Fran.co Correa Pessoa

He do P.e Ant.o
Pim.el natural de S.
Verão, e eu sou hũ
grd.e seu am.o

34 10 2
17

238
39

30 | 12
06 2

30000 | 12
1 60 2500
00

ELEMENTOS
DE
ARITHMETICA
POR
M. BEZOUT
DA ACADEMIA REAL
das Sciencias de Pariz &c. &c.

O

Traduzidos do Francez.

QUARTA EDIÇAÕ.

Este livro he de Pe Joze Ferreira Prior de Leira Fresco

COIMBRA:
NA REAL OFFICINA DA UNIVERSIDADE.

M.DCC.LXXXXI.

Por Ordem de Sua Mageſtade.

INDICE

Das materias que se contém nestes Elementos.

NOÇOENS preliminares sobre a natureza dos Numeros, e suas differentes especies . . . . pag. 1.
Da Numeraçaõ ordinaria, e da Dizima 3
Das OPERAÇOENS da Arithmetica - - - - - 14
Da Especie de Somar, tanto em numeros inteiros, como em Decimais - - - - - - - - - - - - - - ibid.
Da Especie de Diminuir, tanto em numeros inteiros, como em decimais - - - - - - - - - - - - - - 18
Prova do Somar, e Diminuir - - - - - - - - - - 23
Da Especie de Multiplicar - - - - - - - - - - 28
Taboada de Pythagoras - - - - - - - - - - - - 31
Multiplicaçaõ de hum numero composto por hum numero simples - 32
Multiplicaçaõ de hum numero composto por outro composto - - 34
Multiplicaçaõ das partes decimais - - - - - - - - 38
Methodo de multiplicar por meio do somar - - - - - - 43
Uso da Multiplicaçaõ - - - - - - - - - - - - - 45
Da Especie de Repartir - - - - - - - - - - - - 47
Divisaõ de hum numero composto por hum numero simples - - 50
Divisaõ de hum numero composto por outro composto - - - - 55
Modo de abbreviar a Divisaõ - - - - - - - - - - 60
Divisaõ das partes decimais - - - - - - - - - - 63
Methodo de Repartir por meio do Somar, e Diminuir - - - 73
Prova da Multiplicaçaõ, e Divisaõ - - - - - - - 76
Prova pela regra dos noves - - - - - - - - - - 77
Uso da Divisaõ - - - - - - - - - - - - - - - 81
DOS QUEBRADOS - - - - - - - - - - - - - 83
Dos numeros inteiros considerados em forma de quebrados - 86
Das mudanças, que se podem fazer nos termos de hum quebrado, sem lhe alterar o valor - - - - - - - - - - 88
Reducçaõ dos quebrados ao mesmo denominador - - - - - 89
Reducçaõ dos quebrados á expressaõ mais simples que he possivel 96
Outro modo de considerar os quebrados, e consequencias que delles resultaõ - - - - - - - - - - - - - - - 101
Das Operaçoens Arithmeticas sobre os quebrados - - - - - 105
De Somar quebrados . . . . ibid.
De Diminuir quebrados 106
De Multiplicar quebrados 107

De Repartir quebrados 110
Uso dos quebrados 113
Methodo de abbreviar quebrados por approximacaõ 116
DOS NUMEROS COMPLEXOS 120
De Somar os numeros complexos 124
De Diminuir os numeros complexos 127
Multiplicacaõ dos numeros complexos 130
Divisaõ de hum numero complexo por hum numero incomplexo . 140
Divisaõ de hum numero complexo por outro complexo 143
Da formaçaõ dos numeros QUADRADOS, *e extracçaõ das suas raizes* 145
Da formaçaõ dos numeros CUBICOS, *e extracçaõ das suas raizes* 162
Methodo geral para extrahir as raizes de qualquer grão que sejaõ 172
Outro methodo particular para extrahir com mais facilidade a raiz cubica 180
DAS RASOENS, E PROPORÇOENS 181
Propriedades das Proporçoens Arithmeticas 190
Propriedades das Proporçoens Geometricas 192
Uso das Proposiçoens antecedentes 200
Da Regra de tres directa, e simples . . . . ibid.
Da Regra de tres inversa, e simples 204
Da Regra de tres composta 205
Da Regra de Companhia 207
Da Regra de falsa posiçaõ 212
Da Regra de liga 216
Outras Regras relativas ás Proporçoens 219
Das Progressoens Arithmeticas 222
Das Progressoens Geometricas 225
DOS LOGARITHMOS 229
Taboa dos Logarithmos dos numeros naturais de 1 até 200 . 232
Propriedades dos Logarithmos 234
Uso dos Logarithmos 236
Dos numeros, cujos Logarithmos se naõ achaõ nas Taboas . 239
Dos Logarithmos, cujos numeros se naõ achaõ nas Taboas . 246
Do Complemento Arithmetico dos Logarithmos, e do seu uso . 252

ELEMENTOS
DE
ARITHMETICA.

NOÇÕES PRELIMINARES

Sobre a natureza dos Numeros, e ſuas differentes eſpecies.

1

DAMOS o nome de *Quantidade*, em geral, a tudo aquillo que he capaz de augmento, ou diminuiçaõ; como he, por exemplo a *extençaõ*, *duraçaõ*, *pezo* &c. Tudo o que he quantidade pertence ao objecto das *Sciencias Mathematicas*. Mas a *Arithmetica*, que he a primeira parte dellas, e ſerve de porta para todas as outras, trata ſómente da quantidade *diſcreta*, que he a que ſe exprime por numeros.

2 A Arithmetica pois he a *Sciencia de contar*: Ella concidera a natureza, e propriedades dos numeros, e tem por fim enſinar os meios mais faceis, tanto para os repreſentar, como para os compôr e reſolver, que he o que ſe chama *calcular*.

3 Para ſe formar huma idéa exacta dos numeros, he neceſſario ſaber primeiro o que entendemos por *unidade*.

4 A *Unidade* he huma quantidade, que ſe toma (as mais das vezes arbitrariamente) para ſervir de termo de comparaçaõ a todas as outras quantidades da meſma eſpecie. Aſſim, quando dizemos que hum corpo péza *ſinco* libras, a *libra* he a unidade, iſto he, a quantidade, com a qual ſe compara, e pela qual ſe faz idêa do pezo delle. Podiamos igualmente tomar a *onça* para unidade, e entaõ o pezo do meſmo corpo ſeria *oitenta* onças.

5 O *Numero* ſerve pois para exprimir de quantas unidades, ou partes da unidade ſe compõe qualquer quantidade.

Se a quantidade ſe compõe taõ ſómente de unidades, o numero que a exprime ſe chama *inteiro*: porém ſendo compoſta de unidades, e juntamente de partes da unidade, ou ſimpleſmente de partes da unidade, entaõ chamamos o numero *quebrado*, ou *fracçaõ*: Aſſim, *tres e meio* fazem hum numero quebrado, ou fraccionario; e *tres quartas*, huma fracçaõ.

6 O Numero, de que nos ſervimos, ſem determinar a eſpecie das unidades, como quando dizemos ſimpleſmente *tres*, ou *tres vezes*, *quatro*, ou *quatro vezes*, chama-ſe numero *abſtracto*; porém quando declaramos ao meſmo tempo a eſpecie das unidades, como quando dizemos *quatro libras*, *cem tonelladas*, chama-ſe numero *concreto*.

Ha muitas outras eſpecies de numeros, dos quais daremos a definiçaõ ao meſmo tempo que delles houvermos de tratar.

Da

Da Numeraçaõ ordinaria, e da Dizima.

7 A *Numeraçaõ* he a arte de exprimir todos os numeros por huma quantidade limitada de nomes, ou de caracteres. Estes caracteres, que saõ as letras da escritura numerica, chamaõ-se *algarismos*. Naõ he necessario dizer aqui os nomes dos numeros, por ser conhecimento familiar a toda a sorte de pessoas. Quanto ao modo de os representar por algarismos, naõ podemos deixar de explicar com toda a exactidaõ os seus principios.

8 Os caracteres, de que usamos na *Numeraçaõ* actual, e os nomes dos numeros, que elles representaõ, saõ estes: (*)

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Cifra	*hum*	*dous*	*tres*	*quatro*	*sinco*	*seis*	*sete*	*oito*	*nove*

Para exprimir todos os outros numeros com estes mesmos caracteres, se assentou: que de dés unidades se fizesse huma só, a qual se chamasse *dezena*, e que se contasse por dezenas da mesma sorte, que se conta por unidades, isto he, que se contassem *duas* dezenas, *tres* dezenas &c. até *nove*; E que para representar es-

(*) Na Arithmetica vulgar usamos tambem de huma figura, que chamamos *Cifraõ*, a qual se escreve pela maior parte como o *Phi* Grego, e algumas vezes desta fórma U. O seu lugar he entre os *milhares*, e as *centenas*, e serve para ler com mais facilidade os numeros, distinguindo-se á primeira vista a casa dos *milhares*, como em 425U372. Tambem serve de abbreviatura, quando os trés ultimos algarismos saõ cifras. Assim 725U he o mesmo, que 725000.

tas novas unidades se usasse dos mesmos algarismos, com que se representaõ as unidades primitivas, distinguindo-as sómente pelo lugar, que se lhes assinalou á esquerda dellas.

Assim para representar *sincoenta* e *quatro*, que contém *sinco* dezenas, e *quatro* unidades, escreveremos 54. Para representar *sessenta*, que contém hum numero exacto de dezenas, e nenhuma unidade, escreveremos 60; pondo huma cifra na casa das unidades, para mostrar que as naõ há neste numero, e juntamente determinar a letra 6 a significar dezenas. Deste modo podemos contar até *noventa e nove* inclusivamente.

9 Pelo que antes de passarmos a diante, notemos esta propriedade da Numeraçaõ actual, a saber: *Que huma letra posta á esquerda de outra, ou seguida de huma cifra, representa hum numero dés vezes maior, do que havia de representar, se estivesse só.*

10 Por huma convençaõ semelhante contaremos de 99 até *nove centos* e *noventa* e *nove*. Porque de dés dezenas faremos huma unidade, a qual chamaremos *centena*, porque dés vezes dés fazem cem; e contaremos as centenas desde *huma* até *nove*, escrevendo-as com os mesmos algarismos, sómente com a differença de as pôrmos á esquerda das dezenas.

Assim, para exprimir *oito centos* e *sincoenta* e *nove*, que contém *oito* centenas, *sinco* dezenas, e *nove* unidades, escreveremos 859. Se fossem *oito centos* e *nove*, que contém *oito* centenas, e *nove* uuidades, sem dezena alguma, seria necessceſſario eſcrever 809 ; pondo huma cifra na caſa das dezenas, que faltaõ. E ſe tambem faltaſſem as unidades, deveriamos pôr duas cifras ; de ſorte que para aſſentar *oito centos*, eſcreveremos 800.

11 Pelo que notaremos tambem, *Que em virtude da meſma convençaõ, qualquer letra ſeguida de outras duas, ou de duas cifras, moſtra hum numero cem vezes maior, do que moſtraria eſtando ſó.*

12 Com o meſmo artificio contaremos de 999 até *nove mil nove centos e noventa e nove* ; formando de dés centenas huma unidade, que ſe chama *milhar*, porque dés vezes cem fazem mil ; contando eſtas unidades pelo modo, que já diſſemos ; e repreſentando-as com as meſmas letras, ſituadas porém á eſquerda das centenas.

Aſſim, para aſſentar *ſete mil oito centos e ſincoenta e nove*, eſcreveremos 7859 ; para aſſentar *ſete mil e nove*, eſcreveremos 7009 ; e para aſſentar *ſete mil*, eſcreveremos 7000. Donde ſe vê, *Que huma letra ſendo ſeguida de outras tres, ou de tres cifras, moſtra hum numero mil vezes maior, do que moſtraria eſtando ſó.*

13 Continuando por diante do meſmo modo ; fazendo ſempre de dés unidades de qualquer ordem huma ſó unidade ; e eſcrevendo as novas unidades, que ſe vaõ formando, nas caſas conſecutivas, caminhando ſempre para a eſquerda ; chegamos a exprimir, e aſſentar de hum modo uniforme, com os dés algariſmos propoſtos, todos os numeros inteiros, que ſe pódem imaginar.

14 Para lermos com facilidade, ou dizermos o valor de qualquer numero, que conste de quantos algarismos quizermos, dividillo-hemos em classes de tres letras cada huma, exceptuando a ultima da parte esquerda, que conforme a quantidade das letras de que o numero constar, poderá ser tambem de huma, ou de duas letras. A' primeira, terceira, e todas as mais classes impares, principiando da direita para a esquerda, daremos por sua ordem os nomes seguintes, *unidades*, *milhoens*, *billioens*, *trillioens*, *quatrillioens*, *quintillioens*, *sextillioens* &c; e á segunda, quarta, e todas as mais classes pares, o nome de *milhares*. Feito isto, advertiremos que a primeira letra de cada classe (principiando sempre da parte direita) mostra as unidades proprias da sua classe, conforme os nomes que lhes temos dado, e que a segunda mostra as dezenas, e a terceira as centenas das mesmas unidades respectivas

Entaõ, principiando da parte esquerda, leremos cada huma das classes, como se estivesse só, applicando-lhe no fim a denominaçaõ respectiva das suas unidades. Assim, por exemplo, para declararmos o valor do numero seguinte,

23/	456/	789/	234/	565/	456
milhares	*billioens*	*milhares*	*milhoens*	*milhares*	*unidades.*

Diremos: vinte e tres *mil*, quatrocentos e sincoenta e seis *billioens*; setecentos e oitenta e nove *mil*, duzentos e trinta e quatro *milhoens*; qui-

quinhentas e ſeſſenta e ſinco *mil*, quatrocentas e ſincoenta e ſeis *unidades*. (*)

15 Da *Numeraçaõ*, que temos explicado, e que he de pura convençaõ, ſe ſegue manifeſtamente: Que á medida que ſe vaõ ſeguindo os algariſmos de hum numero da direita para e eſquerda, repreſentaõ unidades conſecutivamente maiores, ſendo ſempre cada huma dellas dés vezes maior que a precedente; e por conſeguinte, Que para fazer hum numero dés, cem, mil vezes maior &c. baſta pôr depois do algariſmo das unidades, huma, duas, tres cifras &c. Pela raſaõ contraria, quando em hum numero ſe caminha da eſquerda para a direita, os algariſmos conſecutivos moſtraõ unidades cada vez menores, ſendo ſempre cada huma dellas dés vezes menor que a precedente.

16 Tal he o artificio da *Numeraçaõ* actual: Ella ſerve de baſe a todos os outros modos de contar, ainda que em muitas artes naõ ſe guarde ſempre a regra de contar unicamente por dezenas, dezenas de dezenas &c.

17 Para aſſentar o valor das quantidades mais pequenas do que a unidade, que ſe tem eſcolhido, divide-ſe eſta em outras unidades mais pequenas. O numero dellas he arbitrario, com tanto que por ellas ſe poſſaõ medir as quantida-des,

(*) Nas contas pecuniarias uſamos do termo *conto* em lugar de *milhaõ*; de *conto de contos* em lugar de *milhaõ de milhões* ou de hum *billiaõ*. Naõ dizemos *hum milhaõ de reis* mas *hum conto de reis*, ou ſimpleſmente *hum conto*. Dizemos igualmente *hum conto de ouro*, ou *hum milhaõ de cruzados*. Em tudo o mais naõ contamos ſenaõ por *milhões*, pois naõ dizemos hum *conto*, mas hum *milhaõ* de moedas, de arrobas &c.

des, que queremos moſtrar. Porém o que mais ſe deve procurar neſta ſorte de diviſões, he que ſe façaõ de maneira, que dem aos calculos a facilidade maior, que he poſſivel. Por eſta raſaõ, em lugar de dividir logo a unidade em hum grande numero de partes, que ſejaõ ſufficientes para a avaliaçaõ das mais pequenas quantidades, ſe divide primeiro em hum moderado numero de partes, cada huma das quais ſe divide em outras, e eſtas em outras &c. E eſta he a raſaõ, porque nas moédas ſe divide a *libra* em 20 partes, que ſe chamaõ *ſoldos*; e o *ſoldo* em 12 partes, que ſe chamaõ *dinheiros*. Do meſmo modo nos pezos, divide-ſe a *libra* em 2 *marcos*, o marco em 8 *onças*, e a onça em 8 *oitavas*; de ſorte, que no primeiro caſo ſe faz a diviſaõ por *vintenas*, e por *duzias*: e no ſegundo, por *meios*, e *oitavas* &c.

18 O numero compoſto de partes, que ſe reportaõ do modo ſobredito a differente eſpecie de unidades, chama-ſe *Complexo*, *Denominado*, ou *Heterogeneo*; e ao contrario chama-ſe *Incomplexo* todo aquelle, que involve huma ſó eſpecie de unidades. Aſſim 8^{lb}, ou 8 *libras*, he numero incomplexo; e 8^{lb} $17^{ſ}$ 8^{d}, ou 8 *libras*, 17 *ſoldos*, e 8 *dinheiros*, numero complexo.

19 Cada arte tem o ſeu modo particular de dividir a unidade principal, de que ſe ſerve. As diviſões da *toeſa* naõ ſaõ as meſmas que as da *libra*; as da *libra* ſaõ differentes das do *dia*, e da *hora*; e eſtas differem tambem das do *marco*, e aſſim as mais. De todas ellas moſtraremos o valor, quando tratarmos dos numeros complexos.

20 Po-

20 Porém de todas as divisões, e subdivisões, que se pódem fazer da unidade, a que mais contribue sem duvida alguma para a facilidade dos calculos, he a *divisaõ decimal*, na qual se suppoem a unidade dividida em dés partes, cada huma destas em outras dés, e assim por diante. Della se faz hum uso continuo na practica das Sciencias Mathematicas; e tem a ventagem de que a sua numeraçaõ, e o seu calculo he do mesmo modo, que o dos numeros ordinarios e inteiros, como agora se verá.

21 Para assentar pois em *partes decimais* as quantidades mais pequenas que a unidade, imagina-se a mesma unidade, qualquer que ella seja, v. g. *libra*, *toesa* &c. composta de dés partes iguais, assim como se imagina a *dezena* composta de dés *unidades*, ou a *libra* composta de vinte *soldos*. A estas novas unidades, em contraposiçaõ das *dezenas*, damos o nome de *decimas*, representamo-las com os mesmos algarismos; e porque saõ dés vezes menores que as unidades principais, dar-lhes-hemos lugar á direita dellas.

Para tirar porém o equivoco que podia haver, tomando-se as *decimas* por unidades simples, assentou-se ao mesmo tempo fixar por huma vez a casa das unidades principais, a que o numero todo se reporta, por meio de hum sinal particular. Para isso se usa de huma virgula (ou de hum ponto, ou de huma risca), a qual se poem ao lado direito das unidades, ou entre as unidades e as decimas, que vem a ser o mesmo. Assim, para assentarmos *vinte e quatro* unidades e *tres decimas* partes da unidade, eſcreveremos deſte modo 24,3.

22 Da meſma ſorte podemos actualmente conſiderar as *decimas*, como unidades formadas de outras dés, cada huma dés vezes mais pequena do que ellas; e pela meſma raſaõ de analogia, as aſſentaremos á direita das meſmas *decimas*. Eſtas novas unidades dés vezes mais pequenas que as decimas vem a ſer cem vezes mais pequenas que as unidades principais, e por iſſo ſe chamaõ *centeſimas*. Aſſim, para notar *vinte e quatro unidades, tres decimas, e ſinco centeſimas*, eſcreveremos deſte modo 24,35.

23 Igualmente podemos conceber as *centeſimas*, como formadas de dés partes. Eſtas ſeraõ mil vezes mais pequenas que a unidade principal, e por conſeguinte ſe chamaráõ *milleſimas*; e por ſerem dés vezes mais pequenas que as *centeſimas* ſe aſſentaráõ á direita dellas. Continuando por diante a dividir do meſmo modo na raſaõ decupla, formaremos novas unidades conſecutivas, ás quais daremos os nomes de *decimas-milleſimas*, *centeſimas-milleſimas*, *millioneſimas*, *decimas-millioneſimas*, *centeſimas-millioneſimas*, *bimillioneſimas* &c. e as aſſentaremos por ſua ordem nas caſas ſeguintes, caminhando ſempre para a direita.

24 As partes da unidade, que acabamos de explicar, ſaõ as *fracções decimais*, a que os noſſos Authores daõ communmente o nome de *Dizima*.

25 O modo de ler, ou dizer o valor dos algariſmos pertencentes á *Dizima*, he como nos ou-

outros numeros. Depois de ſe haverem lido as letras que eſtaõ á eſquerda da virgula, lem-ſe as letras decimais da meſma ſorte, applicando-lhes no fim o nome das unidades reſpectivas, que competem á ſua ultima caſa. Aſſim, para declarar o valor deſte numero 34,572 diremos, trinta e quatro unidades, e quinhentas e ſetenta e duas *milleſimas*: Se, por exemplo, ſe trataſſe de *toeſas*, diriamos, trinta e quatro *toeſas*, e quinhentas e ſetenta e duas *milleſimas partes* de huma *toeſa*.

A raſaõ diſto he facil de perceber, em ſe advertindo que no numero 34,572 a letra 5 ſe póde tomar indifferentemente por ſinco *decimas*, ou por quinhentas *milleſimas*; porque valendo a *decima* 10 *centeſimas* (n. 22.), e a *centeſima* 10 *milleſimas* (n. 23.), cada *decima* valerá dés vezes dés *milleſimas*, ou 100 *milleſimas*; e aſſim as 5 *decimas* valeráõ 500 *milleſimas*. Pela meſma raſaõ, a letra 7 moſtrará 70 *milleſimas*, porque cada *centeſima* vale 10 *milleſimas* (n. 23.)

26 Quanto á denominaçaõ das unidades reſpectivas da ultima caſa dos algariſmos decimais, ſerá ſempre facil de achar, contando ſobre cada huma das letras por ſua ordem, da virgula para a direita, os nomes ſeguintes: *decimas*, *centeſimas*, *milleſimas*, *decimas-milleſimas*, *centeſimas-milleſimas*, *millioneſimas* &c.

27 No caſo de naõ haver unidades, mas taõſómente partes decimais da unidade, para evitar toda a equivocaçaõ aſſentaremos huma cifra na caſa das unidades. Aſſim, para declarar 125 *milleſimas*, eſcreveremos deſte modo 0,125. Se qui-

quizessemos mostrar 25 *millesimas*, escreveriamos 0,025, assentando huma cifra na casa das *decimas*, naõ sómente para mostrar que as naõ há no dito numero, mas tambem para ficarem os algarismos seguintes no seu devido lugar. Pela mesma rasaõ, querendo declarar 6 *decimas-millesimas*, escreveremos 0,0006 &c.

28 Supposta a intelligencia dos principios precedentes, examinemos as mudanças, que resultaõ no valor de hum numero, quando a virgula se muda do seu lugar.

Como a virgula serve para marcar a casa das unidades, e como o valor de cada hum dos algarismos depende da sua distancia local, e respectiva á mesma casa das unidades; fica evidente, que mudando-se a virgula huma, duas, tres casas &c. para a esquerda, o numero se fará dés, cem, mil vezes &c. mais pequeno, e ao contrario dés, cem, mil vezes &c. maior, se a virgula se adiantar huma, duas, tres casas &c. para a direita.

E com effeito, se tomarmos o numero 4327,5264, e mudarmos a virgula para a casa seguinte á esquerda, de sorte que fique 432,75264; he manifesto, que os *milhares* do primeiro numero, passaõ no segundo para *centenas*, as *centenas* para *dezenas*, as *dezenas* para *unidades*, as *nnidades* para *decimas*, as *decimss* para *centesimas*, e assim por diante. Logo cada parte do primeiro numero, e por conseguinte todo elle, se tornou dés vezes menor, em virtude da mudança da virgula. Pelo contrario, se mudassemos a virgula huma casa para a direita, e escrevessemos

mos

mos 43275,264, os *milhares* do primeiro numero ſe converteriaõ em *dezenas de milhares*, as *centenas* em *milhares*, as *dezenas* em *centenas*, as *unidades* em *dezenas*, as *decimas* em *unidades*, as *centeſimas* em *decimas*, e aſſim por diante; mudança, de que manifeſtamente reſulta hum numero dés vezes maior que o primeiro.

29 Diſcorrendo do meſmo modo acharemos, que mudando a virgula duas, ou tres caſas para a eſquerda, reſulta hum numero cem, ou mil vezes menor; e pelo contrario, cem, ou mil vezes maior, ſe a virgula ſe mudar duas, ou tres caſas para a direita.

30 A ultima obſervaçaõ que faremos ſobre a *Dizima*, he que naõ ſe altéra o valor de hum numero, aſſentando depois da ultima letra decimal quantas cifras quizermos. Aſſim 43,25 he o meſmo que 43,250, ou 43,2500, ou 43,25000. &c.

Porque valendo cada *centeſima* o meſmo que 10 *milleſimas*, ou 100 *decimas-milleſimas* &c., as 25 *centeſimas* valeraõ 250 *milleſimas*, ou 25000 *decimas-milleſimas* &c. Em huma palavra: He o meſmo, como ſe em lugar de 25 moedas de deſaſeis toſtões (25 *piſtoles*) diſſeſſemos 250 *libras de França*; ou em lugar de 25 *quintais*, diſſeſſemos 2500 *arrateis*. (*)

Das

(*) O *quintal* de França tem 100 arrateis. Entre nós o *quintal* commum tem 128 arrateis, e o *quintal* da Caſa da India 112.

Das Operações da Arithmetica.

31 S*Omar*, *Diminuir*, *Multiplicar*, e *Repartir*, ſaõ as quatro operações fundamentais da Arithmetica, a que os noſſos Eſcritores daõ o nome de *Eſpecies*. Todas as queſtões, que ſe pódem propôr ſobre os numeros, ſe reduzem finalmente a praticar alguma deſtas Eſpecies, ou todas ellas. E por iſſo convem muito adquirir o habito de as executar com prontidaõ e facilidade, procurando alcançar a raſaõ em que ellas ſe fundaõ.

32 O fim da Arithmetica, como já diſſemos, he enſinar os meios de calcular facilmente os numeros. Eſtes meios conſiſtem em reduzir o calculo dos numeros compoſtos ao dos numeros ſimples, que ſe exprimem pelo menor numero de letras que he poſſivel, fazendo por partes todas as operações, como logo moſtraremos.

DA ESPECIE DE SOMAR

Tanto em numeros inteiros, como em decimais.

33 S*Omar* naõ he outra couſa mais, do que moſtrar o valor total de muitos numeros por meio de hum ſó, que ſeja igual a todos juntos. Eſte numero, que ſe buſca por meio da operaçaõ, chama-ſe *Soma*; e os numeros que ſe ajuntaõ, (os quais devem ſignificar todos a meſma eſpecie de unidades) chamaõ-ſe *Addições*, ou *Parcellas*.

Quan-

Quando os numeros, que ſe haõ de ſomar, ſaõ *digitos*, iſto he, quando naõ ſe eſcrevem com mais do que huma letra, naõ há neceſſidade de regra alguma para achar a ſua ſoma. Quando porém forem numeros compoſtos, iſto he, quando ſe eſcrevem com muitas letras, uſaremos da regra ſeguinte.

N

Eſcreveremos as *addições* humas debaixo das outras, de ſorte que fiquem unidades debaixo de unidades, dezenas debaixo de dezenas &c., e por baixo de todas paſſaremos huma riſca, que as ſepare, e diſtingua da ſoma.

Entaõ ſomaremos primeiramente todos os algariſmos, que eſtaõ na columna das unidades; ſe a ſoma naõ paſſar de 9, eſcrevella-hemos por baixo; ſe paſſar de 9, como entaõ comprehende dezenas, ſó poremos por baixo o que excede do numero das dezenas, e contaremos eſtas dezenas por outras tantas unidades, e ſomalas-hemos juntamente com os algariſmos da columna ſeguinte. Nella obſervaremos a meſma regra, como na primeira; e aſſim por diante de columna em columna, até chegar á ultima, debaixo da qual eſcreveremos a ſua ſoma inteira, ou conſte de hum, ou de mais algariſmos. Eſta regra ſe entenderá melhor por meio dos exemplos ſeguintes.

Ex-

Exemplo I.

SE nos derem para ſomar eſtas duas addições 54925 . . . e 2023, eſcrevellas-hemos do modo que aqui ſe vê.

54925	
2023	
56948	Soma.

E tendo paſſado huma riſca por baixo dellas, começaremos pelas unidades, dizendo: 5 e 3 fazem 8, e eſcreveremos 8 debaixo deſta meſma colunna. Paſſando ás dezenas, diremos: 2 e 2 fazem 4, e eſcreveremos 4 por baixo. Nas centenas diremos, 9 e o fazem 9, e eſcreveremos 9 por baixo. Nos milhares diremos, 4 e 2 ſaõ 6, e eſcreveremos 6 por baixo da riſca. E na colunna ſeguinte diremos finalmente, 5 e o fazem 5, e eſcreveremos 5 na meſma colunna.

He evidente, que o numero achado 56948 he a ſoma dos dous numeros propoſtos, pois que elle contém as unidades, dezenas, centenas, milhares, e dezenas de milhares de ambos elles, as quais ajuntámos por partes na meſma operaraçaõ.

Exemplo II.

SE nos perguntarem a ſoma dos quatro numeros ſeguintes 6903 . . . 7854 . . . 953 ... 7327, aſſentallos-hemos do modo que aqui ſe moſtra.

6903	
7854	
953	
7327	
23037	Soma.

E começando, como no exemplo precedente, pela columna das unidades, diremos: 3 e 4 ſaõ 7, e 3 ſaõ 10, e 7 ſaõ 17; e como neſta ſoma parcial a letra 7 pertence á caſa das unidades onde eſtámos, e a letra 1 á caſa das dezenas, eſcreveremos 7 debaixo da riſca na columna das unidades, e guardaremos 1 para o ſomar com os algariſmos da columna ſeguinte, que he das dezenas.

Paſſando a ella, diremos: 1, que vem da columna precedente, e 5 (porque naõ he neceſſario ter conta da cifra) fazem 6, e 5 fazem 11, e 2 fazem 13. Pela meſma raſaõ eſcreveremos 3 debaixo deſta columna, e levaremos 1 para a ſeguinte, dizendo: 1 e 9 ſaõ 10, e 8 ſaõ 18, e 9 ſaõ 27, e 3 ſaõ 30. Aſſim poremos o em direito deſta columna, e levaremos 3 para diante, dizendo do meſmo modo: 3 e 6 ſaõ 9, e 7 ſaõ 16, e 7 ſaõ 23. Deſte numero 23 aſſentaremos a letra 3 debaixo da columna que temos ſomado; e porque naõ há mais columna para onde levemos a letra 2, a eſcreveremos no lugar ſeguinte para a eſquerda; e concluida a operaçaõ, diremos que ſomaõ as addições propoſtas 23037.

