Sala C
Est. 2
Tab. 10 b
N.º 3

№ 613

BIBLIOTHECA REGIMENTAL DE INFANTERIA 3
366
N.º 613

FORMULAS

PARA A

AVALIAÇÃO DA SUPERFICIE E DA CAPACIDADE

3163

DAS

ABOBADAS DE BARRETE DE CLERIGO E DE ARESTA

DEDUZIDAS POR

GODOFREDO EDMUNDO ALEGRO

CAPITÃO DE ENGENHERIA

centro ciencia viva RÓMULO DE CARVALHO

- 613 -

RC
MNCT
62
ALE

LISBOA

IMPRENSA NACIONAL

1878

ILLUSTRISSIMO E EXCELLENTISSIMO SENHOR

ANTONIO MARIA DE FONTES PEREIRA DE MELLO

PRESIDENTE DO CONSELHO DE MINISTROS

MINISTRO E SECRETARIO D'ESTADO DOS NEGOCIOS DA GUERRA

De entre as brilhantes qualidades que nobilitam v. ex.ª, é sem duvida — o amor da patria — uma das que mais lhe têem grangeado o respeito e a estima de quantos se presam por haverem nascido portuguezes

Incansavel tem sido v. ex.ª em promover todos os melhoramentos que possam contribuir para a prosperidade d'este reino; e, de tão gloriosa tarefa, não tem certamente cabido o menor quinhão ao desenvolvimento das sciencias, para o qual é um poderoso incentivo a decidida protecção que encontram da parte de v. ex.ª aquelles que as cultivam.

É isto que me anima a solicitar de v. ex.ª a subida honra de permittir-me que lhe dedique o presente trabalho; e se v. ex.ª o achar de alguma utilidade, e se dignar acceital-o benevolamente, concederá grande mercê ao

De v. ex.ª
Respeitosissimo admirador

Lisboa, 10 de maio de 1878.

Godofredo Edmundo Alegro.

BIBLIOTHECA
REGIMENTAL
DE INFANTERIA 3

As abobadas, tanto as de barrete de clerigo como as de aresta, são de um emprego frequentissimo nas construcções, e por isso muitas vezes ha que calcular-lhes a superficie e a capacidade.

Infinito é o numero das curvas que podem ser empregadas como directrizes dos cylindros que entram na formação de uma abobada, mas pareceu-nos que sufficientemente attendidas ficariam as necessidades da pratica se, de entre todas as curvas, apenas adoptassemos a ellipse, a hyperbole, a parabola e a ogiva. É com os cylindros tendo por base cada uma d'estas curvas que constituimos os quatro primeiros capitulos do presente trabalho.

Cada um dos mencionados capitulos se divide em duas partes, a primeira das quaes se refere á superficie das abobadas, referindo-se a segunda á capacidade d'ellas; em cada parte se estudam separadamente a abobada de barrete de clerigo e a de aresta, considerando-se para cada uma dois casos, dos quaes o primeiro tem logar quando os cylindros se cortam orthogonalmente e o segundo quando é obliqua a incidencia de um sobre o outro, e finalmente em cada caso deduzimos as formulas que correspondem ás differentes variedades da directriz considerada.

Julgámos que a abobada de torre circular, cujo emprego não é raro em obras de fortificação, teria justificado cabimento n'este trabalho, e por isso formámos com ella o 5.º capitulo, o qual, como os quatro primeiros, se divide em duas partes, referindo-se a primeira á superficie das abobadas e a segunda á sua capacidade, e em cada parte se estudam em separado a abobada de barrete de clerigo e a de aresta.

Frequente é o emprego das escadas de caracol e por isso importa saber avaliar-lhes a superficie e a capacidade, mas não podendo entrar as suas abobadas na categoria das de barrete de clerigo ou na das de aresta, tivemos por mais proprio constituir com similhante estudo um *appendice* que dividimos em dois capitulos dos quaes o primeiro se refere ao caso em que a abobada é o helicoide de plano director, e o segundo ao caso em que é a *ponte de S. Gil.*

O capitulo 1.º do presente trabalho foi publicado na *Revista de obras publicas e minas,* no anno de 1876, e o que então dissemos repetimol-o ainda hoje: ao intentar esta publicação instiga-nos unicamente o desejo de contribuirmos com o nosso subsidio, embora pouco valioso, para a resolução de alguns problemas cuja importancia ninguem ousará negar, e que tão pouco estudados têem sido até ao presente.

ARSENAL DA MARINHA 6 BIBLIOTHECA

CAPITULO I

CYLINDROS DE BASE ELLIPTICA

PARTE I

SUPERFICIE DAS ABOBADAS

ABOBADA DE BARRETE DE CLERIGO

Começando pelo caso em que os cylindros se cortam orthogonalmente, referiremos a abobada (fig. 1) a tres planos coordenados dos quaes o dos (xy) será o das impostas e os dos (xz) e dos (yz) os das directrizes dos cylindros, que estão rebatidas em (xy).

Se representarmos por b a altura do vertice da abobada acima do plano das impostas, sendo $Oa = Oa_1 = a$, e $Oa' = Oa'_1 = a'$, as equações das ellipses directrizes serão,

em aba_1 $$a^2 z^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$$

e em $a'ba'_1$ $$a'^2 z^2 + b^2 y^2 = a'^2 b^2$$

das quaes se tira $$x = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - z^2} \qquad (1)$$

$$y = \frac{a'}{b}\sqrt{b^2 - z^2} \qquad (2)$$

Os arcos elementares, ds da primeira d'estas curvas e ds_1 da segunda, serão

$$ds = \sqrt{dx^2 + dz^2} = dz\sqrt{\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + 1} \qquad ds_1 = \sqrt{dy^2 + dz^2} = dz\sqrt{\left(\frac{dy}{dz}\right)^2 + 1}$$

expressões que, pela substituição na primeira de $\left(\frac{dx}{dz}\right)$ tirado da equação (1) e na segunda de $\left(\frac{dy}{dz}\right)$ tirado da equação (2) se transformam em

$$ds = dz\sqrt{\frac{(a^2 - b^2)\, z^2 + b^4}{b^2\,(b^2 - z^2)}} \qquad (3)$$

$$ds_1 = dz\sqrt{\frac{(a'^2 - b^2)\, z^2 + b^4}{b^2\,(b^2 - z^2)}} \qquad (4)$$

Ora, se cortarmos a abobada por planos $mnpq$ parallelos ao das impostas e infinitamente proximos entre si, cada um dos triangulos curvos que se projectam em AoA', $A'oA_1$, etc., ficará dividido em rectangulos infinitamente pequenos, e para determinar a area de um d'estes multiplicar-se-ha a intersecção do plano secante horisontal com um dos triangulos curvos pelo elemento ds da ellipse base ou directriz do cylindro a que o triangulo pertencer; por exemplo: a area do rectangulo projectado em $A'A_1qm$ determinar-se-ha multiplicando mq pelo elemento da ellipse directriz do cylindro cujas impostas estão em A_1A' e AA'_1, poisque evidentemente este arco elementar é a altura do rectangulo que tem por base mq.

As areas dos rectangulos $A'A_1qm$ e $AA'mn$ exprimir-se-hão pois por

$$A'A_1\,qm = mq \times ds_1 \qquad AA'\,mn = mn \times ds$$

mas como, para um mesmo valor de z

$$mq = m'\,q' = 2\,x \qquad m\,n = p'\,q'' = 2y$$

será $$A'\,A_1\,qm = 2\,x \times ds_1 \qquad AA'\,mn = 2\,y \times ds$$

e então os triangulos curvos $A'oA_1$ e AoA' terão os valores

$$A'\,o\,A_1 = 2\int_{z=0}^{z=b} x \times ds_1 \qquad A\,o\,A' = 2\int_{z=0}^{z=b} y \times ds$$

e pondo na primeira d'estas igualdades os valores (1) e (4) e na segunda os valores (2) e (3), virá

$$A'\,o\,A_1 = 2\,a\int_0^b dz\sqrt{\left(\frac{a'^2-b^2}{b^4}\right)z^2+1} = 2\,a\times\frac{1}{2}\left[a'+b\sqrt{\frac{b^2}{a'^2-b^2}}\times\frac{\lg.\left(\frac{a'}{b}+\sqrt{\frac{a'^2-b^2}{b^2}}\right)}{0{,}4342945}\right]^{(1)} \tag{5}$$

$$A\,o\,A' = 2\,a'\int_0^b dz\sqrt{\left(\frac{a^2-b^2}{b^4}\right)z^2+1} = 2\,a'\times\frac{1}{2}\left[a+b\sqrt{\frac{b^2}{a^2-b^2}}\times\frac{\lg.\left(\frac{a}{b}+\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2}}\right)}{0{,}4342945}\right] \tag{6}$$

ou, se representarmos por S_a a superficie do triangulo cuja base é $2a$ e por $S_{a'}$ a do triangulo de base $2a'$,

$$S_a = a\left[a'+b\sqrt{\frac{b^2}{a'^2-b^2}}\times\frac{\lg.\left(\frac{a'}{b}+\sqrt{\frac{a'^2-b^2}{b^2}}\right)}{0{,}4342945}\right] \tag{I}$$

$$S_{a'} = a'\left[a+b\sqrt{\frac{b^2}{a^2-b^2}}\times\frac{\lg.\left(\frac{a}{b}+\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2}}\right)}{0{,}4342945}\right] \tag{II}$$

É claro que a formula (I) sómente será applicavel emquanto $a'>b$, porque do contrario se torna imaginaria, e pela mesma rasão só poderá empregar-se a formula (II) quando $a>b$; mas succedendo que $a'<b$, ou $a<b$, daremos aos valores de $A'oA_1$ e AoA' a seguinte fórma

$$A'\,o\,A_1 = 2a\int_0^b dz\sqrt{1-\left(\frac{b^2-a'^2}{b^4}\right)z^2} = 2\,a\times\frac{1}{2}\left[a'+b\sqrt{\frac{b^2}{b^2-a'^2}}\times arc.\ sen.\sqrt{\frac{b^2-a'^2}{b^2}}\right]^{(2)} \tag{7}$$

$$A\,o\,A' = 2\,a'\int_0^b dz\sqrt{1-\left(\frac{b^2-a^2}{b^4}\right)z^2} = 2\,a'\times\frac{1}{2}\left[a+b\sqrt{\frac{b^2}{b^2-a^2}}\times arc.\ sen.\sqrt{\frac{b^2-a^2}{b^2}}\right] \tag{8}$$

ou

$$S_a = a\left[a'+b\sqrt{\frac{b^2}{b^2-a'^2}}\times arc.\ sen.\sqrt{\frac{b^2-a'^2}{b^2}}\right] \tag{III}$$

$$S_{a'} = a'\left[a+b\sqrt{\frac{b^2}{b^2-a^2}}\times arc.\ sen.\sqrt{\frac{b^2-a^2}{b^2}}\right] \tag{IV}$$

Se succeder que seja $a'=b$ não poderemos empregar qualquer das formulas (I) ou (III) porque se tornam indeterminadas, e outro tanto succederá ás formulas (II) e (IV) quando $a=b$; mas no primeiro caso as equações (5) e (7), e no segundo as equações (6) e (8) reduzir-se-hão respectivamente a

$$A'\,o\,A_1 = 2\,a\int_0^b dz$$

$$A\,o\,A' = 2\,a'\int_0^b dz$$

ou

$$S_a = 2\,a\,b \tag{V}$$

$$S_{a'} = 2\,a'\,b \tag{VI}$$

Finalmente, se for $a=a'=b$, as formulas (I), (II), (III) e (IV) serão inapplicaveis, como ha pouco indicámos, mas das (V) e (VI) tirar-se-ha

$$S_a = S_{a'} = 2\,a^2 \tag{VII}$$

A superficie total do barrete de clerigo será evidentemente

$$B_c = 2\,(S_a + S_{a'}) \tag{α}$$

restando apenas substituir n'esta expressão os valores de S_a e $S_{a'}$ correspondentes ás relações que tiverem logar entre a, a' e b.

(1) Vide nota 1.ª
(2) Vide nota 2.ª

Tratemos agora o caso em que os cylindros se cortam obliquamente, sendo θ o angulo agudo formado pelos seus eixos.

Referiremos ainda a abobada (fig. 2) a tres planos coordenados dos quaes o dos (xy) será o das impostas, e os dos (xz) e dos (yz) os das ellipses directrizes dos cylindros, as quaes, assim como as secções rectas dos mesmos, estão rebatidas em (xy).

Se for b a altura do vertice da abobada acima do plano das impostas, sendo $Oa = Oa_1 = a$ o semi-eixo horisontal da ellipse directriz aba_1 e $Oa' = Oa'_1 = a'$ o semi-eixo horisontal da ellipse directriz $a'ba'_1$, o semi-eixo horisontal $\alpha = O\alpha = O\alpha_1$ da secção recta $\alpha b \alpha_1$ será $\alpha = a \, sen \, \theta$, e o semi-eixo horisontal da secção recta $\alpha' b \alpha'_1$ será $\alpha' = a' sen \, \theta$, e assim teremos as equações

em $a \, b \, a_1$ $$a^2 z^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$$

em $a' \, b a_1'$ $$a'^2 z^2 + b^2 y^2 = a'^2 b^2$$

em $\alpha \, b \, \alpha_1$ $$a^2 sen^2 \theta \, z^2 + b^2 x^2_1 = a^2 sen^2 \theta \, b^2$$

e em $\alpha' \, b \, \alpha'_1$ $$a'^2 sen^2 \theta \, z^2 + b^2 y^2_1 = a'^2 sen^2 \theta \, b^2$$

tirando-se da primeira
$$x = \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - z^2} \tag{9}$$

e da segunda
$$y = \frac{a'}{b} \sqrt{b^2 - z^2} \tag{10}$$

Os arcos elementares das secções rectas serão

em $\alpha \, b \, \alpha_1$
$$ds' = dz \sqrt{\left(\frac{dx_1}{dz}\right)^2 + 1}$$

e em $\alpha' \, b \, \alpha'_1$
$$ds'_1 = dz \sqrt{\left(\frac{dy_1}{dz}\right)^2 + 1}$$

expressões que evidentemente se obtêem de (3) e (4) substituindo n'estas a e a' por $asen\theta$ e $a'sen\theta$, e então

$$ds' = dz \sqrt{\frac{(a^2 sen^2 \theta - b^2) z^2 + b^4}{b^2 (b^2 - z^2)}} \tag{11}$$

$$ds'_1 = dz \sqrt{\frac{(a'^2 sen^2 \theta - b^2) z^2 + b^4}{b^2 (b^2 - z^2)}} \tag{12}$$

Cortando a abobada por planos $mnpq$ parallelos ao das impostas e infinitamente proximos entre si, cada um dos triangulos curvos AoB, BoA', etc., ficará dividido em parallelogrammos infinitamente pequenos e para determinar a area de um d'estes multiplicar-se-ha a intersecção do plano secante no triangulo curvo pelo elemento ds da secção recta do cylindro a que o triangulo pertencer; por exemplo: a area do parallelogrammo projectado em $ABmn$ obter-se-ha multiplicando mn pelo elemento ds da secção recta do cylindro cujas impostas estão em AB e $A'B'$. É claro que o arco elementar, n'este caso, deve ser tomado na secção recta e não na directriz, poisque esta é obliqua ás geratrizes emquanto que aquella lhes é perpendicular, sendo portanto os seus elementos as alturas dos parallelogrammos elementares.

As areas dos parallelogrammos $BA'qm$ e $ABmn$ exprimir-se-hão por

$$B A' q m = mq \times ds'_1 \qquad A B mn = mn \times ds'$$

mas como, para um mesmo valor de z,
$$mq = m' q' = 2x \qquad mn = p' q'' = 2y$$

será
$$B A' qm = 2x \times ds'_1 \qquad A B mn = 2y \times ds'$$

sendo então os valores dos triangulos curvos
$$B o A' = 2 \int_{z=0}^{z=b} x \times ds'_1 \qquad A o B = 2 \int_{z=0}^{z=b} y \times ds'$$

e pondo na primeira d'estas igualdades os valores (9) e (12) e na segunda os valores (10) e (11) virá

$$B o A' = 2a \int_0^b dz \sqrt{\left(\frac{a'^2 sen^2 \theta - b^2}{b^4}\right) z^2 + 1} = 2a \times \frac{1}{2} \left[a' sen \, \theta + b \sqrt{\frac{b^2}{a'^2 sen^2 \theta - b^2}} \times \frac{lg \left(\frac{a' sen \, \theta}{b} + \sqrt{\frac{a'^2 sen^2 \theta - b^2}{b^2}} \right)}{0{,}4342945} \right]^{(1)} \tag{13}$$

$$A o B = 2a' \int_0^b dz \sqrt{\left(\frac{a^2 sen^2 \theta - b^2}{b^4}\right) z^2 + 1} = 2a' \times \frac{1}{2} \left[a \, sen \, \theta + b \sqrt{\frac{b^2}{a^2 sen^2 \theta - b^2}} \times \frac{lg. \left(\frac{a \, sen \, \theta}{b} + \sqrt{\frac{a^2 sen^2 \theta - b^2}{b^2}} \right)}{0{,}4342945} \right] \tag{14}$$

(1) Applica-se a nota 1.ª

ou, se representarmos por S'_a a superficie do triangulo curvo cuja base é $2a$ e por $S'_{a'}$ a do triangulo da base $2a'$

$$S'_a = a\left[a' \operatorname{sen}\theta + b\sqrt{\frac{b^2}{a'^2 \operatorname{sen}^2\theta - b^2}} \times \frac{lg\left(\frac{a' \operatorname{sen}\theta}{b} + \sqrt{\frac{a'^2 \operatorname{sen}^2\theta - b^2}{b^2}}\right)}{0{,}4342945}\right] \quad \text{(VIII)}$$

$$S'_{a'} = a'\left[a \operatorname{sen}\theta + b\sqrt{\frac{b^2}{a^2 \operatorname{sen}^2\theta - b^2}} \times \frac{lg\left(\frac{a \operatorname{sen}\theta}{b} + \sqrt{\frac{a^2 \operatorname{sen}^2\theta - b^2}{b^2}}\right)}{0{,}4342945}\right] \quad \text{(IX)}$$

A formula (VIII) deixará de ser applicavel quando $a' \operatorname{sen}\theta < b$, e outro tanto succederá á formula (IX) quando $a \operatorname{sen}\theta < b$, mas então daremos ás expressões (13) e (14) a fórma seguinte:

$$B\,o\,A' = 2\,a\int_0^b dz\sqrt{1 - \left(\frac{b^2 - a'^2 \operatorname{sen}^2\theta}{b^4}\right) z^2} = 2\,a \times \frac{1}{2}\left[a' \operatorname{sen}\theta + b\sqrt{\frac{b^2}{b^2 - a'^2 \operatorname{sen}^2\theta}} \times arc.\,sen\sqrt{\frac{b^2 - a'^2 \operatorname{sen}^2\theta}{b^2}}\right]^{(1)} \quad (15)$$

$$A\,o\,B = 2\,a'\int_0^b dz\sqrt{1 - \left(\frac{b^2 - a^2 \operatorname{sen}^2\theta}{b^4}\right) z^2} = 2\,a' \times \frac{1}{2}\left[a \operatorname{sen}\theta + b\sqrt{\frac{b^2}{b^2 - a^2 \operatorname{sen}^2\theta}} \times arc.\,sen\sqrt{\frac{b^2 - a^2 \operatorname{sen}^2\theta}{b^2}}\right] \quad (16)$$

ou

$$S'_a = a\left[a' \operatorname{sen}\theta + b\sqrt{\frac{b^2}{b^2 - a'^2 \operatorname{sen}^2\theta}} \times arc.\,sen\sqrt{\frac{b^2 - a'^2 \operatorname{sen}^2\theta}{b^2}}\right] \quad \text{(X)}$$

$$S'_{a'} = a'\left[a \operatorname{sen}\theta + b\sqrt{\frac{b^2}{b^2 - a^2 \operatorname{sen}^2\theta}} \times arc.\,sen\sqrt{\frac{b^2 - a^2 \operatorname{sen}^2\theta}{b^2}}\right] \quad \text{(XI)}$$

Se for $a' \operatorname{sen}\theta = b$ as formulas (VIII) e (X) tornar-se-hão indeterminadas, e outro tanto succederá ás formulas (IX) e (XI) quando $a \operatorname{sen}\theta = b$; mas no primeiro caso as equações (13) e (15), e no segundo as equações (14) e (16) reduzir-se-hão respectivamente a

$$B\,o\,A' = 2\,a\int_0^b dz$$

$$A\,o\,B = 2\,a'\int_0^b dz$$

ou

$$S'_a = 2\,a\,b \quad \text{(XII)}$$

$$S'_{a'} = 2\,a'\,b \quad \text{(XIII)}$$

Finalmente, se for $a \operatorname{sen}\theta = a' \operatorname{sen}\theta = b$, serão inapplicaveis, como ha pouco indicámos, as formulas (VIII), (IX), (X) e (XI), mas das (XII) e (XIII) tirar-se-ha

$$S'_a = S'_{a'} = 2\,a^2 \operatorname{sen}\theta \quad \text{(XIV)}$$

A superficie total do barrete de clerigo será n'este caso dada pela igualdade

$$B'_s = 2\,(S'_a + S'_{a'}) \quad (\beta)$$

que tomará differentes fórmas segundo as relações que houver entre a, a', b e $\operatorname{sen}\theta$.

ABOBADA DE ARESTA

N'esta especie de abobadas, similhantemente ao que fizemos por occasião de estudar as de barrete de clerigo, trataremos em primeiro logar do caso em que os cylindros se cortam orthogonalmente.

A superficie da abobada de aresta é igual á somma das superficies dos cylindros que a formam, menos a do barrete de clerigo por elles formado. Sendo (fig. 1) C_a a superficie do cylindro que tem de comprimento $2a'$ e para base a ellipse $a\,b\,a_1$, cuja equação é $a^2 z^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$, e $C_{a'}$ a superficie do cylindro que tem de comprimento $2a$ e para base a ellipse $a'\,b\,a_1'$, cuja equação é $a'^2 z^2 + b^2 y^2 = a'^2 b^2$, quando for $a > b$, e fazendo $\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = e$, teremos

$$C_a = \pi a\left[1 - \left(\frac{1}{2}e\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}e^2\right)^2 - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}e^3\right)^2 - \ldots\ldots - \frac{1}{2m-1}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\cdots\frac{2m-1}{2m}e^m\right)^2\right] \times 2\,a'^{\,(2)} \quad \text{(XV)}$$

(1) Applica-se a nota 2.ª

(2) O desenvolvimento da semi-ellipse que tem $2\,p$ para eixo maior e $2\,q$ para eixo menor é

$$\pi p\left[1 - \left(\frac{1}{2}e\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}e^2\right)^2 - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}e^3\right)^2 - \ldots\ldots - \frac{1}{2m-1}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\cdots\frac{2m-1}{2m}e^m\right)^2\right]$$

sendo $e = \frac{\sqrt{p^2 - q^2}}{p}$

e do mesmo modo quando for $a' > b$, e fazendo $\frac{\sqrt{a'^2-b^2}}{a'} = e'$,

$$C_{a'} = \pi a' \left[1-\left(\frac{1}{2}e'\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}e'^2\right)^2-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}e'^3\right)^2-\ldots\ldots-\frac{1}{2m-1}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\ldots\ldots\frac{2m-1}{2m}e'^m\right)^2\right]\times 2a \qquad \text{(XVI)}$$

Se for $a < b$, fazendo $\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b} = e$,

$$C_a = \pi b \left[1-\left(\frac{1}{2}e\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}e^2\right)^2-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}e^3\right)^2-\ldots\ldots-\frac{1}{2m-1}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\ldots\ldots\frac{2m-1}{2m}e^m\right)^2\right]\times 2a' \qquad \text{(XVII)}$$

e do mesmo modo quando $a' < b$, fazendo $\frac{\sqrt{b^2-a'^2}}{b} = e'$,

$$C_{a'} = \pi b \left[1-\left(\frac{1}{2}e'\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}e'^2\right)^2-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}e'^3\right)^2-\ldots\ldots-\frac{1}{2m-1}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\ldots\ldots\frac{2m-1}{2m}e'^m\right)^2\right]\times 2a \qquad \text{(XVIII)}$$

Se succeder que seja $a = b$ as formulas (XV) e (XVII) reduzem-se a

$$C_a = \pi a \times 2a' \qquad \text{(XIX)}$$

e sendo $a' = b$ as formulas (XVI) e (XVIII) reduzem-se a

$$C_{a'} = \pi a' \times 2a \qquad \text{(XX)}$$

Finalmente, no caso de ser $a = a' = b$, das formulas (XIX) e (XX) tira-se

$$C_a = C_{a'} = 2\pi a^2 \qquad \text{(XXI)}$$

A superficie A_s da abobada de aresta, sendo B_s (formula α) a do barrete de clerigo comprehendido pelos cylindros que formam aquella, será

$$A_s = C_a + C_{a'} - B_s \qquad (\gamma)$$

expressão cujo segundo membro tomará differentes fórmas segundo as relações existentes entre a, a' e b.

Quando os cylindros se cortarem obliquamente, sendo θ o angulo agudo formado pelos seus eixos (fig. 2) ainda a superficie da abobada de aresta será igual á somma das superficies dos cylindros menos a do barrete de clerigo. Ora como a superficie de um cylindro é igual ao producto da geratriz pelo perimetro da secção recta, se for C'_a o cylindro que tem por geratriz $2a'$ e por secção recta a ellipse $\alpha\, b\, \alpha_1$ expressa pela equação $a^2\, sen^2\, \theta\, z^2 + b^2 x_1^2 = a^2\, sen^2\, \theta\, b^2$, sendo $C'_{a'}$ o cylindro que tem por geratriz $2a$ e por secção recta a ellipse $\alpha'\, b\, \alpha_1'$, expressa pela equação $a'^2\, sen^2\theta\, z^2 + b^2 y_1^2 = a'^2\, sen^2\,\theta\, b^2$, quando for $a\, sen\,\theta > b$, fazendo $\frac{\sqrt{a^2\, sen^2\,\theta - b^2}}{a\, sen\,\theta} = e_1$, teremos

$$C'_a = \pi a\, sen\,\theta \left[1-\left(\frac{1}{2}e_1\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}e_1^2\right)^2-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}e_1^3\right)^2-\ldots\ldots-\frac{1}{2m-1}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\ldots\ldots\frac{2m-1}{2m}e_1^m\right)^2\right]\times 2a' \text{ (1)} \qquad \text{(XXII)}$$

e quando for $a'\, sen\,\theta > b$, fazendo $\frac{\sqrt{a'^2\, sen^2\,\theta - b^2}}{a'\, sen\,\theta} = e'_1$,

$$C'_{a'} = \pi a'\, sen\,\theta \left[1-\left(\frac{1}{2}e_1'\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}e_1'^2\right)^2-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}e_1'^3\right)^2-\ldots\ldots-\frac{1}{2m-1}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\ldots\ldots\frac{2m-1}{2m}e_1'^m\right)^2\right]\times 2a \qquad \text{(XXIII)}$$

Se for $a\, sen\,\theta < b$, fazendo $\frac{\sqrt{b^2 - a^2\, sen^2\,\theta}}{b} = e_1$,

$$C'_a = \pi b \left[1-\left(\frac{1}{2}e_1\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}e_1^2\right)^2-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}e_1^3\right)^2-\ldots\ldots-\frac{1}{2m-1}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\ldots\ldots\frac{2m-1}{2m}e_1^m\right)^2\right]\times 2a' \qquad \text{(XXIV)}$$

e do mesmo modo quando $a'\, sen\,\theta < b$, fazendo $\frac{\sqrt{b^2 - a'^2\, sen^2\,\theta}}{b} = e_1'$,

$$C'_{a'} = \pi b \left[1-\left(\frac{1}{2}e_1'\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}e_1'^2\right)^2-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}e_1'^3\right)^2-\ldots\ldots-\frac{1}{2m-1}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\ldots\ldots\frac{2m-1}{2m}e_1'^m\right)^2\right]\times 2a \qquad \text{(XXV)}$$

As formulas (XXII) e (XXIV) quando $a\, sen\,\theta = b$ reduzem-se a

$$C'_a = \pi a\, sen\,\theta \times 2a' \qquad \text{(XXVI)}$$

e as formulas (XXIII) e (XXV) quando $a'\, sen\,\theta = b$ reduzem-se a

$$C'_{a'} = \pi a'\, sen\,\theta \times 2a \qquad \text{(XXVII)}$$

(1) Applica-se a nota (2) a pag. 6.

Finalmente, sendo $a\ sen\ \theta = a'\ sen\ \theta = b$, as duas ultimas formulas dão

$$C'_a = C'_{a'} = 2\pi a^2\ sen\ \theta \qquad \text{(XXVIII)}$$

N'este caso, do mesmo modo que quando os cylindros se cortam orthogonalmente, sendo A'_s a superficie da abobada de aresta, e B'_s (formula β) a do barrete de clerigo correspondente, será

$$A'_s = C'_a + C'_{a'} - B'_s \qquad (\delta)$$

expressão que tomará differentes fórmas segundo as relações que houver entre a, a', b e $sen\ \theta$.

