Fran.co Correa Pessoa

Hé do P.e Ant.o

Pim.el natural de S.

Verão, e eu sou hũ

grd.e seu am.o Fra Fra

Fra Fra Fra

34 10 2
17
238
39

30 | 12
06 2

30000 | 12
160 2500
00

ELEMENTOS
DE
ARITHMETICA
POR
M. BEZOUT
DA ACADEMIA REAL
das Sciencias de Pariz &c. &c.

Traduzidos do Francez.

QUARTA EDIÇAÕ.

Este Livro he de Pe Joze Ferreira
Fresco Prior de Leira

COIMBRA:

NA REAL OFFICINA DA UNIVERSIDADE.

M.DCC.LXXXXI.

Por Ordem de Sua Mageſtade.

INDICE

Das materias que ſe contém neſtes Elementos.

NOÇOENS preliminares ſobre a natureza dos Numeros, e ſuas differentes eſpecies . . . . pag. 1.
Da Numeraçaõ ordinaria, e da Dizima 3
Das OPERAÇOENS da Arithmetica - - - - - 14
Da Eſpecie de Somar, tanto em numeros inteiros, como em Decimais - - - - - - - - - - - - ibid.
Da Eſpecie de Diminuir, tanto em numeros inteiros, como em decimais - - - - - - - - - - - - 18
Prova do Somar, e Diminuir - - - - - - - - 23
Da Eſpecie de Multiplicar - - - - - - - - 28
Taboada de Pythagoras - - - - - - - - 31
Multiplicaçaõ de hum numero compoſto por hum numero ſimples - 32
Multiplicaçaõ de hum numero compoſto por outro compoſto - - 34
Multiplicaçaõ das partes decimais - - - - - - - 38
Methodo de multiplicar por meio do ſomar - - - - - 43
Uſo da Multiplicaçaõ - - - - - - - - - 45
Da Eſpecie de Repartir - - - - - - - - - 47
Diviſaõ de hum numero compoſto por hum numero ſimples - - 50
Diviſaõ de hum numero compoſto por outro compoſto - - - - 55
Modo de abbreviar a Diviſaõ - - - - - - - - 60
Diviſaõ das partes decimais - - - - - - - - 63
Methodo de Repartir por meio do Somar, e Diminuir - - - 73
Prova da Multiplicaçaõ, e Diviſaõ - - - - - - 76
Prova pela regra dos noves - - - - - - - - 77
Uſo da Diviſaõ - - - - - - - - - - - 81
DOS QUEBRADOS - - - - - - - - - 83
Dos numeros inteiros conſiderados em forma de quebrados - 86
Das mudanças, que ſe podem fazer nos termos de hum quebrado, ſem lhe alterar o valor - - - - - - - - 88
Reducçaõ dos quebrados ao meſmo denominador - - - - - 89
Reducçaõ dos quebrados á expreſſaõ mais ſimples que he poſſivel 96
Outro modo de conſiderar os quebrados, e conſequencias que delles reſultaõ - - - - - - - - - - - - 101
Das Operaçoens Arithmeticas ſobre os quebrados - - - - - 105
De Somar quebrados . . . . ibid.
De Diminuir quebrados 106
De Multiplicar quebrados 107

De

De Repartir quebrados 110
Uso dos quebrados 113
Methodo de abbreviar quebrados por approximaçaõ 116
DOS NUMEROS COMPLEXOS 120
De Somar os numeros complexos 124
De Diminuir os numeros complexos 127
Multiplicaçaõ dos numeros complexos 130
Divisaõ de hum numero complexo por hum numero incomplexo . 140
Divisaõ de hum numero complexo por outro complexo 143
Da formaçaõ dos numeros QUADRADOS, e extracçaõ das suas raizes 145
Da formaçaõ dos numeros CUBICOS, e extracçaõ das suas raizes 162
Methodo geral para extrahir as raizes de qualquer grao que sejaõ 172
Outro methodo particular para extrahir com mais facilidade a raiz cubica 180
DAS RASOENS, E PROPORÇOENS 181
Propriedades das Proporçoens Arithmeticas 190
Propriedades das Proporçoens Geometricas 192
Uso das Proposiçoens antecedentes 200
Da Regra de tres directa, e simples . . . . ibid.
Da Regra de tres inversa, e simples 204
Da Regra de tres composta 205
Da Regra de Companhia 207
Da Regra de falsa posiçaõ 212
Da Regra de liga 216
Outras Regras relativas ás Proporçoens 219
Das Progressoens Arithmeticas 222
Das Progressoens Geometricas 225
DOS LOGARITHMOS 229
Taboa dos Logarithmos dos numeros naturais de 1 até 200 . 232
Propriedades dos Logarithmos 234
Uso dos Logarithmos 236
Dos numeros, cujos Logarithmos se naõ achaõ nas Taboas . 239
Dos Logarithmos, cujos numeros se naõ achaõ nas Taboas . 246
Do Complemento Arithmetico dos Logarithmos, e do seu uso . 252

ELEMEN-

ELEMENTOS DE ARITHMETICA.

NOÇÕES PRELIMINARES

Sobre a natureza dos Numeros, e ſuas differentes eſpecies.

1

DAMOS o nome de *Quantidade*, em geral, a tudo aquillo que he capaz de augmento, ou diminuiçaõ; como he, por exemplo a *extençaõ*, *duraçaõ*, *pezo* &c. Tudo o que he quantidade pertence ao objecto das *Sciencias Mathematicas*. Mas a *Arithmetica*, que he a primeira parte dellas, e ſerve de porta para todas as outras, trata ſómente da quantidade *diſcreta*, que he a que ſe exprime por numeros.

2 A Arithmetica pois he a *Sciencia de Contar*: Ella concidera a natureza, e propriedades dos numeros, e tem por fim enſinar os meios mais faceis, tanto para os repreſentar, como para os compôr e reſolver, que he o que ſe chama *calcular*.

3 Para ſe formar huma idéa exacta dos numeros, he neceſſario ſaber primeiro o que entendemos por *unidade*.

4 A *Unidade* he huma quantidade, que ſe toma (as mais das vezes arbitrariamente) para ſervir de termo de comparaçaõ a todas as outras quantidades da meſma eſpecie. Aſſim, quando dizemos que hum corpo péza *ſinco* libras, a *libra* he a unidade, iſto he, a quantidade, com a qual ſe compara, e pela qual ſe faz idêa do pezo delle. Podiamos igualmente tomar a *onça* para unidade, e entaõ o pezo do meſmo corpo ſeria *oitenta* onças.

5 O *Numero* ſerve pois para exprimir de quantas unidades, ou partes da unidade ſe compõe qualquer quantidade.

Se a quantidade ſe compõe taõ ſómente de unidades, o numero que a exprime ſe chama *inteiro*: porém ſendo compoſta de unidades, e juntamente de partes da unidade, ou ſimpleſmente de partes da unidade, entaõ chamamos o numero *quebrado*, ou *fracçaõ*: Aſſim, *tres e meio* fazem hum numero quebrado, ou fraccionario; e *tres quartas*, huma fracçaõ.

6 O Numero, de que nos ſervimos, ſem determinar a eſpecie das unidades, como quando dizemos ſimpleſmente *tres*, ou *tres vezes*, *quatro*, ou *quatro vezes*, chama-ſe numero *abſtracto*; porém quando declaramos ao meſmo tempo a eſpecie das unidades, como quando dizemos *quatro libras*, *cem tonelladas*, chama-ſe numero *concreto*.

Ha muitas outras eſpecies de numeros, dos quais daremos a definiçaõ ao meſmo tempo que delles houvermos de tratar.

Da Numeraçaõ ordinaria, e da Dizima.

7 A *Numeraçaõ* he a arte de exprimir todos os numeros por huma quantidade limitada de nomes, ou de caracteres. Estes caracteres, que saõ as letras da escritura numerica, chamaõ-se *algarismos*. Naõ he necessario dizer aqui os nomes dos numeros, por ser conhecimento familiar a toda a sorte de pessoas. Quanto ao modo de os representar por algarismos, naõ podemos deixar de explicar com toda a exactidaõ os seus principios.

8 Os caracteres, de que usamos na *Numeraçaõ* actual, e os nomes dos numeros, que elles representaõ, saõ estes: (*)

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Cifra	*hum*	*dous*	*tres*	*quatro*	*sinco*	*seis*	*sete*	*oito*	*nove*

Para exprimir todos os outros numeros com estes mesmos caracteres, se assentou: que de dés unidades se fizesse huma só, a qual se chamasse *dezena*, e que se contasse por dezenas da mesma sorte, que se conta por unidades, isto he, que se contassem *duas* dezenas, *tres* dezenas &c. até *nove*; E que para representar es-

(*) Na Arithmetica vulgar usamos tambem de huma figura, que chamamos *Cifraõ*, a qual se escreve pela maior parte como o *Phi* Grego, e algumas vezes desta fórma U. O seu lugar he entre os *milhares*, e as *centenas*, e serve para ler com mais facilidade os numeros, distinguindo-se á primeira vista a casa dos *milhares*, como em 425U372. Tambem serve de abbreviatura, quando os trés ultimos algarismos saõ cifras. Assim 725U he o mesmo, que 725000.

tas novas unidades se usasse dos mesmos algarismos, com que se representaõ as unidades primitivas, distinguindo-as sómente pelo lugar, que se lhes assinalou á esquerda dellas.

Assim para representar *sincoenta* e *quatro*, que contém *sinco* dezenas, e *quatro* unidades, escreveremos 54. Para representar *sessenta*, que contém hum numero exacto de dezenas, e nenhuma unidade, escreveremos 60; pondo huma cifra na casa das unidades, para mostrar que as naõ há neste numero, e juntamente determinar a letra 6 a significar dezenas. Deste modo podemos contar até *noventa e nove* inclusivamente.

9 Pelo que antes de passarmos a diante, notemos esta propriedade da Numeraçaõ actual, a saber: *Que huma letra posta á esquerda de outra, ou seguida de huma cifra, representa hum numero dés vezes maior, do que havia de representar, se estivesse só.*

10 Por huma convençaõ semelhante contaremos de 99 até *nove centos* e *noventa* e *nove*. Porque de dés dezenas faremos huma unidade, a qual chamaremos *centena*, porque dés vezes dés fazem cem; e contaremos as centenas desde *huma* até *nove*, escrevendo-as com os mesmos algarismos, sómente com a differença de as pôrmos á esquerda das dezenas.

Assim, para exprimir *oito centos* e *sincoenta* e *nove*, que contém *oito* centenas, *sinco* dezenas, e *nove* unidades, escreveremos 859. Se fossem *oito centos* e *nove*, que contém *oito* centenas, e *nove* uuidades, sem dezena alguma, seria necessceſſario eſcrever 809 ; pondo huma cifra na caſa das dezenas , que faltaõ. E ſe tambem faltaſſem as unidades, deveriamos pôr duas cifras ; de ſorte que para aſſentar *oito centos* , eſcreveremos 800.

11 Pelo que notaremos tambem , *Que em virtude da meſma convençaõ , qualquer letra ſeguida de outras duas , ou de duas cifras , moſtra hum numero cem vezes maior , do que moſtraria eſtando ſó.*

12 Com o meſmo artificio contaremos de 999 até *nove mil nove centos e noventa e nove* ; formando de dés centenas huma unidade , que ſe chama *milhar* , porque dés vezes cem fazem mil ; contando eſtas unidades pelo modo , que já diſſemos ; e repreſentando-as com as meſmas letras , ſituadas porém á eſquerda das centenas.

Aſſim , para aſſentar *ſete mil oito centos e ſincoenta e nove* , eſcreveremos 7859 ; para aſſentar *ſete mil e nove* , eſcreveremos 7009 ; e para aſſentar *ſete mil* , eſcreveremos 7000. Donde ſe vé , *Que huma letra ſendo ſeguida de outras tres , ou de tres cifras , moſtra hum numero mil vezes maior , do que moſtraria eſtando ſó.*

13 Continuando por diante do meſmo modo ; fazendo ſempre de dés unidades de qualquer ordem huma ſó unidade ; e eſcrevendo as novas unidades , que ſe vaõ formando , nas caſas conſecutivas , caminhando ſempre para a eſquerda ; chegamos a exprimir , e aſſentar de hum modo uniforme , com os dés algariſmos propoſtos , todos os numeros inteiros , que ſe pódem imaginar.

14 Pa-

14 Para lermos com facilidade, ou dizermos o valor de qualquer numero, que conste de quantos algarismos quizermos, dividillo-hemos em classes de tres letras cada huma, exceptuando a ultima da parte esquerda, que conforme a quantidade das letras de que o numero constar, poderá ser tambem de huma, ou de duas letras. A' primeira, terceira, e todas as mais classes impares, principiando da direita para a esquerda, daremos por sua ordem os nomes seguintes, *unidades*, *milhoens*, *billioens*, *trillioens*, *quatrillioens*, *quintillioens*, *sextillioens* &c; e á segunda, quarta, e todas as mais classes pares, o nome de *milhares*. Feito isto, advertiremos que a primeira letra de cada classe (principiando sempre da parte direita) mostra as unidades proprias da sua classe, conforme os nomes que lhes temos dado, e que a segunda mostra as dezenas, e a terceira as centenas das mesmas unidades respectivas

Entaõ, principiando da parte esquerda, leremos cada huma das classes, como se estivesse só, applicando-lhe no fim a denominaçaõ respectiva das suas unidades. Assim, por exemplo, para declararmos o valor do numero seguinte,

23/	456/	789/	234/	565/	456
milhares	*billioens*	*milhares*	*milhoens*	*milhares*	*unidades.*

Diremos: vinte e tres *mil*, quatrocentos e sincoenta e seis *billioens*; setecentos e oitenta e nove *mil*, duzentos e trinta e quatro *milhoens*; qui-

quinhentas e ſeſſenta e ſinco *mil*, quatrocentas e ſincoenta e ſeis *unidades*. (*)

15 Da *Numeraçaõ*, que temos explicado, e que he de pura convençaõ, ſe ſegue manifeſtamente: Que á medida que ſe vaõ ſeguindo os algariſmos de hum numero da direita para e eſquerda, repreſentaõ unidades conſecutivamente maiores, ſendo ſempre cada huma dellas dés vezes maior que a precedente; e por conſeguinte, Que para fazer hum numero dés, cem, mil vezes maior &c. baſta pôr depois do algariſmo das unidades, huma, duas, tres cifras &c. Pela raſaõ contraria, quando em hum numero ſe caminha da eſquerda para a direita, os algariſmos conſecutivos moſtraõ unidades cada vez menores, ſendo ſempre cada huma dellas dés vezes menor que a precedente.

16 Tal he o artificio da *Numeraçaõ* actual: Ella ſerve de baſe a todos os outros modos de contar, ainda que em muitas artes naõ ſe guarde ſempre a regra de contar unicamente por dezenas, dezenas de dezenas &c.

17 Para aſſentar o valor das quantidades mais pequenas do que a unidade, que ſe tem eſcolhido, divide-ſe eſta em outras unidades mais pequenas. O numero dellas he arbitrario, com tanto que por ellas ſe poſſaõ medir as quantidades,

(*) Nas contas pecuniarias uſamos do termo *conto* em lugar de *milhaõ*; de *conto de contos* em lugar de *milhaõ de milhões* ou de hum *billiaõ*. Naõ dizemos *hum milhaõ de reis* mas *hum conto de reis*, ou ſimpleſmente *hum conto*. Dizemos igualmente *hum conto de ouro*, ou *hum milhaõ de cruzados*. Em tudo o mais naõ contamos ſenaõ por *milhões*, pois naõ dizemos hum *conto*, mas hum *milhaõ* de moedas, de arrobas &c.

des, que queremos moſtrar. Porém o que mais ſe deve procurar neſta ſorte de diviſões, he que ſe façaõ de maneira, que dem aos calculos a facilidade maior, que he poſſivel. Por eſta raſaõ, em lugar de dividir logo a unidade em hum grande numero de partes, que ſejaõ ſufficientes para a avaliaçaõ das mais pequenas quantidades, ſe divide primeiro em hum moderado numero de partes, cada huma das quais ſe divide em outras, e eſtas em outras &c. E eſta he a raſaõ, porque nas moédas ſe divide a *libra* em 20 partes, que ſe chamaõ *ſoldos*; e o *ſoldo* em 12 partes, que ſe chamaõ *dinheiros*. Do meſmo modo nos pezos, divide-ſe a *libra* em 2 *marcos*, o marco em 8 *onças*, e a onça em 8 *oitavas*; de ſorte, que no primeiro caſo ſe faz a diviſaõ por *vintenas*, e por *duzias*: e no ſegundo, por *meios*, e *oitavas* &c.

18 O numero compoſto de partes, que ſe reportaõ do modo ſobredito a differente eſpecie de unidades, chama-ſe *Complexo*, *Denominado*, ou *Heterogeneo*; e ao contrario chama-ſe *Incomplexo* todo aquelle, que involve huma ſó eſpecie de unidades. Aſſim 8^{lb}, ou 8 *libras*, he numero incomplexo; e 8^{lb} $17^{ſ}$ 8^{d}, ou 8 *libras*, 17 *ſoldos*, e 8 *dinheiros*, numero complexo.

19 Cada arte tem o ſeu modo particular de dividir a unidade principal, de que ſe ſerve. As diviſões da *toeſa* naõ ſaõ as meſmas que as da *libra*; as da *libra* ſaõ differentes das do *dia*, e da *hora*; e eſtas differem tambem das do *marco*, e aſſim as mais. De todas ellas moſtraremos o valor, quando tratarmos dos numeros complexos.

20 Porém de todas as diviſóes, e ſubdiviſóes, que ſe pódem fazer da unidade, a que mais contribue ſem duvida alguma para a facilidade dos calculos, he a *diviſaõ decimal*, na qual ſe ſuppoem a unidade dividida em dés partes, cada huma deſtas em outras dés, e aſſim por diante. Della ſe faz hum uſo continuo na practica das Sciencias Mathematicas; e tem a ventagem de que a ſua numeraçaõ, e o ſeu calculo he do meſmo modo, que o dos numeros ordinarios e inteiros, como agora ſe verá.

21 Para aſſentar pois em *partes decimais* as quantidades mais pequenas que a unidade, imagina-ſe a meſma unidade, qualquer que ella ſeja, v. g. *libra*, *toeſa* &c. compoſta de dés partes iguais, aſſim como ſe imagina a *dezena* compoſta de dés *unidades*, ou a *libra* compoſta de vinte *ſoldos*. A eſtas novas unidades, em contrapoſiçaõ das *dezenas*, damos o nome de *decimas*, repreſentamo-las com os meſmos algariſmos; e porque ſaõ dés vezes menores que as unidades principais, dar-lhes-hemos lugar á direita dellas.

Para tirar porém o equivoco que podia haver, tomando-ſe as *decimas* por unidades ſimples, aſſentou-ſe ao meſmo tempo fixar por huma vez a caſa das unidades principais, a que o numero todo ſe reporta, por meio de hum ſinal particular. Para iſſo ſe uſa de huma virgula (ou de hum ponto, ou de huma riſca), a qual ſe poem ao lado direito das unidades, ou entre as unidades e as decimas, que vem a ſer o meſmo. Aſſim, para aſſentarmos *vinte e quatro* unidades

e

e *tres decimas* partes da unidade, efcreveremos defte modo 24,3.

22 Da mefma forte podemos actualmente confiderar as *decimas*, como unidades formadas de outras dés, cada huma dés vezes mais pequena do que ellas; e pela mefma rafaõ de analogia, as affentaremos á direita das mefmas *decimas*. Eftas novas unidades dés vezes mais pequenas que as decimas vem a fer cem vezes mais pequenas que as unidades principais, e por iffo fe chamaõ *centefimas*. Affim, para notar *vinte e quatro unidades, tres decimas, e finco centefimas*, efcreveremos defte modo 24,35.

23 Igualmente podemos conceber as *centefimas*, como formadas de dés partes. Eftas feraõ mil vezes mais pequenas que a unidade principal, e por confeguinte fe chamaráõ *millefimas*; e por ferem dés vezes mais pequenas que as *centefimas* fe affentaráõ á direita dellas. Continuando por diante a dividir do mefmo modo na rafaõ decupla, formaremos novas unidades confecutivas, ás quais daremos os nomes de *decimas-millefimas*, *centefimas-millefimas*, *millionefimas*, *decimas-millionefimas*, *centefimas-millionefimas*, *bimillionefimas* &c. e as affentaremos por fua ordem nas cafas feguintes, caminhando fempre para a direita.

24 As partes da unidade, que acabamos de explicar, faõ as *fracções decimais*, a que os noffos Authores daõ commummente o nome de *Dizima*.

25 O modo de ler, ou dizer o valor dos algarifmos pertencentes á *Dizima*, he como nos

ou-

outros numeros. Depois de ſe haverem lido as letras que eſtaõ á eſquerda da virgula, lem-ſe as letras decimais da meſma ſorte, applicando-lhes no fim o nome das unidades reſpectivas, que competem á ſua ultima caſa. Aſſim, para declarar o valor deſte numero 34,572 diremos, trinta e quatro unidades, e quinhentas e ſetenta e duas *milleſimas*: Se, por exemplo, ſe trataſſe de *toeſas*, diriamos, trinta e quatro *toeſas*, e quinhentas e ſetenta e duas *milleſimas partes* de huma *toeſa*.

A raſaõ diſto he facil de perceber, em ſe advertindo que no numero 34,572 a letra 5 ſe póde tomar indifferentemente por ſinco *decimas*, ou por quinhentas *milleſimas*; porque valendo a *decima* 10 *centeſimas* (n. 22.), e a *centeſima* 10 *milleſimas* (n. 23.), cada *decima* valerá dés vezes dés *milleſimas*, ou 100 *milleſimas*; e aſſim as 5 *decimas* valeráõ 500 *milleſimas*. Pela meſma raſaõ, a letra 7 moſtrará 70 *milleſimas*, porque cada *centeſima* vale 10 *milleſimas* (n. 23.)

26 Quanto á denominaçaõ das unidades reſpectivas da ultima caſa dos algariſmos decimais, ſerá ſempre facil de achar, contando ſobre cada huma das letras por ſua ordem, da virgula para a direita, os nomes ſeguintes: *decimas*, *centeſimas*, *milleſimas*, *decimas-milleſimas*, *centeſimas-milleſimas*, *millioneſimas* &c.

27 No caſo de naõ haver unidades, mas taõſómente partes decimais da unidade, para evitar toda a equivocaçaõ aſſentaremos huma cifra na caſa das unidades. Aſſim, para declarar 125 *milleſimas*, eſcreveremos deſte modo 0,125. Se qui-

quizessemos mostrar 25 *millesimas*, escreveriamos 0,025, assentando huma cifra na casa das *decimas*, naõ sómente para mostrar que as naõ há no dito numero, mas tambem para ficarem os algarismos seguintes no seu devido lugar. Pela mesma rasaõ, querendo declarar 6 *decimas-millesimas*, escreveremos 0,0006 &c.

28 Supposta a intelligencia dos principios precedentes, examinemos as mudanças, que resultaõ no valor de hum numero, quando a virgula se muda do seu lugar.

Como a virgula serve para marcar a casa das unidades, e como o valor de cada hum dos algarismos depende da sua distancia local, e respectiva á mesma casa das unidades; fica evidente, que mudando-se a virgula huma, duas, tres casas &c. para a esquerda, o numero se fará dés, cem, mil vezes &c. mais pequeno, e ao contrario dés, cem, mil vezes &c. maior, se a virgula se adiantar huma, duas, tres casas &c. para a direita.

E com effeito, se tomarmos o numero 4327,5264, e mudarmos a virgula para a casa seguinte á esquerda, de sorte que fique 432,75264; he manifesto, que os *milhares* do primeiro numero, passaõ no segundo para *centenas*, as *centenas* para *dezenas*, as *dezenas* para *unidades*, as *nnidades* para *decimas*, as *decimss* para *centesimas*, e assim por diante. Logo cada parte do primeiro numero, e por conseguinte todo elle, se tornou dés vezes menor, em virtude da mudança da virgula. Pelo contrario, se mudassemos a virgula huma casa para a direita, e escrevessemos

mos 43275,264, os *milhares* do primeiro numero ſe converteriaõ em *dezenas de milhares*, as *centenas* em *milhares*, as *dezenas* em *centenas*, as *unidades* em *dezenas*, as *decimas* em *unidades*, as *centeſimas* em *decimas*, e aſſim por diante; mudança, de que manifeſtamente reſulta hum numero dés vezes maior que o primeiro.

29 Diſcorrendo do meſmo modo acharemos, que mudando a virgula duas, ou tres caſas para a eſquerda, reſulta hum numero cem, ou mil vezes menor; e pelo contrario, cem, ou mil vezes maior, ſe a virgula ſe mudar duas, ou tres caſas para a direita.

30 A ultima obſervaçaõ que faremos ſobre a *Dizima*, he que naõ ſe altéra o valor de hum numero, aſſentando depois da ultima letra decimal quantas cifras quizermos. Aſſim 43,25 he o meſmo que 43,250, ou 43,2500, ou 43,25000. &c.

Porque valendo cada *centeſima* o meſmo que 10 *milleſimas*, ou 100 *decimas-milleſimas* &c., as 25 *centeſimas* valeraõ 250 *milleſimas*, ou 25000 *decimas-milleſimas* &c. Em huma palavra: He o meſmo, como ſe em lugar de 25 moedas de deſaſeis toſtões (25 *piſtoles*) diſſeſſemos 250 *libras de França*; ou em lugar de 25 *quintais*, diſſeſſemos 2500 *arrateis*. (*)

Das

(*) O *quintal* de França tem 100 arrateis. Entre nós o *quintal* commum tem 128 arrateis, e o *quintal* da Caſa da India 112.

Das Operações da Arithmetica.

31 S*Omar*, *Diminuir*, *Multiplicar*, e *Repartir*, saõ as quatro operações fundamentais da Arithmetica, a que os nossos Escritores daõ o nome de *Especies*. Todas as questões, que se pódem propôr sobre os numeros, se reduzem finalmente a praticar alguma destas Especies, ou todas ellas. E por isso convem muito adquirir o habito de as executar com prontidaõ e facilidade, procurando alcançar a rasaõ em que ellas se fundaõ.

32 O fim da Arithmetica, como já dissemos, he ensinar os meios de calcular facilmente os numeros. Estes meios consistem em reduzir o calculo dos numeros compostos ao dos numeros simples, que se exprimem pelo menor numero de letras que he possivel, fazendo por partes todas as operações, como logo mostraremos.

DA ESPECIE DE SOMAR

Tanto em numeros inteiros, como em decimais.

33 S*Omar* naõ he outra cousa mais, do que mostrar o valor total de muitos numeros por meio de hum só, que seja igual a todos juntos. Este numero, que se busca por meio da operaçaõ, chama-se *Soma*; e os numeros que se ajuntaõ, (os quais devem significar todos a mesma especie de unidades) chamaõ-se *Addições*, ou *Parcellas*.

Quan-

Quando os numeros, que ſe haõ de ſomar, ſaõ *digitos*, iſto he, quando naõ ſe eſcrevem com mais do que huma letra, naõ há neceſſidade de regra alguma para achar a ſua ſoma. Quando porém forem numeros compoſtos, iſto he, quando ſe eſcrevem com muitas letras, uſaremos da regra ſeguinte.

Eſcreveremos as *addições* humas debaixo das outras, de ſorte que fiquem unidades debaixo de unidades, dezenas debaixo de dezenas &c., e por baixo de todas paſſaremos huma riſca, que as ſepare, e diſtingua da ſoma.

Entaõ ſomaremos primeiramente todos os algariſmos, que eſtaõ na columna das unidades; ſe a ſoma naõ paſſar de 9, eſcrevella-hemos por baixo; ſe paſſar de 9, como entaõ comprehende dezenas, ſó poremos por baixo o que excede do numero das dezenas, e contaremos eſtas dezenas por outras tantas unidades, e ſomalas-hemos juntamente com os algariſmos da columna ſeguinte. Nella obſervaremos a meſma regra, como na primeira; e aſſim por diante de columna em columna, até chegar á ultima, debaixo da qual eſcreveremos a ſua ſoma inteira, ou conſte de hum, ou de mais algariſmos. Eſta regra ſe entenderá melhor por meio dos exemplos ſeguintes.

Ex-

N

Exemplo I.

SE nos derem para ſomar eſtas duas addições 54925 . . . e 2023, eſcrevellas-hemos do modo que aqui ſe vê.

54925	
2023	
56948	Soma.

E tendo paſſado huma riſca por baixo dellas, começaremos pelas unidades, dizendo: 5 e 3 fazem 8, e eſcreveremos 8 debaixo deſta meſma colunna. Paſſando ás dezenas, diremos: 2 e 2 fazem 4, e eſcreveremos 4 por baixo. Nas centenas diremos, 9 e o fazem 9, e eſcreveremos 9 por baixo. Nos milhares diremos, 4 e 2 ſaõ 6, e eſcreveremos 6 por baixo da riſca. E na colunna ſeguinte diremos finalmente, 5 e o fazem 5, e eſcreveremos 5 na meſma colunna.

He evidente, que o numero achado 56948 he a ſoma dos dous numeros propoſtos, pois que elle contém as unidades, dezenas, centenas, milhares, e dezenas de milhares de ambos elles, as quais ajuntámos por partes na meſma operaraçaõ.

Exemplo II.

SE nos perguntarem a ſoma dos quatro numeros ſeguintes 6903 . . . 7854 . . . 953 ... 7327, aſſentallos-hemos do modo que aqui ſe moſtra.

6903	
7854	
953	
7327	
23037	Soma.

E começando, como no exemplo precedente, pela columna das unidades, diremos: 3 e 4 ſaõ 7, e 3 ſaõ 10, e 7 ſaõ 17; e como neſta ſoma parcial a letra 7 pertence á caſa das unidades onde eſtamos, e a letra 1 á caſa das dezenas, eſcreveremos 7 debaixo da riſca na columna das unidades, e guardaremos 1 para o ſomar com os algariſmos da columna ſeguinte, que he das dezenas.

Paſſando a ella, diremos: 1, que vem da columna precedente, e 5 (porque naõ he neceſſario ter conta da cifra) fazem 6, e 5 fazem 11, e 2 fazem 13. Pela meſma raſaõ eſcreveremos 3 debaixo deſta columna, e levaremos 1 para a ſeguinte, dizendo: 1 e 9 ſaõ 10, e 8 ſaõ 18, e 9 ſaõ 27, e 3 ſaõ 30. Aſſim poremos o em direito deſta columna, e levaremos 3 para diante, dizendo do meſmo modo: 3 e 6 ſaõ 9, e 7 ſaõ 16, e 7 ſaõ 23. Deſte numero 23 aſſentaremos a letra 3 debaixo da columna que temos ſomado; e porque naõ há mais columna para onde levemos a letra 2, a eſcreveremos no lugar ſeguinte para a eſquerda; e concluida a operaçaõ, diremos que ſomaõ as addições propoſtas 23037.

34 Se as addições forem accompanhadas de *Dizma*, como neſta ſe procede do meſmo modo que nos numeros ordinarios, contando ſempre por *dezenas* de caſa em caſa da direita para a eſquerda, a regra para as ſomar he abſolutamente a meſma: tendo ſempre a attençaõ de ajuſtar em huma meſma colunna as unidades da meſma ordem, o que ſe conſeguirá, ficando as virgulas em direitura de alto a baixo.

Exemplo III.

SE quizermos ſomar os tres numeros ſeguintes 72,957 . . . 12,8 . . . 124,03, aſſentallos-hemos como aqui ſe moſtra:

72,957	
12,8	
124,03	
209.787	Soma.

E praticando a regra, como nos exemplos precedentes, acharemos que ſomaõ 209,787.

DA ESPECIE DE DIMINUIR

Tanto em numeros inteiros, como em decimais.

35 DIminuir, he huma operaçaõ, pela qual ſe tira hum numero de outro numero. O que della reſulta chama-ſe *reſto*, *exceſſo*, ou *differença*. Pa-

Para fazer esta operaçaõ, assentaremos o numero que queremos tirar por baixo do outro (que sempre deve ser o maior) do mesmo modo que assentamos as addições na regra de somar. E passando huma risca por baixo delles, iremos tirando da direita para a esquerda cada numero inferior do superior, que lhe ficar correspondente, a saber, as unidades das unidades, as dezenas das dezenas, &c. e escreveremos cada resto debaixo da risca pela mesma ordem, pondo cifra todas as vezes que naõ restar nada.

Quando o algarismo debaixo se achar maior que o de sima, este se augmentará com dés unidades, tomando para isso mentalmente emprestada huma das unidades do algarismo vezinho da parte esquerda, o qual por esta rasaõ se deve tratar como diminuido de huma unidade na operaçaõ seguinte.

Exemplo I.

QUerendo diminuir 5432 de 8954, assentaremos ambos os numeros desta maneira.

8954	
5432	
3522	Resto.

E principiando pela casa das unidades, diremos: quem de 4 tira 2, ficaõ 2, que assentaremos debaixo da risca na mesma casa das unidades. Depois paſſando ás dezenas, diremos : quem de 5 tira 3 , ficaõ 2 , que aſſentaremos debaixo dellas. Na terceira columna : quem de 9 tira 4 , ficaõ 5 , que poremos em direitura della. E na quarta finalmente : quem de 8 tira 5 , ficaõ 3 , que eſcreveremos debaixo do 5 ; e feita a conta , achámos que tirando 5432 de 8954 fica o reſto 3522.

Exemplo II.

QUerendo tirar 7987 de 27646 , aſſentaremos os numeros deſta maneira - - 27646

7987

19659 Reſto.

E como de 6 naõ ſe pódem tirar 7 , ajuntaremos a 6 dés unidades , que ſe formaráõ de huma unidade tirada na caſa ſeguinte ao algariſmo 4 , e diremos : tirando 7 de 16 , ficaõ 9 , que eſcreveremos debaixo do 7. Paſſando ás dezenas , naõ diremos , tirando 8 de 4 ; mas tirando 8 de 3 ſómente , porque do 4 já tiramos 1 na operaçaõ precedente ; e porque tambem de 3 naõ ſe pódem tirar 8 , ajuntaremos da meſma ſorte a 3 dés unidades , tomando para iſſo 1 á letra 6 da eſquerda , e diremos : tirando 8 de 13 , ficaõ 5 , que aſſentaremos debaixo do 8. Paſſando á terceira columna , diremos do meſmo modo : tirando 9 de 5 , naõ póde ſer ; mas tirando 9 de 15 (tomada huma unidade do algariſmo 7 , cómo nas operações precedentes) ficaõ 6 , que eſcreveremos debaixo de 9. Na quarta columna : ti-

tirando 7 de 6, naõ póde ſer, mas tirando 7 de 16, ficaõ 9, que poremos debaixo do 7. E como naõ há nada, que tirar na quinta columna, eſcreveremos debaixo della, naõ 2, porque delle já tiramos 1 para a operaçaõ precedente, mas ſómente 1, que lhe ficou, e aſſim o reſto total ſerá 19659.

36 Eſtando cifra na caſa, donde havemos de tomar a unidade de empreſtimo, naõ a tomaremos della, mas do primeiro algariſmo ſignificativo, que depois della ſe ſeguir. Neſte caſo, aindaque realmente ſe pedem 100, ou 1000, ou 10000 &c., conforme houver huma, duas, ou tres cifras conſecutivas &c: comtudo obraremos ſempre, como no exemplo precedente, ajuntando ſómente 10, ou 1 da caſa vezinha, ao algariſmo neceſſitado. E porque eſtes 10 ſaõ huma parte dos 100, ou 1000 &c., tomados do primeiro algariſmo ſignificativo, para empregarmos os 90, ou 990 &c que reſtaõ, tomaremos as cifras ſeguintes, como ſe cada huma foſſe hum 9. Iſto ſe entenderá melhor por meio do exemplo ſeguinte.

Exemplo III.

	99
SE de - - - - - - - -	20064
quizermos tirar - -	17489
	2575 Reſto.

Primeiramente, tirando 9 de 14, ficaõ 5. Depois, como de 5 (porque do 6 já tomámos 1)

1) naõ ſe pódem tirar 8 , e como naõ podemos tomar 1 da letra ſeguinte que he o , tomállo-hemos do 2 , e valerá 1000 a reſpeito da caſa , onde fazemos á operaçaõ, Deſtes 1000 naõ tomaremos ſenaõ 10 para ajuntarmos a 5 , e diremos , de 15 tirando 8 , ficaõ 7.

E porque dos 1000 que pedimos ſó temos uſado de 10 , ou de 100 ſó temos uſado de 1 , uſaremos do reſto 99 , para delle tirarmos os dous algariſmos ſeguintes , que vem a ſer o meſmo que tomar cada huma das cifras , como ſe foſſe hum 9. Aſſim diremos: quem de 9 tira 4, ficaõ 5 ; quem de 9 tira 7 , ficaõ 2 ; e finalmente , quem de 1 tira 1 , fica o , que naõ he neceſſario aſſentar-ſe , por ſer no ultimo lugar.

37 Se houver *Dizima* nos numeros , ſeguiremos abſolutamente a meſma regra. Porém , para evitar todo o embaraço na applicaçaõ della, faremos com que ambos tenhaõ igual numero de letras decimais , ajuntando as cifras que forem neceſſarias ao que menos tiver ; preparaçaõ , que lhe naõ altéra o valor (n, 30.)

Exem-

Exemplo IV.

De - - - - - - - - - - - -	5403 , 25
Querendo tirar - - -	385 , 6532

Primeiramente ajuntaremos duas cifras á *Dizima* do numero ſuperior. Depois obraremos ſobre os numeros aſſim preparados conforme a regra dos numeros inteiros.

5403 , 2500	
385 , 6532	
5017 , 5968	Reſto.

E feita a operaçaõ , acharemos o reſto 5017 , 5968.

PROVA

Do Somar , e Diminuir.

38 A *Prova* de huma operaçaõ Arithmetica he huma nova operaçaõ , pela qual nos certificamos do reſultado da primeira.

Para provar a conta de *Somar* , ſomar-ſe-haõ de novo todas as colunnas , mudada porém a ordem , iſto he , começando da eſquerda para a direita. O que ſomar a primeira colunna diminuir-ſe-há do membro que lhe correſponde na Soma total , e ſe aſſentará o reſto por baixo , ſe o houver ; eſte como em lugar de dezenas ſe tomará com a letra ſeguinte da meſma Soma para fazer hum

hum novo membro, do qual ſe ha de diminuir o que ſomar a ſegunda colunna; e aſſim por diante até a ultima, onde feita a diminuiçaõ, naõ deve ficar reſto algum.

Aſſim, tendo achado acima que eſtes quatro numeros - - - - - - - - - - - 6903

numeros	6903
	7854
	953
	7327
Somaõ	23037
	03110
	000

Para verificar eſte reſultado, ſomaremos os meſmos numeros, principiando pela eſquerda, deſte modo: 6 e 7 ſaõ 13, e 7 ſaõ 20, os quais tirados de 23, ficaõ 3, que com a cifra, que na ſoma ſe ſegue, ſazem 30. Na ſegunda colunna: 9 e 8 ſaõ 17, e 9 ſaõ 26, e 3 ſaõ 29, e tirados de 30, fica 1, que com a letra ſeguinte 3 fazem 13. Na terceira colunna: 5 e 5 ſaõ 10, e 2 ſaõ 12, e tirados de 13, fica 1, que com a letra ſeguinte 7 faz 17. E na ultima colunna: 3 e 4 ſaõ 7, e 3 ſaõ 10, e 7 ſaõ 17, e tirados de 17, naõ fica nada: donde entenderemos, que a primeira operaçaõ he exacta.

A raſaõ que temos para concluir que a primeira operaçaõ tem ſido bem feita todas as vezes que depois deſta prova naõ reſta nada, he porque tendo tirado ſucceſſivamente todos os milhares, centenas, dezenas, e unidades, de que ella

ella deve conſtar, he neceſſario, que naõ reſte couſa alguma.

39 Para provar a conta de Diminuir, ſoma-ſe o reſto achado por meio da operaçaõ com o numero que ſe diminuio; e ſe a operaçaõ foi bem feita, ha de vir na ſoma o meſmo numero, do qual ſe fez a diminuiçaõ. Aſſim vemos, que no terceiro exemplo acima poſto, a operaçaõ foi exacta; porque ſomando 17489 (que he o numero que ſe diminuio) com o reſto 2565, ſe acha reproduzido na ſoma o numero 20054, do qual aquelle ſe diminuio.

20054
17489
2565
20054

20054

§ A prova vulgar de ambas as operações precedentes coſtuma fazer-ſe pela regra dos *noves fóra*, a qual tem o partido de ſer muito expedita na practica.

Tiraõ-ſe os *noves* de qualquer numero com ſumma facilidade, ſomando os ſeus algariſmos ſucceſſivamente; e chegando a ſoma a 9, lançaſe fóra, paſſando de 9, ſomaõ-ſe tambem mentalmente as ſuas letras, e com o que fica ſe continúa por diante. Deſte modo, para tirar os *noves* do numero 86097546, diremos: 8 e 6, 14, nove fóra, 5; e 7 (porque naõ he neceſſario fallar com a 0, nem com o 9) ſaõ 12, nove fóra, 3; e 5 ſaõ 8, e 4 ſaõ 12, nove fóra, 3; e 6 ſaõ 9, nove fóra, 0.

A

A raſaõ diſto ſerá facil de entender a quem reflectir ſobre os principios da *Numeraçaõ*. Porque v. gr. no numero 6745, a letra 6 vale *mil vezes* 6, iſto he, *novecentas e noventa e nove vezes* e mais *huma vez* 6; porém novecentas e noventa e nove vezes 6 ſaõ *noves* juſtos; logo ſendo lançados fóra, fica *huma vez* 6. Do meſmo modo a letra 7 moſtra *cem vezes* 7, iſto he, *noventa e nove vezes*, e mais *huma vez* 7; e por conſeguinte, lançando fóra *noventa e nove vezes* 7, fica *huma vez* 7. E como tambem a letra 4 vale *nove vezes* e mais *huma vez* 4, lançando fóra *nove vezes* 4, fica *huma vez* 4. Logo ſomando-ſe todas as letras, como ſe todas eſtiveſſem na caſa das unidades, a ſoma 22 ſerá o reſto que fica depois de lançados fóra os *noves* que ſe contem nas dezenas, centenas, e milhares do numero propoſto. E porque eſte reſto ainda comprehende *noves*, pela meſma raſaõ ſe ſomaráõ as ſuas letras, e ſerá 4 o reſto final, que ficará tirados todos os *noves* do numero 6745.

Iſto ſuppoſto: Para prova da conta de *Somar*, tiraõ-ſe os *noves* a todas as addições conſecutivamente, como ſe ellas formaſſem hum ſó numero, e aſſenta-ſe o reſto á margem dellas; e o meſmo ſe faz na ſoma. Se o reſto naõ for o meſmo de ambas as partes, he prova infallivel, que a conta eſtá errada (ſuppondo ſempre que o erro naõ eſteja na operaçaõ da meſma prova); pois naõ he poſſivel, que a ſoma ſeja igual ás addições, quando tirando de ambas as partes os *noves* ficaõ reſtos deſiguais. Porém ſe ficarem de ambas as partes reſtos iguais, naõ he prova infalivel

vel de que a conta eſtá certa, mas muito provavel: convem a ſaber, eſtará certa a conta, ſalvo ſe a ſoma tiver de erro *nove*, ou algum dos multiplos de *nove*; e a raſaõ he, porque na operaçaõ lançamos fóra os *noves*, ſem haver reſpeito ſe lançamos igual numero delles de ambas as partes; e poriſſo naõ he inteiramente ſegura eſta prova. Como porém o erro dos multiplos de *nove* naõ ſuccede quaſi nunca na practica, ſe naõ ſe errar de propoſito deſſa maneira, por eſſa raſaõ ſe dá a conta por certa, quando na prova ſe achaõ reſtos iguais. Aſſim no exemplo acima, tirando os *noves* das addições 6903 . . 7854 . . 953 , . . 7327, fica de reſto 6; e como ſe acha o meſmo na ſoma 23037, julga-ſe com muita probabilidade, mas naõ com certeza, que a conta eſtá bem feita. E he de advertir, que nem o primeiro methodo acima dado, o qual ſe chama *prova real*, tem certeza abſoluta e infalivel; pois he poſſivel, e ainda factivel, que ao tirar da prova ſe commetta na ſoma de huma colunna hum erro igual e ſemelhante ao que ſe commetteo na primeira operaçaõ; e neſſe caſo ſahirá na prova a conta certa, eſtando errada.

Na conta de *Diminuir*, tiraõ-ſe os *noves* ao numero de quem ſe diminuio, e depois aos outros dous numeros juntos. E confórme ficarem de ambas as partes reſtos iguais, ou deſiguais, faz-ſe o meſmo juizo, que indicamos a reſpeito do *Somar*. Deſte modo no exemplo acima poſto, tirando os *noves* ao numero 20054, fica o reſto 2; e como ſe acha o meſmo nos outros dous numeros 17489 e 2565 tomados juntamente, tem-ſe a conta por certa. §§ *DA-*

DA ESPECIE DE MULTIPLICAR
Tanto em numeros inteiros, como em decimais.

40 MUltiplicar hum numero por outro he tomar o primeiro tantas vezes, quantas saõ as unidades do segundo. Assim, por exemplo, multiplicar 4 por 3 naõ he outra cousa, senaõ tomar *tres* vezes o numero 4.

41 O numero, que se ha de multiplicar, chama-se *multiplicando*; o numero, pelo qual se ha de multiplicar, chama-se *multiplicador*; e o numero que resulta da operaçaõ, chama-se *producto*. Os nossos Arithmeticos antigos daõ ao multiplicando o nome de *multiplicaçaõ*. Mas hoje usamos deste termo para significar a mesma operaçaõ do multiplicador.

42 O termo *producto* tem commumente hum sentido muito mais amplo, e geral. Porém neste tratado sómente usaremos delle para significar o resultado da multiplicaçaõ.

O multiplicador, e o multiplicando chamaõ-se tambem *factores* do producto. Assim 3 e 4 saõ factores de 12, porque 3 vezes 4 saõ 12.

43 Pela idéa que temos dado da multiplicaçaõ se vê, que ella se póde absolutamente fazer escrevendo o multiplicando tantas vezes, quantas saõ as unidades do multiplicador, e somando ao depois. Assim, por exemplo, para multiplicar 7 por 3 podiamos escrever deste modo:

$$\begin{array}{r} 7 \\ 7 \\ 7 \\ \hline 21 \end{array}$$

E a Soma 21, que resulta das tres addições, seria o producto.

Como porem este modo de multiplicar seria tanto mais longo e trabalhoso, quanto maior fosse o multiplicador, a regra particular da multiplicaçaõ ensina o methodo de chegar ao mesmo resultado por hum caminho mais breve.

44 Em quanto os numeros se consideraõ *abstractamente*, sem attender ás unidades que elles representaõ, he indifferente o tomar qualquer delles para multiplicando, ou para multiplicador. Por exemplo, querendo multiplicar 4 por 3, tanto faz multiplicar 4 por 3, como 3 por 4; porque o producto sempre será 12. E com effeito 3 vezes 4 mostra o triplo de 1 vez 4; e 4 vezes 3, o triplo de 4 vezes 1: e he evidente, que tanto faz 1 vez 4, como 4 vezes 1. O mesmo raciocinio se póde applicar a quaesquer outros numeros.

45 Sendo porém os numeros *concretos*, he precizo distinguir o multiplicando do multiplicador; principalmente na multiplicaçaõ dos numeros *complexos*, dos quais adiante trataremos.

Esta distinçaõ naõ tem difficuldade. Porque a mesma questaõ mostra sempre, qual he a quantidade que temos intento de repetir, e qual he a que declara as vezes que queremos fazer a repetiçaõ; e a primeira será o *multiplicando*, a segunda o *multiplicador*.

46 Como o multiplicador serve de marcar as vezes que se ha de repetir o multiplicando, será sempre hum numero *abstracto*. Perguntando-se v. gr. quanto haõ de custar 52 *toesas* de obra de

car-

carpinteiro, a raſaõ de 36 *libras* a *toeſa*; facilmente ſe vê, que o *multiplicando* he 36 *libras*, que ſe haõ de tomar 52 *vezes*; preſcindindo de que o numero 52 ſignifique *toeſas* na queſtaõ, ou qualquer outra couſa.

47 Donde ſe ſegue, que ſendo o *producto* formado da addiçaõ repetida do *multiplicando*, deve moſtrar ſempre unidades da meſma natureza que elle. (*)

Tendo feito eſta reflexaõ ſobre as unidades do *producto* e ſeus *factores*, paſſemos ao methodo de o achar.

48 As regras da multiplicaçaõ dos numeros compoſtos reduzem-ſe á multiplicaçaõ dos numeros ſimples, que conſtaõ de hum ſó algariſmo. Por iſſo he neceſſario ſaber primeiro o producto delles, o qual ſe acha facilmente ajuntando cada numero de 1 até 9 nove vezes conſecutivas a ſi meſmo. Tambem ſe póde uſar da *Taboada* ſeguinte, cuja invençaõ ſe attribue a *Pythagoras*.

(*) Deſta regra naõ exceptuamos a multiplicaçaõ Geometrica, na qual tambem as unidades do *multiplicador* ſe devem tomar como *abſtractas*, e o *multiplicando* e *producto* devem moſtrar unidades da meſma eſpecie, como havemos de declarar na Geometria.

Ta-

Taboada de Pythagoras.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8.	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

A primeira columna deſta *Taboada*, tanto vertical, como trânſverſal, fórma-ſe da addiçaõ ſucceſſiva da unidade 1; a ſegunda do numero 2; a terceira do numero 3; e aſſim por diante.

49 Para achar nella o *producto* de dous numeros ſimples, buſca-ſe hum delles v. gr. o *multiplicando* no alto na *Taboada*, e delle ſe deſce pela columna vertical até chegar á caſa fronteira ao multiplicador, que ſe buſca na primeira columna vertical da parte eſquerda; e o numero que na

di

dita casa se achar será o *producto*. Querendo v.gr. saber o producto de 9 por 6, ou quanto he 6 vezes 9, buscaremos o 9 no alto da *Taboada*, e descendo até a casa fronteira ao 6, nella acharemos 54, que he o producto delles.

Eisaqui quanto se requer para entrar na multiplicaçaõ dos numeros compostos.

MULTIPLICAÇAŎ

De hum numero composto por hum numero simples.

50 ESCreve-se o *multiplicador*, que aqui suppomos ser de hum só algarismo, debaixo do *multiplicando*. O lugar delle he arbitrario; mas para fixar as idéas costuma assentar-se na casa das unidades.

E passando por baixo delles huma risca, que distingua os *factores* do *producto*, multipliquem-se as unidades do multiplicando pelo multiplicador; e se o producto constar sómente de unidades, escreva-se na casa das unidades, debaixo da risca; se constar porém de unidades e dezenas, escrevaõ-se sómente as unidades, e guardem-se mentalmente as dezenas para se ajuntarem ao producto da operaçaõ seguinte.

Depois multipliquem-se as dezenas do multiplicando pelo mesmo multiplicador; ajuntem-se ao producto as dezenas que ficáraõ da operaçaõ precedente, se as houver; e escreva-se a soma na casa das dezenas, podendo ser com huma só letra, quando naõ, escrevaõ-se sómente as

uni-

unidades, e guardem-se as dezenas (que saõ realmente centenas) para se ajuntarem ao producto seguinte, o qual tambem ha de constar de centenas.

Continuando deste modo a operaçaõ, até fallar o multiplicador com todos os algarismos do multiplicando, o numero que tivermos escrito será o producto total.

Exemplo

PErgunta-se quantos *pés* fazem 2864 *toesas*. (Cada *toesa* tem 6 *pés*). A questaõ se reduz a tomar 6 *pés* 2864 vezes, ou (que vem a ser o mesmo) a tomar 6 vezes 2864 *pés* (n. 44.)

Escreveremos pois - - - 2864 Multiplicando.
6
―――
17184 - - - Producto.

E principiando pelas unidades, diremos: 6. vezes 4, saõ 24; e escrevendo 4, levaremos 2 para a operaçaõ seguinte. 2º 6 vezes 6 saõ 36, e 2 que vem saõ 38; assentemos 8, e vaõ 3. 3º 6 vezes 8 saõ 48, e 3 que vem saõ 51; assentemos 1, e vaõ 5. 4º 6 vezes 2 saõ 12, e 5 que vem saõ 17; que escreveremos por inteiro, porque naõ ha mais nada que multiplicar.

