046
106	2,025306	140	2,146128	174	2,240549
107	2,029384	141	2,149219	175	2,243038
108	2,033424	142	2,152288	176	2,245513
109	2,037426	143	2,155336	177	2,247973
110	2,041393	144	2,158362	178	2,250420
111	2,045323	145	2,161368	179	2,252853
112	2,049218	146	2,164353	180	2,255273
113	2,053078	147	2,167317	181	2,257679
114	2,056905	148	2,170262	182	2,260071
115	2,060698	149	2,173186	183	2,262451
116	2,064458	150	2,176091	184	2,264818
117	2,068186	151	2,178977	185	2,267172
118	2,071882	152	2,181844	186	2,269513
119	2,075547	153	2,184691	187	2,271842
120	2,079181	154	2,187521	188	2,274158
121	2,082785	155	2,190332	189	2,276462
122	2,086360	156	2,193125	190	2,278754
123	2,089905	157	2,195900	191	2,281033
124	2,093422	158	2,198657	192	2,283301
125	2,096910	159	2,201397	193	2,285557
126	2,100371	160	2,204120	194	2,287802
127	2,103804	161	2,206826	195	2,290035
128	2,107210	162	2,209515	196	2,292256
129	2,110590	163	2,212188	197	2,294466
130	2,113943	164	2,214844	198	2,296665
131	2,117271	165	2,217484	199	2,298853
132	2,120574	166	2,220108	200	2,301030

222 A primeira letra de cada Logarithmo á esquerda chama-se *Characteristica*, porque por ella se conhece a que década pertence o numero correspondente ao mesmo Logarithmo. Se hum Logarithmo tiver v. g. a characteristica 3, he sinal que o seu numero he de *milhares*; porque sendo 3 Logarithmo de 1000, e 4 Logarithmo de 10000, todos os numeros comprehendidos entre 1000 e 10000 teraõ por Logarithmo 3 com huma fracçaõ; e por conseguinte será 3 a characteristica, e as letras seguintes representaráõ a fracçaõ em partes decimais. Em huma palavra: *O numero terá tantas letras e mais huma, quantas forem as unidades na characteristica do seu Logarithmo.*

Os Logarithmos da pequena Taboa, que assima ajuntámos para exemplo, tem depois da characteristica seis letras de dizima, e nas Taboas ordinarias tem sete. Mas esta differença naõ prejudica aos usos, que delles havemos de fazer em alguns dos exemplos, que abaixo mostraremos.

Propriedades dos Logarithmos.

223 COmo naõ tratamos aqui senaõ dos Logarithmos ordinarios, as propriedades, que delles havemos de mostrar, devem principalmente deduzir-se das Progressoens Geometricas, que principiaõ por 1; e das Arithmeticas, que principiaõ por 0.

Tomem-se pois quaisquer duas Progressoens com estas circunstancias, por exemplo as duas seguintes.

÷÷ o

÷ 0 . 4 . 8 . 12 . 16 . 20 . 24 . 28 . 32 &c.
∷ 1 : 3 : 9 : 27 : 81 : 243 : 729 : 2187 : 6561 &c.

Pela natureza e correſpondencia deſtas Progreſſons he manifeſto, que qualquer termo da primeira conſta da raſaõ tomada tantas vezes, quantas a raſaõ da ſegunda entra por factor no termo correſpondente. Porque a raſaõ da progreſſaõ Arithmetica entra tantas vezes, e a da Geometrica he tantas vezes factor em qualquer termo, quantos ſaõ os termos precedentes (n. 207, 212); Porém os termos correſpondentes de ambas as Progreſſoens ſaõ precedidos de igual numero de termos: logo &c.

Aſſim v. g. no termo 28 da primeira a raſaõ 4 ſe contém ſete vezes, e outras tantas a raſaõ 3 da ſegunda he factor no termo correſpondente 2187; e aſſim nos mais.

224 Logo *Somando dous quaisquer termos da Progreſſaõ Arithmetica, e multiplicando os ſeus correſpondentes na Geometrica, o producto deſles e a ſoma daquelles ſeraõ termos correſpondentes nas meſmas Progreſſoens.*

Porque a ſoma conterá a raſaõ da Progreſſaõ Arithmetica tantas vezes, quantas a contém juntamente os termos ſomados; e o producto terá a raſaõ da Progreſſaõ Geometrica tantas vezes por factor, quantas ella o he nos termos multiplicados ambos juntos. Porém cada termo da Progreſſaõ Arithmetica contém a raſaõ tantas vezes, quantas a raſaõ da Geometrica he factor no termo correſpondente. Logo a ſoma conterá tantas vezes a raſaõ arithmetica, quantas o producto terá por factor a raſaõ geometrica; e conſeguintetemente seraõ termos correspondentes nas ditas Progressoens.

225 Somando pois dous termos quaisquer da Progressaõ Arithmetica, conheceremos o producto dos termos que lhes correspondem na Geometrica, se para isso forem continuadas as mesmas Progressoens, quanto he necessario.

Somando v. g. os termos 8 e 24, que correspondem a 9 e 729, teremos a soma 32, a qual corresponde na Progressaõ Geomerrica ao numero 6561; e este será o producto de 729 por 9.

226 Por conseguinte, sendo os numeros naturais, 2, &c. na Taboa Logarithmica tirados de huma Progressaõ Geometrica que principia por 1, e os seus Logarithmos sendo os termos que lhes correspondem em huma Progressaõ Arithmetica que começa por 0, he manifesto que *somando os Logarithmos dequaisquer numeros teremos o Logarithmo do seu producto.* Deste principio resultaõ os usos dos Logarithmos, que agora mostramos.

Uso dos Logarithmos.

227 PAra multiplicar por Logarithmos he pois necessario *somar os Logarithmos dos factores, e buscando a soma entre os Logarithmos das Taboas, o numero que lhe competir será o producto.*

Querendo v. g. multiplicar 13 por 14, buscaremos na Taboa os Logarithmos destes numeros, a saber:

Log.

Log. de 13 - - - - 1,113943
Log. de 14 - - - - 1,146128

E a ſoma - - - - 2,260071 ſerá o Log. do producto, que acharemos ſer 182, numero que na Taboa compete ao dito Lagarithmo.

228 Logo para quadrar hum numero, naõ he preciſo mais que duplicar o ſeu Logarithmo. Porque para quadrar, deve o numero multiplicar-ſe por ſi meſmo; e por conſeguinte deve tomar-ſe duas vezes, ou duplicar-ſe o ſeu Logarithmo. Pela meſma raſaõ triplicando o Log. de hum numero, teremos o Log. do ſeu cubo.

229 Em geral: *Para elevar hum numero a qualquer potencia, tomar-ſe há o ſeu Log. tantas vezes, quantos o numero entra por factor neſſa potencia, ou multiplicar-ſe-ha o Log. pelo exponente della.*

Querendo v. g. formar a potencia 7ª de 2, buſcaremos o ſeu Logarithmo 0,301030, e multiplicando-o por 7 teremos 2,107210; Logarithmo, que na Taboa correſponde a 128, e eſta he a potencia 7ª de 2.