Recapitulação das formulas a empregar para a avaliação da superficie das abobadas

Cortando-se os cylindros orthogonalmente

Relações entre a, a' e b	Abobada de barrete de clerigo $B_s = 2(S_a + S_{a'})$		Abobada de aresta $A_s = C_a + C_{a'} - 2(S_a + S_{a'})$		Relações entre a, a' e b	Abobada de barrete de clerigo $B_s = 2(S_a + S_{a'})$		Abobada de aresta $A_s = C_a + C_{a'} - 2(S_a + S_{a'})$	
	S_a	$S_{a'}$	C_a	$C_{a'}$		S_a	$S_{a'}$	C_a	$C_{a'}$
$a > b$, $a' > b$, $a \lesseqgtr a'$	I	II	XV	XVI	$a = b$, $a' = b$	VII	VII	XXI	XXI
$a > b$, $a' > b$, $a = a'$	I	I	XV	XV	$a = b$, $a' < b$	III	VI	XIX	XVIII
$a > b$, $a' = b$	V	II	XV	XX	$a < b$, $a' < b$, $a \lesseqgtr a'$	III	IV	XVII	XVIII
$a > b$, $a' < b$	III	II	XV	XVIII	$a < b$, $a' < b$, $a = a'$	III	III	XVII	XVII

Os valores de S_a e $S_{a'}$ para a abobada de aresta são os indicados em cada caso correspondente da abobada de barrete de clerigo.

Cortando-se os cylindros obliquamente

Relações entre a, a', b, e $sen\ \theta$	Abobada de barrete de clerigo $B'_s = 2(S'_a + S'_{a'})$		Abobada de aresta $A'_s = C'_a + C'_{a'} - 2(S'_a + S'_{a'})$		Relações entre a, a', b, e $sen\ \theta$	Abobada de barrete de clerigo $B'_s = 2(S'_a + S'_{a'})$		Abobada de aresta $A'_s = C'_a + C'_{a'} - 2(S'_a + S'_{a'})$	
	S'_a	$S'_{a'}$	C'_a	$C'_{a'}$		S'_a	$S'_{a'}$	C'_a	$C'_{a'}$
$a\ sen\ \theta > b$, $a'\ sen\ \theta > b$, $a \lesseqgtr a'$	VIII	IX	XXII	XXIII	$a\ sen\ \theta = b$, $a'\ sen\ \theta = b$	XIV	XIV	XXVIII	XXVIII
$a\ sen\ \theta > b$, $a'\ sen\ \theta > b$, $a = a'$	VIII	VIII	XXII	XXII	$a\ sen\ \theta = b$, $a'\ sen\ \theta < b$	X	XIII	XXVI	XXV
$a\ sen\ \theta > b$, $a'\ sen\ \theta = b$	XII	IX	XXII	XXVII	$a\ sen\ \theta < b$, $a'\ sen\ \theta < b$, $a \lesseqgtr a'$	X	XI	XXIV	XXV
$a\ sen\ \theta > b$, $a'\ sen\ \theta < b$	X	IX	XXII	XXV	$a\ sen\ \theta < b$, $a'\ sen\ \theta < b$, $a = a'$	X	X	XXIV	XXIV

Os valores de S'_a e $S'_{a'}$ para a abobada de aresta são os indicados em cada caso correspondente da abobada de barrete de clerigo.

PARTE II

CAPACIDADE DAS ABOBADAS

ABOBADA DE BARRETE DE CLERIGO

Empregaremos na determinação das formulas para a avaliação da capacidade das abobadas a mesma ordem que seguimos ao tratar das superficies, começando pela abobada de barrete de clerigo no caso em que os cylindros se cortam orthogonalmente.

Cortando a abobada (fig. 1), por planos *mnpq* parallelos ao das impostas e infinitamente proximos entre si, ficará ella dividida em parallelipipedos infinitamente pequenos de base rectangular. Ora, para um dado valor de z a base do parallelipipedo elementar é

$$m\,n\,p\,q = m\,q \times m\,n$$

e como

$$m\,q = m'\,q' = 2x \qquad m\,n = p'\,q'' = 2\,y$$

será a capacidade do barrete de clerigo, em virtude dos valores (1) e (2)

$$B_c = 4\,\frac{a\,a'}{b^2}\int_0^b (b^2 - z^2)\,dz$$

ou

$$B_c = \frac{8}{3}\,a\,a'\,b \tag{I}$$

Quando as ellipses bases dos cylindros forem iguaes, ou $a = a'$, teremos

$$B_c = \frac{8}{3}\,a^2\,b \tag{II}$$

Se os cylindros forem de base circular, ou $a = a' = b$, será

$$B_c = \frac{8}{3}\,a^3 \tag{III}$$

Tratemos agora o caso em que os cylindros se cortam obliquamente (fig. 2), sendo θ o angulo agudo formado pelos seus eixos.

Se cortarmos a abobada por planos *mnpq* parallelos ao das impostas e infinitamente proximos entre si, ficará ella dividida em parallelipipedos infinitamente pequenos, cujas bases serão parallelogrammos. Para um dado valor de z a base do parallelipipedo elementar será

$$m\,n\,p\,q = m\,q \times n\,r = m\,q \times m\,n \times sen\,\theta$$

e como

$$m\,q = m'\,q' = 2\,x \qquad m\,n = p'\,q'' = 2\,y$$

a capacidade do barrete de clerigo, attendendo aos valores (1) e (2), será

$$B'_c = \frac{4\,a\,a'}{b^2}\,sen\,\theta \int_0^b (b^2 - z^2)\,dz$$

ou

$$B'_c = \frac{8}{3}\,a\,a'\,b\,sen\,\theta \tag{IV}$$

Se as ellipses bases dos cylindros forem iguaes, ou $a = a'$, teremos

$$B'_c = \frac{8}{3}\,a^2\,b\,sen\,\theta \tag{V}$$

Quando as bases dos cylindros forem circulos, ou $a = a' = b$,

$$B'_c = \frac{8}{3}\,a^3\,sen\,\theta \tag{VI}$$

ABOBADA DE ARESTA

A capacidade da abobada de aresta é igual á somma das dos cylindros menos a do barrete de clerigo por elles formado.

O cylindro C_a que tem de comprimento $2a'$ e por base a ellipse aba_1 terá de capacidade

$$C_a = \frac{\pi\, a\, b}{2}\text{(1)} \times 2\, a' = \pi\, a\, a'\, b$$

o que tem de comprimento $2\, a$ e por base a ellipse $a'\, b\, a'_1$ terá de capacidade

$$C_{a'} = \frac{\pi\, a'\, b}{2} \times 2\, a = \pi\, a\, a'\, b$$

e a do barrete de clerigo é $$B_c = \frac{8}{3}\, a\, a'\, b$$

sendo portanto a da abobada de aresta $$A_c = \left(2\, \pi - \frac{8}{3}\right) a\, a'\, b$$

ou, substituindo π por 3,141592 $$A_c = 3{,}616517\, a\, a'\, b \qquad \text{(VII)}$$

Se as bases dos cylindros forem iguaes, ou $a = a'$,

$$A_c = 3{,}616517\, a^2\, b \qquad \text{(VIII)}$$

Finalmente, se estas bases forem circulos, ou $a = a' = b$,

$$A_c = 3{,}616517\, a^3 \qquad \text{(IX)}$$

No caso dos cylindros se cortarem obliquamente (fig. 2), sendo θ o angulo agudo formado pelos seus eixos, ainda a capacidade da abobada de aresta é igual á somma das capacidades dos cylindros menos a do barrete de clerigo por elles formado.

O cylindro que tem por base a ellipse $a\, b\, a_1$ e cujo comprimento é $h' = 2\, a'\, sen\, \theta$ terá de capacidade

$$C'_a = \frac{\pi\, a\, b}{2} \times 2\, a'\, sen\, \theta = \pi\, a\, a'\, b\, sen\, \theta,$$

o que tem por base a ellipse $a'\, b\, a'_1$ e de comprimento $h = 2\, a\, sen\, \theta$ terá de capacidade

$$C'_{a'} = \frac{\pi\, a'\, b}{2} \times 2\, a\, sen\, \theta = \pi\, a\, a'\, b\, sen\, \theta$$

e a do barrete de clerigo é $$B'_c = \frac{8}{3}\, a\, a'\, b\, sen\, \theta$$

sendo portanto a da abobada de aresta $$A'_c = \left(2\, \pi - \frac{8}{3}\right) a\, a'\, b\, sen\, \theta$$

ou, pondo em vez de π, 3,141592 $$A'_c = 3{,}616517\, a\, a'\, b\, sen\, \theta \qquad \text{(X)}$$

formula que no caso dos cylindros terem bases iguaes, ou $a = a'$, se reduz a

$$A'_c = 3{,}616517\, a^2\, b\, sen\, \theta \qquad \text{(XI)}$$

e quando os cylindros forem de secção circular a

$$A'_c = 3{,}616517\, a^3\, sen\, \theta \qquad \text{(XII)}$$

(1) A area da semi-ellipse cujos eixos são $2\, a$ e $2\, b$ é $\frac{\pi\, a\, b}{2}$

CAPITULO II

CYLINDROS DE BASE HYPERBOLICA

PARTE I

SUPERFICIE DAS ABOBADAS

ABOBADA DE BARRETE DE CLERIGO

Quando os cylindros se cortarem orthogonalmente referiremos a abobada (fig. 3) a tres planos coordenados, dos quaes o dos (xy) será o das impostas, e os dos (xz) e dos (yz) os das directrizes dos cylindros, que estão rebatidas em (xy).

Sendo b a altura do vertice da abobada acima do plano das impostas, $Oa = Oa_1 = a$ as ordenadas segundo o mesmo plano ou á distancia b do vertice na hyperbole aba_1 que tem $2M$ para eixo transverso e $2N$ para eixo não transverso, e $Oa' = Oa'_1 = a'$ as ordenadas segundo o plano das impostas ou á distancia b do vertice na hyperbole $a'ba'_1$ que tem $2P$ para eixo transverso e $2Q$ para eixo não transverso, as equações d'estas curvas serão,

em $a\,b\,a_1$ $$M^2x^2 - N^2(M + b - z)^2 = -M^2N^2 \quad [1]$$

e em $a'\,b\,a'_1$ $$P^2y^2 - Q^2(P + b - z)^2 = -P^2Q^2$$

das quaes se tira
$$x = \frac{N}{M}\sqrt{(M + b - z)^2 - M^2} \tag{1}$$

$$y = \frac{Q}{P}\sqrt{(P + b - z)^2 - P^2} \tag{2}$$

Os arcos elementares, ds da primeira d'estas curvas e ds_1 da segunda, serão

$$ds = \sqrt{dx^2 + dz^2} = dz\sqrt{\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + 1} \qquad ds_1 = \sqrt{dy^2 + dz^2} = dz\sqrt{\left(\frac{dy}{dz}\right)^2 + 1}$$

expressões que, pela substituição na primeira de $\left(\frac{dx}{dz}\right)$ tirado da equação (1) e na segunda de $\left(\frac{dy}{dz}\right)$ tirado da equação (2), se transformam em

$$ds = dz\sqrt{\frac{(M^2 + N^2)(M + b - z)^2 - M^4}{M^2[(M + b - z)^2 - M^2]}} \tag{3}$$

$$ds_1 = dz\sqrt{\frac{(P^2 + Q^2)(P + b - z)^2 - P^4}{P^2[(P + b - z)^2 - P^2]}} \tag{4}$$

Cortando-se a abobada por planos $mnpq$ parallelos ao das impostas e infinitamente proximos entre si, cada um dos triangulos curvos que se projectam em AoA', $A'oA_1$, etc., ficará dividido em rectangulos infinitamente pequenos, sendo a

[1] A equação da hyperbole referida ao centro como origem das coordenadas (fig. 4) e expressa nos eixos é

$$M^2x^2 - N^2z^2 = -M^2N^2$$

mas transportando a origem a uma distancia $M + b$ da primitiva e contando os z positivos para o vertice é $x = x'$, $z = M + b - z'$, e então virá

$$M^2x^2 - N^2(M + b - z)^2 = -M^2N^2$$

area de cada um d'estes igual ao producto da intersecção do plano secante horisontal no triangulo curvo multiplicada pelo elemento ds da hyperbole directriz do cylindro a que o triangulo pertencer.

As areas dos rectangulos $A'A_1qm$ e $AA'mn$ são

$$A'\,A_1\,q\,m = m\,q \times ds_1 \qquad A\,A'\,m\,n = m\,n \times ds$$

mas como, para um mesmo z,

$$m\,q = m'\,q' = 2\,x \qquad m\,n = p'\,q'' = 2\,y$$

será

$$A'\,A_1\,q\,m = 2\,x \times ds_1 \qquad A\,A'\,m\,n = 2\,y \times ds$$

e pondo na primeira d'estas igualdades os valores (1) e (4) e na segunda os valores (2) e (3), virá

$$A'\,o\,A_1 = \frac{2\,N\sqrt{P^2+Q^2}}{M\,P}\int_o^b dz \sqrt{\frac{\left[(P+b-z)^2 - \frac{P^4}{P^2+Q^2}\right]\left[(M+b-z)^2 - M^2\right]}{(P+b-z)^2 - P^2}} \tag{5}$$

$$A\,o\,A' = \frac{2\,Q\sqrt{M^2+N^2}}{M\,P}\int_o^b dz \sqrt{\frac{\left[(M+b-z)^2 - \frac{M^4}{M^2+N^2}\right]\left[(P+b-z)^2 - P^2\right]}{(M+b-z)^2 - M^2}} \tag{6}$$

As expressões a que se chega não podem ser integradas exactamente, mas é fóra de duvida que podemos desenvol-vel-as em serie pela formula de Maclaurin

$$F(x) = F(o) + F'(o)\,x + F''(o)\,\frac{x^2}{1\,.\,2} + \ldots\ldots + F^n(o)\,\frac{x^n}{1\,.\,2\ldots.n}$$

que dá

$$\int F(x)\,dx = F(o)\,x + F'(o)\,\frac{x^2}{1\,.\,2} + F''(o)\,\frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots\ldots + F^n(o)\,\frac{x^{n+1}}{1\,.\,2\ldots.(n+1)}$$

e então fazendo

$$2\,(M+P+2\,b) = A\,; \quad 6\,(P-M)\,b + 6\,\frac{a^2\,M^2}{N^2} + 4\,M\,P + \frac{P^2\,Q^2}{P^2+Q^2} = B\,; \quad 2\left[(P-M)\,b^2 + 2\,(P+b)\,\frac{a^2\,M^2}{N^2} + \frac{P^2\,Q^2(M+b)}{P^2+Q^2}\right] = C\,;$$

$$\frac{a'^2\,P^2}{Q^2} \times \frac{a^2\,M^2}{N^2} + \frac{P^2\,Q^2}{P^2+Q^2} \times \frac{a^2\,M^2}{N^2} = D\,; \qquad 2\,(P+b) = A'\,; \quad \text{e} \quad b^2 + 2\,P\,b = B'$$

resultará

$$F(o) = \sqrt{\frac{D}{B'}}\,; \qquad F'(o) = \frac{A'\,D - B'\,C}{2\,B'^2\sqrt{\frac{D}{B'}}}\,; \qquad F''(o) = \frac{4\,B'\,D\,(BB'-D) + (3\,A'\,D + B'\,C)\,(A'\,D - B'C)}{4\,B'^{\,3}\,D\sqrt{\frac{D}{B'}}}\,;\ \text{etc.}$$

e se fizermos

$$2\,(M+P+2\,b) = A_1\,; \quad 6\,(M-P)\,b + 6\,\frac{a'^2\,P^2}{Q^2} + 4\,M\,P + \frac{M^2\,N^2}{M^2+N^2} = B_1\,; \quad 2\left[(M-P)b^2 + 2(M+b)\,\frac{a'^2\,P^2}{Q^2} + \frac{M^2N^2(P+b)}{M^2+N^2}\right] = C_1\,;$$

$$\frac{a^2\,M^2}{N^2} \times \frac{a'^2\,P^2}{Q^2} + \frac{M^2\,N^2}{M^2+N^2} \times \frac{a'^2\,P^2}{Q^2} = D_1\,; \qquad 2\,(M+b) = A_1'\,; \quad \text{e} \quad b^2 + 2\,M\,b = B_1'$$

resultará

$$F_1(o) = \sqrt{\frac{D_1}{B_1'}}\,; \qquad F_1'(o) = \frac{A_1'\,D_1 - B_1'\,C_1}{2\,B_1'^2\sqrt{\frac{D_1}{B_1'}}}\,; \qquad F_1''(o) = \frac{4\,B_1'\,D_1\,(B_1\,B_1' - D_1) + (3\,A_1'\,D_1 + B_1'\,C_1)\,(A_1'\,D_1 - B_1'\,C_1)}{4\,B_1'^3\,D_1\sqrt{\frac{D_1}{B_1'}}}\,;\ \text{etc.}$$

d'onde provem, se representarmos por S_a a superficie do triangulo curvo cuja base é $2a$ e por S_a' a superficie do que tem por base $2\,a'$

$$S_a = \frac{2\,N\sqrt{P^2+Q^2}}{M\,P}\left[F(o)\,b + F'(o)\,\frac{b^2}{2} + F''(o)\,\frac{b^3}{2\,.\,3} + \ldots.\right] \tag{I}$$

$$S_{a'} = \frac{2\,Q\sqrt{M^2+N^2}}{M\,P}\left[F_1(o)\,b + F_1'(o)\,\frac{b^2}{2} + F_1''(o)\,\frac{b^3}{2\,.\,3} + \ldots.\right] \tag{II}$$

Quando as hyperboles directrizes dos cylindros tiverem os eixos transversos iguaes, ou $M = P$, as equações (5) e (6) transformar-se-hão respectivamente em

$$A'\,o\,A_1 = \frac{2\,N\sqrt{M^2+Q^2}}{M^2}\int_o^b dz \sqrt{z^2 - 2\,(M+b)z + \left(2\,M\,b + b^2 + \frac{M^2\,Q^2}{M^2+Q^2}\right)}$$

$$A\,o\,A' = \frac{2\,Q\sqrt{M^2+N^2}}{M^2}\int_o^b dz \sqrt{z^2 - 2\,(M+b)\,z + \left(2\,M\,b + b^2 + \frac{M^2\,N^2}{M^2+N^2}\right)}$$

ou

$$S_a = \frac{N M^2}{\sqrt{M^2+Q^2}} \left\{ \frac{(M+b)\sqrt{\frac{a^2 M^2}{N^2} + \frac{M^2 Q^2}{M^2+Q^2}} - M\sqrt{\frac{M^2 Q^2}{M^2+Q^2}}}{\frac{M^4}{M^2+Q^2}} + 2{,}302585 \times lg.\, \frac{\left(\sqrt{\frac{M-\sqrt{\frac{M^4}{M^2+Q^2}}}{M+\sqrt{\frac{M^4}{M^2+Q^2}}}} - 1\right)\left(\sqrt{\frac{M+b-\sqrt{\frac{M^4}{M^2+Q^2}}}{M+b+\sqrt{\frac{M^4}{M^2+Q^2}}}} + 1\right)}{\left(\sqrt{\frac{M-\sqrt{\frac{M^4}{M^2+Q^2}}}{M+\sqrt{\frac{M^4}{M^2+Q^2}}}} + 1\right)\left(\sqrt{\frac{M+b-\sqrt{\frac{M^4}{M^2+Q^2}}}{M+b+\sqrt{\frac{M^4}{M^2+Q^2}}}} - 1\right)} \right\} \quad \text{(III)}$$ [1]

$$S_{a'} = \frac{Q M^2}{\sqrt{M^2+N^2}} \left\{ \frac{(M+b)\sqrt{\frac{a'^2 M^2}{Q^2} + \frac{M^2 N^2}{M^2+N^2}} - M\sqrt{\frac{M^2 N^2}{M^2+N^2}}}{\frac{M^4}{M^2+N^2}} + 2{,}302585 \times lg.\, \frac{\left(\sqrt{\frac{M-\sqrt{\frac{M^4}{M^2+N^2}}}{M+\sqrt{\frac{M^4}{M^2+N^2}}}} - 1\right)\left(\sqrt{\frac{M+b-\sqrt{\frac{M^4}{M^2+N^2}}}{M+b+\sqrt{\frac{M^4}{M^2+N^2}}}} + 1\right)}{\left(\sqrt{\frac{M-\sqrt{\frac{M^4}{M^2+N^2}}}{M+\sqrt{\frac{M^4}{M^2+N^2}}}} + 1\right)\left(\sqrt{\frac{M+b-\sqrt{\frac{M^4}{M^2+N^2}}}{M+b+\sqrt{\frac{M^4}{M^2+N^2}}}} - 1\right)} \right\} \quad \text{(IV)}$$

formulas das quaes a (III), quando a hyperbole $a'ba'_1$, alem de ter o mesmo eixo transverso que aba_1, for equilatera ou $M = Q$, se transforma em

$$S_a = \frac{M N \sqrt{2}}{2} \left\{ \left[\frac{(M+b)\sqrt{2a'^2+M^2}}{M^2} - 1\right]\sqrt{2} + 2{,}302585 \times lg.\, \frac{\left(\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} - 1\right)\left(\sqrt{\frac{2b+M(2-\sqrt{2})}{2b+M(2+\sqrt{2})}} + 1\right)}{\left(\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} + 1\right)\left(\sqrt{\frac{2b+M(2-\sqrt{2})}{2b+M(2+\sqrt{2})}} - 1\right)} \right\} \quad \text{(V)}$$

e a (IV) quando a hyperbole aba_1 for equilatera, ou $M = N$,

$$S_{a'} = \frac{M Q \sqrt{2}}{2} \left\{ \left[\frac{(M+b)\sqrt{2a^2+M^2}}{M^2} - 1\right]\sqrt{2} + 2{,}302585 \times lg.\, \frac{\left(\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} - 1\right)\left(\sqrt{\frac{2b+M(2-\sqrt{2})}{2b+M(2+\sqrt{2})}} + 1\right)}{\left(\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} + 1\right)\left(\sqrt{\frac{2b+M(2-\sqrt{2})}{2b+M(2+\sqrt{2})}} - 1\right)} \right\} \quad \text{(VI)}$$

Finalmente, quando as hyperboles forem equilateras e iguaes, ou $M = N = P = Q$, será $S_a = S_{a'}$ e as formulas (V) e (VI) tornar-se-hão identicas porque então é $a = a'$.

A superficie total do barrete de clerigo, sejam quaes forem as relações entre os eixos das hyperboles directrizes dos cylindros, será

$$B_t = 2\,(S_a + S_{a'})$$

No caso dos cylindros se cortarem obliquamente, de modo que θ seja o angulo agudo formado pelas geratrizes de um com as do outro, referiremos a abobada (fig. 5) a tres planos coordenados, dos quaes o dos (xy) será o das impostas e os dos (xz) e dos (yz) os das hyperboles directrizes dos cylindros, as quaes, assim como as secções rectas dos mesmos, estão rebatidas no plano (xy).

Se b for a altura do vertice da abobada acima do plano das impostas sendo $Oa = Oa_1 = a$ as ordenadas, segundo o mesmo plano, da hyperbole aba_1, e $Oa' = Oa'_1 = a'$ as ordenadas, tambem segundo o plano das impostas, da hyperbole $a'ba'_1$, as equações d'estas curvas são, como já deduzimos no principio do presente capitulo,

em $a\,b\,a_1$
$$M^2 x^2 - N^2 (M + b - z)^2 = - M^2 N^2$$

e em $a'\,ba'_1$
$$P^2 y^2 - Q^2 (P + b - z)^2 = - P^2 Q^2$$

das quaes se tira
$$x = \frac{N}{M}\sqrt{(M + b - z)^2 - M^2} \quad (7)$$

$$y = \frac{Q}{P}\sqrt{(P + b - z)^2 - P^2} \quad (8)$$

Ora, para um mesmo valor de z temos que a x da directriz aba_1 corresponde x_1 da secção recta $\alpha b \alpha_1$ e a y da directriz $a'ba'_1$ corresponde y_1 da secção recta $\alpha' b \alpha'_1$, sendo as relações entre aquellas quantidades

$$x_1 = x\, sen\theta \qquad y_1 = y\, sen\theta$$

e se nas equações das directrizes substituirmos x em funcção de x_1 e y em funcção de y_1 as equações das secções rectas serão,

em $\alpha b \alpha_1$
$$M^2 x_1^2 - N^2\, sen^2\,\theta \times (M + b - z)^2 = - M^2 \times N^2\, sen^2\,\theta$$

e em $\alpha'\,b\,\alpha'_1$
$$P^2 y_1^2 - Q^2\, sen^2\,\theta \times (P + b - z)^2 = - P^2 \times Q^2\, sen^2\,\theta$$

(1) Vidè nota 3.ª

Os arcos elementares das secções rectas são,

em $\alpha b \alpha_1$
$$ds' = dz\sqrt{\left(\frac{dx_1}{dz}\right)^2 + 1}$$

e em $\alpha' b \alpha'_1$
$$ds'_1 = dz\sqrt{\left(\frac{dy_1}{dz}\right)^2 + 1}$$

expressões que evidentemente se obtêem de (3) e (4) substituindo n'estas N e Q por $Nsen\theta$ e $Qsen\theta$, e

então
$$ds' = dz\sqrt{\frac{(M^2 + N^2 sen^2\theta)(M + b - z)^2 - M^4}{M^2[(M + b - z)^2 - M^2]}} \tag{9}$$

$$ds'_1 = dz\sqrt{\frac{(P^2 + Q^2 sen^2\theta)(P + b - z)^2 - P^4}{P^2[(P + b - z)^2 - P^2]}} \tag{10}$$

Cortando a abobada por planos parallelos ao das impostas e infinitamente proximos entre si, cada um dos triangulos curvos AoB, BoA', etc., ficará dividido em parallelogrammos infinitamente pequenos, sendo a area de cada um d'estes igual ao producto da intersecção do plano secante no triangulo curvo multiplicada pelo elemento ds da secção recta do cylindro a que o triangulo pertencer.