O numero 17184 he o producto que se pede, ou o numero de *pés*, de que constaõ 2864 *toesas*. Porque nelle se contém 6 vezes 4 unidades, 6 vezes 6 dezenas, 6 vezes 8 centenas, e 6 vezes

2 mil ; e por conſeguinte , 6 vezes todo o numero 2864.

MULTIPLICAÇAÕ
De hum numero compoſto por outro composto.

51 QUando o multiplicador conſtar de muitos algariſmos , por cada hum delles ſe praticará huma operaçaõ , como no primeiro caſo , principiando da direita para a eſquerda.

Primeiramente pois ſe multiplicará todo o multiplicando pelas unidades do multiplicador , e depois pelas dezenas. Eſte producto ſe eſcreverá por baixo do primeiro ; e porque deve moſtrar dezenas , pois por ellas ſe fez a multiplicaçaõ , a ſua primeira letra ſe aſſentará em direitura das dezenas do primeiro , e as outras nas caſas ſeguintes para a eſquerda.

Pela meſma raſaõ o terceiro producto , que ſe fizer multiplicando pelas centenas , ſe porá da meſma ſorte debaixo do ſegundo , adiantando-ſe mais huma caſa para a eſquerda , e o meſmo ſe fará com os outros.

Feitas todas eſtas multiplicaçoens , ſomar-ſe-haõ os productos parciais que ellas deraõ , e a ſoma ſerá o producto total que ſe buſca.

Exem-

Exemplo I.

QUerendo multiplicar - - - 65487
por - - - - - - - - - - 6958

	523896
	327435
	589383
	392922
	455658546 Producto.

Primeiramente multiplico 65487 pelo algarismo 8, que está na casa das unidades do multiplicador, e assento o producto 523896 debaixo da risca, procedendo conforme a regra dada para o primeiro caso (n. 50.)

Depois multiplico o mesmo numero 65487 pela segunda letra 5 do multiplicador, e escrevo o producto 327435 debaixo do precedente, porém de sorte que a primeira letra 5 fique correspondente ás dezenas delle.

Do mesmo modo, multiplicando 65487 pela terceira letra 9 do multiplicador, assento o producto 589383 debaixo do precedente, ficando a letra 3 correspondendo á casa das centenas, porque a letra do multiplicador representa centenas.

Multiplicando finalmente o mesmo numero 65487 pela ultima letra 6 do multiplicador, assento o producto 392922 debaixo do precedente, adiantando-o mais huma casa para a esquerda, para que a sua primeira letra 2 fique na casa dos *milhares*, em que está a letra do multiplicador.

Em fim, de todos eſtes productos faço a ſoma 45565854б, que ſerá o producto de 65487 multiplicados por 6958, ou o valor do numero 65487 tomado 6958 vezes; pois que com effeito ſe tomou 8 vezes na primeira operaçaõ, 50 vezes na ſegunda, 900 vezes na terceira, e 6000 na quarta; e por conſeguinte 6958 vezes em todas quatro.

52 Se o multiplicando, ou o multiplicador, ou ambos acabarem em cifras, abbrevia-ſe a operaçaõ multiplicando ſem fazer caſo dellas, e ajuntando-as depois todas ao producto.

Exemplo II.

HAvendo de multiplicar - - 6500
por - - - - - - - - - - - 350

325
195

2275000 Producto.

Deixando as cifras, multiplico 65 por 35, e ao producto 2275 ajunto as tres cifras que ſe achaõ em ambos os factores.

A raſaõ he, porque o multiplicando 6500 repreſenta 65 centenas; e por iſſo quando ſe multiplica 65, o producto ſe entende ſer de centenas. Do meſmo modo o multiplicador 350 moſtra 35 dezenas, e por eſſa raſaõ quando ſe multiplica por 35, o producto deve ſignificar dezenas. Logo multiplicando-ſe 65 por 35, o producto moſtrará dezenas de centenas, ou milhares;

e por conſeguinte deve acabar em tres cifras, quantas ſaõ as dos factores: e o meſmo raciocinio ſe applicará a todos os outros caſos.

53 Quando ſe encontraõ cifras entre os algariſmos do multiplicador, como a multiplicaçaõ dellas dá hum producto todo de cifras, he eſcuſado aſſentallo. Immediatamente ſe paſſa ao primeiro algariſmo ſignificativo, tendo a advertencia de aſſentar ſempre a primeira letra do producto na caſa correſpondente á letra do multiplicador, que falla com o multiplicando neſſa meſma operaçaõ.

Exemplo III.

SE quizermos multiplicar - 42052
- - - - - - - - - - - - - 3006

252312
126156

126408312 Producto.

Tendo feito a multiplicaçaõ por 6, e aſſentado o producto 252312 no ſeu lugar competente, paſſaremos logo a multiplicar por 3, mas aſſentaremos o producto 126156 de ſorte que repreſente milhares, como a letra do multiplicador, o que ſe conſegue ficando a primeira letra 6 na meſma caſa della.

MUL-

MULTIPLICAÇAÕ

Das partes decimais.

54 NA multiplicaçaõ da *Dizima* obſervar-ſe-ha a meſma regra dos numeros inteiros, ſem fazer caſo da virgula; e depois de achar o producto, delle ſe cortaráõ por meio da virgula tantas letras de *Dizima* para a direita, quantas ſaõ as que tem os factores ambos juntos.

Exemplo I.

Querendo multiplicar ---- 54, 23
por ---------------- 8,3

$$\begin{array}{r} 54{,}23 \\ 8{,}3 \\ \hline 16269 \\ 43384 \\ \hline 450{,}109 \end{array}$$

Multiplicaremos 5423 por 83, e acharemos o producto 450109; e porque no multiplicando há duas letras de dizima, e no multiplicador huma, cortaremos tres letras para a direita com a virgula no dito producto, e ficará 450,109, qual deve ſer

A raſaõ deſta regra he facil de entender, obſervando que ſe o multiplicador foſſe 83, o producto ſeria de *centeſimas*, pois ſe teria repetido 83 vezes o numero 54,23 que moſtra *centeſimas*. Como porém o multiplicador he 8,3; iſto he, hum numero dés vezes menor (n. 28.) que 83,

o proo producto moſtrará unidades dés vezes menores que as *centeſimas*; logo a ſua ultima letra moſtrará *milleſimas* (n. 23.); e por conſeguinte deverá ter tres algariſmos de dizima, quantos ſe achaõ em ambos os factores juntamente.

E o meſmo raciocinio ſe póde applicar a qualquer outro caſo.

Exemplo II.

SE tiveſſemos de multiplicar - - 0,12
por - - - - - - - - - - - - - - - 0,3

0,036

Multiplicar-ſe-hia, como no exemplo precedente, 12 por 3, e ſahira o producto 36. Como porém a regra neſte caſo ordena, que ſe ſeparem com a virgula tres letras para a dizima, ficaria hum principiante embaraçado, vendo que o producto naõ tem mais do que duas. Mas applicando a eſte caſo o raciocinio que fizemos no exemplo precedente, he facil de ver, que ſe deve meter huma cifra entre a virgula e 36. Com effeito, he evidente que ſe multiplicaſſemos 0,12 por 3, o producto devia ſer 0,36; logo multiplicando por 0,3 que he dés vezes menor que 3, o producto ſerá dés vezes menor que 0,36; e por conſeguinte (n. 27.) ſerá 0,036, ſupprindo-ſe o lugar com huma cifra, para haver tantas caſas de dizima no producto, como em ambos os factores juntamente.

55 Como na *Dizima* ſe intenta ordinariamente

to

te a facilidade das operações, ſubſtituindo em lugar de hum calculo rigoroſo huma *approximaçaõ* ſufficiente, e de menos trabalho; naõ ſerá fóra de propoſito, que expliquemos aqui hum meio de abbreviar a multiplicaçaõ, quando nos baſtar ſaber o producto até hum grão determinado de exactidaõ.

Supponhamos v. g. que havemos de multiplicar o numero 45,625957 por 28,635, e que nos baſta hum producto exacto até a caſa das milleſimas. Primeiramente aſſentaremos os numeros, como aqui abaixo ſe moſtra; iſto he, inverteremos a ordem dos algariſmos de hum delles, e o aſſentaremos debaixo do outro de ſorte que o algariſmo que era das unidades fique correſpondendo ao algariſmo do numero ſuperior que eſtiver duas caſas mais para a direita doque aquella, até onde queremos o producto exacto. Entaõ faremos a multiplicaçaõ, advertindo que cada letra do multiplicador naõ há de fallar com as letras do multiplicando que ficaõ para a direita da colunna em que eſtá, e que os productos que ſe forem achando ſe haõ de aſſentar de maneira, que as primeiras letras de todos da parte direita fiquem em huma colunna vertical. Na ſoma deſtes productos riſcaremos as ultimas duas letras á direita, com a advertencia de ajuntar huma unidade á ultima que ficar, ſe as duas que ſe riſcaõ paſſarem de 50. E feito iſto, aſſentaremos a virgula no lugar que pedem os algariſmos da dizima que queremos no producto.

Ex-

Exemplo III.

SE quizermos multiplicar - - - - 45,625957
por - - - - - - - - - - - - - 28,635

E ſe for baſtante achar o producto exacto até a caſa das milleſimas; eſcreveremos os numeros deſta maneira - - - - - - - - 45,625957
53682

91251914
36500760
2737554
136875
22810

1306499(13

E ſerá o producto - - - - - 1306,499

Se fizeſſemos a operaçaõ por extenſo, achariamos o producto 1306,499278695, com o qual ſe ajuſta o precedente até a caſa das milleſimas, como ſe intentava.

Se o multiplicando naõ tiver tantas letras de dizima, quantas ſaõ precizas para que a letra das unidades do multiplicador correſponda á caſa que deve, conforme a regra, ſupprir-ſe-há ajuntando ao multiplicando as cifras neceſſarias.

Ex-

Exemplo IV.

HAvendo de multiplicar - - - 54,236
por - - - - - - - - - - - - - 532,27

e querendo o producto exacto até a casa das centesimas, assentaremos os numeros deste modo:

```
54,236000
    72235
---------
271180000
 16270800
  1084720
   108472
    37961
---------
288681953
```

E o producto será . . . 28868,20 . . . ajuntando huma unidade á ultima letra 9, porque as duas supprimidas 53 excedem 50.

Exemplo V.

QUerendo multiplicar - - 0,227538917
por - - - - - - - - 0,5664178

de ſorte, que o producto venha exacto até o ſetimo algariſmo da dizima, aſſentaremos os numeros deſte modo - - - - 0,227538917

```
        87146650
        ————————
        . . . . . . o
        113769455
         13652334
          1365228
            91012
             2275
             1589
              176
        ————————
        1288820(69
```

E o producto ſerá - - - - 0,1288821

§§ Para quem naõ eſtá exercitado na *Taboada* há hum methodo de *multiplicar* por meio unicamente de *ſomar*, o qual ajuntaremos aqui, e he da maneira ſeguinte.

Forme-ſe á parte huma colunna na qual primeiramente ſe aſſentará o *multiplicando* defronte da unidade; depois ſomar-ſe-há comſigo meſmo, tomando cada algariſmo duas vezes, e a ſoma ſe eſcreverá por baixo defronte do numero 2; eſta ſoma ſe ajuntará outra vez com o meſmo multiplicando, e a nova ſoma ſe aſſentará por baixo da precedente defronte do nu-

me-

mero 3, e aſſim por diante até 10: e ſe defronte de 10 vier huma ſoma que ſeja o meſmo multiplicando aumentado de huma cifra, ſervirá de prova que todas as ſomas da columna eſtaõ certas. Pela conſtrucçaõ deſta columna ſe vê, que nella, ſe tem formado os productos do multiplicando por todos os numeros ſimples de 1 até 9.

Perparada deſte modo a columna, paſſar-ſe-há á multiplicaçaõ, e por cada huma das letras do *multiplicador* ſe tomará o producto que na dita columna lhe correſponde, o qual ſe aſſentará de forma que a primeira letra á direita fique na caſa que compete á letra do meſmo multiplicador; e a ſoma de todos eſtes productos, dará o producto total que ſe buſca. O exemplo ſeguinte moſtrará claramente a fórma da operaçaõ.

Se quizermos multiplicar o numero 79856345 pelo numero 9605843, aſſentállos-hemos ao modo ordinario, como aqui ſe moſtra.

79856345	1 79856345
9605843	2 159712690
	3 239569035
239569035	4 319425380
319425380	5 399281725
638850760	6 479138070
399281725	7 558994415
479138070	8 638850760
718707105	9 718707105
767087512623835	10 . . . 798563450

Depois, transferindo o multiplicando para o

la-

lado direito defronte de 1, o somaremos comsigo mesmo, e assentaremos a soma por baixo, defronte do 2; do mesmo modo ajuntaremos esta soma com o multiplicando, e escreveremos a nova soma por baixo, defronte do 3; e assim por diante.

Feita a colunna como se vê no exemplo, passaremos á multiplicaçaõ. E porque a primeira letra do multiplicador he 3, tomaremos da colunna o numero que lhe corresponde, e o assentaremos no seu lugar. O mesmo faremos a respeito das letras seguintes 4, 8, 5, 6, e 9; e fazendo a soma acharemos o producto 767087512623835.

Este methodo he indirecto, e mais longo que o ordinario; mas na multiplicaçaõ dos numeros grandes tem a vantagem de que naõ requer taõ grande attençaõ, nem he taõ sugeito ao erro. Quando porém tivermos, como succede muitas vezes, de multiplicar successivamente hum mesmo numero por muitos outros, como entaõ feita huma vez a colunna serve para todas as operaçóes, he este methodo naõ sómente o mais expedito, e seguro, mas tambem o mais abbreviado de todos. §§

Uso da Multiplicaçaõ.

56 NAõ he nossa tençaõ mostrar aqui todos os usos que se pódem fazer da multiplicaçaõ. Sómente indicaremos alguns, que serviráõ de encaminhar para todos os mais.

Serve a Multiplicaçaõ, em geral, para achar o vao valor total de muitas unidades, quando se conhece o valor de cada huma. Se v. gr. nos perguntarem 1º *Quanto devem custar 5842 toesas de obra, a rasaõ de* 54^{lb} *a toesa*? Multiplicaremos 54^{lb} por 5842, ou (n. 44.) 5842^{lb} por 54; e teremos 315468^{lb} pelo preço total que se pede. 2º *Quanto pézaõ 5954 pés cubicos* (*) *de agoa, supponde que cada pé tem 72 libras*? Multiplicaremos 72^{lb} por 5954, ou 5954^{lb} por 72; e teremos 428688 libr. pelo pezo total que se pergunta.

57 Serve tambem a multiplicaçaõ para converter as unidades de qualquer especie em unidades de outra especie menor; como, por exemplo, para reduzir as *libras* em *soldos*, e estes em *dinheiros*; as *toesas* em *pés*, estes em *pollegadas*, e estas em *linhas*; os *dias* em *horas*, estas em *minutos*, e estes em *segundos* &c. Muitas vezes há necessidade desta sorte de reducções; e por isso as mostraremos praticadas em alguns exemplos.

Se quizermos converter em *dinheiros* a quantia de 8^{lb} 17^{f} 7^{d} como a *libra* vale 20^{f}, multiplicaremos as 8^{lb} por 20 (n. 52.) e teremos 160^{f}, aos quaes ajuntando os 17^{f}, teremos 177^{f}; depois multiplicaremos estes por 12 (porque cada *soldo* vale 12 *dinheiros*), e teremos 2124^{d}, aos quais ajuntando os 7^{d}, teremos 2131^{d} pelo valor total da quantia 8^{lb} 17^{f} 7^{d} reduzida a *dinheiros*.

Se nos perguntarem quantos minutos tem o an-

(*) O *Pé Cubico* he huma medida que tem hum *pé* de comprido, de largo, e de fundo, pela qual se avalia a capacidade dos corpos, como se verá na Geometria.

anno commum, a ſaber $365^{d}\,5^{h}\,48^{m}$, ou 365 dias, 5 horas, e 48 minutos; como o dia he de 24 horas, multiplicaremos 24^{h} por 365, e ao producto 8760^{h} ajuntaremos 5^{h}; depois multiplicaremos (n. 52.) o total 8765 por 60 (porque a hora tem 60 minutos), ao producto 525900^{m} ajuntaremos os 48^{m}, e o total 525948^{m} ſerá o numero de minutos, que no anno commum ſe contém.

58 O multiplicar abbreviado, que aſſima explicámos (n. 52.), póde ſervir para reduzir prontamente em *libras* qualquer numero de *tonnelladas*. Como a *tonnellada* péza 2000 *libras*, ſe tivermos v. g. 854 *tonnelladas* para reduzir, naõ he neceſſario mais do que multiplicar 854, e pôr tres cifras adiante do producto; e teremos 1708000 pelo numero de *libras* que pézaõ 854 *tonnelladas*. Obſervem os principiantes, que *duplicar*, *triplicar*, *quadruplicar* &c. he o meſmo que multiplicar por 2, 3, 4, &c.

DA ESPECIE DE REPARTIR

Tanto em numeros inteiros, como em decimais.

Repartir, ou *Dividir* hum numero por outro, em geral, naõ he outra couſa mais do que buſcar *quantas vezes* o primeiro delles contêm o ſegundo; e a operaçaõ com que ſe buſca chama-ſe *Repartiçaõ*, ou *Diviſaõ*. Aſſim repartir 12 por 4 he o meſmo que buſcar em 12 quantas vezes há 4; que ſaõ 3 vezes.

O numero que ſe toma para ſe dividir, chamama-ſe *Dividendo*, e vulgarmente *Partiçaõ*; o numero pelo qual ſe divide, chama-ſe *Diviſor*, ou *Partidor*; e o numero, que moſtra as vezes que o dividendo contém o diviſor, chama-ſe *Quociente*.

A Diviſaõ naõ ſe faz ſempre com a tençaõ de ſaber quantas vezes hum numero contèm outro, mas a operaçaõ procede em todos os caſos, como ſe unicamente ſe dirigiſſe a eſſe fim; e por eſta raſaõ he, que ella ſe póde conſiderar em geral, como huma operaçaõ pela qual ſe acha quantas vezes o dividendo contém o diviſor (*).

§§ Pela noçaõ precedente da *Diviſaõ* ſe entenderá facilmente, que ella ſe póde fazer por meio da *Subtracçaõ*, tirando ſucceſſivamente o diviſor do dividendo; pois he evidente, que quantas vezes delle ſe puder tirar, tantas nelle ſe contém. Aſſim para dividir 21 por 7 podemos obrar deſtemodo:

$$\begin{array}{rl} 21 & \\ \underline{\ \ 7} & \\ 14 & \text{- - - 1º reſto.} \\ \underline{\ \ 7} & \\ 7 & \text{- - - 2º reſto.} \\ \underline{\ \ 7} & \\ 0 & \text{- - - 3º reſto.} \end{array}$$

E ten-

(*) Na pratica vulgar conſidera-ſe o dividendo, como huma quantia que ſe há de repartir em partes iguais por tantos *companheiros*, quantas ſaõ as unidades do partidor, ás quais ſe coſtuma dar o meſmo nome de *companheiros*; e no quociente ſe procura ſaber quanto cabe a cada hum delles.

E tendo achado, que tirando-ſe 3 vezes conſecutivas o diviſor 7 do dividendo 21, naõ ſobrou nada, conheceremos que 7 ſe contém *tres vezes* exactamente em 21; e por conſeguinte, que o quociente he 3.

Porém como eſte methodo ſeria tanto mais longo e trabalhoſo, quanto maior foſſe o quociente, pela regra particular da *Diviſaõ*, como por hum *Diminuir abbreviado*, chegamos com maior prontidaõ, e facilidade alcançar o meſmo reſultado. §§

Da meſma noçaõ ſe ſegue evidentemente; *Que multiplicando-ſe o diviſor pelo quociente deve vir no producto o dividendo*; porque niſſo ſe naõ faz outra couſa mais do que tomar o diviſor tantas vezes quantas elle ſe contém no meſmo dividendo; e iſto he geral, quer ſeja o quociente numero inteiro, quer fraccionario.

Quanto á eſpecie das unidades que o *quociente* deve moſtrar, he de advertir que naõ póde determinar-ſe nem pela eſpecie das unidades do dividendo, nem do diviſor, nem de ambos juntos. Porque ficando o dividendo, e o diviſor ſempre os meſmos, o quociente, que ſerá tambem ſempre o meſmo numericamente, póde ſer muito differente em quantò á eſpecie das ſuas unidades, conforme a natureza da queſtaõ o determinar,

Por exemplo: ſe procurarmos ſaber quantas vezes 8^{lb} contém a 4^{lb}, o quociente ſerá hum numero *abſtracto*, que moſtrará 2 *vezes*. Porém ſe quizermos ſaber quanta obra ſe há de fazer por 8^{lb}, a raſaõ de 4^{lb} a *toeſa*, o quociente ſerá hum

D nu-

numero *concreto*, que mostrará 2 *toesas*, cuja especie naõ diz respeito algum ás unidades do dividendo, nem do divisor. Por onde se vê, que sómente a questaõ que conduz á divisaõ actual de que se trata, he a que decide a natureza das unidades, que deve mostrar o quociente.

DIVISAŎ

De hum numero composto por hum numero simples.

60 A Operaçaõ, que agora entramos a mostrar, suppoem que cada hum sabe achar por si mesmo quantas vezes se contem hum numero simples em outro simples, ou composto taõ sómente de dous algarismos. Este conhecimento se adquire ao mesmo tempo que se apprendem os productos dos numeros simples; faltando o qual, póde fazer-se uso da *Taboada*, que acima temos proposto (n. 48.). Se v. gr. quizermos saber em 74 quantas vezes há 9, buscaremos o divisor 9 no altó da *Taboada*, e pela sua colunna vertical desceremos até encontrar ou o numero dado 74, ou o que for proximamente menor, como neste caso he o numero 72; e á casa delle corresponderá na primeira colunna vertical á esquerda o quociente, que he neste exemplo o numero 8.

Isto supposto, eis-aqui o methodo de executar a *Divisaõ* de hum numero composto por hum numero simples, á qual se dá vulgarmente o nome de *meio partir*.

Assente-se o divisor ao lado direito do dividendendo, ſeparando-os por meio de huma riſca perpendicular. Por baixo do diviſor ſe paſſe tambem huma riſca, debaixo da qual ſe eſcreveráõ os algariſmos do quociente á medida que ſe forem achando.

Entaõ tomar-ſe-há o primeiro algariſmo á eſquerda do dividendo, ou os primeiros dous, quando o primeiro ſó for menor que o diviſor; e fazendo delles hum dividendo parcial, buſcar-ſe há quantas vezes o diviſor nelle ſe contém, e o numero das vezes ſe aſſentará no lugar do quociente. O quociente achado ſe multiplicará pelo diviſor, e o producto ſe aſſentará debaixo do reſpectivo dividendo, do qual ſe diminuirá; e ao reſto ſe ajuntará a letra ſeguinte do dividendo principal, e ſe formará outro dividendo parcial.

Neſte ſe praticará a meſma operaçaõ. A letra, que ſe achar para o quociente, ſe aſſentará á direita da primeira; depois ſe multiplicará pelo diviſor, e o producto ſe eſcreverá debaixo do reſpectivo dividendo parcial, do qual ſe diminuirá; e ao reſto ſe ajuntará a letra ſeguinte do dividendo principal, e ſe formará de novo outro dividendo parcial, com o qual ſe praticará a meſma operaçaõ; e aſſim por diante, até ſe acabarem as letras do dividendo.

Eſta Regra ſe entenderá mais claramente por meio dos exemplos ſeguintes.

Exemplo I.

SE quizermos repartir 8769 por 7, aſſentaremos eſtes dous numeros como aqui ſe moſtra:

Dividendo	Diviſor
8769	7
7	
17	1252 $\frac{5}{7}$ Quociente.
14	
36	
35	
19	
14	
5	

E começando pela eſquerda do dividendo, deveriamos dizer em 8 *mil* quantas vezes há 7; mas baſta que digamos em 8 quantas vezes há 7? há 1; e aſſentaremos 1 no quociente. Eſte 1 he realmente *mil*; mas naõ he neceſſaoio attender ao ſeu valor local, pois que elle ſerá determinado pelas letras ſeguintes do quociente, que havemos de achar. Agora multiplicaremos o quociente 1 pelo diviſor 7, e aſſentaremos o producto 7 debaixo do dividendo parcial 8; e feita a diminuiçaõ, fica 1. Eſte reſto 1 he a parte de 8 que naõ foi dividida, e vale por huma *dezena* a reſpeito da letra 7 que ſe ſegue no dividendo, a qual abaixaremos para junto do dito reſto, e te-

retemos outro dividendo parcial 17.

Entaõ diremos do meſmo modo: em 17 que vezes há 7? ha 2; e eſcreveremos 2 no quociente á direita da outra letra 1 que achamos pela primeira operaçaõ. Depois multiplicaremos o novo quociente 2 pelo diviſor 7, e eſcreveremos o producto 14 debaixo do membro dividendo 17; e feita a diminuiçaõ, teremos o reſto 3, que he a parte do dividendo que naõ foi repartida: pelo que lhe ajuntaremos a letra ſeguinte 6, e teremos o novo dividendo parcial 36.

Continuando a meſma operaçaõ, diremos: em 36 que vezes há 7? há 5; e aſſentaremos 5 no quociente. Depois multiplicando 5 pelo diviſor 7 tiraremos o producto 35 do dividendo 36, e ficará o reſto 1, ao qual ajuntaremos a letra ſeguinte do dividendo, que he a ultima 9, e teremos ainda para partir 19. Pelo que diremos: em 19 que vezes há 7? há 2; e eſcreveremos 2 no quociente. Depois multiplicaremos o meſmo 2 pelo diviſor 7, e diminuindo o producto 14 do dividendo 19, ficará por ultimo o reſto 5.

Aſſim achamos pois, que 8769 contém a 7 tantas vezes, quantas moſtra o quociente, iſto he, 1252 vezes; e que álem diſſo ainda reſtaõ 5.

Pelo que reſpeita a eſte reſto, baſtará por ora dizer, que ſe aſſenta á direita do quociente, aſſim como ſe vê no exemplo; iſto he, que ſe eſcreve em cima de huma riſca, ficando-lhe o diviſor por baixo; expreſſaõ que quer dizer *ſinco ſetimas* partes da unidade, como adiante moſtraremos, quando tratarmos dos *quebrados*.

61 Se no decurſo da operaçaõ ſe achar algum di-

dividendo parcial menor que o diviſor, o qual por conſeguinte o naõ chegará a conter 1 vez, pôr-ſe-há cifra no quociente, e deixando a multiplicaçaõ e ſubtracçaõ ſe ajuntará a letra ſeguinte do dividendo principal, e ſe formará outro dividendo parcial, com o qual ſe continuará a operaçaõ.

Exemplo II.

SUpponhamos que havemos de repartir 14464 por 8.

14464	8
8	1808
64	
64	
064	
64	
o	

Neſte exemplo faremos o primeiro dividendo parcial das duas letras 14, porque a primeira 1 he menor que o diviſor.

Entaõ partindo 14 por 8, cabe ſómente 1, que eſcreveremos no quociente, e fazendo a multiplicaçaõ e ſubtracçaõ, fica o reſto 6, ao qual ajuntaremos a letra ſeguinte do dividendo 4, e teremos para partir 64.

Partindo pois 64 por 8, cabem 8, que aſſentaremos no quociente, e fazendo a multiplicaçaõ e ſubtracçaõ, naõ fica nada de reſto; pelo que eſcreveremos cifra, e para junto della traremos

mos a letra ſeguinte do dividendo 6. Agora como temos o dividendo parcial 6, e eſte he menor que o diviſor, aſſentaremos o no quociente, e abaixaremos immediatamente a letra ſeguinte do dividendo 4, com a qual ſe formará o novo dividendo parcial 64. Entaõ partindo 64 por 8, cabem 8, que eſcreveremos no quociente, e fazendo a multiplicaçaõ e ſubtracçaõ, naõ fica reſto algum. E por iſſo entenderemos, que 8 ſe contém em 14464 exactamente 1808 vezes.

DIVISAÕ

De hum numero compoſto por outro compoſto.

62 QUando o diviſor conſtar de muitos algariſmos, que he o caſo a que vulgarmente ſe da o nome de *partir por inteiro*, praticar-ſe-há a Diviſaõ deſta maneira.

Tomem-ſe da parte eſquerda do dividendo tantas letras, quantas baſtarem para fazer hum dividendo parcial, que naõ ſeja menor que o diviſor. E porque ſeria muito difficultoſo buſcar, quantas vezes o dito dividendo contém o diviſor inteiro, como no primeiro caſo; baſtará achar quantas vezes a primeira letra do diviſor á eſquerda ſe contém na parte ſuperior do meſmo dividendo, que lhe correſponde; e o quociente aſſim achado ſe aſſentará no ſeu lugar.

Entaõ multiplicar-ſe-há o meſmo quociente por todo o diviſor; e conforme ſe forem achando as letras do producto, ſe iraõ aſſentando debaibaixo do dividendo parcial da direita para a eſquerda. Depois tirar-ſe-há eſte producto do meſmo dividendo reſpectivo, e ao reſto ſe ajuntará a letra ſeguinte do dividendo principal, com a qual ſe formará outro dividendo parcial, que ſe repartirá da meſma maneira; e aſſim por diante.

Paſſemos a illuſtrar eſta regra com alguns exemplos, e a prevenir juntamente os caſos, em que póde haver algum embaraço

Exemplo I.

QUerendo repartir 75347 por 53.

75347	53
53	$1421\frac{34}{53}$
223	
212	
114	
106	
87	
53	
34	

Faremos o noſſo primeiro dividendo parcial dos dous algariſmos 75, porque eſtes baſtaõ para elle naõ ſer menor que o diviſor; e em lugar de dizermos em 75 que vezes há 53, diremos ſómente em 7 que vezes há 5? há 1, que eſcreveremos no quociente.

De-

Depois multiplicaremos o quociente 1 por todo o divisor 53, e assentaremos o producto debaixo do dividendo respectivo 75; do qual o diminuiremos, e ficará o resto 22, que com a letra seguinte do dividendo 3 formará outro dividendo parcial 223. Neste tambem, em lugar de dizer em 223 que vezes há 53, diremos sómente, em 22 que vezes há 5? há 4, que assentaremos no quociente; e multiplicando 4 pelo divisor, escreveremos o producto 212 debaixo do dividendo respectivo 223, do qual o diminuiremos, e ao resto 11 ajuntaremos a letra seguinte 4 do dividendo principal, e teremos para repartir de novo 114. Partindo pois 11 por 5, cabem 2 que assentaremos no quociente; depois multiplicaremos pelo divisor; tiraremos o producto 106 do dividendo respectivo 114; ao resto 8 ajuntaremos a letra seguinte do dividendo 7; e teremos o novo dividendo parcial 87. E fazendo nelle finalmente a mesma operaçaõ, acharemos 1 para o quociente; e feita a multiplicaçaõ e subtracçaõ, ficará o resto 34, que assentaremos á direita do quociente do modo que acima indicámos (n.60.)

63 Na operaçaõ precedente devia, em rigor, buscar-se quantas vezes cada hum dos dividendos parciais continha ao divisor inteiro. Porém como esta indagaçaõ pediria grande força de attençaõ, contentamo-nos, do modo que se tem visto, com buscar quantas vezes a parte maior do dividendo contem a maior parte do divisor. He verdade, que deste modo naõ acertamos sempre com o verdadeiro algarismo, que deve assentar-se no quociente, pois procedemos meramente

te por huma tentativa. Mas , alem de que esta tentativa conduz pela maior parte ao conhecimento do verdadeiro quociente , e quando naõ , sempre nos indica hum algarismo pouco distante delle , a multiplicaçaõ , que immediatamente se faz , logo mostra o defeito que se tem commettido , e serve para o corrigir.

E com effeito , se o dividendo contivesse realmente o divisor *tres vezes* , e nós , julgando pelas primeiras letras de ambos elles , entendessemos que o continha *quatro* ; he facil de ver , que multiplicando o divisor por 4 achariamos hum producto maior que o dividendo , por quanto se tomaria o divisor mais vezes do que realmente se continha no mesmo dividendo , e por conseguinte naõ poderia fazer-se a subtracçaõ, Neste caso se diminuirá o quociente suposto de huma , duas unidades &c , até que venha hum producto que possa diminuir-se do respectivo dividendo. Ao contrario , se no mesmo caso figurado puzessemos 2 no quociente , poderia sim diminuir-se o producto do dividendo , mas ficaria hum resto maior doque o divisor , por onde se conheceria que elle se continha no dividendo mais vezes , do que se tinha julgado ; e por conseguinte , que o quociente 2 se tinha tomado menor , doque devia ser. Com o exercicio se adquire em pouco tempo o habito de prever quanto se deve augmentar , ou diminuir o algarismo achado pela primeira prova no caso de se achar defeituoso.

Exem-

Exemplo II.

HAvendo de repartir 189492 por 375:

$$
\begin{array}{r|l}
189492 & 375 \\
1875 & \overline{\phantom{505\ \tfrac{117}{375}}} \\
\hline
1992 & 505\ \frac{117}{375} \\
1875 & \\
\hline
117 &
\end{array}
$$

Em primeiro lugar: Tomaremos as primeiras quatro letras do numero propoſto para fazermos dellas o noſſo primeiro dividendo parcial, porque as tres primeiras fazem hum dividendo menor que o diviſor.

Depois, diremos: em 18 quantas vezes há 3? há 6 realmente, naõ havendo reſpeito ás letras ſeguintes; como porém multiplicando o diviſor por 6, ſahe hum producto maior que o dividendo reſpectivo, aſſentaremos ſómente 5 no quociente, e feita a multiplicaçaõ e ſubtracçaõ, ficará o reſto 19, ao qual ajuntaremos a letra ſeguinte do dividendo principal 9, e teremos de novo para repartir 199.

E como em 1 naõ há vez alguma 3, aſſentaremos huma cifra no quociente, e teremos a letra ſeguinte do dividendo principal 2, com a qual ſe formará o novo dividendo parcial 1992. Repetindo nelle a meſma operaçaõ, acharemos que 3 ſe contém em 19 realmente 6 vezes; mas pela raſaõ já declarada eſcreveremos ſómente 5 no quociente; e acabando a operaçaõ, ſobraraõ 117.

64 Eiſ-aqui huma reflexaõ, que em muitos caſos nos póde livrar de fazermos tentativas inuteis. Como pela maior parte ſe erra no juizo que ſe faz do quociente, quando a ſegunda letra do diviſor paſſa muito de 5; neſſe caſo accreſcentaremos mentalmente 1 á primeira letra do meſmo diviſor, e veremos quantas vezes aſſim augmentada ſe contém na parte correſpondente do dividendo. Porque deſte modo faremos hum juizo mais ſeguro do algariſmo, que devemos aſſentar no quociente.

Exemplo III.

SUpponhamos, que nos daó para repartir 1832 por 288.

$$\begin{array}{r|l} 1832 & 288 \\ 1728 & \\ \hline 104 & 6\frac{104}{288} \end{array}$$

Neſte caſo em lugar de dizer em 18 que vezes há 2, diremos: em 18 que vezes há 3. Porque o diviſor 288 ſe chega muito mais para 300 do que para 200. Aſſim acharemos que há 6, e com effeito eſte he o verdadeiro quociente; e da outra ſorte achariamos 9, e por conſeguinte fariamos tres tentativas inuteis, paſſando de 9 a 8, de 8 a 7, e de 7 a 6.

Modo de abbreviar a Diviſaõ.

65 PAra que melhor ſe entendeſſe o methodo da operaçaõ antecedente, mandámos até agora eſcrever ſempre os productos, que re-

reſultavaõ da multiplicaçaõ do diviſor pelos algariſmos do quociente que ſe hiaõ achando, debaixo dos dividendos reſpectivos, dos quais ſe haviaõ de diminuir. Porém como na Arithmetica ſe deve attender muito a reduzir, e abbreviar as operações, quanto he poſſivel; devemos notar, que podemos deixar de eſcrever os ditos producctos, fazendo a ſubtracçaõ juntamente com a multiplicaçaõ. O exemplo ſeguinte baſtará, para moſtrar como iſto ſe executa.

Exemplo.

QUerendo repartir 756984 por 932.

756984	932
1138	
2064	$812\frac{200}{932}$
200	

Tomaremos as quatro primeiras letras do dividendo, porque as tres fazem hum membro menor que o diviſor; e partindo 75 por 9, acharemos que cabem 8, os quais aſſentaremos no quociente. Entaõ em lugar de multiplicar 8 por 932, e eſcrever o producto debaixo do membro 7569, para delle ſer diminuido; faremos tudo junto, dizendo: 8 vezes 2 ſaõ 16, que tirados de 9, naõ póde ſer, mas tirados de 19, ficaõ 3, que eſcreveremos debaixo do 9.

Para deſcontar a dezena, que tomamos da letra 6, a fim de que o 9 valeſſe 19, em lugar de tratarmos a meſma letra 6 como diminuida de hu-

huma unidade, da maneira que praticámos na conta de *Diminuir*, guardaremos essa unidade para a ajuntarmos ao producto seguinte. Assim continuando a operaçaõ, diremos, 8 vezes 3 saõ 24, e 1 que guardamos saõ 25, que tirados de 6, naõ póde ser, mas tirados de 26, fica 1, que assentaremos debaixo do 6. Deste modo fica descontada a unidade, que tinhamos pedido ao 6, porque lhe tiramos huma de mais na diminuiçaõ que acabamos de fazer; e do mesmo modo descontaremos os 2 que agora tomamos do 5 para que o 6 valesse 26. Assim diremos: 8 vezes 9 saõ 72, e 2 que vem (porque na operaçaõ antecedente diminuimos de 26) saõ 74, que tirados de 75, fica 1, que escreveremos debaixo do 5.

Ao resto 113 ajuntaremos a letra seguinte do dividendo 8, e continuaremos do mesmo modo, dizendo: em 11 que vezes há 9? há 1, que assentaremos no quociente; depois, 1 vez 2 he 2, que tirados de 8 ficaõ 6, que assentaremos debaixo do 8; 1 vez 3 he 3, que tirados de 3 naõ fica nada, e porisso poremos cifra debaixo do 3; 1 vez 9 he 9, que tirados de 11, ficaõ 2. que assentaremos por baixo. Ao resto 206 ajuntaremos a letra seguinte do dividendo que he 4, e diremos: em 20 quantas vezes há 9? há 2, que assentaremos no quociente; e fazendo a multiplicaçaõ, diremos: 2 vezes 2 saõ 4, que tirados de 4, fica 0; 2 vezes 3 saõ 6, que tirados de 6, fica 0; e em fim 2 vezes 9 saõ 18, que tirados de 20, ficaõ 2.

66 Póde succeder no decurso das divisões parciais, de que consta esta operaçaõ, que o dividen-

dendo contenha o divisor mais de 9 vezes. Neste caso entenderemos, que na operaçaõ precedente se tomou para o quociente huma letra menor do que devia ser, pois que a ella certamente pertencerá a dezena, que se achar involvida no quociente actual.

67 Se o dividendo, e o divisor, acabarem ambos em cifras, antes de fazer a divisaõ pódem cortar-se em ambos tantas, quantas forem as daquelle que menos tiver. Por exemplo, para repartir 8000 por 400, dividiremos sómente 80 por 4; porque he evidente, que 80 centenas contem a 4 centenas tantas vezes, quantas 80 unidades contém a 4 unidades.

DIVISAÕ
Das partes decimais.

PAra que nos naó demoremos com distinçóes escusadas, reduziremos a divisaõ dos numeros accompanhados de *dizima* a huma só regra, que he desta maneira:

Preparem-se os numeros propostos de sorte que tenhaõ ambos igual numero de algarismos decimais, ajuntando as cifras necessarias ao que menos tiver, o qual por isso naõ muda de valor (n. 30.); supprima-se a virgula, e pratique-se a divisaõ como se os numeros fossem inteiros; e o quociente será o que se busca, sem haver nelle algarismos decimais.

Exem-

Exemplo I.

SE houvermos de repartir 12,52 por 4,3;

$$\begin{array}{r|l} 1252 & 430 \\ \cline{2-2} 392 & \\ & 2\,\frac{392}{430} \end{array}$$

Primeiramente reduziremos os numeros dados a igual numero de decimais, ajuntando huma cifra ao diviſor, que ficará 4,30. Depois ſupprimindo a virgula partiremos 1252 por 430, e acharemos o quociente 2, e o reſto 392; e por conſeguinte o quociente total $2\frac{392}{430}$

Porém, como uſamos da *dizima* com o fim principal de evitarmos as fracções ordinarias, em lugar de aſſentarmos o reſto em fórma de fracçaõ, como fizemos no exemplo dado, continuaremos a operaçaõ para acharmos a *dizima* do quociente, como ſe moſtra no exemplo ſeguinte.

Exemplo II.

$$\begin{array}{r|l} 1252 & 430 \\ \cline{2-2} 3920 & 2{,}9116\ \&c. \\ 500 & \\ 700 & \\ 2700 & \\ 120 & \end{array}$$

Tendo achado o quociente inteiro 2, como no primeiro exemplo, ao reſto 392 ajuntaremos hu-

huma cifra, que realmente o tornará dés vezes maior, e teremos para partir 3920. Feita a operaçaõ, acharemos a letra 9 para o quociente, a qual assentaremos, tendo primeiro marcado o lugar das unidades por meio da virgula, que poremos junto ao 2. Deste modo o 9 mostrará sómente *decimas*, e desfará o que se tinha supposto no dividendo, fazendo-se dés vezes maior; pois he manifesto, que, se partindo 3920 por 430 vem ao quociente 9, partindo 392 por 430 deve ser o quociente dés vezes menor, isto he, 0,9. Agora fazendo a multiplicaçaõ, e subtracçaõ, teremos o resto 50, ao qual ajuntaremos tambem outra cifra, que vem a ser o mesmo, como se ao principio tivessemos ajuntado duas ao dividendo. Mas porque a letra 1, que havemos de achar para o quociente, se há de assentar á direita do 9 na casa das *centesimas*, com isso desfaremos a supposiçaõ, que tinhamos feito, de hum dividendo cem vezes maior.

Deste modo continuaremos a operaçaõ até onde quizermos, havendo sempre respeito á natureza da questaõ, a qual mostrará quantos algarismos de *dizima* saõ bastantes. Bem entendido: que se pararmos em dous, naõ poderá chegar o defeito do quociente a huma *centesima* parte da unidade: nem a huma *millesima*, se pararmos no terceiro algarismo decimal; e assim por diante; pois he manifesto, que naõ póde accrescentar-se, nem diminuir-se huma unidade ao ultimo algarismo achado, sem que o quociente se faça maior, ou menor, doque deve ser.

Da mesma maneira se pódem converter em

dizima todos os reſtos da Diviſaõ, quando ella ſe pratica em numeros inteiros.

Reſta moſtrar a raſaõ porque ſupprimindo a virgula tanto no dividendo, como no diviſor, naõ ſe altera nada o quociente, no caſo de haver igual numero de letras decimais em ambos elles. Iſto ſerá facil de entender, advertindo que no exemplo aſſima o dividendo 12,52 vale o meſmo que 1252 *centeſimas*, e o diviſor 4,30 o meſmo que 430 *centeſimas*, porque as unidades principais contém cem *centeſimas* (n. 22.); e he claro, que 1252 *centeſimas* contém 430 *centeſimas* tantas vezes, quantas 1252 unidades contém a 430 unidades: logo he eſcuſado attender á virgula, todas as vezes que ambos os numeros acabaõ na meſma caſa decimal.

69 Algumas vezes, conforme a natureza da queſtaõ, baſta achar o quociente até hum gráo determinado de exactidaõ. Neſtes caſos podemos abbreviar muito a operaçaõ, uſando do methodo, que agora moſtraremos.

Primeiramente ſupponhamos, que nos he baſtante o quociente exacto até a caſa das unidades (porque depois moſtraremos como ſe deve applicar o meſmo methodo a outros caſos). Eiſaqui a regra.

Supprimaõ-ſe no dividendo tantas letras, menos huma, da parte direita, quantas ſaõ as do diviſor; e depois pratique-ſe a diviſaõ ao modo ordinario. Se naõ ficar reſto, ajuntem-ſe ao quociente tantas cifras, quantas ſaõ as letras ſupprimidas no dividendo, e teremos o quociente pedido. Porém ficando algum reſto, eſte ſe partirá rá pelo diviſor, no qual para iſſo ſe ſupprimirá o ultimo algariſmo á direita. Feita eſta diviſaõ, o reſto que ficar ſe tornará a partir pelo diviſor da operaçaõ precedente; ſupprimindo-lhe o ultimo algariſmo á direita; e aſſim por diante. A praxe deſta regra ſe facilitará por meio dos exemplos ſeguintes.

Exemplo I.

QUerendo repartir 8789236487 por 64423, e baſtando ſaber o quociente exacto até a caſa das unidades, deixaremos os quatro ultimos algariſmos do dividendo, porque o diviſor tem ſinco, e partiremos 878923 por 64423.

```
  878923 | 64423
  234693 | 136430
   41424 ... 6442
    2772 ... 644
     196 ... 64
       4 ... 6
```

E tendo achado pela regra ordinaria o quociente 13, e o reſto 41424; dividiremos eſte por 6442, ſupprimindo o ultimo algariſmo á direita no diviſor primitivo; e acharemos a letra 6 para o quociente, a qual aſſentaremos á direita das duas 13 antecedentemente achadas; e ficará o reſto 2772. Do meſmo modo partiremos eſte por 644, ſupprimindo mais huma letra no diviſor primitivo, e virá ao quociente 4, ficando o reſto 196. Partindo eſte por 64, caberá ao quociente 3, e ficará o reſto 4; e finalmente partindo eſte por 6, tocará cifra ao quociente, a qual nelle aſſentaremos. Aſſim repartindo 8789236487 por 64423 teremos o quociente 136430 exacto até a caſa das unidades. E com effeito ſe fizeſſemos a diviſaõ por extenſo achariamos $136430 \frac{6597}{64423}$.

Naõ he neceſſario eſcrever os novos diviſores defronte dos reſtos, que por elles ſe haõ de repartir, como aqui fazemos a fim de que melhor ſe entenda o modo da operaçaõ. Mas baſta, que ſe vaõ marcando com hum ponto, ou com huma riſca, as letras do diviſor primitivo, conſórme ſe forem ſupprimindo no decurſo da operaçaõ.

70 Se o reſto da primeira diviſaõ ſe achar menor que o diviſor que lhe compete, aſſentar-ſe há cifra no quociente; ficará o meſmo reſto; e no diviſor ſe ſupprimirá outra letra. Se o meſmo reſto ainda for menor que o novo diviſor, aſſentar-ſehá outra cifra no quociente; e aſſim por diante.

Exemplo. II.

HAvendo de repartir 55106054 por 643, e baſtando ſaber o quociente exacto até a caſa das unidades, dexaremos as duas ultimas letras do di-

dividendo, e partiremos ao modo ordinario -- 551060 por 643.

551060	643
3666	85701
4510	
009...64	
9...6	
3	

Feita a operaçaõ ordinaria, acharemos o quociente 857, e o resto 9, o qual, confórme a regra presente, devia partir-se por 64. Porém, como se acha o dito resto menor que o seu competente divisor, assentaremos cifra no quociente, e conservaremos o mesmo resto 9, o qual dividiremos pelo novo divisor 6, e assim teremos o quociente 85701 exacto até a casa das unidades, conforme se buscava.

71 Quando no principio da operaçaõ se supprimem no dividendo as letras, que a regra ordena, se as que ficarem naõ forem bastantes para constituirem hum numero maior, ou ao menos igual ao divisor; entaõ cortar-se-haõ neste tantas letras á direita, quantas forem precisas, paraque as restantes possaõ caber ao menos huma vez no dividendo.

Exemplo III.

HAvendo de repartir 1611527 por 64524, e requerendo-se o quociente exacto até a casa das unidades,

Pri-

Primeiramente deveremos ſupprimir no dividendo as quatro ultimas letras 1527. Depois, como o reſto 161 faz hum numero menor que o diviſor primitivo 64524, nelle tambem ſupprimiremos as tres ultimas letras 524, que ſaõ as que baſtaõ para que o reſto 64 poſſa caber em 161. Entaõ, fazendo a operaçaõ como nos exemplos precedentes, partiremos 161 por 64;

$$\begin{array}{r|l} & 64 \\ \cline{2-2} 161 & 25 \\ 33\ldots6 & \\ 3 & \end{array}$$

e acharemos que da repartiçaõ de 1611527 por 64524 reſulta o quociente 25, ſem defeito de huma ſó unidade. E na verdade o quociente exacto he $24\frac{62951}{64524}$, o qual ſe chega muito mais para 25 do que para 24.

72 A' medida que ſe vaõ ſupprimindo as letras do diviſor, para maior exactidaõ, convem ajuntar huma unidade á ultima das que ficaõ, ſe a letra ſupprimida for 5, ou maior que 5. E do meſmo modo ſe ajuntará huma unidade á ultima letra, que ficar no dividendo, quando as letras nelle ſupprimidas paſſarem de 5, ou 50, ou 500 &c., confórme ſe ſupprimir huma, duas, tres &c.

Exemplo IV.

SUpponhamos, que ſe pede o quociente do numero 8657627 repartido por 1987, com a con-

condiçaõ de ter a meſma exactidaõ, que ſe tem procurado nos exemplos precedentes.

Conforme a reflexaõ ultima que temos feito, tomaremos pois para repartir 8658 por 1987, como aqui ſe moſtra:

8658	1987
	4357

710...199
113...20
13...2

Onde, em lugar de partir o reſto 710 por 198, partiremos por 199, por quanto a letra 7 ſupprimida no diviſor he maior que 5. Do meſmo modo na operaçaõ ſeguinte em lugar de 19 tomaremos 20 para diviſor, porque ſe ſupprime hum 9. E finalmente na operaçaõ ſeguinte, como o diviſor 2 he hum pouco maior doque devia ſer, e eſte ſe contém 6 vezes e $\frac{1}{2}$ no reſto 13, aſſentaremos antes 7 no quociente, do que 6; e acabada a operaçaõ diremos, que o quociente pedido he 4357.

73 Agora ſerá facil de entender o que ſe deve praticar, quando ſe requer o quociente com maior exactidaõ, doque até a caſa das unidades.

Por exemplo: Se quizermos o quociente exacto até a caſa das *decimas-milleſimas* naõ he neceſſario mais do que ajuntar ao dividendo tantas cifras quantas ſaõ as caſas da dizima que pertendemos, v. gr. quatro no exemplo propoſto. Entaõ ſe fará a diviſaõ, ſegundo o methodo preſente; e tendo achado o quociente exacto até a ca-

caſa das unidades, nelle ſe cortaráõ para a dizima por meio da virgula tantas letras, quantas ſe determinaraõ achar no principio da operaçaõ.

Exemplo V.

PEde-ſe o quociente do numero 6927 dividido por 4532 com a condiçaõ de ſer exacto até a caſa das *decimas-millesimas*.

Como as *decimas-millesimas* pertencem á quarta caſa da dizima, ajuntaremos quatro cifras ao dividendo; e a queſtaõ ſerá reduzida a buſcar o quociente do numero 69270000 dividido por 4532, exacto até a caſa das unidades, como nos exemplos precedentes. Aſſim fazendo a applicaçaõ do methodo actual, teremos para repartir 69270 por 4432, da maneira ſeguinte:

69270	4532
	15285
23950	
1290... 453	
384... 45	
24... 5	

E achando o quociente 15285 nelle cortaremos para a dizima quatro letras, pois tantas cifras ajuntamos ao dividendo; e ſerá o quociente pedido 1,5285.

Havendo dizima no dividendo, no diviſor, ou em ambos, deveráõ primeiro preparar-ſe de ſorte, que ſe poſſa deſprezar a virgula, como aſſiſima fica declarado (n. 68.), e depois ſe procederá á operaçaõ, como neſte ultimo exemplo.

Pelo methodo preſente póde reduzir-ſe facilmente á dizima qualquer *fracçaõ* ordinaria, havendo reſpeito ao que aſſima diſſemos (n. 71.).

Querendo v. gr. reduzir a dizima a fracçaõ $\frac{4253}{9678}$ de ſorte que ſe repreſente o ſeu valor exactamente até a caſa das milleſimas, deveremos partir (n. 73.) o numero 4253000 por 9678; que vem a ſer o meſmo que dividir (n. 69.) o numero 4253 por 9678, ou (n. 71.) o numero 4253 por 968, conforme o methodo até agora declarado. Feita a operaçaõ, virá ao quociente 439; e teremos 0,439 pelo valor da fracçaõ propoſta, com a exactidaõ que ſe intentava.