34 Se as addições forem accompanhadas de *Dizima*, como neſta ſe procede do meſmo modo que nos numeros ordinarios, contando ſempre por *dezenas* de caſa em caſa da direita para a eſquerda, a regra para as ſomar he abſolutamente a meſma: tendo ſempre a attençaõ de ajuſtar em huma meſma colunna as unidades da meſma ordem, o que ſe conſeguirá, ficando as virgulas em direitura de alto a baixo.

Exemplo III.

SE quizermos ſomar os tres numeros ſeguintes 72,957 . . . 12,8 . . . 124,03, aſſentallos-hemos como aqui ſe moſtra:

72,957	
12,8	
124,03	
209.787	Soma.

E praticando a regra, como nos exemplos precedentes, acharemos que ſomaõ 209,787.

DA ESPECIE DE DIMINUIR

Tanto em numeros inteiros, como em decimais.

35 D*iminuir*, he huma operaçaõ, pela qual ſe tira hum numero de outro numero. O que della reſulta chama-ſe *reſto*, *exceſſo*, *ou differença*.

Pa-

Para fazer eſta operaçaõ, aſſentaremos o numero que queremos tirar por baixo do outro (que ſempre deve ſer o maior) do meſmo modo que aſſentamos as addições na regra de ſomar. E paſſando huma riſca por baixo delles, iremos tirando da direita para a eſquerda cada numero inferior do ſuperior, que lhe ficar correſpondente, a ſaber, as unidades das unidades, as dezenas das dezenas, &c. e eſcreveremos cada reſto debaixo da riſca pela meſma ordem, pondo cifra todas as vezes que naõ reſtar nada.

Quando o algariſmo debaixo ſe achar maior que o de ſima, eſte ſe augmentará com dés unidades, tomando para iſſo mentalmente empreſtada huma das unidades do algariſmo vezinho da parte eſquerda, o qual por eſta raſaõ ſe deve tratar como diminuido de huma unidade na operaçaõ ſeguinte.

Exemplo I.

QUerendo diminuir 5432 de 8954, aſſentaremos ambos os numeros deſta maneira.

8954	
5432	
3522	Reſto.

E principiando pela caſa das unidades, diremos: quem de 4 tira 2, ficaõ 2, que aſſentaremos debaixo da riſca na meſma caſa das unidades. Depois paſſando ás dezenas, diremos : quem de 5 tira 3 , ficaõ 2 , que aſſentaremos debaixo dellas. Na terceira colunna : quem de 9 tira 4 , ficaõ 5 , que poremos em direitura della. E na quarta finalmente : quem de 8 tira 5 , ficaõ 3 , que eſcreveremos debaixo do 5 ; e feita a conta , achámos que tirando 5432 de 8954 fica o reſto 3522.

Exemplo II.

QUerendo tirar 7987 de 27646 , aſſentaremos os numeros deſta maneira - - 27646

$$\begin{array}{r} 27646 \\ \underline{7987} \\ \underline{19659} \end{array} \text{ Reſto.}$$

E como de 6 naõ ſe pódem tirar 7 , ajuntaremos a 6 dés unidades , que ſe formaráõ de huma unidade tirada na caſa ſeguinte ao algariſmo 4 , e diremos : tirando 7 de 16 , ficaõ 9 , que eſcreveremos debaixo do 7. Paſſando ás dezenas , naõ diremos , tirando 8 de 4 ; mas tirando 8 de 3 ſómente , porque do 4 já tiramos 1 na operaçaõ precedente ; e porque tambem de 3 naõ ſe pódem tirar 8 , ajuntaremos da meſma ſorte a 3 dés unidades , tomando para iſſo 1 á letra 6 da eſquerda , e diremos : tirando 8 de 13 , ficaõ 5 , que aſſentaremos debaixo do 8. Paſſando á terceira colunna , diremos do meſmo modo : tirando 9 de 5 , naõ póde ſer ; mas tirando 9 de 15 (tomada huma unidade do algariſmo 7 , como nas operaçoes precedentes) ficaõ 6 , que eſcreveremos debaixo de 9. Na quarta colunna : ti-

tirando 7 de 6, naõ póde ſer, mas tirando 7 de 16, ficaõ 9, que poremos debaixo do 7. E como naõ há nada, que tirar na quinta columna, eſcreveremos debaixo della, naõ 2, porque delle já tiramos 1 para a operaçaõ precedente, mas ſómente 1, que lhe ficou, e aſſim o reſto total ſerá 19659.

36 Eſtando cifra na caſa, donde havemos de tomar a unidade de empreſtimo, naõ a tomaremos della, mas do primeiro algariſmo ſignificativo, que depois della ſe ſeguir. Neſte caſo, aindaque realmente ſe pedem 100, ou 1000, ou 10000 &c., conforme houver huma, duas, ou tres cifras conſecutivas &c: comtudo obraremos ſempre, como no exemplo precedente, ajuntando ſómente 10, ou 1 da caſa vezinha, ao algariſmo neceſſitado. E porque eſtes 10 ſaõ huma parte dos 100, ou 1000 &c., tomados do primeiro algariſmo ſignificativo, para empregarmos os 90, ou 990 &c que reſtaõ, tomaremos as cifras ſeguintes, como ſe cada huma foſſe hum 9. Iſto ſe entenderá melhor por meio do exemplo ſeguinte.

Exemplo III.

	99
SE de - - - - - - - -	20064
quizermos tirar - -	17489
	2575 Reſto.

Primeiramente, tirando 9 de 14, ficaõ 5. Depois, como de 5 (porque do 6 já tomámos 1)

1) naõ ſe pódem tirar 8 , e como naõ podemos tomar 1 da letra ſeguinte que he o , tomállo-hemos do 2 , e valerá 1000 a reſpeito da caſa , onde fazemos á operaçaõ, Deſtes 1000 naõ tomaremos ſenaõ 10 para ajuntarmos a 5 , e diremos , de 15 tirando 8 , ficaõ 7.

E porque dos 1000 que pedimos ſó temos uſado de 10 , ou de 100 ſó temos uſado de 1 , uſaremos do reſto 99 , para delle tirarmos os dous algariſmos ſeguintes , que vem a ſer o meſmo que tomar cada huma das cifras , como ſe foſſe hum 9. Aſſim diremos : quem de 9 tira 4, ficaõ 5 ; quem de 9 tira 7 , ficaõ 2 ; e finalmente , quem de 1 tira 1 , fica o , que naõ he neceſſario aſſentar-ſe , por ſer no ultimo lugar.

37 Se houver *Dizima* nos numeros , ſeguiremos abſolutamente a meſma regra. Porém , para evitar todo o embaraço na applicaçaõ della , faremos com que ambos tenhaõ igual numero de letras decimais , ajuntando as cifras que forem neceſſarias ao que menos tiver ; preparaçaõ , que lhe naõ altéra o valor (n, 30.)

Exem-

Exemplo IV.

De - - - - - - - - - - - - 5403 , 25
Querendo tirar - - - 385 , 6532

Primeiramente ajuntaremos duas cifras á *Dizima* do numero ſuperior. Depois obraremos ſobre os numeros aſſim preparados conforme a regra dos numeros inteiros.

5403 , 2500	
385 , 6532	
5017 , 5968	Reſto.

E feita a operaçaõ , acharemos o reſto 5017 , 5968.

PROVA

Do Somar , e Diminuir.

38 A *Prova* de huma operaçaõ Arithmetica he huma nova operaçaõ , pela qual nos certificamos do reſultado da primeira.

Para provar a conta de *Somar* , ſomar-ſe-haõ de novo todas as colunnas , mudada porém a ordem , iſto he , começando da eſquerda para a direita. O que ſomar a primeira colunna diminuir-ſe-há do membro que lhe correſponde na Soma total , e ſe aſſentará o reſto por baixo , ſe o houver ; eſte como em lugar de dezenas ſe tomará com a letra ſeguinte da meſma Soma para fazer hum

hum novo membro, do qual ſe ha de diminuir o que ſomar a ſegunda colunna; e aſſim por diante até a ultima, onde feita a diminuição, naõ deve ficar reſto algum.

Aſſim, tendo achado acima que eſtes quatro numeros - - - - - - - - - - - 6903

numeros	6903
	7854
	953
	7327
Somaõ	23037
	03110
	000

Para verificar eſte reſultado, ſomaremos os meſmos numeros, principiando pela eſquerda, deſte modo: 6 e 7 ſaõ 13, e 7 ſaõ 20, os quais tirados de 23, ficaõ 3, que com a cifra, que na ſoma ſe ſegue, fazem 30. Na ſegunda colunna: 9 e 8 ſaõ 17, e 9 ſaõ 26, e 3 ſaõ 29, e tirados de 30, fica 1, que com a letra ſeguinte 3 fazem 13. Na terceira colunna: 5 e 5 ſaõ 10, e 2 ſaõ 12, e tirados de 13, fica 1, que com a letra ſeguinte 7 faz 17. E na ultima colunna: 3 e 4 ſaõ 7, e 3 ſaõ 10, e 7 ſaõ 17, e tirados de 17, naõ fica nada: donde entenderemos, que a primeira operaçaõ he exacta.

A raſaõ que temos para concluir que a primeira operaçaõ tem ſido bem feita todas as vezes que depois deſta prova naõ reſta nada, he porque tendo tirado ſucceſſivamente todos os milhares, centenas, dezenas, e unidades, de que ella

ella deve conſtar, he neceſſario, que naõ reſte couſa alguma.

39 Para provar a conta de Diminuir, ſomaſe o reſto achado por meio da operaçaõ com o numero que ſe diminuio; e ſe a operaçaõ foi bem feita, ha de vir na ſoma o meſmo numero, do qual ſe fez a diminuiçaõ. Aſſim vemos, que no terceiro exemplo acima poſto, a operaçaõ foi exacta; porque ſomando 17489 (que he o numero que ſe diminuio) com o reſto 2565, ſe acha reproduzido na ſoma o numero 20054, do qual aquelle ſe diminuio.

$$
\begin{array}{r}
20054 \\
17489 \\
\hline
2565 \\
\hline
20054
\end{array}
$$

20054

§ A prova vulgar de ambas as operações precedentes coſtuma fazer-ſe pela regra dos *noves fóra*, a qual tem o partido de ſer muito expedita na practica.

Tiraõ-ſe os *noves* de qualquer numero com ſumma facilidade, ſomando os ſeus algariſmos ſucceſſivamente; e chegando a ſoma a 9, lançaſe fóra, paſſando de 9, ſomaõ-ſe tambem mentalmente as ſuas letras, e com o que fica ſe continúa por diante. Deſte modo, para tirar os *noves* do numero 86097546, diremos: 8 e 6, 14, nove fóra, 5; e 7 (porque naõ he neceſſario fallar com a o, nem com o 9) ſaõ 12, nove fóra, 3; e 5 ſaõ 8, e 4 ſaõ 12, nove fóra, 3; e 6 ſaõ 9, nove fóra, o. A

A raſaõ diſto ſerá facil de entender a quem reflectir ſobre os principios da *Numeraçaõ*. Porque v. gr. no numero 6745, a letra 6 vale *mil vezes* 6, iſto he, *novecentas e noventa e nove vezes* e mais *huma vez* 6; porém novecentas e noventa e nove vezes 6 ſaõ *noves* juſtos; logo ſendo lançados fóra, fica *huma vez* 6. Do meſmo modo a letra 7 moſtra *cem vezes* 7, iſto he, *noventa e nove vezes*, e mais *huma vez* 7; e por conſeguinte, lançando fóra *noventa e nove vezes* 7, fica *huma vez* 7. E como tambem a letra 4 vale *nove vezes* e mais *huma vez* 4, lançando fóra *nove vezes* 4, fica *huma vez* 4. Logo ſomando-ſe todas as letras, como ſe todas eſtiveſſem na caſa das unidades, a ſoma 22 ſerá o reſto que fica depois de lançados fóra os *noves* que ſe contem nas dezenas, centenas, e milhares do numero propoſto. E porque eſte reſto ainda comprehende *noves*, pela meſma raſaõ ſe ſomaráõ as ſuas letras, e ſerá 4 o reſto final, que ficará tirados todos os *noves* do numero 6745.

Iſto ſuppoſto: Para prova da conta de *Somar*, tiraõ-ſe os *noves* a todas as addições conſecutivamente, como ſe ellas formaſſem hum ſó numero, e aſſenta-ſe o reſto á margem dellas; e o meſmo ſe faz na ſoma. Se o reſto naõ for o meſmo de ambas as partes, he prova infallivel, que a conta eſtá errada (ſuppondo ſempre que o erro naõ eſteja na operaçaõ da meſma prova); pois naõ he poſſivel, que a ſoma ſeja igual ás addições, quando tirando de ambas as partes os *noves* ficaõ reſtos deſiguais. Porém ſe ficarem de ambas as partes reſtos iguais, naõ he prova infalivel

vel de que a conta eſtá certa, mas muito provavel: convem a ſaber, eſtará certa a conta, ſalvo ſe a ſoma tiver de erro *nove*, ou algum dos multiplos de *nove*; e a raſaõ he, porque na operaçaõ lançamos fóra os *noves*, ſem haver reſpeito ſe lançamos igual numero delles de ambas as partes; e poriſſo naõ he inteiramente ſegura eſta prova. Como porém o erro dos multiplos de *nove* naõ ſuccede quaſi nunca na practica, ſe naõ ſe errar de propoſito deſſa maneira, por eſſa raſaõ ſe dá a conta por certa, quando na prova ſe achaõ reſtos iguais. Aſſim no exemplo acima, tirando os *noves* das addições 6903 . . 7854 . . 953 , . 7327, fica de reſto 6; e como ſe acha o meſmo na ſoma 23037, julga-ſe com muita probabilidade, mas naõ com certeza, que a conta eſtá bem feita. E he de advertir, que nem o primeiro methodo acima dado, o qual ſe chama *prova real*, tem certeza abſoluta e infalivel; pois he poſſivel, e ainda factivel, que ao tirar da prova ſe commetta na ſoma de huma colunna hum erro igual e ſemelhante ao que ſe commetteo na primeira operaçaõ; e neſſe caſo ſahirá na prova a conta certa, eſtando errada.

Na conta de *Diminuir*, tiraõ-ſe os *noves* ao numero de quem ſe diminuio, e depois aos outros dous numeros juntos. E confórme ficarem de ambas as partes reſtos iguais, ou deſiguais, faz-ſe o meſmo juizo, que indicamos a reſpeito do *Somar*. Deſte modo no exemplo acima poſto, tirando os *noves* ao numero 20054, fica o reſto 2; e como ſe acha o meſmo nos outros dous numeros 17489 e 2565 tomados juntamente, tem-ſe a conta por certa. §§

DA-

DA ESPECIE DE MULTIPLICAR
Tanto em numeros inteiros , como em decimais.

40 *M Ultiplicar* hum numero por outro he tomar o primeiro tantas vezes, quantas ſaõ as unidades do ſegundo. Aſſim, por exemplo , multiplicar 4 por 3 naõ he outra couſa , ſenaõ tomar *tres* vezes o numero 4.

41 O numero , que ſe ha de multiplicar, chama-ſe *multiplicando* ; o numero , pelo qual ſe ha de multiplicar , chama-ſe *multiplicador* ; e o numero que reſulta da operaçaõ, chama-ſe *producto.* Os noſſos Arithmeticos antigos daõ ao multiplicando o nome de *multiplicaçaõ.* Mas hoje uſamos deſte termo para ſignificar a meſma operaçaõ do multiplicador.

42 O termo *producto* tem commumente hum ſentido muito mais amplo , e geral. Porém neſte tratado ſómente uſaremos delle para ſignificar o reſultado da multiplicaçaõ.

O multiplicador , e o multiplicando chamaõ-ſe tambem *factores* do producto. Aſſim 3 e 4 ſaõ factores de 12 , porque 3 vezes 4 ſaõ 12.

43 Pela idéa que temos dado da multiplicaçaõ ſe vê , que ella ſe póde abſolutamente fazer eſcrevendo o multiplicando tantas vezes , quantas ſaõ as unidades do multiplicador , e ſomando ao depois. Aſſim , por exemplo , para multiplicar 7 por 3 podiamos eſcrever deſte modo :

$$\begin{array}{r} 7 \\ 7 \\ 7 \\ \hline 21 \end{array}$$

E

E a Soma 21, que reſulta das tres addições, ſeria o producto.

Como porem eſte modo de multiplicar ſeria tanto mais longo e trabalhoſo, quanto maior foſſe o multiplicador, a regra particular da multiplicaçaõ enſina o methodo de chegar ao meſmo reſultado por hum caminho mais breve.

44 Em quanto os numeros ſe conſideraõ *abſtractamente*, ſem attender ás unidades que elles repreſentaõ, he indifferente o tomar qualquer delles para multiplicando, ou para multiplicador. Por exemplo, querendo multiplicar 4 por 3, tanto faz multiplicar 4 por 3, como 3 por 4; porque o producto ſempre ſerá 12. E com effeito 3 vezes 4 moſtra o triplo de 1 vez 4; e 4 vezes 3, o triplo de 4 vezes 1: e he evidente, que tanto faz 1 vez 4, como 4 vezes 1. O meſmo raciocinio ſe póde applicar a quaeſquer outros numeros.

45 Sendo porém os numeros *concretos*, he precizo diſtinguir o multiplicando do multiplicador; principalmente na multiplicaçaõ dos numeros *complexos*, dos quais adiante trataremos.

Eſta diſtinçaõ naõ tem difficuldade. Porque a meſma queſtaõ moſtra ſempre, qual he a quantidade que temos intento de repetir, e qual he a que declara as vezes que queremos fazer a repetiçaõ; e a primeira ſerá o *multiplicando*, a ſegunda o *multiplicador*.

46 Como o multiplicador ſerve de marcar as vezes que ſe ha de repetir o multiplicando, ſerá ſempre hum numero *abſtracto*. Perguntando-ſe v. gr. quanto haõ de cuſtar 52 *toeſas* de obra de

car-

carpinteiro, a rasaõ de 36 *libras* a *toesa*; facilmente se vê, que o *multiplicando* he 36 *libras*, que se haõ de tomar 52 *vezes*; prescindindo de que o numero 52 signifique *toesas* na questaõ, ou qualquer outra cousa.

47 Donde se segue, que sendo o *producto* formado da addiçaõ repetida do *multiplicando*, deve mostrar sempre unidades da mesma natureza que elle. (*)

Tendo feito esta reflexaõ sobre as unidades do *producto* e seus *factores*, passemos ao methodo de o achar.

48 As regras da multiplicaçaõ dos numeros compostos reduzem-se á multiplicaçaõ dos numeros simples, que constaõ de hum só algarismo. Por isso he necessario saber primeiro o producto delles, o qual se acha facilmente ajuntando cada numero de 1 até 9 nove vezes consecutivas a si mesmo. Tambem se póde usar da *Taboada* seguinte, cuja invençaõ se attribue a *Pythagoras*.

(*) Desta regra naõ exceptuamos a multiplicaçaõ Geometrica, na qual tambem as unidades do *multiplicador* se devem tomar como *abstractas*, e o *multiplicando* e *producto* devem mostrar unidades da mesma especie, como havemos de declarar na Geometria.

Ta-

Taboada de Pythagoras.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8.	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

A primeira columna desta *Taboada*, tanto vertical, como trânsversal, fórma-se da addiçaõ successiva da unidade 1; a segunda do numero 2; a terceira do numero 3; e assim por diante.

49 Para achar nella o *producto* de dous numeros simples, busca-se hum delles v. gr. o *multiplicando* no alto na *Taboada*, e delle se desce pela columna vertical até chegar á casa fronteira ao multiplicador, que se busca na primeira columna vertical da parte esquerda; e o numero que na

di

dita casa se achar será o *producto*. Querendo v.gr. saber o producto de 9 por 6, ou quanto he 6 vezes 9, buscaremos o 9 no alto da *Taboada*, e descendo até a casa fronteira ao 6, nella acharemos 54, que he o producto delles.

Eisaqui quanto se requer para entrar na multiplicaçaõ dos numeros compostos.

MULTIPLICAÇAÕ

De hum numero composto por hum numero simples.

50 Escreve-se o *multiplicador*, que aqui suppomos ser de hum só algarismo, debaixo do *multiplicando*. O lugar delle he arbitrario; mas para fixar as idéas costuma assentar-se na casa das unidades.

E passando por baixo delles huma risca, que distingua os *factores* do *producto*, multipliquem-se as unidades do multiplicando pelo multiplicador; e se o producto constar sómente de unidades, escreva-se na casa das unidades, debaixo da risca; se constar porém de unidades e dezenas, escrevaõ-se sómente as unidades, e guardem-se mentalmente as dezenas para se ajuntarem ao producto da operaçaõ seguinte.

Depois multipliquem-se as dezenas do multiplicando pelo mesmo multiplicador; ajuntem-se ao producto as dezenas que ficáraõ da operaçaõ precedente, se as houver; e escreva-se a soma na casa das dezenas, podendo ser com huma só letra, quando naõ, escrevaõ-se sómente as

uni-

unidades, e guardem-se as dezenas (que saõ realmente centenas) para se ajuntarem ao producto seguinte, o qual tambem ha de constar de centenas.

Continuando deste modo a operaçaõ, até fallar o multiplicador com todos os algarismos do multiplicando, o numero que tivermos escrito será o producto total.

Exemplo

Pergunta-se quantos *pés* fazem 2864 *toesas*. (Cada *toesa* tem 6 *pés*). A questaõ se reduz a tomar 6 *pés* 2864 vezes, ou (que vem a ser o mesmo) a tomar 6 vezes 2864 *pés* (n. 44.)

Escreveremos pois - - - 2864 Multiplicando.
6
17184 - - - Producto.

E principiando pelas unidades, diremos: 6. vezes 4, saõ 24; e escrevendo 4, levaremos 2 para a operaçaõ seguinte. 2º. 6 vezes 6 saõ 36, e 2 que vem saõ 38; assentemos 8, e vaõ 3. 3º. 6 vezes 8 saõ 48, e 3 que vem saõ 51; assentemos 1, e vaõ 5. 4º. 6 vezes 2 saõ 12, e 5 que vem saõ 17; que escreveremos por inteiro, porque naõ ha mais nada que multiplicar.

O numero 17184 he o producto que se pede, ou o numero de *pés*, de que constaõ 2864 *toesas*. Porque nelle se contém 6 vezes 4 unidades, 6 vezes 6 dezenas, 6 vezes 8 centenas, e 6 vezes

 2 mil;

2 mil ; e por conseguinte , 6 vezes todo o numero 2864.

MULTIPLICAÇAÕ
De hum numero composto por outro composto.

51 QUando o multiplicador constar de muitos algarismos , por cada hum delles se praticará huma operaçaõ , como no primeiro caso , principiando da direita para a esquerda.

Primeiramente pois se multiplicará todo o multiplicando pelas unidades do multiplicador , e depois pelas dezenas. Este producto se escreverá por baixo do primeiro ; e porque deve mostrar dezenas , pois por ellas se fez a multiplicaçaõ , a sua primeira letra se assentará em direitura das dezenas do primeiro , e as outras nas casas seguintes para a esquerda.

Pela mesma rasaõ o terceiro producto , que se fizer multiplicando pelas centenas , se porá da mesma sorte debaixo do segundo , adiantando-se mais huma casa para a esquerda , e o mesmo se fará com os outros.

Feitas todas estas multiplicaçoens , somar-se-haõ os productos parciais que ellas deraõ , e a soma será o producto total que se busca.

Exem-

Exemplo I.

```
Querendo multiplicar - - -  65487
    por - - - - - - - - - -  6958
                            ------
                            523896
                           327435
                          589383
                         392922
                         ---------
                         455658546 Producto.
```

Primeiramente multiplico 65487 pelo algariſmo 8, que eſtá na caſa das unidades do multiplicador, e aſſento o producto 523896 debaixo da riſca, procedendo conforme a regra dada para o primeiro caſo (n. 50.)

Depois multiplico o meſmo numero 65487 pela ſegunda letra 5 do multiplicador, e eſcrevo o producto 327435 debaixo do precedente, porém de ſorte que a primeira letra 5 fique correſpondente ás dezenas delle.

Do meſmo modo, multiplicando 65487 pela terceira letra 9 do multiplicador, aſſento o producto 589383 debaixo do precedente, ficando a letra 3 correſpondendo á caſa das centenas, porque a letra do multiplicador repreſenta centenas.

Multiplicando finalmente o meſmo numero 65487 pela ultima letra 6 do multiplicador, aſſento o producto 392922 debaixo do precedente, adiantando-o mais huma caſa para a eſquerda, para que a ſua primeira letra 2 fique na caſa dos *milhares*, em que eſtá a letra do multiplicador.

Em fim, de todos estes productos faço a soma 45565854б, que será o producto de 65487 multiplicados por 6958, ou o valor do numero 65487 tomado 6958 vezes; pois que com effeito se tomou 8 vezes na primeira operaçaõ, 50 vezes na segunda, 900 vezes na terceira, e 6000 na quarta; e por conseguinte 6958 vezes em todas quatro.

52 Se o multiplicando, ou o multiplicador, ou ambos acabarem em cifras, abbrevia-se a operaçaõ multiplicando sem fazer caso dellas, e ajuntando-as depois todas ao producto.

Exemplo II.

HAvendo de multiplicar - -	6500
por - - - - - - - - - - -	350
	325
	195
	2275000 Producto.

Deixando as cifras, multiplico 65 por 35, e ao producto 2275 ajunto as tres cifras que se achaõ em ambos os factores.

A rasaõ he, porque o multiplicando 6500 representa 65 centenas; e por isso quando se multiplica 65, o producto se entende ser de centenas. Do mesmo modo o multiplicador 350 mostra 35 dezenas, e por essa rasaõ quando se multiplica por 35, o producto deve significar dezenas. Logo multiplicando-se 65 por 35, o producto mostrará dezenas de centenas, ou milhares;

e por conſeguinte deve acabar em tres cifras, quantas ſaõ as dos factores: e o meſmo raciocinio ſe applicará a todos os outros caſos.

53 Quando ſe encontraõ cifras entre os algariſmos do multiplicador, como a multiplicaçaõ dellas dá hum producto todo de cifras, he eſcuſado aſſentallo. Immediatamente ſe paſſa ao primeiro algariſmo ſignificativo, tendo a advertencia de aſſentar ſempre a primeira letra do producto na caſa correſpondente á letra do multiplicador, que falla com o multiplicando neſſa meſma operaçaõ.

Exemplo III.

SE quizermos multiplicar - 42052
\- - - - - - - - - - - - - 3006

252312
126156

126408312 Producto.

Tendo feito a multiplicaçaõ por 6, e aſſentado o producto 252312 no ſeu lugar competente, paſſaremos logo a multiplicar por 3, mas aſſentaremos o producto 126156 de ſorte que repreſente milhares, como a letra do multiplicador, o que ſe conſegue ficando a primeira letra 6 na meſma caſa della.

MUL-

MULTIPLICAÇAÕ

Das partes decimais.

54 NA multiplicaçaõ da *Dizima* obſervar-ſe-ha a meſma regra dos numeros inteiros, ſem fazer caſo da virgula; e depois de achar o producto, delle ſe cortaráõ por meio da virgula tantas letras de *Dizima* para a direita, quantas ſaõ as que tem os factores ambos juntos.

Exemplo I.

QUerendo multiplicar - - - - 54, 23
por - - - - - - - - - - - - - - - - 8,3

$$
\begin{array}{r}
54,23 \\
8,3 \\
\hline
16269 \\
43384 \\
\hline
450,109
\end{array}
$$

Multiplicaremos 5423 por 83, e acharemos o producto 450109; e porque no multiplicando há duas letras de dizima, e no multiplicador huma, cortaremos tres letras para a direita com a virgula no dito producto, e ficará 450,109, qual deve ſer

A raſaõ deſta regra he facil de entender, obſervando que ſe o multiplicador foſſe 83, o producto ſeria de *centeſimas*, pois ſe teria repetido 83 vezes o numero 54,23 que moſtra *centeſimas*. Como porém o multiplicador he 8,3; iſto he, hum numero dés vezes menor (n. 28.) que 83, o proo producto moſtrará unidades dés vezes menores que as *centeſimas*; logo a ſua ultima letra moſtrará *milleſimas* (n. 23.); e por conſeguinte deverá ter tres algariſmos de dizima, quantos ſe achaõ em ambos os factores juntamente.

E o meſmo raciocinio ſe póde applicar a qualquer outro caſo.

Exemplo II.

SE tiveſſemos de multiplicar - - 0,12
por - - - - - - - - - - - - - - - - 0,3

0,036

Multiplicar-ſe-hia, como no exemplo precedente, 12 por 3, e ſahira o producto 36. Como porém a regra neſte caſo ordena, que ſe ſeparem com a virgula tres letras para a dizima, ficaria hum principiante embaraçado, vendo que o producto naõ tem mais do que duas. Mas applicando a eſte caſo o raciocinio que fizemos no exemplo precedente, he facil de ver, que ſe deve meter huma cifra entre a virgula e 36. Com effeito, he evidente que ſe multiplicaſſemos 0,12 por 3, o producto devia ſer 0,36; logo multiplicando por 0,3 que he dés vezes menor que 3, o producto ſerá dés vezes menor que 0,36; e por conſeguinte (n. 27.) ſerá 0,036, ſupprindo-ſe o lugar com huma cifra, para haver tantas caſas de dizima no producto, como em ambos os factores juntamente.

55 Como na *Dizima* ſe intenta ordinariamen-

to

te a facilidade das operações, ſubſtituindo em lugar de hum calculo rigoroſo huma *approximaçaõ* ſufficiente, e de menos trabalho; naõ ſerá fóra de propoſito, que expliquemos aqui hum meio de abbreviar a multiplicaçaõ, quando nos baſtar ſaber o producto até hum grão determinado de exactidaõ.