Empregando o plano secante $mnpq$ as areas dos parallelogrammos $BA'qm$ e $ABmn$ exprimir-se-hão por

$$BA'qm = mq \times ds'_1 \qquad ABmn = mn \times ds'$$

mas como, para um mesmo valor de z,

$$mq = m'q' = 2x \qquad mn = p'q'' = 2y$$

será
$$BA'qm = 2x \times ds'_1 \qquad ABmn = 2y \times ds'$$

e pondo na primeira d'estas igualdades os valores (7) e (10) e na segunda os valores (8) e (9) virá

$$BoA' = \frac{2N\sqrt{P^2 + Q^2 sen^2\theta}}{MP}\int_0^b dz\sqrt{\frac{\left[(P + b - z)^2 - \frac{P^4}{P^2 + Q^2 sen^2\theta}\right]\left[(M + b - z)^2 - M^2\right]}{(P + b - z)^2 - P^2}} \tag{11}$$

$$AoB = \frac{2Q\sqrt{M^2 + N^2 sen^2\theta}}{MP}\int_0^b dz\sqrt{\frac{\left[(M + b - z)^2 - \frac{M^4}{M^2 + N^2 sen^2\theta}\right]\left[(P + b - z)^2 - P^2\right]}{(M + b - z)^2 - M^2}} \tag{12}$$

As expressões obtidas, do mesmo modo que aquellas a que chegámos no caso analogo a este, mas cortando-se os cylindros em angulo recto, não podem ser integradas exactamente. Ainda poderemos, como então, desenvolvel-as em serie pela formula de Maclaurin, e fazendo

$$2(M + P + 2b) = A; \qquad 6(P - M)b + 6\frac{a^2 M^2}{N^2} + 4MP + \frac{P^2 Q^2 sen^2\theta}{P^2 + Q^2 sen^2\theta} = B;$$

$$2\left[(P - M)b^2 + 2(P + b)\frac{a^2 M^2}{N^2} + \frac{P^2 Q^2 sen^2\theta(M + b)}{P^2 + Q^2 sen^2\theta}\right] = C;$$

$$\frac{a'^2 P^2}{Q^2} \times \frac{a^2 M^2}{N^2} + \frac{P^2 Q^2 sen^2\theta}{P^2 + Q^2 sen^2\theta} \times \frac{a^2 M^2}{N^2} = D; \qquad 2(P + b) = A'; \qquad b^2 + 2Pb = B'$$

resultará
$$F(o) = \sqrt{\frac{D}{B'}}; \qquad F'(o) = \frac{A'D - B'C}{2B'^2\sqrt{\frac{D}{B'}}}; \qquad F''(o) = \frac{4B'D(BB' - D) + (3A'D + B'C)(A'D - B'C)}{4B'^3 D\sqrt{\frac{D}{B'}}}; \text{ etc.}$$

e se fizermos
$$2(M + P + 2b) = A_1; \qquad 6(M - P)b + 6\frac{a'^2 P^2}{Q^2} + 4MP + \frac{M^2 N^2 sen^2\theta}{M^2 + N^2 sen^2\theta} = B_1;$$

$$2\left[(M - P)b^2 + 2(M + b)\frac{a'^2 P^2}{Q^2} + \frac{M^2 N^2 sen^2\theta(P + b)}{M^2 + N^2 sen^2\theta}\right] = C_1;$$

$$\frac{a^2 M^2}{N^2} \times \frac{a'^2 P^2}{Q^2} + \frac{M^2 N^2 sen^2\theta}{M^2 + N^2 sen^2\theta} \times \frac{a'^2 P^2}{Q^2} = D_1; \qquad 2(M + b) = A_1'; \qquad b^2 + 2Mb = B_1'$$

resultará
$$F_1(o) = \sqrt{\frac{D_1}{B_1'}}; \qquad F_1'(o) = \frac{A_1' D_1 - B_1' C_1}{2B_1'^2\sqrt{\frac{D_1}{B_1'}}}; \qquad F_1''(o) = \frac{4B_1' D_1(B_1 B_1' - D_1) + (3A_1' D_1 + B_1' C_1)(A_1' D_1 - B_1' C_1)}{4B_1'^3 D_1\sqrt{\frac{D_1}{B_1'}}}$$

e se representarmos por S'_a a superficie do triangulo curvo que tem de base $2a$, e por $S'_{a'}$ a superficie do que tem de base $2a'$, virá

$$S'_a = \frac{2N\sqrt{P^2+Q^2 sen^2\theta}}{MP}\left[F(o)\,b + F'(o)\frac{b^2}{2} + F''(o)\frac{b^3}{2\,.\,3} + \ldots\right] \qquad \text{(VII)}$$

$$S'_{a'} = \frac{2Q\sqrt{M^2+N^2 sen^2\theta}}{MP}\left[F_1(o)\,b + F_1'(o)\frac{b^2}{2} + F_1''(o)\frac{b^3}{2\,.\,3} + \ldots\right] \qquad \text{(VIII)}$$

Quando as hyperboles directrizes dos cylindros tiverem os eixos transversos iguaes, ou $M=P$, as equações (11) e 12) transformar-se-hão respectivamente em

$$B\,o\,A' = \frac{2N\sqrt{M^2+Q^2 sen^2\theta}}{M^2}\int_o^b dz\sqrt{z^2 - 2(M+b)z + \left(2Mb + b^2 + \frac{M^2Q^2 sen^2\theta}{M^2+Q^2 sen^2\theta}\right)}$$

$$A\,o\,B = \frac{2Q\sqrt{M^2+N^2 sen^2\theta}}{M^2}\int_o^b dz\sqrt{z^2 - 2(M+b)z + \left(2Mb + b^2 + \frac{M^2N^2 sen^2\theta}{M^2+N^2 sen^2\theta}\right)}$$

ou

$$S'_a = \frac{NM^2}{\sqrt{M^2+Q^2 sen^2\theta}}\left\{\frac{(M+b)\sqrt{\frac{a^2M^2}{N^2}+\frac{M^2Q^2 sen^2\theta}{M^2+Q^2 sen^2\theta}} - M\sqrt{\frac{M^2Q^2 sen^2\theta}{M^2+Q^2 sen^2\theta}}}{\frac{M^4}{M^2+Q^2 sen^2\theta}} + 2{,}302585\times lg.\frac{\left(\sqrt{\frac{M-\sqrt{\frac{M^4}{M^2+Q^2 sen^2\theta}}}{M+\sqrt{\frac{M^4}{M^2+Q^2 sen^2\theta}}}}-1\right)\left(\sqrt{\frac{M+b-\sqrt{\frac{M^4}{M^2+Q^2 sen^2\theta}}}{M+b+\sqrt{\frac{M^4}{M^2+Q^2 sen^2\theta}}}}+1\right)}{\left(\sqrt{\frac{M-\sqrt{\frac{M^4}{M^2+Q^2 sen^2\theta}}}{M+\sqrt{\frac{M^4}{M^2+Q^2 sen^2\theta}}}}+1\right)\left(\sqrt{\frac{M+b-\sqrt{\frac{M^4}{M^2+Q^2 sen^2\theta}}}{M+b+\sqrt{\frac{M^4}{M^2+Q^2 sen^2\theta}}}}-1\right)}\right\} \qquad \text{(IX)}$$ [1]

$$S'_{a'} = \frac{QM^2}{\sqrt{M^2+N^2 sen^2\theta}}\left\{\frac{(M+b)\sqrt{\frac{a'^2M^2}{Q^2}+\frac{M^2N^2 sen^2\theta}{M^2+N^2 sen^2\theta}} - M\sqrt{\frac{M^2N^2 sen^2\theta}{M^2+N^2 sen^2\theta}}}{\frac{M^4}{M^2+N^2 sen^2\theta}} + 2{,}302585\times lg.\frac{\left(\sqrt{\frac{M-\sqrt{\frac{M^4}{M^2+N^2 sen^2\theta}}}{M+\sqrt{\frac{M^4}{M^2+N^2 sen^2\theta}}}}-1\right)\left(\sqrt{\frac{M+b-\sqrt{\frac{M^4}{M^2+N^2 sen^2\theta}}}{M+b+\sqrt{\frac{M^4}{M^2+N^2 sen^2\theta}}}}+1\right)}{\left(\sqrt{\frac{M-\sqrt{\frac{M^4}{M^2+N^2 sen^2\theta}}}{M+\sqrt{\frac{M^4}{M^2+N^2 sen^2\theta}}}}+1\right)\left(\sqrt{\frac{M+b-\sqrt{\frac{M^4}{M^2+N^2 sen^2\theta}}}{M+b+\sqrt{\frac{M^4}{M^2+N^2 sen^2\theta}}}}-1\right)}\right\} \qquad \text{(X)}$$

formulas das quaes a (IX) quando $M=Q$, e a (X) quando $M=N$, se transformam respectivamente em

$$S'_a = \frac{NM}{\sqrt{1+sen^2\theta}}\left\{\frac{(M+b)\sqrt{a'^2+(a'^2+M^2)\,sen^2\theta} - M^2 sen\,\theta}{M^2}\times\sqrt{1+sen^2\theta} + 2{,}302585\times lg.\frac{\left(\sqrt{\frac{\sqrt{1+sen^2\theta}-1}{\sqrt{1+sen^2\theta}+1}}-1\right)\left(\sqrt{\frac{(M+b)\sqrt{1+sen^2\theta}-M}{(M+b)\sqrt{1+sen^2\theta}+M}}+1\right)}{\left(\sqrt{\frac{\sqrt{1+sen^2\theta}-1}{\sqrt{1+sen^2\theta}+1}}+1\right)\left(\sqrt{\frac{(M+b)\sqrt{1+sen^2\theta}-M}{(M+b)\sqrt{1+sen^2\theta}+M}}-1\right)}\right\} \qquad \text{(XI)}$$

$$S'_{a'} = \frac{QM}{\sqrt{1+sen^2\theta}}\left\{\frac{(M+b)\sqrt{a^2+(a^2+M^2)\,sen^2\theta} - M^2 sen\,\theta}{M^2}\times\sqrt{1+sen^2\theta} + 2{,}302585\times lg.\frac{\left(\sqrt{\frac{\sqrt{1+sen^2\theta}-1}{\sqrt{1+sen^2\theta}+1}}-1\right)\left(\sqrt{\frac{(M+b)\sqrt{1+sen^2\theta}-M}{(M+b)\sqrt{1+sen^2\theta}+M}}+1\right)}{\left(\sqrt{\frac{\sqrt{1+sen^2\theta}-1}{\sqrt{1+sen^2\theta}+1}}+1\right)\left(\sqrt{\frac{(M+b)\sqrt{1+sen^2\theta}-M}{(M+b)\sqrt{1+sen^2\theta}+M}}-1\right)}\right\} \qquad \text{(XII)}$$

Finalmente, quando as hyperboles directrizes forem equilateras e iguaes, ou $M=N=P=Q$, será $S'_a=S'_{a'}$ e as formulas (XI) e (XII) tornar-se-hão identicas porque então tambem será $a=a'$.

A superficie total do barrete de clerigo, sejam quaes forem as relações entre os eixos das hyperboles directrizes e o angulo formado pelos cylindros, será

$$B'_s = 2\,(S'_a + S'_{a'})$$

ABOBADA DE ARESTA

A superficie da abobada de aresta é igual á somma das superficies dos cylindros que a formam menos a do barrete de clerigo por elles formado. Quando os cylindros se cortarem orthogonalmente (fig. 3), se for C_a a superficie do cylindro cuja base é a hyperbole aba_1 e que tem de comprimento $2a'$, e $C_{a'}$ a superficie do cylindro cuja base é a hyperbole $a'ba'_1$ e que tem de comprimento $2a$, teremos, sendo

$$e = \frac{\sqrt{M^2+N^2}}{M}; \qquad cos\,\varphi = \frac{M}{M+b}; \qquad sen\,\varphi = \frac{aM}{N(M+b)}; \qquad tg\,\varphi = \frac{a}{N}; \qquad \text{e ainda} \qquad \varphi = arc.\,tg.\,\frac{a}{N}$$

[1] Applica-se a nota 3.ª

$$C_a = 2a' \times \left[\begin{array}{l} 2Me\,tg\varphi - \dfrac{M\varphi}{e}\left[1 + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{e}\right)^2 + \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{e^2}\right)^2 + \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{1}{e^3}\right)^2 + \ldots + \dfrac{1}{m}\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\cdots\dfrac{2m-3}{2m-2}\cdot\dfrac{1}{e^{m-1}}\right)^2\right]^{(1)} \\ -\dfrac{M\,sen\,\varphi}{e} \times \left\{ \begin{array}{l} \cos\varphi\left[\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{e}\right)^2 + \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{e^2}\right)^2 + \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{1}{e^3}\right)^2 + \ldots + \dfrac{1}{m}\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\cdots\dfrac{2m-3}{2m-2}\cdot\dfrac{1}{e^{m-1}}\right)^2\right] \\ + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\cos^3\varphi}{3}\left[\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{e^2}\right)^2 + \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{1}{e^3}\right)^2 + \ldots\ldots + \dfrac{1}{m}\left(\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\cdots\dfrac{2m-3}{2m-2}\cdot\dfrac{1}{e^{m-1}}\right)^2\right] \\ + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{\cos^5\varphi}{5}\left[\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{1}{e^3}\right)^2 + \ldots\ldots + \dfrac{1}{m}\left(\dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{7}{8}\cdots\dfrac{2m-3}{2m-2}\cdot\dfrac{1}{e^{m-1}}\right)^2\right] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\cdots\dfrac{2m-5}{2m-4}\cdot\dfrac{\cos^{2m-3}\varphi}{2m-3}\left[\dfrac{1}{m}\left(\dfrac{2m-3}{2m-2}\cdot\dfrac{1}{e^{m-1}}\right)^2\right] \end{array} \right. \end{array} \right] \quad (XIII)$$

e sendo $e' = \dfrac{\sqrt{P^2 + Q^2}}{P}$; $\quad \cos\varphi' = \dfrac{P}{P+b}$; $\quad sen\,\varphi' = \dfrac{a'P}{Q(P+b)}$; $\quad tg\varphi' = \dfrac{a'}{Q}$; e ainda $\varphi' = arc.\,tg.\,\dfrac{a'}{Q}$

$$C_{a'} = 2a \times \left[\begin{array}{l} 2Pe'\,tg\varphi' - \dfrac{P\varphi'}{e'}\left[1 + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{e'}\right)^2 + \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{e'^2}\right)^2 + \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{1}{e'^3}\right)^2 + \ldots + \dfrac{1}{m}\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\cdots\dfrac{2m-3}{2m-2}\cdot\dfrac{1}{e'^{m-1}}\right)^2\right] \\ -\dfrac{P\,sen\,\varphi'}{e'} \times \left\{ \begin{array}{l} \cos\varphi'\left[\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{e'}\right)^2 + \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{e'^2}\right)^2 + \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{1}{e'^3}\right)^2 + \ldots + \dfrac{1}{m}\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\cdots\dfrac{2m-3}{2m-2}\cdot\dfrac{1}{e'^{m-1}}\right)^2\right] \\ + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\cos^3\varphi'}{3}\left[\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{e'^2}\right)^2 + \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{1}{e'^3}\right)^2 + \ldots\ldots + \dfrac{1}{m}\left(\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\cdots\dfrac{2m-3}{2m-2}\cdot\dfrac{1}{e'^{m-1}}\right)^2\right] \\ + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{\cos^5\varphi'}{5}\left[\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{1}{e'^3}\right)^2 + \ldots\ldots + \dfrac{1}{m}\left(\dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{7}{8}\cdots\dfrac{2m-3}{2m-2}\cdot\dfrac{1}{e'^{m-1}}\right)^2\right] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\cdots\dfrac{2m-5}{2m-4}\cdot\dfrac{\cos^{2m-3}\varphi'}{2m-3}\left[\dfrac{1}{m}\left(\dfrac{2m-3}{2m-2}\cdot\dfrac{1}{e'^{m-1}}\right)^2\right] \end{array} \right. \end{array} \right] \quad (XIV)$$

Quando a hyperbole aba_1 for equilatera, ou $M = N$, será na formula (XIII)

$$e = \sqrt{2}; \quad \cos\varphi = \frac{M}{M+b}; \quad sen\,\varphi = \frac{a}{M+b}; \quad tg\,\varphi = \frac{a}{M}; \quad \text{e} \quad \varphi = arc.\,tg.\,\frac{a}{M}$$

e quando a hyperbole $a'ba'_1$ for equilatera, ou $P = Q$, será na formula (XIV)

$$e' = \sqrt{2}; \quad \cos\varphi' = \frac{P}{P+b}; \quad sen\,\varphi' = \frac{a'}{P+b}; \quad tg\,\varphi' = \frac{a'}{P}; \quad \text{e} \quad \varphi' = arc.\,tg.\,\frac{a'}{P}$$

A superficie A_s da abobada de aresta, sendo B_s a do barrete de clerigo que lhe corresponde, para quaesquer relações entre os eixos das hyperboles directrizes será

$$A_s = C_a + C_{a'} - B_s$$

Quando os cylindros se cortarem obliquamente sob o angulo agudo θ (fig. 5), ainda a superficie da abobada de aresta é igual á somma das superficies d'elles menos a do barrete de clerigo correspondente. N'este caso a superficie de cada cylindro é igual ao producto da geratriz pela secção recta e assim representaremos por C'_a aquelle que tem por geratriz $2a'$ e por secção recta $\alpha b \alpha_1$, representando por $C'_{a'}$ o que tem por geratriz $2a$ e por secção recta $\alpha' b \alpha'_1$.

Por occasião de estudarmos a abobada de barrete de clerigo, no caso dos cylindros se cortarem obliquamente, viu-se que a secção recta $\alpha b \alpha_1$ é hyperbole do mesmo modo que a directriz aba_1, tendo ambas o mesmo eixo transverso $2M$ e correspondendo o eixo não transverso $2N sen\theta$ da primeira ao eixo não transverso $2N$ da segunda; viu-se tambem que a secção recta $\alpha' b \alpha'_1$ é hyperbole do mesmo modo que a directriz $a'ba'_1$, tendo ambas o mesmo eixo transverso $2P$ e correspondendo o eixo não transverso $2Q sen\theta$ da primeira ao eixo não transverso $2Q$ da segunda. É pois claro que para obter C'_a basta pôr na formula (XIII) $N sen\theta$ em vez de N, e para se obter $C'_{a'}$ pôr na formula (XIV) $Q sen\theta$ em vez de Q, e assim teremos C'_a dado pela formula (XIII) na qual será

$$e = \frac{\sqrt{M^2 + N^2 sen^2\theta}}{M}; \quad \cos\varphi = \frac{M}{M+b}; \quad sen\,\varphi = \frac{aM}{N(M+b)\,sen\,\theta}; \quad tg\,\varphi = \frac{a}{N\,sen\,\theta}; \quad \varphi = arc.\,tg\,\frac{a}{N\,sen\,\theta}$$

e $C'_{a'}$ dado pela formula (XIV) na qual será

$$e' = \frac{\sqrt{P^2 + Q^2 sen^2\theta}}{P}; \quad \cos\varphi' = \frac{P}{P+b}; \quad sen\,\varphi' = \frac{a'P}{Q(P+b)\,sen\,\theta}; \quad tg\,\varphi' = \frac{a'}{Q\,sen\,\theta}; \quad \varphi' = arc.\,tg\,\frac{a'}{Q\,sen\,\theta};$$

A superficie total da abobada de aresta será

$$A'_s = C'_a + C'_{a'} - B'_s$$

(1) Vide nota 4.ª

PARTE II

CAPACIDADE DAS ABOBADAS

ABOBADA DE BARRETE DE CLERIGO

Quando os cylindros se cortarem orthogonalmente (fig. 3), pelo emprego de planos secantes parallelos ao das impostas e infinitamente proximos entre si ficará a abobada dividida em parallelipipedos de base rectangular e infinitamente pequenos.

Para um dado valor de z a intersecção do plano secante será o rectangulo

$$mnpq = mq \times mn$$

e como $$mq = m'\,q' = 2x \qquad mn = p'\,q'' = 2y$$

será a capacidade do barrete de clerigo, em virtude dos valores (1) e (2),

$$B_c = 4\frac{N\,Q}{M\,P}\int_o^b dz \sqrt{[(M+b-z)^2 - M^2]\,[(P+b-z)^2 - P^2]} \tag{13}$$

A expressão achada não póde integrar-se exactamente, mas desenvolvel-a-hemos pela formula de Maclaurin, sendo

$$F(o) = b\sqrt{(b+2\,M)\,(b+2\,P)}\,; \qquad F'(o) = -\frac{(M+P+b)\,b + (b+2\,M)\,(b+2\,P)}{\sqrt{(b+2\,M)\,(b+2\,P)}}\,;$$

$$F''(o) = \frac{(M+P+b)\,[b^2+3\,(M+P)\,b+8\,M\,P] + (b+2\,M)\,(b+2\,P)\,b}{(b+2\,M)\,(b+2\,P)\sqrt{(b+2\,M)\,(b+2\,P)}}$$

e será, portanto, $$B_c = 4\frac{N\,Q}{M\,P}\left[F(o)\,b + F'(o)\frac{b^2}{2} + F''(o)\frac{b^3}{2\,.\,3} + \cdots\right] \tag{I}$$

Se as hyperboles directrizes tiverem os eixos transversos iguaes, ou $M = P$, a equação (13) transformar-se em

$$B_c = 4\frac{N\,Q}{M^2}\int_o^b [(M+b-z)^2 - M^2]\,dz$$

ou $$B_c = 4\frac{N\,Q}{M^2}\left(\frac{b^3}{3} + M\,b^2\right) \tag{II}$$

Continuando as duas hyperboles directrizes a terem os eixos transversos iguaes, se aba_1 for equilatera

ou $N = M$ $$B_c = 4\frac{Q}{M}\left(\frac{b^3}{3} + M\,b^2\right) \tag{III}$$

e se for $a'ba'_1$ a equilatera, ou $Q = M$

$$B_c = 4\frac{N}{M}\left(\frac{b^3}{3} + M\,b^2\right) \tag{IV}$$

Se as duas directrizes forem iguaes, ou $M = P$ e $N = Q$,

$$B_c = 4\frac{N^2}{M^2}\left(\frac{b^3}{3} + M\,b^2\right) \tag{V}$$

e, finalmente, se alem de iguaes forem equilateras, ou $M = N = P = Q$,

$$B_c = 4\left(\frac{b^3}{3} + M\,b^2\right) \tag{VI}$$

No caso dos cylindros se cortarem obliquamente sob o angulo agudo θ (fig. 5), pelo emprego dos planos secantes parallelos ao das impostas e infinitamente proximos entre si, ficará a abobada dividida em parallelipipedos infinitamente pequenos, tendo por bases parallelogrammos.

Para um determinado valor de z a base do parallelipipedo elementar será

$$m\,n\,p\,q = m\,q \times n\,r = m\,q \times m\,n \times sen\,\theta$$

e como $$m\,q = m'\,q' = 2\,x \qquad m\,n = p'\,q'' = 2\,y$$

será a capacidade do barrete de clerigo, em virtude dos valores (7) e (8),

$$B'_c = 4\,\frac{N\,Q}{M\,P}\,sen\,\theta \int_0^b dz \sqrt{[(M+b-z)^2 - M^2]\,[(P+b-z)^2 - P^2]}$$

e, se compararmos esta igualdade com a (13), é claro que será

$$B'_c = 4\,\frac{N\,Q}{M\,P}\,sen\,\theta \left[F(o)\,b + F'(o)\,\frac{b^2}{2} + F''(o)\,\frac{b^3}{2\,.\,3} + \dots \right] \tag{VII}$$

tendo agora $F(o)$, $F'(o)$, $F''(o)$, etc., os mesmos valores que achámos terem n'aquelle caso.
Se as hyperboles directrizes tiverem os eixos transversos iguaes, ou $M = P$, será

$$B'_c = 4\,\frac{NQ}{M^2}\,sen\,\theta \int_0^b [(M+b-z)^2 - M^2]\,dz$$

ou $$B'_c = 4\,\frac{N\,Q}{M^2}\,sen\,\theta \left(\frac{b^3}{3} + M\,b^2\right) \tag{VIII}$$

Continuando as duas hyperboles directrizes a terem os eixos transversos iguaes, se $a b a_1$ for equilatera,

ou $N = M$, $$B'_c = 4\,\frac{Q}{M}\,sen\,\theta \left(\frac{b^3}{3} + M\,b^2\right) \tag{IX}$$

e se for $a'\,b\,a'_1$ a equilatera $$B'_c = 4\,\frac{N}{M}\,sen\,\theta \left(\frac{b^3}{3} + M\,b^2\right) \tag{X}$$

Se as duas directrizes forem iguaes, ou $M = P$ e $N = Q$,

$$B'_c = 4\,\frac{N^2}{M^2}\,sen\,\theta \left(\frac{b^3}{3} + Mb^2\right) \tag{XI}$$

e finalmente, se alem de iguaes forem equilateras, ou $M = N = P = Q$,

$$B'_c = 4\,sen\,\theta \left(\frac{b^3}{3} + M\,b^2\right) \tag{XII}$$

ABOBADA DE ARESTA

A capacidade da abobada de aresta é igual á somma das capacidades dos cylindros que a formam, menos a do barrete de clerigo por elles formado.
Quando os cylindros se cortarem orthogonalmente, se for C_a o que tem de comprimento $2\,a'$ e por base o segmento de hyperbole $a\,b\,a_1$, e $C_{a'}$ o que tem de comprimento $2\,a$ e por base o segmento de hyperbole $a'\,b\,a'_1$, será

$$C_a = M\,N \left[\frac{(M+b)\,a}{M\,N} + \frac{lg.\,\frac{a\,M + b\,N}{a\,M - b\,N}}{0{,}4342945} \right] \times 2\,a' \tag{XIII}$$ (1)

e

$$C_{a'} = P\,Q \left[\frac{(P+b)\,a'}{P\,Q} + \frac{lg.\,\frac{a'\,P + b\,Q}{a'\,P - b\,Q}}{0{,}4342945} \right] \times 2\,a \tag{XIV}$$

(1) Vidè nota 5.ª

formulas das quaes a (XIII) quando a hyperbole aba_1 for equilatera, ou $M = N$, e a (XIV) quando a hyperbole $a'ba'_1$ for equilatera, ou $P = Q$, se reduzem respectivamente a

$$C_a = M^2 \left[\frac{(M+b)\,a}{M^2} + \frac{lg. \dfrac{a+b}{a-b}}{0,4342945} \right] \times 2\,a' \tag{XV}$$

$$C_{a'} = P^2 \left[\frac{(P+b)\,a'}{P^2} + \frac{lg. \dfrac{a'+b}{a'-b}}{0,4342945} \right] \times 2\,a \tag{XVI}$$

A capacidade da abobada de aresta é $\quad A_c = C_a + C_{a'} - B_c$

Quando os cylindros se cortarem obliquamente sob o angulo agudo θ (fig. 5), se representarmos por C'_a o que tem por base o segmento de hyperbole aba_1 e para geratriz $2a'$, tendo portanto para altura $h = 2a' sen\theta$, e por $C'_{a'}$ o que tem para base o segmento de hyperbole $a'ba'_1$ e para geratriz $2a$, tendo por isso de altura $h' = 2a sen\theta$, é claro que será

$$C'_a = M\,N \left[\frac{(M+b)\,a}{M\,N} + \frac{lg. \dfrac{a\,M + b\,N}{a\,M - b\,N}}{0,4342945} \right] \times 2\,a'\,sen\,\theta \tag{XVII}$$

$$C'_{a'} = P\,Q \left[\frac{(P+b)\,a'}{P\,Q} + \frac{lg. \dfrac{a'\,P + b\,Q}{a'\,P - b\,Q}}{0,4342945} \right] \times 2\,a\,sen\,\theta \tag{XVIII}$$

formulas das quaes a (XVII) quando a hyperbole aba_1 for equilatera, ou $M = N$, e a (XVIII) quando a hyperbole $a'ba'_1$ for equilatera, ou $P = Q$, se reduzem respectivamente a

$$C'_a = M^2 \left[\frac{(M+b)\,a}{M^2} + \frac{lg. \dfrac{a+b}{a-b}}{0,4342945} \right] \times 2\,a'\,sen\,\theta \tag{XIX}$$

$$C'_{a'} = P^2 \left[\frac{(P+b)\,a'}{P^2} + \frac{lg. \dfrac{a'+b}{a'-b}}{0,4342945} \right] \times 2\,a\,sen\,\theta \tag{XX}$$

A capacidade da abobada de aresta será

$$A'_c = C'_a + C'_{a'} - B'_c$$

CAPITULO III

CYLINDROS DE BASE PARABOLICA

PARTE I

SUPERFICIE DAS ABOBADAS

ABOBADA DE BARRETE DE CLERIGO

No caso dos cylindros se cortarem orthogonalmente referiremos a abobada (fig. 6), a tres planos coordenados, dos quaes o dos *(xy)* será o das impostas, e os dos *(xz)* e dos *(yz)* os das directrizes dos cylindros, que estão rebatidas em *(xy)*.

Sendo b a altura do vertice da abobada acima do plano das impostas, $Oa = Oa_1 = a$ as ordenadas segundo o mesmo plano, ou á distancia b do vertice, na parabola aba_1, e $Oa' = Oa'_1 = a'$ as ordenadas tambem segundo o plano das impostas ou á distancia b do vertice na parabola $a'ba'_1$, as equações d'estas curvas serão,

em aba_1
$$x^2 = \frac{a^2}{b}(b-z) \text{ [1]}$$

e em $a'ba'_1$
$$y^2 = \frac{a'^2}{b}(b-z)$$

das quaes se tira
$$x = a\sqrt{\frac{b-z}{b}} \qquad (1)$$

$$y = a'\sqrt{\frac{b-z}{b}} \qquad (2)$$

Os arcos elementares, ds da primeira d'estas curvas e ds_1 da segunda, são

$$ds = \sqrt{dx^2 + dz^2} = dz\sqrt{\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + 1}\,; \qquad ds_1 = \sqrt{dy^2 + dz^2} = dz\sqrt{\left(\frac{dy}{dz}\right)^2 + 1}$$

e substituindo na primeira d'estas igualdades $\left(\frac{dx}{dz}\right)$ tirado da equação (1) e na segunda $\left(\frac{dy}{dz}\right)$ tirado da equação (2) resultará

$$ds = dz\sqrt{\frac{(a^2 + 4\,b^2) - 4\,bz}{4\,b\,(b-z)}} \qquad (3)$$

$$ds_1 = dz\sqrt{\frac{(a'^2 + 4\,b^2) - 4\,b\,z}{4\,b\,(b-z)}} \qquad (4)$$

[1] A equação da parabola (fig. 7) referida ao vertice como origem das coodernadas e expressa em eixos orthogonaes de modo que o dos x seja tangente á curva é

$$x^2 = 2\,pz$$

mas se referirmos a curva a novos eixos orthogonaes e parallelos aos primitivos, ficando a nova origem sobre o antigo eixo dos z e á distancia b do vertice, contando-se os novos z positivamente para o lado d'aquelle ponto, será $x = x'$, $z = b - z'$, e a nova equação é

$$x^2 = 2\,p\,(b-z)$$

e como a $z = o$ corresponde $x = a$, temos que $a^2 = 2\,p\,b$, d'onde se tira $2\,p = \frac{a^2}{b}$, e a equação da parabola será

$$x^2 = \frac{a^2}{b}\,(b-z)$$

Cortando a abobada por planos *mnpq* parallelos ao das impostas e infinitamente proximos entre si, cada um dos triangulos curvos que se projectam em AoA', $A'oA_1$, etc., ficará dividido em rectangulos infinitamente pequenos, sendo a area de cada um d'estes igual ao producto da intersecção do plano secante horisontal no triangulo curvo multiplicada pelo elemento ds da parabola directriz do cylindro a que o triangulo pertencer.