§§ O methodo que aſſima ajuntámos no fim da *Multiplicaçaõ*, para ſe fazer eſta operaçaõ por meio unicamente do *Somar*, tambem ſe pode applicar á *Diviſaõ* de ſorte, que álem do *Somar* naõ ſe careça de outra couſa mais que do *Diminuir*. A ſua praxe he deſta maneira.

Primeiramente forma-ſe huma columna da addiçaõ ſucceſſiva do *diviſor*, do meſmo modo que para multiplicar a formámos da addiçaõ do *multiplicando* (pag. 37.).

Depois toma-ſe no dividendo á eſquerda hum membro de tantas letras quantas baſtarem, para que na columna ſe ache hum numero igual, ou proximamente menor. O algariſmo, que eſte tiver defronte, ſe aſſenta no quociente, e o numero debaixo do dividendo parcial, do qual ſe diminue, e ao reſto ſe ajunta a letra ſeguinte

do

do dividendo principal ; e aſſim reſulta outro dividendo parcial , o qual ſe buſca na colunna : e na ſua falta o numero proximamente menor ; e aſſim por diante. Quando na colunna ſe naõ achar o dividendo parcial , nem algum numero proximamente menor , aſſentar-ſe-há cifra no quociente , e ſe ajuntará ao dito dividendo a letra ſeguinte do dividendo total , para ſe continuar a operaçaõ.

Se quizermos v. gr. repartir 220188745725 por 236743 , primeiramente aſſentaremos eſtes numeros do modo ordinario , como aqui ſe moſtra.

	236743	1... 236743
220188745725		2... 473486
2130687	930075	3... 710229
712004		4... 946972
710229		5...1183715
		6...1420458
1775572		7...1657201
1657201		8...1893944
		9...2130687
1183715		
1283715		10..2367430
0000000		

Depois faremos a colunna ſubſidiaria , por meio da addiçaõ ſucceſſiva do diviſor , como ſe vê no exemplo ; e com ella entraremos a executar a diviſaõ , que naõ involve mais difficuldade alguma.

Tomando pois para o primeiro dividendo par-

parcial as primeiras ſete letras 2201887, porque ſeis fariaõ hum dividendo menor que o diviſor, acharemos que na columna lhe toca o numero proximamente menor 2130687 defronte da letra 9. Peloque aſſentaremos 9 no quociente, e o dito numero debaixo do dividendo reſpectivo, do qual o diminuiremos, e ao reſto ajuntaremos a letra ſeguinte do dividendo, que he 4, e teremos para partir 712004. Naõ achando eſte numero na columna, tomaremos o que ſe acha proximamente menor, defronte da letra 3, a qual ſe aſſentará no quociente, e o dito numero ſe diminuirá do dividendo, ajuntando ao reſto a letra ſeguinte 5, de ſorte que ficará para repartir 17755.

Como porém eſte numero ſe naõ acha na columna, nem outro que ſeja proximamente menor, poremos cifra no quociente, e ajuntando a letra ſeguinte 7 teremos para dividir 177557. E como eſte numero ainda he menor que os da columna, poremos outra cifra no quociente, e ajuntando outra letra teremos para repartir 1775572. Entaõ acharemos na columna o numero proximamente menor 1657201 defronte da letra 7, a qual paſſaremos ao quociente, e diminuiremos o numero do dividendo reſpectivo, ajuntando ao reſto a letra ſeguinte do dividendo principal, que he a ultima 5, e teremos para repartir 1183715. Eſte numero ſe acha na columna defronte da letra 5, a qual aſſentaremos no quociente; e porque feita a diminuiçaõ, naõ ſobra nada, ſerá o quociente exacto 930075.

Sobre o uſo deſte methodo deve aqui entenderderſe o meſmo, que já declaramos a reſpeito da multiplicaçaõ (pag. 39.). ʃʃ

PROVA

Da Multiplicaçaõ, e Diviſaõ.

74 DA meſma definiçaõ, que temos dado deſtas duas operações ſe póde conhecer *a prova* dellas, que vulgarmente ſe chama *real.*

Como na Multiplicaçaõ ſe toma o multiplicando tantas vezes quantas ſaõ as unidades do multiplicador, he evidente, que ſe procurarmos quantas vezes o producto contém o multiplicando, iſto he (n. 59.), ſe dividirmos o producto pelo multiplicando, deve ſahir o multiplicador no quociente. E como he indifferente tomar o multiplicando para multiplicador, e reciprocamente (n. 44), ſegue-ſe em geral, *Que dividindo o producto de qualquer multiplicaçaõ por hum dos factores deve ſahir o outro no quociente.*

Por exemplo, tendo achado aſſima (n. 50.) que o numero 2864 multiplicado por 6 dá o producto 17184; ſe dividirmos eſte por 2864, teremos no quociente 6; e ſe o dividirmos por 6, teremos no quociente 2864.

Do meſmo modo: Por quanto o quociente de qualquer diviſaõ denota quantas vezes o diviſor ſe contém no dividendo, manifeſtamente ſe ſegue, que ſe o diviſor ſe tomar tantas vezes quantas denota o quociente, iſto he (n.40), ſe o diviſor ſe multiplicar pelo quociente, deve ſahir no producto o dividendo, no caſo de ter ſido feita a diviſaõ, ſem ficar reſto algum; e

que

e que tendo havido resto, se o divisor se multiplicar pelo quociente, e ao producto se ajuntar o resto, deve resultar o mesmo dividendo.

Por exemplo: Temos achado assima (n. 63), que o numero 189492 repartido por 375 dá o quociente 505, e o resto 117. E multiplicando 375 por 505, teremos o producto 189375, ao qual ajuntando-se o resto 117, resultará o mesmo dividendo 189492.

Donde se vê, que a *prova real* da Divisaõ se faz pela Multiplicaçaõ, e a da Multiplicaçaõ pela Divisaõ.

Porém estas operações pódem verificar-se por hum meio muito mais facil e expedito, que agora mostraremos; advertindo, que naõ devem por isso desprezar-se as reflexões, que acabamos de fazer, por quanto serviráõ para muitas outras cousas.

PROVA

Pela regra dos noves.

75 PAra mostrarmos o uso desta regra por meio de hum exemplo, supponhamos que tendo multiplicado 65498 por 454, e achado o producto 29736092, queremos verificar este resultado. Eis-aqui a operaçaõ.

Somaremos as letras do multiplicando 6, 5, 4, 9, 8, sem attender ao seu valor local, como se todas estivessem na casa das unidades, e lançaremos fóra *nove*, á medida que elle se achar na soma. Por fim teremos hum resto, que neste exemplo he 5, o qual assentaremos ao lado do mesmo multiplicando.

Do

Do meſmo modo ſomaremos todas as letras do multiplicador 4, 5, 4, lançando fóra os *noves*, e teremos o reſto 4, que aſſentaremos ao lado do meſmo multiplicador.

Entaõ multiplicaremos os dous reſtos hum pelo outro, e do producto, que neſte exemplo he 20, lançaremos fóra os *noves* que elle tiver; e ficará hum reſto, que no caſo preſente he 2.

Ora ſe o producto aſſima dito he exacto, he neceſſario que ſomando do meſmo modo todas as letras delle 2, 9, 7, 3, 0, 9, 2, e lançando fóra os *noves*, naõ fique tambem ſenaõ 2, como ſe acha com effeito.

Eſta regra ſuppoem, que para haver o reſto da ſubtracçaõ de todos os *noves*, que em qualquer numero ſe contém, naõ he neceſſario mais do que ſomar todas as ſuas letras, e lançar fóra na ſoma dellas os *noves* que ſe acharem, como ſe demonſtra facilmente reflectindo ſobre os principios da Numeraçaõ (n. 39. §§) Iſto ſuppoſto eiſaqui a raſaõ da prova na Multiplicaçaõ.

Como o multiplicando 65498 he compoſto de hum certo numero de *noves* e do reſto 5, e como o multiplicador 454 he tambem compoſto de hum certo numero de *noves* e do reſto 4, he manifeſto, que ſómente pelo producto de 4 por 5, ou por 20, ha de deixar o producto total de ſer diviſivel por 9; ou (tirando os *noves* de 20) que ſómente por 2 ha de deixar de ſer diviſivel por 9. Logo eſtando o dito producto exacto deve ficar nelle o meſmo numero, que fica no producto dos dous reſtos, depois de ſerem lançados fóra os *noves*, que elle contém.

A

A prova da Multiplicaçaõ ſe applica facilmente á Diviſaõ. Como o producto do diviſor pelo quociente com o reſto, quando o houver, he igual ao dividendo (n. 74.), naõ he neceſſario mais do que tirar os noves ao diviſor, e ao quociente; multiplicar os dous reſtos; do producto lançar fóra os noves, ſe os tiver; ſomar o reſto com o que ficar depois de tirados os noves ao reſto da diviſaõ; e da ſoma lançar fóra os noves, ſe os tiver; e o reſto ſerá o que ſe deve achar tambem no dividendo, depois de lançados fóra os noves.

Por exemplo: Tendo achado o quociente 812, e o reſto 200, da repartiçaõ de 756984 por 932, tiraremos os noves ao diviſor 932, e ficará o reſto 5, depois ao quociente 812, e ficará 2. Entaõ multiplicaremos os dous reſtos, e do producto 10 lançando fóra 9, fica 1, e tirando tambem os noves ao reſto da diviſaõ 200, ficaõ 2, que ſomados com o reſto precedente 1 fazem 3; e iſto he o que deve reſtar no dividendo depois de ſe tirarem os noves, eſtando a operaçaõ exacta, como ſe acha com effeito.

Tomando a couſa em rigor, eſta verificaçaõ naõ he infalivel. Porque ſe na multiplicaçaõ, por exemplo, nos enganaſſemos de ſorte, que fizeſſemos qualquer algariſmo do producto maior huma, duas, ou mais unidades, e depois puzeſſemos outras tantas de menos em qualquer outro; como iſto naõ influiria ſobre o reſto que fica depois de lançados fóra os noves, he claro, que hum erro ſemelhante naõ ſerá deſcuberto pela prova. Porém como para iſſo ſaõ neceſſarios

dous

dous erros, e dous erros iguais, e contrarios, que mutuamente ſe deſtruaõ, que vem a ſer o meſmo que commetter o erro de 9, ou dos multiplos de 9, he facil de ver que os caſos em que a prova póde faltar, haõ de ſer rariſſimos na pratica.

55 A prova, que ſe faz por meio dos *noves*, igualmenre podia fazer-ſe por meio de qualquer outro numero; mas eſcolheu-ſe o nove, por ſer mais facil de ſe lançar fóra. Como porém temos notado, que os *onzes* ſe pódem tirar de qualquer numero quaſi com a meſma facilidade, e como iſto moſtra huma propriedade notavel da Numeraçaõ actual, que por outra parte póde ſervir de utilidade, ſerá conveniente que a ajuntemos neſte lugar, e he da maneira ſeguinte.

Se o primeiro algariſmo de qualquer numero, o terceiro, e os mais pelas caſas impares da direita para a eſquerda ſe ajuntarem, lançando fóra da ſoma o numero onze quando nella vier, e notando o reſto final que reſultar; e ſe depois ſe ajuntar do meſmo modo o ſegundo algariſmo, o quarto, e os mais pelas caſas pares; e ſe o reſto ſe tirar do primeiro (ao qual ſendo neceſſario ſe ajuntará para iſſo o numero onze), o que ficar ſerá o reſto que ſobra do numero propoſto, lançados fóra todos os *onzes*.

Aſſim, por exemplo, para tirarmos os *onzes* do numero 7543945, diremos: 5 e 9 ſaõ 14, menos onze ſaõ 3, e 4 ſaõ 7, e 7 ſaõ 14, menos onze, ficaõ 3; depois, 4 e 3 ſaõ 7, e 5 ſaõ 12, menos onze, fica 1; e tirando eſte ſegundo reſto 1 do primeiro 3, ficaõ 2, que he o reſto

que

que ſobra, tirados os *onzes* do numero 7543945. E para os tirarmos do numero 527381, diremos: 1 e 3 ſaõ 4, e 2 ſaõ 6, primeiro reſto; depois 8 e 7 ſaõ 15, menos onze, ſaõ 4, e 5 ſaõ 9, ſegundo reſto; e porque eſte naõ póde diminuir-ſe do primeiro 6, ajuntar-lhe-hemos 11, e ſerá 17, do qual tirando 9, ficaõ 8; e eſte he o reſto que fica, tirados os *onzes* do numero 527381.

Eſta notavel propriedade, com igual raſaõ póde ſervir de prova ás quatro operações da Arithmetica; prova, que ſómente faltará quando o erro comettido na operaçaõ for onze, ou algum dos multiplos de onze. E ſe eſta prova ſe ajuntaſſe com a dos noves, muito mais provavel ſeria o juizo que ſe fizeſſe da certeza da operaçaõ, pois que entaõ ſómente eſcaparia o erro de 99, ou dos multiplos de 99. ſſ

Uſo da Diviſaõ.

76 A Diviſaõ ſerve naõ ſómente para achar quantas vezes hum numero contém a outro, mas tambem para partir qualquer numero em partes iguais. Tomar a metade, a terça, quarta, quinta, vigeſima, trigeſima parte &c. de hum numero, he o meſmo que dividillo por 2, 3, 4, 5, 20, 30 &c., ou partillo em 2, 3, 4, 5, 20, 30 partes iguais &c., para tomar huma dellas.

A Diviſaõ ſerve tambem para converter as unidades de qualquer eſpecie em outras de eſpecie ſuperior; como, por exemplo, para reduzir hum certo numero de *dinheiros* a *ſoldos*, e eſtes a *libras*. Para reduzir 5864 *dinheiros* a *ſoldos*, notaremos que como ſaõ neceſſarios 12 *dinheiros* para fazer hum *ſoldo*, quantas vezes houver 12^d em 5864^d, tantos *ſoldos* haverá na dita quantia. He neceſſario pois dividir 5864 por 12, e acharemos no quociente 488ſ, e 8^d de reſto. Para reduzir a *libras* os 488ſ, dividiremos 488 por 20, porque ſaõ neceſſarios 20ſ para fazer 1 *libra*, e teremos no quociente 24^{lb}, e de reſto 8ſ; e aſſim a quantia propoſta ſerá reduzida a 24 *libras*, 8 *ſoldos*, e 8 *dinheiros*.

Por occaſiaõ deſta repartiçaõ por 20, notaremos que havendo de dividir qualquer numero por outro que acaba em cifras, podemos abbreviar a operaçaõ, ſeparando no dividendo da parte direita tantas letras quantas ſaõ as cifras do diviſor, e dividindo as que ficarem á eſquerda pelas letras ſignificativas do meſmo diviſor; ſe houver algum reſto, á direita delle ſe ajuntaraõ as letras ſeparadas no dividendo, para ter o reſto total da diviſaõ; e naõ havendo reſto, as meſmas letras ſeparadas ſeraõ o unico reſto da operaçaõ.

Por exemplo: havendo de dividir 5834 por 20, ſeparraremos a ultima letra do dividendo 4, e repartiremos por 2 a parte que fica 583. Feita a operaçaõ, teremos o quociente 291, e o reſto 1, ao qual ajuntaremos a letra ſeparada 4, e ſerá o reſto total 14, de ſorte que o quociente completo ſerá $291\frac{14}{20}$.

Eſ-

Esta abbreviação póde applicar-se á reducção da carga de hum navio a *tonelladas*. Sabendo v. gr. que a carga he de 2584954 *libras*, para a reduzir em *tonelladas*, isto he, para a dividir por 2000, deveremos separar as tres ultimas letras á direita, e tomar a ametade das que ficarem; e assim teremos 1292 *tonelladas*, e 954 *libras*.

O mesmo se applicará a muitos outros casos, conforme a natureza da questaõ o permittir.

DOS QUEBRADOS.

77 DAmos na Arithmetica o nome de *Quebrados*, ou *Fracções*, aos numeros, pelos quais se exprimem as quantidades menores que a unidade.

78 Para se formar huma idéa clara delles, he necessario conceber a mesma quantidade, que se tem escolhido para unidade, como composta de outras unidades mais pequenas; assim como se concebe, por exemplo, a *libra* composta de 20 partes, ou unidades, que se chamaõ *soldos*.

Huma, ou muitas destas partes, nas quais se divide a unidade, ou das quais se entende composta, formaõ o que se chama *quebrado*, ou *fracçaõ* da unidade. E o mesmo nome se dá aos numeros, com que ellas se representaõ.

79 Há duas differenças na expressaõ dos quebrados, e ambas ellas recebidas na pratica.

A primeira consiste em representar as partes da unidade á maneira dos numeros inteiros, tomando-as como unidades de outra eſpecie, e dandolhes hum nome particular.

Aſſim, para moſtrar *ſete* partes, das quais entraõ vinte em huma *libra*, damos primeiramente ás ditas partes o nome de *ſoldos*, e preſcindindo da *libra*, ou da unidade principal, as declaramos como unidades abſolutas com a letra 7, á qual ajuntamos a letra inicial das unidades que ſignifica, deſte modo 7ſ; expreſſaõ, que em ſi meſma he inteira e abſoluta, mas a reſpeito da *libra* he huma fracçaõ.

Eſta differença de quebrados tem lugar nos numeros complexos, dos quais adiante fallaremos.

80 Como porém naõ he poſſivel dar nomes em particular a todas as diviſões que ſe pódem fazer da unidade, faz-ſe neceſſaria a ſegunda differença de quebrados, em cuja expreſſaõ ſe uſa de dous numeros, o primeiro dos quais ſe aſſenta em cima de huma riſca, e moſtra as partes da unidade de que ſe compoem a quantidade, que queremos ſignificar; e o ſegundo debaixo da riſca, para denotar quantas deſſas partes formaõ a unidade. Aſſim, para pôr em figura as *ſete* partes da *libra*, de que há pouco fallamos, deveremos aſſentar os dous numeros deſta maneira $\frac{7}{20}$.

81 Para dizer o valor de hum quebrado, primeiramente ſe lê o numero que eſtá em cima da riſca, o qual ſe chama *Numerador*, e depois o que eſtá por baixo, o qual ſe chama *Denomina-*

nador ; e a eſte ſe ajunta a addiçaõ *avos* (*). Aſſim para declarar o valor de $\frac{7}{20}$, diremos *ſete vinte-avos*, e de $\frac{11}{100}$ diremos *onze cem-avos* &c. ; advertindo que *onze cem-avos* quer dizer *onze* partes tais, que dellas ſejaõ neceſſarias *cem* para formar a unidade.

Sendo o denominador de 2 até 8 naõ ſe uſa da addiçaõ *avos*, mas dos nomes, *meios*, *terços*, *quartos*, *quintos*, *ſextos*, *ſetimos*, e *oitavos* ; ou *ametades*, *terças*, *quartas* partes &c. Tambem de 9 para cima ſe uſa hoje dos nomes ordinais da lingua Latina, como $\frac{3}{1000}$ *tres mil-avos*, ou *tres mileſſimas* partes da unidade.

82 Moſtra pois o numerador de quantas partes da unidade ſe compoem a quantidade, que ſè declara pelo quebrado ; e o denominador determina a grandeza e valor deſſas partes, moſtrando quantas dellas formaõ a unidade. Por iſſo ſe chama denominador, porque dá o nome ás partes da fracçaõ, e faz v. gr. neſtes dous quebrados $\frac{2}{5}$, $\frac{2}{7}$, que as partes do primeiro ſejaõ *quintas*, e as do ſegundo *ſetimas*. 83

(*) Eſta addiçaõ *avos* naõ ſignifica couſa alguma por ſi meſma. He a terminaçaõ de *oitavos*, até onde os noſſos Arithmeticos antigos davaõ nome *ordinal* proprio ao denominador. Dahi por diante, ou por recearem uſar dos *ordinais* da lingua Latina, ou para maior facilidade na leitura dos quebrados, uſaraõ dos *cardiais*, ajuntando-lhes a terminaçaõ do meſmo nome *oitavos*, para os fazerem ſer equivalentes aos *ordinais*. Deſte modo *onze-avos* tem lugar de hum nome que ſe formaria de *onze*, aſſim como *oitavos* ſe fórma de *oito*, que ſeria *onzavos*. Aſſim dous *onze-avos* he como ſe diſſeſſemos dous *onzavos*, tres *cem-avos* o meſmo que tres *centavos* &c.

83 Tanto o numerador como o denominador ſe chamaõ tambem *termos* do quebrado, que por elles ſe repreſenta. E em dous quebrados, ambos os numeradores, ou ambos os denominadores chamaõ-ſe termos *homologos*; e o numerador de hum com o denominador do outro, termos *heterogeneos*.

Dos numeros inteiros conſiderados em fórma de quebrados.

84 AS operações, que ſe fazem ſobre os quebrados, conduzem muitas vezes a reſultados fraccionarios, cujo numerador ſe acha igual, ou maior que o denominador, como v. gr. $\frac{8}{8}$, $\frac{27}{5}$ &c.

As expreſſões deſta ſorte naõ ſaõ fracções propriamente tais, mas numeros inteiros, ou inteiros com quebrados, repreſentados em fórma de fracções.

85 Para extrahir os inteiros, que ſe achaõ incluidos nellas, he neceſſario dividir o numerador pelo denominador. O quociente moſtrará os inteiros, e o reſto da diviſaõ, ſe o houver, ſerá o numerador de huma fracçaõ propriamente tal, que ſe ha de ajuntar aos ditos inteiros, ficando o meſmo denominador. Aſſim $\frac{27}{5}$ ſe reduzem a $5\frac{2}{5}$, iſto he, ſinco unidades, e dous quintos da unidade.

A raſaõ he, porque na expreſſaõ $\frac{27}{5}$ o denominador 5 moſtra que a unidade ſe tem dividido em 5 partes: logo quantas vezes houver 5 em 27, tantas unidades inteiras haverá no valor da fracçaõ $\frac{27}{5}$.

86 As multiplicações, e diviſões dos numeros inteiròs acompanhados de frações requerem, ao menos para maior facilidade das operações, que os ditos inteiros ſe reduzaõ á forma de quebrados. Iſto ſe faz, multiplicando o inteiro pelo denominador da fracçaõ, á qual ſe quer reduzir, e o producto ſerá o numerador.

Por exemplo: Querendo reduzir o numero 8 a huma fracçaõ, que tenha 5 por denominador, multiplicaremos 8 por 5, e o producto 40 ſerá o numerador; donde teremos $\frac{40}{5}$. A raſaõ he, porque havendo de reduzir o numero 8 a *quintos*, cada unidade ſe conſidéra composta de 5 partes: logo 8 unidades ſe converteráõ em 40 das ditas partes. Do meſmo modo o numero miſto 7 $\frac{4}{9}$ convertido todo em *nove-avos* dará $\frac{67}{9}$, porque o inteiro 7 vale $\frac{63}{9}$, e ajuntando os $\frac{4}{9}$, teremos $\frac{67}{9}$.

Quando ſe há de reduzir hum inteiro á fórma de quebrado, e naõ importa que tenha certo denominador, o mais ſimples de tudo he tomar para iſſo a unidade, a qual ſe ſubentende ſempre como denominador natural de todos os numeros inteiros. Porque aſſim como por $\frac{8}{3}$ entendemos oito *terços*, e por $\frac{8}{2}$ oito *meios*, aſſim por $\frac{8}{1}$ entenderemos oito *unidades*. Das

Das mudanças, que ſe pódem fazer nos termos de hum quebrado, ſem lhe alterar o valor.

87 HE manifeſto, que em quantas mais partes ſe conceber a unidade dividida, tantas mais ſeraõ neceſſarias para repreſentar huma meſma quantidade.

88 Donde ſe vê, que pode fazer-ſe o denominador de huma fracçaõ duplo, triplo, quadruplo &c., ſem lhe mudar o valor, com tanto que ao meſmo tempo ſe faça tambem o ſeu numerador duplo, triplo, quadruplo &c.

Logo póde dizer-ſe em geral: *Que hum quebrado naõ muda de valor, quando ſe multiplicaõ ambos os ſeus termos por hum meſmo numero.*

Aſſim $\frac{3}{4}$ he o meſmo que $\frac{6}{8}$, $\frac{9}{12}$ &c.; e $\frac{1}{2}$ a meſma couſa que $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{5}{10}$ &c.

89 Por huma raſaõ ſemelhante ſe entende, que quanto menos partes ſe ſuppozerem na unidade, tanto menos ſeriaõ preciſas para formar huma meſma quantidade.

Pelo que he manifeſto, que ſem mudar o valor de hum quebrado podemos fazer o ſeu denominador 2, 3, 4 &c. vezes menor, com tanto que façamos igualmente o numerador 2, 3, 4 &c. vezes menor.

Donde em geral ſe póde dizer: *Que hum quebrado naõ muda de valor todas as vezes que ambos os ſeus termos ſe dividem por hum meſmo numero*

Pa-

Para ſe ver diſtintamente a verdade deſtas duas propoſições, baſta reflectir ſobre as noções que temos dado do numerador, e denominador.

Pelo que devemos notar, que multiplicar ou dividir os termos de hum quebrado por hum meſmo número, he couſa muito diverſa de multiplicar ou dividir o meſmo quebrado; porque as ditas operações ſe fazem ſem elle mudar de valor, como temos declarado.

Os dous principios, que acabamos de expôr, ſervem de baſe ás duas Reducções ſeguintes, que ſaõ de grande uſo na pratica dos quebrados.

Reducçaõ dos Quebrados ao meſmo denominador.

90 1º. PAra reduzir duas fracções ao meſmo denominador, multiplicar-ſe-haõ os dous termos da primeira pelo denominador da ſegunda, e os dous termos deſta pelo denominador daquella.

Supponhamos, por exemplo, que temos para reduzir ao meſmo denominador os dous quebrados $\frac{2}{3}$, e $\frac{3}{4}$.

Primeiramente multiplicaremos os dous termos da primeira fracçaõ 2, e 3 pelo denominador da ſegunda 4, e teremos $\frac{8}{12}$, que (n. 88) he do meſmo valor que $\frac{2}{3}$. Depois multiplicaremos os dous termos da ſegunda 3 e 4 pelo denonominador da primeira 3, e refultará $\frac{9}{12}$ do mefmo valor que $\frac{3}{4}$. E affim as fracções $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$, feraõ mudadas em $\frac{8}{12}$, e $\frac{9}{12}$ que tem refpectivamente o mefmo valor, e fe achaõ reduzidas ao mefmo denominador.

He facil de ver, que por efte methodo teraõ fempre as novas fracções o mefmo denominador, porque em cada huma das operações fe fórma efte da multiplicaçaõ dos denominadores primitivos.

91. 2°. Sendo mais de duas as fracções, reduzirfe-haõ ao mefmo denominador, multiplicando os dous termos de cada huma pelo producto dos denominadores de todas as outras.

Tendo v. gr. para reduzir ao mefmo denominador eftas quatro fracções $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{7}$;

Primeiramente multiplicaremos os dous termos da primeira 2 e 3 pelo producto dos denominadores das outras 4, 5, e 7; producto, que acharemos multiplicando primeiro 4 por 5, e o feu producto 20 por 7, que dá 140. Affim multiplicando 2 e 3 por 140, teremos os productos 280, e 420, dos quais refultará a fracçaõ $\frac{280}{420}$, que (n. 88) he do mefmo valor que $\frac{2}{3}$. Depois multiplicaremos os dous termos da fegunda 3 e 4 pelo producto dos denominadores das outras 3, 5, e 7, ifto he, por 105, e teremos a fracçaõ ção $\frac{315}{420}$ igual a $\frac{3}{4}$. Passando á terceira multiplicaremos os seus termos 4 e 5 por 84, producto dos tres denominadores das outras 3, 4, e 7, e teremos a fracção $\frac{336}{420}$ em lugar de $\frac{4}{5}$. E na quarta em fim multiplicaremos ambos os seos termos 5 e 7 por 60, que he o producto dos denominadores 3, 4, 5 das tres primeiras, e teremos $\frac{300}{420}$ em lugar de $\frac{5}{7}$.

Deste modo temos convertido as quatro fracções $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{7}$, nestas quatro $\frac{280}{420}$, $\frac{315}{420}$, $\frac{336}{420}$, e $\frac{300}{420}$, menos simples na verdade, mas do mesmo valor que ellas, e pela rasaõ de serem reduzidas ao mesmo denominador, mais susceptiveis das operações da Addiçaõ, e Subtraçaõ, como adiante mostraremos.

He manifesto pela mesma operaçaõ da reducçaõ, que as fracções que resultaõ saõ respectivamente iguaes ás fracões dadas, porque em cada huma destas se multiplicaõ ambos os termos por hum mesmo numero (n. 88). E como o denominador de cada huma das novas fracções he formado do producto de todos os denominadores primitivos, naõ pódem deixar de ficarem todas com o mesmo commum denominador.

55 Como pelo methodo antecedente se reduzem sim os quebrados ao mesmo commum denominador, mas nem sempre ao mais simples que elles pódem ter, pela qual rasaõ seria necessaria outra reducçaõ, e esta muito trabalhosa, para os trazer á maior simplicidade, que permit-

te

te a condiçaõ de ficarem com a mesma denominaçaõ ; será muito conveniente procurar, que logo se reduzaõ ao mais pequeno denominador commum, que he possivel. Isto se conseguirá, praticando da maneira seguinte.

Se os denominadores dos quebrados que se haõ de reduzir á mesma denominaçaõ, cada hum dos quais se suppoem abbeviado aos seus menores termos, naõ tiverem divisor commum, a reducçaõ se praticará simplesmente da maneira a cima declarada; e o denominador commum, que se achar será o menor, que os ditos quebrados pódem ter.

Porém se os denominadores tiverem divisor commum, dividir-se-haõ todos por elle, ou pelo maior delles, quando forem muitos; e os quebrados se convertaõ em outros tantos, que seraõ de differente valor, mas depois se restituiráõ ao mesmo. Estes se reduziráõ á mesma denominaçaõ, confórme a regra a cima dada; e o denominador commum delles se multiplicará pelo mesmo divisor, pelo qual foraõ divididos os denominadores primitivos. Deste modo se tornaráõ a fazer os quebrados reduzidos iguais aos quebrados da questaõ, e ficaráõ álem disso com o menor denominador commum que he possivel.

Quando sómente alguns dos denominadores tiverem divisor commum, por elle se dividiráõ os ditos denominadores, e se multiplicaráõ tambem os numeradores dos outros quebrados, cujos denominadores por elle se naõ pódem dividir, e assim se formaráõ os novos quebrados subsidiarios, que se haõ de reduzir ao mesmo denomina-

na-

nador, o qual se multiplicará pelo dito divisor, para se restituirem ao valor dos quebrados propostos. Do mesmo modo, quando todos os denominadores primitivos tem divisor commum, e feita a divisaõ resultaõ quebrados, nos quais alguns denominadores ainda tem divisor entre si, sobre elles se praticará o mesmo que no caso antecedente, e assim por diante. E no fim o denominador commum dos quebrados reduzidos se multiplicará pelo producto de todos os divisores, que successivamente se empregáraõ. Os exemplos seguintes mostraráõ claramente a praxe destas regras.

Exemplo I. Querendo reduzir á mesma denominaçaõ os dous quebrados $\frac{5}{18}$, $\frac{7}{27}$; como os denominadores 18 27 tem o maior divisor commum 9, partillos-hemos ambos por 9, e resultaraõ os dous quebrados $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{3}$; os quais sendo reduzidos ao mesmo denominador, daráõ $\frac{15}{6}$, $\frac{14}{6}$; e multiplicando o denominador commum delles 6 pelo divisor 9, se mudaraõ em $\frac{15}{54}$, $\frac{14}{54}$; quebrados iguais aos da questaõ, e os mais simples que saõ possiveis. Se a reducçaõ se fizesse ao modo ordinario, em lugar delles achariamos $\frac{135}{486}$, $\frac{126}{486}$.

Exemplo II. Havendo de reduzir ao mesmo denominador os quebrados $\frac{1}{26}$, $\frac{2}{13}$, $\frac{4}{39}$; como os denominadores 26, 13, 39, tem o divisor commum 13, por elle os dividiremos todos e re-

reſultaráõ os quebrados $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{1}$, $\frac{4}{3}$, ſobre os quais praticaremos a reducçaõ. Feita eſta, acharemos que ſe reduzem a $\frac{3}{6}$, $\frac{12}{6}$, $\frac{8}{6}$; e multiplicando o denominador commum 6 pelo diviſor 13, ficaráõ os quebrados propoſtos reduzidos a $\frac{3}{78}$, $\frac{12}{78}$, $\frac{8}{78}$; com o menor denominador commum que he poſſivel. Se praticaſſemos a regra ordinaria, achariamos $\frac{507}{13182}$, $\frac{2028}{13182}$, $\frac{1352}{13182}$.

Exemplo III. Se tivermos de reduzir á meſma denominaçaõ os quebrados $\frac{2}{7}$, $\frac{4}{15}$, $\frac{1}{30}$; como os tres denominadores 7, 15, 30, naõ tem diviſor commum, mas taõ ſómente os dous ultimos, eſtes ſe dividiráõ pelo ſeu maior diviſor 15, e pelo meſmo ſe multiplicará o numerador 2 do primeiro quebrado, cujo denominador naõ podemos dividir. Aſſim reſultaráõ outros tres quebrados $\frac{30}{7}$, $\frac{4}{1}$, $\frac{1}{2}$, ſobre os quais executaremos a reducçaõ. Feita a qual, acharemos que ſe reduzem a $\frac{60}{14}$, $\frac{56}{14}$, $\frac{7}{14}$; e multiplicando o denominador 14 pelo diviſor 15, ficaráõ os quebrados da queſtaõ reduzidos a $\frac{60}{210}$, $\frac{56}{210}$, $\frac{7}{210}$. Se obraſſemos do modo ordinario achariamos $\frac{900}{3150}$, $\frac{840}{3150}$, $\frac{105}{3150}$.

Exemplo IV. Pede-ſe, que reduzamos ao meſmo denominador os quebrados $\frac{3}{11}$, $\frac{7}{55}$, $\frac{5}{77}$, $\frac{1}{154}$. Primeiramente, como todos os denominadores ſaõ

saõ divisiveis por 11, feita a divisaõ mudaremos os quebrados em $\frac{3}{1}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{1}{14}$. Depois, como nestes ultimos os denominadores 7, e 14, ainda tem o divisor commum 7, por elle os dividiremos e pelo mesmo multiplicaremos os numeradores 3, e 7, cujos denominadores se naõ poderáõ dividir; e assim resultaráõ novamente os quebrados $\frac{21}{1}$, $\frac{49}{5}$, $\frac{5}{1}$, $\frac{1}{2}$, sobre os quais praticaremos a reducçaõ. Feita a operaçaõ, acharemos que se reduzem a $\frac{210}{10}$, $\frac{98}{10}$, $\frac{50}{10}$, $\frac{5}{10}$; e multiplicando o denominador commum 10 por 77, que he o producto dos divisores 7, e 11, teremos os quebrados da questaõ reduzidos respectivamente a $\frac{210}{770}$, $\frac{98}{770}$, $\frac{50}{770}$, $\frac{5}{770}$, da fórma mais simples que he possivel. Se neste caso usassemos da regra ordinaria, achariamos $\frac{1956570}{7174090}$, $\frac{913066}{7174090}$, $\frac{465850}{7174090}$, $\frac{46585}{7174090}$, quebrados muito compostos, que careceriaõ de huma operaçaõ muito trabalhosa, para se reduzirem á simplicidade da primeira fórma sendo para isso necessario procurar primeiro o maior divisor commum entre o denominador, e os quatro numeradores, como abaixo se mostrará. ʃʃ

Re-

Reducçaõ dos Quebrados, á expressaõ mais simples que he possivel.

92 HUma fracçaõ he tanto mais simples, quanto os seus termos saõ menores. Muitas vezes he possivel reduzir huma fracçaõ dada a menores termos; e isto succede todas as vezes que o numerador, e denominador se podem dividir ambos por hum mesmo numero. Como esta operaçaõ naõ lhe altera o valor (n. 89), he huma simplificaçaõ que se naõ deve omittir, pois naõ sómente contribue para a elegancia da expressaõ, mas tambem para se formar melhor conceito do seu valor. Porque sem embargo de que v. gr. a fracçaõ $\frac{27}{63}$ tem o mesmo valor que $\frac{3}{7}$, por esta segunda com tudo se fórma huma idea mais clara da quantidade que por ambas ellas se représenta, naõ se distrahindo a attençaõ com taõ grande numero de partes, como na primeira.

Para se fazer pois a resoluçaõ presente, ou para *abbreviar quebrados*, eis-aqui o methodo que se ha de seguir.

93 Primeiramente dividir-se-haõ ambos os termos por 2, e esta operaçaõ se continuará em quanto se poder fazer sem resto. Depois se passará a dividir por 3, e dahi por 5, 7, 11, 13, 17, &c, isto he, por todos os numeros *primos*, que saõ aquelles que naõ tem divisor exacto, senaõ a si mesmos, ou a unidade.

A

A unica difficuldade que se offerece neste methodo, he saber quando se póde dividir sem resto por 2, 3, 5 &c. para naõ fazer de balde a divisaõ. Para isso ajudaraõ muito os principios seguintes.

94 Todo o numero, cuja ultima letra á direita significa numero par, he divisivel por 2.

Todo o numero, cujos algarismos somados fizerem 3, ou hum numero, multiplo de 3, he divisivel por 3. Assim v. gr. o numero 54231 póde dividir-se exactamente por 3, porque a soma dos seus algarismos 5, 4, 2, 3, 1, faz 15, que he multiplo de 3, pois contém 5 vezes 3 exactamente.

Do mesmo modo, se a soma dos algarismos fizer 9, ou hum multiplo de 9, será o numero divisivel por 9.

Todo o numero que acabar em 0, ou em 5, será divisivel exactameute por 5.

¶¶ E todo o numero, cujos algarismos das casas impares da direita para a esquerda fizerem huma soma igual á dos algarismos das casas pares; ou tambem desigual, com tanto que a differença das duas somas seja 11, ou hum multiplo de 11, será divisivel por 11. Assim será divisivel por 11 o numero 89452, porque as letras das casas impares 2, 4, 8, fazem a mesma soma que as letras das casas pares 5, e 9. Do mesmo modo o numero 8452719 será divisivel por 11, porque as letras das casas pares 9, 7, 5, 8, fazem a soma de 29, e a das partes 1, 2, 4, a soma 7; sendo a differença das duas somas 22, que he multiplo de 11. ¶¶

Em quanto ao numero 7, e aos mais *primos*, ainda que ſeria facil achar regras ſemelhantes, como o exame que ellas ſuppoem ſeria mais trabalhoſo que a meſma diviſaõ, melhor he que eſta ſe experimente.

Supponhamos v. gr. que queremos abbreviar o quebrado $\frac{2016}{5796}$. Primeiramente dividiremos ambos os termos por 2, porque ambos elles acabaõ em algariſmo par, e teremos $\frac{1008}{2898}$. Depois tornaremos a dividir por 2, e reſultará $\frac{504}{1449}$. E porque naõ póde mais fazer-ſe a diviſaõ por 2, e pelo que fica dito ſe vê que póde fazer-ſe por 3, dividiremos por 3, e teremos $\frac{168}{483}$. Tornando a dividir por 3, reſultará $\frac{56}{161}$; e porque naõ póde mais caber a diviſaõ por 3, exprimentaremos por 7, e como ſuccede ſem reſto ficará o quebrado propoſto finalmente reduzido a $\frac{8}{23}$.

A raſaõ porque neſta operaçaõ naõ experimentamos a diviſaõ, ſenaõ pelos numeros *primos* 2, 3, 5, 7 &c., he porque depois de exhaurida v. gr. a diviſaõ por 2, he eſcuſado tentar fazella por 4, por quanto ſe eſta pudeſſe fazer-ſe ſem reſto, muito melhor ſe poderia fazer aquella.

95 De todos os meios, que ſe pódem applicar para abbreviar hum quebrado, o mais directo he dividir logo ambos os ſeus termos pe-

pelo maior divisor commum, que elles pódem ter. Eis-aqui a regra para o achar.

Divida-se o termo maior pelo menor. Se esta divisaõ se fizer sem resto, o termo menor será o maior divisor commum de ambos elles. Ficando porém algum resto, por elle se dividirá o termo menor, que servio de divisor na operaçaõ antecedente. Entaõ, se naõ houver resto, o resto precedente que servio de divisor será o maior divisor que se busca; e se houver resto, por elle se dividirá o que foi divisor na operaçaõ antecedente; e assim por diante, até chegar a huma divisaõ exacta; e o divisor della será o que se busca. Se o divisor da ultima operaçaõ for a unidade, he sinal de que a fracçaõ naõ póde reduzir-se a menores termos.

Supponhamos v. gr. que temos para abbreviar o quebrado $\frac{3760}{9024}$. Primeiramente buscaremos o maior divisor commum de ambos os termos, dividindo 9024 por 3760, donde virá o quociente 2, e o resto 1504. Por este resto dividiremos 3760, e teremos o quociente 2, e o resto 752, pelo qual dividiremos o resto precedente 1504. E como esta divisaõ se faz exactamente, será o divisor della 752 o maior divisor commum dos termos do quebrado proposto; o qual por conseguinte, feita a divisaõ, se reduzirá a $\frac{5}{12}$.

E com effeito, pela operaçaõ achamos que 752 he divisor exacto de 1504; logo tambem o he de 3760, que se compoem de 2 vezes 1504, e 1 vez 752; e por conſeguinte o deve ſer igualmente de 9024, que ſe compoem de 2 vezes 3760, e huma vez 1504.

Alem diſto he facil de ver, que 752 he o maior diviſor commum, que pódem ter os numeros 9024 e 3760. Porque naõ póde haver diviſor commum entre 9024 e 3760, que o naõ ſeja ao meſmo tempo entre 3760 e 1504; nem tambem entre eſtes dous, ſem que o ſeja igualmente entre 1504 e 752; porém he evidente, que entre eſtes dous ultimos numeros naõ póde haver maior diviſor commum do que 752: Logo &c.

§§ Se forem mais que dous os numeros, entre os quais devemos achar o maior diviſor commum, uſaremos do methodo ſeguinte.

Buſque-ſe o maior diviſor commum entre o primeiro e o ſegundo, entre o ſegundo e o terceiro, entre eſte e o quarto &c., de qualquer ſorte que os numeros eſtiverem diſpoſtos. Pratique-ſe o meſmo ſobre os diviſores achados, e aſſim por diante, até chegar a hum ſó diviſor, o qual ſerá finalmente o maior diviſor commum dos numeros propoſtos. Se em alguma parte da operaçaõ ſahirem dous ou mais diviſores iguaes, hum delles ſómente ſe tomará para a operaçaõ ſeguinte; e ſe todos alguma vez ſahirem iguais, ſerá eſcuſado continuar a operaçaõ, porque ella virá a acabar em hum diviſor igual a elles, ſe ſe levar ao fim conforme a regra, e por conſeguinte qualquer delles ſerá o maior diviſor que intentamos achar. Encontrando-ſe na operaçaõ dous numeros,

ros, quaiſquer que ſejaõ, os quais naõ tenhaõ diviſor commum ſenaõ a unidade, tambem os numeros propoſtos o naõ teráõ.

Exemplo. Pede-ſe o diviſor maior commum dos numeros .... 7174090 .... 1956570 .... 913066 .... 465850 .... 46585. Primeiramente buſcaremos o maior diviſor commum entre o primeiro e o ſegundo, e entre o ſegundo e o terceiro &c., e acharemos os numeros .... 652190 .... 130438 .... 18634 .... 46585; depois ſobre eſtes faremos a meſma operaçaõ, e ſahiráõ os diviſores .... 130438 .... 18634 .... 9317; ſobre eſtes praticaremos do meſmo modo, e ſahiráõ os diviſores .... 18634 .... 9317; e finalmente achando o maior diviſor commum deſtes dous ultimos, que he 9317, eſte ſerá o maior diviſor commum dos ſinco numeros propoſtos.

Outro modo de conſiderar os quebrados, e conſequencias que delle reſultaõ.

96 A Idea, que até agora temos dado dos quebrados, he que o denominador moſtra de quantas partes ſe ſuppoem compoſta a unidade; e o numerador, de quantas deſſas partes conſta a quantidade, que pelo quebrado ſe repreſenta.

Agora moſtraremos, como ſe pódem tomar em outro ponto de viſta. Póde o numerador conſiderar-ſe, como repreſentando huma certa quantidade; que ſe ha de repartir em tantas partes

tes quantas saõ as unidades do denominador; para se tomar huma dellas.

Assim v. gr. no quebrado $\frac{4}{5}$ póde considerar-se o numerador 4, como representando *quatro* cousas v. gr. *libras*, que se haõ de repartir em *sinco* partes, para se significar huma dellas. Porque he evidente, que tanto faz dividir 4 *libras* em 5 partes para tomar huma dellas, como dividir a *libra* em 5 partes para tomar 4.

97 Pelo que póde considerar-se o numerador de hum quebrado como hum *dividendo*, e o denominador como hum *divisor*. E por isto se vê o que querem dizer os restos da divisaõ reduzidos ao modo fraccionario, que assima lhes démos (n. 60).

98 Donde se segue, que hum numero inteiro póde sempre reduzir-se a huma expressaõ fraccionaria, fazendo delle o numerador, e dando-lhe a unidade por denominador. Assim 3 e $\frac{3}{1}$, 5 e $\frac{5}{1}$ representaõ huma mesma cousa.

99 Segue-se tambem, que para converter em *dizima* qualquer quebrado, naõ he necessario mais do que considerar o numerador como hum resto de divisaõ, em que o denominador tenha servido de divisor, e obrar como assima fica declarado (pag. 56), tendo a advertencia de pôr huma cifra primeiro na casa das unidades. Deste modo se achará, que $\frac{3}{5}$ vale 0, 6, que $\frac{5}{9}$ vale 0, 5555 &c., que $\frac{1}{25}$ vale 0, 04, e assim dos mais.

De

Desta maneira se pódem tambem reduzir á *dizima* os numeros *complexos*.

Se, por exemplo, quizermos reduzir 3^T 5^P 8^p 7^l a partes decimais da *toesa*, de modo que se naõ despreze ametade de huma *linha*, observaremos que a *toesa* contém 864 *linhas*, e por conseguinte 1728 *meias-linhas*. Pelo que, para naõ desprezar ametade de huma *linha*, será necessario que a *dizima* passe da casa das millesimas, ou que chegue até as decimas-millesimas.

Isto supposto, converteremos 5^P 8^p 7^l tudo em *linhas* (n. 57), e acharemos 823^l, ou $\frac{823}{864}$ de huma *toesa*. E reduzindo este quebrado á *dizima*, como assima dissemos, resultará 0,9525, e por conseguinte o numero proposto ficará reduzido a 3^T, 9525.

§§ As fracções particulares da *dizima* pódem reduzir-se ás ordinarias de dous modos diversos.

Porque em primeiro lugar, se a quizermos conservar na fórma decimal, reduzir-se-haõ á maneira dos numeros inteiros, cuja natureza imitaõ (n. 86, 98). Se v. gr. quizermos pôr em figura de quebrado esta expressaõ 0,23, bastará escrever $\frac{0,23}{1}$; e se a quizermos reduzir ao denominador 7, praticando como nos inteiros, teremos $\frac{1,61}{7}$ (n. 86).

Querendo porém tirar-lhes a fórma decimal, as letras da *dizima* serviráõ de numerador, e para denominador se tomará a unidade com tantas

tas cifras adiante, quantas eraõ as caſas da dizima. Aſſim 0,23 he o meſmo que $\frac{23}{100}$; 0,0071 o meſmo que $\frac{71}{10000}$ &c.

Póde além diſto reduzir-ſe facilmente a hum quebrado ordinario a meſma *dizima* continuada ao infinito, com tanto que depois de certos intervallos tornem a vir as meſmas letras, e pela meſma ordem; *dizima*, que chamamos *periodica*. Deſte modo he a experſſaõ 0,321321321 &c., na qual ſe ſuppoem o periodo dos tres algariſmos 321 repetido infinitamente.

E com effeito, ſe os periodos começarem logo deſde a virgula, tomar-ſe-há hum delles para numerador, e o denominador ſerá hum numero compoſto de tantos 9, quantas forem as caſas de cada periodo. Aſſim acharemos que 0,321321321 &c. vale exactamenre $\frac{321}{999}$; que 0,013201320132 &c. vale $\frac{132}{9999}$; e que 0,777777 &c., fracçaõ igualmente periodica, cujos periodos conſtaõ de huma ſó letra, ſe reduz a $\frac{7}{9}$.

Porém, ſe os periodos naõ começarem logo deſde a virgula, ſerá ſempre o denominador compoſto de tantos 9 como ſaõ as caſas de cada periodo, mas eſſes ſeguidos de tantas cifras quantas ſaõ as caſas decimais antes do primeiro periodo. E para acharmos o numerador multiplicaremos as letras antecedentes ao primeiro periodo pelo denominador, no qual naõ attenderemos ás cifras que ſe lhe ajuntáraõ;

raõ; e ao producto ajuntaremos hum dos periodos. Para reduzirmos v. gr. a hum quebrado ordinario esta expressaõ 1,357121212 &c., como cada periodo consta de duas letras, e antes do primeiro se achaõ tres casas de *dizima*, será o denominador 99000. E multiplicando os algarismos 1357, que precedem ao primeiro periodo, pelo denominador 99, cortadas as cifras; teremos o producto 134343, ao qual ajuntando o periodo 12, será o numerador 134355; e por conseguinte o quebrado que se busca $\frac{134355}{99000}$. Do mesmo modo acharemos, que 0,00473473473 &c. se reduz a $\frac{473}{99900}$; que 0,633333 &c. vale $\frac{57}{90}$; e assim dos mais.

Das operações Arithmeticas sobre os Quebrados.

100 O Calculo dos quebrados se pratíca por meio das mesmas quatro operações, que já temos mostrado nos numeros inteiros. As duas primeiras de *Somar* e *Diminuir* requerem pela maior parte huma operaçaõ preparatoria, as outras duas naõ carecem de preparaçaõ alguma.

De Somar Quebrados.

101 SE os quebrados tiverem a mesma denominaçaõ, para saber a sua soma naõ he necessario mais do que somar os numeradores,

res, e dar a ſoma delles ao meſmo denominador.

Por exemplo: Havendo de ſomar os quebrados $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{5}{7}$, como todos ſaõ da meſma denominaçaõ, ajuntaremos os numeradores 2, 3, 5, e a ſoma 10 ſerá o numerador, que com o meſmo denominador 7 dará a ſoma total que ſe buſca $\frac{10}{7}$, a qual ſe reduz a $1\frac{3}{7}$ (n. 85).

102 Se os quebrados propoſtos forem de differente denominaçaõ, primeiramente ſe reduziráõ ao meſmo denominador, como aſſima moſtrámos (n. 90, 91); e depois ſe ſomaráõ como no primeiro caſo.

Tendo de ſomar, por exemplo, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, transformaremos primeiro os ditos quebrados em $\frac{45}{60}$, $\frac{40}{60}$, $\frac{48}{60}$; e depois buſcaremos a ſua ſoma, que he $\frac{133}{60}$, ou $\frac{13}{60}$ (n. 85).

De Diminuir Quebrados.

103 SEndo ambos os quebrados da meſma denominaçaõ, diminuir-ſe-há o numerador de hum do numerador do outro, e ao reſto ſe dará o meſmo denominador.

Aſſim, para diminuirmos $\frac{5}{9}$ de $\frac{8}{9}$, tiraremos o numerador 5 do numerador 8, e ao reſto 3 daremos o meſmo denominador 9; donde ſerá o reſto que buſcamos $\frac{3}{9}$, que ſe reduz a $\frac{1}{3}$ (n. 93).

104 Se de 9 $\frac{5}{8}$ quizermos tirar 4 $\frac{7}{8}$, como $\frac{7}{8}$ naõ pódem diminuir-ſe de $\frac{5}{8}$, tomaremos huma unidade do inteiro 9, a qual reduzida a oitavos, e ſomada com $\frac{5}{8}$ faz $\frac{13}{8}$ (n. 86). Entaõ, tirando $\frac{7}{8}$ de $\frac{13}{8}$, ficaráõ $\frac{6}{8}$; e tirando 4 de 8 (attendendo-ſe á unidade ja tirada do numero 9) ficaráõ 4. E aſſim ſerá o reſto total 4 $\frac{6}{8}$, ou 4 $\frac{3}{4}$ (n. 93).

105 Sendo os quebrados de differente denominaçaõ, primeiro ſe reduziráõ ao meſmo denominador (n. 90); e feita eſta perparaçaõ, ſe obrará como no primeiro caſo.