Supponhamos v. g. que havemos de multiplicar o numero 45,625957 por 28,635, e que nos baſta hum producto exacto até a caſa das milleſimas. Primeiramente aſſentaremos os numeros, como aqui abaixo ſe moſtra; iſto he, inverteremos a ordem dos algariſmos de hum delles, e o aſſentaremos debaixo do outro de ſorte que o algariſmo que era das unidades fique correſpondendo ao algariſmo do numero ſuperior que eſtiver duas caſas mais para a direita doque aquella, até onde queremos o producto exacto. Entaõ faremos a multiplicaçaõ, advertindo que cada letra do multiplicador naõ há de fallar com as letras do multiplicando que ficaõ para a direita da colunna em que eſtá, e que os productos que ſe forem achando ſe haõ de aſſentar de maneira, que as primeiras letras de todos da parte direita fiquem em huma colunna vertical. Na ſoma deſtes productos riſcaremos as ultimas duas letras á direita, com a advertencia de ajuntar huma unidade á ultima que ficar, ſe as duas que ſe riſcaõ paſſarem de 50. E feito iſto, aſſentaremos a virgula no lugar que pedem os algariſmos da dizima que queremos no producto.

Ex-

Exemplo III.

SE quizermos multiplicar - - - - 45,625957
por - - - - - - - - - - - - - - 28,635

E ſe for baſtante achar o producto exacto até a caſa das milleſimas; eſcreveremos os numeros deſta maneira - - - - - - - - 45,625957
53682

91251914
36500760
2737554
136875
22810

1306499(13

Eſerá o producto - - - - - 1306,499

Se fizeſſemos a operaçaõ por extenſo, achariamos o producto 1306,499278695, com o qual ſe ajuſta o precedente até a caſa das milleſimas, como ſe intentava.

Se o multiplicando naõ tiver tantas letras de dizima, quantas ſaõ precizas para que a letra das unidades do multiplicador correſponda á caſa que deve, conforme a regra, ſupprir-ſe-há ajuntando ao multiplicando as cifras neceſſarias.

Ex-

Exemplo IV.

Havendo de multiplicar - - - - 54,236
por - - - - - - - - - - - - - 532,27

e querendo o producto exacto até a casa das centesimas, assentaremos os numeros deste modo:

54,236000
72235
271180000
16270800
1084720
108472
37961
2886819(53

E o producto será . . . 28868,20 . . . ajuntando huma unidade á ultima letra 9, porque as duas supprimidas 53 excedem 50.

Ex-

Exemplo V.

QUerendo multiplicar - - 0,227538917
por - - - - - - - - 0,5664178

de ſorte, que o producto venha exacto até o ſetimo algariſmo da dizima, aſſentaremos os numeros deſte modo - - - - 0,227538917

```
87146650
----------
.......0
113769455
13652334
1365228
91012
2275
1589
176
----------
1288820(69
```

E o producto ſerá - - - - 0,1288821

§§ Para quem naõ eſtá exercitado na *Taboada* há hum methodo de *multiplicar* por meio unicamente de *ſomar*, o qual ajuntaremos aqui, e he da maneira ſeguinte.

Forme-ſe á parte huma columna na qual primeiramente ſe aſſentará o *multiplicando* defronte da unidade; depois ſomar-ſe-há comſigo meſmo, tomando cada algariſmo duas vezes, e a ſoma ſe eſcreverá por baixo defronte do numero 2; eſta ſoma ſe ajuntará outra vez com o meſmo multiplicando, e a nova ſoma ſe aſſentará por baixo da precedente defronte do nu-

me-

mero 3, e aſſim por diante até 10: e ſe defronte de 10 vier huma ſoma que ſeja o meſmo multiplicando aumentado de huma cifra, ſervirá de prova que todas as ſomas da colunna eſtaõ certas. Pela conſtrucçaõ deſta colunna ſe vê, que nella, ſe tem formado os productos do multiplicando por todos os numeros ſimples de 1 até 9.

Perparada deſte modo a colunna, paſſar-ſe-há á multiplicaçaõ, e por cada huma das letras do *multiplicador* ſe tomará o producto que na dita colunna lhe correſponde, o qual ſe aſſentará de forma que a primeira letra á direita fique na caſa que compete á letra do meſmo multiplicador; e a ſoma de todos eſtes productos, dará o producto total que ſe buſca. O exemplo ſeguinte moſtrará claramente a fórma da operaçaõ.

Se quizermos multiplicar o numero 79856345 pelo numero 9605843, aſſentállos-hemos ao modo ordinario, como aqui ſe moſtra.

79856345	1 79856345
9605843	2 159712690
	3 239569035
239569035	4 319425380
319425380	5 399281725
638850760	6 479138070
399281725	7 558994415
479138070	8 638850760
718707105	9 718707105
767087512623835	10 . . . 798563450

Depois, transferindo o multiplicando para o la-

lado direito defronte de 1, o somaremos comsigo mesmo, e assentaremos a soma por baixo, defronte do 2; do mesmo modo ajuntaremos esta soma com o multiplicando, e escreveremos a nova soma por baixo, defronte do 3; e assim por diante.

Feita a columna como se vê no exemplo, passaremos á multiplicaçaõ. E porque a primeira letra do multiplicador he 3, tomaremos da columna o numero que lhe corresponde, e o assentaremos no seu lugar. O mesmo faremos a respeito das letras seguintes 4, 8, 5, 6, e 9; e fazendo a soma acharemos o producto 767087512623835.

Este methodo he indirecto, e mais longo que o ordinario; mas na multiplicaçaõ dos numeros grandes tem a vantagem de que naõ requer taõ grande attençaõ, nem he taõ sugeito ao erro. Quando porém tivermos, como succede muitas vezes, de multiplicar successivamente hum mesmo numero por muitos outros, como entaõ feita huma vez a columna serve para todas as operações, he este methodo naõ sómente o mais expedito, e seguro, mas tambem o mais abbreviado de todos. §§

Uso da Multiplicaçaõ.

56 NAõ he nossa tençaõ mostrar aqui todos os usos que se pódem fazer da multiplicaçaõ. Sómente indicaremos alguns, que serviráõ de encaminhar para todos os mais.

Serve a Multiplicaçaõ, em geral, para achar o vao valor total de muitas unidades, quando se conhece o valor de cada huma. Se v. gr. nos perguntarem 1º *Quanto devem custar 5842 toesas de obra, a rasaõ de 54^{lb} a toesa?* Multiplicaremos 54^{lb} por 5842, ou (n. 44.) 5842^{lb} por 54; e teremos 315468^{lb} pelo preço total que se pede. 2º *Quanto pézaõ 5954 pés cubicos* (*) *de agoa, supposdo que cada pé tem 72 libras?* Multiplicaremos 72^{lb} por 5954, ou 5954^{lb} por 72; e teremos 428688 libr. pelo pezo total que se pergunta.

57 Serve tambem a multiplicaçaõ para converter as unidades de qualquer especie em unidades de outra especie menor; como, por exemplo, para reduzir as *libras* em *soldos*, e estes em *dinheiros*; as *toesas* em *pés*, estes em *pollegadas*, e estas em *linhas*; os *dias* em *horas*, estas em *minutos*, e estes em *segundos* &c. Muitas vezes há necessidade desta sorte de reducções; e por isto as mostraremos praticadas em alguns exemplos.

Se quizermos converter em *dinheiros* a quantia de 8^{lb} 17^{s} 7^{d} como a *libra* vale 20^{s}, multiplicaremos as 8^{lb} por 20 (n. 52.) e teremos 160^{s}, aos quaes ajuntando os 17^{s}, teremos 177^{s}; depois multiplicaremos estes por 12 (porque cada *soldo* vale 12 *dinheiros*), e teremos 2124^{d}, aos quais ajuntando os 7^{d}, teremos 2131^{d} pelo valor total da quantia 8^{lb} 17^{s} 7^{d} reduzida a *dinheiros*.

Se nos perguntarem quantos minutos tem o an-

(*) O *Pé Cubico* he huma medida que tem hum *pé* de comprido, de largo, e de fundo, pela qual se avalia a capacidade dos corpos, como se verá na Geometria.

anno commum, a ſaber $365^d 5^h 48^m$, ou 365 dias, 5 horas, e 48 minutos; como o dia he de 24 horas, multiplicaremos 24^h por 365, e ao producto 8760^h ajuntaremos 5^h; depois multiplicaremos (n. 52.) o total 8765 por 60 (porque a hora tem 60 minutos), ao producto 525900^m ajuntaremos os 48^m, e o total 525948^m ſerá o numero de minutos, que no anno commum ſe contém.

58 O multiplicar abbreviado, que aſſima explicámos (n. 52.), póde ſervir para reduzir prontamente em *libras* qualquer numero de *tonnelladas*. Como a *tonnellada* péza 2000 *libras*, ſe tivermos v. g. 854 *tonnelladas* para reduzir, naõ he neceſſario mais do que multiplicar 854, e pôr tres cifras adiante do producto; e teremos 1708000 pelo numero de *libras* que pézaõ 854 *tonnelladas*. Obſervem os principiantes, que *duplicar*, *triplicar*, *quadruplicar* &c. he o meſmo que multiplicar por 2, 3, 4, &c.

DA ESPECIE DE REPARTIR

Tanto em numeros inteiros, como em decimais.

REpartir, *ou Dividir* hum numero por outro, em geral, naõ he outra couſa mais do que buſcar *quantas vezes* o primeiro delles contêm o ſegundo; e a operaçaõ com que ſe buſca chama-ſe *Repartiçaõ*, *ou Diviſaõ*. Aſſim repartir 12 por 4 he o meſmo que buſcar em 12 quantas vezes há 4; que ſaõ 3 vezes.

O numero que ſe toma para ſe dividir, chamama-ſe *Dividendo*, e vulgarmente *Partiçaõ*; o numero pelo qual ſe divide, chama-ſe *Diviſor*, ou *Partidor*; e o numero, que moſtra as vezes que o dividendo contém o diviſor, chama-ſe *Quociente*.

A Diviſaõ naõ ſe faz ſempre com a tençaõ de ſaber quantas vezes hum numero contèm outro, mas a operaçaõ procede em todos os caſos, como ſe unicamente ſe dirigiſſe a eſſe fim; e por eſta raſaõ he, que ella ſe póde conſiderar em geral, como huma operaçaõ pela qual ſe acha quantas vezes o dividendo contém o diviſor (*).

¶¶ Pela noçaõ precedente da *Diviſaõ* ſe entenderá facilmente, que ella ſe póde fazer por meio da *Subtracçaõ*, tirando ſucceſſivamente o diviſor do dividendo; pois he evidente, que quantas vezes delle ſe puder tirar, tantas nelle ſe contém. Aſſim para dividir 21 por 7 podemos obrar deſtemodo:

$$
\begin{array}{rl}
21 & \\
\underline{7} & \\
14 & \text{- - - 1° reſto.} \\
\underline{7} & \\
7 & \text{- - - 2° reſto.} \\
\underline{7} & \\
0 & \text{- - - 3° reſto.}
\end{array}
$$

E ten-

(*) Na pratica vulgar conſidera-ſe o dividendo, como huma quantia que ſe há de repartir em partes iguais por tantos *companheiros*, quantas ſaõ as unidades do partidor, ás quais ſe coſtuma dar o meſmo nome de *companheiros*; e no quociente ſe procura ſaber quanto cabe a cada hum delles.

E tendo achado, que tirando-ſe 3 vezes conſecutivas o diviſor 7 do dividendo 21, naõ ſobrou nada, conheceremos que 7 ſe contém *tres vezes* exactamente em 21; e por conſeguinte, que o quociente he 3.

Porém como eſte methodo ſeria tanto mais longo e trabalhoſo, quanto maior foſſe o quociente, pela regra particular da *Diviſaõ*, como por hum *Diminuir abbreviado*, chegamos com maior prontidaõ, e facilidade alcançar o meſmo reſultado. §§

Da meſma noçaõ ſe ſegue evidentemente; *Que multiplicando-ſe o diviſor pelo quociente deve vir no producto o dividendo*; porque niſſo ſe naõ faz outra couſa mais do que tomar o diviſor tantas vezes quantas elle ſe contém no meſmo dividendo; e iſto he geral, quer ſeja o quociente numero inteiro, quer fraccionario.

Quanto á eſpecie das unidades que o *quociente* deve moſtrar, he de advertir que naõ póde determinar-ſe nem pela eſpecie das unidades do dividendo, nem do diviſor, nem de ambos juntos. Porque ficando o dividendo, e o diviſor ſempre os meſmos, o quociente, que ſerá tambem ſempre o meſmo numericamente, póde ſer muito differente em quantò á eſpecie das ſuas unidades, conforme a natureza da queſtaõ o determinar,

Por exemplo: ſe procurarmos ſaber quantas vezes 8^{lb} contém a 4^{lb}, o quociente ſerá hum numero *abſtracto*, que moſtrará 2 *vezes*. Porém ſe quizermos ſaber quanta obra ſe há de fazer por 8^{lb}, a raſaõ de 4^{lb} a *toeſa*, o quociente ſerá hum

D nu-

numero *concreto*, que moſtrará 2 *toeſas*, cuja eſpecie naõ diz reſpeito algum ás unidades do dividendo, nem do diviſor. Por onde ſe vê, que ſómente a queſtaõ que conduz á diviſaõ actual de que ſe trata, he a que decide a natureza das unidades, que deve moſtrar o quociente.

DIVISAÕ

De hum numero compoſto por hum numero ſimples.

60 A Operaçaõ, que agora entramos a moſtrar, ſuppoem que cada hum ſabe achar por ſi meſmo quantas vezes ſe contem hum numero ſimples em outro ſimples, ou compoſto taõ ſómente de dous algariſmos. Eſte conhecimento ſe adquire ao meſmo tempo que ſe apprendem os productos dos numeros ſimples; faltando o qual, póde fazer-ſe uſo da *Taboada*, que acima temos propoſto (n. 48.). Se v. gr. quizermos ſaber em 74 quantas vezes há 9, buſcaremos o diviſor 9 no altó da *Taboada*, e pela ſua colunna vertical deſceremos até encontrar ou o numero dado 74, ou o que for proximamente menor, como neſte caſo he o numero 72; e á caſa delle correſponderá na primeira colunna vertical á eſquerda o quociente, que he neſte exemplo o numero 8.

Iſto ſuppoſto, eis-aqui o methodo de executar a *Diviſaõ* de hum numero compoſto por hum numero ſimples, á qual ſe dá vulgarmente o nome de *meio partir*.

Aſſente-ſe o diviſor ao lado direito do dividendendo, ſeparando-os por meio de huma riſca perpendicular. Por baixo do diviſor ſe paſſe tambem huma riſca, debaixo da qual ſe eſcreveráõ os algariſmos do quociente á medida que ſe forem achando.

Entaõ tomar-ſe-há o primeiro algariſmo á eſquerda do dividendo, ou os primeiros dous, quando o primeiro ſó for menor que o diviſor; e fazendo delles hum dividendo parcial, buſcar-ſe há quantas vezes o diviſor nelle ſe contém, e o numero das vezes ſe aſſentará no lugar do quociente. O quociente achado ſe multiplicará pelo diviſor, e o producto ſe aſſentará debaixo do reſpectivo dividendo, do qual ſe diminuirá; e ao reſto ſe ajuntará a letra ſeguinte do dividendo principal, e ſe formará outro dividendo parcial.

Neſte ſe praticará a meſma operaçaõ. A letra, que ſe achar para o quociente, ſe aſſentará á direita da primeira; depois ſe multiplicará pelo diviſor, e o producto ſe eſcreverá debaixo do reſpectivo dividendo parcial, do qual ſe diminuirá; e ao reſto ſe ajuntará a letra ſeguinte do dividendo principal, e ſe formará de novo outro dividendo parcial, com o qual ſe praticará a meſma operaçaõ; e aſſim por diante, até ſe acabarem as letras do dividendo.

Eſta Regra ſe entenderá mais claramente por meio dos exemplos ſeguintes.

Exemplo I.

SE quizermos repartir 8769 por 7, assentaremos estes dous numeros como aqui se mostra:

Dividendo	Divisor
8769	7
7	
17	$1252\ \frac{5}{7}$ Quociente.
14	
36	
35	
19	
14	
5	

E começando pela esquerda do dividendo, deveriamos dizer em 8 *mil* quantas vezes há 7; mas basta que digamos em 8 quantas vezes há 7? há 1; e assentaremos 1 no quociente. Este 1 he realmente *mil*; mas naõ he necessaoio attender ao seu valor local, pois que elle será determinado pelas letras seguintes do quociente, que havemos de achar. Agora multiplicaremos o quociente 1 pelo divisor 7, e assentaremos o producto 7 debaixo do dividendo parcial 8; e feita a diminuiçaõ, fica 1. Este resto 1 he a parte de 8 que naõ foi dividida, e vale por huma *dezena* a respeito da letra 7 que se segue no dividendo, a qual abaixaremos para junto do dito resto, e te-

retemos outro dividendo parcial 17.

Entaõ diremos do mesmo modo: em 17 que vezes há 7? ha 2; e escreveremos 2 no quociente á direita da outra letra 1 que achamos pela primeira operaçaõ. Depois multiplicaremos o novo quociente 2 pelo divisor 7, e escreveremos o producto 14 debaixo do membro dividendo 17; e feita a diminuiçaõ, teremos o resto 3, que he a parte do dividendo que naõ foi repartida: pelo que lhe ajuntaremos a letra seguinte 6, e teremos o novo dividendo parcial 36.

Continuando a mesma operaçaõ, diremos: em 36 que vezes há 7? há 5; e assentaremos 5 no quociente. Depois multiplicando 5 pelo divisor 7 tiraremos o producto 35 do dividendo 36, e ficará o resto 1, ao qual ajuntaremos a letra seguinte do dividendo, que he a ultima 9, e teremos ainda para partir 19. Pelo que diremos: em 19 que vezes há 7? há 2; e escreveremos 2 no quociente. Depois multiplicaremos o mesmo 2 pelo divisor 7, e diminuindo o producto 14 do dividendo 19, ficará por ultimo o resto 5.

Assim achamos pois, que 8769 contém a 7 tantas vezes, quantas mostra o quociente, isto he, 1252 vezes; e que álem disso ainda restaõ 5.

Pelo que respeita a este resto, bastará por ora dizer, que se assenta á direita do quociente, assim como se vê no exemplo; isto he, que se escreve em cima de huma risca, ficando-lhe o divisor por baixo; expressaõ que quer dizer *sinco setimas* partes da unidade, como adiante mostraremos, quando tratarmos dos *quebrados*.

61 Se no decurso da operaçaõ se achar algum di-

dividendo parcial menor que o diviſor, o qual por conſeguinte o naõ chegará a conter 1 vez, pôr-ſe-há cifra no quociente, e deixando a multiplicaçaõ e ſubtracçaõ ſe ajuntará a letra ſeguinte do dividendo principal, e ſe formará outro dividendo parcial, com o qual ſe continuará a operaçaõ.

Exemplo II.

SUpponhamos que havemos de repartir 14464 por 8.

14464	8
8	1808
64	
64	
064	
64	
0	

Neſte exemplo faremos o primeiro dividendo parcial das duas letras 14, porque a primeira 1 he menor que o diviſor.

Entaõ partindo 14 por 8, cabe ſómente 1, que eſcreveremos no quociente, e fazendo a multiplicaçaõ e ſubtracçaõ, fica o reſto 6, ao qual ajuntaremos a letra ſeguinte do dividendo 4, e teremos para partir 64.

Partindo pois 64 por 8, cabem 8, que aſſentaremos no quociente, e fazendo a multiplicaçaõ e ſubtracçaõ, naõ fica nada de reſto; pelo que eſcreveremos cifra, e para junto della traremos

mos a letra ſeguinte do dividendo 6. Agora como temos o dividendo parcial 6, e eſte he menor que o diviſor, aſſentaremos o no quociente, e abaixaremos immediatamente a letra ſeguinte do dividendo 4, com a qual ſe formará o novo dividendo parcial 64. Entaõ partindo 64 por 8, cabem 8, que eſcreveremos no quociente, e fazendo a multiplicaçaõ e ſubtracçaõ, naõ fica reſto algum. E por iſſo entenderemos, que 8 ſe contém em 14464 exactamente 1808 vezes.

DIVISAÕ

De hum numero compoſto por outro compoſto.

62 QUando o diviſor conſtar de muitos algariſmos, que he o caſo a que vulgarmente ſe da o nome de *partir por inteiro*, praticar-ſe-há a Diviſaõ deſta maneira.

Tomem-ſe da parte eſquerda do dividendo tantas letras, quantas baſtarem para fazer hum dividendo parcial, que naõ ſeja menor que o diviſor. E porque ſeria muito difficultoſo buſcar, quantas vezes o dito dividendo contém o diviſor inteiro, como no primeiro caſo; baſtará achar quantas vezes a primeira letra do diviſor á eſquerda ſe contém na parte ſuperior do meſmo dividendo, que lhe correſponde; e o quociente aſſim achado ſe aſſentará no ſeu lugar.

Entaõ multiplicar-ſe-há o meſmo quociente por todo o diviſor; e conforme ſe forem achando as letras do producto, ſe iráõ aſſentando debaibaixo do dividendo parcial da direita para a eſquerda. Depois tirar-ſe-há eſte producto do meſmo dividendo reſpectivo, e ao reſto ſe ajuntará a letra ſeguinte do dividendo principal, com a qual ſe formará outro dividendo parcial, que ſe repartirá da meſma maneira; e aſſim por diante.

Paſſemos a illuſtrar eſta regra com alguns exemplos, e a prevenir juntamente os caſos, em que póde haver algum embaraço

Exemplo I.

QUerendo repartir 75347 por 53.

```
75347 |  53
53    |------
----- |  1421 34/53
 223  |
 212  |
 ----
  114
  106
  ----
    87
    53
    --
    34
```

Faremos o noſſo primeiro dividendo parcial dos dous algariſmos 75, porque eſtes baſtaõ para elle naõ ſer menor que o diviſor; e em lugar de dizermos em 75 que vezes há 53, diremos ſómente em 7 que vezes há 5? há 1, que eſcreveremos no quociente.

De-

Depois multiplicaremos o quociente 1 por todo o divisor 53, e assentaremos o producto debaixo do dividendo respectivo 75; do qual o diminuiremos, e ficará o resto 22, que com a letra seguinte do dividendo 3 formará outro dividendo parcial 223. Neste tambem, em lugar de dizer em 223 que vezes há 53, diremos sómente, em 22 que vezes há 5? há 4, que assentaremos no quociente; e multiplicando 4 pelo divisor, escreveremos o producto 212 debaixo do dividendo respectivo 223, do qual o diminuiremos, e ao resto 11 ajuntaremos a letra seguinte 4 do dividendo principal, e teremos para repartir de novo 114. Partindo pois 11 por 5, cabem 2 que assentaremos no quociente; depois multiplicaremos pelo divisor; tiraremos o producto 106 do dividendo respectivo 114; ao resto 8 ajuntaremos a letra seguinte do dividendo 7; e teremos o novo dividendo parcial 87. E fazendo nelle finalmente a mesma operaçaõ, acharemos 1 para o quociente; e feita a multiplicaçaõ e subtracçaõ, ficará o resto 34, que assentaremos á direita do quociente do modo que acima indicámos (n.60.)

63 Na operaçaõ precedente devia, em rigor, buscar-se quantas vezes cada hum dos dividendos parciais continha ao divisor inteiro. Porém como esta indagaçaõ pediria grande força de attençaõ, contentamo-nos, do modo que se tem visto, com buscar quantas vezes a parte maior do dividendo contem a maior parte do divisor. He verdade, que deste modo naõ acertamos sempre com o verdadeiro algarismo, que deve assentar-se no quociente, pois procedemos meramen-

te

te por huma tentativa. Mas , alem de que esta tentativa conduz pela maior parte ao conhecimento do verdadeiro quociente , e quando naõ , sempre nos indica hum algarismo pouco distante delle , a multiplicaçaõ , que immediatamente se faz , logo mostra o defeito que se tem commettido , e serve para o corrigir.

E com effeito , se o dividendo contivesse realmente o divisor *tres vezes* , e nós , julgando pelas primeiras letras de ambos elles , entendessemos que o continha *quatro* ; he facil de ver , que multiplicando o divisor por 4 achariamos hum producto maior que o dividendo , por quanto se tomaria o divisor mais vezes do que realmente se continha no mesmo dividendo , e por conseguinte naõ poderia fazer-se a subtracçaõ, Neste caso se diminuirá o quociente suposto de huma , duas unidades &c , até que venha hum producto que possa diminuir-se do respectivo dividendo. Ao contrario , se no mesmo caso figurado puzessemos 2 no quociente , poderia sim diminuir-se o producto do dividendo , mas ficaria hum resto maior doque o divisor , por onde se conheceria que elle se continha no dividendo mais vezes , do que se tinha julgado ; e por conseguinte , que o quociente 2 se tinha tomado menor , doque devia ser. Com o exercicio se adquire em pouco tempo o habito de prever quanto se deve augmentar , ou diminuir o algarismo achado pela primeira prova no caso de se achar defeituoso.

Exem-

Exemplo II.

HAvendo de repartir 189492 por 375:

$$\begin{array}{r|l} 189492 & 375 \\ 1875 & \\ \hline 1992 & 505\frac{117}{375} \\ 1875 & \\ \hline 117 & \end{array}$$

Em primeiro lugar: Tomaremos as primeiras quatro letras do numero propoſto para fazermos dellas o noſſo primeiro dividendo parcial, porque as tres primeiras fazem hum dividendo menor que o diviſor.

Depois, diremos: em 18 quantas vezes há 3? há 6 realmente, naõ havendo reſpeito ás letras ſeguintes; como porém multiplicando o diviſor por 6, ſahe hum producto maior que o dividendo reſpectivo, aſſentaremos ſómente 5 no quociente, e feita a multiplicaçaõ e ſubtracçaõ, ficará o reſto 19, ao qual ajuntaremos a letra ſeguinte do dividendo principal 9, e teremos de novo para repartir 199.

E como em 1 naõ há vez alguma 3, aſſentaremos huma cifra no quociente, e teremos a letra ſeguinte do dividendo principal 2, com a qual ſe formará o novo dividendo parcial 1992. Repetindo nelle a meſma operaçaõ, acharemos que 3 ſe contém em 19 realmente 6 vezes; mas pela raſaõ já declarada eſcreveremos ſómente 5 no quociente; e acabando a operaçaõ, ſobraraõ 117.

64 Eiſ-aqui huma reflexaõ, que em muitos caſos nos póde livrar de fazermos tentativas inuteis. Como pela maior parte ſe erra no juizo que ſe faz do quociente, quando a ſegunda letra do diviſor paſſa muito de 5; neſſe caſo accreſcentaremos mentalmente 1 á primeira letra do meſmo diviſor, e veremos quantas vezes aſſim augmentada ſe contém na parte correſpondente do dividendo. Porque deſte modo faremos hum juizo mais ſeguro do algariſmo, que devemos aſſentar no quociente.

Exemplo III.

SUpponhamos, que nos daó para repartir 1832 por 288.

$$\begin{array}{r|l} 1832 & 288 \\ 1728 & \overline{} \\ \hline 104 & 6\,\frac{104}{288} \end{array}$$

Neſte caſo em lugar de dizer em 18 que vezes há 2, diremos: em 18 que vezes há 3. Porque o diviſor 288 ſe chega muito mais para 300 do que para 200. Aſſim acharemos que há 6, e com effeito eſte he o verdadeiro quociente; e da outra ſorte achariamos 9, e por conſeguinte fariamos tres tentativas inuteis, paſſando de 9 a 8, de 8 a 7, e de 7 a 6.

Modo de abbreviar a Diviſaõ.

65 PAra que melhor ſe entendeſſe o methodo da operaçaõ antecedente, mandámos até agora eſcrever ſempre os productos, que re-

reſultavaõ da multiplicaçaõ do diviſor pelos algariſmos do quociente que ſe hiaõ achando, debaixo dos dividendos reſpectivos, dos quais ſe haviaõ de diminuir. Porém como na Arithmetica ſe deve attender muito a reduzir, e abbreviar as operações, quanto he poſſivel; devemos notar, que podemos deixar de eſcrever os ditos productos, fazendo a ſubtracçaõ juntamente com a multiplicaçaõ. O exemplo ſeguinte baſtará, para moſtrar como iſto ſe executa.

Exemplo.

QUerendo repartir 756984 por 932.

756984	932
1138	
2064	$812\frac{200}{932}$
200	

Tomaremos as quatro primeiras letras do dividendo, porque as tres fazem hum membro menor que o diviſor; e partindo 75 por 9, acharemos que cabem 8, os quais aſſentaremos no quociente. Entaõ em lugar de multiplicar 8 por 932, e eſcrever o producto debaixo do membro 7569, para delle ſer diminuido; faremos tudo junto, dizendo: 8 vezes 2 ſaõ 16, que tirados de 9, naõ póde ſer, mas tirados de 19, ficaõ 3, que eſcreveremos debaixo do 9.

Para deſcontar a dezena, que tomamos da letra 6, a fim de que o 9 valeſſe 19, em lugar de tratarmos a meſma letra 6 como diminuida de hu-

huma unidade, da maneira que praticámos na conta de *Diminuir*, guardaremos essa unidade para a ajuntarmos ao producto seguinte. Assim continuando a operaçaõ, diremos, 8 vezes 3 saõ 24, e 1 que guardamos saõ 25, que tirados de 6, naõ póde ser, mas tirados de 26, fica 1, que assentaremos debaixo do 6. Deste modo fica descontada a unidade, que tinhamos pedido ao 6, porque lhe tiramos huma de mais na diminuiçaõ que acabamos de fazer; e do mesmo modo descontaremos os 2 que agora tomamos do 5 para que o 6 valesse 26. Assim diremos: 8 vezes 9 saõ 72, e 2 que vem (porque na operaçaõ antecedente diminuimos de 26) saõ 74, que tirados de 75, fica 1, que escreveremos debaixo do 5.

Ao resto 113 ajuntaremos a letra seguinte do dividendo 8, e continuaremos do mesmo modo, dizendo: em 11 que vezes há 9? há 1, que assentaremos no quociente; depois, 1 vez 2 he 2, que tirados de 8 ficaõ 6, que assentaremos debaixo do 8; 1 vez 3 he 3, que tirados de 3 naõ fica nada, e porisso poremos cifra debaixo do 3; 1 vez 9 he 9, que tirados de 11, ficaõ 2. que assentaremos por baixo. Ao resto 206 ajuntaremos a letra seguinte do dividendo que he 4, e diremos: em 20 quantas vezes há 9? há 2, que assentaremos no quociente; e fazendo a multiplicaçaõ, diremos: 2 vezes 2 saõ 4, que tirados de 4, fica 0; 2 vezes 3 saõ 6, que tirados de 6, fica 0; e em fim 2 vezes 9 saõ 18, que tirados de 20, ficaõ 2.