As areas dos rectangulos $A'A_1qm$ e $AA'mn$ são

$$A'A_1qm = mq \times ds_1 \qquad AA'mn = mn \times ds$$

mas como, para um mesmo valor de z,

$$mq = m'q' = 2x \qquad mn = p'q'' = 2y$$

será

$$A'A_1qm = 2x \times ds_1 \qquad AA'mn = 2y \times ds$$

e pondo na primeira d'estas igualdades os valores (1) e (4), e na segunda os valores (2) e (3), as areas dos triangulos curvos serão

$$A'oA_1 = \frac{a}{b}\int_0^b dz\sqrt{(a'^2+4b^2)-4bz} = \frac{a}{b} \times \frac{1}{6b}\left[(a'^2+4b^2)^{\frac{3}{2}} - a'^3\right]$$ [1]

$$AoA' = \frac{a'}{b}\int_0^b dz\sqrt{(a^2+4b^2)-4bz} = \frac{a'}{b} \times \frac{1}{6b}\left[(a^2+4b^2)^{\frac{3}{2}} - a^3\right]$$

ou, representando por S_a a superficie do triangulo de base $2a$ e por S_a' a do triangulo de base $2a'$,

$$S_a = \frac{a}{6b^2}\left[(a'^2+4b^2)^{\frac{3}{2}} - a'^3\right] \tag{I}$$

$$S_{a'} = \frac{a'}{6b^2}\left[(a^2+4b^2)^{\frac{3}{2}} - a^3\right] \tag{II}$$

A formula (I) é applicavel com qualquer relação que exista entre a' e b, e o mesmo succede á formula (II) com qualquer relação entre a e b; mas quando $a'=b$, a primeira, e quando $a=b$, a segunda, tomam respectivamente os valores

$$S_a = 1{,}696723\, ab \tag{III}$$

$$S_{a'} = 1{,}696723\, a'b \tag{IV}$$

A superficie total do barrete de clerigo será

$$B_c = 2(S_a + S_{a'})$$

Quando os cylindros se cortarem obliquamente, sendo θ o angulo agudo formado pelas geratrizes de um com as do outro, referiremos a abobada (fig. 8) a tres planos coordenados dos quaes o dos (xy) será o das impostas e os dos (xz) e dos (yz) os das parabolas directrizes dos cylindros, as quaes, assim como as secções rectas dos mesmos, estão rebatidas no plano (xy).

Sendo b a altura do vertice da abobada acima do plano das impostas, $Oa = Oa_1 = a$ as ordenadas, segundo o mesmo plano, da parabola aba_1, e $Oa' = Oa'_1 = a'$ as ordenadas, nas mesmas condições, da parabola $a'ba'_1$, as equações d'estas curvas serão, como deduzimos para o caso dos cylindros se cortarem a angulo recto,

em aba_1

$$x^2 = \frac{a^2}{b}(b-z)$$

e em $a'ba'_1$

$$y^2 = \frac{a'^2}{b}(b-z)$$

das quaes se tira

$$x = a\sqrt{\frac{b-z}{b}} \tag{5}$$

$$y = a'\sqrt{\frac{b-z}{b}} \tag{6}$$

Para um mesmo valor de z, a x da directriz aba_1 corresponde x_1 da secção recta $\alpha b\alpha_1$, e a y da directriz $a'ba'_1$ corresponde y_1 da secção recta $\alpha'b\alpha'_1$, sendo as relações entre aquellas quantidades

$$x_1 = x \operatorname{sen}\theta \qquad y_1 = y \operatorname{sen}\theta$$

(1) Vide nota 6.ª

e se nas equações das directrizes substituirmos x em funcção de x_1 e y em funcção de y_1 as equações das secções rectas serão,

em $\alpha\, b\, \alpha_1$
$$x_1^2 = \frac{a^2 \, sen^2 \theta}{b}(b - z)$$

e em $\alpha'\, b\, \alpha'_1$
$$y_1^2 = \frac{a'^2 \, sen^2 \theta}{b}(b - z)$$

Os arcos elementares das secções rectas são

em $\alpha\, b\, \alpha_1$
$$ds' = dz\sqrt{\left(\frac{dx_1}{dz}\right)^2 + 1}$$

e em $\alpha'\, b\, \alpha'_1$
$$ds'_1 = dz\sqrt{\left(\frac{dy_1}{dz}\right)^2 + 1}$$

expressões que é claro obterem-se de (3) e (4) quando n'estas substituirmos a e a' por $a\, sen\theta$ e $a' sen\theta$, e então

$$ds' = dz\sqrt{\frac{(a^2 \, sen^2 \theta + 4\, b^2) - 4\, bz}{4\, b\,(b - z)}} \qquad (7)$$

$$ds'_1 = dz\sqrt{\frac{(a'^2 \, sen^2 \theta + 4\, b^2) - 4\, bz}{4\, b\,(b - z)}} \qquad (8)$$

Cortando a abobada por planos parallelos ao das impostas e infinitamente proximos entre si, cada um dos triangulos curvos *AoB, BoA'*, etc., ficará dividido em parallelogrammos infinitamente pequenos, sendo a area de cada um d'estes igual ao producto da intersecção do plano secante horisontal no triangulo curvo multiplicada pelo elemento ds da secção recta do cylindro a que o triangulo pertencer.

Quando for empregado o plano secante *mnpq* as areas dos parallelogrammos *BA'qm* e *ABmn* exprimir-se-hão por

$$B\,A'\,q\,m = m\,q \times d\,s'_1 \qquad A\,B\,m\,n = m\,n \times d\,s'$$

mas como, para um mesmo valor de z,

$$m\,q = m'\,q' = 2\,x \qquad m\,n = p'\,q'' = 2\,y$$

será

$$B\,A'\,q\,m = 2\,x \times d\,s'_1 \qquad A\,B\,m\,n = 2\,y \times d\,s'$$

e pondo na primeira d'estas igualdades os valores (5) e (8) e na segunda os valores (6) e (7), virá

$$B\,o\,A' = \frac{a}{b}\int_0^b dz\sqrt{(a'^2 \, sen^2 \theta + 4\, b^2) - 4\, bz} = \frac{a}{b} \times \frac{1}{6\, b}\left[(a'^2 \, sen^2\theta + 4b^2)^{\frac{3}{2}} - (a' sen\theta)^3\right]$$ [1]

$$A\,o\,B = \frac{a'}{b}\int_0^b dz\sqrt{(a^2 \, sen^2 \theta + 4\, b^2) - 4\, bz} = \frac{a'}{b} \times \frac{1}{6\, b}\left[(a^2 \, sen^2 \theta + 4\, b^2)^{\frac{3}{2}} - (a \, sen\, \theta)^3\right]$$

ou, representando por S'_a a superficie do triangulo de base $2a$ e por $S'_{a'}$ a do triangulo de base $2a'$

$$S'_a = \frac{a}{6\, b^2}\left[(a'^2 \, sen^2 \theta + 4\, b^2)^{\frac{3}{2}} - (a' \, sen\, \theta)^3\right] \qquad (V)$$

$$S'_{a'} = \frac{a'}{6\, b^2}\left[(a^2 \, sen^2 \theta + 4\, b^2)^{\frac{3}{2}} - (a \, sen\, \theta)^3\right] \qquad (VI)$$

A superficie do barrete de clerigo será

$$B'_s = 2\,(S'_a + S'_{a'})$$

ABOBADA DE ARESTA

Quando os cylindros se cortarem orthogonalmente se for C_a (fig. 6) a superficie do que tem de comprimento $2a'$ e para base a parabola aba_1, e $C_{a'}$ a superficie do que tem de comprimento $2a$ e para base a parabola $a'ba'_1$, teremos

$$C_a = \left[\sqrt{a^2 + 4\, b^2} + \frac{a^2}{2b} \times \frac{lg.\dfrac{2\, b + \sqrt{a^2 + 4\, b^2}}{a}}{0{,}4342945}\right] \times 2a' \qquad (VII)$$ [2]

$$C_{a'} = \left[\sqrt{a'^2 + 4\, b^2} + \frac{a'^2}{2b} \times \frac{lg.\dfrac{2\, b + \sqrt{a'^2 + 4\, b^2}}{a'}}{0{,}4342945}\right] \times 2\, a \qquad (VIII)$$

[1] Applica-se a nota 6.ª
[2] Vide nota 7.ª

formulas das quaes a primeira quando $a=b$, e a segunda quando $a'=b$, se transformam respectivamente em

$$C_a = 5{,}9158\, a\, a' \tag{IX}$$

$$C_{a'} = 5{,}9158\, a\, a' \tag{X}$$

e se for A_s a superficie da abobada de aresta, sendo B_s a do barrete de clerigo que lhe corresponde, será

$$A_s = C_a + C_{a'} - B_s$$

Cortando-se os cylindros obliquamente (fig. 8) sendo θ o angulo agudo que fazem as geratrizes de um com as do outro, representaremos por C'_a a superficie do que tem por geratriz $2a'$ e por secção recta a parabola $\alpha b \alpha_1$, representando por $C'_{a'}$ a superficie do que tem a geratriz $2a$ e para secção recta a parabola $\alpha' b \alpha'_1$, e será

$$C'_a = \left[\sqrt{a^2\, sen^2\, \theta + 4\, b^2} + \frac{a^2\, sen^2\, \theta}{2\, b} \times \frac{lg.\, \dfrac{2\, b + \sqrt{a^2\, sen^2\, \theta + 4\, b^2}}{a\, sen\, \theta}}{0{,}4342945} \right] \times 2\, a' \text{ (1)} \tag{XI}$$

$$C'_{a'} = \left[\sqrt{a'^2\, sen^2\, \theta + 4\, b^2} + \frac{a'^2\, sen^2\, \theta}{2\, b} \times \frac{lg.\, \dfrac{2\, b + \sqrt{a'^2\, sen^2\, \theta + 4\, b^2}}{a'\, sen\, \theta}}{0{,}4342945} \right] \times 2\, a \tag{XII}$$

e se for A'_s a superficie da abobada de aresta, sendo B'_s a do barrete de clerigo que lhe corresponde, será

$$A'_s = C'_a + C'_{a'} - B'_s$$

(1) Applica-se a nota 7.ª

BIBLIOTHECA
REGIMENTAL
DE INFANTERIA 1

PARTE II

CAPACIDADE DAS ABOBADAS

ABOBADA DE BARRETE DE CLERIGO

Quando os cylindros se cortam orthogonalmente (fig. 6), se empregarmos planos secantes parallelos ao das impostas e infinitamente proximos entre si dividil-a-hemos em parallelipipedos infinitamente pequenos de base rectangular.

A um dado valor de z corresponde o plano secante $mnpq$ que corta a abobada segundo o rectangulo

$$m\,n\,p\,q = m\,q \times m\,n$$

e como

$$m\,q = m'\,q' = 2\,x \qquad m\,n = p'\,q'' = 2\,y$$

a capacidade do barrete de clerigo, em virtude dos valores (1) e (2), será

$$B_c = \frac{4\,a\,a'}{b}\int_0^b (b-z)\,d\,z$$

ou

$$B_c = 2\,a\,a'\,b \qquad \text{(I)}$$

Se os dois cylindros forem iguaes, ou $a = a'$, $\qquad B_c = 2\,a^2\,b \qquad$ (II)

e finalmente, se for $a = a' = b$ $\qquad B_c = 2\,a^3 \qquad$ (III)

No caso dos cylindros se cortarem obliquamente sob o angulo agudo θ (fig. 8), pelo emprego dos planos secantes ficará a abobada dividida em parallelipipedos cujas bases serão parallelogrammos.

Para um determinado valor de z a base do parallelipipedo elementar será

$$m\,n\,p\,q = m\,q \times n\,r = m\,q \times m\,n \times \operatorname{sen}\theta$$

e como

$$m\,q = m'\,q' = 2\,x \qquad m\,n = p'\,q'' = 2\,y$$

a capacidade do barrete de clerigo, em virtude dos valores (5) e (6), será

$$B'_c = \frac{4\,a\,a'\operatorname{sen}\theta}{b}\int_0^b (b-z)\,d\,z$$

ou

$$B'_c = 2\,a a'\,b \operatorname{sen}\theta \qquad \text{(IV)}$$

que, no caso dos cylindros serem iguaes, ou $a = a'$, se reduz a

$$B'_c = 2\,a^2\,b \operatorname{sen}\theta \qquad \text{(V)}$$

e finalmente, quando $a = a' = b$ $\qquad B'_c = 2\,a^3 \operatorname{sen}\theta \qquad$ (VI)

ABOBADA DE ARESTA

Quando os cylindros se cortarem orthogonalmente, se for C_a a capacidade do que tem de comprimento $2a'$ e para base a parabola aba_1, e $C_{a'}$ a capacidade do que tem de comprimento $2a$ e para base a parabola $a'ba'_1$, teremos

$$C_a = \frac{4}{3}\,a\,b\,^{(1)} \times 2\,a' = \frac{8}{3}\,a\,a'\,b\,^{(2)} \qquad C_{a'} = \frac{4}{3}\,a'\,b \times 2\,a = \frac{8}{3}\,a\,a'\,b\,^{(2)}$$

(1) Vide nota 8.ª

(2) O cylindro de secção parabolica que tiver por geratrizes dois lados de um rectangulo é igual ao cylindro de secção parabolica que tiver por geratrizes os outros dois lados d'elle, quando ambos elevem os vertices das directrizes á mesma altura acima do rectangulo, seja cada um limitado pelos planos perpendiculares ao rectangulo e em cada cylindro as mencionadas geratrizes sejam equadistantes do vertice da directriz. Cada um dos alludidos cylindros é igual ao barrete de clerigo que se construir sobre o mesmo rectangulo, formado por cylindros de secção elliptica, e do qual o vertice diste tanto do plano como distam os vertices das parabolas directrizes dos outros cylindros. (Cap. I, parte II, form. I.)

e como a capacidade A_c da abobada de aresta, se for B_c a do barrete de clerigo correspondente, é

$$A_c = C_a + C_{a'} - B_c$$

será
$$A_c = \frac{10}{3} a a' b \qquad \text{(VII)}$$

que no caso dos cylindros serem iguaes, ou $a = a'$, se reduz a

$$A_c = \frac{10}{3} a^2 b \qquad \text{(VIII)}$$

e ainda se for $a = a' = b$
$$A_c = \frac{10}{3} a^3 \qquad \text{(IX)}$$

Se os cylindros se cortarem obliquamente sob o angulo agudo θ (fig. 8), sendo C'_a o que tem por base a parabola aba_1 e por geratriz $2a'$, sendo portanto a sua altura $h = 2a' sen\theta$, e $C'_{a'}$ o cylindro que tem por base a parabola $a'ba'_1$ e por geratriz $2a$, tendo de altura $h' = 2a\ sen\theta$, será

$$C'_a = \frac{4}{3} a b \times 2 a' sen\,\theta = \frac{8}{3} a a' b\, sen\,\theta \text{ [1]} \qquad C'_{a'} = \frac{4}{3} a' b \times 2 a\, sen\,\theta = \frac{8}{3} a a' b\, sen\,\theta \text{ [1]}$$

e, se representarmos por A'_c a capacidade da abobada de aresta e por B'_c a do barrete de clerigo que lhe corresponde, virá

$$A'_c = C'_a + C'_{a'} - B'_c$$

d'onde resulta
$$A'_c = \frac{10}{3} a a' b\, sen\,\theta \qquad \text{(X)}$$

que, no caso dos cylindros serem iguaes ou $a = a'$, se reduz a

$$A'_c = \frac{10}{3} a^2 b\, sen\,\theta \qquad \text{(XI)}$$

e, finalmente, se for $a = a' = b$
$$A'_c = \frac{10}{3} a^3\, sen\,\theta \qquad \text{(XII)}$$

[1] Quando em vez de rectangulo for parallelogrammo a base da abobada, do mesmo modo tem logar a nota [2] a pag. 25, (Cap. I, parte II, form. IV.)

CAPITULO IV

CYLINDROS DE BASE OGIVAL

PARTE I

SUPERFICIE DAS ABOBADAS

ABOBADA DE BARRETE DE CLERIGO

Do mesmo modo que nos capitulos precedentes, começaremos pelo caso em que os cylindros (fig. 9) se cortam orthogonalmente, referindo ainda a abobada a tres planos coordenados dos quaes o dos *(xy)* será o das impostas e os dos *(xz)* e dos *(yz)* os das directrizes dos cylindros, que estão rebatidas no plano *(xy)*.

Se for b a altura do vertice da abobada acima do plano das impostas, $Oa = Oa_1 = a$ a abscissa segundo o mesmo plano ou á distancia b do vertice na ogiva aba_1 formada por dois arcos de circulo de raio r, e $Oa' = Oa'_1 = a'$ a abscissa nas mesmas condições para a ogiva $a'ba'_1$ formada por dois arcos de circulo de raio R, as equações dos arcos que formam as ogivas serão

para ab e a_1b $\qquad (x + r - a)^2 + z^2 = r^2$ [1]

e para $a'b$ e a'_1b $\qquad (y + R - a')^2 + z^2 = R^2$

das quaes se tira $\qquad x = a - r + \sqrt{r^2 - z^2}$ [2] $\qquad$ (1)

$$y = a' - R + \sqrt{R^2 - z^2} \qquad (2)$$

Os arcos elementares, ds da directriz aba_1 e ds_1 de $a'ba'_1$, são

$$ds = dz\sqrt{\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + 1} \qquad ds_1 = dz\sqrt{\left(\frac{dy}{dz}\right)^2 + 1}$$

expressões das quaes a primeira pela substituição de $\left(\frac{dx}{dz}\right)$ tirado da equação (1) e a segunda pela substituição de $\left(\frac{dy}{z}\right)$ tirado da equação (2) se transformam em

$$ds = \frac{rdz}{\sqrt{r^2 - z^2}} \qquad (3)$$

$$ds_1 = \frac{Rdz}{\sqrt{R^2 - z^2}} \qquad (4)$$

Cortando a abobada por planos parallelos ao das impostas e infinitamente proximos entre si, cada um dos triangulos curvos que se projectam em AoA', $A'oA_1$, etc., ficará dividido em rectangulos infinitamente pequenos, sendo a area de cada um d'estes igual ao producto da intersecção do plano secante horisontal no triangulo curvo multiplicada pelo elemento ds da ogiva directriz do cylindro a que o triangulo pertencer.

As areas dos rectangulos $A'A_1qm$ e $AA'mn$ são

$$A'\,A_1\,qm = mq \times ds_1 \qquad A\,A'mn = mn \times ds$$

[1] Equação do circulo cujo centro está no eixo dos x á distancia $r - a$ da origem das coordenadas.

[2] Dos dois arcos que constituem a semi-circumferencia o menor é que entra na formação da ogiva. É claro que será este o arco que para um dado valor de z tem o menor dos dois valores de x, e como o menor valor de x é o que tem o radical affecto do signal (+), por isso o conservámos, desprezando o outro.

mas como, para um mesmo valor de z, $\quad mq = m'q' = 2x \qquad mn = p'q'' = 2y$

será $\quad A'A_1\,qm = 2x \times ds_1 \qquad AA'\,mn = 2y \times ds$

e pondo na primeira d'estas igualdades os valores (1) e (4), e na segunda os valores (2) e (3), resultará para os triangulos

$$A'oA_1 = 2R\int_0^b \left[a - r + \sqrt{r^2 - z^2}\right] \frac{dz}{\sqrt{R^2 - z^2}}$$

$$A\,o\,A' = 2r\int_0^b \left[a' - R + \sqrt{R^2 - z^2}\right] \frac{dz}{\sqrt{r^2 - z^2}}$$

ou, se representarmos por S_a a superficie do triangulo curvo cuja base é $2a$ e por $S_{a'}$ a superficie do que tem por base $2a'$

$$S_a = \left[\begin{aligned} &\left(arc.\ sen\frac{b}{r}\right)\left[r^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{r^2}{R}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{r^3}{R^2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{r^4}{R^3}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{m+1}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{r^{m+1}}{R^m}\right)^2\right] \quad (^1)\\ &-(r-a)\left\{\begin{aligned} &b\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{r}{R}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{r^2}{R^2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{r^3}{R^3}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{m+1}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{r^m}{R^m}\right)^2\right]\\ &+\frac{1}{2}\cdot\frac{b^3}{3}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{r}{R^2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{r^2}{R^3}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{m+1}\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{r^{m-1}}{R^m}\right)^2\right]\\ &+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{b^5}{5}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{R^2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{5}{6}\cdot\frac{r}{R^3}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{m+1}\left(\frac{5}{6}\cdots\frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{r^{m-2}}{R^m}\right)^2\right]\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{3}\cdot\frac{5}{6}\cdots\cdots\frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{b^{2m+1}}{2m+1}\left[\frac{1}{m+1}\left(\frac{1}{R^m}\right)^2\right] \end{aligned}\right\} \end{aligned}\right] \quad \text{(I)}$$

$$S_{a'} = \left[\begin{aligned} &\left(arc.\ sen.\ \frac{b}{R}\right)\left[R^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{R^2}{r}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{R^3}{r^2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{R^4}{r^3}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{m+1}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{R^{m+1}}{r^m}\right)^2\right]\\ &-(R-a')\left\{\begin{aligned} &b\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{R}{r}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{R^2}{r^2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{R^3}{r^3}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{m+1}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{R^m}{r^m}\right)^2\right]\\ &+\frac{1}{2}\cdot\frac{b^3}{3}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{R}{r^2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{R^2}{r^3}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{m+1}\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{R^{m-1}}{r^m}\right)^2\right]\\ &+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{b^5}{5}\left[\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{r^2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{5}{6}\cdot\frac{R}{r^3}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{m+1}\left(\frac{5}{6}\cdots\frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{R^{m-2}}{r^m}\right)^2\right]\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\cdots\frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{b^{2m+1}}{2m+1}\left[\frac{1}{m+1}\left(\frac{1}{r^m}\right)^2\right] \end{aligned}\right\} \end{aligned}\right] \quad \text{(II)}$$

Sendo b a altura commum das duas ogivas, para que ellas possam existir simultaneamente, conclue-se que entre os raios e as aberturas d'ellas deve haver a relação

$$a\,(2r - a) = a'\,(2R - a')$$

que se deduz de $\quad r^2 - b^2 = (r-a)^2 \qquad R^2 - b^2 = (R - a')^2$

vendo-se da primeira d'estas igualdades que se for $a = a'$ será $r = R$, e, reciprocamente, das duas ultimas que quando $r = R$ será $a = a'$.

No caso das ogivas serem iguaes, o que, como acabamos de ver, succederá em sendo $a = a'$ ou $r = R$, as equações dos seus arcos serão

$$(x + r - a)^2 + z^2 = r^2 \qquad (y + r - a)^2 + z^2 = r^2$$

d'onde se tira

$$x = y = a - r + \sqrt{r^2 - z^2}$$

$$ds = ds_1 = \frac{rdz}{\sqrt{r^2 - z^2}}$$

e por conseguinte $\quad A'oA_1 = AoA' = 2r\int_0^b \left[a - r + \sqrt{r^2 - z^2}\right]\frac{dz}{\sqrt{r^2 - z^2}}$

ou $$S_a = S_{a'} = 2r\left[b - (r-a) \times arc.\ sen\frac{b}{r}\right] \quad \text{(III)}$$

A superficie total do barrete de clerigo, para quaesquer relações entre r e R, será

$$B_s = 2\,(S_a + S_{a'})$$

(1) Vidè nota 9.ª

Quando os cylindros se cortarem obliquamente (fig. 10), de modo que θ seja o angulo agudo formado pelas geratrizes de um com as do outro, referiremos a abobada a tres planos coordenados dos quaes o dos *(xy)* será o das impostas e os dos *(xz)* e dos *(yz)* os das ogivas directrizes dos cylindros, as quaes, assim como as secções rectas dos mesmos, estão rebatidas no plano *(xy)*.

Se b for a altura do vertice da abobada acima do plano das impostas, sendo $Oa = Oa_1 = a$ as abscissas segundo o mesmo plano ou á distancia b do vertice na ogiva aba_1, e $Oa' = Oa'_1 = a'$ as abscissas nas mesmas condições para a ogiva $a'ba'_1$, as equações dos arcos de circulo que formam estas directrizes serão,

para ab e a_1b $$(x + r - a)^2 + z^2 = r^2 \quad [1]$$

e para $a'b$ e a'_1b $$(y + R - a')^2 + z^2 = R^2$$

das quaes se tira $$x = a - r + \sqrt{r^2 - z^2} \quad [2] \qquad (5)$$

$$y = a' - R + \sqrt{R^2 - z^2} \qquad (6)$$

Ora, para um mesmo valor de z, é claro que a x da directriz aba_1 corresponde x_1 da secção recta $\alpha b\alpha_1$, e a y da directriz $a'ba'_1$ corresponde y_1 da secção recta $\alpha' b\alpha'_1$, sendo as relações entre aquellas quantidades

$$x_1 = x \times \text{sen}\,\theta \qquad y_1 = y \times \text{sen}\,\theta$$

e se em (5) e (6) substituirmos x e y em funcção de x_1 e y_1 virá

$$x_1 = \text{sen}\,\theta\,(a - r + \sqrt{r^2 - z^2}) \qquad (7)$$

$$y_1 = \text{sen}\,\theta\,(a' - R + \sqrt{R^2 - z^2}) \qquad (8)$$

Os arcos elementares das secções rectas são,

em $\alpha b\alpha_1$ $$ds' = dz\sqrt{\left(\frac{dx_1}{dz}\right)^2 + 1}$$

e em $\alpha' b\alpha'_1$ $$ds'_1 = dz\sqrt{\left(\frac{dy_1}{dz}\right)^2 + 1}$$

expressões que, pela substituição na primeira de $\left(\frac{dx_1}{dz}\right)$ tirado da equação (7), e na segunda de $\left(\frac{dy_1}{dz}\right)$ tirado da equação (8), se transformam em

$$ds' = dz\sqrt{\frac{r^2 - z^2\cos^2\theta}{r^2 - z^2}} \qquad (9)$$

$$ds'_1 = dz\sqrt{\frac{R^2 - z^2\cos^2\theta}{R^2 - z^2}} \qquad (10)$$

Cortando a abobada por planos parallelos ao das impostas e infinitamente proximos entre si, cada um dos triangulos curvos AoB, BoA', etc., ficará dividido em parallelogrammos infinitamente pequenos, sendo a area de cada um d'estes igual ao producto da intersecção do plano secante horisontal no triangulo curvo multiplicada pelo elemento ds da secção recta do cylindro a que o triangulo pertencer.

Empregando o plano secante *mnpq*, as areas dos parallelogrammos $BA'qm$ e $ABmn$ exprimir-se-hão por

$$BA'qm = mq \times ds'_1 \qquad ABmn = mn \times ds'$$

mas como, para um mesmo valor de z,

$$mq = m'q' = 2x \qquad mn = p'q'' = 2y$$

será $$BA'qm = 2x \times ds'_1 \qquad ABmn = 2y \times ds'$$

e pondo na primeira d'estas igualdades os valores (5) e (10), e na segunda os valores (6) e (9), virá

$$BoA' = 2\int_0^b \left[a - r + \sqrt{r^2 - z^2}\right] \times dz\sqrt{\frac{R^2 - z^2\cos^2\theta}{R^2 - z^2}}$$

$$AoB = 2\int_0^b \left[a' - R + \sqrt{R^2 - z^2}\right] \times dz\sqrt{\frac{r^2 - z^2\cos^2\theta}{r^2 - z^2}}$$

[1] O mesmo que a nota [1] a pag. 27.
[2] O mesmo que a nota [2] a pag. 27.

ou, se representarmos por S'_a a superficie do triangulo curvo de base $2a$ e por $S'_{a'}$ a do triangulo curvo de base $2a'$, teremos

[1]

$$S'_a = 2R \times \left[\begin{aligned} & r \times \left[\begin{aligned} & \left(arc.\,sen\frac{b}{R}\right)\left\{1 - \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 A_1 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)^2 A_2 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\right)^2 A_3 + \frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\right)^2 A_4 + \ldots\ldots\right]\right\} \\ & + \frac{R-a'}{R}\left\{\begin{aligned} & \frac{b}{R}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 A_1 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)^2 A_2 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\right)^2 A_3 + \frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\right)^2 A_4 + \ldots\ldots\right] \\ & + \frac{1}{2}\cdot\frac{b^3}{3R^3}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^2 A_2 + \frac{1}{5}\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\right)^2 A_3 + \frac{1}{7}\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\right)^2 A_4 + \ldots\ldots\right] \\ & + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{b^5}{5R^5}\left[\frac{1}{5}\left(\frac{5}{6}\right)^2 A_3 + \frac{1}{7}\left(\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\right)^2 A_4 + \ldots\ldots\right] \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right. \end{aligned}\right] \\ & -(r-a) \times \left[\begin{aligned} & \left(arc.\,sen\frac{b}{R}\right)\left\{1 - \left[\left(\frac{1}{2}\cos\theta\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cos^2\theta\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cos^3\theta\right)^2 + \ldots + \frac{1}{2m-1}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2m-1}{2m}\cos^m\theta\right)^2\right]\right\} \\ & + \frac{R-a'}{R}\left\{\begin{aligned} & \frac{b}{R}\left[\left(\frac{1}{2}\cos\theta\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cos^2\theta\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cos^3\theta\right)^2 + \ldots + \frac{1}{2m-1}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2m-1}{2m}\cos^m\theta\right)^2\right] \\ & + \frac{1}{2}\cdot\frac{b^3}{3R^3}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\cos^2\theta\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cos^3\theta\right)^2 + \ldots\ldots + \frac{1}{2m-1}\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2m-1}{2m}\cos^m\theta\right)^2\right] \\ & + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{b^5}{5R^5}\left[\frac{1}{5}\left(\frac{5}{6}\cos^3\theta\right)^2 + \ldots\ldots + \frac{1}{2m-1}\left(\frac{5}{6}\cdots\frac{2m-1}{2m}\cos^m\theta\right)^2\right] \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\cdots\frac{2m-3}{2m-2}\cdot\frac{b^{2m-1}}{(2m-1)R^{2m-1}}\left[\frac{1}{2m-1}\left(\frac{2m-1}{2m}\cos^m\theta\right)^2\right] \end{aligned}\right. \end{aligned}\right] \end{aligned} \right] \quad \text{(IV)}$$

sendo

$$A_1 = \frac{R^2}{r^2} + \cos^2\theta; \qquad A_2 = \frac{R^4}{r^4} + \cos^4\theta - 2\frac{R^2}{r^2}\cos^2\theta; \qquad A_3 = \frac{R^6}{r^6} + \cos^6\theta - \left(\frac{R^4}{r^4}\cos^2\theta + \frac{R^2}{r^2}\cos^4\theta\right);$$

$$A_4 = \frac{R^8}{r^8} + \cos^8\theta - \frac{4}{5}\left(\frac{R^6}{r^6}\cos^2\theta + \frac{R^2}{r^2}\cos^6\theta\right) - \frac{2}{5}\cdot\frac{R^4}{r^4}\cos^4\theta;\ \text{etc.}$$

A superficie do triangulo curvo $S'_{a'}$ obter-se-ha pela formula (IV) trocando os logares de R e r e os de a e a'.