Aſſim, para diminuirmos $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$, converteremos eſtes quebrados em $\frac{8}{12}$ e $\frac{9}{12}$; e feita a diminuiçaõ, reſultará o reſto $\frac{1}{12}$.

De Multiplicar Quebrados.

106 A Multiplicaçaõ dos quebrados ſe executa por meio da regra ſeguinte: *Multipliquem-ſe os dous numeradores hum pelo outro, e da meſma ſorte os denominadores; o producto dos primeiros ſerá o numerador, e o dos ſegundos o denominador do producto que ſe buſca.*

Querendo, por exemplo, multiplicar $\frac{4}{5}$ por $\frac{2}{3}$, multiplicaremos o numerador 4 pelo numerarador 2, e acharemos 8 para numerador; depois multiplicaremos os denominadores 5, e 3, e acharemos 15 para denominador do producto, o qual por conseguinte será $\frac{8}{15}$.

Para se entender a rasaõ desta regra, he necessario trazer á lembrança que mutiplicar dous numeros he tomar hum delles tantas vezes quantas saõ as unidades do outro. Em virtude desta mesma definiçaõ, multiplicar $\frac{4}{5}$ por $\frac{2}{3}$ vem a ser o mesmo que tomar $\frac{2}{3}$ de huma vez o quebrado $\frac{4}{5}$, ou tomar 2 vezes a terça parte de $\frac{4}{5}$. Multiplicando pois 5 por 3, os *quintos* de $\frac{4}{5}$ se mudaõ em 15 *avos*, isto he, em partes *tres vezes* menores; e multiplicando 4 por 2, tomaõ-se *duas vezes* essas novas partes: logo toma-se duas vezes a terça parte de $\frac{4}{5}$; e por conseguinte se multiplica effectivamente $\frac{4}{5}$ por $\frac{2}{3}$.

107 Havendo de multiplicar-se quebrado por inteiro, ou inteiro por quebrado, o inteiro se reduzirá a quebrado, dando-lhe a unidade por denominador, e a operaçaõ entrará na regra geral assima dada.

Por exemplo: Se quizermos multiplicar 9 por $\frac{4}{7}$, reduziremos o inteiro 9 á forma de quebrado $\frac{9}{1}$, e multiplicando $\frac{9}{1}$ por $\frac{4}{7}$, acharemos o producto $\frac{36}{7}$, o qual se reduz a $5\frac{1}{7}$ (n. 85.).

Don-

Donde ſe vê que para multiplicar quebrado por inteiro, ou inteiro por quebrado, a operaçaõ ſe reduz a multiplicar o inteiro pelo numerador do quebrado.

108 Se forem *mixtos* os numeros, que ſe haõ de multiplicar, iſto he, ſe forem compoſtos de inteiro e quebrado, cada hum dos inteiros ſe reduzirá á denominaçaõ do ſeu quebrado, e ſe ſomará com elle (n. 86); e aſſim entraráõ na meſma regra aſſima dada (n. 106).

Por exemplo: Se tivermos de multiplicar $12\frac{3}{5}$ por $9\frac{3}{4}$, reduziremos primeiro o multiplicando a $\frac{63}{5}$, e o multiplicador a $\frac{39}{4}$; e depois multiplicaremos $\frac{63}{5}$ por $\frac{59}{4}$, e teremos o producto $\frac{2457}{20}$, o qual ſe reduz a $122\frac{17}{20}$ (n. 85).

§§ Na multipliçaõ dos quebrados póde logo attender-ſe a que o producto ſe ache já reduzido aos termos mais ſimples.

Para iſſo he primeiramente neceſſario, que os meſmos quebrados, que ſe haõ de multiplicar, ſe reduzaõ aos menores termos. Depois, deverá advertir-ſe ſe os termos *heterogeneos*, iſto he, o numerador de hum quebrado com o denominador do outro, tem algum diviſor commum, e por elle ſe partiráõ, ou pelo maior delles, quando forem muitos. Os quebrados que deſte modo reſultarem, ſe multiplicaráõ hum pelo outro, e o producto ſerá o meſmo, que o dos quebrados propoſtos, abbreviado aos ſeus menores termos.

Que-

Querendo v. gr. multiplicar $\frac{3}{5}$ por $\frac{5}{7}$, reflectiremos que o denominador do primeiro quebrado, e o numerador do ſegundo pódem ambos partir-ſe por 5, e ficaráõ reduzidos a 1; e aſſim conheceremos logo, ſem fazer operaçaõ alguma, que o producto he $\frac{3}{7}$.

Outro exemplo. Se houvermos de multiplicar $\frac{18}{13}$ por $\frac{26}{63}$, obſervaremos, que o numerador do primeiro quebrado com o denominador do ſegundo tem ambos o diviſor maior commum 9, ſendo pelo qual divididos ſe reduzem a 2, e 7; e que o denominador do primeiro com o numerador do ſegundo tambem tem o diviſor commum 13, pelo que ſe reduzem a 1, e 2. Deſte modo ſe tornaráõ os quebrados propoſtos em $\frac{2}{1}$, $\frac{2}{7}$, cujo producto $\frac{4}{7}$ he o que ſe buſca, reduzido á forma mais ſimples, o qual pela operaçaõ ordinaria ſahiria neſtes termos $\frac{684}{819}$, que dariaõ mais trabalho para ſe reduzirem á ſimplicidade daquelles.

De Repartir Quebrados.

109 PAra ſe dividir hum quebrado por outro a regra he deſta maneira; *Mudem-ſe os termos do diviſor, paſſando o numerador para denominador, e o denominador para numerador; multiplique-ſe o dividendo pelo diviſor aſſim preparado; e o producto ſerá o quociente que ſe buſca.*

Que-

Querendo v. gr. partir $\frac{4}{5}$ por $\frac{2}{3}$, primeiramente mudaremos os termos do diviſor $\frac{2}{3}$, o qual ficará $\frac{3}{2}$; depois multiplicaremos $\frac{4}{5}$ por $\frac{3}{2}$ (n. 106), e o producto $\frac{12}{10}$, ou $1\frac{1}{5}$ (n. 75, 93), ſerá o quociente que buſcamos.

Para ſe entender a raſaõ deſta regra, deve obſervar-ſe que partir $\frac{4}{5}$ por $\frac{2}{3}$ he buſcar quantas vezes ſe contém $\frac{2}{3}$ em $\frac{4}{5}$. Iſto ſuppoſto, he facil de ver que 2 *terços* ſe devem conter em $\frac{4}{5}$ tres vezes mais doque 2 unidades. He tambem evidente, que $\frac{4}{5}$ contem a unidade $\frac{4}{5}$ de huma vez, e que por conſeguinte contem 2 unidades ametade de $\frac{4}{5}$ de huma vez. Logo deve o quebrado $\frac{4}{5}$ dividir-ſe primeiro por 2, e depois multiplicar-ſe por 3, ou tomar-ſe tres vezes a ametade de $\frac{4}{5}$, que vem a ſer o meſmo que multiplicar por $\frac{3}{2}$, quebrado inverſo do diviſor $\frac{2}{3}$.

110 Se houver de partir-ſe quebrado, por inteiro, ou inteiro por quebrado, o inteiro ſe reduzirá a quebrado, tomando a unidade por denominador, e a diviſaõ ſe praticará conforme a meſma regra.

Tendo v. gr. de partir 12 por $\frac{5}{7}$, a operaçaõ

çaõ ſe reduzirá a dividir $\frac{12}{1}$ por $\frac{5}{7}$, ou (n. 109) a multiplicar $\frac{12}{13}$ por $\frac{7}{5}$, e o quociente ſerá $\frac{84}{5}$, ou $16 \frac{4}{5}$. Do meſmo modo, ſe quizermos partir $\frac{3}{4}$ por 5, dividiremos o quebrado por $\frac{5}{1}$, ou multiplicaremos por $\frac{1}{5}$, e ſerá o quociente $\frac{3}{20}$.

Donde ſe vê, que para dividir hum quebrado por hum inteiro, a operaçaõ ſe reduz ſimpleſmente a multiplicar o inteiro pelo denominador do quebrado.

111 Quando os inteiros forem accompanhados de quebrados, cadahum ſe reduzirá á denominaçaõ do ſeu quebrado (n. 86), e a operaçaõ ſe fará como nos exemplos antecedentes.

Havendo v. gr. de partir $54 \frac{3}{5}$ por $12 \frac{2}{3}$, o dividendo ſe reduzirá a $\frac{273}{5}$, e o diviſor a $\frac{38}{3}$. Depois partir-ſehá $\frac{273}{5}$ por $\frac{38}{3}$, ou (n. 109.) multiplicar-ſe-há por $\frac{3}{38}$; e ſerá o quociente $\frac{819}{190}$, ou $4 \frac{59}{190}$ (n. 85.).

§ Na diviſaõ dos quebrados, ſerá tambem conveniente ter cuidado de achar logo o quociente, abbreviado aos menores termos poſſiveis.

Iſto ſe conſeguirá: Primeiramente, reduzindo os meſmos quebrados propoſtos aos ſeus menores termos, ſe o naõ eſtiverem; e depois, dividindo os termos *homologos*, iſto he, ambos os nu-

numeradores, ou ambos os denominadores, pelo seu maior divisor commum, quando o tiverem. Deste modo resultaráõ outros dous quebrados, que daráõ o mesmo quociente dos primeiros, e esse já reduzido aos termos mais simples.

Havendo v. gr. de partir $\frac{5}{7}$ por $\frac{5}{6}$, advertiremos logo que ambos os numeradores saõ divisiveis por 5, e se reduzem a 1; e por tanto veremos, sem fazer operaçaõ alguma, que o quociente he $\frac{6}{7}$.

Do mesmo modo, se houvessemos de partir $\frac{3}{5}$ por $\frac{4}{5}$, como os denominadores se reduzem a 1, logo conheceriamos sem calculo algum que o quociente he $\frac{3}{4}$.

Outro exemplo. Se nos pedirem o quociente de $\frac{22}{39}$ *avos* partidos por $\frac{11}{13}$, advertiremos que os numeradores se pódem ambos dividir por 11, e se reduzem a 2, e 1; e que os denominadores partidos por 13, se reduzem tambem a 3, e 1. Por conseguinte teremos para repartir $\frac{2}{3}$ por $\frac{1}{1}$, e será o quociente pedido $\frac{2}{3}$, o qual pela regra ordinaria se acharia em termos muito compostos $\frac{286}{429}$ ʃʃ

Uso dos Quebrados.

112 PElo que assima dissemos (n. 96.), he facil de ver, como se ha de mostrar o valor de huma fracçaõ por meio das divisoens

ens eſtabelecidas da unidade da queſtaõ.

Pergunta-ſe v. gr. quanto valem $\frac{5}{7}$ de huma *libra*. Como $\frac{5}{7}$ de huma *libra* valem o meſmo que $\frac{1}{7}$ de 5 *libras* (n. 96), reduziremos 5 *libras* a *ſoldos* (n. 57), e teremos 100 *ſoldos*; dividindo eſtes por 7, ſahiráõ no quociente 14ſ, e ſobraráõ 2ſ. Reduzindo tambem eſtes a *dinheiros*, teremos 24^d, que repartidos por 7 daráõ $3^d\ \frac{3}{7}$. E deſte modo diremos, que $\frac{5}{7}$ de huma *libra* valem 14 *ſoldos*, 3 *dinheiros*, e $\frac{3}{7}$ de hum *dinheiro*.

Se nos perguntaſſem quanto valem $\frac{5}{7}$ de 24 *libras*, he viſivel que podiamos buſcar primeiro o valor de $\frac{5}{7}$ de huma *libra*, como acabamos de moſtrar, e multiplicalo depois por 24. Porem he mais expedito o multiplicar logo as 24 *libr.* por $\frac{5}{7}$, e ſahirá o producto $\frac{120}{7}$ de huma *libra* (n. 107), ou 17 *libras* e $\frac{1}{7}$ de huma *libra*. Eſte ultimo quebrado reduzido a *ſoldos* e *dinheiros* dará 2ſ $10^d\ \frac{2}{7}$; e por conſeguinte o valor total de $\frac{5}{7}$ de 24 *libr.* ſerá 17^{lb} 2ſ $10^d\ \frac{2}{7}$.

113 As fracções decimais, como naõ tem denominador, ainda ſaõ mais faceis de reduzir ás partes da unidade, eſtabelecidas pelo uſo ordinario.

Querendo ſaber, por exemplo, quanto valem

lem 0,532 de huma *toesa* em partes da divisaõ vulgar da mesma *toesa*; como esta consta de 6 *pés*, multiplicaremos 0,532 por 6, e o producto 3,192 mostrará 3 *pés*, e 0,192 de hum *pé*. depois, como o *pé* contém 12 *pollegadas*, multiplicaremos 0,192 por 12, e o producto 2,304 dará 2 *pollegadas*, e 0,304 de huma *pollegada*. Finalmente, como a *pollegada* se compoem de 12 *linhas*, multiplicaremos 0,304 por 12, e o producto 3,648 mostrará 3 *linhas*, e 0,648 de huma *linha*. Pelo que diremos, que o valor total de 0,532 de huma *toesa* he 3 *pes*, 2 *pollegadas*, 3 *linhas* e 0,648 de huma *linha*; e assim se procederá em casos semelhantes.

114 A avaliaçaõ dos quebrados nos conduz naturalmente a fallar dos *quebrados de quebrados*. Por este nome entendemos huma serie de fracções separadas humas das outras pela particula *de*, como v. gr. $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{3}{4}$; $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{3}{4}$ *de* $\frac{5}{6}$, &c. Porque qualquer quebrado naõ sómente póde reportar-se á unidade, ou a hum numero inteiro, como $\frac{3}{4}$ *de huma libra*, $\frac{3}{4}$ *de vinte libras*, mas tambem a qualquer outro quebrado, cujo valor se póde conceber como hum todo, e dividir em qualquer numero de partes, para significar algumas dellas. Assim de $\frac{3}{4}$ podemos mostrar $\frac{2}{3}$; e depois concebendo dous terços de tres quartos como hum todo, podemos dividilo em *seis* partes, e dellas tomar *sinco*, donde resultaõ $\frac{5}{6}$ *de* $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{3}{4}$.

Estes quebrados successivamente relativos huns aos outros podem converter-se em hum só, que unicamente se reporte á unidade principal, multiplicando todos os numeradores huns pelos outros, e da mesma sorte os denominadores. Assim $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{3}{4}$ vale o mesmo que $\frac{6}{12}$, ou $\frac{1}{2}$; e $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{3}{4}$ *de* $\frac{5}{6}$ o mesmo que $\frac{30}{72}$, ou $\frac{5}{12}$.

E com effeito he facil de ver que tomar $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{3}{4}$ nada mais he que multiplicar $\frac{3}{4}$ por $\frac{2}{3}$, ou tomar *duas* vezes a *terça* parte do quebrado $\frac{3}{4}$. Do mesmo modo, tomar $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{3}{4}$ *de* $\frac{5}{6}$ vem a ser o mesmo que tomar $\frac{6}{12}$ *de* $\frac{5}{6}$, porque $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ fazem $\frac{6}{12}$; e pelo que temos dito $\frac{6}{12}$ *de* $\frac{5}{6}$ se reduzem a $\frac{30}{72}$, ou $\frac{5}{12}$.

Se nos pedirem o valor de $\frac{3}{4}$ de $5\frac{3}{8}$, reduziremos o inteiro 5 á denominaçaõ do seu quebrado (n. 86.), e teremos $\frac{3}{4}$ *de* $\frac{43}{8}$, que se reduzem a $\frac{129}{32}$, ou $4\frac{1}{32}$.

115 Quando huma fracçaõ involve termos algum tanto consideraveis, e naõ póde abbreviar-se pelo methodo assima dado (n. 95.), se a natureza da questaõ permittir que nos contentemos com hum valor approximado, mas reduzido a termos mais simples, poderemos usar do methodo seguinte, pelo qual acharemos alterna-

da-

43
3
129

damente valores ora maiores ora menores, mas cada vez mais convergentes para o verdadeiro, até cahirmos finalmente na meſma fracçaõ propoſta.

Tomemos por exemplo a fracçaõ $\frac{100000000}{314159265}$, a qual, como ſe moſtrará na Geometria, repreſenta proximamente a *raſaõ* entre o *diametro* e a *circunferencia* do circulo, e ſupponhamos que a queremos transformar em outras fracções menos exactas na verdade, mas reduzidas a termos mais ſimples.

Primeiramente dividiremos ambos os termos da dita fracçaõ pelo numerador, e a reduziremos a eſta fórma $\cfrac{1}{3\frac{14159265}{100000000}}$; a qual, deſprezando a fracçaõ que acompanha o denominador inteiro 3, ſe reduzirá a $\frac{1}{3}$, que he o primeiro valor approximado da fracçaõ dada, o mais exacto que he poſſivel em termos taõ ſimples, mas maior do que o verdadeiro.

Para acharmos outro valor mais chegado ao verdadeiro, na fracçaõ junta ao denominador inteiro 3, partiremos ambos os termos pelo numerador, e a reduziremos a eſta fórma $\cfrac{1}{3\cfrac{1}{7\frac{885145}{14159265}}}$;

a qual, deſprezando a fracçaõ junta ao denominador inteiro 7, ſe reduz a $\cfrac{1}{3\frac{1}{7}}$, ou (n. 86) a $\cfrac{1}{\cfrac{22}{7}}$, ou (n. 109) a $\frac{7}{22}$; que he outro valor mais exacto que o precedente $\frac{1}{3}$, mas algum tanto menor que o verdadeiro.

Se quizermos maior exactidaõ, dividiremos pelo numerador ambos os termos da fracçaõ junta ao denominador 7, e a fracçaõ primitiva ficará reduzida a esta fórma $\cfrac{1}{3\,\cfrac{1}{7\,\cfrac{1}{15\,\cfrac{882090}{885145}}}}$; a qual desprezando a fracçaõ que accompanha o denominador 15, se reduz a $\frac{106}{333}$, valor mais exacto que os precedentes, mas algum tanto maior que o verdadeiro. Porém se aqui houvermos de suspender a operaçaõ, naõ desprezaremos a fracçaõ junta ao denominador 15, mas advertindo que ella valle quasi huma unidade, ajuntaremos 1 ao dito denominador, e teremos $\cfrac{1}{3\,\cfrac{1}{7\,\cfrac{1}{16}}}$; expressaõ, que se reduz a $\frac{113}{355}$. Este he hum valor da fracçaõ proposta muito mais exacto que os precedentes, mas ainda alguma cousa menor que o ver-

verdadeiro, pois para igualar a fracçaõ propoſta lhe falta $\frac{611}{22305307815}$, ou proximamente $\frac{}{36506232}$.

¶¶ Os quebrados reduzidos á fórma, que ſe tem dado á fracçaõ propoſta pela diviſaõ ſucceſſiva das fracções juntas aos denominadores inteiros, chamaõ-ſe *quebrados continuos.*

E deve notar-ſe, que a diviſaõ que fazemos neſta operaçaõ he a meſma que praticamos, quando buſcamos o maior diviſor commum dos termos de hum quebrado, para o abbreviarmos exactamente, ſendo poſſivel. Por iſſo achando finalmente que elles naõ tem diviſor commum ſenaõ a unidade, podemos ſervirnos logo dos quocientes achados, diſpondo-os em fracçaõ continua com a unidade por numerador; e nella deſprezaremos os termos que permittir a exactidaõ, que buſcamos.

Por exemplo, Querendo reduzir o quebrado $\frac{964}{5141}$, e buſcando o diviſor maior commum dos ſeus termos, achamos que naõ tem outro que naõ ſeja a unidade. Porém como pela operaçaõ achamos os quocientes 5, 3, e 321, delles formaremos a expreſſaõ $\cfrac{1}{5\,\cfrac{1}{3\,\cfrac{1}{321}}}$, que he exactamente igual ao quebrado propoſto; e deſprezando do a fracçaõ junta ao denominador 3, que com tanto mais rasaõ se despreza quanto he mais pequena, ficará $\frac{1}{5+\frac{1}{3}}$, que se reduz a $\frac{3}{16}$; quebrado muito abbreviado, ao qual naõ falta mais do que $\frac{1}{82250}$ para igualar o quebrado proposto.

Dos numeros complexos.

116 AIndaque as regras, que até agora temos dado, se pódem igualmente applicar aos numeros *complexos*, ou *heterogeneos*, naõ deixará com tudo de ser conveniente que delles tratemos em particular, porque muitas vezes a divisaõ da unidade nelles estabelecida serve de facilitar as operações.

Há muitas especies destes numeros, em que se usaõ differentes divisoens, das quais principalmente dependem as regras do calculo. Mas naõ he necessario, que as pratiquemos todas aqui, porque os exemplos de humas se applicaõ a todas as mais, em se sabendo a natureza das suas divisoens. Eis-aqui as mais usadas entre nós.

§ O dinheiro de França pela maior parte se conta por *libras*. A *libra* consta de 20 *soldos*, e o *soldo* de 12 *dinheiros*. Estas differentes especies se distinguem com as letras iniciais dos seus nomes. Assim 32^{lo} 15^{s} 7^{d} quer dizer 32 *libras*, 15 *soldos*, e 7 *dinheiros*.

A *libra* de pezo, ou *arratel*, quasi em toda a parte se divide em 2 *marcos*, o *marco* em 8 *onças*, a *onça* em 8 *oitavas*, a *oitava* em 3 *scropulos*,

los, o *ſcropulo* em 24 *grãos*. Para os pezos maiores uſamos de *quintais*. O *quintal* ſe divide em 4 *arrobas*, e a *arroba* em 32 *arrateis*.

As medidas das couzas ſecas em Portugal ſe reduzem a *moyos*. O *moyo* conſta de 15 *fangas*, a *fanga* de 4 *alqueires*, e o *alqueire* de 4 *quartas*; medidas, que alguma couſa differem entre ſi, conforme os lugares.

Nas medidas dos liquidos uſamos de *pipas*. A *pipa* tem 25 *almudes*, o *almude* 12 *canadas*, e a *canada* 4 *quartilhos*; medidas, que tambem variaõ de grandeza, conforme os lugares.

As diſtancias locáis, ſendo maiores, medemſe por *Eſtadios*, *Milhas*, *Legoas* &c. Nas menores ſe uſa da *toeſa*. Cada *toeſa* tem 6 *pés*, o *pé* 12 *pollegadas*, a *pollegada* 12 *linhas*, e a *linha* 12 *pontos*: eſpecies, que por ſua ordem ſe aſſentaõ deſta maneira: $72^{T}\ 3^{P}\ 7^{p}\ 10^{l}\ 5^{pts.}$ A *braça* Portugueza tem 10 *palmos craveiros*, e o *palmo* 8 *pollegadas*.

A medida natural do tempo he o *dia*. Cada *dia* ſe divide em 24 *horas*, a *hora* em 60 *minutos*, o *minuto* em 60 *ſegundos* &c; e eſtes numeros por ſua ordem ſe coſtumaõ notar deſte modo: $223^{d}\ 13^{h}\ 40'\ 53''$ &c.

Hum circulo celeſte divide-ſe em 12 *ſignos*, o *ſigno* em 30 *grãos*, o *grão* em 60 *minutos*, o *minuto* em 60 *ſegundos* &c. Os ſignos marcaõ-ſe com a letra *s*, os grãos com a letra o, os minutos primeiros, ſegundos &c. com huma, duas riſcas &c, deſta maneira: $11^{s}\ 23^{o}\ 43'\ 52''\ 23'''$ &c.

Tambem ſe tem imaginado diviſões particula-

12
6
72
12
144
72
864
12
1728
864
10368

lares para avaliar a qualidade de algumas couſas, como temos o exemplo na conta do ouro, e da prata.

O ouro na ſua maior pureza, ſem liga alguma de outro metal, ſuppoem-ſe conſtar de 24 *quilates*, o quilate de 4 *grãos*, e o *grão* de 8 *oitavas*. Qualquer quantidade deſte metal v. gr. hum *marco*, ſendo puro vale como de 24 *quilates*; ſendo ametade de ouro, e a outra ametade de outro metal, como de 12 *quilates*; ſendo 5 partes de ouro, e huma de outro metal, como de 20 *quilates* &c. Deve diſtinguir-ſe o *grão* do *quilate*, do *grão* de pezo. Ao *grão* do *quilate* damos o nome de *grão de Lei*, porque tem hum valor fixo e determinado pela Lei, e o *grão* de pezo tem differente valor, confórme he mais ou menos puro o ouro, que nelle ſe contem.

Pela Lei de 4 de Agoſto de 1688 ſe fixou neſte Reino o valor de hum marco de ouro de 22 quilates em 96U000 reis; e eſta he a Lei da noſſa moeda. Repartindo o dito valor por 22, acharemos que cada quilate em hum marco vale 4U363 $\frac{7}{11}$, cada *grão* de Lei 1U090 $\frac{10}{11}$ &c.; e conſeguintemente, que o marco de 24 quilates vale 104U727 $\frac{3}{11}$ reis. Pela meſma Lei ſe ordenou, que os Bate-folhas uſaſſem do ouro de 23 quilates, e que os Ourives fizeſſem as ſuas obras de 20 quilates e meio. Neſtas, ſuppoſto o valor fundamental do marco de 22 quilates, deveria ſahir o marco a raſaõ de 89U454$\frac{6}{11}$ reis, a onça a raſaõ de 11U181 $\frac{9}{11}$, e a oitava a raſaõ de 1U397$\frac{8}{11}$. Porém para evitar o embaraço dos quebrados, a meſma Lei regulou o marco a 89U600 reis, a 11U200 a onça, e a 1U400 a oitava.

A prata, ſem liga alguma, ſuppoem-ſe conſtar de 12 *dinheiros*, cada *dinheiro* de 24 *grãos de Lei*, e cada *grão* de 4 *quartas*. E por eſta diviſaõ ſe regula o valor de qualquer quantidade de prata, a qual ſendo pura valerá como de 12 *dinheiros*; tendo ametade de liga, como de 6 *dinheiros* &c.

Pela meſma Lei já citada ſe fixou neſte Reino o valor de hum marco de prata de 11 *dinheiros*, que he a Lei da moeda, em 6U000 reis. Em conſequencia deſte valor fundamental, vale cada *dinheiro* em hum marco U545$\frac{5}{11}$; e o marco de 12 *dinheiros*, que he a Lei dos Bate-folhas, vale 6U545$\frac{5}{11}$. Pela meſma raſaõ o marco de 10 *dinheiros* e 6 *grãos*, que he a Lei dos Ourives da prata, deveria valer exactamente 5U590$\frac{10}{11}$. Porém, para evitar o embaraço dos quebrados, a meſma Lei reduzio o dito marco a 5U600 reis.

He de advertir, que o dinheiro de ouro, e prata alem do valer da Lei, que chamamos intrinſeco, tem tambem hum valor de ſinal, procedido dos direitos da caſa da moeda. A peça de meia onça de ouro de 22 *quilates* tem de pezo 6U000 reis; e pelo cunho vale 6U400; e o ciucruzado novo, que tem meia onça de prata de 11 *dinheiros*, péza U375 reis, e corre por U480 reis. ʒʒ

De Somar os numeros complexos.

117 PAra fazer esta operaçaõ, escrevem-se todas as addições, humas debaixo das outras, de maneira que as unidades da mesma especie fiquem dispostas em huma colunna vertical; e tendo passado huma risca por baixo, principia-se a operaçaõ pelas unidades da infima especie da direita para a esquerda. Se a soma dellas naõ chegar a fazer huma unidade da especie proximamente maior, escrever-se-ha debaixo da risca; e se chegar a fazer huma, ou mais das ditas unidades, escrever-se-há sómente o que ficar, tiradas essas unidades, ou cifra, naõ ficando resto; e as tais unidades se levaráõ para a colunna seguinte, na qual se praticará o mesmo, e assim por diante.

Exemplo I.

QUerendo somar - - $227^{lb}\ 14^{s}\ 8^{d}$

	2549	18	5
	184	11	11
	17	10	7
	2979^{lb}	15^{s}	7^{d}	Soma.

Ordenadas as addições, como se vê no exemplo, principiaremos pelos *dinheiros*, cuja soma faz 31^{d}, nos quais se contêm 2 vezes 12^{d}, isto to he, $2^{ſ}$, e álem diſſo ſobraõ 7^{d}. Por tanto aſſentaremos os 7^{d} na colunna reſpectiva, e levaremos $2^{ſ}$ para a colunna dos *ſoldos*. Neſta acharemos, que as unidades fazem 15, do qual numero aſſentaremos logo a letra 5 debaixo das unidades reſpectivas, e levaremos a dezena 1 para a ſomar com as dezenas dos meſmos *ſoldos*, as quais acharemos que fazem 5. E porque cada duas dezenas de *ſoldos* fazem huma *libra*, partiremos mentalmente o 5 por 2, e teremos por quociente 2^{lb}, ficando o reſto 1, que he 1 dezena de *ſoldos*; pelo que aſſentaremos eſta dezena no ſeu lugar, e levando 2^{lb} para a colunna ſeguinte, acharemos finalmente que a ſoma total he 2979^{lb} $15^{ſ}$ 7^{d}.

Exemplo II.

SE quizermos ſomar as quatro addiçóes ſeguintes - - - - - - -

54^{T}	2^{P}	3^{p}	9^{l}
12	5	4	11
9	4	11	11
8	2	9	10
85^{T}	3^{P}	6^{p}	5^{l} Soma.

Principiaremos pelas *linhas*, que daõ 41^{l}, ou 3^{p} 5^{l}; e por conſeguinte aſſentaremos ſómente as 5^{l}, e levaremos as 3^{p} para a colunna ſeguinte. Eſta dará a ſoma 30^{p}, ou 2^{P} 6^{p}; e por iſſo aſſentaremos nella as 6^{p}, e levaremos os 2^{P} para a colunna ſeguinte; cuja ſoma acharemos ſer 15^{P}, ou 2^{T} 3^{P}. Pelo que aſſentando nella 3^{P}, e levando 2^{T} para a colunna ſeguinte, teremos a ſoma total 85^{T} 3^{P} 6^{p} 5^{l}.

Ex-

Exemplo III.

55 Havendo de somar - 23^d 13^h $43'$ $52''$.

23^d	13^h	$43'$	$52''$
35	0	12	41
0	23	0	24
12	14	23	5
72^d	3^h	$20'$	$2''$ Soma.

Na columna dos *segundos* acharemos que as unidades fazem 12, e logo escreveremos $2''$, e levaremos a dezena 1 para a somarmos com as dezenas, as quais fazem 12. E como 6 dezenas de *segundos* fazem hum *minuto*, partiremos mentalmente 12 por 6, e o quociente mostrará $2'$, os quais levaremos para a columna seguinte, e como naõ ficou resto algum da dita divisaõ, naõ escreveremos nada nas dezenas dos *segundos*. Na columna seguinte as unidades daõ 10, e logo assentaremos a 0, e levaremos a dezena 1 para a somarmos com as dezenas, as quais fazem 8; e partindo-as por 6 o quociente será 1^h, que guardaremos para a columna das *horas*, e ficaráõ 2, que assentaremos na casa das dezenas dos minutos. Na columna das *horas* acharemos a soma total 51^h, que saõ 2^d 3^h; e por conseguinte assentado as 3^h, e levando os 2^d, para a sua respectiva columna, acharemos que as addições propostas somaõ 72^d 3^h $20'$ $2''$

Exem-

Exemplo IV.

SE tivermos para ſomar $11^s\ 23^o\ 43'\ 53''$

11^s	23^o	$43'$	$53''$
0	12	22	4
7	21	3	12
3	0	25	37
10^s	27^o	$34'$	$46''$ Som.

Somaremos os *ſegundos* e *minutos*, como no exemplo precedente. E chegando ás unidades dos *gráos*, logo aſſentaremos a ſoma dellas, 7^o na meſma caſa, e paſſaremos ás dezenas, cuja ſoma he 5; e porque 3 dezenas de *gráos* fazem hum *ſigno*, na caſa das dezenas aſſentaremos 2, e levaremos huma unidade para a columna dos *ſignos*. Eſta dá a ſoma 22; mas porque no calculo deſtes numeros ſe lançaõ fóra os circulos inteiros, ou 12^s, todas as vezes que os houver na ſoma; de 22^s tiraremos 12^s, e aſſentaremos o reſto 10^s; donde a ſoma que buſcamos ſerá $10^s\ 27^o\ 34'\ 46''$ ʃʃ

De Diminuir os numeros complexos.

118 PAra diminuir hum numero complexo de outro, ambos ſe aſſentaõ, como no Somar, e a operaçaõ ſe principia tambem pela menor eſpecie. Se o numero inferior ſe póde tirar do ſuperior, feita a ſubtracçaõ, o reſto ſe eſcreve por baixo da riſca. Porém naõ ſe podendo tirar, o numero ſuperior ſe augmentará com o que produzir huma unidade da eſpecie immediatamente maior reduzida ás unidades da columna em que eſtamos. Entaõ feita a ſubtracçaõ, ſe eſcreverá o reſto em baixo; e o numero de quem

ſe

ſe tomou a unidade ſe tratará mentalmente ſem ella na operaçaõ ſeguinte, na qual ſe procederá do meſmo modo, e aſſim por diante.

Exemplo I.

SE do numero - - - - - - 143^{lb} 17 / 6^d
quizermos tirar - - - - - 75 12 9

68^{lb} 4 / 9^d Reſto.

Como de 6^d naõ ſe pódem tirar 9^d, de 17 / tomaremos mentalmente 1 / que vale 12^d, e ajuntando eſtes com os 6^d teremos 18^d, dos quaes tirando 9^d, ficaõ 9^d, que aſſentaremos por baixo. E no lugar ſeguinte naõ tiraremos 12 / de 17 /, mas de 16 /, por cauſa da unidade que já tirámos dos 17 /; eſcreveremos o reſto 4 /. Finalmente tirando 75^{lb} de 143^{lb} ficaõ 68^{lb}; e por conſeguinte o reſto total ſerá 68^{lb} 4 / 9^d.

Exemplo II. 19

SE de - - - - - - - - 163^{lb} 0 / 5^d
·84· houvermos de tirar - - 48 18 9

78^{lb} 1 / 8^d. Reſto.

Naõ podendo tirar 9^d de 5^d, e naõ havendo na caſa dos *ſoldos* numero, do qual tomemos huma unidade, tomalla-hemos de 163^{lb}, a qual valerá 20 /. Deſtes deixaremos mentalmente 19 / no lugar vazio dos *ſoldos*, e con-

ver

verteremos ſómente 1 ſ em *dinheiros*, os quaes ajuntaremos com os 5^d; e feita a operaçaõ, como no exemplo antecedente, acharemos o reſto 78^{lb} 1 ſ 8^d.

Exemplo III.

55 SE do numero - 7^s 12^o $20'$ $42''$
quizermos tirar 4 23 36 23. ·23.

2^s 18^o $44'$ $19''$ Reſto.

Em chegando ás dezenas dos *minutos* acharemos para diminuir 3 de 1; e como iſto naõ póde ſer, tomaremos huma unidade dos 12^o, a qual vale 6 dezenas de minutos, e com 1 fazem 7, das quais tiraremos as 3. Do meſmo modo nas dezenas dos *gráos* acharemos 2 para tirar de 0, e por iſſo tomaremos huma unidade dos 7^s, a qual nos lembraremos que vale 3 dezenas de *gráos*; e acabando a operaçaõ teremos o reſto 2^s 18^o $44'$ $19''$.

No calculo deſtes numeros muitas vezes ſe diminue hum numero maior de outro menor, porque a eſte ſe póde ajuntar para eſſe effeito hum circulo inteiro, ou 12^s.

Exemplo IV.

SE de - - - - - - - 3^s 0^o $12'$ $27''$
houvermos de tirar 9 15 27 22

5^s 14^o $45'$ $5''$ Reſto.

Primeiramente nas dezenas dos *minutos*, ſendo neceſſario tomar huma unidade da caſa dos *grãos*, que a naõ tem, tomalla-hemos dos 3^s, a qual valerá 30^o, e deſtes deixaremos 29^o na meſma caſa dos *grãos*, e tomaremos ſómente 1^o, que converteremos em 6 dezenas, para fazermos a ſubtracçaõ. Continuando a operaçaõ teremos finalmente para diminuir 9^s de 2^s pelo que ajuntaremos 12^s á 2^s, e feita a ſubtracçaõ ſerá o reſto que buſcamos $5^s\,14^o\,45'\,5''$. ∬

Multiplicaçaõ dos numeros complexos.

119 A praxe deſta operaçaõ póde reduzir-ſe em geral á multiplicaçaõ dos quebrados ordinarios, conforme a regra que aſſima temos dado (n. 106).

Porque v. g. ſe quizermos ſaber o feitio, que deve pagar-ſe por $54^T\,2^P$ de obra, tendo-ſe ajuſtado a *toeſa* a raſaõ de $42^{lb}\,17^{ſ}\,8^d$; podemos converter o multiplicando em *dinheiros* (n. 57), que dará 10292^d. E porque o *dinheiro* he $\frac{1}{240}$ de huma *libra*, reduzirſe-há o multiplicando a $\frac{10292}{240}$ da meſma *libra*. Igualmente o multiplicador $54^T\,3^P$ convertido todo em *pés* dará 327^P; e porque o *pé* he $\frac{1}{6}$ da *toeſa*, ficará o dito multiplicador reduzido a $\frac{327}{6}$ da meſma *toeſa*. Por conſequencia, a queſtaõ ſe reduz a multiplicar a fracçaõ $\frac{10292}{240}$ de huma li-

libra por $\frac{327}{6}$ (n. 106) ; donde reſulta o producto $\frac{3365484}{1440}$ da meſma *libra*, o qual ſe reduz finalmente (n. 112) a $2337^{lb}\ 2ſ\ 10^{d}$.

Eſte methodo ſe extende a toda a ſorte de numeros complexos. Porém, como o que agora moſtraremos ſe executa com menos trabalho, naõ nos demoraremos mais com elle.

120 O numero, que ſe contém em outro algumas vezes exactamente, chama-ſe parte *aliquota* delle; e o que ſe naõ contém exactamente, parte *aliquanta*. Aſſim 3 he parte *aliquota* de 12, e *aliquanta* de 8.

Multiplicar, coma já diſſemos, nada mais he que tomar o multiplicando hum certo numero de vezes. Se v. g. qualquer numero ſe houver de multiplicar por 8 $\frac{3}{4}$, deveremos tomallo 8 vezes, e alem diſſo $\frac{3}{4}$ de huma vez. Ora de dous modos podemos tomar os $\frac{3}{4}$ de hum numero; ou buſcando hum *quarto* delle, e repetindo-o 3 vezes; ou tomando primeiramente a ſua ametade, e depois ametade da meſma ametade. aſſim v. g.

Se tiveſſemos de multiplicar 84
por - - - - - - - - - - - - - 8 $\frac{3}{4}$

672
42
21

735. Producto.

 Pri-

Primeiramente, multiplicando pelo inteiro 8, teriamos o producto 672. Depois, para tomarmos com mais facilidade os $\frac{3}{4}$ de 84, resolveriamos o quebrado $\frac{3}{4}$ em $\frac{2}{4}$, ou $\frac{1}{2}$, e $\frac{1}{4}$. E assim tomando a ametade de 84, que he 42, e a ametade desta que he 21, e reunindo os tres productos parciais, achariamos o producto total 735.

Para isto se applicar aos numeros complexos, devemos notar que as differentes unidades, de que elles se compoem, saõ quebrados tanto entre si, como a respeito da unidade principal; e que para se multiplicarem com mais facilidade, he por conseguinte muito conveniente resolvellas em partes aliquotas tanto da unidade principal, como humas das outras. Quando por esta resoluçaõ naõ se puderem haver partes aliquotas, que facilitem o calculo, suprir-se-há com productos subsidiarios; da maneira, que mostraremos nos exemplos seguintes.

Exemplo I.

PErgunta-se, quanto devem custar $54^{T}\ 3^{P}$ de obra, a rasaõ de 72^{lb} por *toesa*?

Deveremos pois multiplicar - 72^{lb}
por - - - - - - - - - - - - - $54^{T}\ 3^{P}$

$$\begin{array}{r} 288^{lb}\ 0^{s}\ 0^{d} \\ 360\phantom{^{lb}\ 0^{s}\ 0^{d}} \\ 36\phantom{^{lb}\ 0^{s}\ 0^{d}} \\ \hline 3924^{lb}\ 0^{s}\ 0^{d} \text{ Prod.} \end{array}$$

E primeiramente multiplicaremos 72^{lb} por 54, conforme a regra costumada da Multiplicaçaõ. Depois, para multiplicarmos por 3^{P}, reflectiremos que este numero representa meia *toesa*, e por conseguinte deve custar ametade do preço della; pelo que assentaremos por baixo 36, ametade do multiplicando, e somando os tres productos parciais, teremos o producto que se pede 3924^{lb}

Exemplo II.

PEde-se o producto de - - 72^{lb}
por - - - - - - - - - - - $54^{T}\ 5^{P}$

$$\begin{array}{r} 288^{lb}\ 0^{s}\ 0^{d} \\ 360\phantom{^{lb}\ 0^{s}\ 0^{d}} \\ 36\phantom{^{lb}\ 0^{s}\ 0^{d}} \\ 24\phantom{^{lb}\ 0^{s}\ 0^{d}} \\ \hline 3948^{lb}\ 0^{s}\ 0^{d} \text{ Producto.} \end{array}$$

Em

Em primeiro lugar multiplicaremos 72^{lb} por 54, como no exemplo antecedente. Depois como 5^{P} ſaõ $\frac{5}{6}$ de huma *toeſa*, reſolveremos eſte quebrado em $\frac{3}{6}$ ou $\frac{1}{2}$, e $\frac{2}{6}$ ou $\frac{1}{3}$. E aſſim tomando de 72^{lb} primeiramente a ametade 36, depois a terça parte 24, e ſomando os productos parciais, acharemos o producto total 3948^{lb}.

Exemplo III.

QUerendo-ſe multiplicar - 72^{lb}
por - - - - - - - - - $5^{T}\ 4^{P}\ 8^{p}$

$$
\begin{array}{l}
\hline
360^{lb}\ 0^{ſ}\ 0^{d} \\
36 \\
12 \\
4 \\
4 \\
\hline
416^{lb}\ 0^{ſ}\ 0^{d}\ \text{Producto.}
\end{array}
$$

Feita primeiramente a multiplicaçaõ por 5^{T}, multiplicaremos depois por 4^{P}, e para iſſo reſolveremos eſte numero em 3^{P} e 1^{P}. Por 3^{P} tomaremos ametade do multiplicando, que he 36^{lb}; e por 1^{P}, obſervaremos que elle he hum terço de 3^{P}, e por conſeguinte tomaremos o terço de 36^{lb}, que he 12^{lb}. Para multiplicarmos por 8^{p}, em lugar de compararmos as *pollegadas* com a *toeſa*, ſerá melhor que as comparemos com o *pé*; e reſolvendo 8^{p} em 4^{p} e 4^{p}, veremos que cada huma deſtas partes he hum ter-

terço do *pé*, e por isso dará 4^{lb}, que he o terço do producto que acabamos de achar para 1^{P}. Reunindo finalmente todas estas partes, será o producto total 416^{lb}.

122 Se tambem o multiplicando for numero complexo, far-se-há a operação, como se mostra no exemplo seguinte.

Exemplo IV.

PAra multiplicar - -	72^{lb}	$6^{ſ}$	6^{d}
por - - - - - -	27^{T}	4^{P}	8^{p}
	504^{lb}	$0^{ſ}$	0^{d}
	144		
	6	15	0
	1	7	0
	0	13	6
	36	3	3
	12	1	1
	4	0	$4\frac{1}{3}$
	4	0	$4\frac{1}{3}$
	2009^{lb}	$0^{ſ}$	$6^{d}\frac{2}{3}$. Producto.

Tendo multiplicado 72^{lb} por 27 passaremos tambem a multiplicar $6^{ſ}$, para o que resolveremos este numero em $5^{ſ}$ e $1^{ſ}$. E porque $5^{ſ}$ fazem hum *quarto* da *libra*, multiplicar $5^{ſ}$ por 27 será o mesmo que tomar 27 *quartos* da *libra*, ou hum *quarto* de 27 *libras*, que he 6^{lb} $15^{ſ}$. E para multiplicarmos $1^{ſ}$ por 27, como $1^{ſ}$ he hum *quinto* de $5^{ſ}$, tomaremos hum *quin-*

$\frac{5}{6}$ $\frac{3}{6}$ $\frac{2}{6}$

quinto do producto antecedente 6^{lb} 15ſ, que he 1^{lb} 7ſ. E finalmente, para multiplicarmos 6^{d} pelo meſmo numero 27, advertiremos que 6^{d} fazem ametade de 1ſ, e conſeguintemente tomaremos ametade do producto 1^{lb} 7ſ, que achamos competir a 1ſ, a qual ſerá 13ſ 6^{d}.

Até aqui temos multiplicado todo o numero multiplicando pela primeira parte do multiplicador 27^{T}. Agora, para o multiplicarmos tambem por 4^{P}, praticaremos como no exemplo antecedente. E reſolvendo 4^{P} e 3^{P} e 1^{P}, por 3^{P} tomaremos ametade do multiplicando, a ſaber 36^{lb} 3ſ 3^{d}, e por 1^{P} tomaremos hum terço da dita ametade, que he 12^{lb} 1ſ 1^{d}. Do meſmo modo reſolveremos 8^{P} em 4^{P} e 4^{P}, e por cada huma deſtas partes tomaremos hum terço do producto, que achamos para 1^{P}, a ſaber 4^{lb} 0ſ $4^{d}\ \frac{1}{3}$. E reunindo todas as ditas partes, teremos o producto total 2009^{lb} 0ſ $6^{d}\ \frac{2}{3}$.

123 Nos exemplos precedentes tem ſido muito faceis de tomar as partes do multiplicando, por cauſa da ſua ſimplicidade. Quando forem mais compoſtas uſaremos do artificio que ſe moſtra nos exemplos ſeguintes.

Exem-

Exemplo V.

PErgunta-ſe, quanto devem cuſtar 17^T de obra, a raſaõ de 34^{lb} 10ſ 2^d a *toeſa*?

Será pois o multiplicando 34^{lb} 10ſ 2^d
e o multiplicador - - - 17^T

238^{lb}	0ſ	0^d
34		
8	10	
$\dot{0}$	$\ddot{17}$	
0	2	10
586^{lb}	12ſ	10^d Prod.

E em primeiro lugar multiplicaremos 34^{lb} por 17, e depois 10ſ, os quais fazendo meia *libra* daráõ 17 meias *libras*, ou ametade de 17 *libras*, que he 8^{lb} 10ſ. Entaõ para multiplicarmos 2^d por 17, obſervaremos que 2^d fazem huma ſexta parte de 1ſ, e conſeguintemente huma ſexta de huma decima, ou (n. 114) huma ſexageſima parte de 10ſ. Pelo que por 2^d deveriamos tomar huma ſexageſima parte do producto 8^{lb} 10ſ, que temos achado competir a 10ſ. Mas para facilitar o calculo tomaremos primeiro a decima parte do dito producto, que he 0^{lb} 17ſ, e a marcaremos com pontos, ou riſcas, para denotar que he hum producto ſubſidiario, que ao depois naõ havemos de ſomar. Delle porém tomaremos a ſexta parte 2ſ 10^d, que vem a ſer a ſexageſima parte de 8^{lb} 10, e ſomando todos os productos parciais, ſerá o producto que ſe pergunta 586^{lb} 12ſ 10^d

Exem-

Exemplo VI.

PErgunta-ſe, quanta obra ſe deve fazer por 34^{lb} 10ſ 2^{d}, a raſaõ de 17^{T} por 1^{lb}?
Multiplicaremos pois - 17^{T}
por - - - - 34^{lb} 10ſ 2^{d}

68^{T} 0^{P} 0^{P} 0^{l} 0^{pts}
51
8 3
· · · · ·
0 5 1 2 4 $\frac{4}{5}$
0 0 10 2 4 $\frac{4}{5}$

586^{T} 3^{P} 10^{P} 2^{l} $4^{pts}\frac{4}{5}$ porducto.

E tendo multiplicado 17^{T} por 34^{lb}, paſſaremos a multiplicar por 10ſ; e porque 10ſ fazem meia *libra*, pelo producto correſpondente tomaremos ametade de 17^{T}, que he 8^{T} 3^{P}. Para multiplicarmos por 2^{d}, buſcaremos o producto que deveria dar 1ſ, tomando a decima parte do producto antecedente, a ſaber 0^{T} 5^{P} 1^{P} 2^{l} 4^{pts} $\frac{4}{5}$; producto ſubſidiario, que marcaremos com pontos, e de que nos ſerviremos para delle tomarmos a ſexta parte 0^{T} 0^{P} 10^{P} 2^{l} 4^{pts} $\frac{4}{5}$; que aſſentaremos por baixo; e ſomando todos os productos parciais acharemos que o producto pedido he 586^{T} 3^{P} 10^{P} 2^{l} 4^{pts} $\frac{4}{5}$.

Te-

Temos dado este exemplo para confirmar o que assima dissemos (n. 45); que era necessario distinguir o *multiplicando* do *multiplicador*, quando ambos fossem *concretos*. E com effeito nos dous exemplos antecedentes temos os mesmos *factores* 17^T, e 34^{lb} $10 \int$ 2^d; e com tudo resultaõ productos differentes.

§§ He porém de advertir, que a dita differença he sómente na expressaõ; e que na realidade se declara pelo primeiro producto o mesmo numero de *libras*, que de *toesas* pelo segundo; sendo sómente diversos os algarismos, porque saõ diversas as divisoens da *toesa*, e da *libra*. Para isto se provar, basta reduzir as partes da *libra* no primeiro, e as da *toesa* no segundo, a huma fracçaõ da unidade principal, e ambos se acharaõ concordes, sendo hum $586^{lb}\ \frac{77}{120}$, e o outro $586^T\ \frac{77}{120}$.

Advirta-se tambem, que nos exemplos assima dados se suppoem sempre que a unidade principal he a da maior especie, mas que póde servir igualmente de principal qualquer das outras. Póde v. gr. perguntar-se, quanta obra se deve fazer por 34^{lb} $10 \int$ 2^d, a rasaõ de 17^T por $1 \int$. Neste caso, por 2^d teriamos o producto 2^T 5^P, por $10 \int$ teriamos 170^T, e por 34^{lb} finalmente 11560^T; donde seria o producto total 11732^T 5^P. §§

Di

Divisaõ de hum numero complexo por hum numero incomplexo.

124 SE o dividendo sómente for complexo, e se ao mesmo tempo o dividendo, e o divisor mostrarem unidades de diversa especie, a operaçaõ se praticará da maneira seguinte.

Dividir-se-haõ primeiramente as unidades principais do dividendo, conforme a regra dada para os numeros inteiros. O que ficar desta divisaõ reduzir-se-há ás unidades da especie immediatamente inferior (n. 57), e se ajuntará com as unidades semelhantes que no dividendo houver, e o total se partirá do mesmo modo. O resto desta divisaõ se tornará a reduzir ás unidades da especie seguinte, e se ajuntará com as do dividendo, e a soma se tornará a repetir; e assim por diante, até chegar á infima especie.

Exem-

Exemplo.

PAgando-ſe 4783 *libras*, 3 *ſoldos*, e 9 *dinheiros* pelo jornal de 87 *toeſas* de obra, queremos ſaber a quanto ſahe cada *toeſa*.

Para iſſo repartiremos $4783^{lb}\ 3^{ſ}\ 9^{d}$ por 87^{T}, da maneira ſeguinte:

$4783^{lb}\ 3^{ſ}\ 9^{d}$	87^{T}
433	$54^{lb}\ 19^{ſ}\ 7^{d}$
85	
$1703^{ſ}$	
833	
50	
609^{d}	
000	

Principiando pelas *libras*, partiremos pois 4783^{lb} por 87 (n. 65), e viráõ ao quociente 54^{lb}, ficando de reſto 85^{lb}. Eſte reſto convertido em *ſoldos* com os $3^{ſ}$ do dividendo primitivo faz $1703^{ſ}$; e partindo eſta ſoma por 87, ſahiráõ no quociente $19^{ſ}$, e ſobraráõ $50^{ſ}$. Do meſmo modo reduzindo eſte reſto a *dinheiros*, e ajuntando-lhe os 9^{d} do dividendo, teremos 609^{d}, os quais ſendo finalmente repartidos por 87, daráõ no quociente 7^{d}, ſem reſto algum; e conſeguintemente ſerá o quociente total que buſcamos $54^{lb}\ 19^{ſ}\ 7^{d}$.

125 No caſo porém de moſtrarem unidades da meſma eſpecie tanto o dividendo, como o diviſor; antes de fazer a diviſaõ, he neceſſa-

rio examinar, ſe o quociente deve, ou naõ deve ſer da meſma eſpecie que elles; exame, que facilmente ſe decide pelo eſtado da queſtaõ.