66 Póde succeder no decurso das divisões parciais, de que consta esta operaçaõ, que o dividen-

dendo contenha o divisor mais de 9 vezes. Neste caso entenderemos, que na operaçaõ precedente se tomou para o quociente huma letra menor do que devia ser, pois que a ella certamente pertencerá a dezena, que se achar involvida no quociente actual.

67 Se o dividendo, e o divisor, acabarem ambos em cifras, antes de fazer a divisaõ pódem cortar-se em ambos tantas, quantas forem as daquelle que menos tiver. Por exemplo, para repartir 8000 por 400, dividiremos sómente 80 por 4; porque he evidente, que 80 centenas contem a 4 centenas tantas vezes, quantas 80 unidades contém a 4 unidades.

DIVISAÕ
Das partes decimais.

PAra que nos naõ demoremos com distincções escusadas, reduziremos a divisaõ dos numeros accompanhados de *dizima* a huma só regra, que he desta maneira:

Preparem-se os numeros propostos de sorte que tenhaõ ambos igual numero de algarismos decimais, ajuntando as cifras necessarias ao que menos tiver, o qual por isso naõ muda de valor (n. 30.); supprima-se a virgula, e pratique-se a divisaõ como se os numeros fossem inteiros; e o quociente será o que se busca, sem haver nelle algarismos decimais.

Exem-

Exemplo I.

SE houvermos de repartir 12,52 por 4,3;

```
1252 | 430
 392 |------
     | 2 392/430
```

Primeiramente reduziremos os numeros dados a igual numero de decimais, ajuntando huma cifra ao diviſor, que ficará 4,30. Depois ſupprimindo a virgula partiremos 1252 por 430, e acharemos o quociente 2, e o reſto 392; e por conſeguinte o quociente total 2 $\frac{392}{430}$

Porém, como uſamos da *dizima* com o fim principal de evitarmos as fracções ordinarias, em lugar de aſſentarmos o reſto em fórma de fracçaõ, como fizemos no exemplo dado, continuaremos a operaçaõ para acharmos a *dizima* do quociente, como ſe moſtra no exemplo ſeguinte.

Exemplo II.

```
1252  | 430
 3920 |-------------
  500 | 2,9116 &c.
   700
   2700
    120
```

Tendo achado o quociente inteiro 2, como no primeiro exemplo, ao reſto 392 ajuntaremos hu-

huma cifra, que realmente o tornará dés vezes maior, e teremos para partir 3920. Feita a operaçaõ, acharemos a letra 9 para o quociente, a qual assentaremos, tendo primeiro marcado o lugar das unidades por meio da virgula, que poremos junto ao 2. Deste modo o 9 mostrará sómente *decimas*, e desfará o que se tinha supposto no dividendo, fazendo-se dés vezes maior; pois he manifesto, que, se partindo 3920 por 430 vem ao quociente 9, partindo 392 por 430 deve ser o quociente dés vezes menor, isto he, 0,9. Agora fazendo a multiplicaçaõ, e subtracçaõ, teremos o resto 50, ao qual ajuntaremos tambem outra cifra, que vem a ser o mesmo, como se ao principio tivessemos ajuntado duas ao dividendo. Mas porque a letra 1, que havemos de achar para o quociente, se há de assentar á direita do 9 na casa das *centesimas*, com isso desfaremos a supposiçaõ, que tinhamos feito, de hum dividendo cem vezes maior.

Deste modo continuaremos a operaçaõ até onde quizermos, havendo sempre respeito á natureza da questaõ, a qual mostrará quantos algarismos de *dizima* saõ bastantes. Bem entendido: que se pararmos em dous, naõ poderá chegar o defeito do quociente a huma *centesima* parte da unidade: nem a huma *millesima*, se pararmos no terceiro algarismo decimal; e assim por diante; pois he manifesto, que naõ póde accrescentar-se, nem diminuir-se huma unidade ao ultimo algarismo achado, sem que o quociente se faça maior, ou menor, doque deve ser.

Da mesma maneira se pódem converter em

dizima todos os reſtos da Diviſaõ, quando ella ſe pratica em numeros inteiros.

Reſta moſtrar a raſaõ porque ſupprimindo a virgula tanto no dividendo, como no diviſor, naõ ſe altera nada o quociente, no caſo de haver igual numero de letras decimais em ambos elles. Iſto ſerá facil de entender, advertindo que no exemplo aſſima o dividendo 12,52 vale o meſmo que 1252 *centeſimas*, e o diviſor 4,30 o meſmo que 430 *centeſimas*, porque as unidades principais contém cem *centeſimas* (n. 22.); e he claro, que 1252 *centeſimas* contém 430 *centeſimas* tantas vezes, quantas 1252 unidades contém a 430 unidades: logo he eſcuſado attender á virgula, todas as vezes que ambos os numeros acabaõ na meſma caſa decimal.

69 Algumas vezes, conforme a natureza da queſtaõ, baſta achar o quociente até hum gráo determinado de exactidaõ. Neſtes caſos podemos abbreviar muito a operaçaõ, uſando do methodo, que agora moſtraremos.

Primeiramente ſupponhamos, que nos he baſtante o quociente exacto até a caſa das unidades (porque depois moſtraremos como ſe deve applicar o meſmo methodo a outros caſos). Eiſaqui a regra.

Supprimaõ-ſe no dividendo tantas letras, menos huma, da parte direita, quantas ſaõ as do diviſor; e depois pratique-ſe a diviſaõ ao modo ordinario. Se naõ ficar reſto, ajuntem-ſe ao quociente tantas cifras, quantas ſaõ as letras ſupprimidas no dividendo, e teremos o quociente pedido. Porém ficando algum reſto, eſte ſe partirá rá pelo diviſor, no qual para iſſo ſe ſupprimirá o ultimo algariſmo á direita. Feita eſta diviſaõ, o reſto que ficar ſe tornará a partir pelo diviſor da operaçaõ precedente; ſupprimindo-lhe o ultimo algariſmo á direita; e aſſim por diante. A praxe deſta regra ſe facilitará por meio dos exemplos ſeguintes.

Exemplo I.

QUerendo repartir 8789236487 por 64423, e baſtando ſaber o quociente exacto até a caſa das unidades, deixaremos os quatro ultimos algariſmos do dividendo, porque o diviſor tem ſinco, e partiremos 878923 por 64423.

878923	64423
234693	136430
41424 ...	6442
2772 ...	644
196 ...	64
4 ...	6

E tendo achado pela regra ordinaria o quociente 13, e o reſto 41424; dividiremos eſte por 6442, ſupprimindo o ultimo algariſmo á direita no diviſor primitivo; e acharemos a letra 6 para o quociente, a qual aſſentaremos á direita das duas 13 antecedentemente achadas; e ficará o reſto 2772. Do meſmo modo partiremos eſte por 644, ſupprimindo mais huma letra no diviſor primitivo, e virá ao quociente 4, ficando o reſto 196. Partindo eſte por 64, caberá ao quociente 3, e ficará o reſto 4; e finalmente partindo eſte por 6, tocará cifra ao quociente, a qual nelle aſſentaremos. Aſſim repartindo 8789236487 por 64423 teremos o quociente 136430 exacto até a caſa das unidades. E com effeito ſe fizeſſemos a diviſaõ por extenſo achariamos $136430 \frac{6597}{64423}$.

Naõ he neceſſario eſcrever os novos diviſores defronte dos reſtos, que por elles ſe haõ de repartir, como aqui fazemos a fim de que melhor ſe entenda o modo da operaçaõ. Mas baſta, que ſe vaõ marcando com hum ponto, ou com huma riſca, as letras do diviſor primitivo, confórme ſe forem ſupprimindo no decurſo da operaçaõ.

70 Se o reſto da primeira diviſaõ ſe achar menor que o diviſor que lhe compete, aſſentar-ſe há cifra no quociente; ficará o meſmo reſto; e no diviſor ſe ſupprimirá outra letra. Se o meſmo reſto ainda for menor que o novo diviſor, aſſentar-ſehá outra cifra no quociente; e aſſim por diante.

Exemplo. II.

HAvendo de repartir 55106054por 643, e baſtando ſaber o quociente exacto até a caſa das unidades, deixaremos as duas ultimas letras do di-

dividendo, e partiremos ao modo ordinario - - 551060 por 643.

	643
551060	85701
3666	
4510	
009...64	
9...6	
3	

Feita a operaçaõ ordinaria, acharemos o quociente 857, e o resto 9, o qual, confórme a regra presente, devia partir-se por 64. Porém, como se acha o dito resto menor que o seu competente divisor, assentaremos cifra no quociente, e conservaremos o mesmo resto 9, o qual dividiremos pelo novo divisor 6, e assim teremos o quociente 85701 exacto até a casa das unidades, conforme se buscava.

71 Quando no principio da operaçaõ se supprimem no dividendo as letras, que a regra ordena, se as que ficarem naõ forem bastantes para constituirem hum numero maior, ou ao menos igual ao divisor; entaõ cortar-se-haõ neste tantas letras á direita, quantas forem precisas, paraque as restantes possaõ caber ao menos huma vez no dividendo.

Exemplo III.

Havendo de repartir 1611527 por 64524, e requerendo-se o quociente exacto até a casa das unidades,

Pri-

Primeiramente deveremos ſupprimir no dividendo as quatro ultimas letras 1527. Depois, como o reſto 161 faz hum numero menor que o diviſor primitivo 64524, nelle tambem ſupprimiremos as tres ultimas letras 524, que ſaõ as que baſtaõ para que o reſto 64 poſſa caber em 161. Entaõ, fazendo a operaçaõ como nos exemplos precedentes, partiremos 161 por 64;

$$\begin{array}{r|l} & 64 \\ 161 & \overline{} \\ & 25 \\ 33\ldots6 & \\ 3 & \end{array}$$

e acharemos que da repartiçaõ de 1611527 por 64524 reſulta o quociente 25, ſem defeito de huma ſó unidade. E na verdade o quociente exacto he $24\frac{62951}{64524}$, o qual ſe chega muito mais para 25 do que para 24.

72 A' medida que ſe vaõ ſupprimindo as letras do diviſor, para maior exactidaõ, convem ajuntar huma unidade á ultima das que ficaõ, ſe a letra ſupprimida for 5, ou maior que 5. E do meſmo modo ſe ajuntará huma unidade á ultima letra, que ficar no dividendo, quando as letras nelle ſupprimidas paſſarem de 5, ou 50, ou 500 &c., confórme ſe ſupprimir huma, duas, tres &c.

Exemplo IV.

SUpponhamos, que ſe pede o quociente do numero 8657627 repartido por 1987, com a con-

condiçaõ de ter a meſma exactidaõ, que ſe tem procurado nos exemplos precedentes.

Conforme a reflexaõ ultima que temos feito, tomaremos pois para repartir 8658 por 1987, como aqui ſe moſtra:

$$\begin{array}{r|l} 8658 & \dfrac{1987}{4357} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 710\ldots199 \\ 113\ldots20 \\ 13\ldots2 \end{array}$$

Onde, em lugar de partir o reſto 710 por 198, partiremos por 199, por quanto a letra 7 ſupprimida no diviſor he maior que 5. Do meſmo modo na operaçaõ ſeguinte em lugar de 19 tomaremos 20 para diviſor, porque ſe ſupprime hum 9. E finalmente na operaçaõ ſeguinte, como o diviſor 2 he hum pouco maior doque devia ſer, e eſte ſe contém 6 vezes e $\frac{1}{2}$ no reſto 13, aſſentaremos antes 7 no quociente, do que 6; e acabada a operaçaõ diremos, que o quociente pedido he 4357.

73 Agora ſerá facil de entender o que ſe deve praticar, quando ſe requer o quociente com maior exactidaõ, doque até a caſa das unidades.

Por exemplo: Se quizermos o quociente exacto até a caſa das *decimas-milleſimas* naõ he neceſſario mais do que ajuntar ao dividendo tantas cifras quantas ſaõ as caſas da dizima que pertendemos, v. gr. quatro no exemplo propoſto. Entaõ ſe fará a diviſaõ, ſegundo o methodo preſente; e tendo achado o quociente exacto até a

ca-

casa das unidades, nelle se cortaráõ para a dizima por meio da virgula tantas letras, quantas se determinaraõ achar no principio da operaçaõ.

Exemplo V.

PEde-se o quociente do numero 6927 dividido por 4532 com a condiçaõ de ser exacto até a casa das *decimas-millesimas*.

Como as *decimas-millesimas* pertencem á quarta casa da dizima, ajuntaremos quatro cifras ao dividendo; e a questaõ será reduzida a buscar o quociente do numero 69270000 dividido por 4532, exacto até a casa das unidades, como nos exemplos precedentes. Assim fazendo a applicaçaõ do methodo actual, teremos para repartir 69270 por 4432, da maneira seguinte:

$$\begin{array}{r|l} 69270 & \underline{4532} \\ & 15285 \\ 23950 & \\ 1290\ldots\ 453 & \\ 384\ldots\ 45 & \\ 24\ldots\ 5 & \end{array}$$

E achando o quociente 15285 nelle cortaremos para a dizima quatro letras, pois tantas cifras ajuntamos ao dividendo; e será o quociente pedido 1,5285.

Havendo dizima no dividendo, no divisor, ou em ambos, deveráõ primeiro preparar-se de sorte, que se possa desprezar a virgula, como assiſima fica declarado (n. 68.), e depois ſe procederá á operaçaõ, como neſte ultimo exemplo.

Pelo methodo preſente póde reduzir-ſe facilmente á dizima qualquer *fracçaõ* ordinaria, havendo reſpeito ao que aſſima diſſemos (n. 71.).

Querendo v. gr. reduzir a dizima a fracçaõ $\frac{4253}{9678}$ de ſorte que ſe repreſente o ſeu valor exactamente até a caſa das milleſimas, deveremos partir (n. 73.) o numero 4253000 por 9678; que vem a ſer o meſmo que dividir (n. 69.) o numero 4253 por 9678, ou (n. 71.) o numero 4253 por 968, conforme o methodo até agora declarado. Feita a operaçaõ, virá ao quociente 439; e teremos 0,439 pelo valor da fracçaõ propoſta, com a exactidaõ que ſe intentava.

§§ O methodo que aſſima ajuntámos no fim da *Multiplicaçaõ*, para ſe fazer eſta operaçaõ por meio unicamente do *Somar*, tambem ſe pode applicar á *Diviſaõ* de ſorte, que álem do *Somar* naõ ſe careça de outra couſa mais que do *Diminuir*. A ſua praxe he deſta maneira.

Primeiramente forma-ſe huma colunna da addiçaõ ſucceſſiva do *diviſor*, do meſmo modo que para multiplicar a formámos da addiçaõ do *multiplicando* (pag. 37.).

Depois toma-ſe no dividendo á eſquerda hum membro de tantas letras quantas baſtarem, para que na colunna ſe ache hum numero igual, ou proximamente menor. O algariſmo, que eſte tiver defronte, ſe aſſenta no quociente, e o numero debaixo do dividendo parcial, do qual ſe diminue, e ao reſto ſe ajunta a letra ſeguinte

do

do dividendo principal ; e aſſim reſulta outro dividendo parcial , o qual ſe buſca na columna : e na ſua falta o numero proximamente menor ; e aſſim por diante. Quando na columna ſe naõ achar o dividendo parcial , nem algum numero proximamente menor , aſſentar-ſe-há cifra no quociente , e ſe ajuntará ao dito dividendo a letra ſeguinte do dividendo total , para ſe continuar a operaçaõ.

Se quizermos v. gr. repartir 220188745725 por 236743 , primeiramente aſſentaremos eſtes numeros do modo ordinario , como aqui ſe moſtra.

	236743	1 ... 236743
220188745725		2 ... 473486
2130687	930075	3 ... 710229
		4 ... 946972
712004		5 ... 1183715
710229		6 ... 1420458
		7 ... 1657201
1775572		8 ... 1893944
1657201		9 ... 2130687
1183715		
1283715		10 .. 2367430
0000000		

Depois faremos a columna ſubſidiaria , por meio da addiçaõ ſucceſſiva do diviſor , como ſe vê no exemplo ; e com ella entraremos a executar a diviſaõ , que naõ involve mais difficuldade alguma.

Tomando pois para o primeiro dividendo par-

parcial as primeiras ſete letras 2201887, porque ſeis fariaõ hum dividendo menor que o diviſor, acharemos que na columna lhe toca o numero proximamente menor 2130687 defronte da letra 9. Peloque aſſentaremos 9 no quociente, e o dito numero debaixo do dividendo reſpectivo, do qual o diminuiremos, e ao reſto ajuntaremos a letra ſeguinte do dividendo, que he 4, e teremos para partir 712004. Naõ achando eſte numero na columna, tomaremos o que ſe acha proximamente menor, defronte da letra 3, a qual ſe aſſentará no quociente, e o dito numero ſe diminuirá do dividendo, ajuntando ao reſto a letra ſeguinte 5, de ſorte que ficará para repartir 17755.

Como porém eſte numero ſe naõ acha na columna, nem outro que ſeja proximamente menor, poremos cifra no quociente, e ajuntando a letra ſeguinte 7 teremos para dividir 177557. E como eſte numero ainda he menor que os da columna, poremos outra cifra no quociente, e ajuntando outra letra teremos para repartir 1775572. Entaõ acharemos na columna o numero proximamente menor 1657201 defronte da letra 7, a qual paſſaremos ao quociente, e diminuiremos o numero do dividendo reſpectivo, ajuntando ao reſto a letra ſeguinte do dividendo principal, que he a ultima 5, e teremos para repartir 1183715. Eſte numero ſe acha na columna defronte da letra 5, a qual aſſentaremos no quociente; e porque feita a diminuiçaõ, naõ ſobra nada, ſerá o quociente exacto 930075.

Sobre o uſo deſte methodo deve aqui entenderderse o mesmo, que já declaramos a respeito da multiplicaçaõ (pag. 39.). §§

PROVA

Da Multiplicaçaõ, e Divisaõ.

74 DA mesma definiçaõ, que temos dado destas duas operações se póde conhecer *a prova* dellas, que vulgarmente se chama *real.*

Como na Multiplicaçaõ se toma o multiplicando tantas vezes quantas saõ as unidades do multiplicador, he evidente, que se procurarmos quantas vezes o producto contém o multiplicando, isto he (n. 59.), se dividirmos o producto pelo multiplicando, deve sahir o multiplicador no quociente. E como he indifferente tomar o multiplicando para multiplicador, e reciprocamente (n. 44), segue-se em geral, *Que dividindo o producto de qualquer multiplicaçaõ por hum dos factores deve sahir o outro no quociente.*

Por exemplo, tendo achado assima (n. 50.) que o numero 2864 multiplicado por 6 dá o producto 17184; se dividirmos este por 2864, teremos no quociente 6; e se o dividirmos por 6, teremos no quociente 2864.

Do mesmo modo: Por quanto o quociente de qualquer divisaõ denota quantas vezes o divisor se contém no dividendo, manifestamente se segue, que se o divisor se tomar tantas vezes quantas denota o quociente, isto he (n.40), se o divisor se multiplicar pelo quociente, deve sahir no producto o dividendo, no caso de ter sido feita a divisaõ, sem ficar resto algum; e

que

e que tendo havido resto, se o divisor se multiplicar pelo quociente, e ao producto se ajuntar o resto, deve resultar o mesmo dividendo.

Por exemplo: Temos achado assima (n.63), que o numero 189492 repartido por 375 dá o quociente 505, e o resto 117. E multiplicando 375 por 505, teremos o producto 189375, ao qual ajuntando-se o resto 117, resultará o mesmo dividendo 189492.

Donde se vê, que a *prova real* da Divisaõ se faz pela Multiplicaçaõ, e a da Multiplicaçaõ pela Divisaõ.

Porém estas operações pódem verificar-se por hum meio muito mais facil e expedito, que agora mostraremos; advertindo, que naõ devem por isso desprezar-se as reflexões, que acabamos de fazer, por quanto serviráõ para muitas outras cousas.

PROVA

Pela regra dos noves.

75 PAra mostrarmos o uso desta regra por meio de hum exemplo, supponhamos que tendo multiplicado 65498 por 454, e achado o producto 29736092, queremos verificar este resultado. Eis-aqui a operaçaõ.

Somaremos as letras do multiplicando 6,5,4,9,8, sem attender ao seu valor local, como se todas estivessem na casa das unidades, e lançaremos fóra *nove*, á medida que elle se achar na soma. Por fim teremos hum resto, que neste exemplo he 5, o qual assentaremos ao lado do mesmo multiplicando.

Do

Do mesmo modo somaremos todas as letras do multiplicador 4, 5, 4, lançando fóra os *noves*, e teremos o resto 4, que assentaremos ao lado do mesmo multiplicador.

Entaõ multiplicaremos os dous restos hum pelo outro, e do producto, que neste exemplo he 20, lançaremos fóra os *noves* que elle tiver; e ficará hum resto, que no caso presente he 2.

Ora se o producto assima dito he exacto, he necessario que somando do mesmo modo todas as letras delle 2, 9, 7, 3, 0, 9, 2, e lançando fóra os *noves*, naõ fique tambem senaõ 2, como se acha com effeito.

Esta regra suppoem, que para haver o resto da subtracçaõ de todos os *noves*, que em qualquer numero se contém, naõ he necessario mais do que somar todas as suas letras, e lançar fóra na soma dellas os *noves* que se acharem, como se demonstra facilmente reflectindo sobre os principios da Numeraçaõ (n. 39. §§) Isto supposto eisaqui a rasaõ da prova na Multiplicaçaõ.

Como o multiplicando 65498 he composto de hum certo numero de *noves* e do resto 5, e como o multiplicador 454 he tambem composto de hum certo numero de *noves* e do resto 4, he manifesto, que sómente pelo producto de 4 por 5, ou por 20, ha de deixar o producto total de ser divisivel por 9; ou (tirando os *noves* de 20) que sómente por 2 ha de deixar de ser divisivel por 9. Logo estando o dito producto exacto deve ficar nelle o mesmo numero, que fica no producto dos dous restos, depois de serem lançados fóra os *noves*, que elle contém.

A

A prova da Multiplicaçaõ se applica facilmente á Divisaõ. Como o producto do divisor pelo quociente com o resto, quando o houver, he igual ao dividendo (n. 74.), naõ he necessario mais do que tirar os noves ao divisor, e ao quociente; multiplicar os dous restos; do producto lançar fóra os noves, se os tiver; somar o resto com o que ficar depois de tirados os noves ao resto da divisaõ; e da soma lançar fóra os noves, se os tiver; e o resto será o que se deve achar tambem no dividendo, depois de lançados fóra os noves.

Por exemplo: Tendo achado o quociente 812, e o resto 200, da repartiçaõ de 756984 por 932, tiraremos os noves ao divisor 932, e ficará o resto 5, depois ao quociente 812, e ficará 2. Entaõ multiplicaremos os dous restos, e do producto 10 lançando fóra 9, fica 1, e tirando tambem os noves ao resto da divisaõ 200, ficaõ 2, que somados com o resto precedente 1 fazem 3; e isto he o que deve restar no dividendo depois de se tirarem os noves, estando a operaçaõ exacta, como se acha com effeito.

Tomando a cousa em rigor, esta verificaçaõ naõ he infalivel. Porque se na multiplicaçaõ, por exemplo, nos enganassemos de sorte, que fizessemos qualquer algarismo do producto maior huma, duas, ou mais unidades, e depois puzessemos outras tantas de menos em qualquer outro; como isto naõ influiria sobre o resto que fica depois de lançados fóra os noves, he claro, que hum erro semelhante naõ será descuberto pela prova. Porém como para isso saõ necessarios

dous

dous erros, e dous erros iguais, e contrarios, que mutuamente ſe deſtruaõ, que vem a ſer o meſmo que commetter o erro de 9, ou dos multiplos de 9, he facil de ver que os caſos em que a prova póde faltar, haõ de ſer rariſſimos na pratica.

55 A prova, que ſe faz por meio dos *noves*, igualmenre podia fazer-ſe por meio de qualquer outro numero; mas eſcolheu-ſe o nove, por ſer mais facil de ſe lançar fóra. Como porém temos notado, que os *onzes* ſe pódem tirar de qualquer numero quaſi com a meſma facilidade, e como iſto moſtra huma propriedade notavel da Numeraçaõ actual, que por outra parte.póde ſervir de utilidade, ſerá conveniente que a ajuntemos neſte lugar, e he da maneira ſeguinte.

Se o primeiro algariſmo de qualquer numero, o terceiro, e os mais pelas caſas impares da direita para a eſquerda ſe ajuntarem, lançando fóra da ſoma o numero onze quando nella vier, e notando o reſto final que reſultar; e ſe depois ſe ajuntar do meſmo modo o ſegundo algariſmo, o quarto, e os mais pelas caſas pares; e ſe o reſto ſe tirar do primeiro (ao qual ſendo neceſſario ſe ajuntará para iſſo o numero onze), o que ficar ſerá o reſto que ſobra do numero propoſto, lançados fóra todos os *onzes*.

Aſſim, por exemplo, para tirarmos os *onzes* do numero 7543945, diremos: 5 e 9 ſaõ 14, menos onze ſaõ 3, e 4 ſaõ 7, e 7 ſaõ 14, menos onze, ficaõ 3; depois, 4 e 3 ſaõ 7, e 5 ſaõ 12, menos onze, fica 1; e tirando eſte ſegundo reſto 1 do primeiro 3, ficaõ 2, que he o reſto

que

que ſobra, tirados os *onzes* do numero 7543945. E para os tirarmos do numero 527381, diremos: 1 e 3 ſaõ 4, e 2 ſaõ 6, primeiro reſto; depois 8 e 7 ſaõ 15, menos onze, ſaõ 4, e 5 ſaõ 9, ſegundo reſto; e porque eſte naõ póde diminuir-ſe do primeiro 6, ajuntar-lhe-hemos 11, e ſerá 17, do qual tirando 9, ficaõ 8; e eſte he o reſto que fica, tirados os *onzes* do numero 527381.

Eſta notavel propriedade, com igual raſaõ póde ſervir de prova ás quatro operações da Arithmetica; prova, que ſómente faltará quando o erro comettido na operaçaõ for onze, ou algum dos multiplos de onze. E ſe eſta prova ſe ajuntaſſe com a dos noves, muito mais provavel ſeria o juizo que ſe fizeſſe da certeza da operaçaõ, pois que entaõ ſómente eſcaparia o erro de 99, ou dos multiplos de 99. ꟗꟗ

Uſo da Diviſaõ.

76 A Diviſaõ ſerve naõ ſómente para achar quantas vezes hum numero contém a outro, mas tambem para partir qualquer numero em partes iguais. Tomar a metade, a terça, quarta, quinta, vigeſima, trigeſima parte &c. de hum numero, he o meſmo que dividillo por 2, 3, 4, 5, 20, 30 &c., ou partillo em 2, 3, 4, 5, 20, 30 partes iguais &c., para tomar huma dellas.

A Diviſaõ ſerve tambem para converter as unidades de qualquer eſpecie em outras de eſpecie ſuperior; como, por exemplo, para reduzir hum certo numero de *dinheiros* a *ſoldos*, e estes a *libras*. Para reduzir 5864 *dinheiros* a *soldos*, notaremos que como saõ necessarios 12 *dinheiros* para fazer hum *soldo*, quantas vezes houver 12^d em 5864^d, tantos *soldos* haverá na dita quantia. He necessario pois dividir 5864 por 12, e acharemos no quociente 488*s*, e 8^d de resto. Para reduzir a *libras* os 488*s*, dividiremos 488 por 20, porque saõ necessarios 20*s* para fazer 1 *libra*, e teremos no quociente 24^{lb}, e de resto 8*s*; e assim a quantia proposta será reduzida a 24 *libras*, 8 *soldos*, e 8 *dinheiros*.

Por occasiaõ desta repartiçaõ por 20, notaremos que havendo de dividir qualquer numero por outro que acaba em cifras, podemos abbreviar a operaçaõ, separando no dividendo da parte direita tantas letras quantas saõ as cifras do divisor, e dividindo as que ficarem á esquerda pelas letras significativas do mesmo divisor; se houver algum resto, á direita delle se ajuntaraõ as letras separadas no dividendo, para ter o resto total da divisaõ; e naõ havendo resto, as mesmas letras separadas seraõ o unico resto da operaçaõ.

Por exemplo: havendo de dividir 5834 por 20, separaremos a ultima letra do dividendo 4, e repartiremos por 2 a parte que fica 583. Feita a operaçaõ, teremos o quociente 291, e o resto 1, ao qual ajuntaremos a letra separada 4, e será o resto total 14, de sorte que o quociente completo será $291 \frac{14}{20}$.

Es-

Esta abbreviaçaõ póde applicar-se á reducçaõ da carga de hum navio a *tonelladas*. Sabendo v. gr. que a carga he de 2584954 *libras*, para a reduzir em *tonelladas*, isto he, para a dividir por 2000, deveremos separar as tres ultimas letras á direita, e tomar a ametade das que ficarem; e assim teremos 1292 *tonelladas*, e 954 *libras*.

O mesmo se applicará a muitos outros casos, conforme a natureza da questaõ o permittir.

DOS QUEBRADOS.

77 DAmos na Arithmetica o nome de *Quebrados*, ou *Fracções*, aos numeros, pelos quais se exprimem as quantidades menores que a unidade.

78 Para se formar huma idéa clara delles, he necessario conceber a mesma quantidade, que se tem escolhido para unidade, como composta de outras unidades mais pequenas; assim como se concebe, por exemplo, a *libra* composta de 20 partes, ou unidades, que se chamaõ *soldos*.

Huma, ou muitas destas partes, nas quais se divide a unidade, ou das quais se entende composta, formaõ o que se chama *quebrado*, ou *fracçaõ* da unidade. E o mesmo nome se dá aos numeros, com que ellas se representaõ.

79 Há duas differenças na expressaõ dos quebrados, e ambas ellas recebidas na pratica.

A primeira consiste em representar as partes

 da

da unidade á maneira dos numeros inteiros, tomando-as como unidades de outra eſpecie, e dandolhes hum nome particular.

Aſſim, para moſtrar *ſete* partes, das quais entraõ vinte em huma *libra*, damos primeiramente ás ditas partes o nome de *ſoldos*, e preſcindindo da *libra*, ou da unidade principal, as declaramos como unidades abſolutas com a letra 7, á qual ajuntamos a letra inicial das unidades que ſignifica, deſte modo 7ſ; expreſſaõ, que em ſi meſma he inteira e abſoluta, mas a reſpeito da *libra* he huma fracçaõ.

Eſta differença de quebrados tem lugar nos numeros complexos, dos quais adiante fallaremos.