No caso de ser $\frac{R}{r} = \cos\theta$ a formula (IV) transforma-se em

[2]

$$S'_a = 2R \times \left[\begin{aligned} & r\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{b(R-a')}{R^2}\cdot\cos^2\theta + \left(1 - \frac{1}{2}\cos^2\theta\right) arc.\,sen\frac{b}{R}\right] \\ & -(r-a)\left\{ \begin{aligned} & \left(arc.\,sen\frac{b}{R}\right)\left\{1 - \left[\left(\frac{1}{2}\cos\theta\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cos^2\theta\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cos^3\theta\right)^2 + \ldots + \frac{1}{2m-1}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2m-1}{2m}\cos^m\theta\right)^2\right]\right\} \\ & + \frac{R-a'}{R}\left\{\begin{aligned} & \frac{b}{R}\left[\left(\frac{1}{2}\cos\theta\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cos^2\theta\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cos^3\theta\right)^2 + \ldots + \frac{1}{2m-1}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2m-1}{2m}\cos^m\theta\right)^2\right] \\ & + \frac{1}{2}\cdot\frac{b^3}{3R^3}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\cdot\cos^2\theta\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cos^3\theta\right)^2 + \ldots\ldots + \frac{1}{2m-1}\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2m-1}{2m}\cos^m\theta\right)^2\right] \\ & + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{b^5}{5R^5}\left[\frac{1}{5}\left(\frac{5}{6}\cdot\cos^3\theta\right)^2 + \ldots\ldots + \frac{1}{2m-1}\left(\frac{5}{6}\cdots\frac{2m-1}{2m}\cos^m\theta\right)^2\right] \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\cdots\frac{2m-3}{2m-2}\cdot\frac{b^{2m-1}}{(2m-1)R^{2m-1}}\left[\frac{1}{2m-1}\left(\frac{2m-1}{2m}\cos^m\theta\right)^2\right] \end{aligned}\right. \end{aligned}\right. \end{aligned} \right] \quad \text{(V)}$$

e a superficie do triangulo $S'_{a'}$, quando for $\frac{r}{R} = \cos\theta$, obter-se-ha pela formula (V) trocando os logares de R e r, e os de a e a'

A superficie total do barrete de clerigo para quaesquer relações entre r, R e $\cos\theta$ será

$$B'_t = 2\,(S'_a + S'_{a'})$$

ABOBADA DE ARESTA

A superficie da abobada de aresta é igual á somma das superficies dos cylindros que a formam menos a do barrete de clerigo por elles formado. Quando os cylindros se cortarem orthogonalmente (fig. 9), se for C_a a superficie do cylindro cuja base é a ogiva aba_1 e o comprimento $2a'$, e $C_{a'}$ a superficie do cylindro cuja base é a ogiva $a'ba'_1$ e o comprimento $2a$, teremos

$$C_a = 2\int_{z=0}^{z=b} ds \times 2a' \qquad C_{a'} = 2\int_{z=0}^{z=b} ds_1 \times 2a$$

(1) Vide nota 10.ª
(2) Vide nota 11.ª

e em virtude dos valores (3) e (4)

$$C_a = 4\,a'\,r \int_0^b \frac{dz}{\sqrt{r^2 - z^2}}$$

$$C_{a'} = 4\,a\,R \int_0^b \frac{dz}{\sqrt{R^2 - z^2}}$$

ou

$$C_a = 4\,a'\,r\,arc.\,sen.\,\frac{b}{r} \tag{VI}$$

$$C_{a'} = 4\,a\,R\,arc.\,sen.\,\frac{b}{R} \tag{VII}$$

e a superficie total da abobada de aresta, sendo B_s a do barrete de clerigo que lhe corresponde, será

$$A_s = C_a + C_{a'} - B_s$$

Quando os cylindros se cortarem obliquamente sob o angulo agudo θ (fig. 10), a superficie de cada cylindro é igual ao producto da geratriz pela secção recta, e assim se for C'_a a superficie do que tem a geratriz $2a'$ e a secção recta $\alpha b \alpha_1$, e $C'_{a'}$ a do que tem a geratriz $2a$ e a secção recta $\alpha' b \alpha'_1$, será

$$C'_a = 2\int_{z=0}^{z=b} ds' \times 2a' \qquad C'_{a'} = 2\int_{z=0}^{z=b} ds'_1 \times 2\,a$$

e em virtude dos valores (9) e (10)

$$C'_a = 4\,a' \int_0^b dz \sqrt{\frac{r^2 - z^2\cos^2\theta}{r^2 - z^2}}$$

$$C'_{a'} = 4\,a \int_0^b dz \sqrt{\frac{R^2 - z^2\cos^2\theta}{R^2 - z^2}}$$

ou

$$C'_a = 4\,r\,a' \times \left[\begin{array}{l} \left(arc.\,sen.\,\frac{b}{r}\right) \left\{ 1 - \left[\left(\frac{1}{2}\cos\theta\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cos^2\theta\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cos^3\theta\right)^2 + \ldots + \frac{1}{2m-1}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2m-1}{2m}\cos^m\theta\right)^2 \right] \right\} \\ + \frac{r-a}{r} \times \left\{ \begin{array}{l} \frac{b}{r}\left[\left(\frac{1}{2}\cos\theta\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cos^2\theta\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cos^3\theta\right)^2 + \ldots + \frac{1}{2m-1}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2m-1}{2m}\cos^m\theta\right)^2 \right] \\ \frac{1}{2}\cdot\frac{b^3}{3r^3}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\cos^2\theta\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cos^3\theta\right)^2 + \ldots\ldots + \frac{1}{2m-1}\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2m-1}{2m}\cos^m\theta\right)^2 \right] \\ + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{b^5}{5r^5}\left[\frac{1}{5}\left(\frac{5}{6}\cos^3\theta\right)^2 + \ldots\ldots + \frac{1}{2m-1}\left(\frac{5}{6}\cdots\frac{2m-1}{2m}\cos^m\theta\right)^2 \right] \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\ldots\ldots\frac{2m-3}{2m-2}\cdot\frac{b^{2m-1}}{(2m-1)\,r^{2m-1}}\left[\frac{1}{2m-1}\left(\frac{2m-1}{2m}\cos^m\theta\right)^2 \right] \end{array} \right\} \end{array} \right]^{(1)} \tag{VIII}$$

e para obter o valor de $C'_{a'}$ bastará na formula (VIII) trocarmos os logares de a e a', pondo R em logar de r.

A superficie total da abobada de aresta, se for B'_s a do barrete de clerigo correspondente, será

$$A'_s = C'_a + C'_{a'} - B'_s$$

(1) Fazendo $z = r\,sen\,\varphi$ resultará

$$4\,a' \int dz \sqrt{\frac{r^2 - z^2\cos^2\theta}{r^2 - z^2}} = 4\,a'\,r \int d\varphi \sqrt{1 - \cos^2\theta\,sen^2\varphi}$$

expressão que se integrará como na nota 10.ª

Como $z = r\,sen\,\varphi$, para $z = o$ é $\varphi = o$, e $sen\,\varphi = o$; e para $z = b$ é $sen\,\varphi = \frac{b}{r}$, $\varphi = arc.\,sen.\,\frac{b}{r}$, e $\cos\varphi = \frac{\sqrt{r^2 - b^2}}{r} = \frac{r-a}{r}$

PARTE II

CAPACIDADE DAS ABOBADAS

ABOBADA DE BARRETE DE CLERIGO

Quando os cylindros se cortam orthogonalmente (fig. 9), pelo emprego de planos secantes parallelos ao das impostas e infinitamente proximos entre si ficará a abobada dividida em parallelipipedos infinitamente pequenos e de base rectangular.

Para um dado valor de z a intersecção do plano secante será o rectangulo

$$m\,n\,p\,q = m\,q \times m\,n$$

e como

$$m\,q = m'\,q' = 2\,x \qquad m\,n = p'\,q'' = 2\,y$$

a capacidade do barrete de clerigo, em virtude dos valores (1) e (2), será

$$B_c = 4\int_0^b \left[a - r + \sqrt{r^2 - z^2}\right]\left[a' - R + \sqrt{R^2 - z^2}\right] dz \tag{11}$$

ou

$$B_c = 4\int_0^b \left[(r-a)(R-a') - (r-a)\sqrt{R^2 - z^2} - (R-a')\sqrt{r^2 - z^2} + r\,R\sqrt{1 - \frac{z^2}{r^2}}\sqrt{1 - \frac{z^2}{R^2}}\right] dz$$

e por consequencia

$$B_c = 4\left\{\begin{array}{l} r\,R\,b\left\{\begin{array}{l} 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{b^2}{3}\left(\frac{1}{R^2} + \frac{1}{r^2}\right) - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{b^4}{5}\left(\frac{1}{R^4} + \frac{1}{r^4} - \frac{2}{R^2 r^2}\right) - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{b^6}{7}\left[\left(\frac{1}{R^6} + \frac{1}{r^6}\right) - \left(\frac{1}{R^4 r^2} + \frac{1}{R^2 r^4}\right)\right] \\ - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{b^8}{9}\left[\left(\frac{1}{R^8} + \frac{1}{r^8}\right) - \frac{4}{5}\left(\frac{1}{R^6 r^2} + \frac{1}{R^2 r^6}\right) - \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{R^4 r^4}\right] - \cdots\cdots \end{array}\right\} \\ - \left[\frac{(r-a)\,R^2}{2} \times arc.\,sen\,\frac{b}{R} + \frac{(R-a')\,r^2}{2} \times arc.\,sen\,\frac{b}{r}\right] \end{array}\right\}^{(1)} \tag{I}$$

No caso das ogivas serem iguaes, ou $R = r$, $a' = a$, para cada valor de z será $x = y$, e então a igualdade (11) transformar-se-ha em

$$B_c = 4\int_0^b \left[a - r + \sqrt{r^2 - z^2}\right]^2 dz \tag{12}$$

ou

$$B_c = 4\int_0^b \left[(r-a)^2 + r^2 - z^2 - 2\,(r-a)\sqrt{r^2 - z^2}\right] dz$$

e por consequencia

$$B_c = 4\left[r^2 b - \frac{b^3}{3} - r^2\,(r-a)\;arc.\,sen\,\frac{b}{r}\right]^{(2)} \tag{II}$$

No caso dos cylindros se cortarem obliquamente sob o angulo agudo θ (fig. 10), pelo emprego dos planos secantes parallelos ao das impostas e infinitamente proximos entre si, ficará ella dividida em parallelipipedos infinitamente pequenos cujas bases serão parallelogrammos.

Para um determinado valor de z a base do parallelipipedo elementar será

$$m\,n\,p\,q = m\,q \times n\,r = m\,q \times m\,n \times sen\,\theta$$

e como

$$m\,q = m'\,q' = 2\,x \qquad m\,n = p'\,q'' = 2\,y$$

será a capacidade do barrete de clerigo, em virtude das igualdades (5) e (6),

$$B'_c = 4\,sen\,\theta\int_0^b \left[a - r + \sqrt{r^2 - z^2}\right]\left[a' - R + \sqrt{R^2 - z^2}\right] dz \tag{13}$$

(1) Vide nota 12.ª
(2) Vide a mesma nota.

e comparando a igualdade (13) com a (11) resultará

$$B'_c = 4\, sen\, \theta \left\{ r\,R\,b \left\{ \begin{array}{l} 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{b^2}{3}\left(\frac{1}{R^2}+\frac{1}{r^2}\right) - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{b^4}{5}\left(\frac{1}{R^4}+\frac{1}{r^4}-\frac{2}{R^2 r^2}\right) - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{b^6}{7}\left[\left(\frac{1}{R^6}+\frac{1}{r^6}\right)-\left(\frac{1}{R^4 r^2}+\frac{1}{R^2 r^4}\right)\right] \\ -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{b^8}{9}\left[\left(\frac{1}{R^8}+\frac{1}{r^8}\right)-\frac{4}{5}\left(\frac{1}{R^6 r^2}+\frac{1}{R^2 r^6}\right)-\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{R^4 r^4}\right]-\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right\} \\ -\left[\frac{(r-a)\,R^2}{2}\times arc.sen\,\frac{b}{R}+\frac{(R-a')\,r^2}{2}\times arc.sen\,\frac{b}{r}\right] \right\} \qquad \text{(III)}$$

Quando as ogivas directrizes dos cylindros forem iguaes, ou $R = r$ e $a' = a$, para cada valor de z será $x = y$ e a igualdade (13) transforma-se em

$$B'_c = 4\, sen\, \theta \int_0^b \left[a - r + \sqrt{r^2 - z^2}\right]^2 dz$$

que pela comparação com a (12) dará

$$B'_c = 4\, sen\, \theta \left[r^2 b - \frac{b^3}{3} - r^2 (r - a) \times arc.\, sen\, \frac{b}{r}\right] \qquad \text{(IV)}$$

ABOBADA DE ARESTA

A capacidade da abobada de aresta é igual á somma das capacidades dos cylindros que a formam, menos a do barrete de clerigo por elles formado.

Quando os cylindros se cortarem orthogonalmente se for C_a a capacidade do que tem de comprimento $2a'$ e por base a superficie da ogiva aba_1, e $C_a{}'$ o que tem de comprimento $2a$ e por base a superficie da ogiva $a'ba'_1$, (fig. 9), teremos

$$C_a = 2\,a' \int_0^b 2\,x\,dz \qquad\qquad C_{a'} = 2\,a \int_0^b 2\,y\,dz$$

e, em virtude dos valores (1) e (2),

$$C_a = 4\,a' \int_0^b \left[a - r + \sqrt{r^2 - z^2}\right] dz$$

$$C_{a'} = 4\,a \int_0^b \left[a' - R + \sqrt{R^2 - z^2}\right] dz$$

ou

$$C_a = \left[r^2 \times arc.\, sen\, \frac{b}{r} - (r - a)\, b\right] \times 2\,a' \text{ (1)} \qquad \text{(V)}$$

$$C_{a'} = \left[R^2 \times arc.\, sen\, \frac{b}{R} - (R - a')\, b\right] \times 2\,a \qquad \text{(VI)}$$

A capacidade da abobada de aresta, sendo B_c a do barrete de clerigo que lhe corresponde, será

$$A_c = C_a + C_{a'} - B_c$$

Quando os cylindros se cortarem obliquamente sob o angulo agudo θ (fig. 10), se representarmos por C'_a a capacidade do que tem por base a ogiva aba_1 e por geratriz $2a'$, tendo portanto a altura $h = 2a' sen\theta$, e por $C'_{a'}$ a capacidade do que tem por base a ogiva $a'ba'_1$ e por geratriz $2a$, sendo a sua altura $h' = 2a\; sen\theta$, será

$$C'_a = 2\,a'\, sen\, \theta \int_0^b 2\,x\,dz \qquad\qquad C'_{a'} = 2\,a\, sen\, \theta \int_0^b 2\,y\,dz$$

(1) Vide nota 12.ª

e, em resultado dos valores (5) e (6),

$$C'_a = 4\,a'\,sen\,\theta \int_0^b \left[a - r + \sqrt{r^2 - z^2} \right] dz$$

$$C'_{a'} = 4\,a\,sen\,\theta \int_0^b \left[a' - R + \sqrt{R^2 - z^2} \right] dz$$

ou

$$C'_a = \left[r^2 \times arc.\,sen \frac{b}{r} - (r - a)\,b \right] \times 2\,a'\,sen\,\theta \tag{VII}$$

$$C'_{a'} = \left[R^2 \times arc.\,sen\,\frac{b}{R} - (R - a')\,b \right] \times 2\,a\,sen\,\theta \tag{VIII}$$

A capacidade da abobada de aresta, sendo B'_c a do barrete de clerigo que lhe corresponde, será

$$A'_c = C'_a + C'_{a'} - B'$$

CAPITULO V

ABOBADA DE TORRE CIRCULAR

A abobada de torre circular (fig. 11) é formada pelo concurso de um tóro e um conoide. O tóro é gerado pela revolução do semi-circulo $B'C'b'$ que, levantado no plano vertical $B'O$, gira em roda da vertical O. O conoide é gerado por uma recta que se conserva sempre horisontal, tendo por uma das directrizes a vertical O, e a segunda directriz, se forem FO e GO os planos verticaes tangentes ao conoide, os quaes se cortam sob o angulo θ, determina-se pelo modo seguinte: o arco AoD, descripto do ponto O como centro e com o raio R igual á distancia do centro da geratriz do tóro á vertical O, rectifica-se em aod, e sobre esta recta, como eixo maior, descreve-se a semi-ellipse $A''C''D''$ que tem o semi-eixo vertical $o''C'=o'C'=r$ raio da geratriz do tóro; depois, imaginando que o plano aod, onde esta ellipse existe, se enrola em volta do cylindro recto AoD de modo que as suas abscissas coincidam com os arcos d'esta circumferencia, e as suas ordenadas com as arestas verticaes do cylindro, a ellipse tornar-se-ha uma linha a dupla curvatura projectada em AoD e adoptar-se-ha para segunda directriz, ou base do conoide.

Para obter a intersecção do conoide com o tóro cortam-se estas superficies por planos horisontaes. O que passar por M' do meridiano $B'C'b'$ cortará o tóro segundo os circulos descriptos com os raios OP' e Op'; depois, procurando na ellipse os pontos M'' e N'', da mesma altura que M', se tomarmos os arcos oP e oQ respectivamente iguaes ás abscissas $o''P''$ e $o''Q''$, os pontos P e Q serão evidentemente as projecções dos pontos onde a base do conoide é encontrada pelo plano secante horisontal, e, por conseguinte, as intersecções feitas n'esta superficie são as duas rectas projectadas em OP e OQ. Ora, estas rectas encontram as duas intersecções circulares, feitas no tóro, nos pontos M, m, N e n que pertencem á intersecção das duas superficies.

PARTE I

SUPERFICIE DAS ABOBADAS

ABOBADA DE BARRETE DE CLERIGO

O arco $\hat{\theta}$ que, com o raio unidade, corresponde ao angulo $\theta°$ formado pelos planos verticaes FO e GO é $\hat{\theta}=\frac{\pi\theta}{180}$, e o arco $\widehat{AD}$ será

$$\widehat{AD} - R\times\hat{\theta} = \frac{\pi\theta}{180}R$$

mas como $A''D'' = ad = \widehat{AD}$, e $o''A'' = o''D'' = \frac{A''D''}{2}$, se referirmos a ellipse $A''C''D''$ aos eixos $o''x$ e $o''z$ a sua equação será

$$\left(\frac{\pi\theta R}{360}\right)^2 z^2 + r^2x^2 = \left(\frac{\pi\theta R}{360}\right)^2 r^2 \tag{1}$$

d'onde se tira

$$x = \frac{\pi\theta R}{360 r}\sqrt{r^2 - z^2} \tag{2}$$

e se for ds o arco elementar d'esta curva, como é $ds = dz\sqrt{\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + 1}$, pela substituição de $\left(\frac{dx}{dz}\right)$ tirado da igualdade (2) resultará

$$ds = \frac{dz}{2}\sqrt{\frac{\left[\left(\frac{\pi\theta R}{180 r}\right)^2 - 4\right]z^2 + 4r^2}{r^2 - z^2}} \tag{3}$$

O circulo $B' \, C' \, b'$ referido aos eixos $o' \, y$ e $o' \, z$ terá para equação

$$y^2 + z^2 = r^2$$

d'onde se tira

$$y = \sqrt{r^2 - z^2} \tag{4}$$

e se ds_1 for o seu arco elementar, como $ds_1 = dz \sqrt{\left(\frac{dy}{dz}\right)^2 + 1}$, pela substituição de $\left(\frac{dy}{dz}\right)$ tirado da igualdade (4) resulta

$$ds_1 = \frac{r \, dz}{\sqrt{r^2 - z^2}} \tag{5}$$

Cortando a abobada por planos horisontaes infinitamente proximos entre si, os triangulos curvos pertencentes á superficie do tóro, e que se projectam em *FoG* e *fog*, ficarão divididos em porções cylindricas infinitamente pequenas, cujas bases são os arcos de circulo segundo os quaes o tóro é interceptado e as alturas são os elementos ds_1 da semi-circumferencia $B'C'b'$. Os triangulos curvos pertencentes á superficie do conoide, e que se projectam em *Fof* e *Gog*, ficarão divididos em trapezios infinitamente pequenos para cada um dos quaes a linha tirada a igual distancia dos lados parallelos é o elemento ds da directriz do conoide que se projecta em *AoD*, arco evidentemente igual ao elemento ds da ellipse $A''C''D''$, e n'estes trapezios as alturas serão iguaes ás intersecções feitas no conoide pelos planos secantes.

O plano secante que passa á altura z acima do das impostas cortará o tóro segundo os arcos $\widehat{MN}$ e $\widehat{mn}$, e o conoide segundo as rectas Mm e Nn. Os raios d'aquelles arcos são

$$R_1 = OM = Oo + o'P' = R + y \qquad R_2 = Om = Oo - o'p' = R - y$$

e em virtude da igualdade (4)

$$R_1 = R + \sqrt{r^2 - z^2} \tag{6}$$

$$R_2 = R - \sqrt{r^2 - z^2} \tag{7}$$

Para determinar os arcos $\widehat{MN}$ e $\widehat{mn}$ temos as proporções

$$Oo : OM :: \widehat{PQ} : \widehat{MN} \qquad Oo : Om :: \widehat{PQ} : \widehat{mn}$$

e como $\widehat{PQ} = P''Q'' = 2x$

$$R : R_1 :: 2x : \widehat{MN} \qquad R : R_2 :: 2x : \widehat{mn}$$

o que, pela substituição dos valores (2), (6) e (7), dá

$$\widehat{MN} = \frac{\pi \theta}{180 r}\left(R + \sqrt{r^2 - z^2}\right)\sqrt{r^2 - z^2} \tag{8}$$

$$\widehat{mn} = \frac{\pi \theta}{180 r}\left(R - \sqrt{r^2 - z^2}\right)\sqrt{r^2 - z^2} \tag{9}$$

As areas dos elementos de superficie cylindrica que se projectam em *FGMN* e *fgmn* são

$$FGMN = \widehat{MN} \times ds_1 \qquad fgmn = \widehat{mn} \times ds_1$$

e pondo na primeira d'estas igualdades os valores (5) e (8), e na segunda os valores (5) e (9), resultará

$$FoG = \frac{\pi \theta}{180 r}\int_0^r (R + \sqrt{r^2 - z^2})\sqrt{r^2 - z^2} \times \frac{r \, dz}{\sqrt{r^2 - z^2}} = \frac{\pi \theta}{180}\int_0^r (R + \sqrt{r^2 - z^2})\, dz$$

$$fog = \frac{\pi \theta}{180 r}\int_0^r (R - \sqrt{r^2 - z^2})\sqrt{r^2 - z^2} \times \frac{r \, dz}{\sqrt{r^2 - z^2}} = \frac{\pi \theta}{180}\int_0^r (R - \sqrt{r^2 - z^2})\, dz$$

ou

$$FoG = \frac{\pi \theta}{180}\left(Rr + \frac{\pi}{4} r^2\right) \text{ [1]} \tag{I}$$

$$fog = \frac{\pi \theta}{180}\left(Rr - \frac{\pi}{4} r^2\right) \tag{II}$$

[1] Conforme a nota 12.ª será

$$\int^r dz \sqrt{r^2 - z^2} = \frac{r^2}{2} \times arc. \, sen \, \frac{r}{r} = \frac{r^2}{2} \times \frac{\pi}{2}$$

As areas dos trapezios elementares que se projectam em $GMmg$ e $FNnf$ são

$$GMmg = Mm \times ds \qquad FNnf = Nn \times ds$$

mas como $Mm = Nn = P'p' = 2y$, pondo n'estas duas igualdades os valores (3) e (4) virá

$$Fof = Gog = \int_0^r 2\sqrt{r^2 - z^2} \times \frac{dz}{2}\sqrt{\frac{\left|\left(\frac{\pi\theta R}{180 r}\right)^2 - 4\right| z^2 + 4r^2}{r^2 - z^2}} = \int_0^r dz \sqrt{\left[\left(\frac{\pi\theta R}{180 r}\right)^2 - 4\right] z^2 + 4r^2} \qquad (10)$$

ou

$$Fof = Gog = \frac{\pi\theta R r}{360} + \frac{360 r^3}{\sqrt{(\pi\theta R)^2 - (360 r)^2}} \times \frac{lg. \frac{\pi\theta R + \sqrt{(\pi\theta R)^2 + (360 r)^2}}{360 r}}{0{,}4342945} \qquad (III)$$

A formula (III) deixará de ser applicavel quando for $\pi\theta R < 360\ r$, mas então podemos dar a igualdade (10) a seguinte fórma

$$Fof = Gog = \int_0^r dz \sqrt{4r^2 - \left[4 - \left(\frac{\pi\theta R}{180 r}\right)^2\right] z^2} \qquad (11)$$

d'onde resulta

$$Fof = Gog = \frac{\pi\theta R r}{360} + \frac{360 r^3}{\sqrt{(360 r)^2 - (\pi\theta R)^2}} \times arc.\ sen. \frac{\sqrt{(360 r)^2 - (\pi\theta R)^2}}{360 r} \qquad (IV)$$

Finalmente, quando for $\pi\theta R = 360\ r$ as formulas (III) e (IV) tornam-se indeterminadas, mas das igualdades (10) e (11) tira-se

$$Fof = Gog = \int_0^r dz \sqrt{4r^2}$$

ou

$$Fof = Gog = 2r^2 \qquad (V)$$

A superficie total do barrete de clerigo é igual á somma das superficies dos triangulos curvos FoG, fog, Fof e Gog, e então, quando for $\pi\theta R > 360\ r$, tira-se das formulas (I), (II) e (III)

$$B_s = \frac{\pi\theta R r}{60} + \frac{720 r^3}{\sqrt{(\pi\theta R)^2 - (360 r)^2}} \times \frac{lg. \frac{\pi\theta R + \sqrt{(\pi\theta R)^2 - (360 r)^2}}{360 r}}{0{,}4342945} \qquad (\alpha)$$

Quando for $\pi\theta R < 360\ r$, tira-se das formulas (I), (II) e (IV)

$$B_s = \frac{\pi\theta R r}{60} + \frac{720 r^3}{\sqrt{(360 r)^2 - (\pi\theta R)^2}} \times arc.\ sen. \frac{\sqrt{(360 r)^2 - (\pi\theta R)^2}}{360 r}. \qquad (\beta)$$

e finalmente, no caso de ser $\pi\theta R = 360\ r$, as formulas (I), (II) e (V) dão

$$B_s = \frac{\pi\theta R r}{90} + 4r^2 \qquad (\gamma)$$

ABOBADA DE ARESTA

A superficie da abobada de aresta de torre circular é igual á somma da superficie do sector de conoide limitado pelos cylindros verticaes tangentes ao tóro interior e exteriormente, com a do sector de tóro limitado pelos planos verticaes tangentes ao conoide, menos a do barrete de clerigo correspondente.