230 Logo reciprocamente: *Para extrahir a raiz quadrada, cubica, quarta, quinta &c. de qualquer numero, dividiremos o ſeu Log. por 2, 3, 4, 5 &c*, ou geralmente, *pelo exponente da raiz; e o quociente ſerá o Logarithmo della.*

Procurando v. g. a raiz quadrada de 144, tomaremos na Taboa o ſeu Log. 2,158362, e dividindo-o por 2, teremos 1,079181 que na meſma Taboa acharemos ſer Log. de 12; e por conſeguinte 12 ſerá a raiz quadrada de 144.

So

Se buſcarmos a Raiz 7ª de 128, a Taboa nos dará o Log. deſte numero, que he 2,107210, e dividindo-o por 7, teremos 0,301030; Logarithmo que na Taboa compete ao numero 2; e poriſſo ſerá 2 a raiz 7ª de 128; e aſſim das mais.

231 A Regra da Diviſaõ por Logarithmos ſe pratica, *diminuindo o Log. do diviſor do Log. do dividendo; e o reſto ſerá o Log. do quociente.*

Querendo v. g. dividir 187 por 17, buſcaremos os ſeus Logarithmos, e teremos

Log. do divid. 187 - - - - 2,271842
Log. do diviſ. 17 - - - - 1,230449

E o reſto - - - - - - - - - - - 1,041393 ſerá o Log. do quociente, que conſultando a Taboa acharemos ſer 11.

Quando o Log. do quociente ſe naõ acha exactamente na Taboa, mas cahe entre dous Log. della, he ſinal, que a diviſaõ naõ ſe póde fazer ſem reſto; mais abaixo diremos, o que ſe deve fazer neſſe caſo.

A raſaõ deſta Regra he, porque ſendo o dividendo igual ao producto do diviſor pelo quociente (n. 74), deve o Log. do dividendo formarſe da ſoma dos Log. do diviſor e do quociente (n. 227) e conſeguintemente tirando o Log. do diviſor do Log. do dividendo, o reſto ſerá o Log. do quociente (n. 39).

232 Pelo que temos viſto ſe vê, que a Regra de tres ſe ha de praticar por Logarithmos, *ſomando os Log. do 2º e 3º termo, diminuindo o Log. do 1º; e o reſto ſerá o Log. do 4º;* o qual por conſeguinte ſe achará por meio das Taboas.

Buſ-

Buſcando-ſe v. g. o quarto proporcional aos termos 7 : 12 :: 105 :, ſerá a operaçaõ deſta maneira :

Log. do 3º	105 - - - -	2,021189	
Log. do 2º	12 - - - -	1,079181	
Soma - - - - - - - - -		3,100370	
Log. do 1º	7 - - - -	0,845098	
Reſto - - - - - - - -		2,255272,	ou Log.

do num. 180, que he o quarto pedido.

233 Deve notar-ſe, que ſe o Logarithmo que reſulta de alguma operaçaõ coincidir com algum Log. da Taboa em todas as letras, exceptuando a ultima á direita, naõ ſe deverá fazer caſo deſta differença. Porque ſendo os Log. dos numeros intermedios da Progreſſaõ decupla approximados ſómente até a ametade de huma unidade da ultima caſa da dizima, póde ſucceder, que pela addiçaõ de muitos Log. ajuntando-ſe os pequenos defeitos da ultima letra de cada hum, influaõ na ultima letra do reſultado o defeito ou exceſſo de huma ou duas unidades; e ainda de mais, conforme o numero dos Log. de que elle reſultar. Na operaçaõ precedente temos hum exemplo deſta advertencia.

Dos Numeros, cujos Logarithmos ſe naõ achaõ nas Taboas.

234 COmo as Taboas ordinarias dos Logarithmos foraõ ordenadas ſegundo a ſerie natural dos numeros inteiros, he claro, que nellas

las immediatamente ſe naõ achaõ os Logarithmos dos numeros fraccionarios. O meſmo ſe entenderá das raizes dos numeros, que naõ ſaõ potencias perfeitas &c.

Querendo-ſe pois o Log. de hum numero inteiro accompanhado de fracçaõ reduzir-ſe-há tudo a quebrado (n. 86); e diminuindo entaõ o Log. do denominador do Logarithmo do numerador, o reſto ſerá o Log. que ſe procura.

Se buſcarmos v. g. o Log. de 8 $\frac{3}{11}$, reduziremos primeiro eſte numero a $\frac{91}{11}$, e depois tiraremos 1,041393 (Log. do denominador 11) de 1,959041 (Log. do numerador 91). O reſto 0,917648 ſerá o Log. do numero propoſto 8 $\frac{3}{11}$; porque 8 $\frac{3}{11}$, ou $\frac{91}{11}$, he o meſmo que 91 dividido por 11 (n. 96).

235 Pela meſma raſaõ ſe moſtra, que para haver o Log. de huma fracçaõ propria ſe deve diminuir o Log. do denominador do Log. do numerador. Porém, como eſta diminuiçaõ naõ póde ter lugar, por ſer o Log. do denominador maior que o do numerador, tiraremos o Log. deſte do Log. daquelle. E o reſto ſerá o Log. que buſcamos, ſendo porém precedido do ſinal $-$, para ſe moſtrar que a diminuiçaõ ſe fez de hum modo oppoſto ao que devia ſer. Aſſim acharemos que o Log. de $\frac{11}{91}$ he $-$ 0,917648 &c.

236 O referido ſinal, aſſim como denota que a ſubtracçaõ ſe fez de hum modo oppoſto ao que convinha, tambem ſerve para trazer á lembran-

ça, que a fim de compenſar iſſo meſmo ſe devem no calculo applicar os ditos Logarithmos por huma Regra oppoſta á que temos eſtabelecido para os outros; iſtó he: *Que havendo de multiplicar por huma fracçaõ o Log. deſta ſe deve diminuir; e que havendo de dividir, ſe deve ſomar* (*).

§§ Em geral: *Se os Log. dos factores forem todos poſitivos, ou todos negativos, a ſoma delles com o meſmo ſinal; ſe huns poſitivos, outros negativos, a differença entre as duas ſomas de huns e dos outros com o ſinal da maior, dará o Log. do producto.* E em quanto á diviſaõ: *Muda-ſe o ſinal do diviſor, e pratica-ſe a meſma regra da multiplicaçaõ.*

Alguns exprimem os Log. das fracçoens de outra maneira, fazendo ſómente a characteriſtica negativa, e conſervando a dizima ſempre poſitiva. Eſta forma de Logarithmos reſulta, ſubtrahindo effectivamente o Log. do denominador do Log. do numerador da direita para a eſquerda, e em chegando ás characteriſticas, toma-ſe por characteriſtica negativa o que ſeria neceſſario ajuntar á characteriſtica do Log. do numerador para que a do Log. do denominador ſe pudeſſe della ſubtrahir ſem reſto.