80 Como porém naõ he poſſivel dar nomes em particular a todas as diviſões que ſe pódem fazer da unidade, faz-ſe neceſſaria a ſegunda differença de quebrados, em cuja expreſſaõ ſe uſa de dous numeros, o primeiro dos quais ſe aſſenta em cima de huma riſca, e moſtra as partes da unidade de que ſe compoem a quantidade, que queremos ſignificar; e o ſegundo debaixo da riſca, para denotar quantas deſſas partes formaõ a unidade. Aſſim, para pôr em figura as *ſete* partes da *libra*, de que há pouco fallamos, deveremos aſſentar os dous numeros deſta maneira $\frac{7}{20}$.

81 Para dizer o valor de hum quebrado, primeiramente ſe lê o numero que eſtá em cima da riſca, o qual ſe chama *Numerador*, e depois o que eſtá por baixo, o qual ſe chama *Denomina-*

nador ; e a este se ajunta a addiçaõ *avos* (*). Assim para declarar o valor de $\frac{7}{20}$, diremos *sete vinte-avos*, e de $\frac{11}{100}$ · diremos *onze cem-avos* &c. ; advertindo que *onze cem-avos* quer dizer *onze* partes tais, que dellas sejaõ necessarias *cem* para formar a unidade.

Sendo o denominador de 2 até 8 naõ se usa da addiçaõ *avos*, mas dos nomes, *meios*, *terços*, *quartos*, *quintos*, *sextos*, *setimos*, e *oitavos* ; ou *ametades*, *terças*, *quartas* partes &c. Tambem de 9 para cima se usa hoje dos nomes ordinais da lingua Latina, como $\frac{3}{1000}$ *tres mil-avos*, ou *tres milessimas* partes da unidade.

82 Mostra pois o numerador de quantas partes da unidade se compoem a quantidade, que se declara pelo quebrado ; e o denominador determina a grandeza e valor dessas partes, mostrando quantas dellas formaõ a unidade. Por isso se chama denominador, porque dá o nome ás partes da fracçaõ, e faz v. gr. nestes dous quebrados $\frac{2}{5}$, $\frac{2}{7}$, que as partes do primeiro sejaõ *quintas*, e as do segundo *setimas*.

83

(*) Esta addiçaõ *avos* naõ significa cousa alguma por si mesma. He a terminaçaõ de *oitavos*, até onde os nossos Arithmeticos antigos davaõ nome *ordinal* proprio ao denominador. Dahi por diante, ou por recearem usar dos *ordinais* da lingua Latina, ou para maior facilidade na leitura dos quebrados, usaraõ dos *cardiais*, ajuntando-lhes a terminaçaõ do mesmo nome *oitavos*, para os fazerem ser equivalentes aos *ordinais*. Deste modo *onze-avos* tem lugar de hum nome que se formaria de *onze*, assim como *oitavos* se fórma de *oito*, que seria *onzavos*. Assim dous *onze-avos* he como se dissessemos dous *onzavos*, tres *cem-avos* o mesmo que tres *centavos* &c.

83 Tanto o numerador como o denominador ſe chamaõ tambem *termos* do quebrado, que por elles ſe repreſenta. E em dous quebrados, ambos os numeradores, ou ambos os denominadores chamaõ-ſe termos *homologos*; e o numerador de hum com o denominador do outro, termos *heterogeneos*.

Dos numeros inteiros conſiderados em fórma de quebrados.

84 AS operações, que ſe fazem ſobre os quebrados, conduzem muitas vezes a reſultados fracçionarios, cujo numerador ſe acha igual, ou maior que o denominador, como v. gr. $\frac{8}{8}$, $\frac{27}{5}$ &c.

As expreſſões deſta ſorte naõ ſaõ fracções propriamente tais, mas numeros inteiros, ou inteiros com quebrados, repreſentados em fórma de fracções.

85 Para extrahir os inteiros, que ſe achaõ incluidos nellas, he neceſſario dividir o numerador pelo denominador. O quociente moſtrará os inteiros, e o reſto da diviſaõ, ſe o houver, ſerá o numerador de huma fracçaõ propriamente tal, que ſe ha de ajuntar aos ditos inteiros, ficando o meſmo denominador. Aſſim $\frac{27}{5}$ ſe reduzem a $5\frac{2}{5}$, iſto he, ſinco unidades, e dous quintos da unidade.

A raſaõ he, porque na expreſſaõ $\frac{27}{5}$ o denominador 5 moſtra que a unidade ſe tem dividido em 5 partes: logo quantas vezes houver 5 em 27, tantas unidades inteiras haverá no valor da fracçaõ $\frac{27}{5}$.

86 As multiplicações, e diviſões dos numeros inteiròs acompanhados de frações requerem, ao menos para maior facilidade das operações, que os ditos inteiros ſe reduzaõ á forma de quebrados. Iſto ſe faz, multiplicando o inteiro pelo denominador da fracçaõ, á qual ſe quer reduzir, e o producto ſerá o numerador.

Por exemplo: Querendo reduzir o numero 8 a huma fracçaõ, que tenha 5 por denominador, multiplicaremos 8 por 5, e o producto 40 ſerá o numerador; donde teremos $\frac{40}{5}$. A raſaõ he, porque havendo de reduzir o numero 8 a *quintos*, cada unidade ſe conſidéra composta de 5 partes: logo 8 unidades ſe converteráõ em 40 das ditas partes. Do meſmo modo o numero miſto 7 $\frac{4}{9}$ convertido todo em *nove-avos* dará $\frac{67}{9}$, porque o inteiro 7 vale $\frac{63}{9}$, e ajuntando os $\frac{4}{9}$, teremos $\frac{67}{9}$.

Quando ſe há de reduzir hum inteiro á fórma de quebrado, e naõ importa que tenha certo denominador, o mais ſimples de tudo he tomar para iſſo a unidade, a qual ſe ſubentende ſempre como denominador natural de todos os numeros inteiros. Porque aſſim como por $\frac{8}{3}$ entendemos oito *terços*, e por $\frac{8}{2}$ oito *meios*, aſſim por $\frac{8}{1}$ entenderemos oito *unidades*.

Das

Das mudanças, que se pódem fazer nos termos de hum quebrado, sem lhe alterar o valor.

87 HE manifesto, que em quantas mais partes se conceber a unidade dividida, tantas mais seraõ necessarias para representar huma mesma quantidade.

88 Donde se vê, que pode fazer-se o denominador de huma fracçaõ duplo, triplo, quadruplo &c., sem lhe mudar o valor, com tanto que ao mesmo tempo se faça tambem o seu numerador duplo, triplo, quadruplo &c.

Logo póde dizer-se em geral: *Que hum quebrado naõ muda de valor, quando se multiplicaõ ambos os seus termos por hum mesmo numero.*

Assim $\frac{3}{4}$ he o mesmo que $\frac{6}{8}$, $\frac{9}{12}$ &c.; e $\frac{1}{2}$ a mesma cousa que $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{5}{10}$ &c.

89 Por huma rasaõ semelhante se entende, que quanto menos partes se suppozerem na unidade, tanto menos seriaõ precisas para formar huma mesma quantidade.

Pelo que he manifesto, que sem mudar o valor de hum quebrado podemos fazer o seu denominador 2, 3, 4 &c. vezes menor, com tanto que façamos igualmente o numerador 2, 3, 4 &c. vezes menor.

Donde em geral se póde dizer: *Que hum quebrado naõ muda de valor todas as vezes que ambos os seus termos se dividem por hum mesmo numero*

Pa-

Para ſe ver diſtintamente a verdade deſtas duas propoſições, baſta reflectir ſobre as noções que temos dado do numerador, e denominador.

Pelo que devemos notar, que multiplicar ou dividir os termos de hum quebrado por hum meſmo número, he couſa muito diverſa de multiplicar ou dividir o meſmo quebrado; porque as ditas operações ſe fazem ſem elle mudar de valor, como temos declarado.

Os dous principios, que acabamos de expôr, ſervem de baſe ás duas Reducções ſeguintes, que ſaõ de grande uſo na pratica dos quebrados.

Reducçaõ dos Quebrados ao meſmo denominador.

90 1º. PAra reduzir duas fracções ao meſmo denominador, multiplicar-ſe-haõ os dous termos da primeira pelo denominador da ſegunda, e os dous termos deſta pelo denominador daquella.

Supponhamos, por exemplo, que temos para reduzir ao meſmo denominador os dous quebrados $\frac{2}{3}$, e $\frac{3}{4}$.

Primeiramente multiplicaremos os dous termos da primeira fracçaõ 2, e 3 pelo denominador da ſegunda 4, e teremos $\frac{8}{12}$, que (n. 88) he do meſmo valor que $\frac{2}{3}$. Depois multiplicaremos os dous termos da ſegunda 3 e 4 pelo denonominador da primeira 3, e reſultará $\frac{9}{12}$ do meſmo valor que $\frac{3}{4}$. E aſſim as fracções $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$, ſeraõ mudadas em $\frac{8}{12}$, e $\frac{9}{12}$ que tem reſpectivamente o meſmo valor, e ſe achaõ reduzidas ao meſmo denominador.

He facil de ver, que por eſte methodo teraõ ſempre as novas fracções o meſmo denominador, porque em cada huma das operações ſe fórma eſte da multiplicaçaõ dos denominadores primitivos.

91. 2º. Sendo mais de duas as fracções, reduzirſe-haõ ao meſmo denominador, multiplicando os dous termos de cada huma pelo producto dos denominadores de todas as outras.

Tendo v. gr. para reduzir ao meſmo denominador eſtas quatro fracções $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{7}$;

Primeiramente multiplicaremos os dous termos da primeira 2 e 3 pelo producto dos denominadores das outras 4, 5, e 7; producto, que acharemos multiplicando primeiro 4 por 5, e o ſeu producto 20 por 7, que dá 140. Aſſim multiplicando 2 e 3 por 140, teremos os productos 280, e 420, dos quais reſultará a fracçaõ $\frac{280}{420}$, que (n. 88) he do meſmo valor que $\frac{2}{3}$. Depois multiplicaremos os dous termos da ſegunda 3 e 4 pelo producto dos denominadores das outras 3, 5, e 7, iſto he, por 105, e teremos a frac-

çaõ

ção $\frac{315}{420}$ igual a $\frac{3}{4}$. Passando á terceira multiplicaremos os seus termos 4 e 5 por 84, producto dos tres denominadores das outras 3, 4, e 7, e teremos a fracção $\frac{336}{420}$ em lugar de $\frac{4}{5}$. E na quarta em fim multiplicaremos ambos os seos termos 5 e 7 por 60, que he o producto dos denominadores 3, 4, 5 das tres primeiras, e teremos $\frac{300}{420}$ em lugar de $\frac{5}{7}$.

Deste modo temos convertido as quatro fracções $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{7}$, nestas quatro $\frac{280}{420}$, $\frac{315}{420}$, $\frac{336}{420}$, e $\frac{300}{420}$, menos simples na verdade, mas do mesmo valor que ellas, e pela rasaõ de serem reduzidas ao mesmo denominador, mais susceptiveis das operações da Addição, e Subtração, como adiante mostraremos.

He manifesto pela mesma operação da reducção, que as fracções que resultaõ saõ respectivamente iguaes ás fracões dadas, porque em cada huma destas se multiplicaõ ambos os termos por hum mesmo numero (n. 88). E como o denominador de cada huma das novas fracções he formado do producto de todos os denominadores primitivos, naõ pódem deixar de ficarem todas com o mesmo commum denominador.

§§ Como pelo methodo antecedente se reduzem sim os quebrados ao mesmo commum denominador, mas nem sempre ao mais simples que elles pódem ter, pela qual rasaõ seria necessaria outra reducção, e ella muito trabalhosa, para os trazer á maior simplicidade, que permit-

te

te a condiçaõ de ficarem com a mesma denominaçaõ; será muito conveniente procurar, que logo se reduzaõ ao mais pequeno denominador commum, que he possivel. Isto se conseguirá, praticando da maneira seguinte.

Se os denominadores dos quebrados que se haõ de reduzir á mesma denominaçaõ, cada hum dos quais se suppoem abbeviado aos seus menores termos, naõ tiverem divisor commum, a reducçaõ se praticará simplesmente da maneira a cima declarada; e o denominador commum, que se achar será o menor, que os ditos quebrados pódem ter.

Porém se os denominadores tiverem divisor commum, dividir-se-haõ todos por elle, ou pelo maior delles, quando forem muitos; e os quebrados se convertaõ em outros tantos, que seraõ de differente valor, mas depois se restituiráõ ao mesmo. Estes se reduziráõ á mesma denominaçaõ, confórme a regra a cima dada; e o denominador commum delles se multiplicará pelo mesmo divisor, pelo qual foraõ divididos os denominadores primitivos. Deste modo se tornaráõ a fazer os quebrados reduzidos iguais aos quebrados da questaõ, e ficaráõ álem disso com o menor denominador commum que he possivel.

Quando sómente alguns dos denominadores tiverem divisor commum, por elle se dividiráõ os ditos denominadores, e se multiplicaráõ tambem os numeradores dos outros quebrados, cujos denominadores por elle se naõ pódem dividir, e assim se formaráõ os novos quebrados subsidiarios, que se haõ de reduzir ao mesmo denominanador, o qual ſe multiplicará pelo dito diviſor, para ſe reſtituirem ao valor dos quebrados propoſtos. Do meſmo modo, quando todos os denominadores primitivos tem diviſor commum, e feita a diviſaõ reſultaõ quebrados, nos quais alguns denominadores ainda tem diviſor entre ſi, ſobre elles ſe praticará o meſmo que no caſo antecedente, e aſſim por diante. E no fim o denominador commum dos quebrados reduzidos ſe multiplicará pelo producto de todos os diviſores, que ſucceſſivamente ſe empregáraõ. Os exemplos ſeguintes moſtraráõ claramente a praxe deſtas regras.

Exemplo I. Querendo reduzir á meſma denominaçaõ os dous quebrados $\frac{5}{18}$, $\frac{7}{27}$; como os denominadores 18 27 tem o maior diviſor commum 9, partillos-hemos ambos por 9, e reſultaraõ os dous quebrados $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{3}$; os quais ſendo reduzidos ao meſmo denominador, daráõ $\frac{15}{6}$, $\frac{14}{6}$; e multiplicando o denominador commum delles 6 pelo diviſor 9, ſe mudaraõ em $\frac{15}{54}$, $\frac{14}{54}$; quebrados iguais aos da queſtaõ, e os mais ſimples que ſaõ poſſiveis. Se a reducçaõ ſe fizeſſe ao modo ordinario, em lugar delles achariamos $\frac{135}{486}$, $\frac{126}{486}$.

Exemplo II. Havendo de reduzir ao meſmo denominador os quebrados $\frac{1}{26}$, $\frac{2}{13}$, $\frac{4}{39}$; como os denominadores 26, 13, 39, tem o diviſor commum 13, por elle os dividiremos todos e re-

reſultaráõ os quebrados $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{1}$, $\frac{4}{3}$, ſobre os quais praticaremos a reducçaõ. Feita eſta, acharemos que ſe reduzem a $\frac{3}{6}$, $\frac{12}{6}$, $\frac{8}{6}$; e multiplicando o denominador commum 6 pelo diviſor 13, ficaráõ os quebrados propoſtos reduzidos a $\frac{3}{78}$, $\frac{12}{78}$, $\frac{8}{78}$; com o menor denominador commum que he poſſivel. Se praticaſſemos a regra ordinaria, achariamos $\frac{507}{13182}$, $\frac{2028}{13182}$, $\frac{1352}{13182}$.

Exemplo III. Se tivermos de reduzir á meſma denominaçaõ os quebrados $\frac{2}{7}$, $\frac{4}{15}$, $\frac{1}{30}$; como os tres denominadores 7, 15, 30, naõ tem diviſor commum, mas taõ ſómente os dous ultimos, eſtes ſe dividiráõ pelo ſeu maior diviſor 15, e pelo meſmo ſe multiplicará o numerador 2 do primeiro quebrado, cujo denominador naõ podemos dividir. Aſſim reſultaráõ outros tres quebrados $\frac{30}{7}$, $\frac{4}{1}$, $\frac{1}{2}$, ſobre os quais executaremos a reducçaõ. Feita a qual, acharemos que ſe reduzem a $\frac{60}{14}$, $\frac{56}{14}$, $\frac{7}{14}$; e multiplicando o denominador 14 pelo diviſor 15, ficaráõ os quebrados da queſtaõ reduzidos a $\frac{60}{210}$, $\frac{56}{210}$, $\frac{7}{210}$. Se obraſſemos do modo ordinario achariamos $\frac{900}{3150}$, $\frac{840}{3150}$, $\frac{105}{3150}$.

Exemplo IV. Pede-ſe, que reduzamos ao meſmo denominador os quebrados $\frac{3}{11}$, $\frac{7}{55}$, $\frac{5}{77}$, $\frac{1}{154}$. Primeiramente, como todos os denominadores

ſaõ

ſaõ diviſiveis por 11, feita a diviſaõ mudaremos os quebrados em $\frac{3}{1}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{1}{14}$. Depois, como neſtes ultimos os denominadores 7, e 14, ainda tem o diviſor commum 7, por elle os dividiremos e pelo meſmo multiplicaremos os numeradores 3, e 7, cujos denominadores ſe naõ poderáõ dividir; e aſſim reſultaráõ novamente os quebrados $\frac{21}{1}$, $\frac{49}{5}$, $\frac{5}{1}$, $\frac{1}{2}$, ſobre os quais praticaremos a reducçaõ. Feita a operaçaõ, acharemos que ſe reduzem a $\frac{210}{10}$, $\frac{98}{10}$, $\frac{50}{10}$, $\frac{5}{10}$; e multiplicando o denominador commum 10 por 77, que he o producto dos diviſores 7, e 11, teremos os quebrados da queſtaõ reduzidos reſpectivamente a $\frac{210}{770}$, $\frac{98}{770}$, $\frac{50}{770}$, $\frac{5}{770}$, da fórma mais ſimples que he poſſivel. Se neſte caſo uſaſſemos da regra ordinaria, achariamos $\frac{1956570}{7174090}$, $\frac{913066}{7174090}$, $\frac{465850}{7174090}$, $\frac{46585}{7174090}$, quebrados muito compoſtos, que careceriaõ de huma operaçaõ muito trabalhoſa, para ſe reduzirem á ſimplicidade da primeira fórma ſendo para iſſo neceſſario procurar primeiro o maior diviſor commum entre o denominador, e os quatro numeradores, como abaixo ſe moſtrará. §§

Re-

Reducçaõ dos Quebrados, á expressaõ mais ſimples que he poſſivel.

92 HUma fracçaõ he tanto mais ſimples, quanto os ſeus termos ſaõ menores. Muitas vezes he poſſivel reduzir huma fracçaõ dada a menores termos; e iſto ſuccede todas as vezes que o numerador, e denominador ſe podem dividir ambos por hum meſmo numero. Como eſta operaçaõ naõ lhe altera o valor (n. 89), he huma ſimplificaçaõ que ſe naõ deve omittir, pois naõ ſómente contribue para a elegancia da expreſſaõ, mas tambem para ſe formar melhor conceito do ſeu valor. Porque ſem embargo de que v. gr. a fracçaõ $\frac{27}{63}$ tem o meſmo valor que $\frac{3}{7}$, por eſta ſegunda com tudo ſe fórma huma idea mais clara da quantidade que por ambas ellas ſe repreſenta, naõ ſe diſtrahindo a attençaõ com taõ grande numero de partes, como na primeira.

Para ſe fazer pois a reſoluçaõ preſente, ou para *abbreviar quebrados*, eiſ-aqui o methodo que ſe ha de ſeguir.

93 Primeiramente dividir-ſe-haõ ambos os termos por 2, e eſta operaçaõ ſe continuará em quanto ſe poder fazer ſem reſto. Depois ſe paſſará a dividir por 3, e dahi por 5, 7, 11, 13, 17, &c, iſto he, por todos os numeros *primos*, que ſaõ aquelles que naõ tem diviſor exacto, ſenaõ a ſi meſmos, ou a unidade.

A

A unica difficuldade que ſe offerece neſte methodo, he ſaber quando ſe póde dividir ſem reſto por 2, 3, 5 &c. para naõ fazer de balde a diviſaõ. Para iſſo ajudaraõ muito os principios ſeguintes.

94 Todo o numero, cuja ultima letra á direita ſignifica numero par, he diviſivel por 2.

Todo o numero, cujos algariſmos ſomados fizerem 3, ou hum numero, multiplo de 3, he diviſivel por 3. Aſſim v. gr. o numero 54231 póde dividir-ſe exactamente por 3, porque a ſoma dos ſeus algariſmos 5, 4, 2, 3, 1, faz 15, que he multiplo de 3, pois contém 5 vezes 3 exactamente.

Do meſmo modo, ſe a ſoma dos algariſmos fizer 9, ou hum multiplo de 9, ſerá o numero diviſivel por 9.

Todo o numero que acabar em 0, ou em 5, ſerá diviſivel exactameute por 5.

¶¶ E todo o numero, cujos algariſmos das caſas impares da direita para a eſquerda fizerem huma ſoma igual á dos algariſmos das caſas pares; ou tambem deſigual, com tanto que a differença das duas ſomas ſeja 11, ou hum multiplo de 11, ſerá diviſivel por 11. Aſſim ſerá diviſivel por 11 o numero 89452, porque as letras das caſas impares 2, 4, 8, fazem a meſma ſoma que as letras das caſas pares 5, e 9. Do meſmo modo o numero 8452719 ſerá diviſivel por 11, porque as letras das caſas pares 9, 7, 5, 8, fazem a ſoma de 29, e a das partes 1, 2, 4, a ſoma 7; ſendo a differença das duas ſomas 22, que he multiplo de 11. ¶¶

Em quanto ao numero 7, e aos mais *primos*, ainda que ſeria facil achar regras ſemelhantes, como o exame que ellas ſuppoem ſeria mais trabalhoſo que a meſma diviſaõ, melhor he que eſta ſe experimente.

Supponhamos v. gr. que queremos abbreviar o quebrado $\frac{2016}{5796}$. Primeiramente dividiremos ambos os termos por 2, porque ambos elles acabaõ em algariſmo par, e teremos $\frac{1008}{2898}$. Depois tornaremos a dividir por 2, e reſultará $\frac{504}{1449}$. E porque naõ póde mais fazer-ſe a diviſaõ por 2, e pelo que fica dito ſe vê que póde fazer-ſe por 3, dividiremos por 3, e teremos $\frac{168}{483}$. Tornando a dividir por 3, reſultará $\frac{56}{161}$; e porque naõ póde mais caber a diviſaõ por 3, exprimentaremos por 7, e como ſuccede ſem reſto ficará o quebrado propoſto finalmente reduzido a $\frac{8}{23}$.

A raſaõ porque neſta operaçaõ naõ experimentamos a diviſaõ, ſenaõ pelos numeros *primos* 2, 3, 5, 7 &c., he porque depois de exhaurida v. gr. a diviſaõ por 2, he eſcuſado tentar fazella por 4, por quanto ſe eſta pudeſſe fazer-ſe ſem reſto, muito melhor ſe poderia fazer aquella.

95 De todos os meios, que ſe pódem applicar para abbreviar hum quebrado, o mais directo he dividir logo ambos os ſeus termos

pe-

pelo maior divisor commum, que elles pódem ter. Eis-aqui a regra para o achar.

Divida-se o termo maior pelo menor. Se esta divisaõ se fizer sem resto, o termo menor será o maior divisor commum de ambos elles. Ficando porém algum resto, por elle se dividirá o termo menor, que servio de divisor na operaçaõ antecedente. Entaõ, se naõ houver resto, o resto precedente que servio de divisor será o maior divisor que se busca; e se houver resto, por elle se dividirá o que foi divisor na operaçaõ antecedente; e assim por diante, até chegar a huma divisaõ exacta; e o divisor della será o que se busca. Se o divisor da ultima operaçaõ for a unidade, he sinal de que a fracçaõ naõ póde reduzir-se a menores termos.

Supponhamos v. gr. que temos para abbreviar o quebrado $\frac{3760}{9024}$. Primeiramente buscaremos o maior divisor commum de ambos os termos, dividindo 9024 por 3760, donde virá o quociente 2, e o resto 1504. Por este resto dividiremos 3760, e teremos o quociente 2, e o resto 752, pelo qual dividiremos o resto precedente 1504. E como esta divisaõ se faz exactamente, será o divisor della 752 o maior divisor commum dos termos do quebrado proposto; o qual por conseguinte, feita a divisaõ, se reduzirá a $\frac{5}{12}$.

E com effeito, pela operaçaõ achamos que 752 he divisor exacto de 1504; logo tambem o he de 3760, que se compoem de 2 vezes 1504, e 1 vez 752; e por conseguinte o deve ser igualmente de 9024, que se compoem de 2 vezes 3760, e huma vez 1504.

Alem disto he facil de ver, que 752 he o maior divisor commum, que pódem ter os numeros 9024 e 3760. Porque naõ póde haver divisor commum entre 9024 e 3760, que o naõ seja ao mesmo tempo entre 3760 e 1504; nem tambem entre estes dous, sem que o seja igualmente entre 1504 e 752; porém he evidente, que entre estes dous ultimos numeros naõ póde haver maior divisor commum do que 752: Logo &c.

§§ Se forem mais que dous os numeros, entre os quais devemos achar o maior divisor commum, usaremos do methodo seguinte.

Busque-se o maior divisor commum entre o primeiro e o segundo, entre o segundo e o terceiro, entre este e o quarto &c., de qualquer sorte que os numeros estiverem dispostos. Pratique-se o mesmo sobre os divisores achados, e assim por diante, até chegar a hum só divisor, o qual será finalmente o maior divisor commum dos numeros propostos. Se em alguma parte da operaçaõ sahirem dous ou mais divisores iguaes, hum delles sómente se tomará para a operaçaõ seguinte; e se todos alguma vez sahirem iguais, será escusado continuar a operaçaõ, porque ella virá a acabar em hum divisor igual a elles, se se levar ao fim conforme a regra, e por conseguinte qualquer delles será o maior divisor que intentamos achar. Encontrando-se na operaçaõ dous nume-

ros,

ros, quaiſquer que ſejaõ, os quais naõ tenhaõ diviſor commum ſenaõ a unidade, tambem os numeros propoſtos o naõ teráõ.

Exemplo. Pede-ſe o diviſor maior commum dos numeros .... 7174090 .... 1956570 .... 913066 .... 465850 .... 46585. Primeiramente buſcaremos o maior diviſor commum entre o primeiro e o ſegundo, e entre o ſegundo e o terceiro &c., e acharemos os numeros .... 652190 .... 130438 .... 18634 .... 46585; depois ſobre eſtes faremos a meſma operaçaõ, e ſahiráõ os diviſores .... 130438 .... 18634 .... 9317; ſobre eſtes praticaremos do meſmo modo, e ſahiráõ os diviſores .... 18634 .... 9317; e finalmente achando o maior diviſor commum deſtes dous ultimos, que he 9317, eſte ſerá o maior diviſor commum dos ſinco numeros propoſtos. ¶¶

Outro modo de conſiderar os quebrados, e conſequencias que delle reſultaõ.

96 A Idea, que até agora temos dado dos quebrados, he que o denominador moſtra de quantas partes ſe ſuppoem compoſta a unidade; e o numerador, de quantas deſſas partes conſta a quantidade, que pelo quebrado ſe repreſenta.

Agora moſtraremos, como ſe pódem tomar em outro ponto de viſta. Póde o numerador conſiderar-ſe, como repreſentando huma certa quantidade; que ſe ha de repartir em tantas partes

tes quantas ſaõ as unidades do denominador ; para ſe tomar huma dellas.

Aſſim v. gr. no quebrado $\frac{4}{5}$ póde conſiderar-ſe o numerador 4, como repreſentando *quatro* couſas v. gr. *libras*, que ſe haõ de repartir em *ſinco* partes, para ſe ſignificar huma dellas. Porque he evidente, que tanto faz dividir 4 *libras* em 5 partes para tomar huma dellas, como dividir a *libra* em 5 partes para tomar 4.

97 Pelo que póde conſiderar-ſe o numerador de hum quebrado como hum *dividendo*, e o denominador como hum *diviſor*. E por iſto ſe vê o que querem dizer os reſtos da diviſaõ reduzidos ao modo fraccionario, que aſſima lhes démos (n. 60).

98 Donde ſe ſegue, que hum numero inteiro póde ſempre reduzir-ſe a huma expreſſaõ fraccionaria, fazendo delle o numerador, e dando-lhe a unidade por denominador. Aſſim 3 e $\frac{3}{1}$, 5 e $\frac{5}{1}$ repreſentaõ huma meſma couſa.

99 Segue-ſe tambem, que para converter em *dizima* qualquer quebrado, naõ he neceſſario mais do que conſiderar o numerador como hum reſto de diviſaõ, em que o denominador tenha ſervido de diviſor, e obrar como aſſima fica declarado (pag. 56), tendo a advertencia de pôr huma cifra primeiro na caſa das unidades. Deſte modo ſe achará, que $\frac{3}{5}$ vale 0, 6, que $\frac{5}{9}$ vale 0, 5555 &c., que $\frac{1}{25}$ vale 0, 04, e aſſim dos mais.

De

Desta maneira se pódem tambem reduzir á *dizima* os numeros *complexos*.

Se, por exemplo, quizermos reduzir 3^T 5^P 8^p 7^l a partes decimais da *toesa*, de modo que se naõ despreze ametade de huma *linha*, observaremos que a *toesa* contém 864 *linhas*, e por conseguinte 1728 *meias-linhas*. Pelo que, para naõ desprezar ametade de huma *linha*, será necessario que a *dizima* passe da casa das millesimas, ou que chegue até as decimas-millesimas.

Isto supposto, converteremos 5^P 8^p 7^l tudo em *linhas* (n. 57), e acharemos 823^l, ou $\frac{823}{864}$ de huma *toesa*. E reduzindo este quebrado á *dizima*, como assima dissemos, resultará 0,9525, e por conseguinte o numero proposto ficará reduzido a 3^T, 9525.

§§ As fracções particulares da *dizima* pódem reduzir-se ás ordinarias de dous modos diversos.

Porque em primeiro lugar, se a quizermos conservar na fórma decimal, reduzir-se-haõ á maneira dos numeros inteiros, cuja natureza imitaõ (n. 86, 98). Se v. gr. quizermos pôr em figura de quebrado esta expressaõ 0,23, bastará escrever $\frac{0,23}{1}$; e se a quizermos reduzir ao denominador 7, praticando como nos inteiros, teremos $\frac{1,61}{7}$ (n. 86).