O plano secante que passa á altura z acima do das impostas corta o sector de tóro segundo os arcos $\widehat{M_1 N_1}$ e $\widehat{m_1 n_1}$, cujos raios são R_1 e R_2, sendo aquelles arcos

$$\widehat{M_1 N_1} = R_1 \times \hat{\theta} = \frac{\pi\theta}{180} \cdot R_1 \qquad \widehat{m_1 n_1} = R_2 \times \hat{\theta} = \frac{\pi\theta}{180} \cdot R_2$$

(1) Vidè nota 13.ª
(2) Vidè nota 14.ª

e em virtude das igualdades (6) e (7)

$$\widehat{M_1 N_1} = \frac{\pi\theta}{180}\left(R + \sqrt{r^2 - z^2}\right) \tag{12}$$

$$\widehat{m_1 n_1} = \frac{\pi\theta}{180}\left(R - \sqrt{r^2 - z^2}\right) \tag{13}$$

As porções de superficie de tóro projectadas em FGM_1N_1 e fgm_1n_1, são

$$F G M_1 N_1 = \widehat{M_1 N_1} \times d s_1 \qquad f g m_1 n_1 = \widehat{m_1 n_1} \times d s_1$$

sendo portanto o sector do toro

$$T = \int_{z=0}^{z=r} (\widehat{M_1N_1} + \widehat{m_1 n_1}) ds_1$$

e pela substituição dos valores (5), (12) e (13)

$$T = \frac{2\pi\theta R r}{180}\int_0^r \frac{dz}{\sqrt{r^2 - z^2}} = \frac{2\pi\theta R r}{180} \times arc. sen \frac{r}{r}$$

ou

$$T = \frac{\pi^2 \theta R r}{180} \tag{VI}$$

O plano secante que passa á altura z acima do das impostas corta o sector do conoide segundo as rectas M_2m_2 e N_2n_2 iguaes a $B'b'$ ou $2r$, e as porções da superficie do conoide projectadas em GM_2m_2g e FN_2n_2f, são

$$G M_2 m_2 g = M_2 m_2 \times d s \qquad F N_2 n_2 f = N_2 n_2 \times d s$$

sendo portanto o sector do conoide

$$C = \int_{z=0}^{z=r} (M_2 m_2 + N_2 n_2)\, d s = 4 r \int_{z=0}^{z=r} d s$$

Ora o integral é evidentemente o desenvolvimento de um quadrante da ellipse $A''C'D''$, e então, quando for $\pi\theta R > 360 r$, se fizermos $\frac{\sqrt{(\pi\theta R)^2 - (360 r)^2}}{\pi\theta R} = e$, será

$$C = \frac{\pi^2\theta R r}{180}\left[1 - \left(\frac{1}{2}e\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot e^2\right)^2 - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}e^3\right)^2 - \ldots - \frac{1}{2m-1}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\cdots\frac{2m-1}{2m}e^m\right)^2\right] \text{(1)} \tag{VII}$$

Quando for $\pi\theta R < 360 r$, se fizermos $\frac{\sqrt{(360 r)^2 - (\pi\theta R)^2}}{360 r} = e$, será

$$C = 2\pi r^2\left[1 - \left(\frac{1}{2}e\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}e^2\right)^2 - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}e^3\right)^2 - \ldots - \frac{1}{2m-1}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\cdots\frac{2m-1}{2m}e^m\right)^2\right] \tag{VIII}$$

Finalmente, no caso de ser $\pi\theta R = 360 r$, das formulas (VII) ou (VIII) tira-se

$$C = 2\pi r^2 \tag{IX}$$

A superficie total da abobada de aresta, sendo B_s a do barrete de clerigo que lhe corresponde, é

$$A_s = T + C - B_s$$

expressão que toma diversas fórmas segundo as relações entre R, r e θ.

(1) Vide nota (2) a pag. 6.

PARTE II

CAPACIDADE DAS ABOBADAS

ABOBADA DE BARRETE DE CLERIGO

Cortando-se a abobada por planos parallelos ao das impostas e infinitamente proximos entre si, ficará ella dividida em sectores de corôa cylindrica infinitamente pequenos, tendo cada um a altura dz e para base o trapezio circular que resulta da intersecção feita na abobada pelo plano secante. Assim, para o plano que passa á altura z acima do das impostas, o trapezio circular, base do sector de corôa cylindrica, é

$$MNnm = \frac{1}{2}(\widehat{MN} \times R_1 - \widehat{mn} \times R_2)$$

e a capacidade do barrete de clerigo será

$$B_c = \frac{1}{2}\int_0^r (\widehat{MN} \times R_1 - \widehat{mn} \times R_2)\, dz$$

e em virtude das igualdades (6), (7), (8) e (9)

$$B_c = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi\theta}{180 r}\int_0^r \left[(R + \sqrt{r^2 - z^2})^2 - (R - \sqrt{r^2 - z^2})^2\right] dz \sqrt{r^2 - z^2} = \frac{\pi\theta R}{90 r}\int_0^r (r^2 - z^2)\, dz$$

ou

$$B_c = \frac{\pi\theta R r^2}{135} \qquad \text{(I)}$$

ABOBADA DE ARESTA

A capacidade da abobada de aresta é igual á do sector de conoide limitado pelos cylindros verticaes tangentes ao tóro interior e exteriormente, mais a do sector de tóro limitado pelos planos verticaes tangentes ao conoide, menos a do barrete de clerigo correspondente.

O plano secante que passa á altura z acima do das impostas corta o sector de tóro segundo o trapezio circular

$$M_1 N_1 n_1 m_1 = \frac{1}{2}(\widehat{M_1 N_1} \times R_1 - \widehat{m_1 n_1} \times R_2)$$

e a capacidade do sector será

$$T = \frac{1}{2}\int_0^r (\widehat{M_1 N_1} \times R_1 - \widehat{m_1 n_1} \times R_2)\, dz$$

que, pela substituição dos valores (6), (7), (12) e (13), dá

$$T = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi\theta}{180}\int_0^r \left[(R + \sqrt{r^2 - z^2})^2 - (R - \sqrt{r^2 - z^2})^2\right] dz = \frac{\pi\theta R}{90}\int_0^r dz \sqrt{r^2 - z^2}$$

ou

$$T = \frac{\pi^2 \theta R r^2}{360} \text{ (1)} \qquad \text{(II)}$$

O plano que passa á altura z acima do das impostas corta o sector de conoide segundo o trapezio circular

$$M_2 N_2 n_2 m_2 = \frac{1}{2}\left[\widehat{M_2 N_2}(R + r) - \widehat{m_2 n_2}(R - r)\right]$$

e a capacidade do sector será

$$C = \frac{1}{2}\int_0^r \left[\widehat{M_2 N_2}(R + r) - \widehat{m_2 n_2}(R - r)\right] dz$$

(1) Vidé nota (1) a pag. 36.

Os arcos $\widehat{M_2 N_2}$ e $\widehat{m_2 n_2}$ são dados pelas proporções

$$O o : o M_2 :: \widehat{PQ} : \widehat{M_2 N_2} \qquad O o : O m_2 :: \widehat{PQ} : \widehat{m_2 n_2}$$

ou

$$R : R + r :: 2x : \widehat{M_2 N_2} \qquad R : R - r :: 2x : \widehat{m_2 n_2}$$

o que, pela substituição do valor (2), dá

$$\widehat{M_2 N_2} = \frac{\pi \theta}{180 r}(R + r)\sqrt{r^2 - z^2}$$

$$\widehat{m_2 n_2} = \frac{\pi \theta}{180 r}(R - r)\sqrt{r^2 - z^2}$$

e por consequencia

$$C = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi \theta}{180 r}\int_0^r \left[(R + r)^2 - (R - r)^2\right] dz \sqrt{r^2 - z^2} = \frac{\pi \theta R}{90}\int^r dz \sqrt{r^2 - z^2}$$

ou

$$C = \frac{\pi^2 \theta R r^2}{360} \text{ (1)} \tag{III}$$

A capacidade total da abobada de aresta, sendo B_c a do barrete de clerigo correspondente, será

$$A_c = T + C - B_c = 2 \times \frac{\pi^2 \theta R r^2}{360} - \frac{\pi \theta R r^2}{135}$$

ou

$$A_c = \pi \theta R r^2 \left(\frac{\pi}{180} - \frac{1}{135}\right)$$

(1) Vidè nota (1) a pag. 36.

NOTAS

NOTA 1.ª

Para determinar o valor de $\int_0^b dz \sqrt{\left(\frac{a^2-b^2}{b^4}\right)z^2+1}$, façamos $\frac{a^2-b^2}{b^4}=m$

Ora $$\int dz\sqrt{mz^2+1}=z\sqrt{mz^2+1}-\int\frac{mz^2\,dz}{\sqrt{mz^2+1}}=z\sqrt{mz^2+1}-\int\frac{(mz^2+1-1)\,dz}{\sqrt{mz^2+1}}$$

e portanto $$\int dz\sqrt{mz^2+1}=\frac{z\sqrt{mz^2+1}}{2}+\frac{1}{2}\int\frac{dz}{\sqrt{mz^2+1}}$$

mas como $$\int\frac{dz}{\sqrt{mz^2+1}}=\sqrt{\frac{1}{m}}\times lg.\left(z\sqrt{m}+\sqrt{mz^2+1}\right)$$

será $$\int dz\sqrt{mz^2+1}=\frac{z\sqrt{mz^2+1}}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{m}}\times lg.\left(z\sqrt{m}+\sqrt{mz^2+1}\right)$$

ou $$\int_0^b dz\sqrt{mz^2+1}=\frac{b\sqrt{mb^2+1}}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{m}}\times lg.\left(b\sqrt{m}+\sqrt{mb^2+1}\right)$$

e pondo em logar de m o seu valor

$$\int_0^b dz\sqrt{\left(\frac{a^2-b^2}{b^4}\right)z^2+1}=\frac{1}{2}\left[a+b\sqrt{\frac{b^2}{a^2-b^2}}\times lg.\left(\frac{a}{b}+\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2}}\right)\right]$$

O logarithmo que figura no segundo membro é tomado no systema neperiano, mas passar-se-ha para o systema vulgar dividindo-o por $lg.\,e=lg.\,2{,}718281828\ldots=0{,}4342945$, e então

$$\int_0^b dz\sqrt{\left(\frac{a^2-b^2}{b^4}\right)z^2+1}=\frac{1}{2}\left[a+b\sqrt{\frac{b^2}{a^2-b^2}}\times\frac{lg.\left(\frac{a}{b}+\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2}}\right)}{0{,}4342945}\right]$$

NOTA 2.ª

Para determinar o valor de $\int_0^b dz\sqrt{1-\left(\frac{b^2-a^2}{b^4}\right)z^2}$ façamos $\frac{b^2-a^2}{b^4}=m$.

Como $$\int dz\sqrt{1-mz^2}=z\sqrt{1-mz^2}+\int\frac{mz^2\,dz}{\sqrt{1-mz^2}}=z\sqrt{1-mz^2}+\int\frac{(mz^2+1-1)\,dz}{\sqrt{1-mz^2}}$$

será $$\int dz\sqrt{1-mz^2}=\frac{z\sqrt{1-mz^2}}{2}+\frac{1}{2}\int\frac{dz}{\sqrt{1-mz^2}}$$

e porque

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1-mz^2}} = \sqrt{\frac{1}{m}} \times arc.\,sen.\,z\sqrt{m}$$

resulta

$$\int dz\sqrt{1-mz^2} = \frac{z\sqrt{1-mz^2}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{m}} \times arc.\,sen.\,z\sqrt{m}$$

ou

$$\int_0^b dz\sqrt{1-mz^2} = \frac{b\sqrt{1-mb^2}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{m}} \times arc.\,sen.\,b\sqrt{m}$$

e pondo em logar de m o seu valor

$$\int_0^b dz\sqrt{1-\left(\frac{b^2-a^2}{b^4}\right)z^2} = \frac{1}{2}\left[a + b\sqrt{\frac{b^2}{b^2-a^2}} \times arc.\,sen.\sqrt{\frac{b^2-a^2}{b^2}}\right]$$

NOTA 3.ª

As raizes do trinomio do segundo grau

$$z^2 - 2(M+b)z + \left(2Mb + b^2 + \frac{M^2 Q^2}{M^2+Q^2}\right)$$

são

$$\alpha = M + b + \sqrt{\frac{M^4}{M^2+Q^2}} \qquad (1)$$

e

$$\beta = M + b - \sqrt{\frac{M^4}{M^2+Q^2}} \qquad (2)$$

evidentemente reaes, positivas e desiguaes.

Como o trinomio equivale á expressão $(z-\alpha)(z-\beta)$, se, para proceder á integração, fizermos

$$\sqrt{(z-\alpha)(z-\beta)} = (z-\alpha)x$$

virá

$$z - \beta = (z-\alpha)x^2 \qquad 3)$$

d'onde se tira

$$z = \frac{\beta - \alpha x^2}{1-x^2}$$

$$dz = \frac{2x(\beta-\alpha)}{(1-x^2)^2}dx = \frac{2x(\beta-\alpha)}{(x^2-1)^2}dx$$

$$(z-\alpha)x = \frac{(\beta-\alpha)x}{1-x^2} = -\frac{(\beta-\alpha)x}{x^2-1}$$

e portanto

$$dz\sqrt{z^2-2(M+b)z+\left(2Mb+b^2+\frac{M^2Q^2}{M^2+Q^2}\right)} = -\frac{2(\beta-\alpha)^2x^2}{(x^2-1)^3}dx$$

A integração da fracção racional $\frac{x^2}{(x^2-1)^3} = \frac{x^2}{(x-1)^3(x+1)^3}$ far-se-ha recorrendo á igualdade

$$\frac{x^2}{(x^2-1)^3} = \frac{M}{(x-1)^3} + \frac{M'}{(x-1)^2} + \frac{M''}{(x-1)} + \frac{N}{(x+1)^3} + \frac{N'}{(x+1)^2} + \frac{N''}{(x+1)}$$

da qual resulta, por serem $M = \frac{2}{16}$, $M' = \frac{1}{16}$, $M'' = -\frac{1}{16}$, $N = -\frac{2}{16}$, $N' = \frac{1}{16}$ e $N'' = \frac{1}{16}$,

$$\frac{x^2}{(x^2-1)^3} = \frac{1}{16}\left[\frac{2}{(x-1)^3} + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x-1)} - \frac{2}{(x+1)^3} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+1)}\right]$$

ou

$$\int \frac{x^2\,dx}{(x^2-1)^3} = -\frac{1}{16}\left[\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)} + lg\,(x-1) - \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+1)} - lg\,(x+1)\right] + const$$

$$= -\frac{1}{16}\left[\frac{x}{(x-1)^2} + \frac{x}{(x+1)^2} + lg\frac{x-1}{x+1}\right] + const$$

$$= -\frac{1}{16}\left[\frac{2x(x^2+1)}{(x^2-1)^2} + lg\frac{x-1}{x+1}\right] + cons$$

e substituindo os valores de x e x^2 tirados da igualdade (3)

$$\int -\frac{2(\beta-\alpha)^2 x^2}{(x^2-1)^3}\,dx = \frac{(\beta-\alpha)^2}{8}\left\{\frac{2\times\frac{2z-(\alpha+\beta)}{z-\alpha}\sqrt{\frac{z-\beta}{z-\alpha}}}{\left(\frac{\beta-\alpha}{z-\alpha}\right)^2} + lg\,\frac{\sqrt{\frac{z-\beta}{z-\alpha}}-1}{\sqrt{\frac{z-\beta}{z-\alpha}}+1}\right\} + const.$$

$$= \frac{(\beta-\alpha)^2}{8}\left\{\frac{2\,[2z-(\alpha+\beta)]\sqrt{(z-\alpha)(z-\beta)}}{(\beta-\alpha)^2} + lg\,\frac{\sqrt{\frac{z-\beta}{z-\alpha}}-1}{\sqrt{\frac{z-\beta}{z-\alpha}}+1}\right\} + const.$$

e fazendo a integração entre os limites $z=o$ e $z=b$

$$\int_{z=o}^{z=b} -\frac{2(\beta-\alpha)^2x^2}{(x^2-1)^3}\,dx = \frac{(\beta-\alpha)^2}{8}\left\{\frac{2\,[2b-(\alpha+\beta)]\sqrt{(b-\alpha)(b-\beta)}}{(\beta-\alpha)^2} + lg\,\frac{\sqrt{\frac{b-\beta}{b-\alpha}}-1}{\sqrt{\frac{b-\beta}{b-\alpha}}+1} - \frac{-2(\alpha+\beta)\sqrt{\alpha\beta}}{(\beta-\alpha)^2} - lg\,\frac{\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}-1}{\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}+1}\right\}$$

$$= \frac{(\beta-\alpha)^2}{8}\left\{\frac{2\,[2b-(\alpha+\beta)]\sqrt{(b-\alpha)(b-\beta)}+2(\alpha+\beta)\sqrt{\alpha\beta}}{(\beta-\alpha)^2} + lg\,\frac{\left(\sqrt{\frac{b-\beta}{b-\alpha}}-1\right)\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}+1\right)}{\left(\sqrt{\frac{b-\beta}{b-\alpha}}+1\right)\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}-1\right)}\right\}$$

Se substituirmos os valores (1) e (2) de α e β, attendendo a que na hyperbole á abscissa $z=o$ corresponde a ordenada $x=a$, sendo por isso $2Mb+b^2=\frac{a^2M^2}{N^2}$; notando tambem que o logarithmo é neperiano e que para poder tomar-se no systema vulgar é preciso multiplical-o por $\frac{1}{0{,}4342945}=2{,}302585$, como

$$S_a = \frac{2N\sqrt{M^2+Q^2}}{M^2}\int_o^b dz\sqrt{z^2-2(M+b)z+\left(2Mb+b^2+\frac{M^2Q^2}{M^2+Q^2}\right)}$$

será

$$S_a = \frac{NM^2}{\sqrt{M^2+Q^2}}\left\{\frac{(M+b)\sqrt{\frac{a^2M^2}{N^2}+\frac{M^2Q^2}{M^2+Q^2}}-M\sqrt{\frac{M^2Q^2}{M^2+Q^2}}}{\frac{M^4}{M^2+Q^2}} + 2{,}302585\times lg.\frac{\left(\sqrt{\frac{M-\sqrt{\frac{M^4}{M^2+Q^2}}}{M+\sqrt{\frac{M^4}{M^2+Q^2}}}}-1\right)\left(\sqrt{\frac{M+b-\sqrt{\frac{M^4}{M^2+Q^2}}}{M+b+\sqrt{\frac{M^4}{M^2+Q^2}}}}+1\right)}{\left(\sqrt{\frac{M-\sqrt{\frac{M^4}{M^2+Q^2}}}{M+\sqrt{\frac{M^4}{M^2+Q^2}}}}+1\right)\left(\sqrt{\frac{M+b-\sqrt{\frac{M^4}{M^2+Q^2}}}{M+b+\sqrt{\frac{M^4}{M^2+Q^2}}}}-1\right)}\right\}$$

NOTA 4.ª

Da hyperbole expressa pela equação $\qquad M^2x^2-N^2z^2=-M^2N^2$

d'onde se tira

$$\frac{dx}{dz}=\frac{N^2z}{M^2x};\qquad \left(\frac{dx}{dz}\right)^2=\frac{N^4z^2}{M^4x^2}=\frac{N^4z^2}{M^4\frac{N^2}{M^2}(z^2-M^2)}=\frac{N^2z^2}{M^2(z^2-M^2)};\ \text{e}\ \left(\frac{dx}{dz}\right)^2+1=\frac{(M^2+N^2)z^2-M^4}{M^2(z^2-M^2)}$$

o arco elementar será

$$ds=\sqrt{dx^2+dz^2}=dz\sqrt{\left(\frac{dx}{dz}\right)^2+1}=dz\sqrt{\frac{(M^2+N^2)z^2-M^4}{M^2(z^2-M^2)}}=dz\sqrt{\frac{\frac{M^2+N^2}{M^2}.z^2-M^2}{z^2-M^2}}$$

e se fizermos $\qquad \frac{\sqrt{M^2+N^2}}{M}=e$, e $z=\frac{M}{\cos\varphi}$, d'onde resulta $dz=\frac{M\,sen\,\varphi\,d\varphi}{\cos^2\varphi}$

vem

$$ds=\frac{M\,sen\,\varphi\,d\varphi}{\cos^2\varphi}\sqrt{\frac{\frac{M^2e^2}{\cos^2\varphi}-M^2}{\frac{M^2}{\cos^2\varphi}-M^2}}=\frac{M\,sen\,\varphi\,d\varphi}{\cos^2\varphi}\sqrt{\frac{\frac{e^2}{\cos^2\varphi}-1}{\frac{1}{\cos^2\varphi}-1}}=\frac{M\,e\,sen\,\varphi\,d\varphi}{\cos^2\varphi}\sqrt{\frac{1-\frac{\cos^2\varphi}{e^2}}{1-\cos^2\varphi}}$$

ou

$$ds=\frac{M\,e\,d\varphi}{\cos^2\varphi}\sqrt{1-\frac{\cos^2\varphi}{e^2}}$$

e desenvolvendo o radical pela formula do binomio, o arco contado do ponto em que $\varphi = o$ ou $z = M$, que é o vertice da curva, será

$$s = Me\int_o^\varphi \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}\left[1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{\cos^2\varphi}{e^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{\cos^4\varphi}{e^4} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{\cos^6\varphi}{e^6} - \ldots\ldots - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\ldots\ldots\frac{2m-3}{2m}\cdot\frac{\cos^{2m}\varphi}{e^{2m}}\right]$$

$$= Me\int_o^\varphi \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} - \frac{M}{2e}\int_o^\varphi d\varphi - \frac{M}{e}\int_o^\varphi d\varphi\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{\cos^2\varphi}{e^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{\cos^4\varphi}{e^4} + \ldots\ldots + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\ldots\ldots\frac{2m-3}{2m}\cdot\frac{\cos^{2m-2}\varphi}{e^{2m-2}}\right]$$

ou

$$s = Me\,tg\,\varphi - \frac{M\varphi}{2e} - \frac{M}{e}\int_o^\varphi d\varphi\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{\cos^2\varphi}{e^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{\cos^4\varphi}{e^4} + \ldots\ldots + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\ldots\ldots\frac{2m-3}{2m}\cdot\frac{\cos^{2m-2}\varphi}{e^{2m-2}}\right]$$

Para o caso de n ser par temos

$$\int_o^\varphi \cos^n\varphi\, d\varphi = \frac{sen\,\varphi}{n}\left[\cos^{n-1}\varphi + \frac{(n-1)}{(n-2)}\cos^{n-3}\varphi + \frac{(n-1)(n-3)}{(n-2)(n-4)}\cos^{n-5}\varphi + \ldots\ldots + \frac{(n-1)\ldots\ldots 5.3}{(n-2)\ldots\ldots 4.2}\cos\varphi\right] + \frac{1.3.5\ldots\ldots(n-1)}{2.4.6\ldots\ldots n}\varphi$$

e portanto

$$\int \cos^2\varphi\, d\varphi = \frac{sen\,\varphi}{2}\left[\cos\varphi\right] + \frac{1}{2}\varphi$$

$$\int \cos^4\varphi\, d\varphi = \frac{sen\,\varphi}{4}\left[\cos^3\varphi + \frac{3}{2}\cos\varphi\right] + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\varphi$$

$$\int \cos^6\varphi\, d\varphi = \frac{sen\,\varphi}{6}\left[\cos^5\varphi + \frac{5}{4}\cos^3\varphi + \frac{5}{4}\cdot\frac{3}{2}\cos\varphi\right] + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\varphi$$

....

$$\int \cos^{2m-2}\varphi\, d\varphi = \frac{sen\,\varphi}{2m-2}\left[\cos^{2m-3}\varphi + \frac{(2m-3)}{(2m-4)}\cos^{2m-5}\varphi + \frac{(2m-3)(2m-5)}{(2m-4)(2m-6)}\cos^{2m-7}\varphi + \ldots + \frac{(2m-3)\ldots 5.3}{(2m-4)\ldots 4.2}\cos\varphi\right] + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\ldots\frac{(2m-3)}{(2m-2)}\varphi$$

quantidades que na expressão de s estão multiplicadas respectivamente por

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{e^2}$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{e^4}$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{1}{e^6}$$

....

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\ldots\ldots\frac{2m-3}{2m}\cdot\frac{1}{e^{2m-2}}$$

e effectuando as multiplicações resulta

$$s = \left[\begin{array}{l} Me\,tg\,\varphi - \dfrac{M\varphi}{2e}\left[1 + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{e}\right)^2 + \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{e^2}\right)^2 + \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{1}{e^3}\right)^2 + \ldots + \dfrac{1}{m}\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\ldots\dfrac{2m-3}{2m-2}\cdot\dfrac{1}{e^{m-1}}\right)^2\right] \\ - \dfrac{M\,sen\,\varphi}{2e} \times \left\{\begin{array}{l} \cos\varphi\left[\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{e}\right)^2 + \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{e^2}\right)^2 + \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{1}{e^3}\right)^2 + \ldots + \dfrac{1}{m}\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\ldots\dfrac{2m-3}{2m-2}\cdot\dfrac{1}{e^{m-1}}\right)^2\right] \\ + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\cos^3\varphi}{3}\left[\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{e^2}\right)^2 + \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{1}{e^3}\right)^2 + \ldots\ldots + \dfrac{1}{m}\left(\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\ldots\ldots\dfrac{2m-3}{2m-2}\cdot\dfrac{1}{e^{m-1}}\right)^2\right] \\ + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{\cos^5\varphi}{5}\left[\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{1}{e^3}\right)^2 + \ldots\ldots + \dfrac{1}{m}\left(\dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{7}{8}\ldots\ldots\dfrac{2m-3}{2m-2}\cdot\dfrac{1}{e^{m-1}}\right)^2\right] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\ldots\ldots\ldots\ldots\dfrac{2m-5}{2m-4}\cdot\dfrac{\cos^{2m-3}\varphi}{2m-3}\left[\dfrac{1}{m}\left(\dfrac{2m-3}{2m-2}\cdot\dfrac{1}{e^{m-1}}\right)^2\right] \end{array}\right\} \end{array}\right]$$

O arco de hyperbole que deve tomar-se é $2s$, pois que s é contado só em um dos ramos da curva. O arco auxiliar φ é determinado pela condição de ser $\cos\varphi = \frac{M}{z}$, e como s é contado desde o vertice até ao ponto para o qual $z = M + b$, será

$$\cos\varphi = \frac{M}{M+b}; \qquad sen\,\varphi = \frac{aM}{N(M+b)}; \qquad tg.\,\varphi = \frac{a}{N}; \qquad \varphi = arc.\,tg.\frac{a}{N}$$

NOTA 5.ª

O segmento da hyperbole dada pela equação

$$M^2 x^2 - N^2 (M + b - z)^2 = - M^2 N^2,$$

tomado desde $z = o$ até $z = b$, será

$$H_a = 2 \int_o^b x\, dz = \frac{2N}{M} \int_o^b dz \sqrt{(M + b - z)^2 - M^2}$$

e como a quantidade sob o radical é um trinomio do segundo grau cujas raizes são

$$\alpha = 2M + b \qquad \beta = b$$

evidentemente reaes, positivas e desiguaes, podemos fazer

$$\sqrt{(M + b - z)^2 - M^2} = (z - \alpha)\, x$$

d'onde resulta

$$z - \beta = (z - \alpha)\, x^2$$

$$z = \frac{\beta - \alpha x^2}{1 - x^2}$$

$$dz = \frac{2x(\beta - \alpha)}{(1 - x^2)^2} dx = \frac{2x)\beta - \alpha)}{(x^2 - 1)^2} dx$$

$$(z - \alpha)\, x = \frac{(\beta - \alpha)\, x}{1 - x^2} = - \frac{(\beta - \alpha)\, x}{x^2 - 1}$$

e portanto

$$dz \sqrt{(M + b - z)^2 - M^2} = - \frac{2(\beta - \alpha)^2 x^2}{(x^2 - 1)^3} dx$$

Ora, como estamos exactamente nas condições da nota 3.ª, será

$$\int_o^b dz \sqrt{(M + b - z)^2 - M^2} = \frac{(\beta - \alpha)^2}{8} \left\{ \frac{2[2b - (\alpha + \beta)]\sqrt{(b - \alpha)(b - \beta)} + 2(\alpha + \beta)\sqrt{\alpha\beta}}{(\beta - \alpha)^2} + lg. \frac{\left(\sqrt{\frac{b - \beta}{b - \alpha}} - 1\right)\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} + 1\right)}{\left(\sqrt{\frac{b - \beta}{b - \alpha}} + 1\right)\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} - 1\right)} \right\}$$

e pondo em vez de α e β os seus valores

$$H_a = \frac{2N}{M} \times \frac{M^2}{2} \left[\frac{(M + b)\sqrt{2Mb + b^2}}{M^2} + lg. \frac{1 + \sqrt{\frac{b}{2M + b}}}{1 - \sqrt{\frac{b}{2M + b}}} \right]$$

ou, por ser $2Mb + b^2 = \frac{a^2 M^2}{N^2}$, e dividindo por 0,4342945 o logarithmo neperiano que está no segundo membro, para que possa tomar-se no systema vulgar,

$$H_a = MN \left[\frac{(M + b)\, a}{MN} + \frac{lg. \frac{aM + bN}{aM - bN}}{0{,}4342945} \right]$$