Por exemplo, para acharmos o Log. de $\frac{2}{151}$, de 0,301030 (Log. do numerador 2) deveremos tirar 2,178977 (Log. do denominador 151). Para

(*) Os numeros, que ſaõ precedidos do ſignal —, chamaõ-ſe *negativos*. Na Algebra, daremos huma idéa mais clara delles. Entretanto devemos prevenir, que naõ ſe haõ de conceber, como numeros menores que 0; porque abaixo do *nada* naõ póde haver couſa alguma.

ra isto será necessario ajuntar 2 á characterista do Log. do numerador, que ficará 2.301030, e será o resto 0,122053; entaõ, pondo de menos 2 na sua characteristica, por termos posto outro tanto de mais no Log. do numerador, será o Log. que buscamos $-2,122053$, entendendo-se porém que o final negativo sómente affecta a characteristica. Mas para naõ haver equivocaçaõ com os outros Log. totalmente negativos, costumaõ notar-se os de que agora fallamos deste modo $\overline{2},122053$, ou tambem assim $\dashv 2,122053$.

A rasaõ disto he, porque tomando o Log. 2,301030 em lugar de 0,301030, o numero 2 que a este compete se multiplica realmente por 100. Logo tirando 2,178977 de 2,301030, o resto 0,122053 será o Log. de $\frac{200}{151}$. Para este quebrado se reduzir a $\frac{2}{151}$ he preciso dividi-lo por 100, e por conseguinte tirar 2 a characteristica do seu Logarithmo. Logo o Logarithmo de $\frac{2}{151}$ será $-2+0,122053$, ou $\overline{2},122053$.

Quando entrarem no calculo estes Logarithmos, observar-se-haõ as Regras assima dadas, em quanto a ambas as partes delles. Na multiplicaçaõ sempre se somaõ as letras decimais, porque saõ todas positivas; e se desta soma passarem algumas unidades para a casa das characteristicas ajuntaõ-se com as positivas, e a differença entre as somas das negativas e positivas com o final da maior será a characteristica. Na divisaõ, sempre se diminue o Log. do divisor do Logarithmo do dividendo em quan-

quanto á dizima ; em quanto ás characteriſticas muda-ſe o ſinal á do diviſor, e pratica-ſe a regra da multiplicaçaõ. Quando no diminuir da dizima for neceſſario pedir huma unidade á caſa da characteriſtica, e eſta for o, ou negativa, deverá eſta ficar com huma unidade de menos, v. gr. ſendo o ficará $\bar{1}$, ſendo $\bar{1}$, ficará $\bar{2}$, &c.

Do meſmo modo : Quando ſe houver de multiplicar hum Log. deſtes, como na formaçaõ das potencias, multiplicaremos primeiro as letras decimais, e ſe dellas houverem de paſſar algumas unidades para a caſa da characteriſtica, guarda-las-hemos para ſerem diminuidas do producto della. E quando ſe houver de dividir, como na extracçaõ das raizes, ſe a characteriſtica contiver exactamente o diviſor, a operaçaõ ſe fará do modo ordinario; e ſe naõ, ajuntar-ſe-haõ á characteriſtica tantas unidades negativas, quantas baſtarem para conter exactamente o diviſor; e para compenſar iſto, ſe ajuntaraõ outras tantas poſitivas em lugar de dezenas á primeira letra da dizima. Aſſim o Log. $\bar{2}$,873245 ſendo multiplicado por 5 dá o producto $\bar{6}$,366225; ſendo dividido por 7, o quociente $\bar{1}$,839035 &c.

Eſtes Log. reduzem-ſe aos totalmente negativos, tirando 1 á characteriſtica, e tomando em lugar das outras letras o ſeu complemento para 6, exceptuando a derradeira da qual ſe tomará o complemento para 10. E reciprocamente, hum Log. inteiramente negativo ſe converterá na outra forma, ajuntando 1 a ſua characteriſtica, e tomando o complemento das outras letras do modo que temos dito. Aſſim o Log. $\bar{2}$,374972 ſe transforma em $-1,625028$, o Log. $\bar{1}$,587430 em $-0,412570$, e reciprocamente.

237 Quando o numero paſſar os limites das Taboas (as quais pela maior parte chegaõ até 20000, ou ao menos até 10000) ſempre dellas podemos haver o Logarithmo, com tanto que o numero naõ ſeja de mais letras do que as decimais dos meſmos Logarithmos.

238 Para iſſo devemos trazer á lembrança, que ſe ajuntarmos 1, 2, 3 &c. unidades á characteriſca de hum Log. o ſeu numero ſe entenderá multiplicado por 10, 100, 1000 &c; e ao contrario dividido, ſe tirarmos 1, 2, 3 &ç. unidades á meſma characteriſtica; porque niſſo naõ fazemos outra couſa, ſenaõ ajuntar, ou tirar ao dito Log, o Log. de 10, ou de 100, ou de 1000 &c.

239 Iſto ſuppoſto, ſe v. g. buſcarmos o Log. de 357859, delle cortaremos á direita tantas letras, quantas forem baſtantes, para que as que ficarem á eſquerda naõ excedaõ os limites das Taboas, iſto he, duas neſte caſo, e teremos o numero 3578,59 que he 100 vezes menor que o propoſto (n. 28). Depois buſcaremos o Log. de 3578 que he 3,5536403, e a differença entre eſte e o Log. proximamente ſeguinte de 3579, que he 1214. Entaõ diremos: Se 1, differença entre os numeros 3578 e 3579, dá a differença dos Log. 1214, a differença 0,59 entre os numeros 3578, e 3578,59, que differença dará nos ſeus Log.? Como temos a unidade por primeiro termo, baſta multiplicar o ſegundo pelo terceiro, e o producto 716,26, ou 716, deixando

as partes decimais, he a differença que devemos ajuntar a 3,5536403 Logarithmo de 3578 para termos 3,5537119 Log. de 3578,59. E finalmente, como 3578,59 se deve multiplicar por 100 para fazer 357859, resta ajuntarmos 2 á characteristica do seu Log. para termos 5,5537119 Log. do numero proposto 357859.

Se as letras que se haõ de cortar forem todas cifras, he claro, que buscando nas Taboas o Log. do numero que ficar á esquerda, naõ será preciso mais do que ajuntar-lhe á characteristica tantas unidades, quantas foraõ as cifras que se cortáraõ.

240 Quando o numero he seguido de dizima, busca-se o Log. como se fosse inteiro, ou immediatamente nas Taboas, ou pelo methodo precedente, quando exceda os limites, e da characteristica se tiraõ tantas unidades, quantas saõ as letras decimais. Querendo v. g. o Log. de 3,27 buscaremos na Taboa o de 327 que he 2,5145477, e tirando 2 a characteristica ficará 0,5145477 Log. de 3,27. Querendo o Log. de 35,7859 buscaremos o de 357859 (n. 239), que he 5,5537119, e tirando 4 á characteristica teremos 1,5537119 Log. de 35,7859.

241 Em fim, se o numero constar somente de notas decimais, buscaremos sim o Log. delle como se fosse inteiro, mas diminui-lo-hemos de tantas unidades, quantas forem as casas da dizima, e o resto com o final — será o Log. desejado. Querendo v. g. o Log. do numero 0,03, buscaremos na Taboa o Log. de 3, que he 0,477121, e diminuindo-o de 2, teremos — 1,522879 Log. de 0,03.