Querendo porém tirar-lhes a fórma decimal, as letras da *dizima* serviráõ de numerador, e para denominador se tomará a unidade com tan-

tas

tas cifras adiante, quantas eraõ as casas da dizima. Assim 0,23 he o mesmo que $\frac{23}{100}$; 0,0071 o mesmo que $\frac{71}{10000}$ &c.

Póde álem disto reduzir-se facilmente a hum quebrado ordinario a mesma *dizima* continuada ao infinito, com tanto que depois de certos intervallos tornem a vir as mesmas letras, e pela mesma ordem; *dizima*, que chamamos *periodica*. Deste modo he a experssaõ 0,321321321 &c., na qual se suppoem o periodo dos tres algarismos 321 repetido infinitamente.

E com effeito, se os periodos começarem logo desde a virgula, tomar-se-há hum delles para numerador, e o denominador será hum numero composto de tantos 9, quantas forem as casas de cada periodo. Assim acharemos que 0,321321321 &c. vale exactamenre $\frac{321}{999}$; que 0,013201320132 &c. vale $\frac{132}{9999}$; e que 0,777777 &c., fracçaõ igualmente periodica, cujos periodos constaõ de huma só letra, se reduz a $\frac{7}{9}$.

Porém, se os periodos naõ começarem logo desde a virgula, será sempre o denominador composto de tantos 9 como saõ as casas de cada periodo, mas esses seguidos de tantas cifras quantas saõ as casas decimais antes do primeiro periodo. E para acharmos o numerador multiplicaremos as letras antecedentes ao primeiro periodo pelo denominador, no qual naõ attenderemos ás cifras que se lhe ajuntáraõ;

raõ ; e ao producto ajuntaremos hum dos periodos. Para reduzirmos v. gr. a hum quebrado ordinario esta expressaõ 1,357121212 &c., como cada periodo consta de duas letras, e antes do primeiro se achaõ tres casas de *dizima*, será o denominador 99000. E multiplicando os algarismos 1357, que precedem ao primeiro periodo, pelo denominador 99, cortadas as cifras; teremos o producto 134343, ao qual ajuntando o periodo 12, será o numerador 134355; e por conseguinte o quebrado que se busca $\frac{134355}{99000}$. Do mesmo modo acharemos, que 0,00473473473 &c. se reduz a $\frac{473}{99900}$; que 0,633333 &c. vale $\frac{57}{90}$; e assim dos mais.

Das operações Arithmeticas sobre os Quebrados.

100 O Calculo dos quebrados se pratíca por meio das mesmas quatro operações, que já temos mostrado nos numeros inteiros. As duas primeiras de *Somar* e *Diminuir* requerem pela maior parte huma operaçaõ preparatoria, as outras duas naõ carecem de preparaçaõ alguma.

De Somar Quebrados.

101 SE os quebrados tiverem a mesma denominaçaõ, para saber a sua soma naõ he necessario mais do que somar os numeradores,

res, e dar a ſoma delles ao meſmo denominador.

Por exemplo: Havendo de ſomar os quebrados $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{5}{7}$, como todos ſaõ da meſma denominaçaõ, ajuntaremos os numeradores 2, 3, 5, e a ſoma 10 ſerá o numerador, que com o meſmo denominador 7 dará a ſoma total que ſe buſca $\frac{10}{7}$, a qual ſe reduz a $1\frac{3}{7}$ (n. 85).

102 Se os quebrados propoſtos forem de differente denominaçaõ, primeiramente ſe reduziráõ ao meſmo denominador, como aſſima moſtrámos (n. 90, 91); e depois ſe ſomaráõ como no primeiro caſo.

Tendo de ſomar, por exemplo, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, transformaremos primeiro os ditos quebrados em $\frac{45}{60}$, $\frac{40}{60}$, $\frac{48}{60}$; e depois buſcaremos a ſua ſoma, que he $\frac{133}{60}$, ou $\frac{13}{60}$ (n. 85).

De Diminuir Quebrados.

103 SEndo ambos os quebrados da meſma denominaçaõ, diminuir-ſe-há o numerador de hum do numerador do outro, e ao reſto ſe dará o meſmo denominador.

Aſſim, para diminuirmos $\frac{5}{9}$ de $\frac{8}{9}$, tiraremos o numerador 5 do numerador 8, e ao reſto 3 daremos o meſmo denominador 9; donde ſerá o reſto que buſcamos $\frac{3}{9}$, que ſe reduz a $\frac{1}{3}$ (n. 93).

104 Se

104 Se de 9 $\frac{5}{8}$ quizermos tirar 4 $\frac{7}{8}$, como $\frac{7}{8}$ naõ pódem diminuir-ſe de $\frac{5}{8}$, tomaremos huma unidade do inteiro 9, a qual reduzida a oitavos, e ſomada com $\frac{5}{8}$ faz $\frac{13}{8}$ (n. 86). Entaõ, tirando $\frac{7}{8}$ de $\frac{13}{8}$, ficaráõ $\frac{6}{8}$; e tirando 4 de 8 (attendendo-ſe á unidade ja tirada do numero 9) ficaráõ 4. E aſſim ſerá o reſto total 4 $\frac{6}{8}$, ou 4 $\frac{3}{4}$ (n. 93).

105 Sendo os quebrados de differente denominaçaõ, primeiro ſe reduziráõ ao meſmo denominador (n. 90); e feita eſta perparaçaõ, ſe obrará como no primeiro caſo.

Aſſim, para diminuirmos $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$, converteremos eſtes quebrados em $\frac{8}{12}$ e $\frac{9}{12}$; e feita a diminuiçaõ, reſultará o reſto $\frac{1}{12}$.

De Multiplicar Quebrados.

106 A Multiplicaçaõ dos quebrados ſe executa por meio da regra ſeguinte: *Multipliquem-ſe os dous numeradores hum pelo outro, e da meſma ſorte os denominadores; o producto dos primeiros ſerá o numerador, e o dos ſegundos o denominador do producto que ſe buſca.*

Querendo, por exemplo, multiplicar $\frac{4}{5}$ por $\frac{2}{3}$, multiplicaremos o numerador 4 pelo nume-

ra-

rador 2, e acharemos 8 para numerador; depois multiplicaremos os denominadores 5, e 3, e acharemos 15 para denominador do producto, o qual por conseguinte será $\frac{8}{15}$.

Para se entender a rasaõ desta regra, he necessario trazer á lembrança que mutiplicar dous numeros he tomar hum delles tantas vezes quantas saõ as unidades do outro. Em virtude desta mesma definiçaõ, multiplicar $\frac{4}{5}$ por $\frac{2}{3}$ vem a ser o mesmo que tomar $\frac{2}{3}$ de huma vez o quebrado $\frac{4}{5}$, ou tomar 2 vezes a terça parte de $\frac{4}{5}$. Multiplicando pois 5 por 3, os *quintos* de $\frac{4}{5}$ se mudaõ em 15 *avos*, isto he, em partes *tres vezes* menores; e multiplicando 4 por 2, tomaõ-se *duas vezes* essas novas partes: logo toma-se duas vezes a terça parte de $\frac{4}{5}$; e por conseguinte se multiplica effectivamente $\frac{4}{5}$ por $\frac{2}{3}$.

107 Havendo de multiplicar-se quebrado por inteiro, ou inteiro por quebrado, o inteiro se reduzirá a quebrado, dando-lhe a unidade por denominador, e a operaçaõ entrará na regra geral assima dada.

Por exemplo: Se quizermos multiplicar 9 por $\frac{4}{7}$, reduziremos o inteiro 9 á forma de quebrado $\frac{9}{1}$, e multiplicando $\frac{9}{1}$ por $\frac{4}{7}$, acharemos o producto $\frac{36}{7}$, o qual se reduz a $5\frac{1}{7}$ (n. 85.).

Don-

Donde ſe vê que para multiplicar quebrado por inteiro, ou inteiro por quebrado, a operaçaõ ſe reduz a multiplicar o inteiro pelo numerador do quebrado.

108 Se forem *mixtos* os numeros, que ſe haõ de multiplicar, iſto he, ſe forem compoſtos de inteiro e quebrado, cada hum dos inteiros ſe reduzirá á denominaçaõ do ſeu quebrado, e ſe ſomará com elle (n. 86); e aſſim entraráõ na meſma regra aſſima dada (n. 106).

Por exemplo: Se tivermos de multiplicar $12\frac{3}{5}$ por $9\frac{3}{4}$, reduziremos primeiro o multiplicando a $\frac{63}{5}$, e o multiplicador a $\frac{39}{4}$; e depois multiplicaremos $\frac{63}{5}$ por $\frac{59}{4}$, e teremos o producto $\frac{2457}{20}$, o qual ſe reduz a $122\frac{17}{20}$ (n. 85).

§§ Na multipliçaõ dos quebrados póde logó attender-ſe a que o producto ſe ache já reduzido aos termos mais ſimples.

Para iſſo he primeiramente neceſſario, que os meſmos quebrados, que ſe haõ de multiplicar, ſe reduzaõ aos menores termos. Depois, deverá advertir-ſe ſe os termos *heterogeneos*, iſto he, o numerador de hum quebrado com o denominador do outro, tem algum diviſor commum, e por elle ſe partiráõ, ou pelo maior delles, quando forem muitos. Os quebrados que deſte modo reſultarem, ſe multiplicaráõ hum pelo outro, e o producto ſerá o meſmo, que o dos quebrados propoſtos, abbreviado aos ſeus menores termos.

Que-

12
5
63
5

63
39
567
189
2457

2457 | 20
45 | 122
57
17

Querendo v. gr. multiplicar $\frac{3}{5}$ por $\frac{5}{7}$, reflectiremos que o denominador do primeiro quebrado, e o numerador do ſegundo pódem ambos partir-ſe por 5, e ficaráõ reduzidos a 1; e aſſim conheceremos logo, ſem fazer operaçaõ alguma, que o producto he $\frac{3}{7}$.

Outro exemplo. Se houvermos de multiplicar $\frac{18}{13}$ por $\frac{26}{63}$, obſervaremos, que o numerador do primeiro quebrado com o denominador do ſegundo tem ambos o diviſor maior commum 9, ſendo pelo qual divididos ſe reduzem a 2, e 7; e que o denominador do primeiro com o numerador do ſegundo tambem tem o diviſor commum 13, pelo que ſe reduzem a 1, e 2. Deſte modo ſe tornaráõ os quebrados propoſtos em $\frac{2}{1}$, $\frac{2}{7}$, cujo producto $\frac{4}{7}$ he o que ſe buſca, reduzido á forma mais ſimples, o qual pela operaçaõ ordinaria ſahiria neſtes termos $\frac{684}{819}$, que dariaõ mais trabalho para ſe reduzirem á ſimplicidade daquelles.

De Repartir Quebrados.

109 PAra ſe dividir hum quebrado por outro a regra he deſta maneira; *Mudem-ſe os termos do diviſor, paſſando o numerador para denominador, e o denominador para numerador; multiplique-ſe o dividendo pelo diviſor aſſim preparado; e o producto ſerá o quociente que ſe buſca.*

Que-

Querendo v. gr. partir $\frac{4}{5}$ por $\frac{2}{3}$, primeiramente mudaremos os termos do diviſor $\frac{2}{3}$, o qual ficará $\frac{3}{2}$; depois multiplicaremos $\frac{4}{5}$ por $\frac{3}{2}$ (n. 106), e o producto $\frac{12}{10}$, ou $1\frac{1}{5}$ (n. 75, 93), ſerá o quociente que buſcamos.

Para ſe entender a raſaõ deſta regra, deve obſervar-ſe que partir $\frac{4}{5}$ por $\frac{2}{3}$ he buſcar quantas vezes ſe contém $\frac{2}{3}$ em $\frac{4}{5}$. Iſto ſuppoſto, he facil de ver que 2 *terços* ſe devem conter em $\frac{4}{5}$ tres vezes mais doque 2 unidades. He tambem evidente, que $\frac{4}{5}$ contem a unidade $\frac{4}{5}$ de huma vez, e que por conſeguinte contem 2 unidades ametade de $\frac{4}{5}$ de huma vez. Logo deve o quebrado $\frac{4}{5}$ dividir-ſe primeiro por 2, e depois multiplicar-ſe por 3, ou tomar-ſe tres vezes a ametade de $\frac{4}{5}$, que vem a ſer o meſmo que multiplicar por $\frac{3}{2}$, quebrado inverſo do diviſor $\frac{2}{3}$.

110 Se houver de partir-ſe quebrado, por inteiro, ou inteiro por quebrado, o inteiro ſe reduzirá a quebrado, tomando a unidade por denominador, e a diviſaõ ſe praticará conforme a meſma regra.

Tendo v. gr. de partir 12 por $\frac{5}{7}$, a operaçaõ

çaõ ſe reduzirá a dividir $\frac{12}{1}$ por $\frac{5}{7}$, ou (n. 109) a multiplicar $\frac{12}{13}$ por $\frac{7}{5}$, e o quociente ſerá $\frac{84}{5}$, ou 16 $\frac{4}{5}$. Do meſmo modo, ſe quizermos partir $\frac{3}{4}$ por 5, dividiremos o quebrado por $\frac{5}{1}$, ou multiplicaremos por $\frac{1}{5}$, e ſerá o quociente $\frac{3}{20}$.

Donde ſe vê, que para dividir hum quebrado por hum inteiro, a operaçaõ ſe reduz ſimpleſmente a multiplicar o inteiro pelo denominador do quebrado.

111 Quando os inteiros forem accompanhados de quebrados, cadahum ſe reduzirá á denominaçaõ do ſeu quebrado (n. 86), e a operaçaõ ſe fará como nos exemplos antecedentes.

Havendo v. gr. de partir 54 $\frac{3}{5}$ por 12 $\frac{2}{3}$, o dividendo ſe reduzirá a $\frac{273}{5}$, e o diviſor a $\frac{38}{3}$. Depois partir-ſehá $\frac{273}{5}$ por $\frac{38}{3}$, ou (n. 109.) multiplicar-ſe-há por $\frac{3}{38}$; e ſerá o quociente $\frac{819}{190}$, ou 4 $\frac{59}{190}$ (n. 85.).

¶ Na diviſaõ dos quebrados, ſerá tambem conveniente ter cuidado de achar logo o quociente, abbreviado aos menores termos poſſiveis.

Iſto ſe conſeguirá: Primeiramente, reduzindo os meſmos quebrados propoſtos aos ſeus menores termos, ſe o naõ eſtiverem; e depois, dividindo os termos *homologos*, iſto he, ambos os nu-

numeradores, ou ambos os denominadores, pelo ſeu maior diviſor commum, quando o tiverem. Deſte modo reſultaráõ outros dous quebrados, que daráõ o meſmo quociente dos primeiros, e eſſe já reduzido aos termos mais ſimples.

Havendo v. gr. de partir $\frac{5}{7}$ por $\frac{5}{6}$, advertiremos logo que ambos os numeradores ſaõ diviſiveis por 5, e ſe reduzem a 1; e por tanto veremos, ſem fazer operaçaõ alguma, que o quociente he $\frac{6}{7}$.

Do meſmo modo, ſe houveſſemos de partir $\frac{3}{5}$ por $\frac{4}{5}$, como os denominadores ſe reduzem a 1, logo conheceriamos ſem calculo algum que o quociente he $\frac{3}{4}$.

Outro exemplo. Se nos pedirem o quociente de $\frac{22}{39}$ *avos* partidos por $\frac{11}{13}$, advertiremos que os numeradores ſe pódem ambos dividir por 11, e ſe reduzem a 2, e 1; e que os denominadores partidos por 13, ſe reduzem tambem a 3, e 1. Por conſeguinte teremos para repartir $\frac{2}{3}$ por $\frac{1}{1}$, e ſerá o quociente pedido $\frac{2}{3}$, o qual pela regra ordinaria ſe acharia em termos muito compoſtos $\frac{286}{429}$ ʃʃ

Uſo dos Quebrados.

112 PElo que aſſima diſſemos (n. 96.), he facil de ver, como ſe ha de moſtrar o valor de huma fracçaõ por meio das diviſo-

ens eſtabelecidas da unidade da queſtaõ.

Pergunta-ſe v. gr. quanto valem $\frac{5}{7}$ de huma *libra*. Como $\frac{5}{7}$ de huma *libra* valem o meſmo que $\frac{1}{7}$ de 5 *libras* (n. 96), reduziremos 5 *libras* a *ſoldos* (n. 57), e teremos 100 *ſoldos*; dividindo eſtes por 7, ſahiráõ no quociente 14ſ, e ſobraráõ 2ſ. Reduzindo tambem eſtes a *dinheiros*, teremos 24^d, que repartidos por 7 daráõ $3^d\ \frac{3}{7}$. E deſte modo diremos, que $\frac{5}{7}$ de huma *libra* valem 14 *ſoldos*, 3 *dinheiros*, e $\frac{3}{7}$ de hum *dinheiro*.

Se nos perguntaſſem quanto valem $\frac{5}{7}$ de 24 *libras*, he viſivel que podiamos buſcar primeiro o valor de $\frac{5}{7}$ de huma *libra*, como acabamos de moſtrar, e multiplicalo depois por 24. Porem he mais expedito o multiplicar logo as 24 *libr.* por $\frac{5}{7}$, e ſahirá o producto $\frac{120}{7}$ de huma *libra* (n. 107), ou 17 *libras* e $\frac{1}{7}$ de huma *libra*. Eſte ultimo quebrado reduzido a *ſoldos* e *dinheiros* dará 2ſ $10^d\ \frac{2}{7}$; e por conſeguinte o valor total de $\frac{5}{7}$ de 24 *libr.* ſerá 17^{lb} 2ſ $10^d\ \frac{2}{7}$.

113 As fracções decimais, como naõ tem denominador, ainda ſaõ mais faceis de reduzir ás partes da unidade, eſtabelecidas pelo uſo ordinario.

Querendo ſaber, por exemplo, quanto valem

lem 0,532 de huma *toeſa* em partes da diviſaõ vulgar da meſma *toeſa*; como eſta conſta de 6 *pés*, multiplicaremos 0,532 por 6, e o producto 3,192 moſtrará 3 *pés*, e 0,192 de hum *pé*. depois, como o *pé* contém 12 *pollegadas*, multiplicaremos 0,192 por 12, e o producto 2,304 dará 2 *pollegadas*, e 0,304 de huma *pollegada*. Finalmente, como a *pollegada* ſe compoem de 12 *linhas*, multiplicaremos 0,304 por 12, e o producto 3,648 moſtrará 3 *linhas*, e 0,648 de huma *linha*. Pelo que diremos, que o valor total de 0,532 de huma *toeſa* he 3 *pes*, 2 *pollegadas*, 3 *linhas* e 0,648 de huma *linha*; e aſſim ſe procederá em caſos ſemelhantes.

114 A avaliaçaõ dos quebrados nos conduz naturalmente a fallar dos *quebrados de quebrados*. Por eſte nome entendemos huma ſerie de fracçóes ſeparadas humas das outras pela particula *de*, como v. gr. $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{3}{4}$; $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{3}{4}$ *de* $\frac{5}{6}$, &c. Porque qualquer quebrado naõ ſómente póde reportar-ſe á unidade, ou a hum numero inteiro, como $\frac{3}{4}$ *de huma libra*, $\frac{3}{4}$ *de vinte libras*, mas tambem a qualquer outro quebrado, cujo valor ſe póde conceber como hum todo, e dividir em qualquer numero de partes, para ſignificar algumas dellas. Aſſim de $\frac{3}{4}$ podemos moſtrar $\frac{2}{3}$; e depois concebendo dous terços de tres quartos como hum todo, podemos dividilo em *ſeis* partes, e dellas tomar *finco*, donde reſultaõ $\frac{5}{6}$ *de* $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{3}{4}$.

Eſtes quebrados ſucceſſivamente relativos huns aos outros podem converter-ſe em hum ſó, que unicamente ſe reporte á unidade principal, multiplicando todos os numeradores huns pelos outros, e da meſma ſorte os denominadores. Aſſim $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{3}{4}$ vale o meſmo que $\frac{6}{12}$, ou $\frac{1}{2}$; e $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{3}{4}$ *de* $\frac{5}{6}$ o meſmo que $\frac{30}{72}$, ou $\frac{5}{12}$.

E com effeito he facil de ver que tomar $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{3}{4}$ nada mais he que multiplicar $\frac{3}{4}$ por $\frac{2}{3}$, ou tomar *duas* vezes a *terça* parte do quebrado $\frac{3}{4}$. Do meſmo modo, tomar $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{3}{4}$ *de* $\frac{5}{6}$ vem a ſer o meſmo que tomar $\frac{6}{12}$ *de* $\frac{5}{6}$, porque $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ fazem $\frac{6}{12}$; e pelo que temos dito $\frac{6}{12}$ *de* $\frac{5}{6}$ ſe reduzem a $\frac{30}{72}$, ou $\frac{5}{12}$.

Se nos pedirem o valor de $\frac{3}{4}$ de $5\frac{3}{8}$, reduziremos o inteiro 5 á denominaçaõ do ſeu quebrado (n. 86.), e teremos $\frac{3}{4}$ *de* $\frac{43}{8}$, que ſe reduzem a $\frac{129}{32}$, ou $4\frac{1}{32}$.

115 Quando huma fracçaõ involve termos algum tanto conſideraveis, e naõ póde abbreviar-ſe pelo methodo aſſima dado (n. 95.), ſe a natureza da queſtaõ permittir que nos contentemos com hum valor approximado, mas reduzido a termos mais ſimples, poderemos uſar do methodo ſeguinte, pelo qual acharemos alterna-

da-

43
3
129

damente valores ora maiores ora menores, mas cada vez mais convergentes para o verdadeiro, até cahirmos finalmente na mesma fracçaõ proposta.

Tomemos por exemplo a fracçaõ $\frac{100000000}{314159265}$, a qual, como se mostrará na Geometria, representa proximamente a *rasaõ* entre o *diametro* e a *circunferencia* do circulo, e supponhamos que a queremos transformar em outras fracções menos exactas na verdade, mas reduzidas a termos mais simples.

Primeiramente dividiremos ambos os termos da dita fracçaõ pelo numerador, e a reduziremos a esta fórma $\cfrac{1}{3\frac{14159265}{100000000}}$; a qual, desprezando a fracçaõ que acompanha o denominador inteiro 3, se reduzirá a $\frac{1}{3}$, que he o primeiro valor approximado da fracçaõ dada, o mais exacto que he possivel em termos taõ simples, mas maior do que o verdadeiro.

Para acharmos outro valor mais chegado ao verdadeiro, na fracçaõ junta ao denominador inteiro 3, partiremos ambos os termos pelo numerador, e a reduziremos a esta fórma $\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{7\frac{885145}{14159265}}}$;

a qual, desprezando a fracçaõ junta ao denominador inteiro 7, se reduz a $\cfrac{1}{3\frac{1}{7}}$, ou (n. 86) a a $\frac{1}{\frac{22}{7}}$, ou (n. 109) a $\frac{7}{22}$; que he outro valor mais exacto que o precedente $\frac{1}{3}$, mas algum tanto menor que o verdadeiro.

Se quizermos maior exactidaõ, dividiremos pelo numerador ambos os termos da fracçaõ junta ao denominador 7, e a fracçaõ primitiva ficará reduzida a eſta fórma $\cfrac{1}{3\cfrac{1}{7\cfrac{1}{15\frac{882090}{885145}}}}$; a qual deſprezando a fracçaõ que accompanha o denominador 15, ſe reduz a $\frac{106}{333}$, valor mais exacto que os precedentes, mas algum tanto maior que o verdadeiro. Porém ſe aqui houvermos de ſuſpender a operaçaõ, naõ deſprezaremos a fracçaõ junta ao denominador 15, mas advertindo que ella valle quaſi huma unidade, ajuntaremos 1 ao dito denominador, e teremos $\cfrac{1}{3\cfrac{1}{7\frac{1}{16}}}$; expreſſaõ, que ſe reduz a $\frac{113}{355}$. Eſte he hum valor da fracçaõ propoſta muito mais exacto que os precedentes, mas ainda alguma couſa menor que o ver-

verdadeiro, pois para igualar a fracçaõ propoſta lhe falta $\frac{611}{22305307815}$, ou proximamente $\frac{\quad}{36506232}$.

¶¶ Os quebrados reduzidos á fórma, que ſe tem dado á fracçaõ propoſta pela diviſaõ ſucceſſiva das fracções juntas aos denominadores inteiros, chamaõ-ſe *quebrados continuos*.

E deve notar-ſe, que a diviſaõ que fazemos neſta operaçaõ he a meſma que praticamos, quando buſcamos o maior diviſor commum dos termos de hum quebrado, para o abbreviarmos exactamente, ſendo poſſivel. Por iſſo achando finalmente que elles naõ tem diviſor commum ſenaõ a unidade, podemos ſervirnos logo dos quocientes achados, diſpondo-os em fracçaõ continua com a unidade por numerador; e nella deſprezaremos os termos que permittir a exactidaõ, que buſcamos.

Por exemplo, Querendo reduzir o quebrado $\frac{964}{5141}$, e buſcando o diviſor maior commum dos ſeus termos, achamos que naõ tem outro que naõ ſeja a unidade. Porém como pela operaçaõ achamos os quocientes 5, 3, e 321, delles formaremos a expreſſaõ

$$\cfrac{1}{5\cfrac{1}{3\cfrac{1}{321}}}$$

, que he exactamente igual ao quebrado propoſto; e deſprezando do a fracçaõ junta ao denominador 3, que com tanto mais raſaõ ſe deſpreza quanto he mais pequena, ficará $\frac{1}{5\frac{1}{3}}$, que ſe reduz a $\frac{3}{16}$; quebrado muito abbreviado, ao qual naõ falta mais do que $\frac{1}{82250}$ para igualar o quebrado propoſto.

Dos numeros complexos.

116 AIndaque as regras, que até agora temos dado, ſe pódem igualmente applicar aos numeros *complexos*, ou *heterogeneos*, naõ deixará com tudo de ſer conveniente que delles tratemos em particular, porque muitas vezes a diviſaõ da unidade nelles eſtabelecida ſerve de facilitar as operaçóes.

Há muitas eſpecies deſtes numeros, em que ſe uſaõ differentes diviſoens, das quais principalmente dependem as regras do calculo. Mas naõ he neceſſario, que as pratiquemos todas aqui, porque os exemplos de humas ſe applicaõ a todas as mais, em ſe ſabendo a natureza das ſuas diviſoens. Eiſ-aqui as mais uſadas entre nós.

ʃʃ O dinheiro de França pela maior parte ſe conta por *libras*. A *libra* conſta de 20 *ſoldos*, e o *ſoldo* de 12 *dinheiros*. Eſtas differentes eſpecies ſe diſtinguem com as letras iniciais dos ſeus nomes. Aſſim 32^{lo} $15^{ſ}$ 7^{d} quer dizer 32 *libras*, 15 *ſoldos*, e 7 *dinheiros*.

A *libra* de pezo, ou *arratel*, quaſi em toda a parte ſe divide em 2 *marcos*, o *marco* em 8 *onças*, a *onça* em 8 *oitavas*, a *oitava* em 3 *ſcropulos*,

los, o *ſcropulo* em 24 *grãos*. Para os pezos maiores uſamos de *quintais*. O *quintal* ſe divide em 4 *arrobas*, e a *arroba* em 32 *arrateis*.

As medidas das couzas ſecas em Portugal ſe reduzem a *moyos*. O *moyo* conſta de 15 *fangas*, a *fanga* de 4 *alqueires*, e o *alqueire* de 4 *quartas*; medidas, que alguma couſa differem entre ſi, conforme os lugares.

Nas medidas dos liquidos uſamos de *pipas*. A *pipa* tem 25 *almudes*, o *almude* 12 *canadas*, e a *canada* 4 *quartilhos*; medidas, que tambem variaõ de grandeza, conforme os lugares.

As diſtancias locáis, ſendo maiores, medem- 12
ſe por *Eſtadios*, *Milhas*, *Legoas* &c. Nas me- 6
nores ſe uſa da *toeſa*. Cada *toeſa* tem 6 *pés*, o 72
pé 12 *pollegadas*, a *pollegada* 12 *linhas*, e a *linha* 12
12 *pontos*: eſpecies, que por ſua ordem ſe aſ-
ſentaõ deſta maneira: $72^{T}\ 3^{P}\ 7^{p}\ 10'\ 5^{pts.}$ A 144
braça Portugueza tem 10 *palmos craveiros*, e o 72
palmo 8 *pollegadas*.

A medida natural do tempo he o *dia*. Cada 864
dia ſe divide em 24 *horas*, a *hora* em 60 *minutos*, 12
o *minuto* em 60 *ſegundos* &c; e eſtes numeros por ſua ordem ſe coſtumaõ notar deſte modo: $223^{d}\ 13^{h}\ 40'\ 53''$ &c.

Hum circulo celeſte divide-ſe em 12 *ſignos*, 1728
o *ſigno* em 30 *grãos*, o *grão* em 60 *minutos*, o *mi-*
nuto em 60 *ſegundos* &c. Os ſignos marcaõ-ſe com 864
a letra *s*, os grãos com a letra o, os minutos
primeiros, ſegundos &c. com huma, duas riſ- 10368
cas &c, deſta maneira: $11^{s}\ 23^{o}\ 43'\ 52''\ 23'''$ &c.

Tambem ſe tem imaginado diviſões particu-
la-

lares para avaliar a qualidade de algumas cousas, como temos o exemplo na conta do ouro, e da prata.

O ouro na sua maior pureza, sem liga alguma de outro metal, suppoem-se constar de 24 *quilates*, o quilate de 4 *grãos*, e o *grão* de 8 *oitavas*. Qualquer quantidade deste metal v. gr. hum *marco*, sendo puro vale como de 24 *quilates*; sendo ametade de ouro, e a outra ametade de outro metal, como de 12 *quilates*; sendo 5 partes de ouro, e huma de outro metal, como de 20 *quilates* &c. Deve distinguir-se o *grão* do *quilate*, do *grão* de pezo. Ao *grão* do *quilate* damos o nome de *grão de Lei*, porque tem hum valor fixo e determinado pela Lei, e o *grão* de pezo tem differente valor, confórme he mais ou menos puro o ouro, que nelle se contem.