126 Moſtrando pois o dividendo unidades da meſma eſpecie que as do diviſor, e devendo ao meſmo tempo conformar-ſe o quociente com as unidades de ambos elles, a diviſaõ ſe praticará inteiramente como no primeiro caſo.

Sabendo, por exemplo, que 1243^{lb} produziraõ de lucro 7254^{lb}, pergunta-ſe quanto cabe a cada *libra*. He claro neſta queſtaõ, que o quociente deve moſtrar unidades da meſma eſpecie que as do dividendo, e do diviſor, iſto he, que ſe deve achar em *libras*, e partes da *libra*. Pelo que dividiremos 7254^{lb} por 1243, e convertendo o reſto em *ſoldos* tornaremos a dividir por 1243, e aſſim por diante; e acabada a operaçaõ, acharemos que o quociente pedido he $5^{lb}\ 16^{ſ}\ 8^{d}\ \frac{760}{1243}$.

127 Moſtrando porém o dividendo unidades da meſma eſpecie que as do diviſor, e devendo o quociente moſtrar unidades de differente eſpecie que as de ambos elles, antes de fazer a diviſaõ ſerá neceſſario reduzir tanto o dividendo como o diviſor ás unidades da infima eſpecie, que no meſmo dividendo ſe contém (n.57). Depois diſſo pratircar-ſe-ha, como no exemplo precedente, tratando das unidades do dividendo aſſim reduzido, como ſe foſſem da meſma eſpecie das que devem ſahir no quociente.

Pergunta-ſe v. g. quantas *toeſas* de obra ſe devem fazer por 7954 *libr.* 11 *ſold.* e 7 *dinh.*, a a rasaõ de 72 *libras* a *toesa*? Pela mesma questaõ entenderemos, que o quociente deve sahir em *toesas*, e partes da *toesa*. E porisso reduziremos $7954^{lb}\ 11^{s}\ 7^{d}$ tudo em *dinheiros*, e teremos 1909099^{d}; o mesmo faremos ao divisor 72^{lb}, que dará 17280^{d}; e mudando no dividendo a denominaçaõ de *dinheiros* para *toesas*, teremos para dividir 1909099^{T} por 17280, donde resultará o quociente $110^{T}\ 2^{P}\ 10^{P}\ 6^{l}\ \frac{19}{20}$.

Divisaõ de hum numero complexo, por outro complexo.

128 SEndo tambem complexo o divisor, reduzillo-hemos primeiro ás unidades da sua infima especie (n. 57), e multiplicaremos o dividendo pelo numero das vezes que entra a unidade da dita infima especie na unidade principal do mesmo divisor. Deste modo a operaçaõ será reduzida ao caso precedente de hum divisor incomplexo.

Exemplo.

TEndo custado $854^{lb}\ 17^{s}\ 11^{d}$ huma obra de $57^{T}\ 5^{P}\ 5^{P}$, pergunta-se a como sahe a *toesa*? Deveremos pois dividir $854^{lb}\ 17^{s}\ 11^{d}$ por $57^{T}\ 5^{P}\ 5^{P}$. Para isso reduziremos o divisor a *pollegadas*, que fará 4169^{P}; e como saõ necessarias 72^{P} para fazer huma *toesa*, que he a unidade principal do divisor, multiplicaremos o dividendo por 72 (n. 121), e teremos 61552^{lb} 10^{s}

10ſ. Por tanto partiremos o numero 61552^{lb} 10ſ por 4169, da maneira ſeguinte:

61552^{lb} 10ſ	4169	
19862		
3186	14^{lb} 15ſ 3^{d} $\frac{1833}{4169}$	
63730ſ		
22040		
1195		
14340^{d}		
1833		

Primeiramente as 61552^{lb} partidas por 4169 daõ no quociente 14^{lb}, 3186^{lb} de reſto. Eſte reduzido a *ſoldos* com os 10ſ do dividendo faz 63730ſ, os quais ſendo partidos por 4169 daõ no quociente 15ſ, ficando de reſto 1195ſ. Eſte reduzido a *dinheiros* faz 14340^{d}, os quaes ſendo finalmente partidos por 4169 daõ 3^{d}, e ſobraõ 1833^{d}; pelo que ſerá o quociente pedido 14^{lb} 15ſ 3^{d} $\frac{1833}{4169}$.

He clara a raſaõ deſta regra. Porque reduzindo-ſe o diviſor 53^{T} 5^{P} 5^{p} a 4169^{p}, e ſendo 1^{P} hum 72-*avo* da *toeſa*, o meſmo diviſor ſe reduzirá a eſta fracçaõ da *toeſa* $\frac{4169}{72}$. Ora para dividir por huma fracçaõ, he neceſſario inverter-lhe primeiro os termos, e depois multiplicar por ella (n. 109.). Logo no exemplo propoſto deveremos multiplicar por $\frac{72}{4169}$; que vem a ser o mesmo pue multiplicar primeiro por 72, e depois dividir por 4169, como a regra prescreve.

Como a divisaõ por hum numero complexo se reduz á divisaõ por hum numero incomplexo, do modo que temos visto; sobre as unidades do quociente se guardará o mesmo que assima dissemos (n. 126, 127).

Aqui se poderia falar tambem da multiplicaçaõ, e divisaõ geometrica, pelas quais se calculaõ as medições *Geodeticas* e *Stereometricas*. Mas estas operações pelo que respeita á fórma do calculo naõ differem em nada das que temos exposto. Sómente faltaria explicar a natureza das unidades dos factores, e do producto; Porém reservamos isso para a Geometria, onde se entenderá com mais facilidade.

Da formaçaõ dos numeros quadrados, e extracçaõ das suas raizes.

129 CHama-se *quadrado* de hum numero o producto, que resulta da multiplicaçaõ delle por si mesmo. Assim 25 he o quadrado de 5, porque resulta da multiplicaçaõ de 5 por 5.

130 *Raiz quadrada* de qualquer numero he o numero que multiplicado por si mesmo produz o dito numero. Assim 5 he a raiz quadrada de 25, e 7 a raiz quadrada de 49 &c.

131 He pois o numero que se *quadar* multiplicando e multiplicador ao mesmo tempo; e por conseguinte he duas vezes factor do pro-

ducto (n. 42.). Donde vem, que o dito producto, ou quadrado, ſe chama tambem *ſegunda potencia* do meſmo numero.

Para achar o quadrado de hum numero, naõ he neceſſario mais do que multiplicallo por ſi meſmo, conforme as regras ordinarias da Multiplicaçaõ. Mas para extrahir a raiz quadrada de qualquer numero, ou para vir pelo quadrado no conhecimento da raiz, he neceſſario hum methodo particular, principalmente quando o numero conſtar de mais que dous algariſmos.

Se o numero propoſto conſtar de hum ou dous algariſmos, a ſua raiz, em numero inteiro, ſerá algum dos numeros digitos

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

cujos quadrados ſaõ

1. 4. 9. 16. 25. 36. 49. 64. 81.

Aſſim v. g. a raiz quadrada de 72, em numero inteiro, ſerá 8; por que eſtando 72 entre 64 e 81, a ſua raiz tambem ſe achará entre as raizes dos ditos numeros, que ſaõ 8, e 9; e por conſeguinte ſerá 8 com hum quebrado. Eſte quebrado porém nunca ſe póde determinar exactamente, mas póde approximar-ſe continuamente, como mais abaixo ſe moſtrará.

131 A raiz quadrada de hum numero, que naõ he quadrado perfeito, chama-ſe numero *ſurdo*, *irracional*, ou *incommenſuravel*.

§§ Temos alguns principios dirivados da Lei da Numeraçaõ, pelos quais podemos muitas vezes conhecer, que hum numero propoſto certrmente naõ he quadrado, e ſaõ os ſeguintes.

To-

Todo o numero cuja ultima letra á direita for 2, 3, 7, ou 8, naõ póde ſer quadrado.

E todo o numero, que acabar em huma, tres, ſinco, ou geralmente, em numero impar de cifras, naõ ſerá quadrado.

Se de qualquer numero lançarmos fóra os *noves*, e ficar no reſto 2, 5, 6, ou 8, conheceremos que naõ he quadrado. E o que deixar de reſto 3, on 6, naõ ſómente naõ ſerá quadrado, mas naõ terá raiz racional de qualquer gráo que ella ſeja.

Do meſmo módo, ſe de hum numero tirarmos os onzes, e tivermos de reſto 2, 6, 7, 8, ou 10, naõ poderá ſer quadrado.

Os numeros, que naõ forem incluidos neſtas regras poderáõ ſer quadrados, mas naõ ſe ſegue por iſſo que o ſejaõ neceſſariamente. JJ.

133 Em quanto aos numeros de mais letras que duas, obſervando o que ſe paſſa na formaçaõ do quebrado, acharemos o methodo inverſo de lhes extrahir a raiz.

Para quadrar qualquer numero, por exemplo 54;

$$\begin{array}{r} 54 \\ 54 \\ \hline 216 \\ 270 \\ \hline 2916 \end{array}$$

Primeiramente multiplicaremos o 4 ſuperior pelo 4 inferior, e o producto ſerá evidente-

 men-

mente o *quadrado das unidades* do dito numero.

Depois multiplicaremos o 5 ſuperior pelo 4 inferior, e teremos neſta operaçaõ o *producto das dezenas pelas unidades.*

Entaõ multiplicaremos o 4 ſuperior pelo 5 inferior, donde reſultará o producto das unidades pelas dezenas, ou (n. 44) o *producto das dezenas pelas unidades.*

Finalmente multiplicaremos o 5 ſuperior pelo 5 inferior, e teremos por eſta operaçaõ o *quadrado das dezenas.*

Somando eſtes productos parciais, achamos que o numero propoſto produz o quadrado 2916, o qual vemos que ſe compõe *do quadrado das dezenas, de dous productos das dezenas pelas unidades, e do quadrado das unidades* da ſua raiz 54.

134 Sendo iſto que acabamos de obſervar huma conſequencia immediata das regras da Multiplicaçaõ, he manifeſto que naõ pertence ſómente ao numero 54, mas a todo o numero compoſto de dezenas e unidades. Pelo que diremos em geral, que o quadrado de todo o numero compoſto de dezenas e unidades contém as tres ſobreditas partes, a ſaber, o quadrado das dezenas, dous productos das dezenas pelas unidades, e o quadrado das unidades.

135 Iſto ſuppoſto, como o quadrado das dezenas faz centenas (por quanto 10 vezes 10 fazem 100) he claro que o quadrado das dezenas naõ ſe contém nas duas ultimas letras do quadrado total. E como o producto das dezenas pelas unidades he neceſſariamente de dezenas, tambem he claro que o duplo deſte producto ſe

naõ

naõ contém na ultima letra do quadrado total.

136 Para voltarmos pois do quadrado 2916 a procurar a ſua raiz, podemos diſcorrer deſta maneira.

Exemplo I.

2916	54 Raiz
416	
104	
000	

Comecemos pelas dezenas da meſma raiz. A formaçaõ do quadrado nos tem moſtrado, que o quadrado dellas faz huma parte de 2916, e que nada delle ſe acha nas duas ultimas letras 16; logo eſtará o dito quadrado incluido em 29. E como a raiz quadrada de 29 naõ póde ſer maior que 5, concluiremos que 5 he o numero das dezenas da raiz, e o aſſentaremos á direita do numero propoſto, como ſe moſtra no exemplo.

Entaõ quadraremos o 5, e tiraremos o ſeu quadrado exacto 25 de 29, e ficará o reſto 4, para junto do qual abaixaremos as outras duas letras 16 do numero propoſto.

Para acharmos agora as unidades da raiz, reflectiremos no que contém finalmente o reſto 416. Pelo que aſſima moſtramos ſe vê que naõ contém mais que duas partes, a ſaber, dous productos das dezenas pelas unidades, e o quadrado das unidades da meſma raiz. A primeira deſtas nos baſtará para acharmos a letra que ago-

agora buſcamos ; pois ſendo ella formada do duplo das dezenas multiplicado pelas unidades, ſe a dividirmos pelo dobro das dezenas , que já conhecemos, o quociente moſtrará as unidades (n. 74). Falta pois ſaber em que parte do reſto 416 ſe contém o dobro das dezenas multiplicado pelas unidades ; e como , pelo que aſſima notamos, nada delle ſe contém na ultima letra do dito reſto, neceſſariamente ſe achará em 41. Pelo que dividiremos 41 pelo dobro das dezenas 10, o qual eſcreveremos debaixo, e o quociente 4 moſtrará as unidades da raiz, que por conſeguinte ſerá 54.

He porém de advertir, que, ſem embargo de termos neſte exemplo achado o quociente 4 juſtamente como convinha, póde algumas vezes ſucceder que o quociente achado deſta maneira ſeja maior do que convem ; por que 14 (iſto he, a parte reſtante depois de ſeparada a ultima letra) naõ ſómente contem o dobro das dezenas multiplicado pelas unidades, mas tambem as dezenas que podem reſultar do quadrado das unidades. Por eſta raſaõ, para naõ haver duvida ſobre a letra que temos achado, uſaremos da verificaçaõ ſeguinte.

Depois de ter achado a letra das unidades 4, e de a ter eſcrito na raiz, tambem aſſentaremos á direita o diviſor 10, que ficará 104, e multiplicaremos eſte numero pela meſma letra 4, tirando os productos ſucceſſivos das partes correſpondentes de 416, como praticámos na Diviſaõ ; e como naõ reſta nada, concluiremos que a raiz he com effeito 54.

Se

Se ficasse porém algum resto, naõ deixaria por isso a raiz de ser exacta até a casa das unidades, com tanto que o dito resto naõ fosse igual, ou maior que o dobro da raiz achada aumentado de huma unidade; mas isto he o que se naõ póde recear, pois pelo methodo assima exposto sómente podemos errar tomando o quociente maior do que convém.

A verificaçaõ, que temos ensinado, he fundada sobre a mesma formaçaõ do quadrado. Porque multiplicando 104 por 4, he evidente que se fórma ao mesmo tempo o quadrado das unidades, e o producto das unidades pelo dobro das dezenas, que era o que faltava para completar o quadrado perfeito.

137 Do que acabamos de mostrar concluiremos em geral o methodo de tirar a raiz quadrada de qualquer numero, que naõ tiver mais de quatro letras, nem menos de tres.

Depois de se terem separado com hum ponto as duas ultimas letras á direita, buscar-se-há a raiz quadrada da parte que ficar á esquerda, e essa raiz mostrará as dezenas da raiz total que se busca, e se assentará adiante do numero proposto com a distinçaõ de huma risca perpendicular, que a separe delle.

O quadrado exacto da letra achada se tirará da mesma parte, cuja raiz se buscou, e o resto se assentará debaixo, para junto do qual se abaixaráõ as duas letras, que se tinhaõ separado no numero proposto.

Nestas letras se apartará com hum ponto a ultima á direita, e as que ficarem á esquerda

se

ſe diviciráõ pelo dobro das dezenas da raiz, o qual ſe aſſentará por baixo.

O quociente deſta diviſaõ ſe eſcreverá adiante da primeira letra da raiz, e juntamente ao lado direito do diviſor, enchendo a caſa correſpondente á letra ſeparada.

E finalmente multiplicar-ſe-há o diviſor aſſim aumentado pelo meſmo quociente, e o producto ſe tirará do numero que fica por ſima do dito diviſor. Moſtremos iſto com outro exemplo.

Exemplo II.

PEde-ſe a raiz quadrada do numero 7569.

75.69	87 Raiz
116.9	
16.7	
000	

Separemos primeiramente com hum ponto as duas ultimas letras 69, e buſquemos a raiz de 75, que acharemos ſer 8, e eſta letra aſſentaremos adiante da riſca; cujo quadrado exacto 64 diminuiremos de 75, aſſentando por baixo o reſto 11, para junto do qual abaixaremos as duas letras 69 que tinhamos ſeparado.

Depois no reſto total 1169 apartaremos com hum ponto a ultima letra 9, e ficará o dividendo 116, debaixo do qual eſcreveremos o diviſor 16, que he o dobro da raiz achada 8; feita a diviſaõ, acharemos o quociente 7, que aſſenſentaremos adiante da primeira letra da raiz 8, e adiante do diviſor 16, debaixo da letra ſeparada 9.

Finalmente multiplicaremos o diviſor aſſim aumentado 167 pelo meſmo quociente 7, e diminuiremos o producto do numero ſuperior 1169; e porque naõ ſobra nada, entenderemos que o numero 7569 he quadrado perfeito, e que a ſua raiz exacta he 87.

138 Deve notar-ſe bem, que naõ ſe há de partir pelo dobro das dezenas ſenaõ a parte que ficar á eſquerda depois de ſeparada a ultima letra. De ſorte que naõ chegando ella a conter o dito dobro naõ poderá por iſſo uſar-ſe da letra ſeparada, mas aſſentar-ſe-há cifra no quociente. Ao contrario, ſe o meſmo dobro ſe contiver na parte, que conſtitue o dividendo, mais de nove vezes, naõ poderá por-ſe no quociente letra maior que 9, pela raſaõ que já diſſemos tratando da Diviſaõ (n. 66).

139 Sendo bem comprehendido o que acabamos de dizer ſobre a raiz quadrada dos numeros que naõ tem mais que quatro letras, he facil de entender o que ſe deve praticar com os numeros de mais letras. De qualquer numero de letras que deva conſtar a raiz ſempre a podemos conſiderar como compoſta de duas partes, das quais huma ſeja de dezenas, e a outra de unidades; como v. gr. o numero 874 póde conſiderar-ſe compoſto de 87 dezenas, e 4 unidades.

Iſto ſuppoſto, quando tivermos achado as duas primeiras letras da raiz pelo methodo que aca-

acabamos de expôr, pelo meſmo poderemos achar a terceira, tomando as ditas duas letras como hum ſó numero de dezenas, e applicando-lhes para achar a terceira todo o raciocinio que applicamos á primeira para achar a ſegunda.

Igualmente, quando tivermos tres letras acharemos a quarta, ſe for neceſſario, tomando as tres por hum numero total de dezenas, e praticando com ellas o meſmo, que praticamos com as duas primeiras para achar a ſegunda; e aſſim por diante.

Mas para proceder com ordem, diſtribuiremos primeiro o numero propoſto em claſſes de duas letras cada huma da direita para a eſquerda, marcando-as com hum ponto. A ultima claſſe á eſquerda ſerá de huma ſó letra, quando o numero deſtas for impar.

A raſaõ deſta preparaçaõ he, porque conſiderando a raiz como compoſta de dezenas, e unidades, devem ſeparar-ſe duas letras á direita para ſe achar na parte reſtante o quadrado das dezenas (n. 135, e ſeg.). E pela meſma raſaõ, conſtando as dezenas de unidades e dezenas de dezenas, deveremos ſeparar outras duas letras; e aſſim por diante.

Exem-

Exemplo III.

PEde-ſe a raiz quadrada do numero 76807696.

```
76.8 0.76.96 | 8764
12 8.0       |
 167         |
___________
  1117.6
   1746  .
___________
   7009.6
   17524
___________
   00000
```

76807696

Tendo diſtribuido o numero propoſto em claſſes de duas letras cada huma da direita para a eſquerda, buſcaremos a raiz da ultima claſſe á eſquerda 76, que acharemos ſer proximamente 8, e aſſentaremos eſte algariſmo a diante da riſca; depois quadraremos o 8, e diminuiremos o quadrado 64 de 76, eſcrevendo por baixo o reſto 12 para junto do qual abaixaremos a claſſe ſeguinte 80, ſeparando-lhe com hum ponto a ultima letra o. Debaixo da parte que fica 128 eſcreveremos o diviſor 16 formado do dobro da raiz achada 8; e fazendo a diviſaõ, acharemos o quociente 7, que eſcreveremos na raiz depois da primeira letra 8, e tambem a diante do diviſor 16. Entaõ multiplicaremos 167 pelo meſmo quociente 7, e diminuiremos o producto do numero 1280, eſcrevendo por baixo o reſto 111, para junto do qual traremos

mos a claſſe ſeguinte 76, ſeparando nella a ultima letra. Por baixo da parte reſtante 1117 eſcreveremos o diviſor 174, que he o dobro da raiz até agora achada 87; e partindo 1117 por 174 acharemos o quociente 6, que aſſentaremos na raiz, e adiante do diviſor; e multiplicando 1746 pelo meſmo quociente 6, tiraremos o producto do numero 11176, e eſcreveremos debaixo o reſto 700, ao qual ajuntaremos a ultima claſſe 96, ſeparandolhe a ultima letra. Aſſim ficará 7009, que dividiremos pelo duplo da raiz achada 876, que he 1752, e acharemos o quociente 4, que poremos na raiz, e no diviſor; e multiplicando 17524 pelo meſmo 4, tiraremos o producto do numero 70096; e porque neſta ultima operaçaõ naõ fica reſto, ſerá a raiz exacta do numero propoſto 8764.

140 Quando o numero naõ for quadrado perfeito, no fim da operaçaõ ficará neceſſariamente algum reſto; e a raiz achada ſerá a verdadeira raiz do maior quadrado, que no dito numero ſe contém. Neſte caſo naõ he poſſivel extrahir-ſe a raiz exactamente, mas podemos approximar-nos ao ſeu juſto valor quanto quizermos, de ſorte que o erro ſeja menor que qualquer quantidade aſſignavel.

Eſta approximaçaõ ſe faz commodamente por meio da *dizima*. Ajuntaõ-ſe ao numero dado duas vezes tantas cifras, quantas ſaõ as letras decimais que ſe querem na raiz; tira-ſe a raiz como nos exemplos antecedentes; e nella finalmente ſe aparta com a virgula ametade das caſas decimais, que ao numero ſe ajuntá táraõ. Porque, devendo o producto de huma multiplicaçaõ ter tantas letras decimais, quantas houver nos factores juntamente (n. 54), o quadrado (cujos factores ſaõ iguais) deverá ter duas vezes mais letras decimais, do que em qualquer dos factores, iſto he, na ſua raiz ſe contém.

Exemplo IV.

PEde-ſe a raiz quadrada de 87567 exacta até a caſa das milleſimas.

Para ter milleſimas requerem-ſe tres caſas de *dizima*; ſerá logo neceſſario ajuntar ao numero dado ſeis cifras, e tiraremos a raiz quadrada de 87567000000.

8.75.67.00.00.00 | 295917
47.5
49
———
346.7
585
———
5420.0
5909
———
10199.0
59181
———
427190.0
591827
———
129111

Fazendo a operaçaõ como nos exemplos an-

antecedentes, acharemos a raiz 295917 exacta até as unidades. Esta pertence ao numero 87567000000; porém nós queremos a raiz de 87567, ou de 87567,000000. Por isso cortaremos para a dizima as tres ultimas letras da dita raiz, que vem a ser ametade das cifras que ajuntamos ao numero dado, e será a raiz que buscamos 295,917 exacta até a casa das millesimas.

Do mesmo modo, se nos pedirem a raiz quadrada do numero 2 até a casa das milionesimas, tiraremos a raiz de 2000000000000, que acharemos ser 1414213, e apartando com a virgula seis algarismos á direita, será a raiz que buscamos 1,414213.

§§ A *Prova real* desta operaçaõ manifestamente se collige da mesma difiniçaõ da *raiz* (n. 130). Multiplicar-se-há esta por si mesma, e ao producto se ajuntará o resto da operaçaõ, se o houver; e assim resultará o numero proposto, se a operaçaõ naõ estiver errada. Se v. gr. de 12541028 acharmos a raiz 3541, e o resto 2347, para verificarmos este resultado, multiplicaremos a raiz por si mesma, e ao producto 12538681 ajuntaremos o resto 2347; e porque torna a restituir-se o numero 12541028, entenderemos que naõ houve erro na operaçaõ.

Querendo usar da *prova dos noves*, tirar-se-haõ estes da raiz, e o resto se multiplicará por si mesmo tirando se tambem do producto os noves, se os tiver; o que ficar se ajuntará ao resto da operaçaõ, e juntamente se lhe tiraráõ os noves; e o resto final será o mesmo que deve fi-

ficar depois de lançados fóra os noves do numero proposto. Assim no mesmo exemplo, tirando os noves da raiz 3541 fica o resto 4, que multiplicado por si mesmo faz 16, e lançando fóra 9, ficaõ 7, que somados com o resto da operaçaõ 2347, e tirando ao mesmo tempo os noves, finalmente daráõ o resto 5; e este he o que deve sobrar tirados os noves do numero dado 12541028, como sobra com effeito. A prova dos *onzes* se applica como as dos *noves*, e de ambas se entenderá aqui o mesmo que fica advertido (n. 75.) §§

141 Temos visto assima (n. 106), que para multiplicar hum quebrado por outro, he necessario multiplicar entre si os numeradores, e da mesma sorte os denominadores. Por conseguinte, para quadrar hum quebrado deveremos quadrar ambos os seus termos. Assim o quadrado de $\frac{2}{3}$ he $\frac{4}{9}$, o de $\frac{4}{5}$ he $\frac{16}{25}$ &c.

142 Logo reciprocamente, para tirar a raiz quadrada de hum quebrado, deveremos tirar as raizes do numerador, e denominador. Deste modo a raiz de $\frac{9}{16}$ será $\frac{3}{4}$, porque a raiz do numerador 9 he 3, e do denominador 16 he 4.

143 Póde succeder, que o numerador, ou o denominador, ou ambos juntos naõ sejaõ quadrados perfeitos. Se o numerador sómente o naõ for, tirar-se-há a sua raiz approximada pelo methodo assima exposto, á qual se dará por denominador a raiz exacta do denominador primitivo.

As-

Aſſim por exemplo, querendo a raiz quadrada de $\frac{2}{9}$, tiraremos a raiz aproximada do numerador 2, que ſerá 1, 4, ou 1, 41, ou 1, 414, ou 1, 4142 &c. conforme a menor ou maior exactidaõ que nos baſtar, á qual daremos o denominador 3, raiz exacta do denominador dado 9, e acharemos que a raiz de $\frac{2}{9}$ he $\frac{1,4}{3}$, ou $\frac{1,40}{3}$, ou $\frac{1,414}{3}$, ou $\frac{1,4142}{3}$ &c.

Porém, ſe o denominador naõ for quadrado, multiplicar-ſe-haõ ambos os termos do quebrado propoſto pelo meſmo denominador e a operaçaõ ſerá reduzida ao caſo precedente.

Querendo v. gr. tirar a raiz quadrada de $\frac{3}{5}$, reduziremos primeiro eſte quebrado a $\frac{15}{25}$, e tirando a raiz do numerador 15 até as milleſimas, no caſo de baſtar eſta exactidaõ, acharemos que a raiz proxima de $\frac{15}{25}$ ou $\frac{3}{5}$ he $\frac{3,872}{5}$.

144 Para naõ implicar-nos com differentes eſpecies de fracções ao meſmo tempo, podemos converter o reſultado $\frac{3,872}{5}$ unicamente em *dizima*, partindo 3,872 por 5, e teremos a raiz de $\frac{3}{5}$ puramente em partes decimais 0,774 (n. 99).

145 Em fim, ſe vierem inteiros juntos com os quebrados, os inteiros ſe reduziráõ á denominaçaõ dos quebrados (n. 86), e entaõ ſe praticará como nos exemplos antecedentes. Para tirarmos v. gr. a raiz de $8\frac{3}{7}$, converteremos

eſte

eſte numero em $\frac{59}{7}$ (n. 86), e depois em $\frac{413}{49}$ (n. 143), cuja raiz approximada ſerá $\frac{20,322}{7}$, ou 2,903.

146 Tambem ſe póde converter em *dizima* o quebrado, antes de ſe lhe tirar a raiz; advertindo, que as letras da *dizima* ſe haõ de buſcar até fazerem o dobro das que queremos na raiz. Applicando eſte methodo ao numero $8\frac{3}{7}$, e querendo a raiz até a caſa das milleſimas, converteremos o dito numero em 8,428571 (n. 99), cuja raiz ſerá 2,903, como tinhamos achado.

147 Havendo de tirar a raiz quadrada de qualquer quantidade decimal, faremos que as caſas da dizima ſejaõ ſempre duas vezes tantas como as que deve ter a raiz, e para iſſo lhe ajuntaremos as cifras neceſſarias (n. 30); e a raiz achada ſempre terá na dizima ametade das caſas da dita quantidade propoſta, para o que ſe aſſentaráõ as cifras que forem neceſſarias entre a virgula e a primeira letra da meſma raiz.

Aſſim querendo extrahir a raiz de 21, 935 até a caſa das milleſimas, tiralla-hemos como de 21,935000, e ſerá 4,683. Do meſmo modo acharemos que a raiz de 0,542 he 0,736, que a de 0,0054 he 0,073, e aſſim das mais.

148 O methodo, que fica expoſto (n. 69, e ſeg.) para ſe abbreviar a Diviſaõ, tambem ſe póde applicar facilmente á extracçaõ da raiz. Sendo baſtante, que ella ſe ache exacta até a caſa das unidades, diſtribuir-ſe-há primeiramente em claſſes o numero dado, e depois ſe cor-

taráõ á direita tantas letras menos huma, quantas forem as classes, e das que ficarem se extrahirá a raiz pelo methodo até agora declarado. O ultimo resto que ficar se partirá pelo divisor da operaçaõ precedente, no qual se naõ attenderá á ultima letra da parte direita; o resto que ficar desta divisaõ se tornará a partir pelo mesmo divisor, desprezando-se nelle outra letra á direita; e assim por diante.

Da formaçaõ dos numeros cubicos, e extracçaõ das suas raizes.

149 SE qualquer numero se multiplicar pelo seu quadrado, o producto que resultar he o que chamamos *cubo* do mesmo numero. Assim 27 he cubo do numero 3, porque resulta da multiplicaçaõ de 3 pelo seu quadrado 9.

Donde se vê, que o numero que se eleva ao cubo he tres vezes *factor* do mesmo cubo; e por isso o cubo se chama tambem a *terceira potencia*, ou *potencia do terceiro grâo* do mesmo numero.

150 Em geral, dizemos que hum numero se eleva á segunda, terceira, quarta, quinta &c. potencia, quando se multiplica 1, 2, 3, 4 &c. vezes consecutivas por si mesmo, ou quando elle he 2, 3, 4, 5 &c. vezes *factor* do producto.

151 *Raiz Cubica* de qualquer numero he o numero, que multiplicado pelo seu quadrado, forma o dito numero proposto. Assim 3 he a raiz cubica de 27, porque da multiplicaçaõ de 3 pelo seu quadrado 9 resulta o numero 27.

152 Pa-

152 Para acharmos pois o cubo de qualquer numero dado naõ he necessaria outra regra senaõ a da Multiplicaçaõ; mas para extrahirmos a raiz cubica de qualquer numero he necessario hum methodo particular, o qual acharemos examinando a formaçaõ do mesmo cubo.

Observaremns porém, que naõ temos necessidade do dito methodo para acharmos a raiz cubica em numero inteiro, senaõ quando o numero proposto tiver mais de tres letras. Porque sendo 1000 o cubo de 10, todo o numero menor que 1000, o qual por conseguinte naõ terá mais de tres letras, terá a raiz cubica menor que 10. Destes numeros deveremos saber a raiz, para fazermos a operaçaõ nos numeros maiores.

Todo o numero pois, que naõ tiver mais doque tres letras, terá na raiz cubica, em numero inteiro, alguns dos numeros digitos

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

aos quais correspondem os cubos seguintes

1. 8. 27. 64. 125.216.343.512.729.

Assim acharemos que a raiz cubica de 428 em numero inteiro he 7; porque cahindo 428 entre 343 e 512, tambem a sua raiz se achará entre as raizes delles 7, e 8; e por conseguinre em quanto ás unidades inteiras concordará com o numero 7, raiz exacta do cubo proximamente menor 343.

153 Há muitos numeros que naõ podem ter raiz cubica exacta. Mas podemos usar de tal approximaçaõ, que o defeito seja menor que qualquer quantidade assignavel, como abaixo

moſtraremos, depois de termos dado o methodo de extrahir a raiz do cubo perfeito.

154 Para bem ſe entender eſte methodo, vejamos as partes de que deve conſtar o cubo de hum numero compoſto de dezenas e unidades.

Como pois reſulta o cubo da multiplicaçaõ de hum numero pelo ſeu quadrado (n. 149), he neceſſario trazer á lembrança, que o quadrado de hum numero compoſto de dezenas e unidades conſta de tres partes, a ſaber *do quadrado das dezenas, de dous productos das dezenas pelas unidades, e do quadrado das unidades.*

Logo para ſe formar o cubo deveráõ multiplicar-ſe as tres partes do quadrado pelas dezenas e pelas unidades da raiz.

E em primeiro lugar multiplicando-as pelas dezenas, reſultaráõ tres productos, convem a ſaber, o cubo das dezenas, dous productos do quadrado das dezenas pelas unidades, e o producto das dezenas pelo quadrado das unidades. Depois multiplicando pelas unidades reſultaráõ outros tres productos, que ſeraõ, o producto do quadrado das dezenas pelas unidades, dous productos das dezenas pelo quadrado das unidades, e o cubo das unidades.

Logo, ajuntando os productos ſemelhantes, he claro, que o cubo de hum numero compoſto de dezenas e unidades conſta de quatro partes, a ſaber, *do cubo das dezenas, de tres productos do quadrado das dezenas pelas unidades, de tres productos das dezenas pelo quadrado das unidades, e do cubo das unidades.*

Por meio deſtas partes podemos formar o cu-

cubo de qualquer numero compoſto de dezenas, e unidades. Tomemos por exemplo o numero 43.

$$\begin{array}{r} 64000 \\ 14400 \\ 1080 \\ 27 \\ \hline 79507 \end{array}$$

Primeiramente formaremos o cubo de 4, que he 64, e advertiremos que elle deve ſignificar *milhares*, porque o 4 moſtra dezenas, e o cubo de 10 he 1000; e aſſim acharemos que a primeira parte do cubo total he 64000.

Entaó multiplicaremos o triplo do quadrado das 4 dezenas, que he 48, pelas tres unidades, e teremos o producto 144, que deve moſtrar centenas, porque o quadrado das dezenas faz centenas, e aſſim ſerá a ſegunda parte do cubo que buſcamos 14400.

Depois multiplicaremos o triplo das 4 dezenas que he 12 pelo quadrado das 3 unidades que he 9, e reſultará o producto 108, que devendo moſtrar dezenas dará a terceira parte do meſmo cubo 1080.

Finalmente formaremos o cubo das 3 unidades, que ſerá 27, e fará a ultima parte do cubo total.

Somando em fim eſtas quatro partes acharemos que o cubo de 43 he 79507; o qual ſem duvida achariamos mais facilmente multiplicando primeiro 43 por ſi meſmo, e depois pelo produducto 1849 ; mas aqui naõ ſe trata tanto de formar o cubo , como de moſtrar o meio , por onde ſe póde voltar reciprocamente do cubo para a ſua raiz.

155 Iſto pois ſuppoſto , eiſ-aqui o methodo que havemos de ſeguir na extracçaõ da raiz cubica.

Exemplo I.

Buſquemos pois a raiz cubica de 79507

Cubo	Raiz
79·507	43
155·07	
48	
79507	
00000	

Para diſtinguirmos a parte , em que ſe inclue o cubo das dezenas da raiz , deveremos ſeparar com hum ponto as tres ultimas letras 507 do numero dado , nas quais temos viſto que naõ ſe contém o dito cubo , por quanto repreſenta milhares. Da parte 79 que fica á eſquerda tiraremos pois a raiz cubica , que ſerá 4 , e a eſcreveremos adiante da riſca junto ao numero dado.

Deſta letra , que achamos , e que moſtra as dezenas da raiz , formaremos o cubo exacto 64 , e o tiraremos da dita parte 79 , aſſentando por baixo o reſto 15 , para junto do qual abaixaremos as tres letras 507 que tinhamos ſeparado , e ſerá o reſto total 15507, no qual eſtaráõ incluidas as tres partes reſtantes do cubo total , a ſaber ,

ber, tres productos do quadrado das dezenas pelas unidades, tres productos das dezenas pelo quadrado das unidades, e o cubo das unidades.

E como a primeira destas mostra centenas, apartaremos com hum ponto as duas ultimas letras 07 do dito resto, e nas que ficaõ 155 seráõ incluidos os tres productos do quadrado das dezenas pelas unidades. Para acharmos pois as unidades, dividiremos 155 pelo triplo do quadrado das 4 dezenas que temos achado, que he 48, o qual escreveremos debaixo: e achando que 48 se contém *tres* vezes em 155, assentaremos 3 na raiz, e esta será a letra das unidades.

Para verificar a letra que temos achado, e conhecer ao mesmo tempo o resto, se o houver, poderiamos formar as tres partes, que se devem achar no resto 15507; mas será igualmente commodo formar todo o cubo da raiz achada 43; e reproduzindo-se o numero dado ficaremos na certeza de que achamos a sua raiz exactamente.

Se o numero proposto tiver mais doque seis letras, discorreremos como no exemplo seguinte:

Exem-

Exemplo II.

SE nos pedirem a raiz cubica de 596947688

```
596.947.688 | 842
 849.47     |
  192
 592704
 ---------
   42436.88
   21168
 596947688
 ---------
 000000000
```

Primeiramente confideraremos a raiz, como composta de dezenas e unidades, e apartaremos com hum ponto as tres ultimas letras do numero dado. Depois, como a parte restante 596947, que contém o cubo das dezenas, tem tambem mais doque tres letras, deverá a sua raiz ter mais doque huma, e por conseguinte constará de unidades e dezenas de dezenas. Para acharmos tambem o cubo destas novas dezenas, deveremos pela mesma rasaõ apartar com hum ponto outras tres letras á direita, e ficará a parte 596, na qual se achará o cubo dellas.

Buscaremos pois a raiz cubica de 596, que he 8, e a escreveremos adiante da risca: e formando o seu cubo exacto 512 o diminuiremos de 596, e assentaremos por baixo o resto 84. Para junto deste abaixaremos a classe seguinte 947, e teremos o numero 84947, no qual apartaremos com hum ponto as duas ultimas letras á direita,

e

e debaixo da parte 849 escreveremos o divisor 192, que he o triplo do quadrado da raiz achada 8, e fazendo a divisaõ acharemos o quociente 4, que assentaremos na raiz adiante da primeira letra 8.

Para verificarmos esta raiz, e descobrirmos juntamente o resto, formaremos á parte o seu cubo 592704, e o tiraremos da parte correspondente do numero dado 596947, assentando por baixo o resto 4243. Para o lado direito deste resto abaixaremos a classe seguinte 688, da qual apartaremos com hum ponto as duas ultimas letras, e dividiremos a parte restante 42436 pelo triplo quadrado da raiz achada 84, que he 21168, e acharemos o quociente 2, que assentaremos na raiz.

Para outra vez verificarmos a raiz achada 842, e sabermos o resto, se o houver, elevalla-hemos ao cubo, e dará 596947688, o qual tiraremos do numero dado; e porque naõ fica resto, entenderemos que o numero 842 he exactamente a raiz que buscamos.

Deve notar-se, que no decurso desta operaçaõ naõ se póde ja mais assentar na raiz letra maior do que 9; e quando coubesse maior, seria sinal de se ter tomado a letra precedente menor, do que devia ser. Tambem será facil de conhecer, quando se tem tomado na divisaõ hum quociente maior do que convinha, porque o cubo que resultar naõ poderá diminuir-se da parte correspondente do numero proposto. Neste caso diminuirse-há a raiz de huma, duas &c. unidades successivamente, até que o seu cubo se possa diminuir.

Quan-

Quando o numero dado naõ he cubo perfeito, a raiz que se acha he approximada; e raras vezes bastará sabella até as unidades sómente. Para isto he muito ventajosa a *dizima*, por meio da qual se póde approximar cada vez mais para o verdadeiro valor da raiz, ainda que naõ he possivel que esta se represente ja mais por numero exactamente.

156 Para se approximar pois a raiz cubica, quanto for necessario, ajuntaremos ao numero dado tres vezes tantas cifras, quantas letras quizermos na *dizima*. E tirando a raiz como nos exemplo antecedentes, nella cortaremos com a virgula as letras correspondentes ás cifras que ajuntamos.

Exemplo III.

PEde-se a raiz cubica do numero 8755 até a casa das millesimas. Como as millesimas estaõ na terceira casa da dizima, deverá o cubo constar de nove decimais (n. 54); e por tanto ajuntaremos nove cifras ao numero proposto.

Pe-

Pelo que a questaõ se reduz a tirar a raiz cubica de 8755000000000.

```
8.755.000.000.000 | 20610
07.55
-----------------
12
8000
-----------------
 7550.00
 1200
 8741816
-----------------
  131840.00
  127308
 875455298 1
-----------------
     4470190.00
    127743163
 8754552981000
-----------------
     4470190000
```

E distribuindo o dito numero em classes, buscaremos a raiz cubica da ultima classe 8 á esquerda, que he 2, e a escreveremos adiante da risca; e tirando o seu cubo 8 da mesma classe 8, assentaremos por baixo o resto o, para junto do qual abaixaremos a classe seguinte 755. Separando nella as duas ultimas letras com hum ponto, debaixo da parte restante 7 escreveremos o divisor 12, que he tres vezes o quadrado da raiz achada 2. Dividindo 7 por 12, a letra que cabe ao quo-

quociente he o, a qual aſſentaremos na raiz, e formando o cubo da raiz ja achada 20, que he 8000, diminuillo-hemos da parte correſpondente 8755, e eſcreveremos debaixo o reſto 755, para junto do qual abaixaremos a claſſe ſeguinte 000, e continuaremos a operaçaõ do meſmo modo.

Acabada ella, acharemos que a raiz cubica de 8755000000000 exacta até a caſa das unidades he 20610: e por conſeguinte a raiz de 8755,000000000 ſerá 20,610 exacta até a caſa das milleſimas, por quanto a raiz deve ter tres vezes menos caſas na *dizima* do que ha no ſeu cubo (n. 54).

Querendo-ſe levar mais adiante eſta approximaçaõ, ajuntar-ſe-haõ tres cifras ao ultimo reſto, e ſe continuará a operaçaõ da meſma maneira que ſe praticou por cada claſſe, que ſe ajuntou a cada reſto; e aſſim por diante.

55 Eſte methodo de extrahir a raiz cubica póde applicar-ſe ás raizes de mais alto gráo. Nellas obſervaremos em geral: 1º Que o numero dado ſe ha de diſtribuir em claſſes de tantas letras, quantos forem os gráos da potencia dada, exceptuando a ultima claſſe á eſquerda que poderá conſtar de menos, e a raiz terá tantas letras quantas forem as claſſes. 2º Que da ultima claſſe á eſquerda ſe buſcará a raiz do gráo propoſto, ou exacta, ou proximamente menor, a qual ſerá a primeira letra da raiz que ſe buſca. 3º Que a dita raiz achada ſe elevará á potencia dada, a qual ſe diminuirá da meſma ultima claſſe á eſquerda, e ao reſto ſe ajuntará a primeira letra da claſſe ſeguinte. 4º Que debaixo do reſ-

resto assim augmentado se assentará por divisor a potencia da mesma raiz achada do gráo immediatamente inferior ao gráo proposto, sendo essa multiplicada pelo numero, que mostra o gráo da potencia da questaõ. 5º Que fazendo-se a divisaõ o quociente se ajuntará á primeira letra da raiz, e toda a raiz achada se elevará outra vez á potencia da questaõ, a qual se tirará da parte correspondente do numero dado, ao resto se ajuntará do mesmo modo a primeira letra da classe seguinte, e se lhe applicará por divisor a potencia da raiz já achada do gráo proximamente menor que o proposto, multiplicada pelo exponente do mesmo gráo proposto &c.

Deste modo, para tirarmos a raiz 5ª de qualquer numero, dividillo-hemos em classes de 5 letras. Buscaremos a raiz 5ª da ultima classe á esquerda, que mostrará a primeira letra da raiz que procuramos. Formaremos a 5ª potencia exacta della, e a tiraremos da mesma classe, e ao resto ajuntaremos a primeira letra da classe seguinte. Debaixo deste resto assim augmentado assentaremos por divisor a potencia 4ª da raiz achada, multiplicada por 5; e pela divisaõ acharemos a segunda letra da raiz, a qual elevaremos novamente á 5ª potencia, e a diminuiremos da parte correspondente do numero dado; ao resto ajuntaremos a primeira letra da classe seguinte, e lhe aplicaremos por divisor o quintuplo da 4ª ptencia da raiz ja achada, e assim por diante.

Para se conhecer facilmente a raiz da ultima classe á esquerda será necessario ter presente huma taboa das potencias das numeros digitos, como aqui se mostraõ até á potencia nona. PO-

RAIZES	POTENCIAS							
	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª	9ª
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	4	8	16	32	64	128	256	512
3	o	27	81	243	729	2187	6;61	19683
4	16	64	256	1024	4096	16384	65536	262144
5	25	125	625	3125	15625	78125	390625	1953125
6	36	216	1296	7776	46656	279936	1679616	10077696
7	49	343	2401	16807	117649	823543	5764801	40353607
8	64	512	4096	32768	262144	2097152	16777216	134217728
9	81	729	6561	59049	531441	4782969	43046721	387420489

Tornando á raiz cubica , cujo uſo he mais frequente , naõ ſe póde negar que o methodo aſſima dado tem o incommodo de ſer neceſſario calcular os diviſores á parte , e formar o cubo da raiz todas as vezes que ſe acha huma letra de novo ; calculo , que ſe faz cada vez mais trabalhoſo , á medida que ſe augmentaõ as letras na meſma raiz. Nos livros ordinarios ſe acha huma regra differente para a extracçaõ da raiz cubica , mas eſſa taõ complicada e trabalhoza , que certamente ſe deverá preferir o methodo que fica expoſto. Para facilitar pois eſta operaçaõ ſerá conveniente que ajuntemos aqui hnm methodo particular , o qual he da maneira ſeguinte.

Principiando a operaçaõ , como aſſima fica declarado, até ſe achar a ſegunda letra da raiz, eſta ſe aſſentará tambem abaixo da riſca , e atraz della para a eſquerda o triplo da primeira letra da meſma raiz. O numero que reſultar ſe multipliplicará pela meſma letra achada , e o producto ſe aſſentará debaixo do diviſor , começando da ultima caſa das duas letras , que foraõ ſeparadas do dividendo. Eſte producto ſe ſomará com o diviſor , e a ſoma ſe aſſentará por baixo , a qual ſe tornará a multiplicar pela meſma letra achada , e o producto ſe hirá logo diminuindo do dividendo ; e ajuntando ao reſto a claſſe ſeguinte teremos o novo dividendo. O diviſor ſe achará facilmente , ſomando mentalmente o quadrado da letra ultimamente achada com os dous numeros antecedentes ao dividendo , e ſe aſſentará a ſoma debaixo do meſmo dividendo , chegando-a huma caſa mais para a direita. Feita a diviſaõ acharemos a terceira letra da raiz , a qual tambem eſcreveremos em baixo , e atraz della ſeguidamente o triplo das letras precedentes da meſma raiz ; depois multiplicaremos eſte numero pela meſma letra , que ultimamente achamos , e praticaremos tudo o mais como na operaçaõ antecedente ; e aſſim por diante. Quando o diviſor ſahir maior que o dividendo , pôr-ſe-há cifra na raiz , ajuntar-ſe-há outra claſſe ao dividendo , e o meſmo diviſor ſe adiantará huma caſa mais para a direita.

Exem-

Exemplo.

PEde-se a raiz cubica de 916358751227902464.

916.358.751.227.902.464.	971304
187358	277
243	2911
1939	29133
26239	2913904
3685751	
28227	
2911	
2825611	
860140227	
2828523	
87399	
282939699	
11321130902464	
283027107	
11655616	
2830282723616	
0000000000000	

Tendo achado as duas letras 97 pelo methodo ordinario, assentaremos a segunda 7 debaixo da raiz, e atraz della o triplo da primeira 9, que he 27, e se formará o numero 277, o qual multiplicaremos pelo mesmo 7, e assentaremos

mos o producto 1939 debaixo do divisor 243, principiando porem da ultima casa do dividendo 187358; somando o dito producto com o divisor, teremos a soma 26239, a qual multiplicaremos outra vez pela mesma letra 7, e ao mesmo tempo tiraremos o producto do dividendo 187358, assentando por baixo o resto 3685, ao qual ajuntando a classe seguinte teremos o novo dividendo 3685751. E somando mentalmente o quadrado da mesma letra 7, que he 49, com os dous numeros 26239 e 1939, que precedem immediatamente ao dividendo, e escrevendo a soma huma casa mais para a direita, teremos o novo divisor 28227.

Pela divisaõ acharemos o quociente 1, que assentaremos na raiz, e tambem abaixo della com o triplo das letras precedentes da raiz 97, donde resultará o numero 2911, que multiplicaremos pela mesma letra achada 1, e somando o producto com o divisor teremos a soma 2825611, a qual tornaremos a multiplicar pela mesma letra 1, e tiraremos o producto do dividendo, donde ficará o resto 860140, ao qual ajuntaremos a classe seguinte, e será o novo dividendo 860140227; e somando o quadrado da mesma letra achada 1 com os dous numeros antecedentes ao dividendo, e escrevendo a soma huma casa mais para a direita, teremos o novo divisor 2828523.

Dividindo outra vez acharemos o quociente 3, o qual assentaremos na raiz, e em baixo com o triplo das letras antecedentes formaremos o numero 29133, que multiplicaremos pelo mesmo mo 3, e ſomaremos o producto 87399 com o diviſor, donde reſultará a ſoma 282939699, a qual tornaremos a multiplicar pelo meſmo 3, e tirando o producto do dividendo ficará o reſto 11321130, ao qual ajuntaremos a claſſe ſeguinte para termos o novo dividendo 11321130902. Como pela formaçaõ do diviſor vemos, que a letra 2 do numero que precede ao dividendo há de cahir debaixo da primeira letra do dividendo 1, e que naõ póde conſeguintemente fazer-ſe a diviſaõ, poremos logo cifra na raiz, ajuntaremos ao dividendo a claſſe ſeguinte, ſomaremos o quadrado da letra precedente 3 com os dous numeros precedentes ao dividendo, e eſcrevendo a ſoma duas caſas mais para a direita teremos o novo diviſor 283027107.

E tornando a dividir finalmente ácharemos o quociente 4, que aſſentaremos na raiz, e em baixo com o triplo das letras precedentes, que fará 2913904; multiplicando eſte numero pelo meſmo 4, e ajuntando o producto com o diviſor teremos a ſoma 283028272561б, a qual multiplicaremos outra vez pelo 4, e diminuiremos o producto do dividendo; e porque naõ ſobra nada, ſerá a raiz cubica do numero propoſto exactamente 971304. §§

157 Como na multiplicaçaõ dos quebrados devemos multiplicar numerador por numerador, e denominador por denominador (n. 106), he claro, que o cubo de hum quebrado ſe formará elevando ambos os ſeus termos ao cubo. E reciprocamente, para ſe tirar a raiz cubica de hum quebrado, ſerá neceſſario tirar as raizes tanto do nu-

numerador como do denominador. Deſte modo a raiz cubica de $\frac{27}{64}$ ſerá $\frac{3}{4}$ porque a raiz cubica do numerador 27 he 3, e do denominador 64 he 4.

158 Se o denominador ſómente for cubo perfeito, tirar-ſe-ha a raiz approximada do numerador, e por denominador ſe porá a raiz exacta do denominador primitivo.

Aſſim v. g. pedindo-ſe a raiz cubica de $\frac{143}{343}$, acharemos que a raiz do numerador até a caſa das centeſimas he 5,22, e que a raiz exacta do denominador he 7, peloque a raiz pedida ſerá proximamente $\frac{5,22}{7}$, ou 0,74 (n. 99).

159 Porem, ſe o denominador naõ for cubo perfeito, ambos os termos do quebrado ſe multiplicaráõ pelo quadrado do meſmo denominador (n. 88), e a operaçaõ ſe reduzirá ao caſo precedente.

Aſſim v. g. querendo ſaber a raiz cubica de $\frac{3}{7}$, multiplicaremos ambos os ſeus termos por 49 quadrado do denominador 7, e ſe reduzirá a $\frac{147}{343}$ (n. 88), cuja raiz cubica ſerá proximamente $\frac{5,27}{7}$ (n. 158), ou 0,75 (n. 99).

Quando os quebrados vem juntos com inteiros, os inteiros ſe reduzem aos quebrados (n. 86.), e a queſtaõ entrará nos caſos precedentes. Tambem podem reduzir-ſe os quebrados á dizima, antes de lhes tirarmos a raiz; mas eſta reducçaõ ſe continuará até achar tres vezes mais letras decimais do que se querem ter na raiz.