§§ Se quizermos porém o Log. com a characteriſtica ſómente negativa, buſcaremos tambem o Log. das letras decimais, como ſe foſſem numero inteiro, e da characteriſtica tiraremos tantas unidades, quantas forem as caſas da meſma dizima. Aſſim acharemos, que $\bar{2}$,477121 he o Log. de 0,03; $\bar{3}$,514548 Log. de 0,00327 &c. §§

Dos Logarithmos; cujos numeros ſe naõ achaõ nas Taboas.

242 COmo para fazermos as operaçoens com mais facilidade ſubſtituimos em lugar dos numeros naturais os artificiais, que ſaõ os ſeus Logarithmos; aſſim tendo acabado o calculo he neceſſario voltar dos Logarithmos para os numeros. Raras vezes ſuccederá, que o Log. reſultante das operaçoens correſponda a hum numero inteiro, que naõ exceda os limites das Taboas, como he neceſſario, para que o meſmo Log. ſe ache nellas. Aſſim he preciſo, que tenhamos hum methodo para achar por meio das meſmas Taboas o numero correſpondente a qualquer Log. propoſto. O qual he deſta maneira.

243 Tirem-ſe da characteriſtica tantas unidades, quantas forem baſtantes, para que o Log. naõ exceda os limites das Taboas. Entaõ,

Se o Log. ſe achar nas Taboas, o numero que lhe correſponder, ſendo augmentado de tantas cifras á direita, quantas unidades ſe houverem tirado da characteriſtica, ſerá o numero que buſcamos. Tirando v. g. 3 unidades á characteriſ-

ti-

tica do Log. 7,2273467, acharemos que nas Taboas corresponde a 16879; e assim 16879000 será o numero representado pelo Log. 7,2273467 (n. 238).

Reduzida porém a characteristica aos limites das Taboas, se o Log. proposto cahir entre dous Log. consecutivos dellas, praticar-se-ha deste modo: Supponhamos, que se pede o numero correspondente ao Log. 5,2432768. Tirando 2 unidades á characteristica, o Log. 3,2432768 cahirá entre os Log. de 1750 e 1751, e por conseguinte o seu numero será 1750 com huma fracçaõ. Para acharmos esta, tomaremos a differença entre os Log. de 1750 e 1751, que he 2481, e a differença entre o Log. proposto e o Log. de 1750, que he 2388. Entaõ diremos: Se a differença dos Log. 2481 dá a differença dos numeros 1, a differença dos Log. 2388 que differença dará nos mesmos numeros? Como o segundo termo he sempre 1, dividiremos o terceiro pelo primeiro, e o quociente será o quarto, que neste exemplo acharemos 0,9625. Assim o Log. 3,2432768 corresponde ao numero 1750,9625, e conseguintemente o Log. 5,2432768 ao numero 175096,25 (n. 28. 238).

244 Quando a characteristica naõ excede os limites das Taboas, he claro, que naõ se lhe deve tirar unidade alguma; e por isso tendo achado o numero correspondente, naõ se lhe ajuntaráõ cifras algumas, nem se mudará o lugar da virgula.

245 He porém muito de advertir, que a proporçaõ assima praticada suppoem, que as differen-

renças dos Log. saõ proporcionais as differenças dos numeros correspondentes, como saõ com effeito proximamente, sendo os numeros grandes, mas de nenhuma sorte, sendo pequenos. Por isso, quando o numero for menor que 1800 nas Taboas que chegaõ até 18000, ou menor que 1000 nas Taboas que naõ passaõ de 10000, ajuntaremos á characteristica as unidades que forem precisas, para buscarmos o numero na classe suprema das mesmas Taboas, no qual deveremos separar para a dizima tantas letras, quantas foraõ as unidades, que ajuntámos á characteristica; e se quizermos mais exactidaõ, praticaremos a proporçaõ assima indicada (n. 243).

Por exemplo, buscando-se o numero correspondente ao Log. 0,5432725, pela inspecçaõ da Taboa logo veremos, que cahe entre 3 e 4. Se ahi tomassemos as partes proporcionais, teriamos 3,529 &c. que se aparta muito da verdade. Porém ajuntando 3 unidades á characteristica, acharemos que o Log. 3,5432725 mostra hum numero entre 3493 e 3494; pelo que bastandonos a terceira casa da dizima, diremos que o numero correspondente ao Log. 0,5432725 he 3,493. Se quizermos porém mais letras decimais, pelo methodo assima dado, acharemos que o Log. 3,5432725 corresponde ao numero 3493,594 (n. 243), e por conseguinte o Log. 0,5432725 ao numero 3,493594 (n. 238).

Porém esta appoximaçaõ dos numeros tem seus limites. Porque sendo, como assima dissemos, exactos somente os Log. até huma meia unidade da ultima casa decimal, he manifesto que as suas dif-

differenças participaõ deste defeito. Porisso em chegando a ultima letra da differença dividida a influir sobre o quociente, dahi por diante todas as letras delle seraõ faltas de exactidaõ, e porisso he escusado continuar a divisaõ. As Taboas ordinarias naõ alcançaõ seguramante, senaõ até os numeros de sete letras; e isto he o que basta quasi sempre. Sendo preciso mais, recorrer-se-ha a Taboas de mais letras, ou naõ se usará de Logarithmos.

246 Quando o Log. for negativo, tirar-se-ha de 4, 5, 6 &c. unidades, de sorte que o resto se ache na suprema classe das Taboas, e do numero correspondente se tomaráõ tantas casas para a dizima, quantas foraõ as unidades, das quais se diminuio o Logarithmo.

Por exemplo, buscando-se a fracçaõ correspondente ao Log. − 1,532732 diminuiremos este de 5, e o resto 3,467268 mostrará na Taboa hum numero entre 2932 e 2933; pelo que a fracçaõ pedida será 0,02932. E comeffeito tirar o Log. − 1,532732 de 5 he o mesmo que multiplicar por 100000 a fracçaõ que lhe corresponde (n. 219, 236). Logo o numero correspondente ao resto deverá dividir-se por 100000, tomando 5 casas decimais (n. 28).

§§ Sendo os Log. sómente negativos em quanto á characteristica, ainda he mais facil de achar a fracçaõ correspondente. Buscar-se-ha o numero que corresponde ao Log. com a characteristica que melhor parecer, e a primeira letra della se assentará tantas casas adiante da virgula, quantas saõ as unidades negativas da characteristica.

As-

Aſſim v. g querendo ate a quarta letra decimal a fracçaõ correſpondente ao Log. $\bar{2}$,235724, buſcaremos o numero que proximamente compete ao Log. 2,235724, que he 172, e a fracçaõ ſerá 0,0172. Querendo a fracçaõ correſpondente ao Logarithmo $\bar{1}$,732589 até a ſexta nota decimal, procuraremos o numero que proximamente compete ao Log 5,732589, que acharemos ſer 540242, e por conſeguinte a fracçaõ deſejada 0,540242 §§

247 Do que até aqui temos dito faremos varias applicaçoens na Trignometria, e em outras partes da Mathematica. Aqui ſómente daremos, por meio de exemplos tirados da meſma Arithmetica, alguma idéa da ventagem qne reſulta dos Logarithmos, em quanto á prontidaõ e facilidade dos calculos.

Exemplo I.

PErgunta-ſe o quociente de 17954 dividido por 12836, approximado até as decimas-milleſimas. Uſando dos Log. obraremos deſta maneira.