NOTA 6.ª

Dividindo e multiplicando por $4b$ a expressão $dz \sqrt{(a^2 + 4b^2) - 4bz}$, será

$$\int_o^b dz \sqrt{(a^2 + 4b^2) - 4bz} = \frac{1}{4b} \int_o^b [(a^2 + 4b^2) - 4bz]^{\frac{1}{2}} \times 4b\, dz = - \frac{1}{4b} \left\{ \frac{[(a^2 + 4b^2) - 4bz]^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right\}_o^b$$

ou

$$\int_o^b dz \sqrt{(a^2 + 4b^2) - 4bz} = \frac{1}{6b} [(a^2 + 4b^2)^{\frac{3}{2}} - a^3]$$

NOTA 7.ª

Da parabola expressa pela equação $x^2 = \frac{a^2}{b}(b-z),$

d'onde se tira $\frac{dz}{dx} = -\frac{2b}{a^2}x \qquad \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = \frac{4b^2}{a^4}x^2,$

o arco elementar será $ds = \sqrt{dx^2 + dz^2} = dx\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + 1} = dx\sqrt{\frac{4b^2}{a^4}x^2 + 1}$

e como demonstrámos na nota 1.ª que

$$\int_o^x dx\sqrt{mx^2+1} = \frac{x\sqrt{mx^2+1}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{m}} \times lg.\left(x\sqrt{m} + \sqrt{mx^2+1}\right)$$

o arco da parabola, contado desde o vertice até ao ponto cuja ordenada é a, será

$$s = \frac{a\sqrt{ma^2+1}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{m}} \times lg.\left(a\sqrt{m} + \sqrt{ma^2+1}\right)$$

No caso presente é $m = \frac{4b^2}{a^4}$, o arco P_a que procurâmos é o dobro de s, e, para que o logarithmo neperiano que está no segundo membro se possa tomar no systema vulgar, effectuando a divisão d'elle por $log.\ e = 0,4342945$, teremos

$$P_a = \sqrt{a^2 + 4b^2} + \frac{a^2}{2b} \times \frac{lg.\frac{2b + \sqrt{a^2+4b^2}}{a}}{0,4342945}\cdot$$

NOTA 8.ª

O segmento P_a da parabola que tem a equação $x^2 = \frac{a^2}{b}(b-z)$ é

$$P_a = 2\int_o^b x \times dz = \frac{2a}{\sqrt{b}}\int_o^b dz\sqrt{b-z} = -\frac{2a}{\sqrt{b}}\left\{\frac{(b-z)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right\}_o^b$$

ou

$$P_a = \frac{4}{3}ab$$

NOTA 9.ª

Recorrendo ao methodo de integração por partes será

$$\int_o^b \left[a - r + \sqrt{r^2 - z^2}\right]\frac{dz}{\sqrt{R^2 - z^2}} = \left[a - r + \sqrt{r^2 - z^2}\right] \times arc.\ sen\ \frac{z}{R} + \int_o \frac{z\ .dz \times arc.\ sen.\ \frac{z}{R}}{\sqrt{r^2 - z^2}} + const$$

mas como, para $z = o$ é $arc.\ sen\ \frac{z}{R} = o$, e para $z = b$ é $a - r + \sqrt{r^2 - z^2} = a - r + (r - a) = o$, teremos

$$\int_o^b \left[a - r + \sqrt{r^2 - z^2}\right]\frac{dz}{\sqrt{R^2 - z^2}} = \int_o^b \frac{z\ .\ dz \times arc.\ sen\ \frac{z}{R}}{\sqrt{r^2 - z^2}}$$

e se desenvolvermos $arc.\ sen\ \frac{z}{R}$ em serie, a qual será convergente, pois que $z < R$, vem

$$2R\int_o^b \left[a - r + \sqrt{r^2 - z^2}\right]\frac{dz}{\sqrt{R^2 - z^2}} = 2\int_o^b \frac{z^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{z^4}{3R^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{z^6}{5R^4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{z^8}{7R^6} + \ldots + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\ldots\frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{z^{2m+2}}{(2m+1)R^{2m}}}{\sqrt{r^2 - z^2}} \times dz$$

Para o caso de n ser numero par é

$$\int \frac{z^n\,dz}{\sqrt{r^2-z^2}} = -\frac{\sqrt{r^2-z^2}}{n}\left[z^{n-1} + \frac{n-1}{n-2}r^2 z^{n-3} + \frac{(n-1)(n-3)}{(n-2)(n-4)}r^4 z^{n-5} + \ldots + \frac{(n-1)\ldots 5.3}{(n-2)\ldots 4.2}r^{n-2}z\right] + \frac{(n-1)\ldots 3.1}{n\ldots\ldots\ldots 4.2}r^n\, arc.sen\frac{z}{r}$$

e por consequencia

$$\int \frac{z^2\,dz}{\sqrt{r^2-z^2}} = -\frac{\sqrt{r^2-z^2}}{2} \times z + \frac{1}{2}r^2 \times arc.\,sen\frac{z}{r}$$

$$\int \frac{z^4\,dz}{\sqrt{r^2-z^2}} = -\frac{\sqrt{r^2-z^2}}{4}\left[z^3 + \frac{3}{2}r^2 z\right] + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}r^4 \times arc.\,sen\frac{z}{r}$$

$$\int \frac{z^6\,dz}{\sqrt{r^2-z^2}} = -\frac{\sqrt{r^2-z^2}}{6}\left[z^5 + \frac{5}{4}r^2 z^3 + \frac{5}{4}\cdot\frac{3}{2}r^4 z\right] + \frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}r^6 \times arc.\,sen\frac{z}{r}$$

....

$$\int \frac{z^{2m+2}dz}{\sqrt{r^2-z^2}} = -\frac{\sqrt{r^2-z^2}}{2m+2}\left[z^{2m+1} + \frac{2m+1}{2m}r^2 z^{2m-1} + \frac{(2m+1)(2m-1)}{2m(2m-2)}r^4 z^{2m-3} + \ldots + \frac{(2m+1)\ldots 5.3}{2m\ldots\ldots 4.2}r^{2m}z\right]$$
$$+ \frac{(2m+1)\ldots 5.3.1}{(2m+2)\ldots 6.2.4}r^{2m+2} \times arc.\,sen\frac{z}{r}$$

quantidades que na expressão a integrar são multiplicadas respectivamente por

$$1$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3R^2}$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5R^4}$$

....

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\ldots\frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{1}{(2m+1)R^{2m}}$$

e effectuando as multiplicações resulta

$$\left(\frac{1}{2}arc.\,sen\frac{z}{r}\right)\left[r^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{r^2}{R}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{r^3}{R^2}\right)^2 + \ldots\ldots + \frac{1}{m+1}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\ldots\ldots\frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{r^{m+1}}{R^m}\right)^2\right]$$
$$-\frac{\sqrt{r^2-z^2}}{2}\left\{\begin{array}{l} z\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{r}{R}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{r^2}{R^2}\right)^2 + \ldots\ldots + \frac{1}{m+1}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\ldots\ldots\frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{r^m}{R^m}\right)^2\right] \\ + \frac{1}{2}\cdot\frac{z^3}{3}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{r}{R^2}\right)^2 + \ldots\ldots + \frac{1}{m+1}\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\ldots\ldots\frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{r^{m-1}}{R^m}\right)^2\right] \\ + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{z^5}{5}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{R^2}\right)^2 + \ldots\ldots + \frac{1}{m+1}\left(\frac{5}{6}\ldots\ldots\frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{r^{m-2}}{R^m}\right)^2\right] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\ldots\ldots\ldots\ldots\frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{z^{2m+1}}{2m+1}\left[\frac{1}{m+1}\left(\frac{1}{R^m}\right)^2\right] \end{array}\right\}$$

A expressão que acabamos de determinar tem de ser tomada entre os limites $z = o$ e $z = b$, para o primeiro dos quaes se torna nulla, sendo para o segundo $\sqrt{r^2-z^2} = \sqrt{r^2-b^2} = r - a$.

NOTA 10.ª

Para determinar o valor de

$$\int_o^b \left[a - r + \sqrt{r^2-z^2}\right] dz \sqrt{\frac{R^2 - z^2\cos^2\theta}{R^2-z^2}},$$

como z é sempre menor que R, pois que varía entre os limites o e b, podemos fazer $z = R.\,sen\varphi$, d'onde se tira $dz = R.\,\cos\varphi d\varphi$, e então

$$\int_o^b \left[a - r + \sqrt{r^2-z^2}\right] dz \sqrt{\frac{R^2 - z^2\cos^2\theta}{R^2-z^2}} = \int\left[a - r + \sqrt{r^2 - R^2 sen^2\varphi}\right] \times R.\,\cos\varphi\, d\varphi \sqrt{\frac{R^2 - R^2\cos^2\theta\, sen^2\varphi}{R^2 - R^2 sen^2\varphi}}$$

$$= R\left[r\int d\varphi\sqrt{1 - \frac{R^2}{r^2}sen^2\varphi}\sqrt{1 - \cos^2\theta\, sen^2\varphi} - (r-a)\int d\varphi\sqrt{1-\cos^2\theta\, sen^2\varphi}\right] \qquad (a)$$

Se desenvolvermos os radicaes em serie pela formula do binomio de Newton, será

$$\sqrt{1-\frac{R^2}{r^2}sen^2\varphi}=1-\frac{1}{2}\frac{R^2}{r^2}sen^2\varphi-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\frac{R^4}{r^4}sen^4\varphi-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{R^6}{r^6}sen^6\varphi-\ldots\ldots-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\cdots\frac{2m-3}{2m}\frac{R^{2m}}{r^{2m}}sen^{2m}\varphi$$

$$\sqrt{1-cos^2\theta\, sen^2\varphi}=1-\frac{1}{2}cos^2\theta\, sen^2\varphi-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}cos^4\theta\, sen^4\varphi-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}cos^6\theta\, sen^6\varphi-\ldots\ldots-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\cdots\frac{2m-3}{2m}cos^{2m}\theta\, sen^{2m}\varphi$$

e por consequencia

$$\sqrt{1-\frac{R^2}{r^2}sen^2\varphi}\sqrt{1-cos^2\theta\, sen^2\varphi}=1-\frac{1}{2}\left(\frac{R^2}{r^2}+cos^2\theta\right)sen^2\varphi-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{R^4}{r^4}+cos^4\theta-2\frac{R^2}{r^2}cos^2\theta\right)sen^4\varphi$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\left[\frac{R^6}{r^6}+cos^6\theta-\left(\frac{R^4}{r^4}cos^2\theta+\frac{R^2}{r^2}cos^4\theta\right)\right]sen^6\varphi$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{5}{8}\left[\frac{R^8}{r^8}+cos^8\theta-\frac{4}{5}\left(\frac{R^6}{r^6}cos^2\theta+\frac{R^2}{r^2}cos^6\theta\right)-\frac{2}{5}\frac{R^4}{r^4}cos^4\theta\right]sen^8\varphi-\ldots\ldots$$

$$=1-\frac{1}{2}A_1\,sen^2\varphi-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}A_2\,sen^4\varphi-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}A_3\,sen^6\varphi-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{5}{8}A_4\,sen^8\varphi\ldots\ldots$$

Para o caso de n ser numero par temos

$$\int sen^n\varphi\,d\varphi=-\frac{cos\varphi}{n}\left[sen^{n-1}\varphi+\frac{n-1}{n-2}sen^{n-3}\varphi+\frac{(n-1)(n-3)}{(n-2)(n-4)}sen^{n-5}\varphi+\ldots\ldots+\frac{(n-1)\ldots5.3}{(n-2)\ldots4.2}sen\varphi\right]+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{n-1}{n}\varphi$$

e portanto

$$\int sen^2\varphi\,d\varphi=-\frac{cos\varphi}{2}\left[sen\varphi\right]+\frac{1}{2}\varphi$$

$$\int sen^4\varphi\,d\varphi=-\frac{cos\varphi}{4}\left[sen^3\varphi+\frac{3}{2}sen\varphi\right]+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\varphi$$

$$\int sen^6\varphi\,d\varphi=-\frac{cos\varphi}{6}\left[sen^5\varphi+\frac{5}{4}sen^3\varphi+\frac{5}{4}\cdot\frac{3}{2}sen\varphi\right]+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\varphi$$

$$\int sen^8\varphi\,d\varphi=-\frac{cos\varphi}{8}\left[sen^7\varphi+\frac{7}{6}sen^5\varphi+\frac{7}{6}\cdot\frac{5}{4}\cdot sen^3\varphi+\frac{7}{6}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{3}{2}sen\varphi\right]+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\varphi$$

....

$$\int sen^{2m}\varphi\,d\varphi=-\frac{cos\varphi}{2m}\left[sen^{2m-1}\varphi+\frac{2m-1}{2m-2}sen^{2m-3}\varphi+\frac{(2m-1)(2m-3)}{(2m-2)(2m-4)}sen^{2m-5}\varphi+\ldots+\frac{(2m-1)\ldots5.3}{(2m-2)\ldots4.2}sen\varphi\right]+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2m-1}{2m}$$

Estas quantidades, na determinação de $\int d\varphi\sqrt{1-\frac{R^2}{r^2}sen^2\varphi}\sqrt{1-cos^2\theta\, sen^2\varphi}$, são multiplicadas respectivamente por

$$\frac{1}{2}A_1;\qquad \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}A_2;\qquad \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}A_3;\qquad \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{5}{8}A_4;\ldots\ldots$$

e na determinação de $\int d\varphi\sqrt{1-cos^2\theta\, sen^2\varphi}$ são multiplicadas respectivamente por

$$\frac{1}{2}cos^2\theta;\qquad \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}cos^4\theta;\qquad \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}cos^6\theta;\ldots\ldots\qquad \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\ldots\ldots\frac{2m-3}{2m}cos^{2m}\theta$$

e effectuando as multiplicações será

$$\int d\varphi\sqrt{1-\frac{R^2}{r^2}sen^2\varphi}\sqrt{1-cos^2\theta\, sen^2\varphi}=\left[\begin{array}{l}\varphi\left\{1-\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2A_1+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)^2A_2+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\right)^2A_3+\frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\right)^2A_4+\ldots\ldots\right]\right\}\\ +cos\varphi\left\{\begin{array}{l}sen\varphi\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2A_1+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)^2A_2+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\right)^2A_3+\frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\right)^2A_4+\ldots\ldots\right]\\ +\frac{1}{2}\cdot\frac{sen^3\varphi}{3}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^2A_2+\frac{1}{5}\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\right)^2A_3+\frac{1}{7}\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\right)^2A_4+\ldots\ldots\right]\\ +\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{sen^5\varphi}{5}\left[\frac{1}{5}\left(\frac{5}{6}\right)^2A_3+\frac{1}{7}\left(\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\right)^2A_4+\ldots\ldots\right]\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\}\end{array}\right]$$

$$\int d\varphi \sqrt{1-\cos^2\theta\, sen^2\varphi} = \left|\begin{array}{l} \varphi\left\{1-\left[\left(\frac{1}{2}\cos\theta\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cos^2\theta\right)^2+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cos^3\theta\right)^2+\ldots\ldots+\frac{1}{2m-1}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\cdot\frac{2m-1}{2m}\cos^m\theta\right)^2\right]\right\} \\ +\cos\varphi\left\{\begin{array}{l} sen\,\varphi\left[\left(\frac{1}{2}\cos\theta\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cos^2\theta\right)^2+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cos^3\theta\right)^2+\ldots+\frac{1}{2m-1}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\cdot\frac{2m-1}{2m}\cos^m\theta\right)^2\right] \\ +\frac{1}{2}\cdot\frac{sen^3\varphi}{3}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\cos^2\theta\right)^2+\frac{1}{5}\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cos^3\theta\right)^2+\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{2m-1}\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\cdot\frac{2m-1}{2m}\cos^m\theta\right)^2\right] \\ +\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{sen^5\varphi}{5}\left[\frac{1}{5}\left(\frac{5}{6}\cos^3\theta\right)^2+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{2m-1}\left(\frac{5}{6}\ldots\frac{2m-1}{2m}\cos^m\theta\right)^2\right] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\frac{2m-3}{2m-2}\cdot\frac{sen^{2m-1}\varphi}{2m-1}\left[\frac{1}{2m-1}\left(\frac{2m-1}{2m}\cos^m\theta\right)^2\right] \end{array}\right\} \end{array}\right|$$

Estas expressões tornam-se nullas para $z=o$, que dá $\varphi=o$; para $z=b$ será

$$sen\,\varphi=\frac{b}{R}; \qquad \cos\varphi=\frac{R-a'}{R}; \qquad \varphi=arc.\,sen\,\frac{b}{R}$$

NOTA 11.ª

Quando for $\frac{R}{r}=\cos\theta$ a igualdade *(a)* da nota antecedente reduz-se a

$$\int\left[a-r+\sqrt{r^2-z^2}\right]dz\sqrt{\frac{R^2-z^2\cos^2\theta}{R^2-z^2}}=R\left[r\int(1-\cos^2\theta\, sen^2\varphi)\,d\varphi-(r-a)\int d\varphi\sqrt{1-\cos^2\theta\; sen^2\varphi}\right]$$

Sabemos que

$$\int(1-\cos^2\theta\, sen^2\varphi)\,d\varphi=\varphi-\cos^2\theta\left[-\frac{\cos\varphi}{2}\times sen\,\varphi+\frac{1}{2}\varphi\right]=\frac{1}{2}sen\,\varphi\cos\varphi\cos^2\theta+\varphi\left(1-\frac{1}{2}\cos^2\theta\right)$$

e como a integração é entre os limites $z=o$ a que corresponde $\varphi=o$, e $z=b$ a que corresponde

$$sen\,\varphi=\frac{b}{R}; \qquad \cos\varphi=\frac{R-a'}{R}; \qquad \varphi=arc.\,sen\,\frac{b}{R}$$

será

$$\int_o^b(1-\cos^2\theta\, sen^2\varphi)\,d\varphi=\frac{1}{2}\frac{b\,(R-a')}{R^2}\cdot\cos^2\theta+\left(1-\frac{1}{2}\cos^2\theta\right)\times arc.\;sen\;\frac{b}{R}$$

Quanto a $\int_o^b d\varphi\,\sqrt{1-\cos^2\theta\, sen^2\varphi}$ o seu valor é o que se determinou na nota 10.ª

NOTA 12.ª

Para as funcções irracionaes da fórma $\sqrt{m-z^2}$ é

$$\int dz\sqrt{m-z^2}=\frac{z\sqrt{m-z^2}}{2}+\frac{m}{2}\times arc.\,sen.\,\frac{z}{\sqrt{m}}+const.$$

e então, se notarmos que $R^2-b^2=(R-a')^2$ e $r^2-b^2=(r-a)^2$, será

$$\int_o^b dz\sqrt{R^2-z^2}=\frac{b\,(R-a')}{2}+\frac{R^2}{2}\times arc.\,sen\,\frac{b}{R}$$

$$\int_o^b dz\sqrt{r^2-z^2}=\frac{b\,(r-a)}{2}+\frac{r^2}{2}\times arc.\;sen\,\frac{b}{r}$$

As quantidades $\sqrt{1-\frac{z^2}{r^2}}$ e $\sqrt{1-\frac{z^2}{R^2}}$ desenvolvidas em serie pela formula do binomio de Newton dão

$$\sqrt{1-\frac{z^2}{r^2}}=1-\frac{1}{2}\cdot\frac{z^2}{r^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{z^4}{R^4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{z^6}{r^6}\ldots\ldots$$

$$\sqrt{1-\frac{z^2}{R^2}}=1-\frac{1}{2}\cdot\frac{z^2}{R^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{z^4}{R^4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{z^6}{R^6}\cdots\cdots$$

e portanto

$$\sqrt{1-\frac{z^2}{r^2}}\times\sqrt{1-\frac{z^2}{R^2}}=1-\frac{1}{2}z^2\left(\frac{1}{R^2}+\frac{1}{r^2}\right)-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}z^4\left(\frac{1}{R^4}+\frac{1}{r^4}-\frac{2}{R^2r^2}\right)-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}z^6\left[\frac{1}{R^6}+\frac{1}{r^6}-\left(\frac{1}{R^4r^2}+\frac{1}{R^2r^4}\right)\right]$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{5}{8}z^8\left[\frac{1}{R^8}+\frac{1}{r^8}-\frac{4}{5}\left(\frac{1}{R^6r^2}+\frac{1}{R^2r^6}\right)-\frac{2}{5}\frac{1}{R^4r^4}\right]-\cdots$$

d'onde se tira

$$\int^b dz\sqrt{1-\frac{z^2}{r^2}}\sqrt{1-\frac{z^2}{R^2}}=b\left\{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{b^2}{3}\left(\frac{1}{R^2}+\frac{1}{r^2}\right)-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{b^4}{5}\left(\frac{1}{R^4}+\frac{1}{r^4}-\frac{2}{R^2r^2}\right)-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{b^6}{7}\left[\frac{1}{R^6}+\frac{1}{r^6}-\left(\frac{1}{R^4r^2}+\frac{1}{R^2r^4}\right)\right]\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{b^8}{9}\left[\frac{1}{R^8}+\frac{1}{r^8}-\frac{4}{5}\left(\frac{1}{R^6r^2}+\frac{1}{R^2r^6}\right)-\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{R^4r^4}\right]-\cdots\right\}$$

NOTA 13.ª

Integrando por partes a expressão $dz\sqrt{mz^2+n}$ será

$$\int dz\sqrt{mz^2+n}=z\sqrt{mz^2+n}-\int\frac{mz^2\,dz}{\sqrt{mz^2+n}}=z\sqrt{mz^2+n}-\int\frac{(mz^2+n-n)\,dz}{\sqrt{mz^2+n}}$$

e portanto

$$\int dz\sqrt{mz^2+n}=\frac{z\sqrt{mz^2+n}}{2}+\frac{n}{2}\int\frac{dz}{\sqrt{mz^2+n}}$$

mas como

$$\int\frac{dz}{\sqrt{mz^2+n}}=\sqrt{\frac{1}{m}}\times lg.\left(z\sqrt{m}+\sqrt{mz^2+n}\right)$$

será

$$\int dz\sqrt{mz^2+n}=\frac{z\sqrt{mz^2+n}}{2}+\frac{n}{2\sqrt{m}}lg.\left(z\sqrt{m}+\sqrt{mz^2+n}\right)$$

Se substituirmos m por $\left[\left(\frac{\pi\theta R}{180r}\right)^2-4\right]$, n por $4r^2$, e dividirmos o logarithmo por 0,4342945 para poder tomal-o no systema vulgar, resultará

$$\int^r dz\sqrt{\left[\left(\frac{\pi\theta R}{180r}\right)^2-4\right]z^2+4r^2}=\frac{\pi\theta Rr}{360}+\frac{360r^3}{\sqrt{(\pi\theta R)^2-(360r)^2}}\times\frac{lg.\dfrac{\pi\theta R+\sqrt{(\pi\theta R)^2-(360r)^2}}{360r}}{0,4342945}$$

NOTA 14.ª

A expressão $dz\sqrt{n-mz^2}$ integrada por partes dá

$$\int dz\sqrt{n-mz^2}=z\sqrt{n-mz^2}+\int\frac{mz^2\,dz}{\sqrt{n-mz^2}}=z\sqrt{n-mz^2}+\int\frac{(mz^2+n-n)\,dz}{\sqrt{n-mz^2}}$$

e portanto

$$\int dz\sqrt{n-mz^2}=\frac{z\sqrt{n-mz^2}}{2}+\frac{n}{2}\int\frac{dz}{\sqrt{n-mz^2}}$$

mas como

$$\int\frac{dz}{\sqrt{n-mz^2}}=\frac{1}{\sqrt{m}}\times arc.\ sen\ z\sqrt{\frac{m}{n}}$$

será

$$\int dz\sqrt{n-mz^2}=\frac{z\sqrt{n-mz^2}}{2}+\frac{n}{2\sqrt{m}}\times arc.\ sen\ z\sqrt{\frac{m}{n}}$$

Se substituirmos m por $\left[4-\left(\frac{\pi\theta R}{180r}\right)^2\right]$, e n por $4r^2$, resultará

$$\int_0^r dz\sqrt{4r^2-\left[4-\left(\frac{\pi\theta R}{180r}\right)^2\right]z^2}=\frac{\pi\theta Rr}{360}+\frac{360r^3}{\sqrt{(360r)^2-(\pi\theta R)^2}}\times arc.\ sen.\ \frac{\sqrt{(360r)^2-(\pi\theta R)^2}}{360r}$$

APPENDICE

Nas escadas de caracol o pião e a caixa são cylindros rectos, de base circular e concentricos; os degraus assentam na superficie de um helicoide de plano director.

A abobada que se emprega n'estas escadas é um helicoide, do mesmo passo que aquelle em que assentam os degraus, sendo geralmente de um dos dois typos seguintes:

1.º Helicoide de plano director; e assim o vão da escada é um filete quadrangular de parafuso.

2.º Helicoide não regrado tendo por geratriz um semi-circulo cujo plano passa pelo eixo commum ao pião e á caixa. Com esta abobada, denominada *ponte de S. Gil,* porque o seu emprego teve logar pela primeira vez em uma igreja de França com a invocação d'este santo, o vão da escada consta, alem do filete quadrangular de parafuso que tem por faces empennadas o helicoide onde assentam os degraus e o gerado pelo diametro horisontal do semi-circulo, do espaço comprehendido entre este ultimo helicoide e o gerado pelo proprio semi-circulo.

Dividiremos em dois capitulos a determinação das formulas para a avaliação da superficie e da capacidade das escadas de caracol, tratando no primeiro do caso em que a abobada é o helicoide de plano director, e no segundo do caso em que ella é a *ponte de S. Gil.*

CAPITULO I

HELICOIDE DE PLANO DIRECTOR

PARTE I

SUPERFICIE DA ABOBADA, DA CAIXA E DO PIÃO DA ESCADA

Representaremos por r (figs. 12 e 12 bis) o raio Oa do pião, por l e a respectivamente a largura mn e a altura mm da escada, e será $r+l$ o raio da caixa e $r+\frac{l}{2}$ o raio do cylindro recto onde existe a helice media que faz o angulo α com o plano horisontal.

Se cortarmos a superficie da abobada por dois planos $mnm'n'$ e $rsr's'$ que passem pelo eixo $(O,O'O'')$ e façam entre si um angulo infinitamente pequeno, a porção $mnrs$ d'aquella superficie será um trapezio do qual a altura se confundirá com a largura mn da escada, e a linha que n'elle se tirar a igual distancia dos lados parallelos é o elemento ds_1 da helice media.

Ora, fazendo passar por mn um plano perpendicular ao eixo $(O,O'O'')$, a porção do plano comprehendida entre as intersecções feitas n'elle pelo pião e pela caixa será a corôa circular tendo para raios r e $r+l$, ou será a projecção do helicoide sobre o mesmo plano, e o trapezio circular $mnpq$ comprehendido entre os dois planos $mnm'n'$ e $rsr's'$ é a projecção do trapezio $mnrs$; e do triangulo rectangulo tuv tira-se $ds_1=\frac{ds}{\cos\alpha}$, sendo ds o elemento da circumferencia base do cylindro onde existe a helice media. Mas referindo esta circumferencia aos eixos orthogonaes (Ox) e (Oy) a sua equação é

$$x^2+y^2=\left(r+\frac{l}{2}\right)^2 \qquad (1)$$

e como o arco elementar é

$$ds=dx\sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1}$$

e pela substituição de $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ tirado da equação (1)

$$ds = \frac{\left(r+\frac{l}{2}\right)dx}{\sqrt{\left(r+\frac{l}{2}\right)^2 - x^2}}$$

será

$$ds_1 = \frac{r+\frac{l}{2}}{\cos\alpha} \times \frac{dx}{\sqrt{\left(r+\frac{l}{2}\right)^2 - x^2}}$$

A area do trapezio $m\,n\,r\,s$ será pois

$$m\,n\,r\,s = l \times \frac{r+\frac{l}{2}}{\cos\alpha} \times \frac{dx}{\sqrt{\left(r+\frac{l}{2}\right)^2 - x^2}}$$

e a area de uma espira complecta do helicoide

$$E = 4\,l \times \frac{r+\frac{l}{2}}{\cos\alpha} \int_0^{r+\frac{l}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\left(r+\frac{l}{2}\right)^2 - x^2}} = 4\,l \times \frac{r+\frac{l}{2}}{\cos\alpha} \times \frac{\pi}{2}$$

ou

$$E = \frac{2\pi\left(r+\frac{l}{2}\right)l}{\cos\alpha} \qquad \text{(I)}$$

expressão que evidentemente resulta de se dividir por $\cos\alpha$ a superficie da corôa circular projecção horisontal do helicoide.