Deste modo, para tirar a raiz cubica de 7 $\frac{3}{11}$ até a casa das millesimas, reduziremos este numero a 7,272727272, cuja raiz será 1,937

160 Quando se houver de tirar a raiz cubica de huma fracçaõ decimal, procurar-se-ha que ella tenha tres vezes mais casas de dizima, do que deve ter a raiz, ajuntando-lhe as cifras que para isso forem necessarias. Entaõ tirar-se-ha a raiz, sem fazer caso da virgula, e nella se apartaráõ depois com a virgula as casas da dizima que lhe competem, isto he, o terço das que puzermos no numero proposto; e se as letras della naõ chegarem a tanto, ajuntar-se-lhe-haõ á esquerda as cifras que forem necessarias.

V. gr. Para tirarmos a raiz cubica de 6,54 até a casa das millesimas, ajuntar-lhe-hemos sete cifras, e buscaremos a raiz como se fosse do inteiro 654000000, a qual acharemos ser 1870. E separando-lhe tres letras para a dizima, por haver nove no numero dado, será a raiz pedida 1,870, ou 1, 87. Do mesmo modo acharemos, que a raiz cubica de 0,0006 he 0,08 até a casa das centesimas; e assim das mais.

161 O methodo abbreviado, que ensinamos para a Divisaõ (n. 69. e seg.), tambem se applica facilmente á extracçaõ da raiz cubica. Porque sendo bastante tiralla até a casa das unidades, dividir-se-ha o numero proposto em classes, e depois selhe cortaráõ tantas letras á direita, menos duas, quanto for o dobro das mesmas classes. Das letras que ficarem á esquerda

da se extrahirá a raiz cubica, e em chegando ao ultimo resto desprezaremos a ultima letra no divisor que lhe competir, e assim por diante; mas naõ tomaremos o divisor da operaçaõ precedente, senaõ quando elle tiver tantas letras constantes á esquerda quantas forem as do resto actual.

Das rasoens, proporçoens, e progressoens, e das regras, que dellas dependem.

162 PElo nome de *Rasaõ* nada mais entendemos na Mathematica do que a grandeza relativa, que resulta da comparaçaõ de duas quantidades. Esta he de dous modos.

163 Porque se compararmos duas quantidades, procurando sáber quanto huma dellas excede, ou he excedida da outra, o resultado da comparaçaõ será a differença das mesmas quantidades, e esta se chama *Rasaõ Arithmetica.*

Assim v. g. comparando 15 com 8 para saber a sua differença 7, este numero 7 que resulta da comparaçaõ he a rasaõ arithmetica do numero 15 ao numero 8.

Para denotarmos, que comparamos duas quantidades neste ponto de vista, costumamos separallas com hum ponto. Assim por esta expressaõ 15. 8 entenderemos a rasaõ arithmetica de 15 para 8.

164 Porem se compararmos duas quantidades, procurando conhecer quantas vezes huma contém, ou he contida na outra, o resultado desta comparaçaõ he a *Rasaõ Geometrica.* E quando se diz *Rasaõ* simplesmente, sempre se entende *Geometrica.*

Com-

Comparando v. gr. 12 com 3 para sabermos quantas vezes o contém, o que resulta desta comparaçaõ, isto he, o ser 12 *quadruplo* de 3, he a rasaõ geometrica de 12 para 3.

Para mostrarmos, que comparamos duas quantidades neste sentido, costumamos separallas com dous pontos. Esta expressaõ 12 : 3 significa a rasaõ geometrica de 12 para 3.

165 Das duas quantidades, que se comparaõ arithmetica ou geometricamente, a que se profere ou escreve em primeiro lugar chama-se *antecedente*, e a outra *consequente*. Assim na rasaõ 12 : 3 o numero 12 he antecedente, e o numero 3 consequente; e ambos elles em commum se chamaõ *termos* da rasaõ.

166 Para conhecer a rasaõ arithmetica de duas quantidades, naõ he necessario mais do que diminuir huma da outra, e o resto mostrará a rasaõ, ou quanto huma tem de mais que a outra.

167 Para avaliar porem a rasaõ geometrica de duas quantidades, deveremos dividillas huma pela outra, e o quociente mostrará a rasaõ dellas, isto he, quantas vezes huma contém a outra.

168 Daqui por diante avaliaremos sempre a rasaõ geometrica pela divisaõ do antecedente pelo consequente, aindaque aquelle seja mais pequeno. Assim a rasaõ de 12 para 3 será 4, e de 3 para 12 será $\frac{3}{12}$, ou $\frac{1}{4}$.

¶¶ Deve notar-se, que naõ póde haver rasaõ, senaõ entre quantidades *homogeneas*; porque as *heterogeneas* nem se excedem, nem se contém mutuamente. Assim 12 *toesas* para 3 *libras* naõ

tem

tem rasaõ alguma arithmetica, nem geometrica. Porque sem embargo de que o numero 12 tem sobre 3 o excesso do 9, he visivel que 12 *toesas* naõ tem sobre 3 *libras* excesso algum assignavel nem de *libras*, nem de *toesas*. E do mesmo modo, aindaque 12 contem a 3 quatro vezes, 12 *toesas* naõ contém de modo algum a 3 *libras*, porque saõ quantidades de differente genero, entre as quais naõ póde haver comparaçaõ.

A differença dos termos na rasaõ arithemetica, e o quociente na geometrica, tambem tem o nome de *denominadores*, e *exponentes* da rasaõ.

A rasaõ geometrica divide-se em *racional*, e *irracional*. He racional, quando o exponente se póde exprimir por numero quer seja inteiro, quer quebrado; irracional, quando o exponente naõ póde exprimir-se ja mais por numero algum exactamente, como he a rasaõ da unidade para a raiz quadrada de 2. Tambem se divide em rasaõ de *igualdade*, e *desigualdade*, conforme consta de termos iguais, ou desiguais; chamase rasaõ *de maior desigualdade*, quando o antecedente he maior que o consequente; e *de menor desigualdade* quando he menor.

Os Mathematicos antigos fazem sinco differenças genericas da rasaõ de maior desigualdade, (que naõ deve ignorar quem quizer entender as suas obras) a saber: *multiplex*, *superparticularis*, *superpartiens*, *multiplex-superparticularis*, *multiplex-superpartiens*; e da rasaõ de menor desigualdade saõ outras tantas differenças, que se declaraõ com os mesmos nomes precedidos de hum *sub*, a saber: *submultiplex*, *subsuperparticularis &c.*

Ra-

Rafaõ *multiplex* he, quando o antecedente contém o confequente algumas vezes exactamente; e *fubmultiplex*, quando nelle he contido do mefm modo. A primeira he em particular *dupla*, *tripla*, *quadrupla &c.* e a fegunda *fubdupla*, *fubtripla*, *fubquadrupla &c*, confóme os expoentes. A rafaõ 10:1 he *decuplà*, e 1:10 *fubdecupla*.

Superparticularis he, quando o antecedente contém huma vez ao confequente, e alem diffo huma parte aliquota delle, como 3:2; e *fubfuperparticularis*, quando o antecedente he contido do mefmo modo no confequente, como 2:3. As efpecies da primeira diftinguem-fe com os nomes das partes aliquotas precedidos de hum *fesqui*; e as efpecies da fegunda com os mefmos vocabulos precedidos de hum *fub*. Defte modo as rafoens 3:2, 4:3, 5:4, 6:5 &c pela mefma ordem tem os nomes de *fesquialtera*, *fesquitertia*, *fesquiquarta*, *fesquiquinta &c*; e as rafoens 2:3, 3:4, 4:5, 5:6 &c de *fubfesquiultera*, *fubfesquitertia*, *fubfesquiquarta*, *fubfesquiquinta. &c.*

Superpartiens he, quando o antecedente contém huma vez o confequente e mais algumas partes aliquotas delle, como 5:3; e *Subfuperpartiens*, quando o antecedente fe contém no confequente do mefmo modo, como 3:5. As efpecies defte genero fe denotaõ ajuntando a denominaçaõ das partes aliquotas, e metendo depois do *fuper* as vozes *bi*, *tri*, *quadri &c*, pelas quais fe moftra quantas deffas partes aliquotas fe exprimem. Affim 5:3 he rafaõ *fuperbipartiens tertias*, 8:5 *fupertripartiens quintas &c.* E reciprocamente, 3:5 he rasaõ *subsuper bipartiens tertias*, 5:8 *subsupertripartiens quintas &c.*

Multiplex-superparticularis he, quando o antecedente contém algumas vezes o consequente, e alem disso huma parte aliquota delle; e *submultiplex-superparticularis*, quando o antecedente se contém no consequente do mesmo modo. As especies da primeira saõ *dupla-sesquialtera* 5:2, *dupla-sesquitertia* 7:3 &c, *tripla-sesquialtera* 7:2, *tripla-sesquitertia* 10:3 &c &c; e da segunda *subdupla-sesquialtera* 2:5, *subdupla-sesquitertia* 3:7 &c, *subtripla-sesquialtera* 2:7, *subtripla-sesquitertia* 3:10 &c. &c.

Finalmente *multiplex-superpartiens* he, quando o antecedente contém algumas vezes o consequente e mais algumas partes aliquotas delle; e *submultiplex-superpartiens*, quando o antecedente se contém no consequente do mesmo modo. As especies de ambas facilmente se denominaõ pelo que assima fica declarado. A rasaõ 8:3 he *dupla-superbipartiens tertias*, 74:7 *decupla-superquadripartiens septimas &c*; e reciprocamente, a rasaõ 3:8 he *subdupla-superbipartiens tertias*, 7:74 *subdecupla-superquadripartiens septimas &c.* §§

169 A rasaõ arithmetica fica sendo a mesma, todas as vezes que ambos os termos se augmentaõ ou diminuem de huma mesma quantidade; porque assim naõ se altéra nada a differença, na qual consiste a rasaõ. Assim 3.8 he o mesmo que 4.9, que 5.10 &c.

170 A rasaõ geometrica tambem será a mesma, todas as vezes que ambos os termos se multiplicarem ou dividirem por huma mesma quan-

entidade. Porque consistindo a rasaõ no quociente do antecedente dividido pelo consequente (n. 168), he huma quantidade fraccionaria (n.97), a qual naõ muda de valor, quando ambos os termos se multiplicaõ ou dividem por huma mesma quantidade (n. 88, 89). Assim a rasaõ 3: 12 vale o mesmo que 6 : 24, multiplicando ambos os termos por 2; e o mesmo que 1 : 4, dividindo ambos os termos por 3.

171 Esta propriedade serve de muito para reduzir huma rasaõ aos termos mais simples. Tendo v. g. de examinar a rasaõ de $6\frac{3}{4}$ a $10\frac{2}{3}$; reduzindo tudo a quebrado, acharemos que he a mesma rasaõ que de $\frac{27}{4}$ a $\frac{32}{3}$; depois reduzindo ao mesmo denominador, a mesma que de $\frac{81}{12}$ a $\frac{128}{12}$; e supprimindo o denominador commum 12 (que he o mesmo que multiplicar ambos os termos por 12) a rasaõ proposta será a mesma que a de 81 para 128.

¶¶ A mesma mudança, que se faz em huma rasaõ arithmetica, ajuntando ou tirando huma quantidade ao antecedente, tambem se fará tirando ou ajuntando a mesma quantidade ao consequente; porque de ambos os modos resultaõ duas rasoens, das quais huma contém os termos da outra augmentados ou diminuidos da mesma quantidade. Na rasaõ 5.9 tanto faz tirar 2 ao antecedente para ficar 3.9 como ajuntar 2 ao consequente para ficar 5.11; e reciprocamente tanto faz ajuntar 2 ao antecedente para ficar 7.9, como mo tirar 2 ao conſequente para ficar 5.7.

É a meſma mudança, que ſe faz em huma raſaõ geometrica, multiplicando ou dividindo o antecedente por huma quantidade, ſe fará tambem dividindo ou multiplicando o conſequente pela meſma quantidade; porque por ambas as operaçoens reſultaõ duas raſoens, das quais huma he formada dos termos da outra multiplicados ou divididos por huma meſma quantidade. Na raſaõ 4:9 vale o meſmo dividir o antecedente por 2, que multiplicar o conſequente pelo meſmo 2, pois ſahiráõ as raſoens iguais 2:9 e 4:18; do meſmo modo multiplicando o antecedente por 3, ou dividindo o conſequente pelo meſmo 3, reſultaráõ as raſoens iguais 12:9, e 4:3 ſſ

172 Se quatro quantidades forem tais, que as duas primeiras tenhaõ a meſma raſaõ que as duas ultimas, formaráõ todas huma *proporçaõ*; e eſta ſerá arithmetica, ou geometrica, conforme forem as raſoens arithmeticas, ou geometricas.

Eſtas quatro quantidades 7, 9, 12, 14 formaõ huma proporçaõ arithmetca, porque entre as duas primeiras e as duas ultimas ha a meſma raſaõ de differença 2. Para denotar eſta proporçaõ aſſentaõ-ſe os quatro termos deſte modo 7.9:12.14, ou tambem aſſim $7-9=12-14$; expreſſoens, pelas quais entendemos que 7 *he para* 9 *como he* (arithmeticamente) 12 *para* 14.

Eſtas quatro quantidades 3, 15, 4, 20 formaõ huma proporçaõ geometrica, porque 3 ſe contém em 15 tantas vezes, como 4 em 20. Para aſſim o darmos a entender, aſſentaremos os termos

mos deste modo 3:15::4:20, ou 3:15=4:20; expressoens, que querem dizer, que 3 *he para* 15 *como* 4 *he para* 20.

§§ Daqui se entenderá facilmente, que o producto de qualquer multiplicaçaõ he o quarto termo em proporçaõ geometrica a respeito da unidade e dos factores, isto he, *que a unidade he para hum dos factores, como o outro para o producto;* porque o producto contem tantas vezes hum dos factores, quantas o outro contém a unidade.

Do mesmo modo na divisaõ, *a unidade he para o quociente, como o divisor para o dividendo;* porque o dividendo he igual ao producto do divisor multiplicado pelo quociente.

Deve notar-se que todas as rasoens geometricas saõ homogeneas, pois consistem no quociente do antecedente dividido pelo consequente, o qual quociente he sempre numero abstracto. Por isso, aindaque naõ póde haver rasaõ entre termos heterogeneos, póde com tudo haver proporçaõ, com tanto que cada hum dos antecedentes seja homogeneo com o seu consequente. Assim 12 *toesas* saõ para 3 *toesas*, como 8 *libras* para 2 *libras*; porque sem embargo de naõ ter comparaçaõ a *toesa* com a *libra*, póde com tudo comparar-se a rasaõ de *toesas* a *toesas* com a rasaõ de *libras* a *libras*; pois quantas vezes se contém 3 *toesas* em 12 *toesas*, tantas se contém 2 *libras* em 8 *libras*, isto he, *quatro vezes*. §§

173 O primeiro termo, e o quarto de huma proporçaõ, chamaõ-se *extremos*; o segundo e terceiro, *meios*.

Como na proporçaõ ha duas raseens, e por con-

conſeguínte dous antecedentes e dous conſequentes, aos termos da primeira chamamos *primeiro antecedente, e primeiro conſequente*, e aos da ſegunda *ſegundo antecedente, e ſegundo conſequente.*

174 Quando ſaõ iguais os meios de huma proporçaõ, eſta ſe chama *continua.*

Aſſim 3.7:7.11 he huma proporçaõ arithmetica continua, e o termo 7 he o *meio arithemetico* entre 3 e 11. Eſta proporçaõ ſe eſcreve por abbreviatura deſta maneira ÷ 3.7.11, denotando o ſinal ÷ que o meio 7 faz juntamente as vezes de primeiro conſequente, e ſegundo antecedente.

Do meſmo modo 5:20::20:80 he huma proporçaõ geometrica continua, e o termo 20 he o *meio geometrico proporcional* entre 5 e 80. Eſta proporçaõ ſe eſcreve deſta maneira ∺ 5:20:80, denotando tambem o ſinal ∺ que o termo 20 ſe ha de tomar duas vezes.

175 Do que até agora temos dito ſobre a proporçaõ tanto arithmetica, como geometrica, ſe ſegue:

1º Que ſe na proporçaõ arithmetica ſe ajuntar ou tirar aos antecedentes a differença que reina na proporçaõ, conforme elles forem menores ou maiores que os conſequentes, cada hum ficará ſendo igual ao ſeu conſequente; pois he evidente, que deſte modo ſe ajunta ao termo menor de cada raſaõ o que lhe falta para igualar o maior, ou ſe tira do maior o exceſſo que tem ſobre o menor. Aſſim na proporçaõ 3.7 : 8.12, ſe ao primeiro e terceiro termo ſe ajuntar a differença 4, termos 7.7 : 12. 12.

2º Que ſe na proporçaõ geometrica ſe multipliplicarem os consequentes pelo exponente da rasaõ, ficaráõ ambos iguais aos seus antecedentes; porque multiplicar o consequente pelo exponente he tomallo tantas vezes, quantas se contém no antecedente. Assim na proporçaõ 12: 3:: 20:5, multiplicando e 5 pelo exponente 4, teremos 12:12:: 20:20; e na proporçaõ 15: 9::45:27, multiplicando 9 e 27 pelo expoente $\frac{15}{9}$ ou $\frac{5}{3}$, teremos 15:15::45:45.

Propriedades das proporçoens arithmeticas.

176 A propriedade fundamental das proporções arithmeticas he, que *a soma dos extremos sempre he igual á soma dos meios*. Assim v. g. nesta proporçaõ 3.7:8.12 tanto os extremos 3 e 12 como os meios 7 e 8, fazem igualmente a soma de 15.

E com effeito se o primeiro termo for igual ao segundo, e o terceiro ao quarto, como na proporçaõ 7.7:12. 12, he claro, que os extremos fazem huma soma igual á dos meios. Porém toda a proporçaõ arithmetica póde reduzirse a esta fórma, ajuntando ou tirando aos antecedentes a differença que reina na proporçaõ (n. 175 1º). Logo, como esta addiçaõ ou subtracçaõ igualmente augmenta ou diminue a soma dos meios e dos extremos, e conseguintemente naõ altéra a sua igualdade ou desigualdade, he evidente, que sahindo as somas iguais pela dita reducçaõ, já eraõ iguais antes della.

177

177 Como na proporçaõ continua o meio se toma duas vezes, a soma dos extremos será dupla do mesmo meio. Assim na proporçaõ ÷ 7. 11. 15 a soma dos extremos 7 e 15 faz 22, que he o dobro de 11.

§§ Reciprocamente: se quatro quantidades forem tais, que a soma das medias seja igual á das extremas, formaráõ huma proporçaõ arithmetica.

Porque para serem iguais as ditas somas, he necessario que quanto huma das medias excede a huma das extremas, tanto pela outra destas seja excedida a outra daquellas; e consequentemente entre a primeira e segunda haverá a mesma differença que entre a terceira e quarta, como se requer para haver proporçaõ arithmetica.

Donde se segue, que tres quantidades estaraõ em proporçaõ continua todas as vezes que a media for igual á ametade da soma das extremas.

Sendo pois dados tres termos, acharemos o quarto arithmetico, somando o segundo com o terceiro, e diminuindo da soma o primeiro; dados dous termos, acharemos o terceiro em proporçaõ arithmetica continua, tirando o primeiro do dobro do segundo; e dados dous termos, acharemos o meio arithmetico, tomando ametade da soma delles.

Segue-se tambem, que em qualquer proporçaõ arithmetica podem os meios passar para extremos, e os extremos para meios; e que tanto os extremos como os meios podem trocar entre si o lugar, ficando sempre em proporçaõ. Deste modo a proporçaõ 3.7 : 8.12 pela permutaçaõ

dos

dos termosproduz as proporçoens ſeguintes :

3. 7 : 8. 12
3. 8 : 7. 12
7. 3 : 12. 8
7. 12 : 3. 8
8. 3 : 12. 7
8. 12 : 3. 7
12. 7 : 8. 3
12. 8 ; 7. 3

Do meſmo principio ſe entende facilmente que a proporçaõ arithmetica ſe conſervará, ajuntando ou tirando qualquer quantidade ao primeiro termo e juntamente ao terceiro, ou ao ſegundo e juntamente ao quarto. Aſſim na proporçaõ 3. 7 : 8. 12, ajuntando a ambos os antecedentes qualquer numero v. g. 6, e a ambos os conſequentes quàlquer outro v. g. 9, conſervar-ſe-ha a proporçaõ 9. 16 : 14. 21.

Do meſmo modo, ſe os termos correſpondentes de duas ou mais proporçoens arithmeticas ſe ſomarem, ou diminuirem, as ſomas ou as differenças ficaráõ em proporçaõ. Aſſim ſomando as duas proporçoens 3. 7 : 8. 12 e 2. 5 : 6. 9 reſulta a proporçaõ 5. 12 : 14. 21; e diminuindo a ſegunda da primeira, a proporçaõ 1. 2 : 2. 3. ʃʃ

Propriedades das proporçoens geometricas.

178 A Propriedade fundamental das proporçoens geometricas he, que *o producto dos meios ſempre he igual ao producto dos extremos;* aſſim

assim como na proporçaõ 3:15 :: 7:35, tanto os extremos 3 e 35, como os meios 7 e 15, daõ igualmente o producto 105.

Porque he evidente, que o producto dos meios e dos extremos deve ser o mesmo todas as vezes que cada hum dos antecedentes for igual ao seu consequente. Porem toda a proporçaõ geometrica póde reduzir-se a esta forma, multiplicando ambos os consequentes pelo expoente da rasaõ (n. 175. 2º). Logo, como por esta operaçaõ ambos os productos se multiplicaõ igualmeute pelo expoente; he claro, que sahindo iguais tambem eraõ iguais antes da dita multiplicaçaõ.

Logo na proporçaõ continua *he o producto dos extremos igual ao quadrado do meio.* Porque sendo os dous meios iguais; o seu producto he o quadrado de qualquer delles.

Sendo pois dados dous numeros, acharemos o meio proporcional multiplicando hum pelo outro, e tirando a raiz quadrada do producto. Querendo v. g. achar o meio geometrico entre 4 e 9, multiplicaremos estes numeros, e do producto 36 tiraremos a raiz quadrada 6, e teremos ∺ 4:6:9.

179 Dados os tres primeiros termos de huma proporçaõ geometrica, achar-se-ha o quarto, multiplicando o segundo pelo terceiro, e dividindo o producto pelo primeiro. Porque he manifesto, que teriamos o quarto termo dividindo o producto dos extremos pelo primeiro (n. 74); porem o producto dos extremos he igual ao dos meios (n. 178.): logo teremos igualmente o quarto termo, dividindo o producto dos meios pelo primeiro.

Pedindo-ſe v. g. o quarto termo da proporçaõ geometrica, cujos tres primeiros ſaõ 3:8 :: 12, multiplicaremos 8 por 12, e partiremos por 3 o producto 96. O quociente 32 ſera o quarto proporcional, de ſorte que teremos 3:8 :: 12:32; e com effeito a primeira raſaõ he $\frac{3}{8}$, e a ſegunda $\frac{12}{32}$, que, dividindo-ſe ambos os termos por 4 (n. 89.), ſe reduz tambem a $\frac{3}{8}$.

Pelo meſmo raciocinio ſe vê claramente, que em geral ſe póde achar qualquer dos termos, dando-ſe os outros tres. *Buſcando-ſe algum dos extremos, o producto dos meios ſe dividirá pelo extremo dado; e buſcando-ſe algum dos meios, o producto dos extremos ſe dividirá pelo meio conhecido.*

180 Eſta propriedade da igualdade dos productos dos meios, e dos extremos, naõ póde competir ſenaõ a quatro quantidades em proporçaõ geometrica. Porque naõ eſtando em proporçaõ, he evidente que multiplicando ambos os conſequentes pela raſaõ dos dous primeiros termos, ſomente o primeiro antecedente ficará igual ao ſeu conſequente, e por eſſa raſaõ naõ poderá ſer o producto dos meios igual ao dos extremos.

Logo, *ſe quatro quantidades forem tais, que o producto das medias ſeja igual ao das extremas, eſtaraõ em proporçaõ geometrica.*

181 Donde ſe ſegue, *que a proporçaõ ſe conſervará entre quatro quantidades, paſſando as medias para extremas, e as extremas para medias.*

182 O meſmo ſuccederá, *ſe trocarmos o lugar*

gar das medias, ou tambem das extremas. Porque de ambos os modos se conservará a igualdade sobredita dos productos.

Assim da proporçaõ 3:8 :: 12: 32 resultaõ pela unica permutaçaõ dos termos as proporçoens seguintes.

3: 8 :: 12:32
3:12 :: 8:32
8: 3 :: 32:12
8:32 :: 3:12
12. 3 :: 32: 8
12:32 :: 3: 8
32:12 :: 8: 3
32: 8 :: 12: 3

A segunda destas se diz resultar da primeira *alternando*, a terceira *invertendo*, a quarta *invertendo e alternando*, a quinta *alternando e invertendo*, a sexta *transpondo*, a setima *transpondo e invertendo*, a oitava finalmente *transpondo invertendo e alternando.*

183 Como o terceiro termo de huma proporçaõ póde passar para o lugar do segundo; e reciprocamente; segue-se, *que a proporçaõ se ha de conservar, todas as vezes que ambos as antecedentes, ou ambos os consequentes se multiplicarem, ou dividirem juntamente por huma mesma quantidade.*

Porque mudados os termos, os que eraõ antecedentes formaõ a primeira rasaõ; e os consequentes a segunda. Peloque multiplicar; ou dividir ambos os antecedentes; ou ambos os consequentes por huma quantidade, vem a ser o mesmo que multiplicar, ou dividir os dous termos de huma rasaõ pela mesma quantidade; operaçaõ que lhe naõ altéra o valor (n. 170.).

Dada v. g. a proporçaõ 3:7 :: 12:28 , dividindo ambos os antecedentes por 3 podemos inferir que 1:7 :: 4:28 ; porque da primeira proporçaõ teremos *alternando* 3:12 :: 7:28 (n. 182.) , e dividindo os termos da primeira rasaõ por 3 (n. 170.) , teremos 1:4 :: 7:28 ; e *alternando* outra vez 1:7::4:28. (n. 182.).

184 *Se em qualquer proporçaõ grometrica a soma do antecedente e consequente, ou a sua differença , se comparar com o antecedente , ou com o consequente em ambas as rasoens do mesmo modo , o resultado formará huma proporçaõ.*

Porque se a soma , ou a differença referida , se comparar com o consequente , he vizivel , que ajuntando ou tirando o consequente ao antecedente , este o deverá conter mais ou menos huma vez do que antes o continha , e como esta mudança se faz igualmente na segunda rasaõ , que pela natureza da proporçaõ he igual á primeira , seraõ necessariamente iguais as novas rasoens que assim resultaõ. O mesmo raciocinio terá lugar , quando se comparar a dita soma ou differença com o antecedente , considerando primeiro os antecedentes mudados para o lugar dos consequentes , e reciprocamente (n. 181).

Dando-se v. gr. a proporçaõ 12:3 :: 32:8 , della poderemos inferir outras quatro proporçoens , como aqui se mostraõ , nas quais o sinal + quer dizer *mais* , e o sinal − *menos*.

$$\frac{12 : 3 :: 32 : 8}{\begin{array}{l} 12+3 : 3 :: 32+8 : 8 \\ 12+3 : 12 :: 32+8 : 32 \\ 12-3 : 3 :: 32-8 : 8 \\ 12-3 : 12 :: 32-8 : 32 \end{array}}$$

A primeira destas se diz resultar da proporçaõ primitiva *compondo*, ou por *composiçaõ de rasaõ*, a segunda *por composiçaõ inversa de rasaõ*, a terceira *dividindo* ou *por divisaõ de rasaõ*, e a quarta *por divisaõ inversa*, ou *por conversaõ de rasaõ*.

185 Donde se collige, *que em toda a proporçaõ geometrica a soma ou differença dos antecedentes he para a soma ou differença dos consequentes, como qualquer antecedente para o seu consequente.*

Assim da proporçaõ 12:3 :: 32:8 resultaõ as duas proporçoens seguintes:

$$12+32 : 3+8 :: 12 : 3$$
$$32-12 : 8-3 :: 12 : 3$$

Porque *alternando* teremos 12:32 :: 3:8 (n. 182), e desta pela *composiçaõ* e *divisaõ inversa de rasaõ* resultaráõ as duas proporçoens $12+32 : 12 :: 3+8 : 3$, e $32-12 : 12 :: 8-3 : 3$ (n. 184), as quais alternando outra vez se convertem em $12+32 : 3+8 :: 12 : 3$, e $32-12 : 8-3 :: 12 : 3$ (n. 182).

186 Logo, *Sendo dado qualquer numero de rasoens iguais, será a soma de todos os antecedentes para a soma de todos os consequentes, como qualquer antecedente para o seu consequente.* Por exemplo, sendo iguais as rasoens 4:12 :: 7:21 :: 2:6, teremos tambem $4+7+2 : 12+21+6 :: 4 : 12 :: 7 : 21$ &c.

Por-

Porque tomando as duas primeiras 4:12::7:21; teremos 4+7:12+21 ::4:12 (n. 185), ou (pela rasaõ de ser 4:12 :: 2: 6) 4+7:12+21 ::2:6; esta proporçaõ dará outra vez 4+7+2:12+21+6::2:6 (n. 185.), e assim por diante.

187 *Rasaõ composta* he a que se forma de duas ou mais rasoens, multiplicando entre si os antecedentes, e da mesma sorte os consequentes. Dando-se v. gr. as rasoens 12:4 e 25:5, o producto dos antecedentes será 300, e dos consequentes 20; e assim 300:20 será a rasaõ composta das duas rasoens 12:4 e 25:5.

188 Como qualquer rasaõ se avalia pelo quociente do antecedente dividido pelo consequente, e conseguintemente por huma fracçaõ, que tenha o antecedente por numerador, e o consequente por denominador (n. 168), he claro, que a rasaõ composta se forma pela multiplicaçaõ das fracçoens, que expoem o valor das rasoens componentes (n. 106). Assim exprimindo-se a rasaõ 12:4 por $\frac{12}{4}$ ou por 3, e a rasaõ 25:5 por $\frac{25}{5}$ ou por 5; a rasaõ composta dellas 300:20 se exprime por $\frac{300}{20}$, ou por 15, que he o producto dos exponentes das rasoens 12:4 e 25:5

189 A rasaõ composta de duas iguais chama-se *rasaõ duplicada* de qualquer dellas; sendo composta de tres, *triplicada*; de quatro, *quadruplicada &c*; e qualquer das rasoens iguais componentes será no primeiro caso *subduplicada* da rasaõ composta, no segundo *subtriplicada &c.* Dadas v. g. as rasoens iguais 2:3 e 4:6, a que dellas

las ſe compóe 8:18 ſerá raſaõ duplicada de 2:3 ou de 4:6 ; e qualquer deſtas raſaõ ſubduplicada de 8:18.

190 *Se duas proporçoens ſe multiplicarem ordenadamente, iſto he, ſe o primeiro termo de huma ſe multiplicar pelo primeiro da outra, o ſegundo pelo ſegundo &c, os quatro productos que reſultarem eſtaraõ em proporçaõ.*

Porque multiplicar as duas proporçoens deſta maneira, he multiplicar duas raſoens iguais por outras duas iguais (n. 172); logo as duas raſoens compoſtas que reſultaõ ſaõ iguais; logo os quatro productos formaõ huma proporçaõ (n. 172).

191 Donde ſe ſegue, *que os quadrados, cubos*, e em geral *as potencias ſemelhantes de quatro quantidades proporcionais, ſaõ tambem entre ſi proporcionais;* porque, para formar as ditas potencias, naõ he neceſſario mais do que multiplicar a proporçaõ dada por ſi meſma huma, duas &c vezes conſecutivamente

192 Do meſmo modo, *as raizes quadradas, cubicas*, e geralmente *as raizes ſemelhantes de quatro quantidades proporcionais, tambem ſaõ proporcionais*. Porque deſte modo naõ ſe faz outra couſa, ſenaõ tirar raizes ſemelhantes de raſoens iguais (n. 142. 157. 168.); logo as novas raſoens que reſultaõ ſeraõ iguais; e por conſeguinte as ditas raizes proporcionais (n. 172).

Uſo

Uſo das propoſiçoens antecedentes.

193 AS propoſiçoens, que acabamos de moſtrar, e que ſe chamaõ *Regras das proporçoens*, tem hum uſo continuo em todas as partes da Mathematica. Porem aqui ſomente tocaremos o que pertence á Arithmetica, principiando pelo uſo da propoſiçaõ aſſima demonſtrada (n. 179.), que ſerve de fundamento a tudo o mais.

Da Regra de tres directa e ſimples.

194 A Regra de *tres*, que pelo ſeu grande uſo ſe chama tambem *Regra aurea*, divide-ſe em muitas eſpecies, as quais todas tem por objecto achar hum termo de huma proporçaõ por meio dos outros tres.

A que ſe chama *regra de tres directa e ſimples*, tem o nome de *ſimples*, e na linguagem dos noſſos autores antigos de *cham*, porque a propoſta das queſtoens a que ſe applica naõ involve mais do que quatro quantidades, das quais ſe daõ tres, e ſe pergunta a quarta.

Chama ſe tambem *directa*, porque das quatro quantidades, que nella ſe conſideraõ ha duas principais homogeneas entre ſi, cada huma das quais determina huma das outras de tal modo, que como a primeira daquellas contem ou he contida na ſegunda, aſſim a que depende da primeira contenha, ou ſeja contida na que depende da ſegunda. Iſto ſe verificará todas as vezes que hu-

huma das quantidades principais com a que della depende occuparem juntamente o lugar de antecedentes, ou de consequentes, o que naõ póde ter lugar na *regra de tres inversa*, como depois mostraremos.

O methodo de achar o quarto termo de huma proporçaõ, e de practicar conseguintemente a *regra de tres directa e simples*, ja fica sufficientemente declarado (n. 179); falta mostrar o uso desta regra por meio de alguns exemplos.

Exemplo I.

SE 40 obreiros em hum tempo certo tem feito 268 *toesas* de obra, quantas *toesas* faraõ 60 obreiros no mesmo tempo?

Pelo mesmo teor da questaõ se vê, que os dous numeros de obreiros 40 e 60 saõ os termos principais, e que a obra de 268^T he relativa ao primeiro, e a que se busca relativa ao segundo. Tambem he manifesto, que a obra ha de crescer na rasaõ dos obreiros, de sorte que o duplo, triplo, quadruplo &c numero delles, deve produzir huma obra dupla, tripla, quadrupla &c dentro do mesmo tempo; e conseguintemente, que o numero pedido de *toesas* deve conter o numero dado de 268 *toesas*, como o numero dos obreiros que as haõ de fazer contém o numero dos obreiros relativo ás 268 *toesas*. Pelo que deveráõ os termos heterogeneos respectivos óccupar juntamente o lugar de antecedentes, ou de consequentes, o que mostra ser a proporçaõ directa. Buscar-se-ha pois o quarto proporcional

aos

aos tres termos ſeguintes - - - - - - - - - - - - - -
$$40 : 60 :: 268^{T} :$$
ou, dividindo os termos da primeira raſaõ por 20 (n. 170), aos tres ſequintes - - - - - - - - - - -
$$2 : 3 :: 268^{T} :$$
Por tanto (n. 179) multiplicaremos 268^{T} por 3, e partiremos o producto 804^{T} por 2; o quociente 402^{T} ſerá o quarto termo, iſto he, a obra que faráõ 60 obreiros trabalhando tanto tempo e com tanta diligencia como os outros 40, que fizeraõ 268^{T}.

Exemplo II.

HUma náo com vento uniforme caminhou 275 leguas em 3 dias. Pergunta-ſe, em quantos dias caminhará 2000 leguas, continuando o vento e todas as mais circunſtancias do meſmo modo?

He claro que neſta queſtaõ ſe requer tanto mais tempo, quanto mais forem as leguas que ſe haõ de andar; e conſeguintemente, que o tempo, que ſe buſca deve conter tantas vezes 3 dias, quantas o numero das leguas que lhe ſaõ reſpectivas contém as leguas reſpectivas aos 3 dias. Buſcar-ſe-há pois o quarto proporcional aos tres termos ſeguintes - - - - - - - - - - - - - -
$$275 : 2000 :: 3^{d}.$$
Pelo que multiplicaremos 3^{d} por 2000; e dividindo o producto 6000^{d} por 275, teremos o quociente $21^{d}\ \frac{9}{11}$, que he o tempo que ſe requer para navegar 2000 leguas ſegundo as condiçoens da queſtaõ.

Exem-

Exemplo III.

PAgando-ſe 168^{lb} $9^{ſ}$ 4^{d} por 52^{T} 4^{P} 5^{p} de obra pergunta-ſe quanto ſe deve pagar por 77^{T} 1^{P} 8^{p}?

Pela meſma queſtaõ ſe vê, que o preço relativo a 77^{T} 1^{P} 8^{p} deve conter tantas vezes o preço relativo a 52^{T} 4^{P} 5^{p}, quantas o numero 77^{T} 1^{P} 8^{p} contém o numero 52^{T} 4^{P} 5^{p}. Buſcar-ſe-há pois o quarto proporcional aos tres termos ſeguintes - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$52^{T}\ 4^{P}\ 5^{p} : 77^{T}\ 1^{P}\ 8^{p} :: 168^{lb}\ 9^{ſ}\ 4^{d} :$$

Iſto ſe poderá fazer multiplicando 168^{lb} $9^{ſ}$ 4^{d} por 77^{T} 1^{P} 8^{p}, e dividindo o producto por 52^{T} 4^{P} 5^{p}, conforme as regras dadas para o calculo deſtes numeros (n. 122. 128.).

Porém ſerá mais facil o reduzir os dous termos da primeira raſaõ á ſua infima eſpecie de *pollegadas*; e a queſtaõ ſe reduzirá a buſcar o quarto termo da proporçaõ ſeguinte - - - - -

$$3797 : 5564 :: 168^{lb}\ 9^{ſ}\ 4^{d} :$$

Entaõ multiplicando 168^{lb} $9^{ſ}$ 4^{d} por 5564 teremos o producto 937348^{lb} $10^{ſ}$ 8^{d}; e dividindo eſte por 3797, o quociente 246^{lb} $17^{ſ}$ 3^{d} $\frac{2780}{3797}$ ſerá o que deve pagar-ſe por 77^{T} 1^{P} 8^{p}.

Havendo alem diſſo fracções nos meſmos termos, depois de reduzidos á infima eſpecie como neſte exemplo, a ſua raſaõ ſe ſimplificará do modo que aſſima moſtrámos (n. 171).

Da

Da Regra de tres inversa e simples.

195 A Regra de tres simples e inversa, ou reciproca he, quando o termo pedido deve ter para o seu homogeneo dado a mesma rasaõ que tem o relativo deste para o relativo daquelle; e nisto consiste a ordem inversa, porque na regra directa o termo pedido deve ter para o seu homogeneo a mesma rasaõ que tem o relativo daquelle para o deste. Pelo que na regra inversa, sendo os termos dispostos como convem, huma das quantidades principais com a sua relativa teraõ o lugar dos meios, e a outra com a sua o lugar dos extremos.

Ordenados porém os termos na forma conveniente á natureza da questaõ, a operaçaõ se pratica como a precedente, buscando o quarto proporcional aos tres termos dados.

Exemplo I.

SE 30 obreiros fazem certa obra em 25 dias, quantos obreiros saõ necessarios para fazerem a mesma obra em 10 dias?

Reflectindo na questaõ logo vemos, que devem ser tanto mais os obreiros quanto forem menos os dias. Pelo que o numero pedido dos obreiros deverá conter o seu homogeneo (30 obreiros), como o relativo deste (25 dias) contém o relativo daquelle (10 dias). Buscar-se-há pois o quarto proporcional aos tres termos seguintes -

$10^{d} : 25^{d} :: 30^{obr} :$

E

E multiplicando o ſegundo pelo terceiro, e dividindo o producto pelo primeiro, acharemos 75, que he o numero dos obreiros da queſtaõ.

Exemplo. II.

TEndo a equipagem de huma náo mantimento por 15 dias, e reſtando-lhe huma viagem de 20 dias, pergunta-ſe como ſe devem reduzir as rações por dia?

Tomando a raçaõ coſtumada por unidade, he claro, que a raçaõ que buſcamos deve ſer tanto menor que a unidade, quanto he maior o numero de 20 dias que o de 15 dias; e por conſeguinte buſcaremos o quarto proporcional aos tres termos ſeguintes - - - - - - - - - - -

$$20^d : 15^d :: 1 :$$

O qual acharemos ſer $\frac{15}{20}$, ou $\frac{3}{4}$; e aſſim diremos que cada peſſoa ſe deve reduzir a tres quartos da raçaõ que houvera de ter, ſe reſtaſſem ſómente 15 dias de viagem.

Da Regra de tres compoſta.

196 NA Regra de tres compoſta a raſaõ da quantidade que ſe buſca para a ſua homogenea naõ ſe determina por meio da raſaõ ſimples de outras duas quantidades, como nas regras antecedentes, mas por meio de muitas raſões ſimples, as quaes ſe devem compôr (n. 187.) conforme pedir o eſtado da queſtaõ. Sendo eſtas compoſtas, a queſtaõ ſe reduz á regra

gra

gra de tres ſimples, como ſe moſtra nos exemplos ſeguintes.

Exemplo I.

SE 30 jornaleiros fazem 132 *toeſas* de obra em 18 dias, 54 jornaleiros quantas *toeſas* faraõ em 28 dias?

He manifeſto, que a obra da queſtaõ depende naõ ſómente do numero dos jornaleiros, mas tambem dos dias. Para ſe attender a hum e outro, he neceſſario reflectir que 30 jornaleiros em 18 dias fazem o meſmo que 18 vezes 30, ou 540 jornaleiros em hum dia; e do meſmo modo, que 54 jornaleiros em 28 dias fazem tanto como 1512 jornaleiros em hum dia. Pelo que a queſtaõ ſe reduz a eſta: Se 540 jornaleiros fazem 132 toeſas de obra, quantas toeſas faraõ 1512 jornaleiros? e por conſeguinte buſcaremos o quarto termo deſta proporçaõ -

$$540 : 1512 :: 132^{T} :$$

E multiplicando o ſegundo termo pelo terceiro, e dividindo o producto pelo primeiro, ſerá o numero pedido $369^{T}\ 3^{P}\ 7^{p}\ 2^{d}\ \frac{2}{5}$.

Exemplo II.

HUm caminheiro andando 7 horas por dia fez huma jornada de 230 leguas em 30 dias. Pergunta-ſe, em quantos dias andará 600 leguas, caminhando 10 horas por dia com a meſma velocidade?

Se

Se o numero das horas fosse o mesmo em ambos os casos, he visivel, que o tempo pedido deveria ser tanto maior, quanto he maior a distancia relativa que se propoem; mas caminhando mais horas por dia no segundo caso, por esta rasaõ deverá ser o tempo menor; e por conseguinte a questaõ depende da regra de tres directa e inversa simultaneamente. Reduzir-se-há porém a huma regra simples, se reflectirmos que andar 30 dias a 7 horas por dia he fazer 210 horas effectivas de jornada. Assim a questaõ se reduzirá a estes termos: se em 210 horas andou hum caminheiro 230 leguas, em quantas horas andará 600 leguas? O numero das horas, que satisfizer a esta questaõ, se partirá por 10, visto andar o caminheiro 10 horas por dia, e o quociente será o numero dos dias que se pergunta. Assim buscaremos o quarto termo proporcional aos tres seguintes - - - - - - - - - -

$$230^{l} : 600^{l} :: 210^{h} :$$

O qual acharemos ser $547^{h}\,\frac{19}{23}$, e dividindo-o por 10, será o numero dos dias $54\,\frac{18}{23}$.

Da Regra de Companhia.

197 ESta Regra tomou o nome das Companhias de negocio, nas quais tem grande uso, quando se trata de repartir pelos companheiros o ganho ou a perda, conforme as entradas de cada hum. Porém o seu objecto em geral he dividir hum numero dado em partes, que

que tenhaõ entre si huma rasaõ dada. O methodo, que para isto se dá, funda-se no principio que assima fica demonstrado (n. 186.), como se verá no exemplo seguinte.

Exemplo I.

DA-se o numero 120 para ser distribuido em tres partes tais, que sejaõ entre si como os numeros dados 4, 3, 2.

Pelo teor da questaõ se offerecem immediatamente estas duas proporçóes. Que 4 he para 3 como a 1ª parte que se busca he para a 2ª, e que 4 he para 2 como a 1ª parte he para a terceira; isto he (n. 182.), Que 4 he para a 1ª parte como 3 para a 2ª, e 4 para a 1ª como 2 para a 3ª; pelo que temos tres rasóes iguais, a saber: 4 para a 1ª parte como 3 para a 2ª, e como 2 para a 3ª.

Porém temos mostrado (n. 186.), que em qualquer numero de rasóes iguais a soma dos antecedentes he para a dos consequentes, como qualquer dos antecedentes para o seu consequente; logo no exemplo figurado será a soma 9 das partes dadas para a soma 120 das partes que se pedem, como qualquer das partes dadas para a sua relativa que se busca.

Peloque a Regra de Companhia em geral se reduz a praticar a regra de tres tantas vezes, quantas saõ as partes que se buscaõ, tomando sempre por primeiro termo a soma das partes dadas, por segundo o numero que se quer distribuir, e por terceiro a parte dada que he re-

la-

lativa á que actualmente se busca. Assim na questaõ proposta deveráõ completar-se as proporçóes seguintes - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$9 : 120 :: 4 :$$
$$9 : 120 :: 3 :$$
$$9 : 120 :: 2 :$$

E na primeira acharemos que o quarto termo he $53\frac{1}{3}$, na segunda 40, e na terceira $26\frac{2}{3}$ (num. 179), os quais juntos fazem a soma de 120, e saõ entre si como as partes dadas 4, 3, 2.

§§ Esta regra se executará com mais brevidade, *partindo o numero proposto pela soma das partes dadas, e multiplicando depois o quociente por cada huma das mesmas partes.* Porque em qualquer regra de tres tanto se acha o quarto termo, multiplicando o segundo pelo terceiro e dividindo o producto pelo primeiro; como dividindo o segundo pelo primeiro e multiplicando o quociente pelo terceiro. E como na Regra de Companhia o primeiro e segundo termo saõ sempre os mesmos, huma só divisaõ basta para resolver todas as regras de tres, que nella forem necessarias.

Assim no mesmo Exemplo, partindo 120 por 9 teremos o quociente $13\frac{1}{3}$, e multiplicando este successivamente por 4, 3, 2, acharemos as partes relativas que lhes correspondem $53\frac{1}{3}$, 40, e $26\frac{2}{3}$. §§

De qualquer modo que se pratique, naõ

O he

he neceſſario buſcar a ultima parte. Baſta tirar do numero propoſto a ſoma das outras, porque o reſto ſerá conſeguintemente a ultima que falta.

Exemplo II.

A Preza de hum navio avaliada em 800000 *libras* deve ſer diſtribuida por tres companheiros, dos quais o primeiro entrou com 120000, o ſegundo com 60000, e o terceiro com 20000 *libras*. Pergunta-ſe a parte de cada hum.

Temos pois o numero 800000^{lb} para ſer partido em tres partes, que guardem entre ſi a raſaõ dos numeros 120000, 60000, 20000, ou (n. 170) dos numeros 12, 6, 2, porque a parte de cada hum deve ſer proporcional á ſua entrada. Aſſim com a ſoma 20 dos numeros 12, 6, 2, armaremos as tres proporções ſeguintes

$$20 : 800000^{lb} :: 12 :$$
$$20 : 800000^{lb} :: 6 :$$
$$20 : 800000^{lb} :: 2 :$$

E acharemos, que a parte do primeiro he 480000^{lb}, do ſegundo 240000^{lb}, e do terceiro 80000^{lb}.

Exemplo III.

HUma Companhia de tres negociantes ganhou 12050 *libras*, tendo entrado nella o primeiro com 3000^{lb} por 6 mezes, o ſegundo com 4000^{lb} por 5 mezes, e o terceiro com 8000^{lb} por 9 mezes; Quanto deve ter cada hum?

Eſte caſo contém huma Regra de Sociedade com-

composta, e esta se reduz facilmenie á simples; Porque a entrada do primeiro 3000^{lb} por 6 mezes vale o mesmo que 6 vezes 3000^{lb}, ou 18000^{lb} por hum mez; e do mesmo modo as entradas do segundo, e terceiro, valem o mesmo que 20000^{lb}, e 72000^{lb} pelo mesmo tempo de hum mez. Feita esta reducçaõ, naõ ha mais do que partir o numero 12050^{lb} em tres partes proporcionais ás entradas reduzidas 18000^{lb}, 20000^{lb}, 72000^{lb}; e praticando como no exemplo precedente acharemos, que deve ter o primeiro 1971^{lb} 16^{f} $4^{d}\ \frac{4}{11}$, o segundo 2190^{lb} 18^{f} $2^{d}\ \frac{2}{11}$, e o terceiro 7887^{lb} 5^{f} $5^{d}\ \frac{5}{11}$.

198 A' mesma Regra de Companhia se reduzem muitas outras questões, precedendo a preparaçaõ necessaria, como nos exemplos seguintes.

Dando-se o numero 650 para ser distribuido em tres partes tais, que a primeira seja para a segunda como 5 para 4, e para a terceira como 7 para 3, naõ poderemos immediatamente praticar a Regra, por naõ terem as duas rasões dadas 5:4 e 7:3 o primeiro termo commum. Mas a essa forma se reduziráõ, sem perderem o valor, multiplicando ambos os termos de cada huma pelo primeiro da outra (n. 170). Assim resultaráõ as rasões equivalentes 35 : 28 e 35 : 15, e a questaõ será reduzida a partir o numero 650 em tres partes proporcionais aos numeros 35, 28, 15, segundo a Regra assima dada.

Se o numero houvesse de partir-se em quatro partes, de ſorte que a primeira foſſe para a ſegunda como 5 para 4, para a terceira como 9 para 5, e para a quarta como 7 para 3, eſtas raſões ſe reduziriaõ a ter o primeiro termo commum, multiplicando ambos os termos de cadahuma pelo producto dos primeiros termos de todas as outras. Donde teriamos as raſões equivalentes 315 : 252, 315 : 175, 315 : 135, e a queſtaõ ſeria reduzida a partir o numero propoſto em quatro partes proporcionais aos numeros 315, 252, 175, e 135.

Da Regra de Falſa Poſiçaõ.

199 USa-ſe deſta Regra, quando em lugar do numero, que buſcamos, ſubſtituimos outro qualquer, e procedendo com elle conforme o teor da queſtaõ, comparamos o reſultado com o que devia ſahir, para dahi virmos no conhecimento do verdadeiro numero, que ſatisfaz á meſma queſtaõ. Chama-ſe ſimples, quando baſta fazer huma ſó hypotheſe; compoſta, quando ſaõ neceſſarias duas.

A ſimples pratica-ſe por huma regra de tres, na qual *ſerve de primeiro termo o numero que reſultou da hypotheſe conforme as condições da queſtaõ, de ſegundo o numero que devia reſultar, e de terceiro a meſma hypotheſe.* E por iſſo ſó póde uſar-ſe eſta regra nas queſtões, em que o numero que ſe buſca he para o numero dado que delle reſulta, como qualquer outro para o que delle ha de reſultar da meſma maneira; circunſtancia, que deve conhecer-ſe pela natureza da queſ-

questaõ : e quando naõ , póde tentar-se a Regra , e depois fazendo experiencia do numero achado se conhecerá , se com effeito satisfaz á questaõ.

Exemplo.

PErgunta-se o numero , cujo terço , quinto , e tres septimos façaõ juntamente 808.

Para evitarmos quebrados , podemos escolher para hypothese hum numero que tenha as partes aliquotas 3, 5, 7, o qual acharemos multiplicando entre si estes tres numeros , que daõ o producto 105. Tomando pois o numero 105 por hypothese , buscaremos o seu terço 35 , o seu quinto 21 , e tres septimos 45. Se a soma destes fizesse 808 , o mesmo numero da hypothese seria o que buscamos ; porém como a soma faz 101 , buscaremos o quarto proporcional aos tres termos seguintes - - - - - - - - -

101 : 808 :: 105 :

E acharemos o numero 840 , que satisfaz á questaõ.