Log. de 17954 - - - 4,254161
Log. de 12836 - - - 4,108430

Reſto - - - - - 0.145731, o qual ſendo procurado nas Taboas com a characteriſtica 4 correſpondente a 13987; e conſeguintemente ſerá o quociente pedido 1,3987 (n. 238).

Exem-

Exemplo II.

PEde-se a Raiz cubica de 53 approximada até a casa das decimas-millesimas.

Busque-se o Log. de 53, que he 1,724276, e divida-se por 3. (n.230). O quociente 0,574759 será o Log. da raiz. Este com a characteristica 5 correspondente nas Taboas proximamente ao numero 375628; Logo a raiz será 3,75628 (n.238).

Exemplo III.

QUerendo saber a raiz quinta do cubo de 5736 exacta até a terceira letra decimal, buscaremos o Log. de 5736, que he 3,758609, e multiplicando-o por 3 teremos 11,275827 Log. do cubo do mesmo numero. Dividindo este por 5, teremos 2,255165, por Log. da raiz procurada; e entrando com elle nas Taboas com huma characteristica augmentada de 3 unidades, acharemos que proximamente compete ao numero 179955; e assim será a raiz que buscamos 179,955

Exemplo IV.

QUerendo meter quatro meios geometricos entre $2\frac{2}{3}$ e $5\frac{3}{4}$, como seria necessario dividir $5\frac{3}{4}$ por $2\frac{2}{3}$, e extrahir do quociente a raiz quinta (n. 215), para conhecer a rasaõ da Progressaõ; por Logarithmos se obrará deste modo;

Ti-

Tirar-se-há 0,425969 Log. de $2\frac{2}{3}$ de 0,759668 Log. de $5\frac{3}{4}$ (n. 231), e o resto 0,333699 se dividirá por 5 (n. 230). O quociente 0,066740 será Log. da rasaõ; e entrando com elle nas Taboas a characteristica 4 acharemos o numero 11661, donde concluiremos que a rasaõ he 1,1661 exacta até as decimas-millesimas. Assim naõ resta mais do que multiplicar o primeiro termo $2\frac{2}{3}$ pela rasaõ 1,1661, o producto outra vez pela rasaõ &c. (n. 211.).

Porém estas mesmas operaçoens se faráõ mais expeditamente, ajuntando ao Log. do primeiro termo 0,425969 o Log. da rasaõ 0,066740, depois o duplo, triplo, e quadruplo deste; e teremos 0,492709; 0,559449; 0,626189; 0,692929 por Logarithmos dos quatro meios proporcionais; que seraõ proximamente 3,109; 3,626; 4,228; 4,931.

Do Complemento Arithmetico dos Logarithmos, e do seu uso.

248 QUando se praticaõ as operaçoens por Logarithmos, e alguns destes se devem diminuir, póde simplificar-se o calculo, substituindo em lugar delles os seus complementos.

249 Para disto se formar huma idéa clara, he necessario reflectir, que tendo para diminuir qualquer numero de outro que conste da unidade seguida de tantas cifras, quantas saõ as letras do primeiro, a operaçaõ se reduz a escrever da esquer-

querda para a direita a differença entre 9 e cada-huma das letras do numero propoſto, exceptuando a ultima, em lugar da qual ſe tomará o que lhe faltar para 10. Aſſim v. g. querendo diminuir 526927 de 1000000, tiraremos ſucceſſivamente as letras 5,2,6,9,2, de 9; e a ultima 7 de 10, e ſerá o reſto 473073. Querendo diminuir 4873 de 1000000, o numero propoſto ſe conſiderará como 004873; e praticando a meſma regra, teremos o reſto 995127.

250 O reſto formado deſta maneira he que ſe chama *Complemento Arithmetico* do numero propoſto.

251 Como he taõ facil a ſubſtituiçaõ do complemento em lugar de qualquer numero, que apenas ſe póde contar por operaçaõ, he manifeſto, que havendo de formar-ſe hum reſultado da addiçaõ e ſubtracçaõ de varios numeros, tudo ſe póde reduzir a huma unica operaçaõ de ſomar. Por exemplo, ſe houvermos de ſomar os numeros 672736 e 426452, e da ſoma tirar os numeros 432752 e 18675, por huma ſó operaçaõ acharemos o reſultado da maneira ſeguinte:

	672736
	426452
Compl. de 432752 - -	567248
Compl. de 18675 - -	981325
Soma - - - - - - -	2,647761

Iſto he, ſomar-ſe-haõ os dous primeiros numeros com os complementos dos outros dous; e ſeparando a primeira letra da ſoma 2, as ſeguintes

tes 647761 daraõ o resultado que se busca.

A rasaõ desta operaçaõ he, porque em lugar de diminuir 432752 somando o seu complemento, ou 1000000 — 432752, naõ sómente diminuimos com effeito o numero 432752, mas ajuntamos ao mesmo tempo 1000000. Logo por cada complemento deveremos tirar huma unidade na primeira letra da soma.

252 A applicaçaõ disto aos Logarithmos he evidente. Em lugar dos que se haõ de subtrahir, substituiremos os seus complementos, que se designaõ com as letras CL, e na soma deixaremos de escrever tantas dezenas na characteristica quantos forem os complementos.

Exemplo I.

SUpponhamos que se procura o quarto proporcional aos termos 1677 : 1599 : : 129 :

Como deveriamos somar os Log. de 1599 e 129, e da soma tirar o Log. de 1677 (n. 232), por huma soma unica praticaremos deste modo:

CL. de	1677 - - - -	6,775467
Log. de	1599 - - - -	3,203848
Log. de	129 - - - -	2,110590

E a Soma - - - - - - - - - 2,089905, deixando a dezena da characteristica será o Log. do quarto termo, que nas Taboas acharemos 123.

Exemplo II.

QUeremos multiplicar $\frac{675}{527}$ por $\frac{952}{377}$, e dividir o producto por $\frac{631}{753}$.

Ja ſabemos, que neſte caſo deveriamos multiplicar os numeros 675, 952, 753, e depois os numeros 527, 377, 631, e dividir o primeiro producto pelo ſegundo (n. 106. 109). por Logarithmos praticaremos pois do modo ſeguinte:

Log. de 675 - - - - 2,829304
Log. de 952 - - - - 2,978637
Log. de 753 - - - - 2,876795
CL. de 527 - - - - 7,278189
CL. de 377 - - - - 7,423659
CL. de 631 - - - - 7,199971

E a Soma - - - - - - - - - 0,586555, lançando fóra as 3 dezenas da characteriſtica, por entrarem nella 3 complementos, moſtrará nas Taboas o numero que buſcamos 3,8597 proximamente.

253 Alem diſto, ſervem tambem os complementos com grande ventagem do calculo, para fazer poſitivos os Logarithmos das fracçoens. Para acharmos v. g. o Logarithmo de $\frac{3}{4}$, que repreſenta o numero 3 dividido por 4 (n. 96), ao Log. de 3 que he 0,477121 ajuntaremos o Compl. do Log. de 4 que he 9,397940, e a ſoma 9,875061 ſerá o Log. de $\frac{3}{4}$. Bem entendido, que nelle ſe involve hum complemento, e con-

conseguintemente se deveria lançar fóra huma dezena da characteristica, se a houvesse. Mas esta se subentende sempre, e se lança fóra no fim das operaçoens, emque entra o dito Logarithmo, se póde ser.