No caso de querermos a porção da superficie helicoidal comprehendida entre dois planos que passando pelo eixo se cortem sob o angulo θ a qual terá por projecção na coroa circular o trapezio em que os lados rectilineos fazem o mesmo angulo θ, sendo n'elle a area $\frac{\pi\theta}{180}\left(r+\frac{l}{2}\right)l$, será aquella porção de helicoide

$$E_\theta = \frac{\pi\,\theta\left(r+\frac{l}{2}\right)l}{180 \times \cos\alpha} \qquad \text{(II)}$$

A superficie da caixa da escada está comprehendida entre duas helices que interceptam a porção a em cada geratriz do cylindro onde ella existe, e como, pela planificação d'este, aquella superficie se converte n'um parallelogrammo cuja base é a e a altura é a porção da circumferencia base do cylindro interceptada pelos dois planos que, passando pelo eixo do helicoide, limitam uma porção de caixa, notando que o raio do cylindro é $r+l$, a superficie que corresponde a uma espira será

$$C = 2\pi(r+l)\,a \qquad \text{(III}$$

e a que fica comprehendida entre dois planos que passando pelo eixo do helicoide se cortem sob o angulo θ terá por expressão

$$C_\theta = \frac{\pi\,\theta}{180}(r+l)\,a \qquad \text{(IV)}$$

A superficie $m'q's'$ que um degrau intercepta na caixa converte-se n'um triangulo rectangulo em que os cathetos são $q's' = a'$ altura do degrau e $\widehat{m'q'}$ arco da secção recta da caixa interceptado pelas duas arestas $m'n'$ e $p'q'$ que, sendo φ o angulo formado por ellas, terá o valor $\frac{\pi\,\varphi}{180}(r+l)$, sendo portanto a expressão d'aquella superficie

$$D_c = \frac{\pi\,\varphi}{360}(r+l)\,a' \qquad \text{(V)}$$

Para determinar a superficie do pião da escada o processo é inteiramente analogo ao que se empregou para a determinação da superficie da caixa, e assim a que corresponde a uma espira será

$$P = 2\pi\,r\,a \qquad \text{(VI)}$$

e a que fica comprehendida entre dois planos que passando pelo eixo do helicoide se cortem sob o angulo θ será

$$P_\theta = \frac{\pi\,\theta}{180}\,r\,a \qquad \text{(VII)}$$

A superficie $n'p'r'$ que um degrau intercepta no pião converte-se n'um triangulo rectangulo cujos cathetos são $p'r' = q's' = a'$ altura do degrau, e $\widehat{n'p'}$ arco da secção recta do pião interceptado pelas duas arestas $m'n'$ e $p'q'$ que, sendo φ o angulo formado por ellas, terá o valor $\frac{\pi\varphi}{180}\,r$, e a expressão d'aquella superficie será

$$D_\varphi = \frac{\pi\,\varphi}{360} \times r\,a' \qquad \text{(VIII)}$$

PARTE II

CAPACIDADE DA ESCADA

Se por mn e $m'n'$ fizermos passar planos perpendiculares ao eixo $(O,O'O'')$ o espaço comprehendido entre elles, o pião e a caixa da escada é a corôa cylindrica da altura a e com os raios r e $r+l$.

Fazendo tambem passar pelo eixo $(O,O'O'')$ dois planos $mnn'm'$ e $pqs'r'$ que se cortem sob um angulo infinitamente pequeno, é claro que os dois polyedros $mnpqsr$ e $m'n'p'q's'r'$ são iguaes entre si porque as faces de um são iguaes ás do outro e similhantemente dispostas, succedendo o mesmo com relação aos angulos diedros, e então será

$$m\,n\,p\,q\,s\,r + m\,n\,r\,s\,m'\,n'\,p'\,q' = mn\,rs\,m'\,n'\,p'\,q' + m'\,n'\,p'\,q'\,s'\,r'$$

e portanto são iguaes entre si os sectores da corôa cylindrica e do filete quadrangular de parafuso comprehendidos entre os dois planos que passam pelo eixo $(O,O'O'')$ e se cortam sob um angulo infinitamente pequeno. É facil concluir d'isto que a corôa cylindrica equivale a uma espira, ou

$$E = 2\pi\left(r + \frac{l}{2}\right)l\,a \qquad \text{(I)}$$

e que a porção de filete comprehendida entre dois planos que passando pelo eixo se cortem sob o angulo θ terá por expressão

$$E_\theta = \frac{\pi\,\theta}{180}\left(r + \frac{l}{2}\right)l\,a \qquad \text{(II)}$$

Para determinar o volume $m'n'p'q's'r'$ de um degrau façamos passar pelas arestas $m'n'$ e $p'q'$ planos que se interceptem segundo o eixo $(O,O'O'')$ e dos quaes o angulo será φ. Se pela aresta $p'q'$ traçarmos um helicoide com passo igual ao d'aquelle em que o degrau assenta, é claro que cada um dos solidos $m'n'p'q's'r'$ e $m'n'p'q'm_1n_1$ tem por volume metade do do sector de helicoide cuja altura é a do degrau, $a' = q's'$, e que está comprehendido entre os planos que se cortam sob o angulo φ, pois que aquelles solidos são iguaes entre si, visto as faces de um serem iguaes ás do outro e similhantemente dispostas, succedendo o mesmo aos angulos diedros, e o volume do degrau será

$$D = \frac{\pi\,\varphi}{360}\left(r + \frac{l}{2}\right)l\,a' \qquad \text{(III)}$$

CAPITULO II

PONTE DE S. GIL

PARTE I

SUPERFICIE DA ABOBADA

Representemos respectivamente por r e R (figs. 13 e 13 bis) o raio oA da geratriz e a distancia oO do centro d'ella ao eixo do helicoide.

Se cortarmos a abobada por dois planos ABC e DEF que, passando pelo eixo $(O,O'O'')$, façam entre si um angulo infinitamente pequeno, a porção $ABCDEF$ da superficie da abobada poderá planificar-se segundo um trapezio do qual a altura se confunde com o desenvolvimento πr da geratriz e cuja linha equidistante dos lados parallelos é o elemento ds_1 da helice media.

Ora, se descrevermos o tóro que tem a geratriz ABC, a porção da superficie d'elle comprehendida entre os planos ABC e GHI será $ABCGHI$ que póde planificar-se segundo um trapezio em que a altura se confunde com o desenvolvimento πr da geratriz, tendo por linha equidistante dos lados parallelos o elemento ds da circumferencia secção recta do cylindro onde existe a helice media da abobada. É claro que, se for α o angulo que esta helice faz com o plano horisontal, será $ds_1 = \frac{ds}{\cos\alpha}$, e como, referindo aquella circumferencia aos eixos orthogonaes (Ox) e (Oy),

a sua equação é
$$x^2 + y^2 = R^2$$

o elemento ds será
$$ds = \frac{R\,dx}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

e portanto
$$ds_1 = \frac{R}{\cos\alpha} \times \frac{dx}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

A area do trapezio $ABCDEF$ será pois
$$ABCDEF = \pi r \times \frac{R}{\cos\alpha} \times \frac{dx}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

e a de uma espira complecta da abobada
$$E = 4\pi r \times \frac{R}{\cos\alpha}\int_0^R \frac{dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} = 4\pi r \times \frac{R}{\cos\alpha} \times \frac{\pi}{2}$$

ou
$$E = \frac{2\pi^2 R r}{\cos\alpha} \qquad (I)$$

expressão evidentemente igual ao quociente que resulta de se dividir por $\cos\alpha$ a superficie do tóro.

A porção da superficie da *ponte de S. Gil* comprehendida entre dois planos que, passando pelo eixo, se cortem sob o angulo θ, á qual corresponde no tóro a porção de superficie comprehendida entre os mesmos planos, exprimir-se-ha por

$$E_\theta = \frac{\pi^2 \theta R r}{180 \times \cos\alpha} \qquad (II)$$

PARTE II

CAPACIDADE DA ABOBADA

Os dois planos que passam pelo eixo $(O, O'O'')$, cortando-se sob um angulo infinitamente pequeno, interceptam na abobada o sector *ABCDEF* e no tóro o sector *ABCGHI*. Ora, se por aA, intersecção feita pelo helicoide no plano *ACIG*, traçarmos um plano perpendicular aquelle resultarão os dois tetraedos *eaGA* e *abDA* iguaes em volume, pois que têem as bases *eaG* e *abD* iguaes, tendo o vertice commum A; e se pela recta ac, parallela a GA, traçarmos um plano perpendicular a *ACIG* resultarão os dois tetraedros *aegA* e *bacA* iguaes em volume, pois que têem as bases *aeg* e *bac* iguaes e situadas no mesmo plano, tendo o vertice commum A. Se por quaesquer duas rectas infinitamente proximas, parallelas a GA e situadas no plano *ACIG*, taes como mn e qs, traçarmos planos perpendiculares áquelle resultarão os prismas *mnpqrs* e $m'n'p'q'r's'$ evidentemente iguaes em volume, pois que têem bases iguaes e altura iguaes. Por este modo se conclue que os solidos $ABCIa'EaG$ e $AaDFa'C$ têem volumes equivalentes, e então

$$ABCIa'EaG + ABCa'Ea = ABCa'Ea + AaDFa'C$$

ou o sector do helicoide tem volume igual ao do sector do tóro.

O que acabamos de ver tem logar com quaesquer dois planos que passando pelo eixo da abobada se cortem sob um angulo infinitamente pequeno, e então a capacidade de uma espira complecta da *ponte de S. Gil* será igual á capacidade do tóro, ou

$$E = \pi^2 R r^2 \qquad \text{(I)}$$

e a capacidade do sector da abobada comprehendido entre dois planos que se cortem segundo o eixo sob o angulo θ será

$$E_\theta = \frac{\pi^2 \theta R r^2}{360} \qquad \text{(II)}$$

REG. INF. BIBLIOTHECA

ERRATAS

PAGINA	LINHA	ERRO	EMENDA
5	11	$a_1{}'$	a'_1
5	12	$x^2{}_1$	$x_1{}^2$
5	13	$y^2{}_1$	$y_1{}^2$
7	20	$C'^{a'}$	$C'_{a'}$
7	21	$\alpha_1{}'$	α'_1
7	21	$y^2{}_1$	$y_1{}^2$
7	24	e'_1	$e_1{}'$
21	21	coodernadas	coordenadas
26	17	A'	A'_c
27	20	$\left(\frac{dy}{z}\right)$	$\left(\frac{dy}{dz}\right)$
28	13	$\frac{3}{3}$	$\frac{3}{4}$
34	7	B'	B'_c
36	ultima	$\int^r$	$\int_o^r$
37	5	$lg. \frac{\pi \theta R + \sqrt{(\pi \theta R)^2 + (360 r)^2}}{360 r}$	$lg. \frac{\pi \theta R + \sqrt{(\pi \theta R)^2 - (360 r)^2}}{360 r}$
40	6	$\int^r$	$\int_o^r$
47	9	$\frac{(2m+1)..5.3.1}{(2m+2)..6.2.4}$	$\frac{(2m+1)..5.3.1}{(2m+2)..6.4.2}$
48	17	$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2m-1}{2m}$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2m-1}{2m} \varphi$
49	ultima	$\frac{z^4}{R^4}$	$\frac{z^4}{r^4}$
50	16	$\int^r$	$\int_o^r$

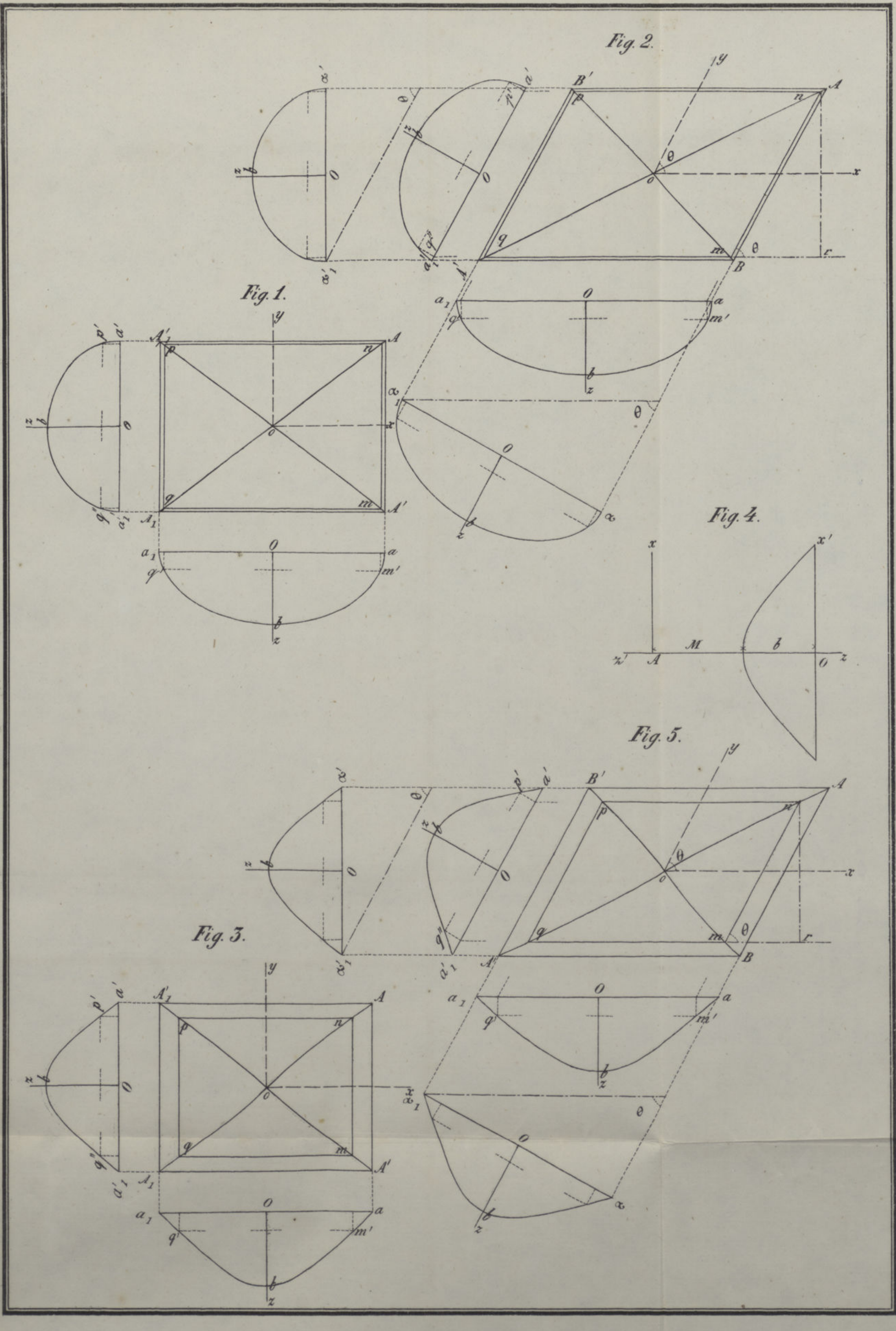


Fig. 1.

Fig. 2.

Fig. 3.

Fig. 4.

Fig. 5.

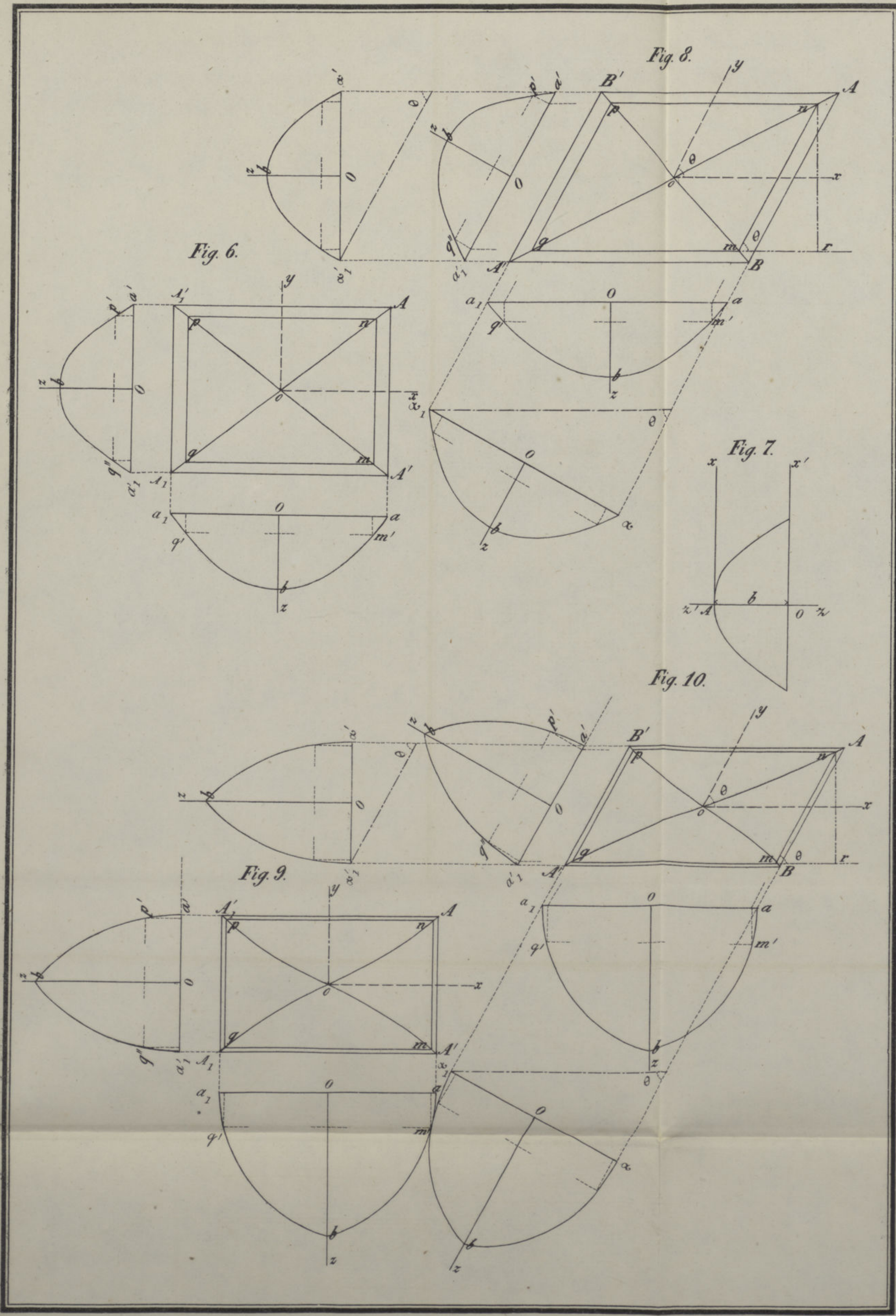


Fig. 8.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 10.
Fig. 9.

Fig. 11

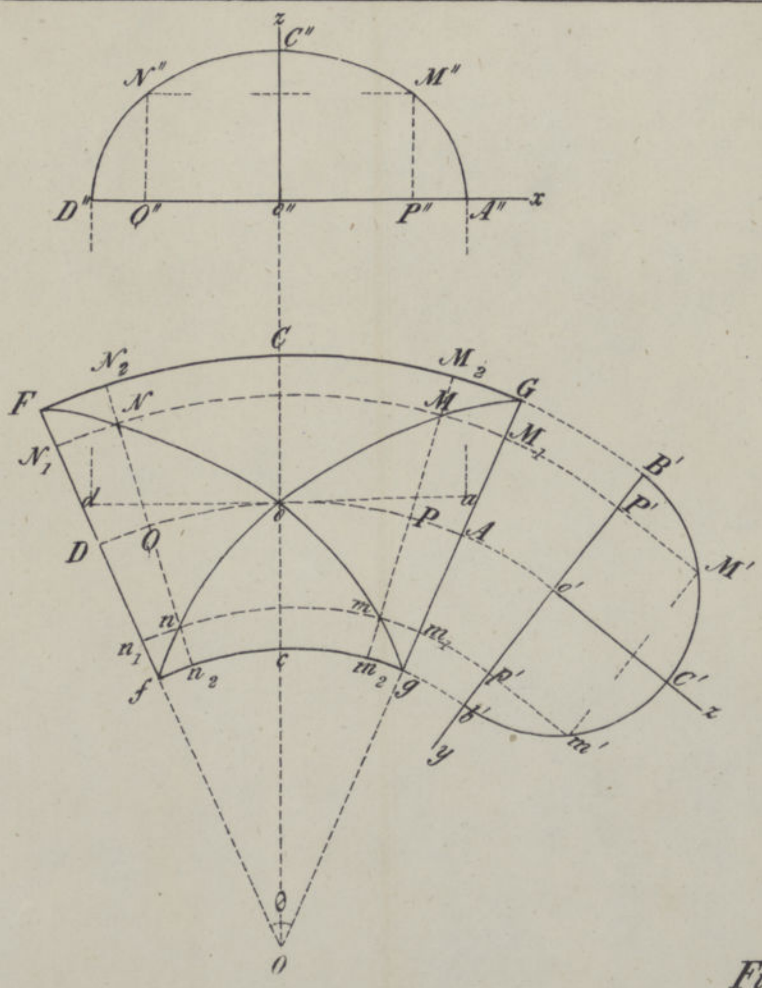
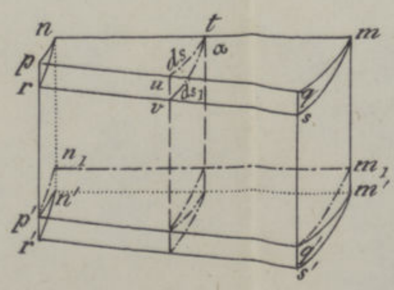


Fig. 12.bis



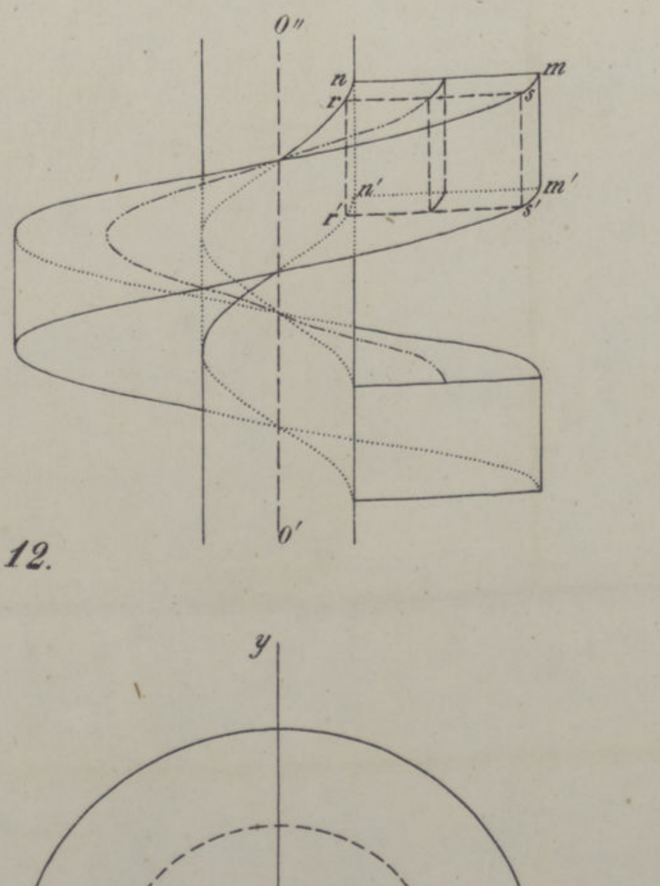
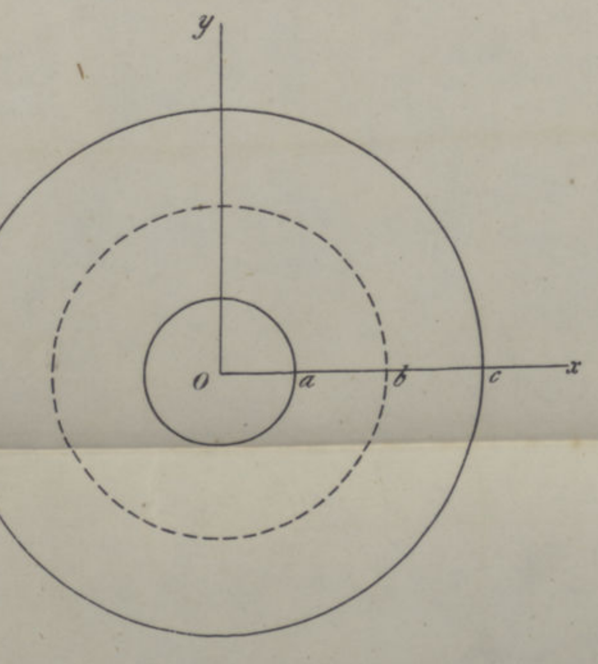


Fig. 12.



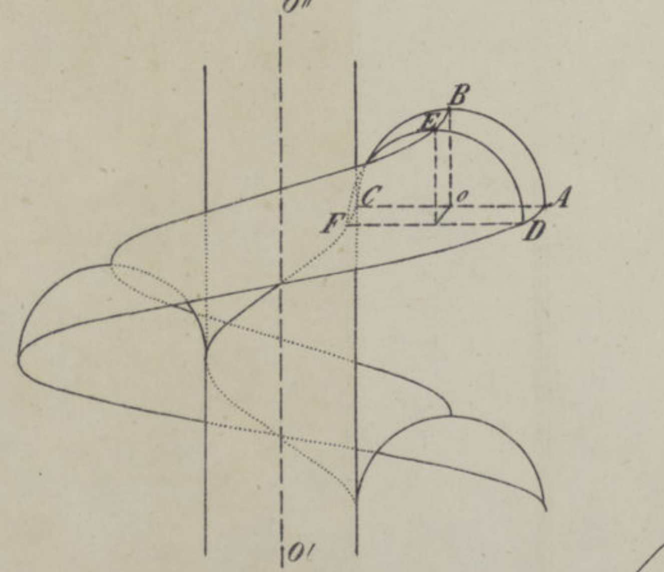


Fig. 13.

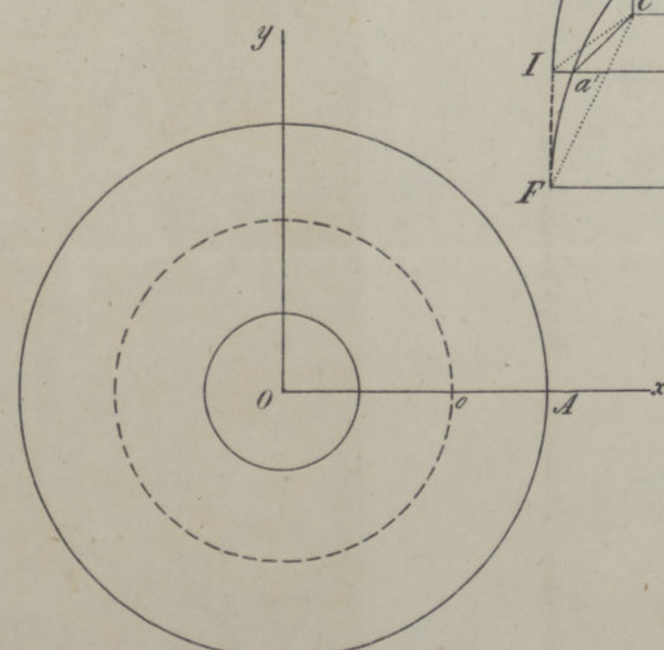
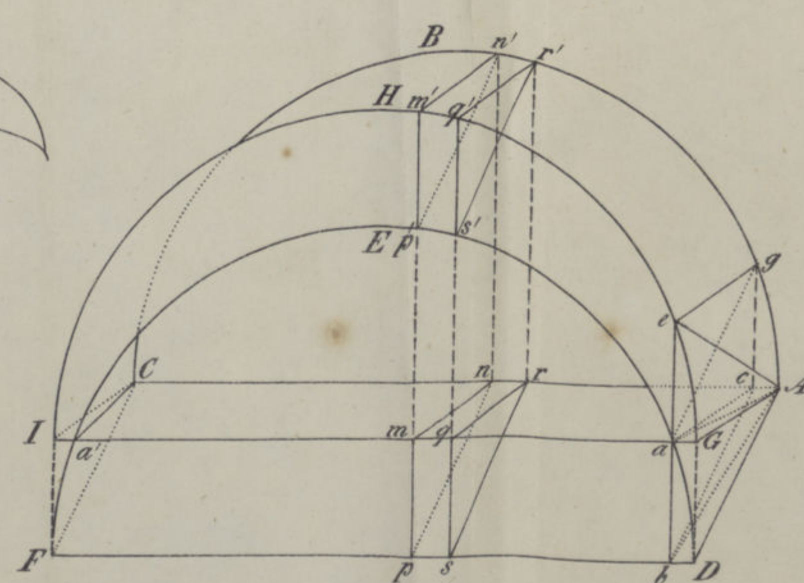


Fig. 13.^{bis}



RÓMULO
CENTRO CIÊNCIA VIVA
UNIVERSIDADE COIMBRA
132970259X