A Regra de duas posições he mais geral , pois naõ sómente por ella se resolvem todas as questões da Regra simples , mas tambem muitas outras, que estaõ fóra do alcance daquella. Pratica-se desta maneira :

Em lugar do numero que se busca toma-se arbitrariamente qualquer por hypothese , e conforme a questaõ se examina o que delle resulta ; depois toma-se outro qualquer , e se nota tambem o que delle resulta. Entaõ se faz esta proporçaõ: *Como a differença dos resultados das* *du-*

duas hypotheſes, para a differença entre o reſultado da primeira hypotheſe e o verdadeiro reſultado que devia ſahir, aſſim a differença das hypotheſes para hum quarto. Eſte ſe ajuntará á primeira hypotheſe, conforme ella produzio menos, ou mais do que devia ſer, e iſto no caſo de que creſcendo a hypotheſe creſça tambem o reſultado; ſendo ao contrario, o numero achado ſe ajuntará ou diminuirá conforme a meſma hypotheſe tiver produzido mais ou menos do que convinha. Como qualquer das hypotheſes ſe póde tomar como primeira, he claro que de dous modos differentes ſe póde achar o que ſe buſca.

Exemplo.

TRes negociantes ganhárað 6954^{lb}. O ſegundo teve mais que o primeiro 54^{lb}, e o terceiro mais que os outros dous 78^{lb}. Pergunta-ſe o lucro de cada hum.

Supponhamos para mais facilidade que o lucro do primeiro foi 1^{lb}. Logo conforme a queſtað ſeria o lucro do ſegundo $1^{lb} + 54^{lb}$, ou 55^{lb}, e do terceiro $1^{lb} + 55^{lb} + 78^{lb}$, ou 134^{lb} os quais ſomados dað 190^{lb}.

Supponhamos outra vez que o lucro do primeiro foi 2^{lb}, e teremos para o ſegundo 56^{lb}, e para o terceiro 136^{lb}, cuja ſoma dá 194^{lb}.

Aſſim das duas hypotheſes 1^{lb} e 2^{lb} temos os reſultados 190^{lb} e 194^{lb}, devendo ſahir 6954^{lb}. A differença entre os reſultados das duas hypotheſes he 4^{lb}, entre o reſultado da primeira hypotheſe ao que devia reſultar he 6764^{lb}, e entre

tre as duas hypotheses he 1^{lb}. Pelo que buscaremos o quarto proporcional aos tres termos seguintes -

$$4 : 6764 :: 1^{lb} :$$

que acharemos ser 1691^{lb}, e ajuntando-o á primeira hypothese 1^{lb} teremos o ganho do primeiro 1692^{lb}, e por conseguinte o do segundo 1746^{lb}, e do terceiro 3516^{lb}, que fazem com effeito a soma de 6954^{lb}, e satisfazem ás mais condições da questaõ.

He claro, que esta Regra naõ póde ter lugar senaõ nas questões, em que a differença das hypotheses he constantemente proporcional á differença dos resultados que ellas produzem, segundo o teor das mesmas questões. Quando porém as hypotheses se tomaõ proximas ao numero que se busca, em todas as questões tem lugar proximamente a dita proporcionalidade; e por isso esta Regra tem grande uso na resoluçaõ das equações de gráo superior, e de muitas outras questões em toda a Mathematica.

Se fossem duas as quantidades que se perguntaõ, seriaõ necessarias tres hypotheses. Porque em primeiro lugar se deveriaõ suppor duas quaisquer quantidades em lugar dellas, depois conservando a primeira se augmentaria ou diminuiria arbitrariamente a segunda, e finalmente conservando a segunda se faria mudança na primeira. Do mesmo modo se mostra, que seriaõ necessarias quatro posiçoens, se fossem tres as quantidades, e assim por diante. Para estes casos seria cousa muito embaraçada o prescrever regras arithmeticas, quando por outra parte se póde de com muita facilidade e ſegurança dirigir o calculo por meio da Algebra.

Da Regra de Liga.

200 ESta Regra tem por objecto a miſtura das couſas de differente valor, e he de dous modos: Directa, quando ſe daõ as quantidades que ſe haõ de miſturar, com o valor de cada huma, e ſe pergunta o valor do miſto que reſulta; Inverſa, quando ſe dá a valor das couſas que ſe haõ de miſturar, e ſe pergunta a porçaõ que de cada huma ſe deve tómar, para que o miſto ſeja de hum preço dado.

A primeira executa-ſe deſte modo: *Cada huma das quantidades ſe multiplica pelo ſeu valor, a ſoma dos productos ſe divide pelo numero das quantidades, e o quociente he o valor que ſe buſca.*

Exemplo.

QUerendo ligar 5 marcos de ouro de 24 quilates com 8 de 21, e 6 de 17; pergunta-ſe o quilate a que ſe reduz o composto.

Multipliquem-ſe os 5 marcos pelos ſeus reſpectivos quilates 24, e daráõ o producto 120; do meſmo modo multipliquem-ſe os 8 marcos por 21, e os 6 por 17, e daráõ os productos 168, e 102. A ſoma de todos tres faz 390, a qual ſendo dividida pela ſoma total dos marcos 19 dá no quociente 20 $\frac{10}{19}$; e eſtes ſaõ os quilates do composto.

N 4

Na Regra inverſa, quando ſómente duas couſas ſe haõ de ligar a hum preço dado entre os preços dellas, praticar-ſe-haõ eſtas duas proporçoens. *Como a differença entre os preços dos ſimplices para a differença entre os preços do composto e do ſimples de menor valor, aſſim a quantidade do composto para a parte que deve ter do ſimples de maior valor.* Depois: *Como a differença entre os preços dos ſimplices para a differença entre os preços do composto e do ſimples de maior valor, aſſim a quantidade do composto para a parte que deve levar do ſimples de menor valor.*

Exemplo.

HUm Ourives quer fazer huma obra que tenha de pezo 8 marcos, e ſeja de 20 quilates e $\frac{1}{2}$ conforme a Lei; e para iſſo quer ligar duas eſpecies de ouro, hum de 22 quilates, outro de 17. Pergunta-ſe quanto deve tomar de cada hum.

Tome-ſe a differença entre os quilates das eſpecies dadas 22 e 17, que he 5, e as differenças entre o quilate propoſto 20 $\frac{1}{2}$ e cada hum dos outros, que ſaõ 3 $\frac{1}{2}$, e 1 $\frac{1}{2}$; e buſque-ſe o quarto termo nas duas proporçoens ſeguintes --

$$\begin{matrix} 5 : 3\frac{1}{2} :: 8 : \\ 5 : 1\frac{1}{2} :: 8 : \end{matrix} \quad \text{ou (n. 171)} \quad \begin{matrix} 10 : 7 :: 8 : \\ 10 : 3 :: 8 : \end{matrix}$$

A primeira das quais dará 5 $\frac{3}{5}$, iſto he 5 mar-

cos,

cos, 4 oitavas, 57 grãos e $\frac{3}{5}$, que he a parte do ouro de 22 quilates, e a segunda dará $2\frac{2}{5}$, ou 2 marcos, 3 oitavas, 14 grãos e $\frac{2}{5}$, que he a parte que se deve tomar do ouro de 17 quilates.

Quando se haõ de ligar mais do que duas especies de diverso valor, primeiramente se ligaráõ pela Regra directa todas as que forem de maior valor que o composto que se pertende fazer, tomando de cada huma dellas arbitrariamente a porçaõ que melhor parecer, e se buscará o preço deste composto. O mesmo se praticará com todas as especies de menor valor que o intermedio dado. E deste modo ficaráõ as especies reduzidas a duas, huma de valor maior, e outra de menor que o proposto, as quais se ligaráõ como no caso precedente, e achando-se a porçaõ que de cada huma se deve tomar, tambem constaráõ as partes dos simplices, de que arbitrariamente as compuzémos.

Exemplo.

DAõ-se quatro qualidades de vinho, o primeiro dos quais vale a 120 reis a medida, o segundo a 90, o terceiro a 60, e o quarto a 50, e delles se quer fazer huma mistura que valha a 70 reis a medida.

Primeiramente misturaremos os dous de maior valor que o proposto tomando de cada hum as partes que melhor nos parecer, v. gr. duas medidas do que vale a 120, e tres do que vale a 90, e acharemos que o todo aſſim compoſto valerá a a raſaõ de 102 a medida. Depois ſupporemos tambem miſturados os outros dous, tomando igualmente de cada hum as partes que nos parecer, vg. duas partes do que vale a 60, e tres do que vale a 50, e acharemos que o preço do miſto ſerá a 54. Aſſim teremos duas qualidades de vinho, hum que vale a 102, e outro que vale a 54, para ſerem miſturados de ſorte que o composto valha a 70. E praticando como no exemplo precedente acharemos, que do primeiro deveremos tomar huma porçaõ como $\frac{1}{3}$, e do ſegundo como $\frac{2}{3}$, ou do primeiro como 1, e do ſegundo como 2. Porem ambos elles ſaõ compoſtos de outros dous, cujas partes fizemos entrar na raſaõ de 2 e 3; logo as partes dos quatro vinhos ſeraõ como 2, 3, 4, 6; iſto he, por cada duas medidas do primeiro tomaremos 3 do ſegundo, 4 do terceiro, e 6 do quarto.

Eſta queſtaõ ſe póde reſolver de muitas maneiras, conforme as partes que arbitrariamente ſe tomarem para formar os dous compoſtos parciais, que finalmente ſe haõ de ligar.

Outras Regras Relativas ás Proporçoens.

201 MUitas outras Regras ſe encontraõ nos livros de Arithmetica, as quais ſe reduzem á pratica da Regra de tres, e ſendo bem entendida a natureza das queſtoens naõ podem embaraçar a quem ſouber o que ate agora temos dito.

202

202 Deste genero he a *Regra dos juros*, na qual se busca o interesse de qualquer quantia por qualquer tempo, supposta a rasaõ do que vence 100 cada anno.

Pergunta-se v. gr. o juro que vence a quantia de 449200 reis em 7 annos e 3 mezes a rasaõ de 5 por 100 em cada anno. Como 100 vencem de juro 5 em hum anno, em 7 annos e $\frac{1}{4}$ venceráõ 36 $\frac{1}{4}$, e por conseguinte teremos a proporçaõ: Como 100 para 36 $\frac{1}{4}$, assim o capital 449200 para o seu juro, que se achará ser 162835.

Dando-se a quantia 612035 soma do capital e juros vencidos em 7 annos e 3 mezes, a 5 por 100, se quizermos saber o capital, reflectiremos, que vencendo 100 no dito tempo 36 $\frac{1}{4}$, deveremos ter a proporçaõ: Como 136 $\frac{1}{4}$ para 100, assim a quantia dada 612035 para o capital que se pede, 449200.

Perguntando-se o capital, que em 7 annos e 3 mezes produza 162835 a rasao de 5 por 100, teremos: Como 36 $\frac{1}{4}$ para 100, assim o juro dado 162835 para o capital que se pergunta, 449200.

Perguntando se o tempo, em que o capital 449200 ha de produzir o juro 162835, a 5 por 100, teremos: Como 449200 para 162835, assim 100 para hum quarto, que será 36 $\frac{1}{4}$. Este he o juro ro de 100 dentro do tempo pedido, e como o juro annual de 100 he 5, dividindo $36\frac{1}{4}$ por 5, o quociente $7\frac{1}{4}$ mostrará o dito tempo, isto he, 7 annos e 3 mezes.

Perguntando-se em fim a que rasaõ por 100 se deve pôr o capital 449200 para dar 162835 em 7 annos e tres mezes, teremos: Como 449200 para 162835, assim 100 para $36\frac{1}{4}$; e dividindo este numero pelo tempo $7\frac{1}{4}$, o quociente 5 dará o juro annual de 100, que se pergunta.

Pelo que respeita ao *juro dos juros*, e outras questoens mais complicadas sobre interesses e usuras, na Algebra se resolveraõ com mais facilidade.

203 Nos *descontos*, e *abatimentos* se discorre do mesmo modo que nos juros, como se mostra nos exemplos seguintes.

Comprou certa pessoa hum campo por 4536 *libras* fiado por 10 annos; mas resolvendo-se logo a pagar de contado, offerece o pagamento ao vendedor abatendo-lhe na rasaõ de $4\frac{1}{2}$ por 100. Pergunta-se quanto deve pagar?

He manifesto, que neste caso naõ se busca outra cousa senaõ o capital que com o seu juro de $4\frac{1}{2}$ por 100 em dés annos faça 4536*lb*. Ora como 100 produzem $4\frac{1}{2}$ por anno, em dés annos produziraõ 45; e assim teremos: Como 145 para 100, assim 4536*lb* para a quantia que se pede de, a qual he $3128^{lb}\ 5^{s}\ 6^{d}\ \frac{6}{29}$.

Tendo huma pessoa passado a hum mercador hum credito de 2844^{lb} para pagar no termo de hum anno, e querendo remillo passados 7 mezes, com a condiçaõ de lhe fazer o credor hum abatimento na rasaõ de 6 por 100; pergunta-se, quanto deve pagar?

Como 100 pela convençaõ vencem 6 em hum anno, em 7 mezes deveraõ vencer $3\frac{1}{2}$. Assim o que o devedor havia de pagar no principio como 100, no fim do anno o devia pagar como 106, e passados 7 mezes sómente, o haverá de pagar como $103\frac{1}{2}$. Por conseguinte teremos: Como 106 para $103\frac{1}{2}$, assim 2854^{lb} para a quantia que se pergunta, a qual acharemos ser 2786^{lb} $13^{s}\ 9^{d}\ \frac{15}{53}$.

Deste modo usando da regra de tres, se resolvem outras muitas questoens pertencentes aos contractos mercantís, nas quais, para quem tem entendido os exemplos precedentes, naõ he necessario entrar com mais individuaçaõ.

Das Progressoens Arithmeticas.

204 A *Progressaõ Arithmetica* he huma serie de termos, que de tal forma se vaõ seguindo huns aos outros, que cada hum exede ao precedente, ou he excedido delle, em huma quanti-

da-

dade constante. Por exemplo esta serie

÷ 1 . 4 . 7 . 10 . 13 . 16 . 19 . 22 . 25 &c.

he huma Progressaõ Arithmetica, porque cada termo tem de excesso sobre o que lhe fica atraz a mesma quantidade 3. Esta Progressaõ se denota com o mesmo sinal ÷, que se usa na Proporçaõ Arithmetica continua (n. 174), porque na realidade naõ he mais do que a mesma Proporçaõ continuada alem do terceiro termo.

A Progressaõ he *crescente*, *ascendente*, ou *divergente*, quando os termos saõ cada vez maiores; *decrescente*, *descendente*, ou *convergente*, quando saõ cada vez menores. Como ambas tem as mesmas propriedades, sómente com a differença de que o *somar* em huma deve ser *diminuir* na outra, naõ trataremos senaõ da ascendente; e o que della dissermos se applicará sem difficuldade á descendente.

205 He claro pois pela mesma noçaõ da Progressaõ, que com o primeiro termo e com a differença commua, a qual tambem se chama *rasaõ* da Progressaõ, se podem formar todos os mais, pela addiçaõ successiva da mesma *rasaõ*. Porque o segundo se forma do primeiro somado com a rasaõ; o terceiro he a soma do segundo e da mesma rasaõ, ou do primeiro e do duplo da rasaõ; o quarto contém o terceiro e mais a rasaõ, ou o primeiro e mais o triplo da mesma rasaõ; e assim por diante.

206 Donde se segue, em geral, *Que qualquer termo de huma Progressaõ Arithmetica he igual á soma do primeiro, e da rasaõ tomada tantas vezes, quantos saõ os termos precedentes.*

207

207 Por conſeguinte, quando o primeiro termo for o, qualquer dos outros ſerá igual á raſaõ multiplicada pelo numero dos termos, que ficarem antes delle.

208 Por meio deſte principio podemos achar immediatamente qualquer termo de huma Progreſſaõ Arithmetica, ſem que nos ſeja para iſſo neceſſario calcular os precedentes.

Pergunta-ſe v. g. qual ha de ſer o centeſimo termo neſta Progreſſaõ $\div$ 4 . 9 . 14 . 19 &c. Como o termo que ſe pede he o centeſimo, ſerá precedido de 99 termos. Conſtará pois do primeiro 4, e da raſaõ 5 multiplicada por 99; e ſerá por conſeguinte 499.

209 Do meſmo principio ſe entenderá o methodo de meter entre dous numeros dados qualquer numero de meios arithmeticos, iſto he, de aſſignar huma Progreſſaõ Arithmetica, dados os extremos, e o numero dos termos. Iſto ſe executa, *diminuindo o extremo menor do maior, e dividindo o reſto pelo numero de todos os termos menos hum, ou pelo numero dos meios e mais hum.* O quociente ſerá a raſaõ da Progreſſaõ, a qual por conſeguinte ſe formará como aſſima diſſemos (n. 205).

Se quizermos, por exemplo, meter oito meios arithmeticos entre 4 e 11, diminuiremos 4 de 11, e dividiremos o reſto 7 pelo numero dos meios e mais hum. O quociente $\frac{7}{9}$ ſerá a raſaõ da Progreſſaõ, a qual ſerá por conſeguinte $\div$ 4 . $4\frac{7}{9}$. $5\frac{5}{9}$. $6\frac{3}{9}$. $7\frac{1}{9}$. $7\frac{8}{9}$. $8\frac{6}{9}$. $9\frac{4}{9}$. $10\frac{2}{9}$. 11.

Do

Do meſmo modo, ſe entre 0 e 1 quizermos meter nove meios arithmeticos, dividiremos a differença 1 dos extremos dados por 9 + 1, ou por 10, e teremos a raſaõ $\frac{1}{10}$, ou 0,1, e por conſeguinte a Progreſſaõ que buſcamos ſerá ÷ 0 . 0,1 . 0,2 . 0,3 . 0,4 . 0,5 . 0,6 . 0,7 . 0,8 . 0,9 . 1.

210 Donde ſe vê, que por menor e menor que ſeja a differença de dous numeros, ſempre entre elles ſe pódem meter quantos meios arithmeticos quizermos.

O que temos dito das Progreſſoens Arithmeticas he o que baſta para a intelligencia dos Logarithmos, de que abaixo havemos da tratar. Pelo que reſpeita ás mais propriedades das meſmas Progreſſoens, em outro lugar moſtraremos com mais commodidade.

Das Progreſſoens Geometricas.

211 A *Progreſſaõ Geometrica* he huma ſerie de termos, cada hum dos quais contém o ſeu antecedente, ou nelle he contido, igual numero de vezes. Eſta ſerie v. g.

∵ 3 : 6 : 12 : 24 : 48 : 96 : 192 : 384 &c.

he huma Progreſſaõ Geometrica, porque cada termo contém o ſeu antecedente o meſmo numero de vezes, iſto he, 2. Eſte numero de vezes, que cada termo contém, ou he contido no antecedente, chama-ſe *denominador*, ou *raſaõ* da Progreſſaõ. E eſta ſe denota com o final ∵, como a Proporçaõ Geometrica continua, porque he a meſma Proporçaõ continuada a maior numero de termos.

A Progreſſaõ Geometrica he *creſcente*, *aſcendente* ou *divergente*, quando os termos vaõ ſendo cada vez maiores; *decreſcente*, *deſcendente*, ou *convergente*, quando ſaõ cada vez menores. Naõ he preciſo tratar de ambas ſeparadamente, porque tem as meſmas propriedades, mudando-ſe ſómente a multiplicaçaõ em diviſaõ, e reciprocamente, alem de que mudada a ordem dos termos huma ſe converte na outra.

212 Da meſma noçaõ da Progreſſaõ Geometrica ſe ſegue, que com a raſaõ e o primeiro termo ſe podem formar todos os outros. Porque o ſegundo reſulta do primeiro multiplicado pela raſaõ; o terceiro do ſegundo multiplicado tambem pela raſaõ, ou do primeiro multiplicado pelo quadrado da raſaõ; o quarto do terceiro multiplicado igualmente pela raſaõ, ou do primeiro multiplicado pelo cubo da raſaõ &c.

Deſte modo na Progreſſaõ aſſima figurada o ſegundo termo 6 reſulta do primeiro 3 multiplicado pela raſaõ 2; o terceiro 12 do primeiro 3 multiplicado pelo quadrado da raſaõ 4; o quarto 24 do primeiro 3 multiplicado pelo cubo da raſaõ 8 &c.

213 Donde ſe ſegue em geral, *Que qualquer termo de huma Progreſſaõ Geometrica ſe forma do primeiro multiplicado pela raſaõ elevada a huma potencia, que tem por exponente o numero dos termos precedentes.*

Peloque ſe o primeiro termo for 1, qualquer outro termo ſerá igual á potencia da raſaõ que correſponder ao numero dos termos antecedentes: porque a multiplicaçaõ pela unidade naõ augmenta o producto.

214 Daqui ſe deduz o methodo de achar qualquer termo de huma Progreſſaõ Geometrica, ſem calcular os precedentes, o que he muitas vezes de grande utilidade.

Pede-ſe v. g. o termo duodecimo deſta Progreſſaõ ∺ 3 : 6 : 12 : 24 &c. Como antes do duodecimo ha onze termos, ſerá o que buſcamos igual ao producto do primeiro 3 multiplicado pela undecima potencia da raſaõ 2. Eſta potencia ſe achará pela multiplicaçaõ continua do numero 2, até elle ſer onze vezes factor no producto. Mas para abbreviar a operaçaõ, podemos elevar 2 ao cubo 8, e eſte ao ſeu cubo 512, que ſerá a potencia nona de 2; e multiplicando 512 pelo quadrado 4, teremos 2048 potencia undecima do meſmo 2. Finalmente multiplicando a potencia achada pelo primeiro termo 3, ſerá o termo duodecimo que buſcamos 6144.

215 Do meſmo principio ſe deduz o methodo de meter qualquer numero de meios proporcionais entre dous numeros dados. Iſto ſe faz, *dividindo o maior dos numeros dados pelo menor, e extrahindo do quociente a raiz do grão carreſpondente ao numero dos meios aumentado de huma unidade* Eſta raiz ſerá a raſaõ, com a qual ſe formaráõ os termos pedidos (n. 212.).

Porque o maior dos numeros dados, que ſe póde tomar como ultimo termo da Progreſſaõ, ſerá igual ao producto do menor, que he o primeiro termo, multiplicado pela raſaõ elevada á potencia correſpondente ao numero dos termos menos o ultimo, ou ao numero dos meios e mais hum (n. 213.). Logo dividindo o maior dos numeros dados pelo menor, o quociente ſerá a raſaõ elevada ao gráo correſpondente ao numero dos meios augmentado de huma unidade (n. 74); aſſim extrahindo do dito quociente a raiz do meſmo gráo, teremos a raſaõ da Progreſſaõ.

Pede-ſe v. g. que entre 2 e 2048 metamos nove meios geometricos. Primeiramente dividiremos 2048 por 2, teremos o quociente 1024. Depois buſcaremos a raiz decima de 1024 (pag. 150.), que acharemos ſer 2; e eſta ſerá a raſaõ da Progreſſaõ, com a qual acharemos os termos pedidos, e teremos ∺ 2 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256 : 512 : 1024 : 2048.

Se quizeſſemos meter quatro meios geometricos entre 6 e 48, dividindo o ultimo termo 48 pelo primeiro 6 teriamos o quociente 8, do qual haveriamos de extrahir a raiz quinta. Como porém o numero 8 naõ tem raiz quinta exacta, he ſinal de que entre 6 e 48 naõ ſe podem aſſignar por numeros exactamente quatro meios geometricos; mas poderáõ aſſignar-ſe mais e mais proximos á exactidaõ, extrahindo a dita raiz por approximaçaõ até onde quizermos. Aſſim acharemos, que a raiz quinta de 8 he 1,5157167 proximamente (pag. 151), e baſtando calcular os meios pedidos até quatro letras decimais teremos ∺ 6 : 9,0943 : 13,7844 : 20,8932 : 31,6682 : 48.

Donde podemos concluir, que entre dous numeros ſe podem ſempre determinar tantos meios geometricos quantos quizermos, ou exactos, ou ao menos approximados até onde for neceſſario. E iſto he o que neſte lugar baſta ſaber das Progreſſoens.

Dos

Dos Logarithmos.

216 CHamaõ-ſe *Logarithmos* os numeros de huma Progreſſaõ Arithmetica, em quanto ſe compáraõ termo por termo a outros tantos numeros de huma Progreſſaõ Geometrica. Poſtas v. g. eſtas duas Progreſſoens

÷ 3 . 5 . 7 . 9 . 11 . 13 . 15 . 17 &c.
∺ 2 . 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256 &c.

cada termo da primeira he Logarithmo do numero correſpondente, que na ſegunda occupa o meſmo lugar, aſſim 3 he Logarithmo de 2; 5 de 4; 7 de 8 &c.

217 Donde ſe ſegue, que o meſmo numero póde ter infinitos Logarithmos. Porque á meſma Progreſſaõ Geometrica, em que elle ſe acha, podemos fazer correſponder infinitas Progreſſoens Arithmeticas diverſas.

Como porém attendermos preſentemente ao uſo actual dos Logarithmos, naõ nos demoraremos em contemplar as differentes Progreſſoens Arithmeticas e Geometricas, que ſe podiaõ combinar entre ſi, mas paſſaremos logo ás que ſe eſcolhêraõ para formar as Taboas Logarithmicas de que uſamos.

218 Eſcolheu-ſe pois a Progreſſaõ Arithmetica dos numeros naturais, e a Geometrica que procede na raſaõ decupla, as quais parecêraõ mais convenientes á lei da numeraçaõ actual. Aſſim temos por fundamento dos Logarithmos ordinarios as duas Progreſſoens ſeguintes

÷ 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 &c.
∺ 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 : 1000000 &c.

219 Peloque neste systema de Logarithmos será sempre muito facil saber o Logarithmo de todos os numeros, que se exprimirem pela unidade seguida de qualquer numero de cifras, pois sempre o Logarithmo constará de tantas unidades, quantas forem as cifras.

Em quanto aos numeros, que mediaõ entre os termos da Progressaõ decupla, pelos principios até agora dados naõ podemos explicar o methodo, pelo qual foraõ calculados os seus Logarithmos. Mas apontaremos o methodo que se podia seguir, se naõ houvesse outros meios, senaõ os que a Arithmetica nos offerece.

220 Para acharmos pois o Logarithmo de qualquer numero v. gr. 3, he claro pela mesma noçaõ dos Logarithmos, que elle deve achar-se na Progressaõ fundamental ∺ 1 : 10 : 100 &c. Ora metendo entre 1 e 10 hum grande numero de meios geometricos (n 215.), succederá necessariamente de duas cousas huma, ou que algum delles coincidirá justamente com o numero 3, ou ao menos que hum será proximamente menor, e o consecutivo proximamente maior que 3, sendo a differença tanto menor, quanto o numero dos meios for maior; de sorte que aumentando quanto for necessario o numero dos meios, hum delles se poderá finalmente tomar pelo mesmo numero 3.

Entaõ metendo entre 0 e 1 tantos meios arithmeticos, quantos geometricos se calculáraõ entre 1 e 10, o termo desta Progressaõ que corresponder ao lugar do numero 3 na outra Progressaõ, ou do numero summamente proximo a 3, se-

ſerá o Logarithmo delle ; e aſſim dos mais.

221 Aſſim deveremos imaginar ; Que tendo-ſe metido 10000000 meios arithmeticos entre o e 1, entre 1 e 2, entre 2 e 3 &c., ſe meteraõ outros tantos geometricos entre 1 e 10 entre 10 e 100, entre 100 e 1000 &c ; Que ordenando termo por termo eſtas Progreſſoens, ſe buſcaraõ na Geometrica os numeros 1, 2, 3, 4, 5 &c., ou os termos proximamente iguais a elles, e na Arithmetica ſe notaraõ os termos, que lhes correſpondiaõ no meſmo lugar, e eraõ por conſeguinte os ſeus Logarithmos ; E que finalmente transportando a huma colunna vertical, como na Taboa ſeguinte, os numeros 1, 2, 3, 4, 5 &c., ao lado direito ſe aſſentaraõ os ſeus Logarithmos. A iſto ſe reduz a formaçaõ das Taboas Logarithmicas.

Dos Numeros naturaes de 1 até 200.

Num.	Logarith.	Num.	Logarith.	Num.	Logarith.
0	Inf.negat.	33	1,518514	66	1,819544
1	0,000000	34	1,531479	67	1,826075
2	0,301030	35	1,544068	68	1,832509
3	0,477121	36	1,556303	69	1,838849
4	0,602060	37	1,568202	70	1,845098
5	0,698970	38	1,579784	71	1,851258
6	0,778151	39	1,591065	72	1,857332
7	0,845098	40	1,602060	73	1,863323
8	0,903090	41	1,612784	74	1,869232
9	0,954243	42	1,623249	75	1,875061
10	1,000000	43	1,633468	76	1,880814
11	1,041393	44	1,643453	77	1,886491
12	1,079181	45	1,653213	78	1,892095
13	1,113943	46	1,662758	79	1,897627
14	1,146128	47	1,672098	80	1,903090
15	1,176091	48	1,681241	81	1,908485
16	1,204120	49	1,690196	82	1,913814
17	1,230449	50	1,698970	83	1,919078
18	1,255273	51	1,707570	84	1,924279
19	1,278754	52	1,716003	85	1,929419
20	1,301030	53	1,724276	86	1,934498
21	1,322219	54	1,732394	87	1,939519
22	1,342423	55	1,740363	88	1,944483
23	1,361728	56	1,748188	89	1,949390
24	1,380211	57	1,755875	90	1,954243
25	1,397940	58	1,763428	91	1,959041
26	1,414973	59	1,770852	92	1,963788
27	1,431364	60	1,778151	93	1,968483
28	1,447158	61	1,785330	94	1,973128
29	1,462398	62	1,792392	95	1,977724
30	1,477121	63	1,799341	96	1,982271
31	1,491362	64	1,806180	97	1,986772
32	1,505150	65	1,812913	98	1,991226

Num.	Logarith.	Num.	Logarith.	Num.	Logarith.
99	1,995635	133	2,123852	167	2,222716
100	2,000000	134	2,127105	168	2,225309
101	2,004321	135	2,130334	169	2,227887
102	2,008600	136	2,133539	170	2,230449
103	2,012837	137	2,136721	171	2,232996
104	2,017033	138	2,130879	172	2,235528
105	2,021189	139	2,143015	173	2,238046
106	2,025306	140	2,146128	174	2,240549
107	2,029384	141	2,149219	175	2,243038
108	2,033424	142	2,152288	176	2,245513
109	2,037426	143	2,155336	177	2,247973
110	2,041393	144	2,158362	178	2,250420
111	2,045323	145	2,161368	179	2,252853
112	2,049218	146	2,164353	180	2,255273
113	2,053078	147	2,167317	181	2,257679
114	2,056905	148	2,170262	182	2,260071
115	2,060698	149	2,173186	183	2,262451
116	2,064458	150	2,176091	184	2,264818
117	2,068186	151	2,178977	185	2,267172
118	2,071882	152	2,181844	186	2,269513
119	2,075547	153	2,184691	187	2,271842
120	2,079181	154	2,187521	188	2,274158
121	2,082785	155	2,190332	189	2,276462
122	2,086360	156	2,193125	190	2,278754
123	2,089905	157	2,195900	191	2,281033
124	2,093422	158	2,198657	192	2,283301
125	2,096910	159	2,201397	193	2,285557
126	2,100371	160	2,204120	194	2,287802
127	2,103804	161	2,206826	195	2,290035
128	2,107210	162	2,209515	196	2,292256
129	2,110590	163	2,212188	197	2,294466
130	2,113943	164	2,214844	198	2,296665
131	2,117271	165	2,217484	199	2,298853
132	2,120574	166	2,220108	200	2,301030

222 A primeira letra de cada Logarithmo á esquerda chama-se *Characteristica*, porque por ella se conhece a que década pertence o numero correspondente ao mesmo Logarithmo. Se hum Logarithmo tiver v. g. a characteristica 3, he sinal que o seu numero he de *milhares*; porque sendo 3 Logarithmo de 1000, e 4 Logarithmo de 10000, todos os numeros comprehendidos entre 1000 e 10000 teraõ por Logarithmo 3 com huma fracçaõ; e por conseguinte será 3 a characteristica, e as letras seguintes representaráõ a fracçaõ em partes decimais. Em huma palavra: *O numero terá tantas letras e mais huma, quantas forem as unidades na characteristica do seu Logarithmo.*

Os Logarithmos da pequena Taboa, que assima ajuntámos para exemplo, tem depois da characteristica seis letras de dizima, e nas Taboas ordinarias tem sete. Mas esta differença naõ prejudica aos usos, que delles havemos de fazer em alguns dos exemplos, que abaixo mostraremos.

Propriedades dos Logarithmos.

223 COmo naõ tratamos aqui senaõ dos Logarithmos ordinarios, as propriedades, que delles havemos de mostrar, devem principalmente deduzir-se das Progressoens Geometricas, que principiaõ por 1; e das Arithmeticas, que principiaõ por 0.

Tomem-se pois quaisquer duas Progressoens com estas circunstancias, por exemplo as duas seguintes.

÷ 0 . 4 . 8 . 12 . 16 . 20 . 24 . 28 . 32 &c.
∺ 1 : 3 : 9 : 27 : 81 : 243 : 729 : 2187 : 6561 &c.

Pela natureza e correſpondencia deſtas Progreſſons he manifeſto, que qualquer termo da primeira conſta da raſaõ tomada tantas vezes, quantas a raſaõ da ſegunda entra por factor no termo correſpondente. Porque a raſaõ da progreſſaõ Arithmetica entra tantas vezes, e a da Geometrica he tantas vezes factor em qualquer termo, quantos ſaõ os termos precedentes (n. 207, 212); Porém os termos correſpondentes de ambas as Progreſſoens ſaõ precedidos de igual numero de termos: logo &c.

Aſſim v. g. no termo 28 da primeira a raſaõ 4 ſe contém ſete vezes, e outras tantas a raſaõ 3 da ſegunda he factor no termo correſpondente 2187; e aſſim nos mais.

224 Logo *Somando dous quaisquer termos da Progreſſaõ Arithmetica, e multiplicando os ſeus correſpondentes na Geometrica, o producto deſtes e a ſoma daquelles ſeraõ termos correſpondentes nas meſmas Progreſſoens.*

Porque a ſoma conterá a raſaõ da Progreſſaõ Arithmetica tantas vezes, quantas a contém juntamente os termos ſomados; e o producto terá a raſaõ da Progreſſaõ Geometrica tantas vezes por factor, quantas ella o he nos termos multiplicados ambos juntos. Porém cada termo da Progreſſaõ Arithmetica contém a raſaõ tantas vezes, quantas a raſaõ da Geometrica he factor no termo correſpondente. Logo a ſoma conterá tantas vezes a raſaõ arithmetica, quantas o producto terá por factor a raſaõ geometrica; e conſeguintetemente seraõ termos correspondentes nas ditas Progressoens.

225 Somando pois dous termos quaisquer da Progressaõ Arithmetica, conheceremos o producto dos termos que lhes correspondem na Geometrica, se para isso forem continuadas as mesmas Progressoens, quanto he necessario.

Somando v. g. os termos 8 e 24, que correspondem a 9 e 729, teremos a soma 32, a qual corresponde na Progressaõ Geomerrica ao numero 6561; e este será o producto de 729 por 9.

226 Por conseguinte, sendo os numeros naturais, 2, &c. na Taboa Logarithmica tirados de huma Progressaõ Geometrica que principia por 1, e os seus Logarithmos sendo os termos que lhes correspondem em huma Progressaõ Arithmetica que começa por 0, he manifesto que *somando os Logarithmos dequaisquer numeros teremos o Logarithmo do seu producto.* Deste principio resultaõ os usos dos Logarithmos, que agora mostramos.

Uso dos Logarithmos.

227 PAra multiplicar por Logarithmos he pois necessario *somar os Logarithmos dos factores, e buscando a soma entre os Logarithmos das Taboas, o numero que lhe competir será o producto.*

Querendo v. g. multiplicar 13 por 14, buscaremos na Taboa os Logarithmos destes numeros, a saber:

Log.

Log. de 13 - - - - 1,113943
Log. de 14 - - - - 1,146128

E a ſoma - - - - 2,260071 ſerá o Log. do producto, que acharemos ſer 182, numero que na Taboa compete ao dito Lagarithmo.

228 Logo para quadrar hum numero, naõ he preciſo mais que duplicar o ſeu Logarithmo. Porque para quadrar, deve o numero multiplicar-ſe por ſi meſmo; e por conſeguinte deve tomar-ſe duas vezes, ou duplicar-ſe o ſeu Logarithmo. Pela meſma raſaõ triplicando o Log. de hum numero, teremos o Log. do ſeu cubo.

229 Em geral: *Para elevar hum numero a qualquer potencia, tomar-ſe há o ſeu Log. tantas vezes, quantos o numero entra por factor neſſa potencia, ou multiplicar-ſe-ha o Log. pelo exponente della.*

Querendo v. g. formar a potencia 7ª de 2, buſcaremos o ſeu Logarithmo 0,301030, e multiplicando-o por 7 teremos 2,107210; Logarithmo, que na Taboa correſponde a 128, e eſta he a potencia 7ª de 2.

230 Logo reciprocamente: *Para extrahir a raiz quadrada, cubica, quarta, quinta &c. de qualquer numero, dividiremos o ſeu Log. por 2, 3, 4, 5 &c*, ou geralmente, *pelo exponente da raiz; e o quociente ſerá o Logarithmo della.*

Procurando v. g. a raiz quadrada de 144, tomaremos na Taboa o ſeu Log. 2,158362, e dividindo-o por 2, teremos 1,079181 que na meſma Taboa acharemos ſer Log. de 12; e por conſeguinte 12 ſerá a raiz quadrada de 144.

So

Se buscarmos a Raiz 7ª de 128, a Taboa nos dará o Log. deste numero, que he 2,107210, e dividindo-o por 7, teremos 0,301030; Logarithmo que na Taboa compete ao numero 2; e porisso será 2 a raiz 7ª de 128; e assim das mais.

231 A Regra da Divisaõ por Logarithmos se pratica, *diminuindo o Log. do divisor do Log. do dividendo; e o resto será o Log. do quociente.*

Querendo v. g. dividir 187 por 17, buscaremos os seus Logarithmos, e teremos

Log. do divid. 187 - - - - 2,271842
Log. do divis. 17 - - - - 1,230449

E o resto - - - - - - - - - - - 1,041393 será o Log. do quociente, que consultando a Taboa acharemos ser 11.

Quando o Log. do quociente se naõ acha exactamente na Taboa, mas cahe entre dous Log. della, he sinal, que a divisaõ naõ se póde fazer sem resto; mais abaixo diremos, o que se deve fazer nesse caso.

A rasaõ desta Regra he, porque sendo o dividendo igual ao producto do divisor pelo quociente (n. 74), deve o Log. do dividendo formarse da soma dos Log. do divisor e do quociente (n. 227) e conseguintemente tirando o Log. do divisor do Log. do dividendo, o resto será o Log. do quociente (n. 39).

232 Pelo que temos visto se vê, que a Regra de tres se ha de praticar por Logarithmos, *somando os Log. do 2º e 3º termo, diminuindo o Log. do 1º; e o resto será o Log. do 4º;* o qual por conseguinte se achará por meio das Taboas.

Bus-

Buſcando-ſe v. g. o quarto proporcional aos termos 7 : 12 :: 105 :, ſerá a operaçaõ deſta maneira :

Log. do 3º 105 - - - - 2,021189
Log. do 2º 12 - - - - 1,079181

Soma - - - - - - - - - 3,100370
Log. do 1º 7 - - - - 0,845098

Reſto - - - - - - - - 2,255272, ou Log.

do num. 180, que he o quarto pedido.

233 Deve notar-ſe, que ſe o Logarithmo que reſulta de alguma operaçaõ coincidir com algum Log. da Taboa em todas as letras, exceptuando a ultima á direita, naõ ſe deverá fazer caſo deſta differença. Porque ſendo os Log. dos numeros intermedios da Progreſſaõ decupla approximados ſómente até a ametade de huma unidade da ultima caſa da dizima, póde ſucceder, que pela addiçaõ de muitos Log. ajuntando-ſe os pequenos defeitos da ultima letra de cada hum, influaõ na ultima letra do reſultado o defeito ou exceſſo de huma ou duas unidades; e ainda de mais, conforme o numero dos Log. de que elle reſultar. Na operaçaõ precedente temos hum exemplo deſta advertencia.

Dos Numeros, cujos Logarithmos ſe naõ achaõ nas Taboas.

234 COmo as Taboas ordinarias dos Logarithmos foraõ ordenadas ſegundo a ſerie natural dos numeros inteiros, he claro, que nellas

las immediatamente ſe naõ achaõ os Logarithmos dos numeros fraccionarios. O meſmo ſe entenderá das raizes dos numeros, que naõ ſaõ potencias perfeitas &c.

Querendo-ſe pois o Log. de hum numero inteiro accompanhado de fracçaõ reduzir-ſe-há tudo a quebrado (n. 86); e diminuindo entaõ o Log. do denominador do Logarithmo do numerador, o reſto ſerá o Log. que ſe procura.

Se buſcarmos v. g. o Log. de 8 $\frac{3}{11}$, reduziremos primeiro eſte numero a $\frac{91}{11}$, e depois tiraremos 1,041393 (Log. do denominador 11) de 1,959041 (Log. do numerador 91). O reſto 0,917648 ſerá o Log. do numero propoſto 8 $\frac{3}{11}$; porque 8 $\frac{3}{11}$, ou $\frac{91}{11}$, he o meſmo que 91 dividido por 11 (n. 96).

235 Pela meſma raſaõ ſe moſtra, que para haver o Log. de huma fracçaõ propria ſe deve diminuir o Log. do denominador do Log. do numerador. Porém, como eſta diminuiçaõ naõ póde ter lugar, por ſer o Log. do denominador maior que o do numerador, tiraremos o Log. deſte do Log. daquelle. E o reſto ſerá o Log. que buſcamos, ſendo porém precedido do ſinal −, para ſe moſtrar que a diminuiçaõ ſe fez de hum modo oppoſto ao que devia ſer. Aſſim acharemos que o Log. de $\frac{11}{91}$ he $-$ 0,917648 &c.

236 O referido ſinal, aſſim como denota que a ſubtracçaõ ſe fez de hum modo oppoſto ao que convinha, tambem ſerve para trazer á lembran-

ça,

ça, que a fim de compenſar iſſo meſmo ſe devem no calculo applicar os ditos Logarithmos por huma Regra oppoſta á que temos eſtabelecido para os outros ; iſtó he : *Que havendo de multiplicar por huma fracçaõ o Log. deſta ſe deve diminuir ; e que havendo de dividir, ſe deve ſomar* (*).

§§ Em geral : *Se os Log. dos factores forem todos poſitivos, ou todos negativos, a ſoma delles com o meſmo ſinal ; ſe huns poſitivos, outros negativos, a differença entre as duas ſomas de huns e dos outros com o ſinal da maior, dará o Log. do producto.* E em quanto á diviſaõ : *Muda-ſe o ſinal do diviſor, e pratica-ſe a meſma regra da multiplicaçaõ.*

Alguns exprimem os Log. das fracçoens de outra maneira, fazendo ſómente a characteriſtica negativa, e conſervando a dizima ſempre poſitiva. Eſta forma de Logarithmos reſulta, ſubtrahindo effectivamente o Log. do denominador do Log. do numerador da direita para a eſquerda, e em chegando ás characteriſticas, toma-ſe por characteriſtica negativa o que ſeria neceſſario ajuntar á characteriſtica do Log. do numerador para que a do Log. do denominador ſe pudeſſe della ſubtrahir ſem reſto.

Por exemplo, para acharmos o Log. de $\frac{2}{151}$, de 0,301030 (Log. do numerador 2) deveremos tirar 2,178977 (Log. do denominador 151). Pa-

Q ra

(*) Os numeros, que ſaõ precedidos do ſignal —, chamaõ-ſe *negativos*. Na Algebra, daremos huma idéa mais clara delles. Entretanto devemos prevenir, que naõ ſe haõ de conceber, como numeros menores que o ; porque abaixo do *nada* naõ póde haver couſa alguma.

ra isto será necessario ajuntar 2 á characterista do Log. do numerador, que ficará 2.301030, e será o resto 0,122053; entaõ, pondo de menos 2 na sua characteristica, por termos posto outro tanto de mais no Log. do numerador, será o Log. que buscamos $-2,122053$, entendendo-se porém que o final negativo sómente affecta a characteristica. Mas para naõ haver equivocaçaõ com os outros Log. totalmente negativos, costumaõ notar-se os de que agora fallamos deste modo $\overleftarrow{2},122053$, ou tambem assim $\dashv 2,122053$.

A rasaõ disto he, porque tomando o Log. 2,301030 em lugar de 0,301030, o numero 2 que a este compete se multiplica realmente por 100. Logo, tirando 2,178977 de 2,301030, o resto 0,122053 será o Log. de $\frac{200}{151}$. Para este quebrado se reduzir a $\frac{2}{151}$ he preciso dividi-lo por 100, e por conseguinte tirar 2 a characteristica do seu Logarithmo. Logo o Logarithmo de $\frac{2}{151}$ será $-2+0,122053$, ou $\overline{2},122053$.

Quando entrarem no calculo estes Logarithmos, observar-se-haõ as Regras assima dadas, em quanto a ambas as partes delles. Na multiplicaçaõ sempre se somaõ as letras decimais, porque saõ todas positivas; e se desta soma passarem algumas unidades para a casa das characteristicas ajuntaõ-se com as positivas, e a differença entre as somas das negativas e positivas com o final da maior será a characteristica. Na divisaõ, sempre se diminue o Log. do divisor do Logarithmo do dividendo em quan-

quanto á dizima; em quanto ás characteriſticas muda-ſe o ſinal á do diviſor, e pratica-ſe a regra da multiplicaçaõ. Quando no diminuir da dizima for neceſſario pedir huma unidade á caſa da characteriſtica, e eſta for o, òu negativa, deverá eſta ficar com huma unidade de menos, v. gr. ſendo o ficará $\bar{1}$, ſendo $\bar{1}$, ficará $\bar{2}$, &c.

Do meſmo modo: Quando ſe houver de multiplicar hum Log. deſtes, como na formaçaõ das potencias, multiplicaremos primeiro as letras decimais, e ſe dellas houverem de paſſar algumas unidades para a caſa da characteriſtica, guarda-las-hemos para ſerem diminuidas do producto della. E quando ſe houver de dividir, como na extracçaõ das raizes, ſe a characteriſtica contiver exactamente o diviſor, a operaçaõ ſe fará do modo ordinario; e ſe naõ, ajuntar-ſe-haõ á characteriſtica tantas unidades negativas, quantas baſtarem para conter exactamente o diviſor; e para compenſar iſto, ſe ajuntaraõ outras tantas poſitivas em lugar de dezenas á primeira letra da dizima. Aſſim o Log. $\bar{2}$,873245 ſendo multiplicado por 5 dá o producto $\bar{6}$,366225; ſendo dividido por 7, o quociente $\bar{1}$,839035 &c.

Eſtes Log. reduzem-ſe aos totalmente negativos, tirando 1 á characteriſtica, e tomando em lugar das outras letras o ſeu complemento para 9, exceptuando a derradeira da qual ſe tomará o complemento para 10. E reciprocamente, hum Log. inteiramente negativo ſe converterá na outra forma, ajuntando 1 a ſua characteriſtica, e tomando o complemento das outras letras do modo que temos dito. Aſſim o Log. $\bar{2},374972$ ſe transforma em $-1,625028$, o Log. $\bar{1},587430$ em $-0,412570$, e reciprocamente.

237 Quando o numero paſſar os limites das Taboas (as quais pela maior parte chegaõ até 20000, ou ao menos até 10000) ſempre dellas podemos haver o Logarithmo, com tanto que o numero naõ ſeja de mais letras do que as decimais dos meſmos Logarithmos.

238 Para iſſo devemos trazer á lembrança, que ſe ajuntarmos 1, 2, 3 &c. unidades á characteriſca de hum Log. o ſeu numero ſe entenderá multiplicado por 10, 100, 1000 &c; e ao contrario dividido, ſe tirarmos 1, 2, 3 &ç. unidades á meſma characteriſtica; porque niſſo naõ fazemos outra couſa, ſenaõ ajuntar, ou tirar ao dito Log, o Log. de 10, ou de 100, ou de 1000 &c.

239 Iſto ſuppoſto, ſe v. g. buſcarmos o Log. de 357859, delle cortaremos á direita tantas letras, quantas forem baſtantes, para que as que ficarem á eſquerda naõ excedaõ os limites das Taboas, iſto he, duas neſte caſo, e teremos o numero 3578,59 que he 100 vezes menor que o propoſto (n. 28). Depois buſcaremos o Log. de 3578 que he 3,5536403, e a differença entre eſte e o Log. proximamente ſeguinte de 3579, que he 1214. Entaõ diremos: Se 1, differença entre os numeros 3578 e 3579, dá a differença dos Log. 1214, a differença 0,59 entre os numeros 3578, e 3578,59, que differença dará nos ſeus Log.? Como temos a unidade por primeiro termo, baſta multiplicar o ſegundo pelo terceiro, e o producto 716,26, ou 716, deixando

as

as partes decimais, he a differença que devemos ajuntar a 3,5536403 Logarithmo de 3578 para termos 3,5537119 Log. de 3578,59. E finalmente, como 3578,59 ſe deve multiplicar por 100 para fazer 357859, reſta ajuntarmos 2 á characteriſtica do ſeu Log. para termos 5,5537119 Log. do numero propoſto 357859.

Se as letras que ſe haõ de cortar forem todas cifras, he claro, que buſcando nas Taboas o Log. do numero que ficar á eſquerda, naõ ſerá preciſo mais do que ajuntar-lhe á characteriſtica tantas unidades, quantas foraõ as cifras que ſe cortáraõ.

240 Quando o numero he ſeguido de dizima, buſca-ſe o Log. como ſe foſſe inteiro, ou immediatamente nas Taboas, ou pelo methodo precedente, quando exceda os limites, e da characteriſtica ſe tiraõ tantas unidades, quantas ſaõ as letras decimais. Querendo v. g. o Log. de 3,27 buſcaremos na Taboa o de 327 que he 2,5145477, e tirando 2 a characteriſtica ficará 0,5145477 Log. de 3,27. Querendo o Log. de 35,7859 buſcaremos o de 357859 (n. 239), que he 5,5537119, e tirando 4 á characteriſtica teremos 1,5537119 Log. de 35,7859.

241 Em fim, ſe o numero conſtar ſomente de notas decimais, buſcaremos ſim o Log. delle como ſe foſſe inteiro, mas diminui-lo-hemos de tantas unidades, quantas forem as caſas da dizima, e o reſto com o ſinal — ſerá o Log. deſejado. Querendo v. g. o Log. do numero 0,03, buſcaremos na Taboa o Log. de 3, que he 0,477121, e diminuindo-o de 2, teremos — 1,522879 Log. de 0,03.

ʃʃ Se quizermos porém o Log. com a characteriſtica ſómente negativa, buſcaremos tambem o Log. das letras decimais, como ſe foſſem numero inteiro, e da characteriſtica tiraremos tantas unidades, quantas forem as caſas da meſma dizima. Aſſim acharemos, que $\bar{2}$,477121 he o Log. de 0,03; $\bar{3}$,514548 Log. de 0,00327 &c. ʃʃ

Dos Logarithmos; cujos numeros ſe naõ achaõ nas Taboas.

242 COmo para fazermos as operaçoens com mais facilidade ſubſtituimos em lugar dos numeros naturais os artificiais, que ſaõ os ſeus Logarithmos; aſſim tendo acabado o calculo he neceſſario voltar dos Logarithmos para os numeros. Raras vezes ſuccederá, que o Log. reſultante das operaçoens correſponda a hum numero inteiro, que naõ exceda os limites das Taboas, como he neceſſario, para que o meſmo Log. ſe ache nellas. Aſſim he preciſo, que tenhamos hum methodo para achar por meio das meſmas Taboas o numero correſpondente a qualquer Log. propoſto. O qual he deſta maneira.

243 Tirem-ſe da characteriſtica tantas unidades, quantas forem baſtantes, para que o Log. naõ exceda os limites das Taboas. Entaõ,

Se o Log. ſe achar nas Taboas, o numero que lhe correſponder, ſendo augmentado de tantas cifras á direita, quantas unidades ſe houverem tirado da characteriſtica, ſerá o numero que buſcamos. Tirando v. g. 3 unidades á characteriſ-

ti-

tica do Log. 7,2273467, acharemos que nas Taboas corresponde a 16879; e assim 16879000 será o numero representado pelo Log. 7,2273467 (n. 238).