§§ Os Logarithmos desta forma realmente naõ differem dos que se exprimem por huma characteristica negativa. Porque o Log. 9,875061, no qual se subentende huma dezena subtractiva da characteristica, tem com effeito por characteristica 9 −10, e conseguintemente vem a ser o mesmo que $\bar{1}$,875061. Se o mesmo Log. involvesse dous complementos, teria realmente a characteristica 9 −20, e valeria o mesmo que $\overline{11}$,875061.

Deve reparar-se, que os Logarithmos se servem mutuamente de complementos. Assim como 9,875061 he complemento do Log. 0,124939, do mesmo modo 0,124939 he complemento do Log. 9,875061. Estes Logarithmos, que saõ mutuamente complementos, correspondem a numeros entre si *reciprocos*, os quais saõ todos aquelles, que sendo multiplicados hum pelo outro daõ a unidade por producto, como 3 e $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{4}$ e $\frac{4}{3}$ &c.

E por isso, como he o mesmo dividir por 3 que multiplicar por $\frac{1}{3}$, em lugar de subtrahir o Log. de 3 podemos ajuntar o Log. de $\frac{1}{3}$, que he o complemento do Log. de 3; e assim nos outros casos. §§

254 O mesmo se entenderá dos Log. das frac-

ço-

çoens decimais. Se quizermos v. g. o Log. de 0,575 que reprefenta o mefmo que $\frac{575}{1000}$, ao Log. de 575 ajuntaremos o complemento do Log. de 1000, e a foma 9,759668 ferá o Log. que bufcamos. De outra forte: Busque-fe o Log. da fracçaõ decimal, como fe foffe numero inteiro; e em lugar da characteriftica fe ponha huma que tenha tantas unidades menos que 10, 20 &c, quantas faõ as cafas defde o lugar das unidades até a primeira letra da fracçaõ. Affim 0,05621 terá o Log. 8,749812; 0,0000000005621 o Log. 0,749812; e finalmente 0,00000000005621 o Log. 9,749812; fubentendendo-fe no primeiro e fegundo hum fó complemento, e no terceiro dous.

255 Quando dos Logarithmos fe houver de tornar aos numeros, fe no refultado de quaisquer operaçoens naõ fe puderem lançar fóra da characteriftica tantas dezenas, quàntos forem os complementos que nellas entraraõ, he manifefto, que elle deve moftrar huma fracçaõ. Para determinarmos efta, lançaremos da characteriftica todas as dezenas que tiver, e confiderando o refto como Log. de hum numero inteiro, bufcaremos efte nas Taboas (n. 242 e feg.), e nelle notaremos tantas dezenas de cafas decimais da direita para a efquerda, quantos forem os complementos que no dito Log. reftáraõ.

Refultando v. g. o Log. 8,732235 de varias operaçoens em que tiveffe entrado hum complemento, conheceremos que elle pertençe a huma fracçaõ, por naõ podermos lançar fóra da characteriſtica huma dezena que nella ha de mais. Aſſim buſcando o numero inteiro que correſponde ao Log. 8,732235, acharemos 539802500; e fazendo nelle 10 caſas de dizima, ſerá a fracçaõ 0,0539802500.

Como porém raras vezes he neceſſario levar as fracçoens a taõ alto ponto de approximaçaõ, tomar-ſe-ha a characteriſtica a arbitrio, e tendo achado o numero competente com as letras que baſtarem, delle formaremos a fracçaõ, pondo a ſua primeira letra tantas caſas adiante da virgula, quantas forem as unidades que a characteriſtica do Log. propoſto tiver de menos que 10, 20 &c, conforme o Log. contiver hum, dous &c complementos

Deſte modo o Log. 8,73225 procurado nas Taboas com a characteriſtica 3, correſponde ao numero 5398 proximamente; e porque a characteriſtica 8 tem 2 menos que 10, a primeira letra 5 deverá eſtar na ſegunda caſa depois da virgula, e ſerá a fracçaõ 0,05398. Se o Log. involveſſe dous complementos, ſeria a fracçaõ correſpondente 0,000000000005398.

256 Deve notar-ſe, que quando ſe multiplicaõ eſtes Logarithmos, como ſuccede na formaçaõ das potencias das fracçoens, juntamente ſe multiplicaõ os complementos que nelles ſe contém. Poriſſo, lançando fóra as dezenas que tiver a characteriſtica do producto, ſe terá conta dos complementos que nella ficaõ, para ſe determinar o valor da fracçaõ.

Por exemplo, dando-ſe o Log. 7,924753 que ſabemos involver hum complemento, e querrenrendo-se elevar á quinta potencia a fracçaõ correspondente, multiplicaremos o Log. por 5, e o producto 39,623765 terá 5 complementos. Omittindo as 3 dezenas, ficará o Log. 9,623765 com dous complementos; e conseguintemente corresponderá á fracçaõ 0,00000000004205.

257 Pelo contrario, quando os mesmos Logarithmos se houverem de dividir, como succede na extracçaõ das raizes, deve procurar-se que ajuntando as dezenas necessarias á characteristica se ponhaõ no Log. tantos complementos, quantas forem as unidades no exponente da raiz, ou o dobro, triplo &c. dellas; e praticando a divisaõ, o quociente conservará hum, dous, tres &c complementos.

Por exemplo, se o Log. 9,702922 tiver hum complemento, e da fracçaõ correspondente quizermos extrahir a raiz cubica, ajuntar-lhe-hemos 2 dezenas á characteristica, e ficará 29,702922 com tres complementos; entaõ dividindo por 3, o quociente 9,900974 terá hum só complemento, e mostrará a raiz que buscamos 0,7961. Se da fracçaõ correspondente ao Log. 1,987542, no qual ha dous complementos, quizermos extrahir a raiz quadrada, dividilo-hemos por 2 (porque naõ he necessario ajuntar dezena alguma á characteristica neste caso) e o quociente 0,993771 involverá hum complemento, e mostrará por conseguinte a fracçaõ 0,0000000000857. Se da fracçaõ correspondente ao Log. 9,887745, no qual se contiverem 5 complementos, quizermos extrahir a raiz quarta, ajuntaremos 3 dezenas á characteristica e teremos 39,887745 com 8 compleplementos; entaó dividindo por 4, o quociente 9,971936 conservará dous complementos, e mostrará por conseguinte a fracçaó 0,00000000009374; e assim dos mais.

O uso dos Complementos serve de abbreviar vantajosamente as operaçoens Trigonometricas; e por isso he de grande utilidade na Astronomia, e em todas as Partes da Mathematica, onde se houver de praticar a resoluçaó dos triangulos por meio dos Logarithmos.

FIM DA ARITHMETICA.

INDICE

Dos Principios que se contém nestes Elementos.

naindo quantas vezes entra o divisor na primeira letra do dividendo, ou nas primeiras duas, quando a primeira for menor que o divisor, e assim se procederá de casa em casa até á ultima; advertindo, que naõ cabendo o divisor hum numero exacto de vezes na parte que se divide, o resto se ajuntará em lugar de dezenas á letra seguinte, e naõ chegando a caber huma vez, se assentará cifra no quociente. n. 60.