Pela Lei de 4 de Agosto de 1688 se fixou neste Reino o valor de hum marco de ouro de 22 quilates em 96U000 reis; e esta he a Lei da nossa moeda. Repartindo o dito valor por 22, acharemos que cada quilate em hum marco vale 4U363 $\frac{7}{11}$, cada *grão* de Lei 1U090 $\frac{10}{11}$ &c.; e conseguintemente, que o marco de 24 quilates vale 104U727 $\frac{3}{11}$ reis. Pela mesma Lei se ordenou, que os Bate-folhas usassem do ouro de 23 quilates, e que os Ourives fizessem as suas obras de 20 quilates e meio. Nestas, supposto o valor fundamental do marco de 22 quilates, deveria sahir o marco a rasaõ de 89U454$\frac{6}{11}$ reis, a onça a rafaõ de $11U181\frac{9}{11}$, e a oitava a rafaõ de $1U397\frac{8}{11}$. Porém para evitar o embaraço dos quebrados, a mefma Lei regulou o marco a 89U600 reis, a 11U200 a onça, e a 1U400 a oitava.

A prata, fem liga alguma, fuppoem-fe conftar de 12 *dinheiros*, cada *dinheiro* de 24 *grãos de Lei*, e cada *grão* de 4 *quartas*. E por efta divifaõ fe regula o valor de qualquer quantidade de prata, a qual fendo pura valerá como de 12 *dinheiros*; tendo ametade de liga, como de 6 *dinheiros* &c.

Pela mefma Lei já citada fe fixou nefte Reino o valor de hum marco de prata de 11 *dinheiros*, que he a Lei da moeda, em 6U000 reis. Em confequencia defte valor fundamental, vale cada *dinheiro* em hum marco $U545\frac{5}{11}$; e o marco de 12 *dinheiros*, que he a Lei dos Bate-folhas, vale $6U545\frac{5}{11}$. Pela mefma rafaõ o marco de 10 *dinheiros* e 6 *grãos*, que he a Lei dos Ourives da prata, deveria valer exactamente $5U590\frac{10}{11}$. Porém, para evitar o embaraço dos quebrados, a mefma Lei reduzio o dito marco a 5U600 reis.

He de advertir, que o dinheiro de ouro, e prata alem do valer da Lei, que chamamos intrinfeco, tem tambem hum valor de final, procedido dos direitos da cafa da moeda. A peça de meia onça de ouro de 22 *quilates* tem de pezo 6U000 reis; e pelo cunho vale 6U400; e o ciucruzado novo, que tem meia onça de prata de 11 *dinheiros*, péza U375 reis, e corre por U480 reis. ¶

De Somar os numeros complexos.

117 PAra fazer esta operaçaõ, escrevem-se todas as addições, humas debaixo das outras, de maneira que as unidades da mesma especie fiquem dispostas em huma columna vertical; e tendo passado huma risca por baixo, principia-se a operaçaõ pelas unidades da infima especie da direita para a esquerda. Se a soma dellas naõ chegar a fazer huma unidade da especie proximamente maior, escrever-se-ha debaixo da risca; e se chegar a fazer huma, ou mais das ditas unidades, escrever-se-há sómente o que ficar, tiradas essas unidades, ou cifra, naõ ficando resto; e as tais unidades se levaráõ para a columna seguinte, na qual se praticará o mesmo, e assim por diante.

Exemplo I.

QUerendo somar - -	227^{lb}	$14^{ʃ}$	8^{d}	
	2549	18	5	
	184	11	11	
	17	10	7	
	2979^{lb}	$15^{ʃ}$	7^{d}	Soma.

Ordenadas as addições, como se vê no exemplo, principiaremos pelos *dinheiros*, cuja soma faz 31^{d}, nos quais se contêm 2 vezes 12^{d}, isto to he, 2^{f}, e álem diſſo ſobraõ 7^{d}. Por tanto aſſentaremos os 7^{d} na columna reſpectiva, e levaremos 2^{f} para a columna dos *ſoldos*. Neſta acharemos, que as unidades fazem 15, do qual numero aſſentaremos logo a letra 5 debaixo das unidades reſpectivas, e levaremos a dezena 1 para a ſomar com as dezenas dos meſmos *ſoldos*, as quais acharemos que fazem 5. E porque cada duas dezenas de *ſoldos* fazem huma *libra*, partiremos mentalmente o 5 por 2, e teremos por quociente 2^{lb}, ficando o reſto 1, que he 1 dezena de *ſoldos*; pelo que aſſentaremos eſta dezena no ſeu lugar, e levando 2^{lb} para a columna ſeguinte, acharemos finalmente que a ſoma total he 2979^{lb} 15^{f} 7^{d}.

Exemplo II.

SE quizermos ſomar as quatro addiçóes ſeguintes - - - - - - -

54^{T}	2^{P}	3^{p}	9^{l}
12	5	4	11
9	4	11	11
8	2	9	10
85^{T}	3^{P}	6^{p}	5^{l} Soma.

Principiaremos pelas *linhas*, que daõ 41^{l}, ou 3^{p} 5^{l}; e por conſeguinte aſſentaremos ſómente as 5^{l}, e levaremos as 3^{p} para a columna ſeguinte. Eſta dará a ſoma 30^{p}, ou 2^{P} 6^{p}; e por iſſo aſſentaremos nella as 6^{p}, e levaremos os 2^{P} para a columna ſeguinte; cuja ſoma acharemos ſer 15^{P}, ou 2^{T} 3^{P}. Pelo que aſſentando nella 3^{P}, e levando 2^{T} para a columna ſeguinte, teremos a ſoma total 85^{T} 3^{P} 6^{p} 5^{l}.

Ex-

Exemplo III.

55 HAvendo de ſomar -

23^d	13^h	$43'$	$52''$.
35	0	12	41
0	23	0	24
12	14	23	5
72^d	3^h	$20'$	$2''$ Soma.

Na columna dos *ſegundos* acharemos que as unidades fazem 12, e logo eſcreveremos $2''$, e levaremos a dezena 1 para a ſomarmos com as dezenas, as quais fazem 12. E como 6 dezenas de *ſegundos* fazem hum *minuto*, partiremos mentalmente 12 por 6, e o quociente moſtrará $2'$, os quais levaremos para a columna ſeguinte, e como naõ ficou reſto algum da dita diviſaõ, naõ eſcreveremos nada nas dezenas dos *ſegundos*. Na columna ſeguinte as unidades daõ 10, e logo aſſentaremos a 0, e levaremos a dezena 1 para a ſomarmos com as dezenas, as quais fazem 8; e partindo-as por 6 o quociente ſerá 1^h, que guardaremos para a columna das *horas*, e ficaráõ 2, que aſſentaremos na caſa das dezenas dos minutos. Na columna das *horas* acharemos a ſoma total 51^h, que ſaõ 2^d 3^h; e por conſeguinte aſſentado as 3^h, e levando os 2^d, para a ſua reſpectiva columna, acharemos que as addiçóes propoſtas ſomaõ 72^d 3^h $20'$ $2''$

Exem-

Exemplo IV.

SE tivermos para ſomar $11^s\ 23^\circ\ 43'\ 53''$

11ˢ	23°	43′	53″
0	12	22	4
7	21	3	12
3	0	25	37
10ˢ	27°	34′	46″ Som.

Somaremos os *ſegundos* e *minutos*, como no exemplo precedente. E chegando ás unidades dos *gráos*, logo aſſentaremos a ſoma dellas 7° na meſma caſa, e paſſaremos ás dezenas, cuja ſoma he 5; e porque 3 dezenas de *gráos* fazem hum *ſigno*, na caſa das dezenas aſſentaremos 2, e levaremos huma unidade para a colunna dos *ſignos*. Eſta dá a ſoma 22; mas porque no calculo deſtes numeros ſe lançaõ fóra os circulos inteiros, ou 12^s, todas as vezes que os houver na ſoma; de 22^s tiraremos 12^s, e aſſentaremos o reſto 10^s; donde a ſoma que buſcamos ſerá $10^s\ 27^\circ\ 34'\ 46''$ ∬

De Diminuir os numeros complexos.

118 PAra diminuir hum numero complexo de outro, ambos ſe aſſentaõ, como no Somar, e a operaçaõ ſe principia tambem pela menor eſpecie. Se o numero inferior ſe póde tirar do ſuperior, feita a ſubtracçaõ, o reſto ſe eſcreve por baixo da riſca. Porém naõ ſe podendo tirar, o numero ſuperior ſe augmentará com o que produzir huma unidade da eſpecie immediatamente maior reduzida ás unidades da colunna em que eſtamos. Entaõ feita a ſubtracçaõ, ſe eſcreverá o reſto em baixo; e o numero de quem ſe

ſe tomou a unidade ſe tratará mentalmente ſem ella na operaçaõ ſeguinte, na qual ſe procederá do meſmo modo, e aſſim por diante.

Exemplo I.

SE do numero - - - - - -	143^{lb}	17ſ	6^{d}
quizermos tirar - - - - -	75	12	9
	68^{lb}	4ſ	9^{d} Reſto.

Como de 6^d naõ ſe pódem tirar 9^d, de 17ſ tomaremos mentalmente 1ſ que vale 12^d, e ajuntando eſtes com os 6^d teremos 18^d, dos quais tirando 9^d, ficaõ 9^d, que aſſentaremos por baixo. E no lugar ſeguinte naõ tiraremos 12ſ de 17ſ, mas de 16ſ, por cauſa da unidade que já tirámos dos 17ſ; eſcreveremos o reſto 4ſ. Finalmente tirando 75^{lb} de 143^{lb} ficaõ 68^{lb}; e por conſeguinte o reſto total ſerá 68^{lb} 4ſ 9^d.

Exemplo II. 19

SE de - - - - - - - -	163^{lb}	0ſ	5^{d}
·84· houvermos de tirar - -	48	18	9
	78^{lb}	1ſ	8^{d}. Reſto.

Naõ podendo tirar 9^d de 5^d, e naõ havendo na caſa dos *ſoldos* numero, do qual tomemos huma unidade, tomalla-hemos de 163^{lb}, a qual valerá 20ſ. Deſtes deixaremos mentalmente 19ſ no lugar vazio dos *ſoldos*, e con-

ver

verteremos sómente 1ſ em *dinheiros*, os quais ajuntaremos com os 5^d; e feita a operaçaõ, como no exemplo antecedente, acharemos o resto 78^{lb} 1ſ 8^d.

Exemplo III.

55 SE do numero - $7^s\ 12^o\ 20'\ 42''$
quizermos tirar $4\ \ 23\ \ 36\ \ 23$. 23.

$2^s\ 18^o\ 44'\ 19''$ Resto.

Em chegando ás dezenas dos *minutos* acharemos para diminuir 3 de 1; e como isto naõ póde ser, tomaremos huma unidade dos 12^o, a qual vale 6 dezenas de minutos, e com 1 fazem 7, das quais tiraremos as 3. Do mesmo modo nas dezenas dos *gráos* acharemos 2 para tirar de 0, e por isso tomaremos huma unidade dos 7^s, a qual nos lembraremos que vale 3 dezenas de *gráos*; e acabando a operaçaõ teremos o resto $2^s\ 18^o\ 44'\ 19''$.

No calculo destes numeros muitas vezes se diminue hum numero maior de outro menor, porque a este se póde ajuntar para esse effeito hum circulo inteiro, ou 12^s.

Exemplo IV.

SE de - - - - - - - $3^s\ 0^o\ 12'\ 27''$
houvermos de tirar $9\ \ 15\ \ 27\ \ 22$

$5^s\ 14^o\ 45'\ 5''$ Resto.

Primeiramente nas dezenas dos *minutos*, sendo neceſſario tomar huma unidade da caſa dos *gráos*, que a naõ tem, tomalla-hemos dos 3^s, a qual valerá 30^o, e deſtes deixaremos 29^o na meſma caſa dos *gráos*, e tomaremos ſómente 1^o, que converteremos em 6 dezenas, para fazermos a ſubtracçaõ. Continuando a operaçaõ teremos finalmente para diminuir 9^s de 2^s pelo que ajuntaremos 12^s á 2^s, e feita a ſubtracçaõ ſerá o reſto que buſcamos $5^s\ 14^o\ 45'\ 5''$. §§

Multiplicaçaõ dos numeros complexos.

119 A praxe deſta operaçaõ póde reduzir-ſe em geral á multiplicaçaõ dos quebrados ordinarios, conforme a regra que aſſima temos dado (n. 106).

Porque v. g. ſe quizermos ſaber o feitio, que deve pagar-ſe por $54^T\ 2^P$ de obra, tendo-ſe ajuſtado a *toeſa* a raſaõ de $42^{lb}\ 17^{ſ}\ 8^d$; podemos converter o multiplicando em *dinheiros* (n. 57), que dará 10292^d. E porque o *dinheiro* he $\frac{1}{240}$ de huma *libra*, reduzirſe-há o multiplicando a $\frac{10292}{240}$ da meſma *libra*. Igualmente o multiplicador $54^T\ 3^P$ convertido todo em *pés* dará 327^P; e porque o *pé* he $\frac{1}{6}$ da *toeſa*, ficará o dito multiplicador reduzido a $\frac{327}{6}$ da meſma *toeſa*. Por conſequencia, a queſtaõ ſe reduz a multiplicar a fracçaõ $\frac{10292}{240}$ de huma

li-

libra por $\frac{327}{6}$ (n. 106) ; donde resulta o producto $\frac{3365484}{1440}$ da mesma *libra*, o qual se reduz finalmente (n. 112) a 2337^{lb} 2/ 10^{d}.

Este methodo se extende a toda a sorte de numeros complexos. Porém, como o que agora mostraremos se executa com menos trabalho, naõ nos demoraremos mais com elle.

120 O numero, que se contém em outro algumas vezes exactamente, chama-se parte *aliquota* delle ; e o que se naõ contém exactamente, parte *aliquanta*. Assim 3 he parte *aliquota* de 12, e *aliquanta* de 8.

Multiplicar, coma já dissemos, nada mais he que tomar o multiplicando hum certo numero de vezes. Se v. g. qualquer numero se houver de multiplicar por 8 $\frac{3}{4}$, deveremos tomallo 8 vezes, e alem disso $\frac{3}{4}$ de huma vez. Ora de dous modos podemos tomar os $\frac{3}{4}$ de hum numero ; ou buscando hum *quarto* delle, e repetindo-o 3 vezes ; ou tomando primeiramente a sua ametade, e depois ametade da mesma ametade. assim v. g.

Se tivessemos de multiplicar 84

por - - - - - - - - - - - - - - 8 $\frac{3}{4}$

$$\begin{array}{r} 672 \\ 42 \\ 21 \\ \hline 735 \end{array}$$

735. Producto.

Primeiramente, multiplicando pelo inteiro 8, teriamos o producto 672. Depois, para tomarmos com mais facilidade os $\frac{3}{4}$ de 84, resolveriamos o quebrado $\frac{3}{4}$ em $\frac{2}{4}$, ou $\frac{1}{2}$, e $\frac{1}{4}$. E assim tomando a ametade de 84, que he 42, e a ametade desta que he 21, e reunindo os tres productos parciais, achariamos o producto total 735.

Para isto se applicar aos numeros complexos, devemos notar que as differentes unidades, de que elles se compoem, saõ quebrados tanto entre si, como a respeito da unidade principal; e que para se multiplicarem com mais facilidade, he por conseguinte muito conveniente resolvellas em partes aliquotas tanto da unidade principal, como humas das outras. Quando por esta resoluçaõ naõ se puderem haver partes aliquotas, que facilitem o calculo, suprir-se-há com productos subsidiarios; da maneira, que mostraremos nos exemplos seguintes.

Ex-

Exemplo I.

PErgunta-ſe, quanto devem cuſtar $54^{T}\ 3^{P}$ de obra, a raſaõ de 72^{lb} por *toeſa*?

Deveremos pois multiplicar - 72^{lb}
por - - - - - - - - - - - - - $54^{T}\ 3^{P}$

$288^{lb}\ 0^{ſ}\ 0^{d}$
360
36

$3924^{lb}\ 0^{ſ}\ 0^{d}$ Prod.

E primeiramente multiplicaremos 72^{lb} por 54, conforme a regra coſtumada da Multiplicaçaõ. Depois, para multiplicarmos por 3^{P}, reflectiremos que eſte numero repreſenta meia *toeſa*, e por conſeguinte deve cuſtar ametade do preço della; pelo que aſſentaremos por baixo 36, ametade do multiplicando, e ſomando os tres productos parciais, teremos o producto que ſe pede 3924^{lb}

Exemplo II.

PEde-ſe o producto de - - 72^{lb}
por - - - - - - - - - - - $54^{T}\ 5^{P}$

$288^{lb}\ 0^{ſ}\ 0^{d}$
360
36
24

$3948^{lb}\ 0^{ſ}\ 0^{d}$ Producto.

Em

Em primeiro lugar multiplicaremos 72^{lb} por 54, como no exemplo antecedente. Depois como 5^{P} saõ $\frac{5}{6}$ de huma *toesa*, resolveremos este quebrado em $\frac{3}{6}$ ou $\frac{1}{2}$, e $\frac{2}{6}$ ou $\frac{1}{3}$. E assim tomando de 72^{lb} primeiramente a ametade 36, depois a terça parte 24, e somando os productos parciais, acharemos o producto total 3948^{lb}.

Exemplo III.

Querendo-se multiplicar - 72^{lb}
por - - - - - - - - - - $5^{T}\ 4^{P}\ 8^{p}$

$$\begin{array}{l}
360^{lb}\ 0^{s}\ 0^{d} \\
36 \\
12 \\
4 \\
4 \\
\hline
416^{lb}\ 0^{s}\ 0^{d}\ \text{Producto.}
\end{array}$$

Feita primeiramente a multiplicaçaõ por 5^{T}, multiplicaremos depois por 4^{P}, e para isso resolveremos este numero em 3^{P} e 1^{P}. Por 3^{P} tomaremos ametade do multiplicando, que he 36^{lb}; e por 1^{P}, observaremos que elle he hum terço de 3^{P}, e por conseguinte tomaremos o terço de 36^{lb}, que he 12^{lb}. Para multiplicarmos por 8^{p}, em lugar de compararmos as *pollegadas* com a *toesa*, será melhor que as comparemos com o *pé*; e resolvendo 8^{p} em 4^{p} e 4^{p}, veremos que cada huma destas partes he hum ter-

terço do *pé*, e por isso dará 4^{lb}, que he o terço do producto que acabamos de achar para 1^{P}. Reunindo finalmente todas estas partes, será o producto total 416^{lb}.

122 Se tambem o multiplicando for numero complexo, far-se-há a operação, como se mostra no exemplo seguinte.

Exemplo IV.

PAra multiplicar - -	72^{lb}	$6ſ$	6^{d}
por - - - - -	27^{T}	4^{P}	8^{p}
	504^{lb}	$0ſ$	0^{d}
	144		
	6	15	0
	1	7	0
	0	13	6
	36	3	3
	12	1	1
	4	0	$4\frac{1}{3}$
	4	0	$4\frac{1}{3}$
	2009^{lb}	$0ſ$	$6^{d}\frac{2}{3}$. Producto.

Tendo multiplicado 72^{lb} por 27 passaremos tambem a multiplicar 6ſ, para o que resolveremos este numero em 5ſ e 1ſ. E porque 5ſ fazem hum *quarto* da *libra*, multiplicar 5ſ por 27 será o mesmo que tomar 27 *quartos* da *libra*, ou hum *quarto* de 27 *libras*, que he 6^{lb} 15ſ. E para multiplicarmos 1ſ por 27, como 1ſ he hum *quinto* de 5ſ, tomaremos hum *quin-*

$\frac{5}{6}$ $\frac{3}{6}$ $\frac{2}{6}$

quinto do producto antecedente 6^{lb} $15 ſ$, que he 1^{lb} $7 ſ$. E finalmente, para multiplicarmos 6^{d} pelo meſmo numero 27, advertiremos que 6^{d} fazem ametade de $1 ſ$, e conſeguintemente tomaremos ametade do producto 1^{lb} $7 ſ$, que achamos competir a $1 ſ$, a qual ſerá $13 ſ$ 6^{d}.

Até aqui temos multiplicado todo o numero multiplicando pela primeira parte do multiplicador 27^{T}. Agora, para o multiplicarmos tambem por 4^{P}, praticaremos como no exemplo antecedente. E reſolvendo 4^{P} e 3^{P} e 1^{P}, por 3^{P} tomaremos ametade do multiplicando, a ſaber 36^{lb} $3 ſ$ 3^{d}, e por 1^{P} tomaremos hum terço da dita ametade, que he 12^{lb} $1 ſ$ 1^{d}. Do meſmo modo reſolveremos 8^{P} em 4^{P} e 4^{P}, e por cada huma deſtas partes tomaremos hum terço do producto, que achamos para 1^{P}, a ſaber 4^{lb} $0 ſ$ 4^{d} $\frac{1}{3}$. E reunindo todas as ditas partes, teremos o producto total 2009^{lb} $0 ſ$ 6^{d} $\frac{2}{3}$.

123 Nos exemplos precedentes tem ſido muito faceis de tomar as partes do multiplicando, por cauſa da ſua ſimplicidade. Quando forem mais compoſtas uſaremos do artificio que ſe moſtra nos exemplos ſeguintes.

Exem-

Exemplo V.

PErgunta-se, quanto devem custar 17^T de obra, a rasaõ de 34^{lb} $10 ſ$ 2^d a *toesa*?

Será pois o multiplicando 34^{lb} $10 ſ$ 2^d
e o multiplicador - - - 17^T

238^{lb}	$0 ſ$	0^d
34		
8	10	
0	17	
0	2	10
586^{lb}	$12 ſ$	10^d Prod.

E em primeiro lugar multiplicaremos 34^{lb} por 17, e depois $10 ſ$, os quais fazendo meia *libra* daráõ 17 meias *libras*, ou ametade de 17 *libras*, que he 8^{lb} $10 ſ$. Entaõ para multiplicarmos 2^d por 17, observaremos que 2^d fazem huma sexta parte de $1 ſ$, e conseguintemente huma sexta de huma decima, ou (n. 114) huma sexagesima parte de $10 ſ$. Pelo que por 2^d deveriamos tomar huma sexagesima parte do producto 8^{lb} $10 ſ$, que temos achado competir a $10 ſ$. Mas para facilitar o calculo tomaremos primeiro a decima parte do dito producto, que he 0^{lb} $17 ſ$, e a marcaremos com pontos, ou riscas, para denotar que he hum producto subsidiario, que ao depois naõ havemos de somar. Delle porém tomaremos a sexta parte $2 ſ$ 10^d, que vem a ser a sexagesima parte de 8^{lb} 10, e somando todos os productos parciais, será o producto que se pergunta 586^{lb} $12 ſ$ 10^d

Exem-

Exemplo VI.

PErgunta-ſe, quanta obra ſe deve fazer por 34^{lb} 10ſ 2^{d}, a raſaõ de 17^{T} por 1^{lb}?

Multiplicaremos pois - 17^{T}

por - - - - 34^{lb} 10ſ 2^{d}

68^{T}	0^{P}	0^{P}	0^{l}	0^{pts}	
51					
8	3				
.	.	.	. .		
0	5	1	2	4	$\frac{4}{5}$
0	0	10	2	4	$\frac{4}{5}$

$586^{T}\ 3^{P}\ 10^{P}\ 2^{l}\ 4^{pts}\frac{4}{5}$ porducto.

E tendo multiplicado 17^{T} por 34^{lb}, paſſaremos a multiplicar por 10ſ; e porque 10ſ fazem meia *libra*, pelo producto correſpondente tomaremos ametade de 17^{T}, que he $8^{T}\ 3^{P}$. Para multiplicarmos por 2^{d}, buſcaremos o producto que deveria dar 1ſ, tomando a decima parte do producto antecedente, a ſaber $0^{T}\ 5^{P}\ 1^{P}\ 2^{l}\ 4^{pts}\ \frac{4}{5}$; producto ſubſidiario, que marcaremos com pontos, e de que nos ſerviremos para delle tomarmos a ſexta parte $0^{T}\ 0^{P}\ 10^{P}\ 2^{l}\ 4^{pts}\ \frac{4}{5}$; que aſſentaremos por baixo; e ſomando todos os productos parciais acharemos que o producto pedido he $586^{T}\ 3^{P}\ 10^{P}\ 2^{l}\ 4^{pts}\ \frac{4}{5}$.

Te-

Temos dado este exemplo para confirmar o que assima dissemos (n. 45); que era necessario distinguir o *multiplicando* do *multiplicador*, quando ambos fossem *concretos*. E com effeito nos dous exemplos antecedentes temos os mesmos *factores* 17^{T}, e $34^{lb}\ 10^{\int}\ 2^{d}$; e com tudo resultaõ productos differentes.

§§ He porém de advertir, que a dita differença he sómente na expressaõ; e que na realidade se declara pelo primeiro producto o mesmo numero de *libras*, que de *toesas* pelo segundo; sendo sómente diversos os algarismos, porque saõ diversas as divisoens da *toesa*, e da *libra*. Para isto se provar, basta reduzir as partes da *libra* no primeiro, e as da *toesa* no segundo, a huma fracçaõ da unidade principal, e ambos se acharaõ concordes, sendo hum $586^{lb}\ \frac{77}{120}$, e o outro $586^{T}\ \frac{77}{120}$.

Advirta-se tambem, que nos exemplos assima dados se suppoem sempre que a unidade principal he a da maior especie, mas que póde servir igualmente de principal qualquer das outras. Póde v. gr. perguntar-se, quanta obra se deve fazer por $34^{lb}\ 10^{\int}\ 2^{d}$, a rasaõ de 17^{T} por $1^{\int}$. Neste caso, por 2^{d} teriamos o producto $2^{T}\ 5^{P}$, por $10^{\int}$ teriamos 170^{T}, e por 34^{lb} finalmente 11560^{T}; donde seria o producto total $11732^{T}\ 5^{P}$. §§

Divisaõ de hum numero complexo por hum numero incomplexo.

124 SE o dividendo ſómente for complexo, e ſe ao meſmo tempo o dividendo, e o diviſor moſtrarem unidades de diverſa eſpecie, a operaçaõ ſe praticará da maneira ſeguinte.

Dividir-ſe-haõ primeiramente as unidades principais do dividendo, conforme a regra dada para os numeros inteiros. O que ficar deſta diviſaõ reduzir-ſe-há ás unidades da eſpecie immediatamente inferior (n. 57), e ſe ajuntará com as unidades ſemelhantes que no dividendo houver, e o total ſe partirá do meſmo modo. O reſto deſta diviſaõ ſe tornará a reduzir ás unidades da eſpecie ſeguinte, e ſe ajuntará com as do dividendo, e a ſoma ſe tornará a repetir; e aſſim por diante, até chegar á infima eſpecie.

Exem-

Exemplo.

PAgando-ſe 4783 *libras*, 3 *ſoldos*, e 9 *dinheiros* pelo jornal de 87 *toeſas* de obra, queremos ſaber a quanto ſahe cada *toeſa*.

Para iſſo repartiremos 4783^{lb} $3^{ſ}$ 9^{d} por 87^{T}, da maneira ſeguinte:

$$
\begin{array}{r|l}
4783^{lb}\ 3^{ſ}\ 9^{d} & 87^{T} \\
\cline{2-2}
433 & 54^{lb}\ 19^{ſ}\ 7^{d} \\
85 & \\
\cline{1-1}
1703^{ſ} & \\
833 & \\
50 & \\
\cline{1-1}
609^{d} & \\
000 &
\end{array}
$$

Principiando pelas *libras*, partiremos pois 4783^{lb} por 87 (n. 65), e viráõ ao quociente 54^{lb}, ficando de reſto 85^{lb}. Eſte reſto convertido em *ſoldos* com os $3^{ſ}$ do dividendo primitivo faz $1703^{ſ}$; e partindo eſta ſoma por 87, ſahiráõ no quociente $19^{ſ}$, e ſobraráõ $50^{ſ}$. Do meſmo modo reduzindo eſte reſto a *dinheiros*, e ajuntando-lhe os 9^{d} do dividendo, teremos 609^{d}, os quais ſendo finalmente repartidos por 87, daráõ no quociente 7^{d}, ſem reſto algum; e conſeguintemente ſerá o quociente total que buſcamos 54^{lb} $19^{ſ}$ 7^{d}.

125 No caſo porém de moſtrarem unidades da meſma eſpecie tanto o dividendo, como o diviſor; antes de fazer a diviſaõ, he neceſſa-

rio examinar, se o quociente deve, ou naõ deve ser da mesma especie que elles; exame, que facilmente se decide pelo estado da questaõ.

126 Mostrando pois o dividendo unidades da mesma especie que as do divisor, e devendo ao mesmo tempo conformar-se o quociente com as unidades de ambos elles, a divisaõ se praticará inteiramente como no primeiro caso.

Sabendo, por exemplo, que 1243^{lb} produziraõ de lucro 7254^{lb}, pergunta-se quanto cabe a cada *libra*. He claro nesta questaõ, que o quociente deve mostrar unidades da mesma especie que as do dividendo, e do divisor, isto he, que se deve achar em *libras*, e partes da *libra*. Pelo que dividiremos 7254^{lb} por 1243, e convertendo o resto em *soldos* tornaremos a dividir por 1243, e assim por diante; e acabada a operaçaõ, acharemos que o quociente pedido he $5^{lb}\ 16 s\ 8^{d}\ \frac{760}{1243}$.

127 Mostrando porém o dividendo unidades da mesma especie que as do divisor, e devendo o quociente mostrar unidades de differente especie que as de ambos elles, antes de fazer a divisaõ será necessario reduzir tanto o dividendo como o divisor ás unidades da infima especie, que no mesmo dividendo se contém (n.57). Depois disso pratircar-se-ha, como no exemplo precedente, tratando das unidades do dividendo assim reduzido, como se fossem da mesma especie das que devem sahir no quociente.

Pergunta-se v. g. quantas *toesas* de obra se devem fazer por 7954 *libr.* 11 *sold.* e 7 *dinh.*,

a

a rasaõ de 72 *libras* a *toesa*? Pela mesma questaõ entenderemos, que o quociente deve sahir em *toesas*, e partes da *toesa*. E porisso reduziremos 7954^{lb} 11^{s} 7^{d} tudo em *dinheiros*, e teremos 1909099^{d}; o mesmo faremos ao divisor 72^{lb}, que dará 17280^{d}; e mudando no dividendo a denominaçaõ de *dinheiros* para *toesas*, teremos para dividir 1909099^{T} por 17280, donde resultará o quociente 110^{T} 2^{P} 10^{P} 6^{l} $\frac{19}{20}$.

Divisaõ de hum numero complexo, por outro complexo.

128 SEndo tambem complexo o divisor, reduzillo-hemos primeiro ás unidades da sua infima especie (n. 57), e multiplicaremos o dividendo pelo numero das vezes que entra a unidade da dita infima especie na unidade principal do mesmo divisor. Deste modo a operaçaõ será reduzida ao caso precedente de hum divisor incomplexo.

Exemplo.