Reduzida porém a characteristica aos limites das Taboas, se o Log. proposto cahir entre dous Log. consecutivos dellas, praticar-se-ha deste modo: Supponhamos, que se pede o numero correspondente ao Log. 5,2432768. Tirando 2 unidades á characteristica, o Log. 3,2432768 cahirá entre os Log. de 1750 e 1751, e por conseguinte o seu numero será 1750 com huma fracçaõ. Para acharmos esta, tomaremos a differença entre os Log. de 1750 e 1751, que he 2481, e a differença entre o Log. proposto e o Log. de 1750, que he 2388. Entaõ diremos: Se a differença dos Log. 2481 dá a differença dos numeros 1, a differença dos Log. 2388 que differença dará nos mesmos numeros? Como o segundo termo he sempre 1, dividiremos o terceiro pelo primeiro, e o quociente será o quarto, que neste exemplo acharemos 0,9625. Assim o Log. 3,2432768 corresponde ao numero 1750,9625, e conseguintemente o Log. 5,2432768 ao numero 175096,25 (n. 28. 238).

244 Quando a characteristica naõ excede os limites das Taboas, he claro, que naõ se lhe deve tirar unidade alguma; e por isso tendo achado o numero correspondente, naõ se lhe ajuntaráõ cifras algumas, nem se mudará o lugar da virgula.

245 He porém muito de advertir, que a proporçaõ assima praticada suppoem, que as differen-

renças dos Log. saõ proporcionais as differenças dos numeros correspondentes, como saõ com effeito proximamente, sendo os numeros grandes, mas de nenhuma sorte, sendo pequenos. Por isso, quando o numero for menor que 1800 nas Taboas que chegaõ até 18000, ou menor que 1000 nas Taboas que naõ passaõ de 10000, ajuntaremos á characteristica as unidades que forem precisas, para buscarmos o numero na classe suprema das mesmas Taboas, no qual deveremos separar para a dizima tantas letras, quantas foraõ as unidades, que ajuntámos á characteristica; e se quizermos mais exactidaõ, praticaremos a proporçaõ assima indicada (n. 243).

Por exemplo, buscando-se o numero correspondente ao Log. 0,5432725, pela inspecçaõ da Taboa logo veremos, que cahe entre 3 e 4. Se ahi tomassemos as partes proporcionais, teriamos 3,529 &c. que se aparta muito da verdade. Porém ajuntando 3 unidades á characteristica, acharemos que o Log. 3,5432725 mostra hum numero entre 3493 e 3494; pelo que bastandonos a terceira casa da dizima, diremos que o numero correspondente ao Log. 0,5432725 he 3,493. Se quizermos porém mais letras decimais, pelo methodo assima dado, acharemos que o Log. 3,5432725 corresponde ao numero 3493,594 (n. 243), e por conseguinte o Log. 0,5432725 ao numero 3,493594 (n. 238).

Porém esta appoximaçaõ dos numeros tem seus limites. Porque sendo, como assima dissemos exactos somente os Log. até huma meia unidade da ultima casa decimal, he manifesto que as suas

dif-

differenças participaõ deſte defeito. Poriſſo em chegando a ultima letra da differença dividida a influir ſobre o quociente, dahi por diante todas as letras delle ſeraõ faltas de exactidaõ, e poriſſo he eſcuſado continuar a diviſaõ. As Taboas ordinarias naõ alcançaõ ſeguramante, ſenaõ até os numeros de ſete letras; e iſto he o que baſta quaſi ſempre. Sendo preciſo mais, recorrer-ſe-ha a Taboas de mais letras, ou naõ ſe uſará de Logarithmos.

246 Quando o Log. for negativo, tirar-ſe-ha de 4, 5, 6 &c. unidades, de ſorte que o reſto ſe ache na ſuprema claſſe das Taboas, e do numero correſpondente ſe tomaráõ tantas caſas para a dizima, quantas foraõ as unidades, das quais ſe diminuio o Logarithmo.

Por exemplo, buſcando-ſe a fracçaõ correſpondente ao Log. − 1,532732 diminuiremos eſte de 5, e o reſto 3,467268 moſtrará na Taboa hum numero entre 2932 e 2933; pelo que a fracçaõ pedida ſerá 0,02932. E comeffeito tirar o Log. − 1,532732 de 5 he o meſmo que multiplicar por 100000 a fracçaõ que lhe correſponde (n. 219, 236). Logo o numero correſpondente ao reſto deverá dividir-ſe por 100000, tomando 5 caſas decimais (n. 28).

§§ Sendo os Log. ſómente negativos em quanto á characteriſtica, ainda he mais facil de achar a fracçaõ correſpondente. Buſcar-ſe-ha o numero que correſponde ao Log. com a characteriſtica que melhor parecer, e a primeira letra della ſe aſſentará tantas caſas adiante da virgula, quantas ſaõ as unidades negativas da characteriſtica.

Aſ-

Aſſim v. g querendo ate a quarta letra decimal a fracçaõ correſpondente ao Log. $\bar{2}$,235724, buſcaremos o numero que proximamente compete ao Log. 2,235724, que he 172, e a fracçaõ ſerá 0,0172. Querendo a fracçaõ correſpondente ao Logarithmo $\bar{1}$,732589 até a ſexta nota decimal, procuraremos o numero que proximamente compete ao Log 5,732589, que acharemos ſer 540242, e por conſeguinte a fracçaõ deſejada 0,540242 ſſ

247 Do que até aqui temos dito faremos varias applicaçoens na Trignometria, e em outras partes da Mathematica. Aqui ſómente daremos, por meio de exemplos tirados da meſma Arithmetica, alguma idéa da ventagem qne reſulta dos Logarithmos, em quanto á prontidaõ e facilidade dos calculos.

Exemplo I.

Pergunta-ſe o quociente de 17954 dividido por 12836, approximado até as decimas-milleſimas. Uſando dos Log. obraremos deſta maneira.

Log. de 17954 - - - 4,254161
Log. de 12836 - - - 4,108430

Reſto - - - - - 0.145731, o qual ſendo procurado nas Taboas com a characteriſtica 4 correſpondente a 13987; e conſeguintemente ſerá o quociente pedido 1,3987 (n. 238).

Exem-

Exemplo II.

PEde-ſe a Raiz cubica de 53 approximada até a caſa das decimas-milleſimas.

Buſque-ſe o Log. de 53, que he 1,724276, e divida-ſe por 3. (n.230). O quociente 0,574759 ſerá o Log. da raiz. Eſte com a characteriſtica 5 correſpondente nas Taboas proximamente ao numero 375628; Logo a raiz ſerá 3,75628 (n.238).

Exemplo III.

QUerendo ſaber a raiz quinta do cubo de 5736 exacta até a terceira letra decimal, buſcaremos o Log. de 5736, que he 3,758609, e multiplicando-o por 3 teremos 11,275827 Log. do cubo do meſmo numero. Dividindo eſte por 5, teremos 2,255165, por Log. da raiz procurada; e entrando com elle nas Taboas com huma characteriſtica augmentada de 3 unidades, acharemos que proximamente compete ao numero 179955; e aſſim ſerá a raiz que buſcamos 179,955

Exemplo IV.

QUerendo meter quatro meios geometricos entre $2\frac{2}{3}$ e $5\frac{3}{4}$, como ſeria neceſſario dividir $5\frac{3}{4}$ por $2\frac{2}{3}$, e extrahir do quociente a raiz quinta (n. 215), para conhecer a raſaõ da Progreſſaõ; por Logarithmos ſe obrará deſte modo;

Ti-

Tirar-ſe-há 0,425969 Log. de $2\frac{2}{3}$ de 0,759668 Log. de $5\frac{3}{4}$ (n. 231), e o reſto 0,333699 ſe dividirá por 5 (n. 230). O quociente 0,066740 ſerá Log. da raſaõ ; e entrando com elle nas Taboas a characteriſtica 4 acharemos o numero 11661, donde concluiremos que a raſaõ he 1,1661 exacta até as decimas-milleſimas. Aſſim naõ reſta mais do que multiplicar o primeiro termo $2\frac{2}{3}$ pela raſaõ 1,1661 , o producto outra vez pela raſaõ &c. (n. 211.).

Porém eſtas meſmas operaçoens ſe faráõ mais expeditamente, ajuntando ao Log. do primeiro termo 0,425969 o Log. da raſaõ 0,066740, depois o duplo, triplo, e quadruplo deſte ; e teremos 0,492709; 0,559449; 0,626189; 0,692929 por Logarithmos dos quatro meios proporcionais ; que ſeraõ proximamente 3,109 ; 3,626 ; 4,228 ; 4,931.

Do Complemento Arithmetico dos Logarithmos, e do ſeu uſo.

248 QUando ſe praticaõ as operaçoens por Logarithmos, e alguns deſtes ſe devem diminuir, póde ſimplificar-ſe o calculo, ſubſtituindo em lugar delles os ſeus complementos.

249 Para diſto ſe formar huma idéa clara, he neceſſario reflectir, que tendo para diminuir qualquer numero de outro que conſte da unidade ſeguida de tantas cifras, quantas ſaõ as letras do primeiro, a operaçaõ ſe reduz a eſcrever da eſquer-

querda para a direita a differença entre 9 e cada-huma das letras do numero propoſto, exceptuando a ultima, em lugar da qual ſe tomará o que lhe faltar para 10. Aſſim v. g. querendo diminuir 526927 de 1000000, tiraremos ſucceſſivamente as letras 5,2,6,9,2, de 9; e a ultima 7 de 10, e ſerá o reſto 473073. Querendo diminuir 4873 de 1000000, o numero propoſto ſe conſiderará como 004873; e praticando a meſma regra, teremos o reſto 995127.

250 O reſto formado deſta maneira he que ſe chama *Complemento Arithmetico* do numero propoſto.

251 Como he taõ facil a ſubſtituiçaõ do complemento em lugar de qualquer numero, que apenas ſe póde contar por operaçaõ, he manifeſto, que havendo de formar-ſe hum reſultado da addiçaõ e ſubtracçaõ de varios numeros, tudo ſe póde reduzir a huma unica operaçaõ de ſomar. Por exemplo, ſe houvermos de ſomar os numeros 672736 e 426452, e da ſoma tirar os numeros 432752 e 18675, por huma ſó operaçaõ acharemos o reſultado da maneira ſeguinte:

	672736
	426452
Compl. de 432752 - -	567248
Compl. de 18675 - -	981325
Soma - - - - - -	2,647761

Iſto he, ſomar-ſe-haõ os dous primeiros numeros com os complementos dos outros dous; e ſeparando a primeira letra da ſoma 2, as ſeguintes

tes 647761 daraõ o reſultado que ſe buſca.

A raſaõ deſta operaçaõ he, porque em lugar de diminuir 432752 ſomando o ſeu complemento, ou 1000000 — 432752, naõ ſómente diminuimos com effeito o numero 432752, mas ajuntamos ao meſmo tempo 1000000. Logo por cada complemento deveremos tirar huma unidade na primeira letra da ſoma.

252 A applicaçaõ diſto aos Logarithmos he evidente. Em lugar dos que ſe haõ de ſubtrahir, ſubſtituiremos os ſeus complementos, que ſe deſignaõ com as letras CL, e na ſoma deixaremos de eſcrever tantas dezenas na characteriſtica quantos forem os complementos.

Exemplo I.

SUpponhamos que ſe procura o quarto proporcional aos termos 1677 : 1599 : : 129 :

Como deveriamos ſomar os Log. de 1599 e 129, e da ſoma tirar o Log. de 1677 (n. 232), por huma ſoma unica praticaremos deſte modo:

CL. de 1677 - - - - 6,775467
Log. de 1599 - - - - 3,203848
Log. de 129 - - - - 2,110590

E a Soma - - - - - - - - 2,089905, deixando a dezena da characteriſtica ſerá o Log. do quarto termo, que nas Taboas acharemos 123.

Exem-

Exemplo II.

QUeremos multiplicar $\frac{675}{527}$ por $\frac{952}{377}$, e dividir o producto por $\frac{631}{753}$.

Ja ſabemos, que neſte caſo deveriamos multiplicar os numeros 675, 952, 753, e depois os numeros 527, 377, 631, e dividir o primeiro producto pelo ſegundo (n. 106. 109). por Logarithmos praticaremos pois do modo ſeguinte:

Log.	de 675 - - - -	2,829304
Log.	de 952 - - - -	2,978637
Log.	de 753 - - - -	2,876795
CL.	de 527 - - - -	7,278189
CL.	de 377 - - - -	7,423659
CL.	de 631 - - - -	7,199971

E a Soma - - - - - - - - - 0,586555, lançando fóra as 3 dezenas da characteriſtica, por entrarem nella 3 complementos, moſtrará nas Taboas o numero que buſcamos 3,8597 proximamente.

253 Alem diſto, ſervem tambem os complementos com grande ventagem do calculo, para fazer poſitivos os Logarithmos das fracçoens. Para acharmos v. g. o Logarithmo de $\frac{3}{4}$, que repreſenta o numero 3 dividido por 4 (n. 96), ao Log. de 3 que he 0,477121 ajuntaremos o Compl. do Log. de 4 que he 9,397940, e a ſoma 9,875061 ſerá o Log. de $\frac{3}{4}$. Bem entendido, que nelle ſe involve hum complemento, e

con-

conſeguintemente ſe deveria lançar fóra huma dezena da characteriſtica, ſe a houveſſe. Mas eſta ſe ſubentende ſempre, e ſe lança fóra no fim das operaçoens, emque entra o dito Logarithmo, ſe póde ſer.

§§ Os Logarithmos deſta forma realmente naõ differem dos que ſe exprimem por huma characteriſtica negativa. Porque o Log. 9,875061, no qual ſe ſubentende huma dezena ſubtractiva da characteriſtica, tem com effeito por characteriſtica $9-10$, e conſeguintemente vem a ſer o meſmo que $\bar{1},875061$. Se o meſmo Log. involveſſe dous complementos, teria realmente a characteriſtica $9-20$, e valeria o meſmo que $\overline{11},875061$.

Deve reparar-ſe, que os Logarithmos ſe ſervem mutuamente de complementos. Aſſim como 9,875061 he complemento do Log. 0,124939, do meſmo modo 0,124939 he complemento do Log. 9,875061. Eſtes Logarithmos, que ſaõ mutuamente complementos, correſpondem a numeros entre ſi *reciprocos*, os quais ſaõ todos aquelles, que ſendo multiplicados hum pelo outro daõ a unidade por producto, como 3 e $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{4}$ e $\frac{4}{3}$ &c.

E por iſſo, como he o meſmo dividir por 3 que multiplicar por $\frac{1}{3}$, em lugar de ſubtrahir o Log. de 3 podemos ajuntar o Log. de $\frac{1}{3}$, que he o complemento do Log. de 3; e aſſim nos outros caſos. §§

254 O meſmo ſe entenderá dos Log. das frac-

ço-

çoens decimais. Se quizermos v. g. o Log. de 0,575 que reprefenta o mefmo que $\frac{575}{1000}$, ao Log. de 575 ajuntaremos o complemento do Log. de 1000, e a foma 9,759668 ferá o Log. que bufcamos. De outra forte: Bufque-fe o Log. da fracçaõ decimal, como fe foffe numero inteiro; e em lugar da characteriftica fe ponha huma que tenha tantas unidades menos que 10, 20 &c, quantas faõ as cafas defde o lugar das unidades até a primeira letra da fracçaõ. Affim 0,05621 terá o Log. 8,749812; 0,0000000005621 o Log. 0,749812; e finalmente 0,00000000005621 o Log. 9,749812; fubentendendo-fe no primeiro e fegundo hum fó complemento, e no terceiro dous.

255 Quando dos Logarithmos fe houver de tornar aos numeros, fe no refultado de quaisquer operaçoens naõ fe puderem lançar fóra da characteriftica tantas dezenas, quàntos forem os complementos que nellas entraraõ, he manifefto, que elle deve moftrar huma fracçaõ. Para determinarmos efta, lançaremos da characteriftica todas as dezenas que tiver, e confiderando o refto como Log. de hum numero inteiro, bufcaremos efte nas Taboas (n. 242 e feg.), e nelle notaremos tantas dezenas de cafas decimais da direita para a efquerda, quantos forem os complementos que no dito Log. reftáraõ.

Refultando v. g. o Log. 8,732235 de varias operaçoens em que tiveffe entrado hum complemento, conheceremos que elle pertençe a huma fracçaõ, por naõ podermos lançar fóra da characteriſtica huma dezena que nella ha de mais. Aſſim buſcando o numero inteiro que correſponde ao Log. 8,732235, acharemos 539802500; e fazendo nelle 10 caſas de dizima, ſerá a fracçaõ 0,0539802500.

Como porém raras vezes he neceſſario levar as fracçoens a taõ alto ponto de approximaçaõ, tomar-ſe-ha a characteriſtica a arbitrio, e tendo achado o numero competente com as letras que baſtarem, delle formaremos a fracçaõ, pondo a ſua primeira letra tantas caſas adiante da virgula, quantas forem as unidades que a characteriſtica do Log. propoſto tiver de menos que 10, 20 &c, conforme o Log. contiver hum, dous &c complementos

Deſte modo o Log. 8,73225 procurado nas Taboas com a characteriſtica 3, correſponde ao numero 5398 proximamente; e porque a characteriſtica 8 tem 2 menos que 10, a primeira letra 5 deverá eſtar na ſegunda caſa depois da virgula, e ſerá a fracçaõ 0,05398. Se o Log. involveſſe dous complementos, ſeria a fracçaõ correſpondente 0,000000000005398.

256 Deve notar-ſe, que quando ſe multiplicaõ eſtes Logarithmos, como ſuccede na formaçaõ das potencias das fracçoens, juntamente ſe multiplicaõ os complementos que nelles ſe contém. Poriſſo, lançando fóra as dezenas que tiver a characteriſtica do producto, ſe terá conta dos complementos que nella ficaõ, para ſe determinar o valor da fracçaõ.

Por exemplo, dando-ſe o Log. 7,924753 que ſabemos involver hum complemento, e querenrendo-ſe elevar á quinta potencia a fracçaõ correſpondente, multiplicaremos o Log. por 5, e o producto 39,623765 terá 5 complementos. Omittindo as 3 dezenas, ficará o Log. 9,623765 com dous complementos; e conſeguintemente correſponderá á fracçaõ 0,0000000004205.

257 Pelo contrario, quando os meſmos Logarithmos ſe houverem de dividir, como ſuccede na extracçaõ das raizes, deve procurar-ſe que ajuntando as dezenas neceſſarias á characteriſtica ſe ponhaõ no Log. tantos complementos, quantas forem as unidades no exponente da raiz, ou o dobro, triplo &c. dellas; e praticando a diviſaõ, o quociente conſervará hum, dous, tres &c complementos.

Por exemplo, ſe o Log. 9,702922 tiver hum complemento, e da fracçaõ correſpondente quizermos extrahir a raiz cubica, ajuntar-lhe-hemos 2 dezenas á characteriſtica, e ficará 29,702922 com tres complementos; entaõ dividindo por 3, o quociente 9,900974 terá hum ſó complemento, e moſtrará a raiz que buſcamos 0,7961. Se da fracçaõ correſpondente ao Log. 1,987542, no qual ha dous complementos, quizermos extrahir a raiz quadrada, dividilo-hemos por 2 (porque naõ he neceſſario ajuntar dezena alguma á characteriſtica neſte caſo) e o quociente 0,993771 involverá hum complemento, e moſtrará por conſeguinte a fracçaõ 0,000000000857. Se da fracçaõ correſpondente ao Log. 9,887745, no qual ſe contiverem 5 complementos, quizermos extrahir a raiz quarta, ajuntaremos 3 dezenas á characteriſtica e teremos 39,887745 com 8 compleplementos ; entaõ dividindo por 4 , o quociente 9,971936 conſervará dous complementos , e moſtrará por conſeguinte a fracçaõ 0,00000000009374 ; e aſſim dos mais.

O uſo dos Complementos ſerve de abbreviar vantajoſamente as operaçoens Trigonometricas ; e por iſſo he de grande utilidade na Aſtronomia, e em todas as Partes da Mathematica , onde ſe houver de praticar a reſoluçaõ dos triangulos por meio dos Logarithmos.

[illegible] Miguel

FIM DA ARITHMETICA.

INDICE

Dos Principios que se contém nestes Elementos.

A *QUANTIDADE* he tudo quillo que he capaz de aumento, ou diminuiçaõ. n. 1.

A *Arithmetica* he a Sciencia de contar. n. 2.

A *Unidade* he huma quantidade arbitraria, que serve de termo de comparaçaõ a todas as outras quantidades da mesma especie. n. 4.

O *numero* mostra de quantas unidades, ou partes da unidade se compoem qualquer quantidade. n. 5.

Numero *abstracto*, he o que naõ se applica a especie alguma determinada de unidades; e *concreto*, o que representa huma especie determinada de unidades. n. 6.

A *Numeracaõ* he a arte de ler, e escrever os numeros por algarismos. n. 7.

A Numeraçaõ actual he fundada sobre este principio de convencaõ: Que as unidades representadas por qualquer algarismo saõ dez vezes maiores, que as unidades representadas pelo algarismo immediato para a parte direita, e des vezes menores que as unidades representadas pelo algarismo immediato para a parte esquerda. n. 15.

Numero *incõplexo* he todo aquelle, que involve huma so especie de unidades: e *complexo*, o que consta de partes, cada huma das quais tem differente especie de unidades. n. 18.

A *Dizima*, ou fracçoens decimais, saõ partes successivamente menores que a unidade, na rasaõ decupla. Escrevem-se com os mesmos algarismos, postos adiante da casa das unidades, e separados della com huma virgula. n. 21. 24.

Hum numero faz-se déz, cem, mil vezes &c. maior, mudando-se a virgula huma, duas, tres casas &c. para a direita; e dez, cem, mil vezes &c. menor, mudando-se a virgula huma, duas, tres casas &c. para a esquerda. n. 28.

Hum numero naõ muda de valor; assentando depois da ultima letra decimal quantas cifras quizermos. n. 30.

Somar he achar o valor total de muitos numeros, representadó por hum só, que seja igual a todos juntos. Este chama-se *Soma*, e aquelles *addiçoens*, ou *parcellas*. n. 33.

Para somar, he necessario ir por partes, somando as unidades de todas as addiçoens, depois as dezenas &c; advertindo, que se a soma das unidades fizer alguma, ou algumas dezenas, estas se somaráõ com as dezenas da columna seguinte, e assim por diante. n. 33.

Esta Regra he absolutamente a mesma nas partes decimais, tendo a attençaõ de somar da direita para a esquerda millesimas com millesimas, centesimas com centesimas &c. n. 34.

Diminuir he achar o resto, o *excesso*, ou a *differença* de dous numeros da mesma especie. n. 35.

Para diminuir, procede-se por partes, tirando da direita para a esquerda as unidades das unidades, as dezenas das dezenas &c. advertindo, que se o algarismo, donde havemos de tirar o outro, for menor do que elle, aumenta-lo-hemos com dez unidades, e tiraremos o algarismo immediato para a esquerda como diminuido de huma. n. 55

Havendo dizima, reduzem-se os numeros a ter as mesmas casas decimais, enchendo com cifras os lugares do que tiver menos, e pratica-se a mesma Regra. n. 57.

A *Prova* de huma operaçaõ Arithmetica he huma nova operaçaõ, pela qual nos certificamos do resultado da primeira. n. 58.

Prova-se a conta de Somar, somando outra vez todas as colunnas pela ordem inversa da esquerda para a direita, e diminuindo a soma de cada huma da parte correspondente da soma total; e sendo certa a operaçaõ, naõ deverá ficar resto algum. n. 38.

Prova-se a conta de Diminuir, somando o resto achado com o menor dos numeros dados, e a soma deve sahir igual ao maior. n. 39.

Multiplicar he tomar hum numero tantas vezes, quantas saõ as unidades de outro numero dado. n. 40.

O numero que se intenta repetir, chama-se *multiplicando*; o que mostra as vezes, *multiplicador*; e o resultado, *producto*. n. 41.

Tanto o multiplicando, como o multiplicador, chamaõ-se tambem *factores* do producto. n. 42.

A multiplicaçaõ equivale a huma addiçaõ do multiplicando escrito tantas vezes, quantas saõ as unidades do multiplicador. n. 45.

O multiplicador sempre he, ou deve considerar-se como numero abstracto. n. 46.

O producto sempre deve mostrar unidades da mesma natureza que as do multiplicando. n. 47.

Para multiplicar hum numero composto por hum numero simples; procede-se por partes, multiplicando primeiro as unidades; depois as dezenas &c; advertindo, que se o producto das unidades contiver algumas dezenas, estas se guardaráõ para se ajuntarem ao producto da casa seguinte, e assim por diante. n. 50.

Se o multiplicador for composto; nelle tambem se procederá por partes, multiplicando primeiro pelas unidades delle, depois pelas dezenas &c; advertindo, que o producto das dezenas deve começar a escreverse no seu lugar competente da direita para a esquerda &c; e a soma de todos os productos parciais será o producto que se busca. n. 51.

Na multiplicaçaõ da Dizima observa-se a mesma regra, sem attender á virgula dos factores, e no producto separaõ-se tantas letras de Dizima para a direita, quantas saõ as que tem os factores ambos juntos; para o que se meteráõ (quando for necessario) huma ou mais cifras, entre a virgula, e a primeira letra significativa do producto. n. 54.

Dividir he buscar quantas vezes hum numero contém outro numero dado. n. 59.

O numero que se divide, chama-se *particaõ*, ou *dividendo*; o outro pelo qual se divide, *partidor*, ou *divisor*; e o resultado, *quociente*. n. 59.

A Divisaõ he equivalente a huma diminuiçaõ reiterada; e o quociente mostra, quantas vezes o divisor se póde tirar do dividendo. n. 59.

O dividendo he igual ao producto do divisor multiplicado pelo quociente. n. 59.

A especie das unidades do quociente naõ póde determinar-se, senaõ pela natureza da questaõ, que der lugar á divisaõ. n. 59.

Para dividir hum numero composto por hum numero simples procede-se por partes da esquerda para a direita, examinando

nando

nando quantas vezes entra o divisor na primeira letra do dividendo, ou nas primeiras duas, quando a primeira for menor que o divisor, e assim se procederá de casa em casa até á ultima; advertindo, que naõ cabendo o divisor hum numero exacto de vezes na parte que se divide, o resto se ajuntará em lugar de dezenas á letra seguinte, e naõ chegando a caber huma vez, se assentará cifra no quociente. n. 60.

Sendo tambem composto o divisor, a operaçaõ he do mesmo modo: Toma-se no dividendo huma parte naõ menor que o divisor, e confrontando as primeiras letras de hum e outro, se acha a letra do quociente, a qual se multiplica pelo divisor, e o producto se diminue da parte do dividendo, e ao resto se ajunta a letra seguinte do mesmo dividendo, para formar huma nova parte que se torna a dividir do mesmo modo, e assim por diante. n. 62.

Quando o producto da letra do quociente pelo divisor sahe maior que a parte actual do dividendo, he final que a dita letra se julgou maior do que devia ser; e quando, diminuido o dito producto da parte correspondente do dividendo, ficar o resto naõ menor que o divisor, he final que a letra do quociente se assentou menor do que convinha. n. 63.

Quando o dividendo, e o divisor acabaõ ambos em cifras, antes de fazer a divisaõ podem cortar-se em ambos tantas, quantas forem as daquelle que menos tiver. n. 67.

A Divisaõ da dizima se reduz á dos numeros inteiros procurando-se que no dividendo, e no divisor haja o mesmo numero de casas decimais. n. 68.

Se ao resto final de huma divisaõ se ajuntar huma cifra, e se continuar a operaçaõ, achar-se-ha a letra competente á casa das decimas, e assim por diante. n. 68.

A Divisaõ, e Multiplicaçaõ provaõ-se reciprocamente huma pela outra; porque dividindo o producto por hum dos factores deve sahir o outro no quociente; e multiplicando o divisor pelo quociente, deve sahir o producto igual ao dividendo, n. 74.

Fracçaõ, ou *Quebrado*, he o numero que representa as partes da unidade, a qual se suppoem dividida em hum numero determinado de partes iguais. n. 78.

Para exprimir hum quebrado saõ necessarios dous numeros, hum que mostre em quantas partes se suppoem dividida a unidade, o qual se chama *denominador* e o outro, que mostre de quantas dessas partes consta a quantidade que queremos significar, o o qual se chama *numerador*. n. 80. 81.

Tanto o numerador, como o denominador de hum quebrado, chamaõ-se *termos* delle. n. 83.

O quebrado, que tiver o numerador maior que o denominador, vale mais que a unidade. n. 84.

Para extrahir os inteiros envolvidos em huma expressaõ fraccionaria, divide-se o numerador pelo denominador. n. 85.

Para reduzir hum inteiro á fórma de quebrado, multiplica-se pelo denominador que lhe queremos dar, e no producto virá o numerador. n. 86.

Hum quebrado naõ muda de valor quando se multiplicaõ, ou dividem ambos os seus termos por hum mesmo numero, n. 88. 89.

Para reduzir dous quebrados ao mesmo denominador, multiplicaõ-se os dous termos de cada hum pelo denominador do outro. Sendo mais que dous quebrados, multiplicaõ-se os dous termos de cada hum pelo producto dos denominadores de todos os outros, n. 90. 91.

Numero *primo* he todo aquelle que naõ tem divisor exacto, senaõ a si mesmo, ou a unidade, n. 93.

Todo o numero que acabar em algarismo par he divisivel por 2; e se acabar em 0, ou 5, será divisivel por 5. n. 94.

Todo o numero, cujos algarismos somados fizerem 3 ou hum multiplo de 3, he divisivel por 3; e se fizerem 9, ou hum multiplo de 9, será divisivel por 9. n. 94.

Para reduzir hum quebrado á mais simples expressaõ possivel, dividem-se ambos os seus termos pelo maior divisor commum. n. 95.

O maior divisor commum de dous numeros se achará, dividindo o maior pelo menor, depois o divisor pelo resto que ficar, e assim por diante, até chegar a huma divisaõ sem resto; e o divisor della será o maior divisor commum dos numeros propostos. n. 95.

Hum quebrado representa o quociente de huma divisaõ, na qual o numerador he o dividendo, e o denominador he o divisor. n. 97.

Hum quebrado póde reduzir-se á dizima, dividindo o numerador (aumentado de tantas cifras á direita quantas saõ as casas decimais que queremos) pelo denominador. *n.* 99.

Para somar, ou diminuir quebrados, he necessario reduzi-los ao mesmo denominador, quando o naõ tiverem; depois somaõ-se, ou diminuem-se os numeradores: e á soma, ou resto, se dá o mesmo denominador commum delles. n. 101. e seg.

Para multiplicar quebrados, he necessario multiplicar numerador por numerador, e denominador por denominador, n. 106.

A multiplicaçaõ de quebrado por inteiro, ou de inteiro por quebrado, reduz-se a multiplicar o inteiro pelo numerador do quebrado. n. 107.

Os numeros mixtos de inteiro, e quebrado, reduzem-se a quebrados simples e entraõ na regra geral. n. 108.

Para dividir hum quebrado por outro, invertem-se os termos do divisor, e pratica-se a regra da multiplicaçaõ. n. 109.

A divisaõ de hum quebrado por hum inteiro reduz-se a multiplicar o inteiro pelo denominador do quebrado; e na divisaõ de hum inteiro por hum quebrado, pratica-se o mesmo, e depois invertem-se os termos. n. 110.

Os numeros mixtos reduzem-se a quebrados simples, e pratica-se a regra geral. n. 111.

Quebrado de quebrado he o que exprime as partes de outro quebrado, considerado como hum todo, e dividido em hum numero determinado de partes iguais. n. 114.

Hum quebrado de quebrado he igual ao producto de todos os quebrados que entraõ na sua expressaõ, reportando-se entaõ esse producto á unidade principal. n. 114.

Para somar numeros complexos, principia-se pelas unidades da infima especie; se a soma dellas contém huma, ou mais unidades da especie seguinte, escreve-se sómente o resto, e essas levaõ-se para a columna seguinte, e assim por diante. n. 117.

Para diminuir complexos, principia-se pelas unidades da infima especie; e quando naõ póde fazer-se a subtracçaõ, toma-se huma unidade da especie immediata, que se converte em unidades da especie actual, e se ajunta com as outras, e da soma se faz a diminuiçaõ guardando-se huma analogia perfeita com a regra ordinaria. n. 118.

A multiplicaçaõ, e divisaõ de complexos, póde fazer-se pelas regras dos quebrados ordinarios; reduzin-

do as especies inferiores a hua fracçaõ da principal antes de fazer as ditas operaçoens. n. 119.

Parte *aliquota* de hum numero he o numero, que nelle se contém algumas vezes exactamente n. 120.

Para multiplicar os numeros complexos, resolvem-se as especies inferiores em partes aliquotas da especie principal, e humas das outras: e quando esta resoluçaõ naõ suggere productos faceis de calcular, supprem-se com productos subsidiarios. n. 121. 122. 123.

Para dividir hum complexo por incomplexo, no caso de ser o quociente da mesma natureza que o dividendo, parte-se pelo divisor a especie maior do dividendo, o resto se converte em unidades da especie seguinte, e se ajunta com as que houver no dividendo, e a soma se torna a partir pelo mesmo divisor; e assim por diante. n. 124.

Sendo porém o quociente de diversa natureza, reduzir-se ha tanto o dividendo, como o divisor, ás unidades da infima especie do dividendo; e depois se praticará como no primeiro caso, tratando as unidades do dividendo assim reduzido, como se fossem da mesma especie das que devem sahir no quociente. n. 127.

Se tambem for complexo o divisor, reduz-se ás unidadas da sua infima especie, e multiplica-se o dividendo pelo numero que dessas unidades he necessario para fazer a unidade principal; e pratica-se a divisaõ, como no caso do divisor incomplexo. n. 128.

Quadrado de hum numero he o producto delle multiplicado por si mesmo. n. 129.

Raiz quadrada de hum numero he o numero, que o produz sendo multiplicado por si mesmo. n. 130.

A raiz de hum numero, que naõ he quadrado perfeito, chama-se *surda*, *irracional*, ou *incommensuravel*. n. 132.

O quadrado de qualquer numero, composto de dezenas, e unidades, contém *o quadrado das dezenas*, *o dobro do producto das dezenas pelas unidades*, e *o quadrado das unidades*. n. 134.

Para extrahir a raiz quadrada de qualquer numero, divide-se este em classes de duas letras, começando da direita para a esquerda; da ultima classe á esquerda (que póde ser de huma só letra) busca-se a raiz, que será a primeira letra da raiz procurada; o quadrado desta letra se diminue da mesma classe, e ao resto, se o houver, se ajunta a classe seguinte, e se formará hum dividendo parcial, cujo divisor será o dobro da raiz achada, o qual se escreverá da segunda letra do dividendo para a esquerda; o quociente será a segunda letra da raiz, a qual se assentará tambem á direita do divisor, e se multiplicará por elle assim augmentado; o producto se diminuirá do dividendo, e ao resto se ajuntará a classe seguinte, e se formará outro dividendo, que se partirá pelo dobro da raiz achada; e assim por diante. n. 137. 139.

A raiz approximada de hum numero, que a naõ tem exacta, tira-se ajuntando ao dito numero tantas classes de duas cifras, quantas saõ as letras decimais, que se querem na raiz, e pratica-se a regra precedente. n. 140.

Para extrahir a raiz quadrada de hum quebrado, tira-se a raiz tanto do numerador, como do denominador, se ambos saõ quadrados perfeitos; e quando naõ, reduz-se o quebrado á dizima, de sorte que tenha numero

mero par de caſas decimais, e tira-ſe a raiz, como ſe foſſe inteiro, advertindo que a raiz deve ter ametade das caſas decimais, que houver na fracçaõ propoſta n. 142. 146.

O *Cubo* de hum numero he o producto do meſmo numero pelo ſeu quadrado. n. 149.

Raiz cubica de hum numero he o numero, que multiplicado pelo ſeu quadrado produz o dito numero propoſto. n. 151.

O *Cubo* de hum numero, composto de dezenas e unidades, contém o *cubo das dezenas*, *o triplo do producto do quadrado das dezenas multiplicado pelas unidades*, *o triplo do producto das dezenas multiplicadas pelo quadrado das unidades*, *e o cubo das unidades*. n. 154.

Para extrahir a raiz cubica de hum numero, divide-ſe em claſſes de tres letras começando da direita para a eſquerda; da ultima claſſe á eſquerda (a qual póde ſer de duas, e de huma letra) tira-ſe a raiz, e eſta ſerá a primeira letra da raiz procurada; o cubo deſta letra ſe diminue da meſma claſſe, e ao reſto ſe ajunta a claſſe ſeguinte, que formará hum dividendo parcial, cujo diviſor ſerá o triplo do quadrado da raiz achada, o qual ſe aſſentará da terceira letra do dividendo para a eſquerda; o quociente ſerá a ſegunda letra da raiz, e formando o cubo da raiz total achada ſe diminuirá das duas claſſes reſpectivas do numero propoſto; e ao reſto ſe ajuntará a terceira claſſe para formar outro dividendo, o qual ſe partirá do meſmo modo pelo triplo quadrado da raiz total já achada; e aſſim por diante. n. 145.

Querendo approximar a raiz de hum numero, que naõ he cubo perfeito, ajuntar-lhe-hemos tantas claſſes de tres cifras, quantas ſaõ as letras decimais, que queremos na raiz, e praticaremos a regra precedente. n. 156.

Para extrahir a raiz cubica de hum quebrado, he neceſſario tirar as raizes tanto do numerador, como do denominador. Se eſtes naõ forem cubos perfeitos, reduz-ſe o quebrado a fracçaõ decimal, procurando que tenha tres vezes mais caſas de dizima do que queremos na raiz, e pratica-ſe a regra precedente. n. 157. e ſeg.

Raſaõ he a grandeza relativa, que reſulta da comparaçaõ de duas quantidades do meſmo genero n. 162.

A raſaõ he *Arithmetica*, quando ſe conſidera a differença de duas quantidades; *Geometrica*, quando ſe conſidera quantas vezes huma contém a outra. Quando ſe diz *Raſaõ* ſimpleſmente ſempre ſe entende a Geometrica. n. 163. 164.

As duas quantidades, que ſe comparaõ na *Raſaõ*, chamaõ-ſe *termos*; o primeiro delles, *antecedente*; e o ſegundo, *conſequente*. n. 165.

Huma raſaõ arithmetica naõ muda de valor, quando ſe ajunta, ou ſe tira a ambos os termos della huma meſma quantidade. n. 169.

Huma raſaõ geometrica naõ muda de valor, quando ambos os termos ſe multiplicaõ, ou dividem por hum meſmo numero. n. 170.

Proporcaõ, ou *Analogia*, he a igualdade de duas raſoens; e eſta he *Arithmetica*, ou *Geometrica*, conforme as raſoens. n. 172.

Proporcaõ *continua* he, quando os termos medios ſaõ iguais entre ſi. n. 174.

Em toda a proporcaõ arithmetica, a ſoma dos meios he igual á dos extremos; e reciprocamente. n. 176.

Se a proporçaõ arithmetica for continua, a ſoma dos extremos he dupla do meio; e reciprocamente. n. 177.

Em toda a proporçaõ geometrica, o producto dos meios he igual ao dos extremos; e reciprocamente. n. 178. 180.

Se a proporçaõ for continua, o producto dos extremos ſerá igual ao quadrado ao meio, e reciprocamente. n. 178.

Dados tres termos de huma proporçaõ geometrica conhecer-ſe-ha o quarto. Porque ſe eſte for hum dos extremos, o producto dos meios ſe dividirá pelo outro; e ſe for hum dos meios, o producto dos extremos ſe dividirá pelo outro meio. n. 179.

A proporçaõ de quatro termos naõ ſe perde, mudando os extremos para meios, e os meios para extremos; nem tambem, trocando entre ſi de lugar os meios, ou os extremos. n. 181 182.

A proporçaõ naõ ſe póde alterar, multiplicando, ou dividindo ambos os antecedentes, ou ambos os conſequentes por hum meſmo numero. n. 183.

Se em qualquer proporçaõ geometrica, a ſoma, ou differença do antecedente e conſequente, ſe comparar com o antecedente ou conſequente, em ambas as raſoens do meſmo modo, o reſultado eſtará em proporçaõ. n. 183.

Em toda a proporçaõ geometrica, a ſoma, ou differença dos antecedentes he para a ſoma, ou differença dos conſequentes, como qualquer dos antecedentes para o ſeu conſequente. n. 185.

Em qualquer numero de raſoens iguais, a ſoma de todos os antecedentes he para a ſoma de todos os conſequentes, como qualquer antecedente para o ſeu conſequente. n. 186.

Raſaõ composta he a que reſulta de duas, ou mais raſoens, multiplicando entre ſi os antecedentes, e da meſma ſorte os conſequentes. n. 187.

Raſaõ *duplicada*, *triplicada*, *quadruplicada* &c, he a que ſe compoem de duas, tres, quatro &c. raſoens iguais. n. 189.

Os productos de duas ou mais proporçoens, multiplicadas por ordem, ou termo por termo, tambem eſtaõ em proporçaõ. n. 190.

As potencias ſemelhantes de quatro termos proporcionais, tambem ſaõ proporcionais. n. 191.

As raizes ſemelhantes de quatro termos proporcionais, tambem ſaõ proporcionais. n. 192.

A *Regra de tres* tem por objecto achar hum dos termos de huma proporçaõ por meio dos outros. Eſta he *ſimples*, quando a queſtaõ naõ involve mais do que quatro termos; e *compoſta*, quando involve mais de quatro. n. 194. 196.

A regra de tres *directa* he quando hum dos termos principais deve conter o outro do meſmo modo, que o relativo do primeiro contém o relativo do ſegundo; e *inverſa*, ou *reciproca*, quando hum dos termos principais deve conter o outro, como o relativo deſte contém o daquelle. n. 194. 195.

Na Regra directa cada termo principal com o ſeu relativo devem occupar juntamente o lugar de antecedentes, ou de conſequentes; e na inverſa, devem ter juntamente ou o lugar de meios, ou o de extremos. n. 194. 195.

A *Regra de Companhia* tem por objecto dividir hum numero em partes proporcionais a quaiſquer numeros dados. n. 197.

Para achar qualquer dellas, faremos: Como a ſoma dos numeros dados para o numero propoſto, aſſim qualquer dos numeros dados para a parte que lhe he proporcional. n. 197.

A *Regra de falſa poſiçaõ* he ſimples

ples, quando vimos no conhecimento de hum numero por meio de huma hypothese; e composta, quando saõ necessarias duas. n. 199.

Na simples, deve ser: Como o resultado da hypothese para o verdadeiro resultado, que devia sahir, assim a hypothese para o numero que se procura. n. 199.

Na composta, deve fazer-se: Como a differença dos resultados das duas hypotheses, para a differença entre o resultado da primeira, e o verdadeiro, que devia sahir; assim a differença das hypotheses, para a differença entre a primeira, e o numero que se busca. n. 199.

A *Regra de Liga* tem por objecto a mistura de quantidades de valor diverso. He directa, quando se daõ as quantidades com o seu valor, e se procura o valor do misto; *inversa*, quando se dá o preço do misto com o dos simples, e se perguntaõ as partes que de cada hum delles se devem tomar. n. 200.

Na directa multiplicaõ-se as unidades de cada especie pelo seu valor respectivo; a soma dos productos divide-se pelo numero total das unidades do composto; e o quociente he o valor de cada unidade delle.

Na inversa, sendo duas especies somente, as partes que dellas se devem tomar saõ na rasaõ inversa das differenças entre o valor das ditas especies, e o preço proposto. Sendo mais de duas, todas as de maior valor que o misto proposto se ligaraõ arbitrariamente pela regra directa, e da mesma sorte todas as de menor valor; e reduzido o caso a duas especies, se praticará a regra precedente. n. [illegible].

A *Progressaõ Arithmetica* he huma serie de termos, que tem sempre a mesma differença entre si. n. 204.

Qualquer termo de huma progressaõ Arithmetica compoem-se do primeiro, e da differença repetida tantas vezes, quantos saõ os termos precedentes. n. 206.

Entre dous numeros dados póde meter-se qualquer numero de meios proporcionais arithmeticos, diminuindo o extremo menor do maior, e dividindo o resto pelo numero dos meios aumentado de huma unidade; o quociente será a rasaõ, ou differença da Progressaõ, com a qual se formaraõ os termos pedidos. n. 209.

A *Progressaõ Geometrica* he huma serie de termos cada hum dos quais contem ou he contido no seu antecedente igual numero de vezes. n. 211.

Qualquer termo de huma Progressaõ Geometrica forma-se do primeiro, multiplicado pela rasaõ elevada á potencia, que tem por exponente o numero dos termos precedentes. n. 213.

Entre dous numeros dados póde meter-se qualquer numero de meios geometricos, dividindo o maior pelo menor, e extrahindo do quociente a raiz do grão correspondente ao numero dos meios aumentado de huma unidade; esta raiz será a rasaõ da Progressaõ, com a qual se formaraõ os meios pedidos n. 215.

Os *Logarithmos* saõ os numeros de huma progressaõ Arithmetica, que correspondem termo por termo a outra serie de numeros em Progressaõ Geometrica. n. 216.

Na construcçaõ dos Logarithmos vulgares fez-se corresponder a progressaõ arithmetica 0, 1, 2, 3, &c. á progressaõ geometrica 1, 10, 100, 1000, &c. n. 231.

Chama-se *Characteristica* de num Logarithmo a letra, ou letras, que á esquerda estaõ no lugar dos

dos inteiros, antes da dizima do mesmo Logarithmo. n. 222.

O numero correspondente a qualquer Logarithmo tem sempre tantas letras, quantas saõ as unidades da characteristica, e mais huma. n. 222.

A soma dos Logarithmos de dous numeros he igual ao Logarithmo do seu producto. n. 225.

O Logarithmo de qualquer potencia de hum numero he igual ao Logarithmo delle, multiplicado pelo exponente da mesma potencia. n. 229.

O Logarithmo de qualquer raiz de hum numero he igual ao Logarithmo delle, dividido pelo exponente da mesma raiz. n. 230.

O Logarithmo do quociente de huma divisaõ he igual ao Logarithmo do dividendo menos o Logarithmo do divisor. n. 231.

Pratica-se a regra de tres por Logarithmos, somando os Logarithmos do segundo e terceiro termo, e tirando da soma o Logarithmo do primeiro; o resto he o Logarithmo do quarto. n. 232.

O Logarithmo de hum numero acompanhado de fracçaõ, acharse-ha reduzindo tudo a fracçaõ, e tirando o Logarithmo do denominador do Logarithmo do numerador. n. 234.

O Logarithmo de huma fracçaõ propria he igual á differença dos Logarithmos do numerador e denominador, precedida do final —, o qual mostra que esta differença he subtractiva; e por isso os Logarithmos das fracçoens proprias se devem tratar de hum modo contrario ao que se pratica com os Logarithmos dos numeros inteiros. n. 235.

Se á characteristica de hum Logarithmo se ajuntar huma, duas, tres unidades &c., corresponderá a hum numero dez, cem, mil vezes &c maior; e ao contrario. n. 238.

Para achar o Logarithmo de hum numero maior do que os das Taboas, busca-se nellas o Logarithmo que corresponde as primeiras quatro, ou cinco letras delle, conforme o alcance das Taboas, e juntamente a differença deste Logarithmo ao immediatamente maior nas mesmas Taboas; esta differença se multiplicará pelo resto das letras do numero proposto, e do producto se cortaraõ outras tantas para a direita; as que ficarem se ajuntaráõ ao dito Logarithmo menor, e a soma com a characteristica competente será o Logarithmo procurado. n. 239.

O Logarithmo de hum numero seguido de dizima busca-se como se fosse inteiro, e da characteristica se tiraõ tantas unidades, quantas saõ as casas decimais. n. 240.

O Logarithmo de huma fracçaõ decimal propria busca-se tambem, como se fosse numero inteiro, mas esse Logarithmo se tira de tantas unidades, quantas saõ as casas decimais, e ao resto se poem o final —.

Para achar o numero correspondente a hum Logarithmo, que se naõ acha nas Taboas, mas cahe entre dous Logarithmos da suprema classe dellas, tomar-se-ha a differença dos Logarithmos entre os quais elle cahe, e a differença entre o menor delles, e o Logarithmo proposto; e dividindo esta por aquella, o quociente nos dará as letras decimais, que devemos ajuntar ao numero correspondente ao Logarithmo proximamente menor. n. 243.

Se o Logarithmo tiver menor, ou maior characteristica, do que a classe suprema das Taboas, reduzir-se-ha a ellas, ajuntando-lhe, ou tirando-lhe as unidades necessarias: e no numero achado se adiantará a virgula pa-

para a direita tantas casas, quantas foraõ as unidades que se tiráraõ, ou para a esquerda, quantas foraõ as que se ajuntáraõ á characteristica. n. 245. 245.

Para achar o numero correspondente a hum Logarithmo negativo, tira-se este de tantas unidades, quantas bastarem para que a characteristica do resto pertença á classe suprema das Taboas; e no numero correspondente se tomaráõ tantas casas decimais, quantas foraõ as unidades das quais se diminuio o Logarithmo. n. 246.

Complemento Arithmetico de hum numero he a differença entre elle, e a unidade seguida de tantas cifras, quantas saõ as casas do mesmo numero. n. 250.

Toma-se o complemento de hum numero, escrevendo da esquerda para a direita o que falta a cada huma das letras para 9. e na ultima o que lhe falta para 10. n. 249.

Por meio dos complementos se mudaõ as subtracçoens em addicçoens, substituindo em lugar dos Logarithmos subtractivos os seus complementos, e deixando na soma de escrever tantas dezenas na characteristica, quantos forem os complementos. n. 252.

Ao Logarithmo de hum quebrado dá-se fórma positiva, ajuntando ao Logarithmo do numerador o complemento do Logarithmo do denominador; mas neste Logarithmo se entenderá que fica huma dezena de mais na characteristica, a qual se tirará no fim das operaçoens em que elle entrar, podendo ser. n. 253.

Para dar fórma positiva ao Logarithmo de huma fracçaõ decimal, busca-se como se fosse numero inteiro, e dá-se-lhe huma characteristica que tenha tantas unidades menos que 10, 20 &c., quantas saõ as casas desde a virgula até a primeira letra significativa da fracçaõ. n. 254.

Para achar a fracçaõ decimal correspondente a hum Logarithmo, que sabemos involver complemento, dá-se-lhe a characteristica maior das Taboas, e a primeira letra do numero correspondente se escreve tantas casas adiante da virgula, quantas forem as unidades que a characteristica do Logarithmo tiver de menos que 10, 20 &c., conforme elle tiver hum, dous &c. complementos. n. 255.

Quando se multiplica hum Logarithmo destes, igualmente se multiplicaõ os complementos que inclue; e deve notar-se, quantos ficaõ no resultado, para se determinar o seu valor pela regra precedente. n. 256.

Quando se houver de dividir, ajuntar-se-haõ as dezenas que forem necessarias á characteristica, para que o numero dos complementos seja hum multiplo do divisor; e do mesmo modo se notará, quantos saõ os complementos, que ficaõ no resultado. n. 257.

900 | 1C
450
225 | a 25
25 56
1 56
56
177196
25

$\frac{5}{8}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{6}{8}$ $\frac{3}{8}$

$\frac{16}{15}$

$\frac{4}{5}$ $\frac{3}{34}$

15

$\frac{25}{18}$

9010 | 16
100 | 56
04

9010 | 16
101 | 563
050
02

450
900 225 | 4
25 | 56
1 | 56
56
168
6
1008

Fezits

$\frac{4}{2}$ $\frac{5}{3}$ $\frac{3}{1}$ 3 $\frac{12}{6}$ $\frac{10}{6}$ $\frac{18}{6}$

Zomboria

$\frac{2345}{3457}$ 140

$\frac{20}{7}$ 140

$\frac{40}{60}$

$\frac{105}{40}$ $\frac{280}{420}$ $\frac{5}{7}$ 35

789 791

528 0039 4

955 573 49

$\frac{1}{5}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{10}{12}$

985 95 95

$\frac{3}{7}$ $\frac{8}{9}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{5}{7}$ 36 25 $\frac{756}{764}$

Dõn Ant.º 1598

872290 | 17
822 | 51311
17 | 35917
8 | 67311
51 |
arug dos 019 | 872287
17 | 3
Se ai da 1020 | 872290
do 3. ... actas 17 | 3444
03 | 30
04 |

Numerador 7876 | 643
Ei oq mostra das ptes da unid. consta
aquantid.e q queremos significar
7434
E denominador Ei oq mostra em q ptes
7876
se supoem devedida a unid.e

BEZOUT
ARITH