Sendo tambem composto o divisor, a operaçaõ he do mesmo modo: Toma-se no dividendo huma parte naõ menor que o divisor, e confrontando as primeiras letras de hum e outro, se acha a letra do quociente, a qual se multiplica pelo divisor, e o producto se diminue da parte do dividendo, e ao resto se ajunta a letra seguinte do mesmo dividendo, para formar huma nova parte que se torna a dividir do mesmo modo, e assim por diante. n. 62.

Quando o producto da letra do quociente pelo divisor sahe maior que a parte actual do dividendo, he sinal que a dita letra se julgou maior do que devia ser; e quando, diminuido o dito producto da parte correspondente do dividendo, ficar o resto naõ menor que o divisor, he sinal que a letra do quociente se assentou menor do que convinha. n. 61.

Quando o dividendo, e o divisor acabaõ ambos em cifras, antes de fazer a divisaõ podem cortar-se em ambos tantas, quantas forem as daquelle que menos tiver. n. 67.

A Divisaõ da dizima se reduz á dos numeros inteiros procurando-se que no dividendo, e no divisor haja o mesmo numero de casas decimais. n. 68.

Se ao resto final de huma divisaõ se ajuntar huma cifra, e se continuar a operaçaõ, achar-se-ha a letra competente á casa das decimas, e assim por diante. n. 68.

A Divisaõ, e Multiplicaçaõ provaõ-se reciprocamente huma pela outra; porque dividindo o producto por hum dos factores deve sahir o outro no quociente; e multiplicando o divisor pelo quociente, deve sahir o producto igual ao dividendo, n. 74.

Fracçaõ, ou *Quebrado*, he o numero que representa as partes da unidade, a qual se suppoem dividida em hum numero determinado de partes iguais. n. 78.

Para exprimir hum quebrado saõ necessarios dous numeros, hum que mostre em quantas partes se suppoem dividida a unidade, o qual se chama *denominador* e o outro, que mostre de quantas dessas partes consta a quantidade que queremos significar, o o qual se chama *numerador*. n. 80. 81.

Tanto o numerador, como o denominador de hum quebrado, chamaõ-se *termos* delle. n. 83.

O quebrado, que tiver o numerador maior que o denominador, vale mais que a unidade. n. 84.

Para extrahir os inteiros envolvidos em huma expressaõ fraccionaria, divide-se o numerador pelo denominador. n. 85.

Para reduzir hum inteiro á fórma de quebrado, multiplica-se pelo denominador que lhe queremos dar, e no producto virá o numerador. n. 86.

Hum quebrado naõ muda de valor quando se multiplicaõ, ou dividem ambos os seus termos por hum mesmo numero. n. 88. 89.

Para reduzir dous quebrados ao mesmo denominador, multiplicaõ-se os dous termos de cada hum pelo denominador do outro. Sendo mais que dous quebrados, multiplicaõ-se os dous termos de cada hum pelo producto dos denominadores de todos os outros. n. 90. 91.

reduzin

do as especies inferiores a hua fracçaõ da principal antes de fazer as ditas operaçoens. n. 119.

Parte *aliquota* de hum numero he o numero, que nelle se contém algumas vezes exactamente n. 120.

Para multiplicar os numeros complexos, resolvem-se as especies inferiores em partes aliquotas da especie principal, e humas das outras: e quando esta resoluçaõ naõ suggere productos faceis de calcular, suppre-se com productos subsidiarios. n. 121. 122. 123.

Para dividir hum complexo por incomplexo, no caso de ser o quociente da mesma natureza que o dividendo, parte-se pelo divisor a especie maior do dividendo, o resto se converte em unidades da especie seguinte, e se ajunta com as que houver no dividendo, e a soma se torna a partir pelo mesmo divisor; e assim por diante. n. 124.

Sendo porém o quociente de diversa natureza, reduzir-se ha tanto o dividendo, como o divisor, ás unidades da infima especie do dividendo; e depois se praticará como no primeiro caso, tratando as unidades do dividendo assim reduzido, como se fossem da mesma especie das que devem sahir no quociente. n. 127.

Se tambem for complexo o divisor, reduz-se ás unidadas da sua infima especie, e multiplica-se o dividendo pelo numero que dessas unidades he necessario para fazer a unidade principal; e pratica-se a divisaõ, como no caso do divisor Incomplexo. n. 128.

Quadrado de hum numero he o producto delle multiplicado por si mesmo. n. 129.

Raiz quadrada de hum numero he o numero, que o produz sendo multiplicado por si mesmo. n. 130.

A raiz de hum numero, que naõ he quadrado perfeito, chama-se *surda*, *irracional*, ou *incommensuravel*. n. 132.

O quadrado de qualquer numero, composto de dezenas, e unidades, contém *o quadrado das dezenas*, *o dobro do producto das dezenas pelas unidades*, e *o quadrado das unidades*. n. 134.

Para extrahir a raiz quadrada de qualquer numero, divide-se este em classes de duas letras, começando da direita para a esquerda; da ultima classe á esquerda (que póde ser de huma só letra) busca-se a raiz, que será a primeira letra da raiz procurada; o quadrado desta letra se diminue da mesma classe, e ao resto, se o houver, se ajunta a classe seguinte, e se formará hum dividendo parcial, cujo divisor será o dobro da raiz achada, o qual se escreverá da segunda letra do dividendo para a esquerda; o quociente será a segunda letra da raiz, a qual se assentará tambem á direita do divisor, e se multiplicará por elle assim augmentado; o producto se diminuirá do dividendo, e ao resto se ajuntará a classe seguinte, e se formará outro dividendo, que se partirá pelo dobro da raiz achada; e assim por diante. n. 137. 139.

A raiz approximada de hum numero, que a naõ tem exacta, tira-se ajuntando ao dito numero tantas classes de duas cifras, quantas saõ as letras decimais, que se querem na raiz, e pratica-se a regra precedente. n. 140.

Para extrahir a raiz quadrada de hum quebrado, tira-se a raiz tanto do numerador, como do denominador, se ambos saõ quadrados perfeitos; e quando naõ, reduz-se o quebrado á dizima, de sorte que tenha numero

Se

Se a proporçaõ arithmetica for continua, a ſoma dos extremos he dupla do meio; e reciprocamente. n. 177.

Em toda a proporçaõ geometrica, o producto dos meios he igual ao dos extremos; e reciprocamente. n. 178. 180.

Se a proporçaõ for continua, o producto dos extremos ſerá igual ao quadrado ao meio, e reciprocamente. n. 178.

Dados tres termos de huma proporçaõ geometrica conhecer-ſe-ha o quarto. Porque ſe eſte for hum dos extremos, o producto dos meios ſe dividirá pelo outro; e ſe for hum dos meios, o producto dos extremos ſe dividirá pelo outro meio. n. 179.

A proporçaõ de quatro termos naõ ſe perde, mudando os extemos para meios, e os meios para extremos; nem tambem, trocando entre ſi de lugar os meios, ou os extremos. n. 181 182.