TEndo custado 854^{lb} 17^{s} 11^{d} huma obra de 57^{T} 5^{P} 5^{P}, pergunta-se a como sahe a *toesa*? Deveremos pois dividir 854^{lb} 17^{s} 11^{d} por 57^{T} 5^{P} 5^{P}. Para isso reduziremos o divisor a *pollegadas*, que fará 4169^{P}; e como saõ necessarias 72^{P} para fazer huma *toesa*, que he a unidade principal do divisor, multiplicaremos o dividendo por 72 (n. 121), e teremos 61552^{lb}

10^{s}

10^{s}. Por tanto partiremos o numero 61552^{lb} 10^{s} por 4169, da maneira seguinte:

$$\begin{array}{r|l}
61552^{lb}\ 10^{s} & 4169 \\ \cline{2-2}
19862 & 14^{lb}\ 15^{s}\ 3^{d}\ \frac{1833}{4169} \\
3186 & \\ \cline{1-1}
63730^{s} & \\
22040 & \\
1195 & \\ \cline{1-1}
14340^{d} & \\
1833 &
\end{array}$$

Primeiramente as 61552^{lb} partidas por 4169 daõ no quociente 14^{lb}, 3186^{lb} de resto. Este reduzido a *soldos* com os 10^{s} do dividendo faz 63730^{s}, os quais sendo partidos por 4169 daõ no quociente 15^{s}, ficando de resto 1195^{s}. Este reduzido a *dinheiros* faz 14340^{d}, os quaes sendo finalmente partidos por 4169 daõ 3^{d}, e sobraõ 1833^{d}; pelo que será o quociente pedido 14^{lb} 15^{s} 3^{d} $\frac{1833}{4169}$.

He clara a rasaõ desta regra. Porque reduzindo-se o divisor 53^{T} 5^{P} 5^{p} a 4169^{p}, e sendo 1^{P} hum 72-*avo* da *toesa*, o mesmo divisor se reduzirá a esta fracçaõ da *toesa* $\frac{4169}{72}$. Ora para dividir por huma fracçaõ, he necessario inverter-lhe primeiro os termos, e depois multiplicar por ella (n. 109.). Logo no exemplo proposto deveremos multiplicar por $\frac{72}{4169}$; que vem

a

a ser o mesmo pue multiplicar primeiro por 72, e depois dividir por 4169, como a regra prescreve.

Como a divisaõ por hum numero complexo se reduz á divisaõ por hum numero incomplexo, do modo que temos visto; sobre as unidades do quociente se guardará o mesmo que assima dissemos (n. 126, 127).

Aqui se poderia falar tambem da multiplicaçaõ, e divisaõ geometrica, pelas quais se calculaõ as medições *Geodeticas* e *Stereometricas*. Mas estas operações pelo que respeita á fórma do calculo naõ differem em nada das que temos exposto. Sómente faltaria explicar a natureza das unidades dos factores, e do producto; Porém reservamos isso para a Geometria, onde se entenderá com mais facilidade.

Da formaçaõ dos numeros quadrados, e extracçaõ das suas raizes.

129 Chama-se *quadrado* de hum numero o producto, que resulta da multiplicaçaõ delle por si mesmo. Assim 25 he o quadrado de 5, porque resulta da multiplicaçaõ de 5 por 5.

130 *Raiz quadrada* de qualquer numero he o numero que multiplicado por si mesmo produz o dito numero. Assim 5 he a raiz quadrada de 25, e 7 a raiz quadrada de 49 &c.

131 He pois o numero que se *quadar* multiplicando e multiplicador ao mesmo tempo; e por conseguinte he duas vezes factor do pro-

du-

ducto (n. 42.). Donde vem, que o dito producto, ou quadrado, se chama tambem *segunda potencia* do mesmo numero.

Para achar o quadrado de hum numero, naõ he necessario mais do que multiplicallo por si mesmo, conforme as regras ordinarias da Multiplicaçaõ. Mas para extrahir a raiz quadrada de qualquer numero, ou para vir pelo quadrado no conhecimento da raiz, he necessario hum methodo particular, principalmente quando o numero constar de mais que dous algarismos.

Se o numero proposto constar de hum ou dous algarismos, a sua raiz, em numero inteiro, será algum dos numeros digitos

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

cujos quadrados saõ

1. 4. 9. 16. 25. 36. 49. 64. 81.

Assim v. g. a raiz quadrada de 72, em numero inteiro, será 8; por que estando 72 entre 64 e 81, a sua raiz tambem se achará entre as raizes dos ditos numeros, que saõ 8, e 9; e por conseguinte será 8 com hum quebrado. Este quebrado porém nunca se póde determinar exactamente, mas póde approximar-se continuamente, como mais abaixo se mostrará.

131 A raiz quadrada de hum numero, que naõ he quadrado perfeito, chama-se numero *surdo*, *irracional*, ou *incommensuravel*.

§§ Temos alguns principios dirivados da Lei da Numeraçaõ, pelos quais podemos muitas vezes conhecer, que hum numero proposto certrmente naõ he quadrado, e saõ os seguintes.

To-

Todo o numero cuja ultima letra á direita for 2, 3, 7, ou 8, naõ póde ſer quadrado.

E todo o numero, que acabar em huma, tres, ſinco, ou geralmente, em numero impar de cifras, naõ ſerá quadrado.

Se de qualquer numero lançarmos fóra os *noves*, e ficar no reſto 2, 5, 6, ou 8, conheceremos que naõ he quadrado. E o que deixar de reſto 3, on 6, naõ ſómente naõ ſerá quadrado, mas naõ terá raiz racional de qualquer grão que ella ſeja.

Do meſmo módo, ſe de hum numero tirarmos os onzes, e tivermos de reſto 2, 6, 7, 8, ou 10, naõ poderá ſer quadrado.

Os numeros, que naõ forem incluidos neſtas regras poderáõ ſer quadrados, mas naõ ſe ſegue por iſſo que o ſejaõ neceſſariamente. ʃʃ.

133 Em quanto aos numeros de mais letras que duas, obſervando o que ſe paſſa na formaçaõ do quebrado, acharemos o methodo inverſo de lhes extrahir a raiz.

Para quadrar qualquer numero, por exemplo 54;

$$\begin{array}{r} 54 \\ 54 \\ \hline 216 \\ 270 \\ \hline 2916 \end{array}$$

Primeiramente multiplicaremos o 4 ſuperior pelo 4 inferior, e o producto ſerá evidentemenmente o *quadrado das unidades* do dito numero.

Depois multiplicaremos o 5 ſuperior pelo 4 inferior, e teremos neſta operaçaõ o *producto das dezenas pelas unidades.*

Entaõ multiplicaremos o 4 ſuperior pelo 5 inferior, donde reſultará o producto das unidades pelas dezenas, ou (n. 44) o *producto das dezenas pelas unidades.*

Finalmente multiplicaremos o 5 ſuperior pelo 5 inferior, e teremos por eſta operaçaõ o *quadrado das dezenas.*

Somando eſtes productos parciais, achamos que o numero propoſto produz o quadrado 2916, o qual vemos que ſe compõe *do quadrado das dezenas, de dous productos das dezenas pelas unidades, e do quadrado das unidades* da ſua raiz 54.

134 Sendo iſto que acabamos de obſervar huma conſequencia immediata das regras da Multiplicaçaõ, he manifeſto que naõ pertence ſómente ao numero 54, mas a todo o numero compoſto de dezenas e unidades. Pelo que diremos em geral, que o quadrado de todo o numero compoſto de dezenas e unidades contém as tres ſobreditas partes, a ſaber, o quadrado das dezenas, dous productos das dezenas pelas unidades, e o quadrado das unidades.

135 Iſto ſuppoſto, como o quadrado das dezenas faz centenas (por quanto 10 vezes 10 fazem 100) he claro que o quadrado das dezenas naõ ſe contém nas duas ultimas letras do quadrado total. E como o producto das dezenas pelas unidades he neceſſariamente de dezenas, tambem he claro que o duplo deſte producto ſe

naõ

naõ contém na ultima letra do quadrado total.

136 Para voltarmos pois do quadrado 2916 a procurar a ſua raiz, podemos diſcorrer deſta maneira.

Exemplo I.

2916	54 Raiz
416	
104	
000	

Comecemos pelas dezenas da meſma raiz. A formaçaõ do quadrado nos tem moſtrado, que o quadrado dellas faz huma parte de 2916, e que nada delle ſe acha nas duas ultimas letras 16; logo eſtará o dito quadrado incluido em 29. E como a raiz quadrada de 29 naõ póde ſer maior que 5, concluiremos que 5 he o numero das dezenas da raiz, e o aſſentaremos á direita do numero propoſto, como ſe moſtra no exemplo.

Entaõ quadraremos o 5, e tiraremos o ſeu quadrado exacto 25 de 29, e ficará o reſto 4, para junto do qual abaixaremos as outras duas letras 16 do numero propoſto.

Para acharmos agora as unidades da raiz, reflectiremos no que contém finalmente o reſto 416. Pelo que aſſima moſtramos ſe vê que naõ contém mais que duas partes, a ſaber, dous productos das dezenas pelas unidades, e o quadrado das unidades da meſma raiz. A primeira deſtas nos baſtará para acharmos a letra que

ago-

agora buſcamos ; pois ſendo ella formada do duplo das dezenas multiplicado pelas unidades, ſe a dividirmos pelo dobro das dezenas , que já conhecemos, o quociente moſtrará as unidades (n. 74). Falta pois ſaber em que parte do reſto 416 ſe contém o dobro das dezenas multiplicado pelas unidades ; e como , pelo que aſſima notamos, nada delle ſe contém na ultima letra do dito reſto, neceſſariamente ſe achará em 41. Pelo que dividiremos 41 pelo dobro das dezenas 10, o qual eſcreveremos debaixo, e o quociente 4 moſtrará as unidades da raiz, que por conſeguinte ſerá 54.

He porém de advertir, que, ſem embargo de termos neſte exemplo achado o quociente 4 juſtamente como convinha, póde algumas vezes ſucceder que o quociente achado deſta maneira ſeja maior do que convem ; por que 14 (iſto he, a parte reſtante depois de ſeparada a ultima letra) naõ ſómente contem o dobro das dezenas multiplicado pelas unidades, mas tambem as dezenas que podem reſultar do quadrado das unidades. Por eſta raſaõ, para naõ haver duvida ſobre a letra que temos achado, uſaremos da verificaçaõ ſeguinte.

Depois de ter achado a letra das unidades 4, e de a ter eſcrito na raiz, tambem aſſentaremos á direita o diviſor 10, que ficará 104, e multiplicaremos eſte numero pela meſma letra 4, tirando os productos ſucceſſivos das partes correſpondentes de 416, como praticámos na Diviſaõ ; e como naõ reſta nada, concluiremos que a raiz he com effeito 54.

Se

Se ficasse porém algum resto, naõ deixaria por isso a raiz de ser exacta até a casa das unidades, com tanto que o dito resto naõ fosse igual, ou maior que o dobro da raiz achada aumentado de huma unidade; mas isto he o que se naõ póde recear, pois pelo methodo assima exposto sómente podemos errar tomando o quociente maior do que convém.

A verificaçaõ, que temos ensinado, he fundada sobre a mesma formaçaõ do quadrado. Porque multiplicando 104 por 4, he evidente que se fórma ao mesmo tempo o quadrado das unidades, e o producto das unidades pelo dobro das dezenas, que era o que faltava para completar o quadrado perfeito.

137 Do que acabamos de mostrar concluiremos em geral o methodo de tirar a raiz quadrada de qualquer numero, que naõ tiver mais de quatro letras, nem menos de tres.

Depois de se terem separado com hum ponto as duas ultimas letras á direita, buscar-se-há a raiz quadrada da parte que ficar á esquerda, e essa raiz mostrará as dezenas da raiz total que se busca, e se assentará adiante do numero proposto com a distinçaõ de huma risca perpendicular, que a separe delle.

O quadrado exacto da letra achada se tirará da mesma parte, cuja raiz se buscou, e o resto se assentará debaixo, para junto do qual se abaixaráõ as duas letras, que se tinhaõ separado no numero proposto.

Nestas letras se apartará com hum ponto a ultima á direita, e as que ficarem á esquerda

se

ſe diviciráõ pelo dobro das dezenas da raiz, o qual ſe aſſentará por baixo.

O quociente deſta diviſaõ ſe eſcreverá adiante da primeira letra da raiz, e juntamente ao lado direito do diviſor, enchendo a caſa correſpondente á letra ſeparada.

E finalmente multiplicar-ſe-há o diviſor aſſim aumentado pelo meſmo quociente, e o producto ſe tirará do numero que fica por ſima do dito diviſor. Moſtremos iſto com outro exemplo.

Exemplo II.

PEde-ſe a raiz quadrada do numero 7569.

75.69	87 Raiz
116.9	
16.7	
000	

Separemos primeiramente com hum ponto as duas ultimas letras 69, e buſquemos a raiz de 75, que acharemos ſer 8, e eſta letra aſſentaremos adiante da riſca; cujo quadrado exacto 64 diminuiremos de 75, aſſentando por baixo o reſto 11, para junto do qual abaixaremos as duas letras 69 que tinhamos ſeparado.

Depois no reſto total 1169 apartaremos com hum ponto a ultima letra 9, e ficará o dividendo 116, debaixo do qual eſcreveremos o diviſor 16, que he o dobro da raiz achada 8; feita a diviſaõ, acharemos o quociente 7, que aſ-

ſen-

ſentaremos adiante da primeira letra da raiz 8; e adiante do diviſor 16, debaixo da letra ſeparada 9.

Finalmente multiplicaremos o diviſor aſſim aumentado 167 pelo meſmo quociente 7, e diminuiremos o producto do numero ſuperior 1169; e porque naõ ſobra nada, entenderemos que o numero 7569 he quadrado perfeito, e que a ſua raiz exacta he 87.

138 Deve notar-ſe bem, que naõ ſe há de partir pelo dobro das dezenas ſenaõ a parte que ficar á eſquerda depois de ſeparada a ultima letra. De ſorte que naõ chegando ella a conter o dito dobro naõ poderá por iſſo uſar-ſe da letra ſeparada, mas aſſentar-ſe-há cifra no quociente. Ao contrario, ſe o meſmo dobro ſe contiver na parte, que conſtitue o dividendo, mais de nove vezes, naõ poderá por-ſe no quociente letra maior que 9, pela raſaõ que já diſſemos tratando da Diviſaõ (n. 66).

139 Sendo bem comprehendido o que acabamos de dizer ſobre a raiz quadrada dos numeros que naõ tem mais que quatro letras, he facil de entender o que ſe deve praticar com os numeros de mais letras. De qualquer numero de letras que deva conſtar a raiz ſempre a podemos conſiderar como compoſta de duas partes, das quais huma ſeja de dezenas, e a outra de unidades; como v. gr. o numero 874 póde conſiderar-ſe compoſto de 87 dezenas, e 4 unidades.

Iſto ſuppoſto, quando tivermos achado as duas primeiras letras da raiz pelo methodo que aca-

acabamos de expôr, pelo meſmo poderemos achar a terceira, tomando as ditas duas letras como hum ſó numero de dezenas, e applicando-lhes para achar a terceira todo o raciocinio que applicamos á primeira para achar a ſegunda.

Igualmente, quando tivermos tres letras acharemos a quarta, ſe for neceſſario, tomando as tres por hum numero total de dezenas, e praticando com ellas o meſmo, que praticamos com as duas primeiras para achar a ſegunda; e aſſim por diante.

Mas para proceder com ordem, diſtribuiremos primeiro o numero propoſto em claſſes de duas letras cada huma da direita para a eſquerda, marcando-as com hum ponto. A ultima claſſe á eſquerda ſerá de huma ſó letra, quando o numero deſtas for impar.

A raſaõ deſta preparaçaõ he, porque conſiderando a raiz como compoſta de dezenas, e unidades, devem ſeparar-ſe duas letras á direita para ſe achar na parte reſtante o quadrado das dezenas (n. 135, e ſeg.). E pela meſma raſaõ, conſtando as dezenas de unidades e dezenas de dezenas, deveremos ſeparar outras duas letras; e aſſim por diante.

Exem-

Exemplo III.

PEde-se a raiz quadrada do numero 76807696.

```
76.8 0.76.96 | 8764
12 8.0       |
 1 6 7       |
------------
 1 1 1 7.6
   1 7 4 6
------------
     7 0 0 9.6
     1 7 5 2 4
------------
     0 0 0 0 0
```

76807696

Tendo distribuido o numero proposto em classes de duas letras cada huma da direita para a esquerda, buscaremos a raiz da ultima classe á esquerda 76, que acharemos ser proximamente 8, e assentaremos este algarismo a diante da risca; depois quadraremos o 8, e diminuiremos o quadrado 64 de 76, escrevendo por baixo o resto 12 para junto do qual abaixaremos a classe seguinte 80, separando-lhe com hum ponto a ultima letra o. Debaixo da parte que fica 128 escreveremos o divisor 16 formado do dobro da raiz achada 8; e fazendo a divisaõ, acharemos o quociente 7, que escreveremos na raiz depois da primeira letra 8, e tambem a diante do divisor 16. Entaõ multiplicaremos 167 pelo mesmo quociente 7, e diminuiremos o producto do numero 1280, escrevendo por baixo o resto 111, para junto do qual traremos

mos

mos a claſſe ſeguinte 76, ſeparando nella a ultima letra. Por baixo da parte reſtante 1117 eſcreveremos o diviſor 174, que he o dobro da raiz até agora achada 87; e partindo 1117 por 174 acharemos o quociente 6, que aſſentaremos na raiz, e adiante do diviſor; e multiplicando 1746 pelo meſmo quociente 6, tiraremos o producto do numero 11176, e eſcreveremos debaixo o reſto 700, ao qual ajuntaremos a ultima claſſe 96, ſeparandolhe a ultima letra. Aſſim ficará 7009, que dividiremos pelo duplo da raiz achada 876, que he 1752, e acharemos o quociente 4, que poremos na raiz, e no diviſor; e multiplicando 17524 pelo meſmo 4, tiraremos o producto do numero 70096; e porque neſta ultima operaçaõ naõ fica reſto, ſerá a raiz exacta do numero propoſto 8764.

140 Quando o numero naõ for quadrado perfeito, no fim da operaçaõ ficará neceſſariamente algum reſto; e a raiz achada ſerá a verdadeira raiz do maior quadrado, que no dito numero ſe contém. Neſte caſo naõ he poſſivel extrahir-ſe a raiz exactamente, mas podemos approximar-nos ao ſeu juſto valor quanto quizermos, de ſorte que o erro ſeja menor que qualquer quantidade aſſignavel.

Eſta approximaçaõ ſe faz commodamente por meio da *dizima*. Ajuntaõ-ſe ao numero dado duas vezes tantas cifras, quantas ſaõ as letras decimais que ſe querem na raiz; tira-ſe a raiz como nos exemplos antecedentes; e nella finalmente ſe aparta com a virgula ametade das caſas decimais, que ao numero ſe ajuntátiraõ. Porque, devendo o producto de huma multiplicaçaõ ter tantas letras decimais, quantas houver nos factores juntamente (n. 54), o quadrado (cujos factores saõ iguais) deverá ter duas vezes mais letras decimais, do que em qualquer dos factores, isto he, na sua raiz se contém.

Exemplo IV.

PEde-se a raiz quadrada de 87567 exacta até a casa das millesimas.

Para ter millesimas requerem-se tres casas de *dizima*; será logo necessario ajuntar ao numero dado seis cifras, e tiraremos a raiz quadrada de 87567000000.

8.75.67.00.00.00 | 295917
47.5
49
———
346.7
585
———
5420.0
5909
———
10199.0
59181
———
427190.0
591827
———
129111

Fazendo a operaçaõ como nos exemplos an-

antecedentes, acharemos a raiz 295917 exacta até as unidades. Esta pertence ao numero 87567000000; porém nós queremos a raiz de 87567, ou de 87567,000000. Por isso cortaremos para a dizima as tres ultimas letras da dita raiz, que vem a ser ametade das cifras que ajuntamos ao numero dado, e será a raiz que buscamos 295,917 exacta até a casa das millesimas.

Do mesmo modo, se nos pedirem a raiz quadrada do numero 2 até a casa das milionesimas, tiraremos a raiz de 2000000000000, que acharemos ser 1414213, e apartando com a virgula seis algarismos á direita, será a raiz que buscamos 1,414213.

§§ A *Prova real* desta operaçaõ manifestamente se collige da mesma difiniçaõ da *raiz* (n. 130). Multiplicar-se-há esta por si mesma, e ao producto se ajuntará o resto da operaçaõ, se o houver; e assim resultará o numero proposto, se a operaçaõ naõ estiver errada. Se v. gr. de 12541028 acharmos a raiz 3541, e o resto 2347, para verificarmos este resultado, multiplicaremos a raiz por si mesma, e ao producto 12538681 ajuntaremos o resto 2347; e porque torna a restituir-se o numero 12541028, entenderemos que naõ houve erro na operaçaõ.

Querendo usar da *prova dos noves*, tirar-se-haõ estes da raiz, e o resto se multiplicará por si mesmo tirando se tambem do producto os noves, se os tiver; o que ficar se ajuntará ao resto da operaçaõ, e juntamente se lhe tiraráõ os noves; e o resto final será o mesmo que deve fi-

ficar depois de lançados fóra os noves do numero proposto. Assim no mesmo exemplo, tirando os noves da raiz 3541 fica o resto 4, que multiplicado por si mesmo faz 16, e lançando fóra 9, ficaõ 7, que somados com o resto da operaçaõ 2347, e tirando ao mesmo tempo os noves, finalmente daráõ o resto 5; e este he o que deve sobrar tirados os noves do numero dado 12541028, como sobra com effeito. A prova dos *onzes* se applica como as dos *noves*, e de ambas se entenderá aqui o mesmo que fica advertido (n. 75.) §§

141 Temos visto assima (n. 106), que para multipsicar hum quebrado por outro, he necessario multiplicar entre si os numeradores, e da mesma sorte os denominadores. Por conseguinte, para quadrar hum quebrado deveremos quadrar ambos os seus termos. Assim o quadrado de $\frac{2}{3}$ he $\frac{4}{9}$, o de $\frac{4}{5}$ he $\frac{16}{25}$ &c.

142 Logo reciprocamente, para tirar a raiz quadrada de hum quebrado, deveremos tirar as raizes do numerador, e denominador. Deste modo a raiz de $\frac{9}{16}$ será $\frac{3}{4}$, porque a raiz do numerador 9 he 3, e do denominador 16 he 4.

143 Póde succeder, que o numerador, ou o denominador, ou ambos juntos naõ sejaõ quadrados perfeitos. Se o numerador sómente o naõ for, tirar-se-há a sua raiz approximada pelo methodo assima exposto, á qual se dará por denominador a raiz exacta do denominador primitivo.

As-

Aſſim por exemplo, querendo a raiz quadrada de $\frac{2}{9}$, tiraremos a raiz aproximada do numerador 2, que ſerá 1, 4, ou 1, 41, ou 1, 414, ou 1, 4142 &c. conforme a menor ou maior exactidaõ que nos baſtar, á qual daremos o denominador 3, raiz exacta do denominador dado 9, e acharemos que a raiz de $\frac{2}{9}$ he $\frac{1,4}{3}$, ou $\frac{1,40}{3}$, ou $\frac{1,414}{3}$, ou $\frac{1,4142}{3}$ &c.

Porém, ſe o denominador naõ for quadrado, multiplicar-ſe-haõ ambos os termos do quebrado propoſto pelo meſmo denominador e a operaçaõ ſerá reduzida ao caſo precedente.

Querendo v. gr. tirar a raiz quadrada de $\frac{3}{5}$, reduziremos primeiro eſte quebrado a $\frac{15}{25}$, e tirando a raiz do numerador 15 até as milleſimas, no caſo de baſtar eſta exactidaõ, acharemos que a raiz proxima de $\frac{15}{25}$ ou $\frac{3}{5}$ he $\frac{3,872}{5}$.

144 Para naõ implicar-nos com differentes eſpecies de fracções ao meſmo tempo, podemos converter o reſultado $\frac{3,872}{5}$ unicamente em *dizima*, partindo 3,872 por 5, e teremos a raiz de $\frac{3}{5}$ puramente em partes decimais 0,774 (n. 99).

145 Em fim, ſe vierem inteiros juntos com os quebrados, os inteiros ſe reduziráõ á denominaçaõ dos quebrados (n. 86), e entaõ ſe praticará como nos exemplos antecedentes. Para tirarmos v. gr. a raiz de 8 $\frac{3}{7}$, converteremos

eſte

eſte numero em $\frac{59}{7}$ (n. 86), e depois em $\frac{413}{49}$ (n. 143), cuja raiz approximada ſerá $\frac{20,322}{7}$, ou 2,903.

146 Tambem ſe póde converter em *dizima* o quebrado, antes de ſe lhe tirar a raiz; advertindo, que as letras da *dizima* ſe haõ de buſcar até fazerem o dobro das que queremos na raiz. Applicando eſte methodo ao numero $8\frac{3}{7}$, e querendo a raiz até a caſa das milleſimas, converteremos o dito numero em 8,428571 (n. 99), cuja raiz ſerá 2,903, como tinhamos achado.

147 Havendo de tirar a raiz quadrada de qualquer quantidade decimal, faremos que as caſas da dizima ſejaõ ſempre duas vezes tantas como as que deve ter a raiz, e para iſſo lhe ajuntaremos as cifras neceſſarias (n. 30); e a raiz achada ſempre terá na dizima ametade das caſas da dita quantidade propoſta, para o que ſe aſſentaráõ as cifras que forem neceſſarias entre a virgula e a primeira letra da meſma raiz.

Aſſim querendo extrahir a raiz de 21, 935 até a caſa das milleſimas, tiralla-hemos como de 21,935000, e ſerá 4,683. Do meſmo modo acharemos que a raiz de 0,542 he 0,736, que a de 0,0054 he 0,073, e aſſim das mais.

148 O methodo, que fica expoſto (n. 69, e ſeg.) para ſe abbreviar a Diviſaõ, tambem ſe póde applicar facilmente á extracçaõ da raiz. Sendo baſtante, que ella ſe ache exacta até a caſa das unidades, diſtribuir-ſe-há primeiramente em claſſes o numero dado, e depois ſe cor-

taráõ á direita tantas letras menos huma, quantas forem as classes, e das que ficarem se extrahirá a raiz pelo methodo até agora declarado. O ultimo resto que ficar se partirá pelo divisor da operaçaõ precedente, no qual se naõ attenderá á ultima letra da parte direita; o resto que ficar desta divisaõ se tornará a partir pelo mesmo divisor, desprezando-se nelle outra letra á direita; e assim por diante.

Da formaçaõ dos numeros cubicos, e extracçaõ das suas raizes.

149 SE qualquer numero se multiplicar pelo seu quadrado, o producto que resultar he o que chamamos *cubo* do mesmo numero. Assim 27 he cubo do numero 3, porque resulta da multiplicaçaõ de 3 pelo seu quadrado 9.

Donde se vê, que o numero que se eleva ao cubo he tres vezes *factor* do mesmo cubo; e por isso o cubo se chama tambem a *terceira potencia*, ou *potencia do terceiro grão* do mesmo numero.

150 Em geral, dizemos que hum numero se eleva á segunda, terceira, quarta, quinta &c. potencia, quando se multiplica 1, 2, 3, 4 &c. vezes consecutivas por si mesmo, ou quando elle he 2, 3, 4, 5 &c. vezes *factor* do producto.

151 *Raiz Cubica* de qualquer numero he o numero, que multiplicado pelo seu quadrado, forma o dito numero proposto. Assim 3 he a raiz cubica de 27, porque da multiplicaçaõ de 3 pelo seu quadrado 9 resulta o numero 27.

152 Pa-

152 Para acharmos pois o cubo de qualquer numero dado naõ he necessaria outra regra senaõ a da Multiplicaçaõ; mas para extrahirmos a raiz cubica de qualquer numero he necessario hum methodo particular, o qual acharemos examinando a formaçaõ do mesmo cubo.

Observaremns porém, que naõ temos necessidade do dito methodo para acharmos a raiz cubica em numero inteiro, senaõ quando o numero proposto tiver mais de tres letras. Porque sendo 1000 o cubo de 10, todo o numero menor que 1000, o qual por conseguinte naõ terá mais de tres letras, terá a raiz cubica menor que 10. Destes numeros deveremos saber a raiz, para fazermos a operaçaõ nos numeros maiores.

Todo o numero pois, que naõ tiver mais doque tres letras, terá na raiz cubica, em numero inteiro, alguns dos numeros digitos

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

aos quais correspondem os cubos seguintes

1. 8. 27. 64. 125.216.343.512.729.

Assim acharemos que a raiz cubica de 428 em numero inteiro he 7; porque cahindo 428 entre 343 e 512, tambem a sua raiz se achará entre as raizes delles 7, e 8; e por conseguinre em quanto ás unidades inteiras concordará com o numero 7, raiz exacta do cubo proximamente menor 343.

153 Há muitos numeros que naõ podem ter raiz cubica exacta. Mas podemos usar de tal approximaçaõ, que o defeito seja menor que qualquer quantidade assignavel, como abaixo

moſtraremos, depois de termos dado o methodo de extrahir a raiz do cubo perfeito.

154 Para bem ſe entender eſte methodo, vejamos as partes de que deve conſtar o cubo de hum numero compoſto de dezenas e unidades.

Como pois reſulta o cubo da multiplicaçaõ de hum numero pelo ſeu quadrado (n. 149), he neceſſario trazer á lembrança, que o quadrado de hum numero compoſto de dezenas e unidades conſta de tres partes, a ſaber *do quadrado das dezenas, de dous productos das dezenas pelas unidades, e do quadrado das unidades.*

Logo para ſe formar o cubo deveráõ multiplicar-ſe as tres partes do quadrado pelas dezenas e pelas unidades da raiz.

E em primeiro lugar multiplicando-as pelas dezenas, reſultaráõ tres productos, convem a ſaber, o cubo das dezenas, dous productos do quadrado das dezenas pelas unidades, e o producto das dezenas pelo quadrado das unidades. Depois multiplicando pelas unidades reſultaráõ outros tres productos, que ſeraõ, o producto do quadrado das dezenas pelas unidades, dous productos das dezenas pelo quadrado das unidades, e o cubo das unidades.

Logo, ajuntando os productos ſemelhantes, he claro, que o cubo de hum numero compoſto de dezenas e unidades conſta de quatro partes, a ſaber, *do cubo das dezenas, de tres productos do quadrado das dezenas pelas unidades, de tres productos das dezenas pelo quadrado das unidades, e do cubo das unidades.*

Por meio deſtas partes podemos formar o cu-