A proporçaõ naõ ſe póde alterar, multiplicando, ou dividindo ambos os antecedentes, ou ambos os conſequentes por hum meſmo numero. n. 183.

Se em qualquer proporçaõ geometrica, a ſoma, ou differença do antecedente e conſequente, ſe comparar com o antecedente ou conſequente, em ambas as raſoens do meſmo modo, o reſultado eſtará em proporçaõ. n. 183.

Em toda a proporçaõ geometrica, a ſoma, ou differença dos antecedentes he para a ſoma, ou differença dos conſequentes, como qualquer dos antecedentes para o ſeu conſequente. n. 185.

Em qualquer numero de raſoens iguais, a ſoma de todos os antecedentes he para a ſoma de todos os conſequentes, como qualquer antecedente para o ſeu conſequente. n. 186.

Raſaõ composta he a que reſulta de duas, ou mais raſoens, multiplicando entre ſi os antecedentes, e da meſma ſorte os conſequentes. n. 187.

Raſaõ *duplicada*, *triplicada*, *quadruplicada* &c, he a que ſe compoem de duas, tres, quatro &c. raſoens iguais. n. 189.

Os productos de duas ou mais proporçoens, multiplicadas por ordem, ou termo por termo, tambem eſtaõ em proporçaõ. n. 190.

As potencias ſemelhantes de quatro termos proporcionais, tambem ſaõ proporcionais. n. 191.

As raizes ſemelhantes de quatro termos proporcionais, tambem ſaõ proporcionais. n. 192.

A *Regra de tres* tem por objecto achar hum dos termos de huma proporçaõ por meio dos outros. Eſta he *ſimples*, quando a queſtaõ naõ involve mais do que quatro termos; e *composta*, quando involve mais de quatro. n. 194. 196.

A regra de tres *directa* he quando hum dos termos principais deve conter o outro do meſmo modo, que o relativo do primeiro contém o relativo do ſegundo; e *inverſa*, ou *reciproca*, quando hum dos termos principais deve conter o outro, como o relativo deſte contém o daquelle. n. 194. 195.

Na Regra directa cada termo principal com o ſeu relativo devem occupar juntamente o lugar de antecedentes, ou de conſequentes; e na inverſa, devem ter juntamente ou o lugar de meios, ou o de extremos. n. 194. 195.

A *Regra de Companhia* tem por objecto dividir hum numero em partes proporcionais a quaiſquer numeros dados. n. 197.

Para achar qualquer dellas, faremos: Como a ſoma dos numeros dados para o numero propoſto, aſſim qualquer dos numeros dados para a parte que lhe he proporcional. n. 197.

A *Regra de falſa poſiçaõ* he ſimples

dos inteiros, antes da dizima do mesmo Logarithmo. n. 222.

O numero correspondente a qualquer Logarithmo tem sempre tantas letras, quantas saõ as unidades da characteristica, e mais huma. n. 222.

A soma dos Logarithmos de dous numeros he igual ao Logarithmo do seu producto. n. 225.

O Logarithmo de qualquer potencia de hum numero he igual ao Logarithmo delle, multiplicado pelo exponente da mesma potencia. n. 229.

O Logarithmo de qualquer raiz de hum numero he igual ao Logarithmo delle, dividido pelo exponente da mesma raiz. n. 230.

O Logarithmo do quociente de huma divisaõ he igual ao Logarithmo do dividendo menos o Logarithmo do divisor. n. 231.

Pratica-se a regra de tres por Logarithmos, somando os Logarithmos do segundo e terceiro termo, e tirando da soma o Logarithmo do primeiro; o resto he o Logarithmo do quarto. n. 232.

O Logarithmo de hum numero acompanhado de fracçaõ, acharse-ha reduzindo tudo a fracçaõ, e tirando o Logarithmo do denominador do Logarithmo do numerador. n. 234.

O Logarithmo de huma fracçaõ propria he igual á differença dos Logarithmos do numerador e denominador, precedida do final —, o qual mostra que esta differença he subtractiva; e por isso os Logarithmos das fracçoens proprias se devem tratar de hum modo contrario ao que se pratica com os Logarithmos dos numeros inteiros. n. 235.

Se á characteristica de hum Logarithmo se ajuntar huma, duas, tres unidades &c., corresponderá a hum numero dez, cem, mil vezes &c maior; e ao contrario. n. 238.

Para achar o Logarithmo de hum numero maior do que os das Taboas, busca-se nellas o Logarithmo que corresponde as primeiras quatro, ou sinco letras delle, conforme o alcance das Taboas, e juntamente a differença deste Logarithmo ao immediatamente maior nas mesmas Taboas; esta differença se multiplicará pelo resto das letras do numero proposto, e do producto se cortaraõ outras tantas para a direita; as que ficarem se ajuntaráõ ao dito Logarithmo menor, e a soma com a characteristica competente será o Logarithmo procurado. n. 239.

O Logarithmo de hum numero seguido de dizima busca-se como se fosse inteiro, e da characteristica se tiraõ tantas unidades, quantas saõ as casas decimais. n. 240.

O Logarithmo de huma fracçaõ decimal propria busca-se tambem, como se fosse numero inteiro, mas esse Logarithmo se tira de tantas unidades, quantas saõ as casas decimais, e ao resto se poem o sinal —.

Para achar o numero correspondente a hum Logarithmo, que se naõ acha nas Taboas, mas cahe entre dous Logarithmos da suprema classe dellas, tomar-se-ha a differença dos Logarithmos entre os quais elle cahe, e a differença entre o menor delles, e o Logarithmo proposto; e dividindo esta por aquella, o quociente nos dará as letras decimais, que devemos ajuntar ao numero correspondente ao Logarithmo proximamente menor. n. 243.

Se o Logarithmo tiver menor, ou maior characteristica, do que a classe suprema das Taboas, reduzir-se-ha a ellas, ajuntando-lhe, ou tirando-lhe as unidades necessarias: e no numero achado se adiantará a virgula pa-

900 | 16
450
225 | 2 25
25 56
1 56
56
17 7 196
25

$\frac{5}{8}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{6}{8}$ $\frac{3}{8}$

$\frac{16}{15}$

$\frac{4}{5}$ $\frac{3}{31}$ $\frac{1}{1}$

18

$\frac{3}{18}$

9010 | 16
100 | 56
04

9010 | 16
101 | 563
050
02

450
900 225 | 4
25 | 56
1 | 56
56
168
6
1008

Fezits

4/2 5/3 3/1 3 12/6 10/6 18/6

Zomboria

2345/3457 140 40/60 20/7 140

105/40 280/420 5/7 35

7.89 791 528 0039 4 955 573 49

1/5 2/3 10/12 955 95 95

3/7 8/9 3/4 5/7 36 25 756 764

Dõm Anto ... 1558

Zoan

Zepreti

Zoaqui

872290 | 17

822 | 51311

17

359171

51. 67311

a reg. dos 019 8722287

3

Ee a q da 17

020 872290

do 3. 4.o actual 17

03 3444

o 4 30 444

7876 643

Numerador

Ee o q mostra des p.tes da unid.e consta

a quantid.e q queremos significar

2434

27

E denominador Ee o q mostra em q.tas p.tes

7876

se supoem devedida a unid.e

BEZOUT
ARITH